

Posudek oponenta na bakalářskou práci Jakuba Hofmana

Název práce: *Důkazy*

Cíl bakalářské práce snad bude nejlépe patrný, budeme-li citovat samotného autora:

„... rozhodl [jsem se] napsat tuto práci jako cvičebnici důkazových technik, která obsahuje věty z různých oblastí matematiky různého charakteru, je pro žáka střední školy přiměřená svou úrovní a obsahuje věty i nad rámec středoškolského učiva...“

Tato relativně obsáhlá bakalářská práce je rozdělena do čtyř kapitol: 1. *Základní poznatky* (obecný úvod o podstatě důkazu a logice); 2. *Důkazové metody* (popis a ilustrace několika základních metod); 3. *Cvičné úlohy* (soubor jednoduchých tvrzení, která má žák různými technikami dokázat sám); 4. *Řešení úloh* ze třetí kapitoly.

Práce je celkově strukturována logicky, je psána dobrou češtinou a má vesměs solidní štábní kulturu (práce byla vysázena v \TeX U). Seznam použité literatury jmenuje 14 různých pramenů, z nichž autor podle svého uvážení čerpal inspiraci i konkrétní příklady; nebyl opomenut ani seznam použitých symbolů a seznam tabulek. Tato více než padesátistránková práce neobsahuje žádné obrázky; náplň probraných matematických vět spadá až na drobné výjimky do aritmetiky. Po čistě formální stránce má práce minimum nedostatků. Dále jsem přesvědčen, že byla odvedena spousta práce při hledání a výběru vhodných úloh.

Za hlavní přednost práce však považuji její (ambiciózní) téma a způsob, jakým se Jakub Hofman k tomuto tématu sám dopracoval. Jak autor sám píše v úvodu, motivací mu byly zkušenosti mnohých studentů VŠ s nepříjemným skokovým přechodem ze středoškolského na vysokoškolský způsob výkladu matematiky; tento skok je patrně charakterizován zejména změnou přístupu k důkazům. Autor spekuluje, že se jim na středních školách často nevěnuje patřičná pozornost. Považuji za skvělé, že autor měl (a doufám, že i v budoucnu bude mít) pro psaní takového textu silnou osobní motivaci.

Jmenované kladné stránky jsou patrné i při zběžném ohledání, a práce proto rychle zaujme. Výše uvedené ambiciózní cíle mají veliký potenciál a ten se pochopitelně podařilo naplnit pouze částečně; to by ovšem u bakalářské práce nebyl problém. Bohužel však musím konstatovat, že první pozitivní dojem je rychle pokažen množstvím obsahových nedostatků, nepřesných až chybných vyjádření a nevyužitých příležitostí. Především je potřeba říci, že obsah práce je po matematické stránce velmi jednoduchý až triviální, a proto bych práci mohl považovat za úspěšnou, pokud by byla zdařilá po stránce didaktické, a to podle mého názoru z řady důvodů není splněno. Mám-li své stanovisko vyjádřit stručně, jsem toho názoru, že práce je pouze slibným začátkem, který by v budoucnu mohl inspirovat vznik ucelenějšího a kvalitnějšího učebního textu.

Konkrétnější připomínky: V následujícím textu uvádím připomínky různých typů.

Vzhledem k náročnosti takového úkolu se nebudu snažit je roztřídit do kategorií a uvedu je v tom pořadí, v jakém mě napadly při lineárním čtení celého textu. V případě autorova zájmu jsem ochoten své námitky konzultovat podrobněji (případně si nechat vysvětlit omyly, jichž jsem se snad dopustil).

V obecné rovině práci vytýkám především její neucelenost. Autor čerpal z řady různých zdrojů – což je dobře – na textu by to však nemělo být jasně patrné. Jeden příklad za řadu dalších je následující: Definice 1 (str. 12) zavádí pojem *sudého čísla*; na téže stránce je také Definice 2, která zavádí pojem *násobku přirozeného čísla m* . Tyto dvě definice jsou převzaté ze dvou různých zdrojů a bohužel by to bylo poznat, i kdyby je autor (vcelku zbytečně) neopatřil citacemi: Z takto formulovaných definic totiž plyne, že existují sudá čísla, která nejsou násobky dvou (třeba -2 nebo i).

Věty uvedené jako příklady na jednotlivé důkazové metody na sebe někdy navazují, obvykle však ne; byla promarněna řada přirozených (a dle mého úsudku poučných) příležitostí k takovému propojení. Autor sice v abstraktu varuje, že budování ucelené teorie není cílem práce, nicméně i tak si myslím, že by takové budování bylo možné alespoň *ilustrovat* – a v mnoha případech by to šlo za cenu jen drobných změn v už existujícím textu. Kromě toho v úvodu se (v jistém rozporu s abstraktem) píše, že „matematická teorie je prezentována stejně jako na vysoké škole, tedy formou [...] definice-věta-důkaz“. Při výkladu na vysoké škole na sebe ovšem jednotlivá tvrzení navazují.

V textu je důsledně dodržován model, podle kterého matematická „věta“ je to, co dokazujeme, zatímco „lemma“ je převzato odjinud. Nejméně v jednom případě je však takové lemma ve skutečnosti už dříve námi dokázanou větou, nebo jejím triviálním důsledkem či modifikací. Místo strohé formulace takového lemmatu jako daného faktu se autor mohl prostě odkázat na už v textu dokázanou větu. V jiných případech by lemma samotné mohlo posloužit jako zajímavá ilustrace důkazu a důkaz následující věty by pak krásně ukázal, jak se matematika postupně rozrůstá pomocí aplikací už dokázaných faktů. Místo toho text působí jako soubor izolovaných vět s důkazy využívajícími lemmata, z nichž není dokázáno ani jedno. Místo propojeného stromu rostoucího od jednoduššího ke složitějšímu je budován obraz jednotlivých keříčků, které nejsou zakořeněné a rostou daleko od sebe.

Samotným důkazům lze vytknout skokové změny v požadavcích na zdatnost a intuitivní porozumění čtenáře, což je podle mého názoru opět dáno tím, že autor čerpal z různých zdrojů a převzaté důkazy nepřizpůsobil jejich účelu a umístění ve svém textu. Výsledek je, že v některých důkazech jsou podrobně vysvětlovány i zcela triviální věci, zatímco v jiných jsou podstatně větší myšlenkové skoky ponechány bez komentáře. Mnohé důkazy taky obsahují drobné chyby či aspoň kostrbatě zformulované argumenty. Smutným příkladem je Věta 13, ve které se bez definice používá pojem spojitosti funkce. Věta platí i bez něj a nešikovná manipulace s nedefinovaným pojmem navíc zatemňuje triviální myšlenku důkazu. Místo spojitosti stačí předpokládat, že funkce je definovaná na intervalu tvaru $(-a, a)$.

Dalším obecným nedostatkem je nepřesné a stylisticky neucelené vyjadřování. Například základní pojmy logiky jsou někdy vysvětleny vcelku přesně (např. disjunkce), jindy zase pouze naznačené bez skutečného vysvětlení (např. implikace – její význam si čtenář musí odvodit z vlastní intuice nebo z tabulky pravdivostních hodnot). Úvodní odstavce v první kapitole obsahují nesmyslné nebo nejasné formulace (případně definice kruhem); třeba: „definice je obecně platná“; „věta je tvrzení“ (bez definice tvrzení; před popis pojmu věty však šlo zařadit pojem výroku a pak by dávalo smysl napsat, že věta je výrok); „axiom je tvrzení“; „základní pojmy jsou objekty“; „aby pravdivostní hodnota [...] byla pravdivá...“; atd.

Některé formulace sice dávají smysl, ale zase přímo vybízejí k polemice. Například na str. 3 ve třetím odstavci úvodu autor hovoří o tom, že středoškolské učebnice vytváří dojem, že důkazy tvoří pouze malou část matematiky, a píše: „Naopak na druhé straně spektra existují knihy, které se důkazům věnují velmi dopodrobna, pro běžného čtenáře jsou ovšem příliš nestravitelné, zbytečně obsáhlé a věnují se formálním důkazům v hilbertovském kalkulu.“ V životě jsem už listoval značným počtem odborných knih z řady různých oborů matematiky a ještě jsem neviděl žádnou, která by se věnovala formálním důkazům v hilbertovském kalkulu. Rozhodně nesouhlasím s naznačovaným tvrzením, že je spektrum matematických knih takto polarizované; kromě opravdu náročných knih, referenčních příruček a učebnic pro profesionály existuje také spousta jemných úvodů do hlubších matematických teorií. Formální důkazy jsou ojedinělá věc vyhrazená specialistům v oboru logiky.

V úvodní Sekci 1.2 o logice bylo zvoleno podivné pořadí vysvětlovaných pojmů: Po negaci (unární logické spojce patřící přirozeně do výrokového kalkulu) následuje několik příkladů negací složených výroků (pomocí ostatních, zatím neuvedených, logických spojek), poté autor píše o kvantifikátorech (tedy symbolech spadajících do predikátového kalkulu) a až poté se vrátí k výčtu logických spojek.

Obecná pravidla pro psaní důkazů (Sekce 2.1), kromě toho, že působí jako neuspořádaný náhodný výběr některých (ne nutně nejdůležitějších) pravidel, také přímo vybízí k polemice – třeba v druhém odstavci souhlasím pouze s jednou z pěti vět. S následujícími tvrzeními nejspíše mnoho odborníků nebude souhlasit: „Aby se dal důkaz snadno číst, musí být psán celými větami, nikoliv pouze zkratkovitě nebo v bodech. Logické spojky a kvantifikátory píšeme slovně, nikoliv symbolem...“ Řídit se těmito pravidly, která autor uvádí slovem „musí“, by znamenalo významné omezení a v žádném případě by to nepředstavovalo přínos srozumitelnosti. Také si nejsem jist, jestli běžný středoškolák porozumí větě: „Z hlediska sémantického by důkaz měl být vhodně strukturován a dodržovat syntaktická pravidla.“ Sám jsem měl problémy si domyslet, co tím chtěl autor říci, a to použitá slova znám (mimoto mají slova *syntaxe* a *sémantika* v základech matematiky zafixovaný konkrétní význam, který má málo společného s významem, v němž je zde autor tak odvážně používá).

I v dalším oddílu o Logických pravidlech je mnoho vágních formulací, které zabíhají do zbytečných podrobností, ale za to nepřesně a působí dojmem, že si autor příslušnou část logiky (o které píše) pořádně sám nenastudoval, a tedy vlastně neví, v jakém pořadí dává smysl jednotlivé pojmy uvádět.

Zvláštní (a každopádně redundantní) je i autorovo rozhodnutí uvádět odvozovací pravidla *modus tollens* a *modus tollendo ponens*. Můj osobní názor je, že i pravidlo *modus ponens* by mohlo zůstat beze zmínky, neboť je intuitivně zcela jasné a v okamžiku jeho explicitní formulace nastane u čtenáře začátečníka nejistota, kde vlastně co začíná (pro odstranění tohoto zmatení by bylo nutné začít vysvětlovat výrokový a predikátový počet a budování formální teorie z primitivních pojmů a axiomů). Ani na vysoké škole se nedělají skutečné formální důkazy - dokonce ani v kurzu logiky (tam možná jeden, dva formální důkazy k vidění jsou, ale jen stěží více). Proto jsem přesvědčen, že by bylo vhodné takovéto podrobnosti zamlčet, zvláště když autor nemá dostatečný přehled, aby je vhodným způsobem zasadil do jasného kontextu.

V pozdější fázi textu je mi nejasné autorovo vysvětlení principu důkazu sporem. U popisu důkazu indukcí by stálo za zmínku, že korektnost metody je fundamentální vlastností přirozených čísel. A opět musím upozornit na nekonzistentní úroveň výkladu: U důkazu sporem autor poněkud neobratně manipuluje odvozovacími pravidly, aby zdůvodnil korektnost metody; u důkazu indukcí pouze konstatuje, že to funguje: Umíme-li něco dokázat pro libovolně velké přirozené číslo, můžeme to tvrdit pro všechna přirozená čísla. Toto je také logický princip (univerzální zobecnění), ale je (na rozdíl od *modus tollens*) ponechán beze zmínky.

Konečně mám také důležitou připomínku k citacím: Není potřeba – a dokonce je to nevhodné – opatřovat každou drobnou definici (například v celé Kapitole 1) odkazem na příslušný zdroj. Drtivá většina pojmů je zcela základních a citace nejsou potřeba. Pokud ovšem autor cítí, že je vhodné čtenáři nabídnout další zdroje, je možné na začátku či na konci odstavce či oddílu uvést odkaz na jeden nebo dva snadno dostupné relevantní prameny. Líbí se mi řešení v první sekci Kapitoly 2. Zcela jistě není nutno opatřovat jakoukoliv citací definici sudého čísla nebo nějakého podobně triviálního pojmu; to samé platí pro libovolnou větu (třeba u iracionality $\sqrt{2}$ ta citace působí spíše jako vtip). Naopak třeba Lemma 3, které je uvedeno bez důkazu, by citací opatřeno být mělo (nebo důkazem). Stejně tak je diskutabilní, zda třeba Základní věta aritmetiky, známá po tisíce let, potřebuje odkaz na náhodnou jednu z tisíce knih, v nichž je zmíněna.

Závěr: K textu mám celou řadu dalších velmi konkrétních návrhů (další důkazy, návrhy na věty, změny textu apod.), nemá ale smysl zde pokračovat v jejich vypisování. Pokud bude mít autor v úmyslu v práci na tomto textu dále pokračovat, bylo by ale vhodné, abych mu tyto připomínky sdělil. Celkově na mě práce působí dojmem nenaplněného potenciálu, který mohl vzniknout v důsledku opravdu odvážné (a chvályhodné) volby tématu. Je také jasně patrné, že autor strávil tvorbou této práce značné množství času. Musím nicméně konstatovat, že pro naplnění cílů práce by bylo potřeba více promyslet propojení jednotlivých částí textu, jejich stylistické (ve smyslu matematickém, nikoliv slohovém) sjednocení a konečně i lépe pochopit a podat jejich samotný obsah. Nemám pochybností o tom, že práce splňuje požadavky na bakalářskou práci, dle mého názoru je však vyloučeno hodnotit ji známkou výborně.