MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aneta Švejdová

Číslo π a řetězové zlomky

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – Německý jazyk a litertaura

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Na tomto místě chci poděkovat především svému vedoucímu práce, který mi poskytl cenné rady a připomínky při psaní této práce. Děkuji mu za jeho čas i ochotu věnovat se všem problémům, které při psaní této práce vznikaly. Dále děkuji své rodině za všestrannou podporu a mnohým svým blízkým za cenné jazykové korektury.

Název práce: Číslo π a řetězové zlomky

Autor: Aneta Švejdová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá jednou z nejznámějších matematických konstant, číslem π. Formou srozumitelnou žákům vyšších ročníků středních škol se zájmem o matematiku nejprve představuje nejznámější způsoby, kterými se v historii lidé snažili toto číslo aproximovat. Konkrétně se zabývá metodou Egypťanů, obyvatel starověké Mezopotámie a metodou Archimédovou. Dále představuje vyjádření π ve formě nekonečného součinu podle F. Vièta a J. Wallise. V druhé části se práce soustředí na vyjádření čísla π řetězovými zlomky, které nejprve obecně definuje a zavede základní vztahy, které se jich týkají. Poté představuje vyjádření π formou řetězového zlomku podle J. H. Lamberta, L. Eulera a W. Brounckera. Na závěr je uveden důkaz iracionality čísla π pomocí řetězových zlomků a jednoduchý důkaz jeho transcendence. Práce si klade za cíl rozšířit tvrzení uváděná v populárních knihách o π o jejich matematická zdůvodnění a uvést základní myšlenky, které k nim vedou.

Klíčová slova: číslo π, řetězové zlomky, iracionalita, transcendence, Archimédés

Title: The number π and continued fractions

Author: Aneta Švejdová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: This bachelor thesis deals with one of the well-known mathematical constants, the number π. The form is understandable to higher-year students of secondary schools interested in mathematics. At first, it presents the best known ways people in history tried to approximate the number π. It includes the methods of Egyptians, the people of ancient Mesopotamia and the method of Archimedes. It also presents expressing π in the form of infinite product according to F. Viète and J. Wallis. The second part of the thesis focuses on expressing the number π by continued fractions, which are at first generally defined. We introduce essential relations among them. Then the thesis presents expressing the number π in the form of continued fractions according to J. H. Lambert, L. Euler and W. Brouncker. Finally proofs of the irrationality of π using continued fractions are presented together with a simple proof of its transcendence. The aim of the thesis is to extend information about π stated in popular books, to explain and clarify basic ideas leading to these claims.

Keywords: the number π, continued fractions, iracionality, transcendence, Archimedes

Obsah

Úvod

Existuje řada populárních knih, které se věnují asi neznámější matematické konstantě, číslu π. Tyto knihy se často zabývají historií tohoto čísla, představují ale i řadu jeho aproximací, které mohou běžného čtenáře nematematika zaujmout svou jednoduchostí či estetičností. Hloubavější čtenáři ovšem v těchto knihách často nenacházejí zdůvodnění tvrzení, která autoři uvádí. Mnohdy zde bývá uvedeno, kdo kdy jakou aproximaci objevil, avšak bez dalšího vysvětlení, jak byla tato aproximace odvozena a jaké myšlenkové úvahy jí předcházely. Taková zkratkovitost nejenže čtenáře odvádí od podstaty matematiky, jíž je zejména dedukce a logická cesta k řešení, může ho ale i od matematiky odradit, neboť pro nedostatek zdůvodnění se mu matematické skutečnosti jeví jako nepochopitelné.

Cílem této práce je navázat na populární literaturu, v níž je o čísle π zmiňováno, zejména pak na publikaci *Historie čísla* π [Beck] a populární knihu *Podivuhodné křivky, počítání králíků a jiná matematická dobrodružství* [Ball]. Záměrem této práce je doplnit informace z těchto publikací o jejich matematické odůvodnění a představit myšlenky za uváděnými tvrzeními tak, aby byla tato tvrzení z větší části srozumitelná pro středoškoláky se zájmem o matematiku a další zájemce.

V první kapitole se dostává čtenáři definice čísla π a informace o tom, jak získalo své označení. V druhé kapitole se práce zaměřuje na historii čísla π a představuje nejznámější způsoby, jakými staré civilizace číslo π aproximovaly včetně velmi známého postupu Archimédova. Ve třetí kapitole se zabýváme zápisem čísla π ve formě nekonečných součinů, konkrétně rozvojem Viètovým a Wallisovým.

Čtvrtá kapitola se soustředí na aproximaci čísla π za pomoci řetězových zlomků. Řetězové zlomky jsou téma, které již na středních školách zcela vypadlo z probíraného učiva. Ani na vysokých školách se mu obvykle nevěnuje přílišná pozornost, přestože pomocí řetězových zlomků můžeme velmi dobře aproximovat iracionální čísla. Proto tato práce nabízí čtenáři nejprve stručnou definici tohoto pojmu a pojmů s ním spojených včetně nejdůležitějších vztahů, které se obecně řetězových zlomků týkají. Dále čtenáře seznamuje s několika způsoby, jak můžeme za jejich pomoci aproximovat číslo π, například známé vyjádření Lambertovo, Eulerovo a Brounckerovo. Zároveň práce představuje přehledné tabulky, z nichž je patrné, jak dobře posloupnost prvních několika konvergentů daného řetězového zlomku aproximuje číslo π. Neověřuje se zde konvergence, neboť práce je určena čtenářům laikům, ale ukazuje se, že prvních několik konvergentů určitých řetězových zlomků může číslo π aproximovat s poměrně dobrou přesností. Tyto tabulky jsme získali z programů v jazyce Python 3, který je pro takové výpočty praktický a je navíc volně ke stažení na internetu. [1]

V poslední kapitole je demonstrováno, jak řetězové zlomky slouží k důkazu zásadní vlastnosti čísla π, jeho iracionality. Na závěr je uveden jednoduchý důkaz transcendence π.

[1] Viz `https://www.python.org/`

1 Číslo π

Kruh jakožto geometrický útvar fascinoval již mnoho staletí před naším letopočtem. Zatímco obvody a obsahy mnohoúhelníků se lidem dařilo určovat poměrně spolehlivě, obvod a obsah kruhu dokázali určit pouze přibližně. Bylo ovšem zjištěno, že obvod i obsah kruhu můžeme vypočítat pomocí nějaké konstanty. Poté tato konstanta dostala svůj název a s postupem času lidé dokázali určit její přesnou hodnotu na čím dál více desetinných míst. V této kapitole vycházíme zejména z Beckmannovy publikace [Beck].

Zmíněnou konstantu nazýváme číslo π a definujeme jej jako poměr obvodu o a průměru d libovolného kruhu v rovině, tedy

$$\pi = \frac{o}{d}.$$

Tento poměr nezávisí na průměru kruhu. Je tomu tak proto, že všechny kruhy jsou vzájemně podobné. Poměry příslušných délek proto zůstávají zachovány. Číslo π je tedy konstanta.
Označení π poprvé použil na počátku 18. století velšský matematik William Jones (1675 – 1749), všeobecně přijato bylo však až o něco později díky Leonhardu Eulerovi (1707 – 1783), který jej v roce 1737 použil ve své knize *Variae observationes circa series infinitas*. Toto písmeno bylo zvoleno proto, že se jednalo o první písmeno řeckého slova περίμετρος (perimetros), které označuje právě onu souvislost obvodu a průměru kruhu. Číslo π je také známo jako Ludolfovo číslo. Toto označení nese po holandském profesoru matematiky Ludolphu van Ceulenovi (1539–1610). Ten vypočetl hodnotu čísla π na 35 správných desetinných míst a svým snažením o tento rekord se zapsal do historie tak výrazně, že je číslo dodnes nazýváno jeho jménem.

Dnes již díky počítačům dokážeme určit hodnotu π na více než bilión správných desetinných míst. Poslední velký posun k těmto řádům učinil v letech 2010 až 2013 Japonec Shigeru Kondo. [2]
K běžným výpočtům nám však stačí 17 desetinných míst. Uveďme si tedy pro zajímavost prvních sto:

$$\begin{aligned}\pi = 3,&1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510\\ &5820974944\ 5923078164\ 0628620899\ 8628034825\ 3421170679\end{aligned}$$

2 Počátky čísla π

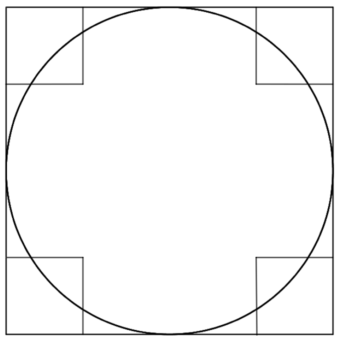
Znát alespoň přibližnou hodnotu čísla π bylo pro rozvoj architektury a techniky nezbytné, neboť jak již bylo řečeno, potřebujeme jej k výpočtu obvodu a obsahu kruhu. Proto je existence čísla π známa už od druhého tisíciletí před naším letopočtem díky Egypťanům

[2] Informace o nejnovějších výpočtech nalezne čtenář zde: `http://www.numberworld.org/`

a obyvatelům Mezopotámie, nejvyspělejším civilizacím té doby. Zde vycházíme z Beckmannovy publikace [Beck] a ukážeme si, jakým způsobem tyto národy hodnotu π hledaly. Oba národy si při výpočtu vypomáhaly jiným rovinným útvarem, jehož obvodem resp. obsahem se snažily aproximovat obvod, resp. obsah kruhu. Mezopotámci určili hodnotu:

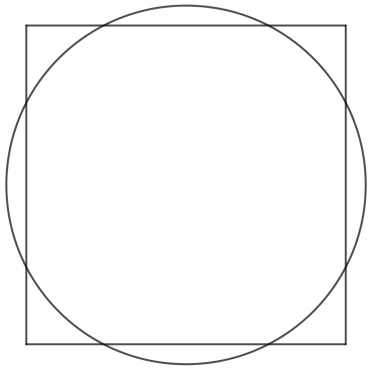
$$\pi \approx 3\frac{1}{8} = 3,125.$$

Nejprve určili obvod šestiúhelníku vepsaného do jednotkového kruhu. Věděli, že takový šestiúhelník můžeme rozdělit na šest rovnostranných trojúhelníků. Z toho je zřejmé, že obvod takového šestiúhelníku je roven šestinásobku poloměru kruhu, do kterého je vepsán. Mezopotámci dokázali určit poměr obvodu pravidelného šestiúhelníku ku obvodu kruhu, do kterého je vypsán, tedy hodnotu $\frac{6r}{o}$, kde r je poloměr kruhu. Tato hodnota byla nalezena na jedné z dochovaných tabulek. Protože hodnotu π lze zapsat i jako $\pi = \frac{o}{2r}$, nebylo složité přibližnou hodnotu π nalézt. Bohužel, tento vztah je na tabulce uveden bez dalšího vysvětlení, jak byl odvozen. K této aproximaci však lze dojít i jinak. Mezopotámskou hodnotu můžeme získat i tím, aproximujeme-li obsah kruhu obsahem jemu opsaného čtverce, jestliže vystřihneme z jeho vrcholů čtverce tak, že součet obsahů vystřihnutých čtverců odpovídá sedmi osminám, viz obr. 1. Obsah takového útvaru opticky aproximuje obsah kruhu a je přesný na jedno desetinné místo.



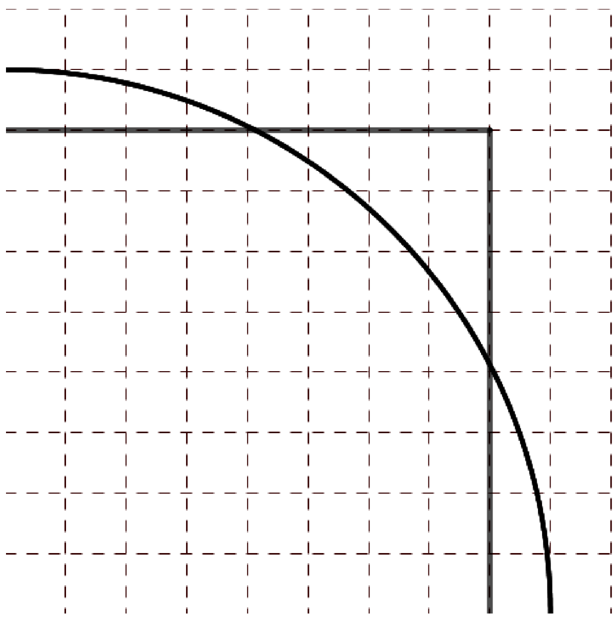
Obr. 1

Egypťané aproximovali obsah kruhu o průměru 9 jednotek obsahem čtverce se stranou 8 jednotek, viz obr. 2.



Obr. 2

Na následujícím obrázku vidíme první kvadrant kruhu a příslušnou část čtverce, jehož obsahem se snažíme obsah kruhu aproximovat. Pouhým okem díky čtverečkové síti můžeme vidět, že obsah kruhu v prvním kvadrantu, tedy čtvrtina celkového obsahu kruhu, skutečně přibližně odpovídá obsahu čtvrtiny daného čtverce, viz obr. 3.



Obr. 3

Obsah takového čtverce je roven 8^2. Budeme jako Egypťané předpokládat, že tento obsah přibližně odpovídá obsahu výše zmíněného kruhu, a dostaneme ze vzorce pro obsah kruhu vztah:

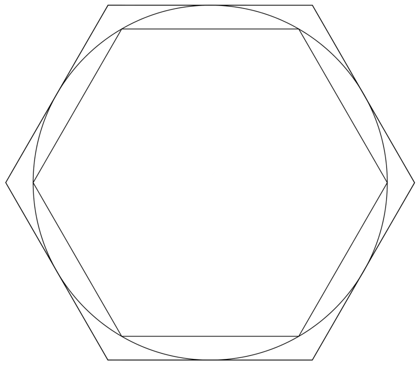
$$8^2 \approx \pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 .$$

Egypťany nalezená hodnota π je tedy: $\pi \approx \frac{256}{81} = 3,16049\ldots$ I tato aproximace tedy odpovídá pouze na jedno desetinné místo.

Hledání přesnějších aproximací hodnoty π pomocí srovnávání obvodů a obsahů kruhu s obvody a obsahy jiných rovinných útvarů trvalo v podstatě až do konce středověku. Matematici pouze navazovali na myšlenky starověkého myslitele Archiméda (3. století př. n. l.) tím, že stále zvětšovali počet stran opsaného a vepsaného pravidelného mnohoúhelníku, a tím výsledek zpřesňovali. Nyní představíme tuto metodu vycházeje zejména z [Hal]. Do daného kruhu je jeden pravidelný mnohoúhelník vepsán, druhý je kruhu opsán. Nechť $L_v(n)$ je obvod zmíněného vepsaného n-úhelníku a $L_o(n)$ obvod zmíněného opsaného n-úhelníku. L_k je potom obvod tohoto kruhu. Pak platí, že

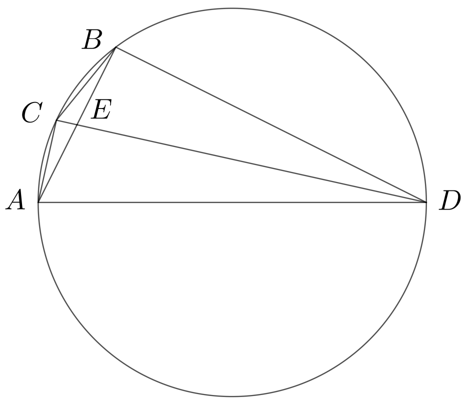
$$L_v(n) \leq L_k \leq L_o(n)$$

pro každé $n \geq 3$, viz obr. 4.



Obr. 4

Nyní si ukážeme, jak obecně najít obvody těchto n-úhelníků za použití algebraické symboliky, kterou Archimédés k dispozici neměl. Odvodíme rekurentní vztah pro délku strany pravidelného n-úhelníku opsaného kruhu i pravidelného n-úhelníku do něj vepsaného. Začneme u pravidelného n-úhelníku vepsaného do jednotkového kruhu, viz též obr. 5.



Obr. 5

Nechť AB je strana pravidelného n-úhelníku a AC a BC jsou strany pravidelného $2n$-úhelníku, označme $|AB| = s_n$ a $|AC| = |BC| = s_{2n}$. Využíváme podobnosti trojúhelníků ADC a EAC (věta uu). Získáváme vztah $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|EA|}{|CA|}$. Další podobné trojúhelníky jsou $\triangle CDB$ a $\triangle CBE$ (věta uu).[3] Z toho získáváme druhý vztah $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|EB|}{|CB|}$. Protože $|AC| = |BC|$, platí rovnost $\frac{|EB|}{|CB|} = \frac{|EB|}{|CA|}$. Součtem dvou výše získaných vztahů dostáváme

$$\frac{|AD| + |BD|}{|CD|} = \frac{|EA| + |EB|}{|CA|} = \frac{|AB|}{|CA|}.$$

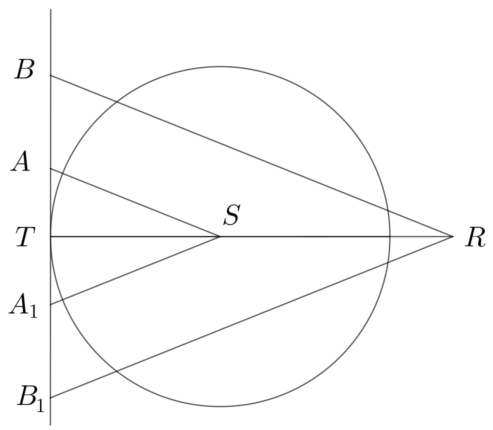
Délky úsečky CD a BD můžeme vypočítat použitím Pýthagorovy věty pomocí s_n a s_{2n}. Výše uvedený vztah lze tedy zapsat jako

$$\frac{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}{\sqrt{4 - s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}.$$

Odtud vyjádříme rekurentní vzorec pro výpočet délky strany $2n$-úhelníku vepsaného do kruhu ve vztahu k délce strany n-úhelníku vepsanému stejnému kruhu:

$$s_{2n} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}}.$$

Dále odvodíme podobný vztah pro případ n-úhelníku opsaného kruhu, viz obr. 6.



Obr. 6

Úsečka BT je polovinou strany opsaného pravidelného n-úhelníku a úsečka AT je polovinou strany opsaného pravidelného $2n$-úhelníku. Bod S je středem kruhu. Z toho plyne, že $|\sphericalangle TSA| = |\sphericalangle ASB|$. Pak nechť bod R je takový, že úsečky BR a AS jsou rovnoběžné. Jelikož $\sphericalangle ASB$ a $\sphericalangle SBR$ jsou úhly střídavé, platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle SBR|$. Dále $\sphericalangle SRB$ a $\sphericalangle TSA$

[3] Úhly $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle CDB$, $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle CAB$ jsou obvodové úhly příslušné stejně dlouhému oblouku, mají tedy stejnou velikost.

jsou úhly souhlasné, z čehož plyne $|\sphericalangle SRB| = |\sphericalangle TSA| = |\sphericalangle ASB|$. Pak $\triangle SBR$ je rovnoramenný trojúhelník, z čehož plyne, že $|SB| = |SR|$. Využíváme nyní podobnosti trojúhelníků ATS a BTR (věta *uu*). Získáváme vztah

$$\frac{|AT|}{|TS|} = \frac{|BT|}{|TR|} = \frac{|BT|}{|TS| + |SB|}.$$

Označíme $|BT| = t_n$ a $|AT| = t_{2n}$. Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že se jedná o jednotkový kruh, tedy $|TS| = 1$. Vyjádříme délky úseček z výše uvedené rovnosti pomocí t_n a t_{2n} a získáváme rovnost

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1 + \sqrt{1 + t_n^2}}.$$

Protože spočítat délku strany opsaného a vepsaného šestiúhelníku jednotkovému kruhu je triviální, [4] můžeme nyní pomocí rekurentních vyjádření snadno získat velikosti stran 12-úhelníku, 24-úhelníku a dalších n-úhelníků, jejichž počet stran vznikne zdvojnásobením počtu stran toho předchozího. U mnohoúhelníků o 96 stranách, což je číslo, ke kterému se Archimédes dopracoval, dostáváme nerovnost

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

neboli

$$3,14084\cdots < \pi < 3,142858\cdots.$$

Je třeba zdůraznit, že se zde jedná o hodnoty, které už Archimédés zaokrouhlil.

Přidáváním dalších stran mnohoúhelníků dokázali matematici postupně určit desítky až stovky dalších správných desetinných míst čísla π. V tabulce vidíme konkrétní hodnoty aproximací poloviny obvodu kruhu, pokud ho aproximujeme pomocí poloviny obvodu opsaného a vepsaného n-úhelníku o počtu stran udaným v prvním sloupci. V posledním sloupci vidíme, že rozdíl obvodu opsaného a vepsaného n-úhelníku se stále zmenšuje a už u 192-úhelníku získáváme tak malý rozdíl, že polovina obvodu takového opsaného i vepsaného n-úhelníku se shoduje s hodnotou π na tři desetinná místa. Tyto hodnoty jsme získali z programu v jazyce Python 3, který čtenář nalezne v příloze 1.

[4] Obvod vepsaného šestiúhelníku jednotkovému kruhu je 6, neboť strana tohoto šestiúhelníku je rovna poloměru kruhu, a obvod opsaného šestiúhelníku jednotkovému kruhu je $4\sqrt{3} = 6,92820\cdots$, což vypočítáme pomocí Pýthagorovy věty

n	$\frac{1}{2}o_{veps}(n)$	$\frac{1}{2}o_{ops}(n)$	rozdíl
6	3	$3.4641016151377553\cdots$	$0.464101615137755\cdots$
12	$3.105828541230249\cdots$	$3.215390309173473\cdots$	$0.10956176794322392\cdots$
24	$3.1326286132812378\cdots$	$3.1596599420975013\cdots$	$0.027031328816263578\cdots$
48	$3.1393502030468667\cdots$	$3.1460862151314357\cdots$	$0.006736012084568976\cdots$
96	$3.1410319508905093\cdots$	$3.1427145996453696\cdots$	$0.0016826487548602387\cdots$
192	$3.1414524722854615\cdots$	$3.141873049979825\cdots$	$0.00042057769436354442\cdots$

3 π ve formě nekonečných součinů

3.1 Viètův rozvoj čísla π

V druhé polovině 16. století vyjádřil francouzský matematik François Viète (1540 – 1603) jako první číslo π ve formě nekonečného součinu.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Vycházíme zde z německé publikace *Zahlen* [Ebb] a uvedeme toto vyjádření včetně myšlenky jeho odvození.

Toto vyjádření je pozoruhodné tím, že postupným přidáváním jednotlivých činitelů součinu získáváme velmi dobrou aproximaci π, jak uvidíme v simulaci na konci kapitoly. K odvození této rovnosti využijeme známý vzorec

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \tag{$*$}$$

který je přímým důsledkem součtového vzorce pro funkci sinus. Volbou $\alpha = \frac{x}{2}$, kde $x \in \mathbb{R}$, dostáváme

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$$

Aplikací $(*)$ na $\sin \frac{x}{2}$ vznikne

$$\sin x = 2^2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}.$$

Pokud použijeme vztah $(*)$ n-krát, získáme rovnost

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n} \cdots \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}.$$

Pravou stranu vynásobíme $\frac{x}{x}$, $x \neq 0$, a dostáváme

$$\sin x = x \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cos \frac{x}{2^n} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}.$$

Protože je $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ a $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$, platí

$$\sin x = \lim_{n \to \infty} x \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \lim_{n \to \infty} (\cos \frac{x}{2^n} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2}) = x \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}.$$

Dostáváme tak vztah

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \cdots$$

Dosadíme-li $x = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \cdots$$

Jelikož je $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, opakovaným užitím vzorce $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{\sqrt{2+2\cos x}}{2}$ získáváme rovnost

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Sám Viète odvozoval tento vzorec geometricky ze vztahu mezi obsahem mnohoúhelníku s n stranami a obsahem mnohoúhelníku s $2n$ stranami. Navázal tím na tradici výpočtu π pomocí mnohoúhelníků, jeho výsledek byl ale ve tvaru nekonečného součinu a byl to první zápis tohoto typu. Podívejme se nyní na následující tabulku. První sloupec označuje počet prvních činitelů v nekonečném součinu, v druhém sloupci potom čteme hodnotu, kterou tímto součinem dostáváme. Oddělovačem $\rceil$ je potom naznačeno, do kterého desetinného místa odpovídá výsledek skutečné hodnotě π. Jak vidíme, již pro 15 prvních činitelů získáváme 9 desetinných míst, což je hodnota, která přesahuje hodnotu postačující pro běžné výpočty. Program v jazyce Python 3, který tuto tabulku vygeneroval, nalezne čtenář v příloze 2.

1	3,$\rceil$061467458920718
2	3,1$\rceil$21445152258052
3	3,1$\rceil$36548490545939
4	3,14$\rceil$03311569547525
5	3,141$\rceil$2772509327724
6	3,1415$\rceil$13801144301
7	3,1415$\rceil$729403670913
8	3,1415$\rceil$877252771596
9	3,14159$\rceil$14215111997

10	3,141592⌉3455701176
11	3,141592⌉5765848725
12	3,1415926⌉34338563
13	3,1415926⌉487769856
14	3,14159265⌉2386591
15	3,141592653⌉288993

Srovnejme nyní tuto tabulku s tabulkou z předchozí kapitoly, která nám ukazuje výpočet obvodu kruhu pomocí vepsaných a opsaných mnohoúhelníků. Při užití mnohoúhelníků, které jsme získali pětinásobným zdvojením počtu stran šestiúhelníku, aproximujeme π se správností na tři desetinná místa. Tuto hodnotu získáme ve Viètově vyjádření už pro součin prvních pěti činitelů. Abychom došli k tomuto výsledku, musíme v obou metodách odmocňovat, což je při ručních výpočtech poměrně náročné. Záhy však vzniklo vyjádření, kde se už žádná odmocnina nenachází.

3.2 Wallisův rozvoj čísla π

O přibližně půl století později spatřuje světlo světa nové vyjádření π, tentokrát takové, které obsahuje pouze racionální operace. Jeho autorem byl anglický matematik John Wallis (1616–1703). Toto vyjádření a jeho myšlenku uvedeme na základě Beckmannovy publikace [Beck]. Wallisův zápis ve tvaru součinu racionálních čísel má tvar

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6...}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7...}.$$

K tomuto výrazu můžeme dospět pomocí následujících integrálů, které jsme získali opakovanou aplikací metody per partes:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}.$$

Poměr těchto dvou integrálů pro $m \to \infty$ je roven jedné. To znamená, že i poměr pravých stran výše uvedených vyjádření pro $m \to \infty$ je roven jedné, tedy

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots} : \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

Po přerovnání získáváme kýžený Wallisův součin

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6...}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7...}.$$

V tomto součinu se sice na rozdíl od Viètova rozvoje vyskytuje násobení a dělení celých čísel, když se ale zaměříme na součin prvních několika činitelů, zjistíme, že nezískáváme zdaleka tak přesné hodnoty. Ukážeme si podobnou tabulku jako u Vièta. Program v jazyce Python 3, který ji vygeneroval, nalezne čtenář v příloze 3. Vidíme, že ani při součinu dvaceti činitelů nezískáváme správně ani první desetinné místo. To se nám povede až pro třicet činitelů, dvou správných desetinných míst pak dosahujeme až při součinu dvou set činitelů. Součin deseti tisíců činitelů nám dá stále pouze tři správná desetinná místa.

1	2,6666666666666665
2	3⌉,5555555555555554
3	2,8444444444444444
4	3⌉,4133333333333327
5	2,9257142857142853
6	3⌉,343673469387755
7	2,9721541950113375
8	3⌉,3023935500125976
9	3⌉,0021759545569067
10	3⌉,275101041334807
20	3⌉,2137849402931886
30	3,1⌉910574333896458
40	3,1⌉792124971865308
50	3,1⌉71944091742705
60	3,1⌉670294053287456
70	3,1⌉6348449090137
80	3,1⌉608067502044173
90	3,⌉1587126692772247
100	3,1⌉570301764551676
200	3,14⌉9378473168599
400	3,14⌉55025341203884
600	3,14⌉4203032507557
800	3,14⌉3551862655901
1000	3,14⌉31607055322712
2000	3,14⌉2377365093881
3000	3,14⌉2115947099954
4000	3,141⌉9851809361807
5000	3,141⌉906702935529
6000	3,141⌉8543766403437
7000	3,141⌉816996978336
8000	3,141⌉788960187993
9000	3,141⌉7671525842263
10000	3,141⌉7497057380523

Proto se ani toto vyjádření pro efektivní výpočet co nejpřesnější hodnoty π příliš nehodí. Můžeme ho ovšem považovat za jistý předstupeň mnohem efektivnější metody využívající řetězových zlomků.

4 Řetězové zlomky a číslo π

V populárních knihách obdivujeme rozvoje čísla π, které kromě toho, že pomocí nich můžeme číslo aproximovat, působí na čtenáře dobře i po vizuální stránce. Řada takových řetězových zlomků totiž vykazuje i jistou pravidelnost. V této kapitole se nejprve podíváme na to, co to řetězové zlomky jsou a jak je můžeme odvodit, vycházet budeme zejména z Chinčinovy publikace [Chin].

4.1 Řetězové zlomky

Teorie ani praktické využití řetězových zlomků dnes již není součástí učiva na středních školách ani na většině škol vysokých. Použití řetězových zlomků je však velmi vhodným nástrojem k aproximaci iracionálních čísel čísly racionálními. Číslo π můžeme vyjádřit pomocí řetězového zlomku hned několika způsoby. Nyní tedy definujeme obecně řetězový zlomek.

Definice 4.1. *Konečným řetězovým zlomkem* rozumíme výraz

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

kde $a_0 \in \mathbb{N}_0$ $a_i \in \mathbb{N}$ pro každé $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Stručně jej zapisujeme jako

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

Definice 4.2. *Nekonečným řetězovým zlomkem* rozumíme výraz

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

kde $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \mathbb{N}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Zapisujeme jej jako

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots].$$

Definice 4.3. Čísla a_i (kde $i = 0, 1, \cdots n; n \in \mathbb{N}$ nebo $i \in \mathbb{N}_0$) nazýváme *články řetězového zlomku.*

Číslo π patří mezi iracionální čísla, tedy čísla taková, jež nemůžeme vyjádřit pomocí podílu dvou celých čísel. Konečné řetězové zlomky můžeme upravit tak, že získáme podíl dvou celých čísel. To neplatí o řetězových zlomcích nekonečných, u kterých tato úprava není možná. Proto se nadále budeme zabývat pouze nekonečnými řetězovými zlomky, které kladná iracionální čísla vyjádřit dokáží.

Na to, jak známé iracionální číslo vyjádřit pomocí nekonečného řetězového zlomku, existuje algoritmus, který vychází přímo z tvaru řetězového zlomku. Jeho princip je takový, že od daného iracionálního čísla odečteme nejprve jeho celou část, která představuje článek a_0. Po odečtení nám zůstane číslo, které je menší než jedna a lze jej tedy zapsat ve tvaru $\frac{1}{x}$, kde x je větší než jedna a má tedy nenulovou celou část. V minulém kroku jsme získali článek a_0, iracionální číslo je tedy rovno $a_0 + \frac{1}{x}$. Hledáme hodnotu takového x. Najdeme-li ji, odečteme od ní její celou část, která je rovna článku a_1. Po odečtení opět získáme číslo, které je menší než jedna a lze jej zapsat jako $\frac{1}{y}$, kde y je větší než jedna. Dané iracionální číslo můžeme tedy zapsat jako

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{y}}.$$

Opět hledáme takové y a jeho celou část, která je rovna článku a_2. Tímto způsobem můžeme pokračovat do nekonečna a získávat další a další články řetězového zlomku, který je roven danému iracionálnímu číslu.

Algoritmus se tedy stručně skládá ze dvou stále se opakujících kroků, které si nyní shrneme.

1. Jestliže číslo $x > 1$, pak má nenulovou celou část. Tato celá část je článek řetězového zlomku.
2. Od čísla x jeho celou část odečteme, získáme číslo $\frac{1}{y}$, kde $y > 1$. Na číslo y aplikujeme krok jedna.

Nyní si ukážeme, jak může vypadat program v jazyce Python 3, který nám touto metodou získá prvních několik článků řetězového zlomku nějakého iracionálního čísla.

```
import math
N = 10
a = []

x = math.e
for k in range(1, N+1):
     a.append( int(x // 1) ) # do seznamu a přidáme celou část čísla x
     x = (1 / (x - (x//1) ) ) # převrácená hodnota zlomkové části
# // je operátor celočíselného dělení
# //1 je celočíselné dělení jedničkou - tím získáme celou část čísla

print(a)
```

Nyní definujeme další potřebné pojmy.

Poznámka 4.4. Řetězový zlomek nemusí mít v čitatelích vždy jen jedničky. Takové řetězové zlomky, které mají v čitatelích i jiná nenulová celá čísla než 1 nazýváme *obecné řetězové zlomky*. V případě nekončených řetězových zlomků mají tvar

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}},$$

kde b_i je nenulové celé číslo pro každé $i \in \mathbb{N}$ a $a_i \in \mathbb{N}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

Definice 4.5. Mějme nekonečný řetězový zlomek $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$ a zlomky $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \cdots$, kde

$$\frac{A_0}{B_0} = a_0$$

$$\frac{A_1}{B_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

$$\cdots$$

Zlomek $\frac{A_i}{B_i}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ se nazývá *i-tý konvergent* řetězového zlomku $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$.

Poznámka 4.6. Jednotlivé konvergenty mají po úpravě příslušného konečného řetězového zlomku na zlomek tvary:

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{a_0}{1}$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

$$\cdots$$

Přímý výpočet konvergentů vyšších řádů by byl neúměrně složitý. Proto uveďme větu, díky níž můžeme hodnotu libovolného konvergentu vypočítat rekurentně díky znalosti konvergentu předchozího. Větu formulujme pro obecné řetězové zlomky, se kterými budeme pracovat.

Věta 4.7. Mějme obecný řetězový zlomek

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}$$

kde $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \mathbb{N}$ a b_i je nenulové celé číslo pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak čitatele tří po sobě jdoucích konvergentů jsou pro $n > 0$ svázány rekurentním vztahem:

$$A_{n+1} = a_{n+1}A_n + b_{n+1}A_{n-1}.$$

Jmenovatele tří po sobě jdoucích konvergentů jsou pro $n > 0$ svázány rekurentním vztahem:

$$B_{n+1} = a_{n+1}B_n + b_{n+1}B_{n-1}.$$

Poznámka 4.8. Konvergenty $\frac{A_0}{B_0}$ a $\frac{A_1}{B_1}$ získáme přímým výpočtem.

Důkaz: Protože rekurentní vztah pro čitatele a jmenovatele jsou analogické, místy budeme uvádět pouze vztah pro čitatele.

Chceme tedy dokázat, že $A_{n+1} = a_{n+1}A_n + b_{n+1}A_{n-1}$, a analogicky pro jmenovatele. Toto tvrzení dokážeme matematickou indukcí.

V prvním kroku dokážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$, tj. že $A_2 = a_2A_1 + b_2A_0$. Nejprve vypočteme A_0, A_1 a A_2:

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{a_0}{1} \implies A_0 = a_0$$

$$\frac{A_1}{B_1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + b_1}{a_1} \implies A_1 = a_0a_1 + b_1$$

$$\frac{A_2}{B_2} = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2}} = \frac{a_0a_1a_2 + a_0b_2 + a_2b_1}{a_1a_2 + b_2} \implies A_2 = a_0a_1a_2 + a_0b_2 + a_2b_1.$$

Upravujme poslední z čitatelů:

$$A_2 = a_2(a_0a_1 + b_1) + a_0b_2.$$

Z toho vidíme, že platí

$$A_2 = a_2A_1 + b_2A_0.$$

Požadované tvrzení tedy platí pro $n = 1$. Zaveďme indukční předpoklad $A_n = a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2}$ a $B_{n+1} = a_{n+1} B_n + b_{n+1} B_{n-1}$. Konvergenty $\frac{A_n}{B_n}$ a $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ jsou rovny:

$$\frac{A_n}{B_n} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

a

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n + \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}}}}}.$$

Označíme-li $\bar{a} = a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$, můžeme psát

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \ddots + \cfrac{b_n}{\bar{a}}}}},$$

což je řetězový zlomek s n články, lze na něj tedy aplikovat indukční předpoklad. Vyjádřeme nyní konvergent $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}$ s využitím indukčního předpokladu:

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{\bar{a} A_{n-1} + b_n A_{n-2}}{\bar{a} B_{n-1} + b_n B_{n-2}} = \frac{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) A_{n-1} + b_n A_{n-2}}{\left(a_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) B_{n-1} + b_n B_{n-2}} = \frac{a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} A_{n-1}}{a_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} B_{n-1}}.$$

Využijeme opět indukčního předpokladu a získáme:

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2} + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} A_{n-1}}{a_n B_{n-1} + b_n B_{n-2} + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} B_{n-1}} = \frac{A_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} A_{n-1}}{B_n + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} B_{n-1}}.$$

Po rozšíření výrazu zlomkem $\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}$ získáme

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = \frac{a_{n+1} A_n + b_{n+1} A_{n-1}}{a_{n+1} A_n + b_{n+1} B_{n-1}}.$$

Požadovaný rekurentní vztah je tedy dokázán.

4.2 Lambertův rozvoj čísla π do řetězového zlomku

Známe-li rozvoj čísla do řetězového zlomku, umíme určit jeho konvergenty. V minulé kapitole jsme zmínili algoritmus, pomocí nějž můžeme rozvoj iracionálního čísla do řetězového zlomku obecně najít. Toto pro číslo π provedl již švýcarský matematik Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), proto nese tento rozvoj jeho jméno. V této kapitole uvedeme tento rozvoj včetně vysvětlení jeho odvození a doplníme jej o program v jazyce Python 3, který konvergenty tohoto řetězového zlomku generuje. Lambertův rozvoj je roven:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}},$$

neboli

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \cdots].$$

K výpočtu využijeme algoritmus, který byl stručně nastíněn v předchozí podkapitole. Dva kroky algoritmu můžeme pak nekonečně mnohokrát opakovat a tím generovat další a další články řetězového zlomku.

1. Číslo π je větší než jedna. Můžeme má tedy nenulovou celou část, to je číslo 3. Tedy článek $a_0 = 3$
2. $\pi - 3 \approx 0,141592$. Převrácená hodnota tohoto čísla je přibližně $7,0625459$.
3. Číslo $7,0625459$ je větší než jedna. Jeho celá část je číslo 7. Známe tedy článek $a_1 = 7$.
4. $7,0625459 - 7 = 0,0625459$. Hledáme převrácenou hodnotu tohoto čísla...
5. $\cdots$

Podívejme se na implementaci tohoto algoritmu v jazyce Python 3:

```
import math
N = 10
a = []

x = math.pi
```

```
#výpočet článků
print(x)

for k in range(1, N+1):
     a.append( int(x // 1) )
     x = (1 / (x - (x//1) ) )

print(a)

#výpočet konvergentů
A = [ a[0], a[0]*a[1]+1 ]
B = [ 1, a[1] ]

for k in range(2, N):
     A.append( a[k]*A[k-1] + A[k-2] )
     B.append( a[k]*B[k-1] + B[k-2] )

for k in range(0,N):
     print(str(k) + ' ' + str(A[k]) + ' ' + str(B[k]) + "\n")
```

Tento program vygeneroval hodnoty z této tabulky:

i	A_i	B_i	**Hodnota konvergentu** $\frac{A_i}{B_i}$
1	22	7	$3{,}14\rceil 285714286\cdots$
2	333	106	$3{,}1415\rceil 0943396\cdots$
3	355	113	$3{,}141592\rceil 92035\cdots$
4	103993	33102	$3{,}141592653\rceil 01\cdots$
5	104348	33215	$3{,}141592653\rceil 92\cdots$
6	208341	66317	$3{,}141592653\rceil 467\cdots$
7	312689	99532	$3{,}141592653\rceil 6189\cdots$
8	833719	265381	$3{,}14159265358\rceil 10\cdots$

Jak vidíme z tabulky, již osmý konvergent aproximuje číslo π se správností na 11 desetinných míst. Toto vyjádření je tedy pro zjištění co nejpřesnější hodnoty tohoto čísla výrazně vhodnější než například vyjádření Viètovo nebo Wallisovo. Zároveň si povšimněme velkého skoku mezi třetím a čtvrtým konvergentem. Zatímco třetí konvergent je podílem dvou trojciferných čísel, u čtvrtého narazíme v čitateli na číslo šesticiferné. To je způsobeno tím, že čtvrtý článek tohoto řetězového zlomku má hodnotu 292, tedy dělíme zlomkem velmi malé hodnoty a při úpravě na zlomek nám zde naskakují čísla vyšší. Jak vidíme v tabulce, následující konvergenty již neaproximují číslo π o moc přesněji. Proto je třetí konvergent pravděpodobně nejlepším podílem aproximujícím číslo π v tom smyslu, že je zde nejlepší poměr mezi jednoduchostí zápisu a přesností aproximace. Čitatel a jmenovatel mají dostatečně málo cifer na to, abychom si je snadno zapamatovali a zároveň tento konvergent aproximuje π s přesností na 6 desetinných míst.

4.3 Eulerův obecný řetězový zlomek pro π

Nyní uveďme vyjádření π v podobě řetězového zlomku, který odvodil významný matematik švýcarského původu Leonhard Euler (1707 – 1783). Jedná se o obecný nekonečný řetězový zlomek, jehož článek a_0 je roven nule. Má tento tvar:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \ddots}}}}},$$

Zde navážeme na myšlenky z Ballovy publikace [Ball], které rozšíříme a doplníme. Vycházíme zde z aproximace funkce $\operatorname{arctg} x$, o které víme, že se v bodě $x = 1$ rovná $\frac{\pi}{4}$. Tuto funkci můžeme rozvinout do Taylorovy řady nebo ji můžeme vyjádřit jako řetězový zlomek. Oba tyto způsoby rozvoje v této kapitole porovnáme.

Taylorův rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$ v bodě 0 objevil kolem roku 1400 indický matematik Madhava a vypadá následovně:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

My jej nyní odvodíme pomocí integrace geometrické řady. Funkce $\operatorname{arctg} x$ je rovna následujícímu určitému integrálu:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Součet geometrické řady pro $|q| < 1$ je roven

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

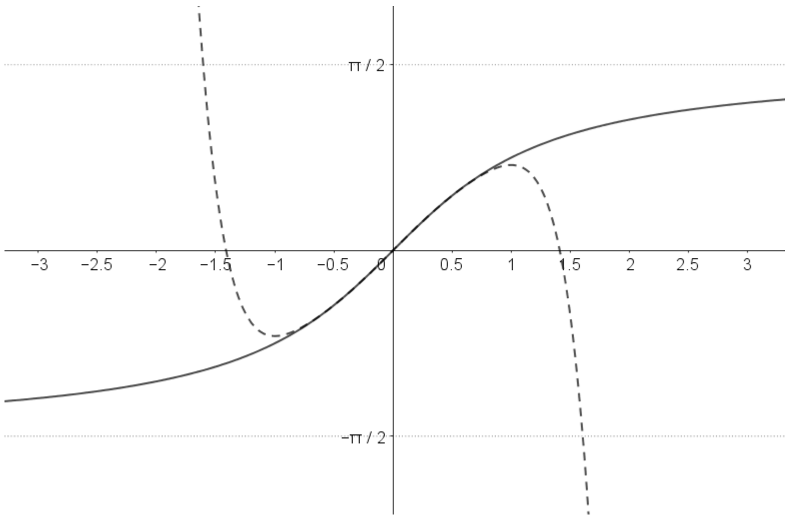
Zvolme $q = -t^2$, což je menší než jedna pro každé $t \in \mathbb{R}$. Z toho vyplývá, že

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1-(-t^2)} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt.$$

Sumu a integrál můžeme zaměnit, neboť platí, že mocninou řadu lze derivovat a integrovat člen po členu na intervalu $(-R, R)$, kde R je poloměr konvergence této řady. Po zintegrování získáváme Taylorovu řadu pro funkci arctg :

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Na obrázku 7 vidíme plnou čarou znázorněnou funkci $\operatorname{arctg} x$ a čárkovaně její aproximaci pomocí Taylorova polynomu sedmého stupně v bodě 0. Pouhým okem vidíme, že Taylorův polynom na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ v podstatě kopíruje funkci $\operatorname{arctg} x$, mimo tento interval se však zásadním způsobem od původní funkce odchyluje.



Obr. 7

Hledejme tedy vhodnější aproximaci. Tou by mohlo být použití racionální funkce, která je mnohem flexibilnější než mnohočleny. Racionální funkcí nazýváme podíl mnohočlenů. Stejně jako mnohočleny samy o sobě, i jejich podíl můžeme velmi snadno vyčíslit. Hledejme tedy funkci ve tvaru

$$f_1(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

jejíž Taylorův rozvoj v bodě 0 se shoduje s prvními třemi členy Taylorova rozvoje funkce $\operatorname{arctg} x$. To jsou členy $0 + x - 0x^2$. Snadno vidíme, že toto platí pro takovou racionální funkci, kde $a = 1$, $b = c = 0$ a $d = 1$, tedy pro racionální funkci $f_1(x) = \frac{x}{1}$. Nyní hledáme přesnější funkci danou řetězovým zlomkem tak, aby začínala právě získanou aproximací $\frac{x}{1}$. Ta bude vypadat takto:

$$f_2(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{ax^2}{b + cx}}.$$

Opět hledáme taková a, b a c, aby se rozklad této funkce do řady měl prvních pět členů shodných s řadou pro $\operatorname{arctg} x$, tedy se členy

$$0 + x + 0x^2 - \frac{x^3}{3} + 0x^4.$$

Pro nalezení rozkladu funkce f_2 do Taylorovy řady do čtvrtého řádu můžeme buďto počítat ručně, nebo využít počítač. Při počítání ručně hledáme derivace této funkce v bodě 0, což je už pro případ druhé derivace neúměrně složité. Získáváme tento výsledek:

$$f_2(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{ax^2}{b + cx}} = x - \frac{ax^3}{b} + \frac{acx^4}{b^2} + O(x^5).$$

Abychom dosáhli požadované shody s rozkladem pro $\operatorname{arctg} x$, musí platit: $a = 1$, $b = 3$ a $c = 0$. Řetězový zlomek až do druhého článku tedy je

$$f_2(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3}}.$$

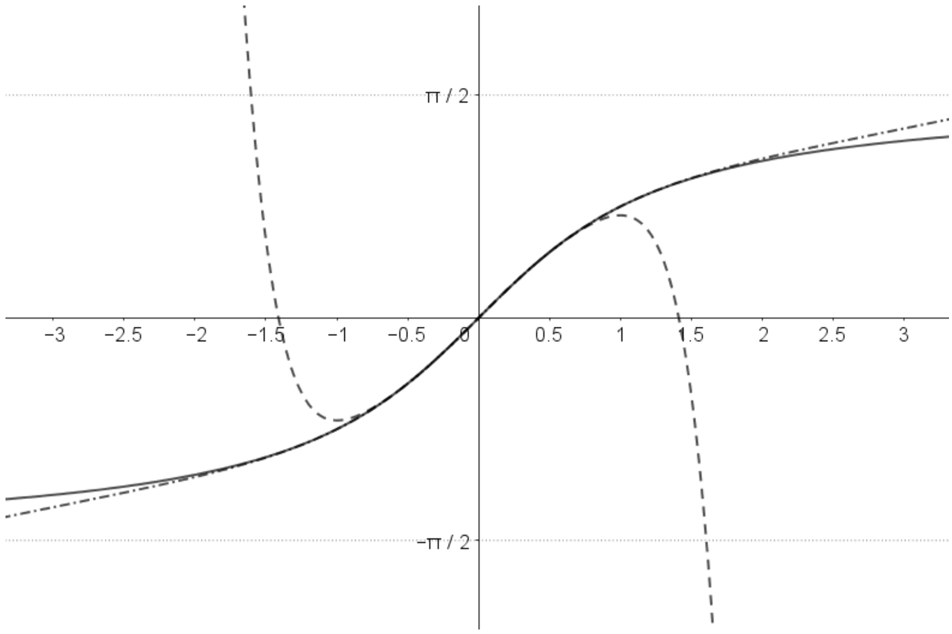
Řetězový zlomek až do třetího článku najdeme stejně:

$$f_3(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{ax^2}{b + cx}}}.$$

Znovu hledáme rozvoj této funkce do Taylorovy řady a vhodné koeficienty a, b a c tak, aby se tento rozvoj shodoval s rozkladem funkce $\operatorname{arctg} x$. Stejným způsobem můžeme postupovat do nekonečna a výsledný řetězový zlomek bude vypadat:

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \cfrac{16x^2}{9 + \ddots}}}}},$$

Vyznačme nyní v našem grafu čerchovaně funkci, která odpovídá tomuto řetězovému zlomku až do třetího článku, viz obr. 8.



Obr. 8

Jak vidíme, Eulerův obecný řetězový zlomek aproximuje funkci $\operatorname{arctg} x$ opticky mnohem lépe než rozklad do Taylorova polynomu. Na základě pozorování grafů vidíme, že se Taylorův polynom mimo interval $\langle -1, 1\rangle$ od funkce $\operatorname{arctg} x$ odchyluje viditelně výrazně. Při aproximaci Eulerovým řetězovým zlomkem jsou si grafy mnohem podobnější a na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ se v podstatě shodují. To je způsobeno rozdílnými obory konvergence, kterou zde ovšem nevyšetřujeme, neboť práce je určená též zájemcům bez matematického vysokoškolského vzdělání.

Do tohoto řetězového zlomku tedy dosadíme $x = 1$. Získáváme velmi dobrou aproximaci, a to již pro počáteční konvergenty:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \ddots}}}}}.$$

V následující tabulce vidíme, jak rychle se při výpočtu prvních deseti konvergentů dostaneme k výsledkům, které π aproximují na více desetinných míst. Hodnoty z této tabulky jsme získali z programu v jazyce Python 3, který čtenář nalezne v příloze 4. Již desátý konvergent určuje číslo π s přesností na 6 desetinných míst. Jak ale vidíme, vztah mezi počtem cifer jmenovatele a čitatele konvergentu je poněkud horší než u Lamberta. Tam nám pro přesnost na 6 desetinných míst stačil podíl dvou tříciferných čísel. Zde tuto přesnost získáváme až pro podíl čísel deseticiferných.

i	A_i	B_i	**Aproximace** π ($\pi \approx 4\frac{A_i}{B_i}$)	**Taylorův rozvoj**
1	1	1	4	4
2	3	4	3	2,66666666666666$\cdots$
3	19	24	3,1⌉6666666$\cdots$	3,46666666666666$\cdots$
4	160	204	3,1⌉372549019$\cdots$	2,8952380952380956$\cdots$
5	1744	2220	3,14⌉23423423$\cdots$	3,3396825396825403$\cdots$
6	23184	29520	3,141⌉4634146$\cdots$	2,9760461760461765$\cdots$
7	364176	463680	3,141⌉6149068$\cdots$	3,2837384837384844$\cdots$
8	6598656	8401680	3,1415⌉888250$\cdots$	3,017071817071818$\cdots$
9	135484416	172504080	3,14159⌉33118$\cdots$	3,2523659347188767$\cdots$
10	3108695040	3958113600	3,141592⌉5404$\cdots$	3,0418396189294032$\cdots$

V posledním sloupci vidíme hodnotu čtyřnásobku součtu prvních i členů Taylorova rozvoje funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x = 1$. Tyto hodnoty jsme získali z programu v jazyce Python 3, který čtenář nalezne v příloze 5. Tato tabulka nám potvrzuje zjištění, která jsme vyčetli z grafů výše. Ani pro součet deseti členů Taylorova rozvoje funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x = 1$ nezískáváme příliš přesnou aproximaci čísla $\frac{\pi}{4}$. Aproximovat jej tedy pomocí rozvoje do řetězového zlomku přináší výrazně přesnější hodnoty již pro prvních několik konvergentů než v případě součtu prvních několika členů Taylorova rozvoje.

4.4 Brounckerův obecný řetězový zlomek pro π

Autorem dalšího způsobu, jak vyjádřit číslo π pomocí řetězového zlomku byl anglický matematik William Brouncker (1620 – 1684). Jeho vyjádření má podobu následující obecného řetězového zlomku:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}.$$

Zde se budeme opírat o myšlenky z Beckmannovy publikace [Beck]. Na tomto vyjádření je zajímavé to, že čitatele tohoto obecného řetězového zlomku nejsou nahodilé, ale jedná se o posloupnost druhých mocnin lichých čísel. Koeficienty a_i mají pro všechny $i \in \mathbb{N}$ hodnotu 2. Podobnou pravidelnou strukturu vidíme ale i u Eulera.

Brounckerovo odvození není známo. V roce 1775 však tento rozvoj do řetězového zlomku odvodil také Euler. Využil opět Taylorův rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Na Taylorův rozvoj funkce $\operatorname{arctg} x$ můžeme nahlédnout jako na řadu

$$S = a_0 + a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4 + \cdots,$$

kde $a_0 = 0, a_1 = x, a_2 = \frac{-x^2}{3}, a_3 = \frac{-3x^2}{5} \cdots$. Tuto řadu S lze ale také zapsat formou následujícího řetězového zlomku:

$$S = a_0 + \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \ddots}}}.$$

Získáme ho postupem, který si předvedeme na prvních třech členech rozvoje, přičemž víme, že $a_0 = 0$:

$$a_1 + a_1a_2 = a_1(1 + a_2) = \frac{a_1(1 + a_2)}{1} = \frac{a_1(1 + a_2)}{1 + a_2 - a_2} = \cfrac{a_1}{\cfrac{1 + a_2 - a_2}{1 + a_2}} = \cfrac{a_1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2}}.$$

Proto po dosazení $a_0 = 0, a_1 = x, a_2 = \frac{-x^2}{3}, a_3 = \frac{-3x^2}{5} \cdots$, získáváme

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25x^2}{7 - 5x^2 + \ddots}}}}.$$

Platí, že pro $x = 1$ je $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$. Výše uvedenou rovnost upravíme tímto způsobem:

$$\frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25x^2}{7 - 5x^2 + \ddots}}}.$$

A po dosazení $x = 1$ získáváme požadované vyjádření:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}.$$

Jak již bylo řečeno, toto vyjádření je elegantní zejména svou pravidelností, kterou se liší od řetězového zlomku Lambertova, jehož jednotlivé články žádnou pravidelnost nevykazují. Na rozdíl od něj však pro prvních 20 konvergentů nezískáváme tak dobré výsledky. Už čtvrtý konvergent Lambertova zlomku aproximuje π s přesností na devět desetinných míst. Podívejme se nyní na tabulku, ve které vidíme aproximaci π pomocí Brounckerova vyjádření. Hodnoty této tabulky jsme získali z programu, který čtenář nalezne v příloze 6.

$$\pi \approx 4\frac{B_i}{A_i}$$

i	A_i	B_i	**Aproximace π**
1	3	2	$2{,}6666666666\cdots$
2	15	13	$3\rceil{,}4666666666\cdots$
3	105	76	$2{,}89523809524\cdots$
4	945	789	$3\rceil{,}33968253968\cdots$
5	10395	7734	$3\rceil{,}33968253968\cdots$
6	135135	110937	$3\rceil{,}28373848374\cdots$
10	13749310575	11110528485	$3\rceil{,}23231580941\cdots$
20	10455001188148106850385125	13113070457687988603440625	$3{,}1\rceil 8918478228\cdots$

Jak vidíme, ani po výpočtu více než deseti prvních konvergentů nedostaneme správné ani první desetinné místo. To získáváme až u konvergentu dvacátého, jehož čitatel i jmenovatel jsou však příliš velká čísla. Řetězový zlomek je tedy sice dobře zapamatovatelný a „hezký“, pro efektivní aproximaci π je ale nepoužitelný.

4.5 Konstrukce čísla π na základě rozkladu do řetězového zlomku

Nyní si ukážeme, jak můžeme číslo π zkonstruovat, a to za pomoci Lambertova řetězového zlomku, přesněji jednoho z jeho konvergentů. Tato konstrukce je v Beckmannově *Historii čísla π* zmíněna jen velmi stručně, a proto ji zde rozvedeme tak, aby čtenáři byla celá úvaha zřejmá. Autorem této konstrukce byl nizozemský matematik Jakob de Gelder (1765 – 1848) a tato konstrukce pochází zhruba z poloviny 19. století. Ke konstrukci se využívá třetí konvergent Lambertova řetězového zlomku

$$\frac{A_3}{B_3} = \frac{355}{113}.$$

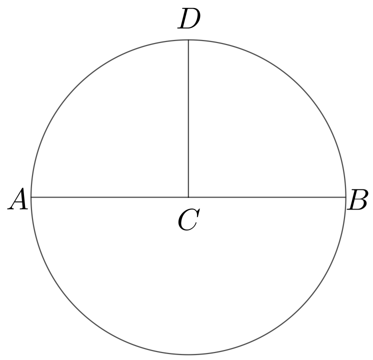
Tato hodnota aproximuje π s přesností na 6 desetinných míst a byla známa již v pátém století v Číně. V Evropě byl tento zlomek nalezen Valentinem Othem, německým matematikem, a to již v roce 1573. Ve stejném století tuto přibližnou hodnotu objevili i Viète nebo nizozemský astronom Adriaan Metius.

Geldereho odvození využívá toho, že tento konvergent můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2}.$$

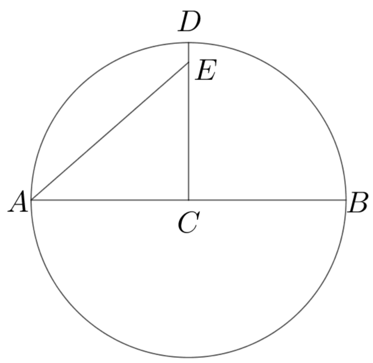
Poslední zlomek můžeme snadno zkonstruovat geometricky. Jeho jmenovatel napovídá, že pro jeho zkonstruování můžeme využít Pýthagorovu větu. Hledáme takový trojúhelník, jehož odvěsny jsou v poměru 7 ku 8. Délku jeho přepony budeme potom moci vyjádřit jako násobek druhé odmocniny jmenovatele tohoto zlomku.

Mějme tedy jednotkový kruh se středem v bodě C. Vyznačme na něm body A a B tak, že úsečka AB prochází středem C. Dále na kružnici vyznačíme bod D tak, že úsečka CD je na úsečku AB kolmá, viz obr. 9.



Obr. 9

Dále vyznačíme na úsečce CD bod E tak, že $|CE| = \frac{7}{8}$, viz obr. 10.



Obr. 10

Získáváme pravoúhlý trojúhelník ACE, pro nějž platí podle Pýthagorovy věty

$$|AE|^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{8}{8}\right)^2.$$

Z toho vyjádříme $|AE| = \frac{\sqrt{7^2+8^2}}{8}$. To už začíná trochu připomínat náš požadovaný zlomek. Získali jsme pravoúhlý trojúhelník s poměrem odvěsen 7 ku 8. Gelder dále využívá podobnost trojúhelníků. Hledá trojúhelník, který je podobný $\triangle ACE$. Nejvhodnější bude využít podobnosti o koeficientu, který je zároveň odmocninou zlomku, který se snažíme zkonstruovat, tedy

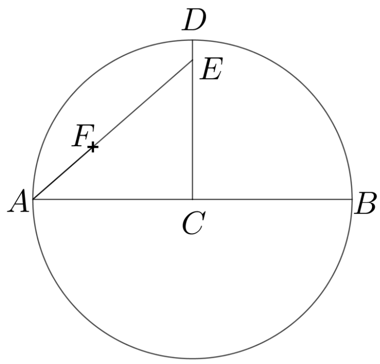
$$k = \frac{4}{\sqrt{7^2+8^2}}.$$

Proč volí právě takový koeficient? Pak totiž stačí najít trojúhelník se stranou, jejíž délka je tomuto koeficientu rovna. Délka odpovídající strany v trojúhelníku tomuto trojúhelníku podobném se stejným koeficientem podobnosti je pak rovna k^2. To proto, že jsou-li a a b délky odpovídajících stran dvou podobných trojúhelníků o koeficientu k a $b = k$, pak $\frac{a}{b} = k \implies \frac{a}{k} = k \implies a = k^2$. Délka a je potom námi hledaná hodnota, neboť pro zvolený koeficient $k^2 = \frac{4^2}{7^2+8^2}$.

Trojúhelník, jehož jedna ze stran je zároveň rovna koeficientu podobnosti s trojúhelníkem ACE, získáme, posuneme-li bod E do bodu F, který leží na úsečce AE tak, že $|AF| = \frac{1}{2}$, viz obr. 11. Proč jsme zvolili tuto délku? Jestliže jsou strany AE a AF odpovídající strany podobnosti trojúhelníků, pak

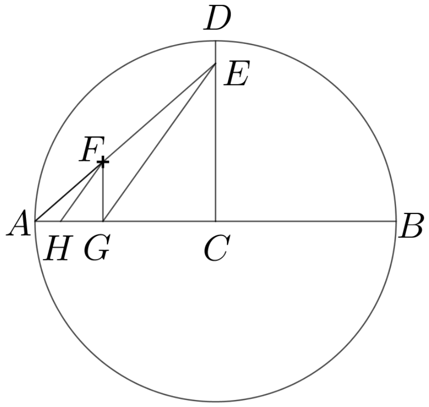
$$\frac{|AF|}{|AE|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7^2+8^2}}{8}} = \frac{4}{\sqrt{7^2+8^2}} = k.$$

Tím jsme získali podobnost o daném koeficientu, kterou jsme chtěli najít. Protože se jedná o podobnost s trojúhelníkem ACE, kde díky tomu, že pracujeme v jednotkovém kruhu, platí, že $|AC| = 1$, strana odpovídající straně AC v podobném trojúhelníku o koeficientu k bude tomuto koeficientu rovna.



Obr. 11

„Pod“ bodem F sestrojíme tedy trojúhelník podobný trojúhelníku ACE. Získáme ho tím, že vyznačíme bod G na úsečce AB tak, že úsečka FG je na tuto úsečku kolmá. Dále sestrojíme bod H, který bude také ležet na úsečce AB, a bude platit, že úsečka FH je rovnoběžná s úsečkou EG, viz obr. 12.



Obr. 12

Nyní si všimněme, že délka úsečky AG, která v této podobnosti odpovídá straně AC, je skutečně rovna koeficientu k, protože

$$k = \frac{4}{\sqrt{7^2+8^2}} = \frac{|AG|}{|AC|} = \frac{|AG|}{1} = |AG|.$$

To je úsečka o délce, kterou jsme hledali. Nyní můžeme využít podobnosti trojúhelníků AGE a AHF. Která strana trojúhelníku AHF odpovídá straně AG v trojúhelníku AGE? Je to strana AH. Pro stranu AH tedy platí:

$$\frac{|AH|}{|AG|} = \frac{4}{\sqrt{7^2+8^2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{|AH|}{\frac{4}{\sqrt{7^2+8^2}}} = \frac{4}{\sqrt{7^2+8^2}} \quad \Longrightarrow \quad |AH| = \frac{4^2}{7^2+8^2}.$$

Délka strany AH tedy odpovídá našemu zlomku $\frac{4^2}{7^2+8^2}$.

5 Vlastnosti čísla π

5.1 Iracionalita čísla π

Jedna z podstatných vlastností čísla π je, že se jedná o číslo iracionální, není tudíž možné jej vyjádřit jako podíl celých čísel. Až v 18. století dokázal Joseph Lambert, že takový podíl skutečně nemůže existovat. Využil k tomu řetězové zlomky. Nastiňme si nejprve myšlenku, která nás dovede až k integrálu často uváděnému v učebnicích včetně [Ball], s jehož pomocí se obvykle iracionalita π dokazuje. Přestože jeho odvození svou náročností přesahuje rozsah této práce, je dobré naznačit jeho původ v řetězových zlomcích. Dále si ukážeme jednodušší způsob, jak můžeme iracionalitu π dokázat za využití tvrzení, že hodnota nekonečného řetězového zlomku je iracionální číslo.

Nejprve se zaměřme na metodu, která vychází z Lambertových myšlenek. Využijme rozvoje funkce $\operatorname{tg} x$ do řetězového zlomku. Překvapivě používáme právě funkci $\operatorname{tg} x$, přestože k ní inverzní funkce $\operatorname{arctg} x$, jak jsme si výše ukázali, může k aproximaci čísla π také sloužit. Pro tyto úvahy však není vhodná, protože čitatele získaného řetězového zlomku jsou mnohem větší než v aproximaci funkce $\operatorname{tg} x$ a výpočty by tedy byly složitější. Řetězový zlomek aproximující funkci $\operatorname{tg} x$ vypadá takto:

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \ddots}}}}}.$$

Jak vidíme, tento řetězový zlomek se od toho, který aproximuje funkci $\operatorname{arctg} x$, liší pouze znaménky a čitateli. Při jeho odvození bychom postupovali analogicky a proto není třeba zde toto odvození opakovat. Podívejme se spíše, jak nám může toto vyjádření sloužit pro důkaz iracionality čísla π.

Platí, že čím vyšší konvergent, tím lépe funkci $\operatorname{tg} x$ aproximuje. Proto bude rozdíl funkce $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ a posloupnosti konvergentů v nekonečnu konvergovat k nule, tedy $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{A_n}{B_n} \right| = 0$. Platí tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{A_n}{B_n} \right| = \frac{|B_n \sin x - A_n \cos x|}{|B_n \cos x|} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} (B_n \sin x - A_n \cos x) = 0$$

To proto, že zlomek konverguje k nule, jestliže jeho čitatel konverguje k nule a jmenovatel konverguje k reálnému číslu. Pracujeme tedy již pouze s čitatelem.

Označme $s_n = B_n \sin x - A_n \cos x$ a využijme rekurentních vzorců pro výpočet konvergentů, u nás se konkrétně jedná o konvergenty řetězového zlomku pro funkci $\operatorname{tg} x$. Z tohoto řetězového zlomku vidíme, že tyto rekurentní vztahy budou vypadat takto:

$$A_{n+1} = (2n+1)A_n - x^2 A_{n-1},$$
$$B_{n+1} = (2n+1)B_n - x^2 B_{n-1},$$

pro $n \in \mathbb{N}$. Zároveň známe hodnoty prvního a druhého konvergentu $\frac{A_1}{B_1}$ a $\frac{A_2}{B_2}$, tedy hodnoty $A_1 = x, B_1 = 1, A_2 = 3x, B_2 = 3 - x^2$.

Jelikož jsou členy zvolené posloupnosti s_n lineární kombinací čitatele a jmenovatele našeho konvergentu $\frac{A_n}{B_n}$, platí pro ni stejný rekurentní vztah, tedy:

$$s_{n+1} = (2n+1)s_n - x^2 s_{n-1}.$$

Prvních několik členů této posloupnosti tedy bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= \sin x - x\cos x, \\ s_2(x) &= (3 - x^2)\sin x - 3x\cos x, \\ s_3(x) &= (15 - 6x^2)\sin x - (15x - x^3)\cos x, \\ s_4(x) &= (105 - 45x^2 + x^4)\sin x - (105x - 10x^3)\cos x. \end{aligned}$$

Lambert ve svém důkazu zvolil za x hodnotu $\frac{\pi}{4}$. My však zvolme $x = \frac{\pi}{2}$, neboť pro takové x nám vypadnou všechny členy obsahující $\cos x$. V tuto chvíli již chápeme polynom s_n jako izolovaný polynom bez vztahu k řetězovému zlomku aproximujícímu funkci $\operatorname{tg} x$. Proto můžeme zvolit $x = \frac{\pi}{2}$, přestože funkce $\operatorname{tg} x$ není pro tuto hodnotu definována. Po dosazení získáváme:

$$s_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$s_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0,532\cdots$$

$$s_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 15 - 6\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0,195\cdots$$

$$s_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 105 - 45\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 0,055\cdots$$

Na prvních několika členech vidíme, že s rostoucím se n se členy posloupnosti s_n velmi rychle přibližují nule.

Při dosazení $x = \frac{\pi}{2}$ je tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ hodnotou $s_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ hodnota nějakého polynomu stupně m v bodě $\frac{\pi}{2}$ kde $m \leq n$. Tento polynom můžeme obecně zapsat jako $s_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$. Nyní se dostáváme k důkazu sporem. Budeme předpokládat, že za x dosadíme nějaké racionální číslo ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p a q jsou celá čísla. Pak získáváme hodnotu polynomu s_n v bodě $\frac{p}{q}$

$$s_n\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_0q^m + a_1q^{m-1}p + \cdots + a_mp^m}{q^m}.$$

Pro takový zlomek platí, že pokud není nulový, jeho nejmenší možná absolutní hodnota je $\frac{1}{q^m}$. Pokud by číslo π bylo racionální, i číslo $\frac{\pi}{2}$ by bylo racionální a platilo by pro něj výše uvedené. Musíme tedy dojít ke sporu, což by bylo, pokud by $s_n(\frac{\pi}{2})$ nebylo 0, ale bylo by pro nějaká n menší než $\frac{1}{q^m}$ kde $m \leq n$. Jednotlivé členy posloupnosti s_n byly doposud vyjádřeny pouze rekurentně. Abychom však mohli výše zmíněný předpoklad buď potvrdit, nebo vyvrátit, potřebujeme vyjádření vzorcem pro n-tý člen. Využijeme tedy následujícího tvrzení. Zde pouze ověříme jeho správnost přímým důkazem. Pro jeho odvození se používá Besselova funkce, což je však již nad rámec této práce.

Lémma 5.1. Nechť
$$I_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - t^2)^n \cos t dt$$
$\forall n \in \mathbb{N}$. Pak platí
$$I_{n+1}(x) = (2n+1)I_n(x) - x^2 I_{n-1}(x)$$
pro všechna $n \geq 2$.

Důkaz: Výraz
$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \int_0^x (x^2 - t^2)^{n+1} \cos t dt$$
integrujeme per partes.[5] Získáváme
$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \int_0^x 2t(n+1)(x^2 - t^2)^n \sin t dt = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x t(x^2 - t^2)^n \sin t dt.$$
Integrujme znovu per partes, tedy
$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x ((x^2 - t^2)^n - 2nt^2(x^2 - t^2)^{n-1}) \cos t dt.$$
Jelikož
$$(x^2 - t^2)^n - 2nt^2(x^2 - t^2)^{n-1} = (2n+1)(x^2 - t^2)^n - 2nx^2(x^2 - t^2)^{n-1},$$
což je snadno ověřitelné pomocí elementárních úprav, můžeme výše uvedený integrál zapsat jako
$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (2n+1)(x^2 - t^2)^n \cos t dt - \frac{1}{2^n n!} \int_0^x 2nx^2(x^2 - t^2)^{n-1} \cos t dt.$$

Oba uvedené integrály lze vyjádřit pomocí $I_n(x)$ a $I_{n-1}(x)$, tedy
$$I_{n+1}(x) = (2n+1)I_n(x) - x^2 I_{n-1}(x),$$
kde $n \geq 2$ pro všechna n přirozená.

Dokázali jsme tedy, že I_{n+1} lze vyjádřit jak pomocí integrálu, tak pomocí rekurentního vztahu, který se shoduje s rekurentním vztahem posloupnosti s_n. Abychom mohli s rekurentním vztahem pracovat, je třeba určit $I_1 = \sin x - x \cos x$ a $I_2 = (3 - x^2) \sin x - 3x \cos x$.

[5] $\int_0^x (x^2 - t^2)^{n+1} \cos t dt = [(x^2 - t^2)^{n+1} \sin t]_0^x + \int_0^x 2t(n+1)(x^2 - t^2)^n \sin t dt = (x^2 - x^2)^{n+1} \sin t - (x^2 - 0)^{n+1} \sin 0 + \int_0^x 2t(n+1)(x^2 - t^2)^n \sin t dt = \int_0^x 2t(n+1)(x^2 - t^2)^n \sin t dt$

Členy posloupnosti $s_n(x)$ pro $x = \frac{\pi}{2}$ tedy můžeme vyjádřit takto:

$$s_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^n n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - t^2\right)^n \cos t dt.$$

Pro $t \in [0, \frac{\pi}{2})$ je $((\frac{\pi}{2})^2 - t^2)^n \cos t$ vždy kladné. Integrál je tedy také vždy kladný. Tím jsme dokázali, že $s_n(\frac{\pi}{2})$ není nula pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Dokažme nyní, že $s_n(\frac{\pi}{2}) < \frac{1}{q^m}$ pro dostatečně velké m. To plyne z toho, že posloupnost q^m konverguje k nekonečnu pomaleji než posloupnost $n!$ pro $m \leq n$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, která budou větší než dostatečně velké n_0 bude tedy $s_n(\frac{\pi}{2})$ menší než $\frac{1}{q^m}$, neboť integrál bude dělen $2^n n!$, takže díky rychlosti konvergence faktoriálu získáme po dělení menší číslo než když dělíme jedničku q^m. Tím docházíme ke sporu s předpokladem a iracionalita π je dokázána.

Důkaz iracionality π pomocí zobecněných řetězových zlomků

Předvedli jsme si myšlenku důkazu iracionality π, která je často uváděna v učebnicích. Ukažme si nyní jinou metodu důkazu, která využívá pouze teorie řetězových zlomků. Zde vycházíme z [Irr].

Lémma 5.2. Mějme obecný kladný nekonečný řetězový zlomek ve tvaru

$$\cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{\ddots}}}},$$

kde a_i,$b_i \in \mathbb{N}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, dále předpokládejme, že pro všechna přirozená čísla n je $1 + b_n \leq a_n$ a pro všechna n větší než nějaké n_0 je $1 + b_n < a_n$. Pak je hodnota tohoto řetězového iracionální číslo.

Důkaz: Dokažme sporem. Předpokládejme, že tento řetězový zlomek je racionální číslo. Existují tedy kladná celá čísla λ_0 a λ_1 taková, že

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{\ddots}}}}.$$

V případě, že hodnota řetězového zlomku je menší než jedna, je $\lambda_1 < \lambda_0$. Dále označme

$$\rho_1 = \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cfrac{b_4}{\ddots}}}.$$

Potom lze toto číslo zapsat ve tvaru

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{b_1}{a_1 - \rho_1}.$$

Protože levá strana této rovnosti je menší než jedna, i pravá strana musí být menší než jedna. Z toho plyne, že platí $b_1 + \rho_1 < a_1$. Z předpokladu, že pro všechna přirozená čísla n je $1 + b_n \leq a_n$ a pro všechna n větší než nějaké n_0 je $1 + b_n < a_n$ je pak zřejmé, že ρ_1 musí být menší než jedna. Vyjádříme-li jej z této rovnosti, získáváme nerovnost

$$\rho_1 = \frac{a_1\lambda_1 - b_1\lambda_0}{\lambda_1} < 1.$$

Označme $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, kde $\lambda_2 < \lambda_1$. Pokud bychom pokračovali tímto způsobem dále, získali bychom posloupnost kladných celých čísel, pro která platí $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 \cdots$. Tak bychom mohli postupovat do nekonečna. Získali bychom tím nekonečný řetězový zlomek, jeho hodnota je však z principu iracionální. To je spor s předpokladem stanoveným na začátku důkazu, že tento řetězový zlomek je racionální číslo.

Díky tomuto lémmatu můžeme snadno dokázat i iracionalitu čísla π. Postupujme obdobně a předpokládejme, že číslo π je racionální, tedy $\frac{\pi}{4} = \frac{a}{b}$, kde a, b jsou celá kladná čísla. Dosaďme do řetězového zlomku vyjadřujícího funkci $\operatorname{tg} x$ hodnotu $x = \frac{\pi}{4}$:

$$1 = \cfrac{\frac{a}{b}}{1 - \cfrac{\frac{a^2}{b^2}}{3 - \cfrac{\frac{a^2}{b^2}}{5 - \cfrac{\frac{a^2}{b^2}}{\ddots}}}} = \cfrac{a}{b - \cfrac{a^2}{3b - \cfrac{a^2}{5b - \cfrac{a^2}{\ddots}}}}.$$

Potom platí, že jestliže $nb > a^2 + 1$, je je hodnota tohoto řetězového zlomku iracionální. To je ovšem spor, neboť toto vyjádření se má rovnat jedné. Číslo $\frac{\pi}{4}$ je tedy iracionální, a tak i samotné číslo π je iracionální.

5.2 Transcendence čísla π

Transcendentní číslo je každé iracionální číslo, které není kořenem žádného polynomu s racionálními koeficienty

$$a_1x^{c_1} + a_2x^{c_2} + a_3x^{c_3} + \cdots + a_nx^{c_n},$$

kde čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou racionální a alespoň jedno je nenulové, a čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou přirozená čísla.

Německý matematik Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939) v roce 1882 zjistil, že výše zmíněná definice je ekvivalentní s definicí vyslovenou i za obecnějších předpokladů, tj. že čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou algebraická čísla, tedy čísla, která jsou kořenem nějakého polynomu s racionálními koeficienty.

To, že číslo π je transcendentní, dokážeme s využitím skutečnosti, že číslo e je transcendentní, což dokázal francouzský matematik Charles Hermite (1822 – 1901) v roce 1873. Vycházíme z důkazu uvedeném v [Ebb].

Protože číslo e je číslo transcendentní, tak pro něj podle Lindemannovy definice platí, že pro libovolná algebraická čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kde alespoň jedno je nenulové, a algebraická čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$, kde n je libovolné přirozené číslo :

$$a_1 e^{c_1} + a_2 e^{c_2} + a_3 e^{c_3} + \cdots + a_n e^{c_n} \neq 0.$$

K důkazu využijeme známou Eulerovu rovnost

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

která je mnohými považována za nejkrásnější matematickou rovnost, neboť obsahuje pět neznámějších matematických konstant, tedy e, i, π, 1 a 0.

Důkaz toho, že číslo π je transcendentní provedeme sporem. Pokud by bylo číslo π algebraické, pak by dle Eulerovy rovnosti a Lindemannovy definice transcendence bylo algebraické i číslo e, neboť by existoval výraz tvaru

$$a_1 e^{c_1} + a_2 e^{c_2},$$

který by byl pro algebraické koeficienty a exponenty $a_1 = 1, a_2 = 1, c_1 = i\pi, c_2 = 0$ roven nule. Číslo e je však transcendentní, takže dostáváme spor. Číslo π je tedy transcendentní.

Závěr

Ukázali jsme, že hledání co nejpřesnější hodnoty čísla π sahá daleko do historie. Zároveň jsme se přesvědčili o tom, že řetězové zlomky poskytují vhodný nástroj, pomocí něhož lze toto číslo aproximovat. Pro některá vyjádření čísla π řetězovými zlomky platí, že již prvních několik konvergentů aproximuje číslo π se správností na několik desetinných míst, jako například rozvoj Lambertův, některá vyjádření nás spíše okouzlí svou pravidelností, jak je tomu u vyjádření Eulerova a Brounckerova. Jedná se přitom o způsoby aproximace, které mohou být srozumitelné i žákům vyšších ročníků středních škol. Pomocí rozvoje čísla π do řetězového zlomku lze navíc dokázat i jeho základní vlastnost – iracionalitu.

Čtenář měl možnost seznámit se s výsledky výpočtů hodnot konvergentů z programů psaných v jazyce Python 3, které přikládáme v příloze. Vytvořit podobný program, který vypočítá hodnotu prvních několika konvergentů nějakého řetězového zlomku, není náročné ani pro člověka bez předchozích zkušeností s programováním. Tento programovací jazyk je navíc k dispozici zdarma na internetu a je tedy čtenáři dobře dostupný.

Výhledově by bylo možné zabývat se například vyjádřením čísla π ve formě řad. Taková vyjádření ovšem již vyžadují rozsáhlejší znalosti matematické analýzy a nebyla by již dostatečně srozumitelná středoškolským studentům, kterým zejména je tato práce určena.

Literatura

[Beck] BECKMANN, P.: Historie čísla π. Academia, Praha, 1998.

[Ball] BALL, K.: Podivuhodné křivky, počítání králíků a jiná matematická dobrodružství. Dokořán, Praha, 2011.

[Beč] BEČVÁŘ, J., ŠTOLL, I.: Archimedes, největší vědec starověku. Prometheus, Praha, 2005.

[Hal] HALAS, Z. (ed.): Archimédés, několik pohledů do jeho života a díla. Matfyzpress, Praha, 2012.

[Ebb] EBBINGHAUS, H. et al.: Zahlen. Springer, Berlin, 1992.

[Chin] CHINČIN, A. J.: Řetězové zlomky. Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

[Arn] ARNDT, J., HAENEL, Ch.: Pi unleashed. Springer, Berlin, 2001.

[Irr] University of New South Wales: Irrationality and Transcendence [online]. Naposledy navštíveno 12. 5. 2018. `http://web.maths.unsw.edu.au/~angell/5535/`

Příloha 1

```
import math
a = 1
b = 1/(math.sqrt(3))
x=6
y=3
print("n", "&", "s_n", "&", "t_n", "&", "t_n - s_n", "\\\\")
for i in range (6):
    print(x, "&", a*y, "&", 2*b*y, "&", 2*b*y-a*y, "\\\\")
    a = a/(math.sqrt(2+math.sqrt(4-a*a)))
    b = b/(1+math.sqrt(1+b*b))
    x = 2*x
    y = 2*y
```

Příloha 2

```
import math

odmocnina = math.sqrt(2)
vysledek = 2/odmocnina

for i in range (25):
    odmocnina = math.sqrt(2 + odmocnina)
    vysledek = vysledek * 2.0/odmocnina
    print(i+1, "&", 2*vysledek, "\\\\")
```

Příloha 3

```
soucin = 1
liche = 1
sude = 2

jednotky = [i*1 for i in range(1,10)]
desitky = [i*10 for i in range(1,10)]
stovky = [i*100 for i in range(1,10)]
tisice = [i*1000 for i in range(1,10)]

seznam = jednotky + desitky + stovky + tisice + [10000]

for i in range(10001):
    soucin = soucin * sude / liche
    if i % 2 == 0:
        liche = liche + 2
    elif i % 2 == 1:
        sude = sude + 2
    if i in seznam:
        print(i,"&", soucin*2, "\\\\")
```

Příloha 4

```
N = 21

a = []

b = []

for i in range (21):
    if i == 0:
        a.append (0)
    else:
        a.append (2*i - 1)

print (a)

for j in range (21):
    if j == 1:
        b.append (1)
    else:
        b.append ((j-1)**2)

print (b)

P=[a[0],a[0]*a[1]+b[1]]
Q=[1,a[1]]

for k in range (2, N):
    P.append(a[k]*P[k-1] + P[k-2]*b[k])
    Q.append( a[k]*Q[k-1] + Q[k-2]*b[k])

K = []

for k in range (0,N):
    K.append( str(P[k]) + ' / ' + str(Q[k]))

print (K)
```

Příloha 5

```
soucet = 0
znamenko = -1

n = int(input("\Zadejte počet iterací:  ")) # přesnost výpočtu

for i in range(n+1):
    znamenko *= -1
    soucet = soucet +  1.0/(2.0*i+1.0) * znamenko
    print(i+1, "&", 4*soucet)


print("Pi je přibližně:\t{}". format(4*soucet))
```

Příloha 6

```
N = 21
a = []

b = []
for i in range(21):
    b.append((2*i - 1)**2)

for j in range (21):
    if j == 0:
        a.append (1)
    else:
        a.append (2)

print(a)
print(b)

P=[a[0],a[0]*a[1]+b[1]]
Q=[1,a[1]]

for k in range (2, N):
    P.append(a[k]*P[k-1] + P[k-2]*b[k])
    Q.append( a[k]*Q[k-1] + Q[k-2]*b[k])

K = []

for k in range (0,N):
    K.append( str(P[k]) + ' / ' + str(Q[k]))

print (K)
```