Nabitá půlobruč

Úloha číslo: 2008

Přímou integrací určete elektrickou intenzitu a potenciál na ose půlobruče o poloměru R, která je homogenně nabita lineární hustotou λ. Ověřte vztah mezi elektrickou intenzitou a potenciálem.

Pozn. osou půlobruče je myšlena osa pomyslné celé obruče.

Podobnost s úlohou o nabité obruči

Úloha o nabité půlobruči je velmi podobná úloze Nabitá obruč.

Nápověda – elektrická intenzita

Kladný bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r pole o velikosti intenzity

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Vektor intenzity $\vec{E}$ míří směrem od náboje, pokud je Q kladný. V opačném případě míří k náboji.

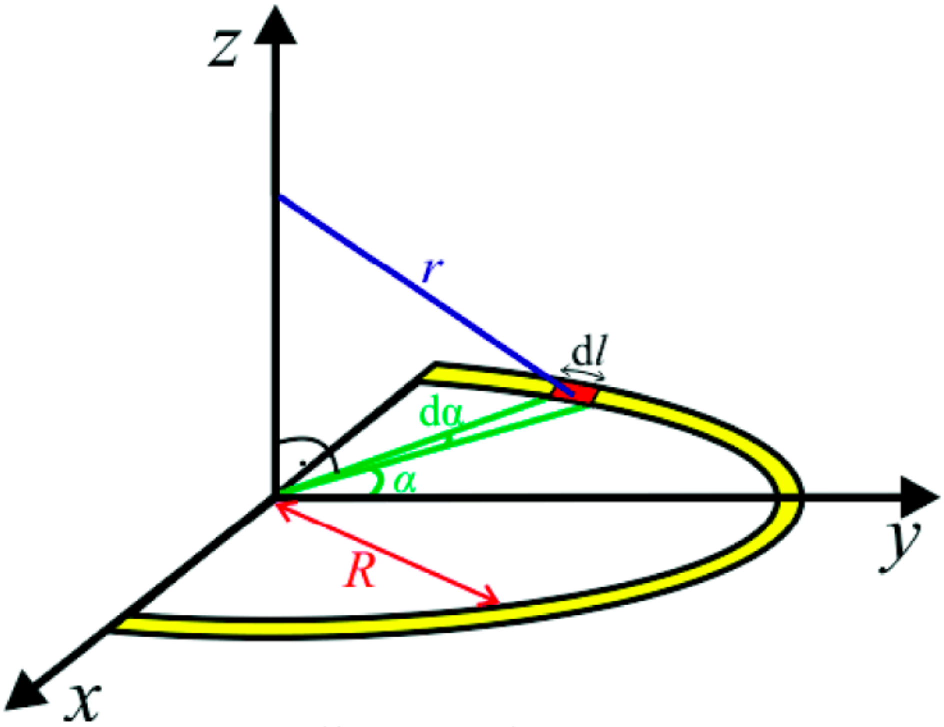
Zamyslete se nad tím, jak bychom tohoto poznatku mohli využít v této úloze.

Řešení nápovědy

Půlobruč rozdělíme na malé kousky, které se budou chovat jako bodové náboje. Celkovou intenzitu získáme „sečtením“ (přesněji integrováním) příspěvků od všech těchto malých kousků.

Rozbor – elektrická intenzita

Nejprve si celou situaci nakreslíme do kartézských souřadnic. Osa půlobruče bude splývat s osou z a půlobruč bude ležet v rovině xy. Do obrázku si vyznačíme také dvě z cylindrických souřadnic α a z. Cylindrickou souřadnici ρ nebudeme potřebovat, jelikož má půlobruč konstantní poloměr R.



Řešení – elektrická intenzita

Bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r pole o velikosti intenzity

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Je-li půlobruč nabita s lineární hustotou λ, potom má náboj na nekonečně malém kousku obruče $\mathrm{d}l$ velikost:

$$\mathrm{d}Q = \lambda \mathrm{d}l,$$

kde $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\alpha$ (viz výpočet délky kruhového oblouku v radiánech).

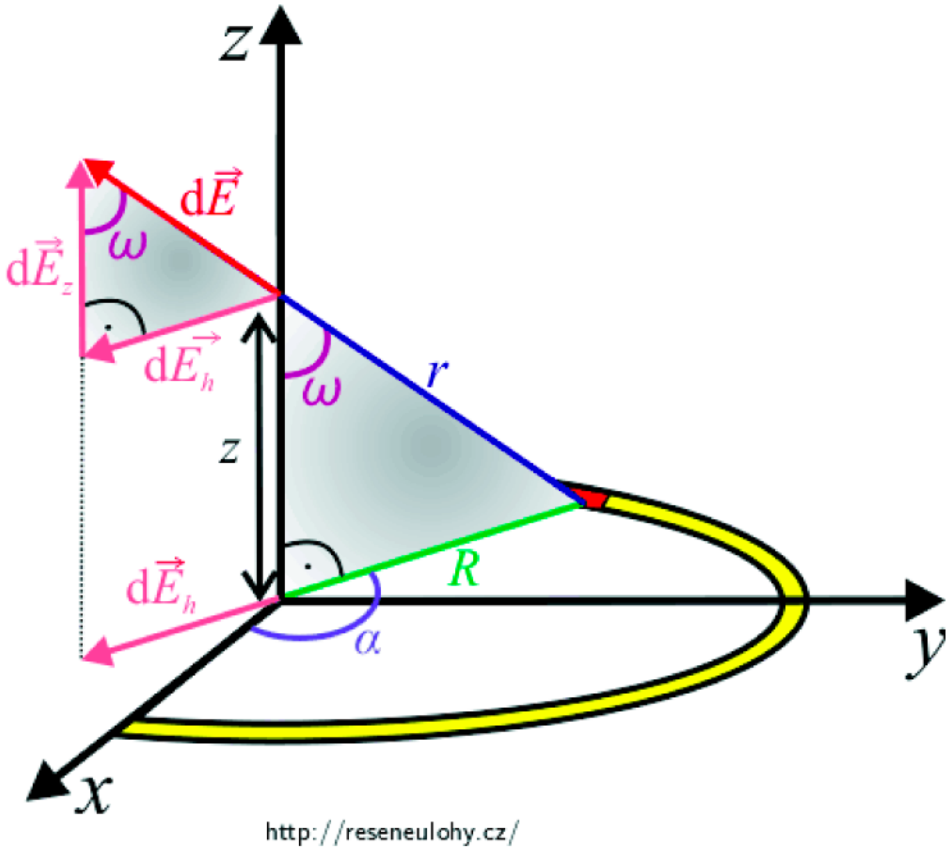
Potom

$$\mathrm{d}Q = \lambda R\,\mathrm{d}\alpha,$$

a tudíž velikost intenzity od jednoho kousku obruče je

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{r^2}\mathrm{d}\alpha. \tag{1}$$

Nyní se zaměřme na směr intenzity. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že půlobruč je nabitá kladně.



Z pravoúhlého trojúhelníku potom můžeme vyjádřit složku elektrické intenzity $\mathrm{d}E_z$ pomocí funkce kosinus.

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E \cos\omega. \tag{2}$$

Jelikož jsou pravoúhlé trojúhelníky vyznačené na obrázku podobné (podle věty uu), můžeme zapsat

$$\cos\omega = \frac{z}{r},$$

a z Pythagorovy věty víme

$$r^2 = z^2 + R^2, \tag{3}$$

tudíž můžeme kosinus vyjádřit jako

$$\cos\omega = \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}. \tag{4}$$

Spojením (1), (2), (3) a (4) dostaneme

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathrm{d}\alpha,$$

což zintegrujeme podél celého obvodu půlkružnice, tj. budeme integrovat přes úhel α

$$E_z = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathrm{d}\alpha.$$

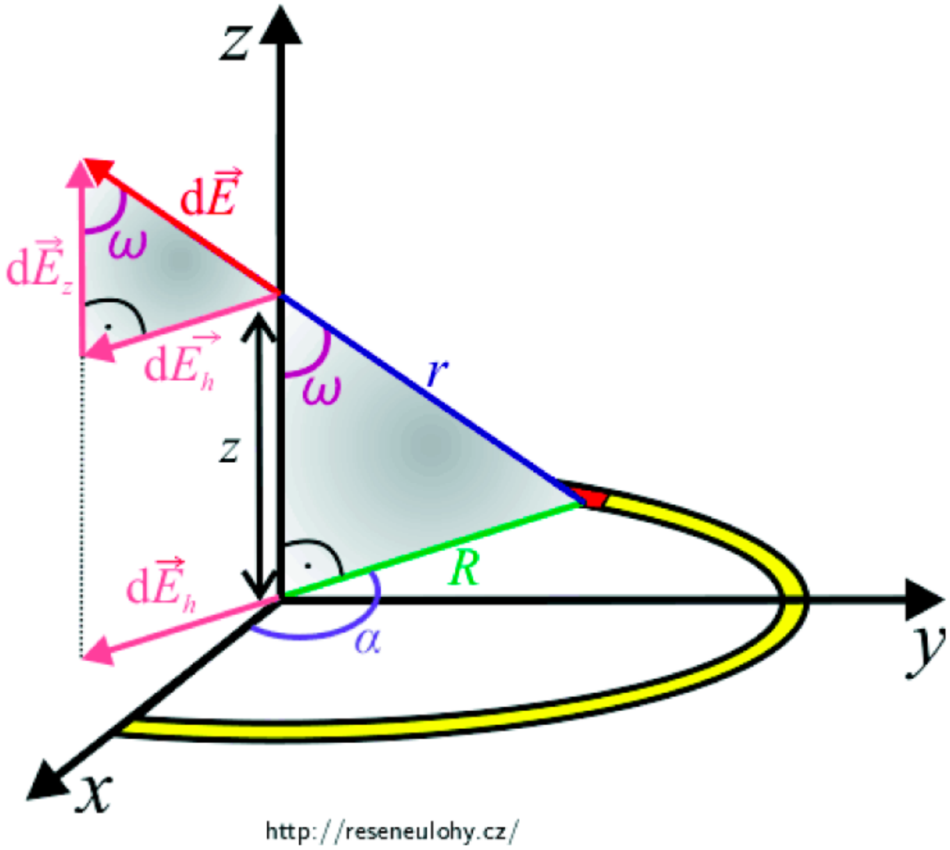
Vzdálenosti R a z nezávisí na úhlu α, proto je můžeme z integrálu vytknout

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^\pi \mathrm{d}\alpha.$$

Po zintegrování dostáváme

$$E_z = \frac{1}{4\epsilon_0}\frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

Abychom mohli určit zbývající dvě složky elektrické intenzity, vyjádříme nejprve analogicky horizontální složku intenzity E_h.



Z pravoúhlého trojúhelníka je patrné, že

$$\mathrm{d}E_h = \mathrm{d}E \sin\omega. \tag{5}$$

Již víme, že jsou trojúhelníky podobné podle věty uu, můžeme proto vyjádřit sinus jako

$$\sin\omega = \frac{R}{r},$$

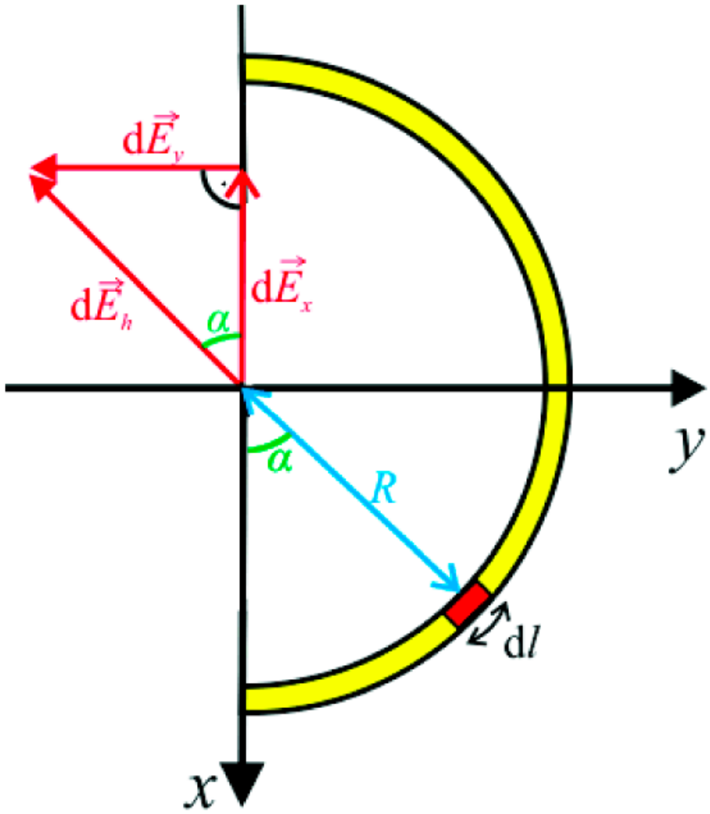
přidáme-li poznatek z Pythagorovy věty (3), dostaneme

$$\sin\omega = \frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}. \tag{6}$$

Spojením (1),(3),(5) a (6) dostaneme

$$\mathrm{d}E_h = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha,$$

Nyní se zaměříme na vyjádření složek E_x a E_y. Pro lepší názornost si celou situaci promítneme do roviny xy.



http://reseneulohy.cz/

Z pravoúhlého trojúhelníka je zjevné, že

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E_h \sin\alpha,$$

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E_h \cos\alpha.$$

Začněme nejdříve s $\mathrm{d}E_y$,

$$\mathrm{d}E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

což opět zintegrujeme podél celého obvodu půlkružnice, tj. budeme integrovat přes úhel α

$$E_y = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Vzdálenosti R a z nezávisí na úhlu α, proto je můžeme z integrálu vytknout

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^\pi \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\left[-\cos\alpha\right]_0^\pi,$$

tedy

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

Nyní vypočítáme $\mathrm{d}E_x$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

což zintegrujeme podél celého obvodu půlkružnice, tj. budeme integrovat přes úhel α

$$E_x = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Vzdálenosti R a z nezávisí na úhlu α, proto je můžeme z integrálu vytknout

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^\pi \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\left[\sin\alpha\right]_0^\pi,$$

$$E_x = 0.$$

což nás vzhledem k symetrii půlkružnice nepřekvapuje.

Nápověda – potenciál

Analogicky jako při výpočtu elektrické intenzity využijeme vztahu pro potenciál bodového náboje. Potenciál bodového náboje ve vzdálenosti r je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

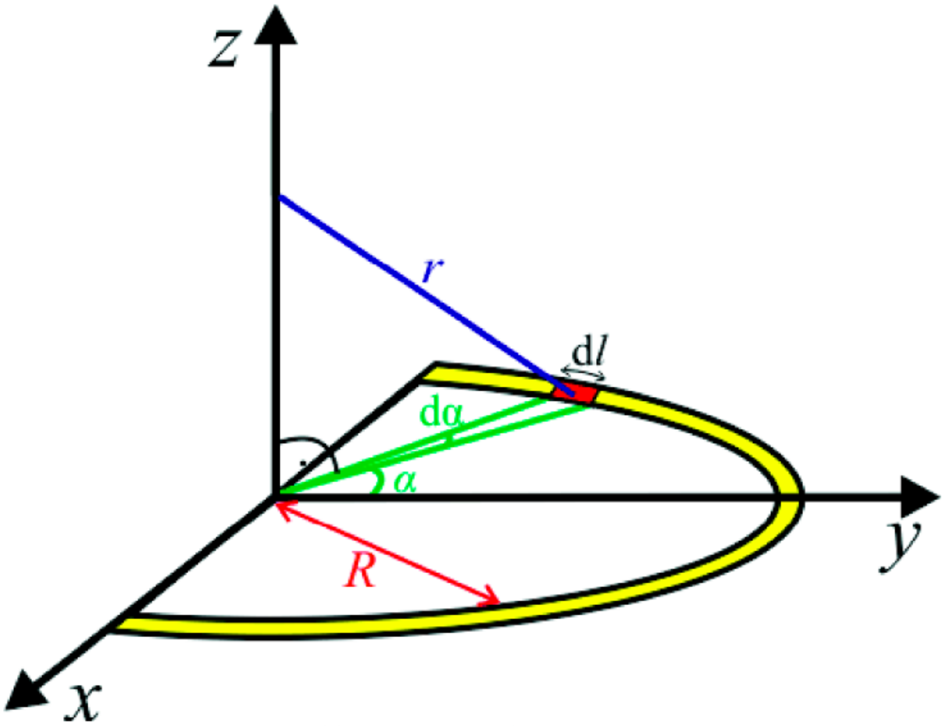
Vymyslete, jak vztahu využít pro výpočet potenciálu na ose půlobruče.

Řešení nápovědy

Půlobruč rozdělíme na malé kousky, které se budou chovat jako bodové náboje. Celkový potenciál získáme „sečtením“ (přesněji integrováním) všech příspěvků od těchto malých kousků.

Rozbor – potenciál

Nejprve si celou situaci nakreslíme do kartézských souřadnic. Osa půlobruče bude splývat s osou z a půlobruč bude ležet v rovině xy. Do obrázku si vyznačíme také dvě z cylindrických souřadnic α a z. Cylindrickou souřadnici ρ nebudeme potřebovat, jelikož má půlobruč konstantní poloměr R.



Řešení – potenciál

Bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r potenciál

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

Zaměříme-li se na jednu malou část půlobruče, pak potenciál od této části v daném místě na ose půlobruče je

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r}, \tag{8}$$

a jelikož je půlobruč nabita s lineární hustotou λ, pak

$$\mathrm{d}Q = \lambda \mathrm{d}l.$$

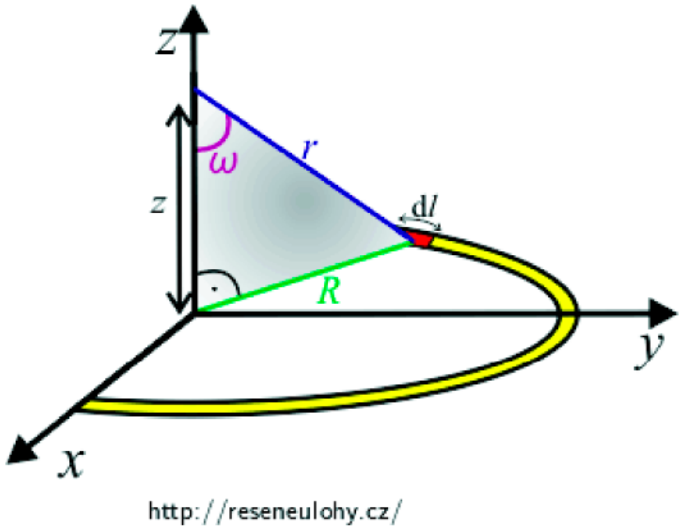
Využijeme-li navíc poznatku $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\alpha$, pak dostaneme

$$\mathrm{d}Q = \lambda R\,\mathrm{d}\alpha. \tag{9}$$

Z (8) a (9) dostaneme

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{r}\mathrm{d}\alpha. \tag{10}$$

Nyní se zaměříme na vyjádření vzdálenosti r pomocí parametrů půlobruče a vzdálenosti z.



Z pravoúhlého trojúhelníka na obrázku můžeme z Pythagorovy věty vyjádřit

$$r = \sqrt{z^2 + R^2}. \tag{11}$$

Spojíme-li (10) a (11) dostaneme

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}\mathrm{d}\alpha,$$

což zintegrujeme podél celého obvodu půlkružnice, tj. budeme integrovat přes úhel α

$$\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}\mathrm{d}\alpha.$$

Vzdálenosti R a z nezávisí na úhlu α, proto je můžeme z integrálu vytknout

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\alpha,$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}\Big[\alpha\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\varphi = \frac{1}{4\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Pozn. potenciál na ose z nabité půlobruče, je polovinou potenciálu nabité obruče (srovnání Nabitá obruč, Řešení c)). Tato vlastnost platí obecně, je to způsobeno tím, že potenciál je skalární funkce.

Nápověda – ověření vztahu

Potenciál a elektrickou intenzitu nám dává do vztahu jedna z rovností, ve které vystupuje matematický operátor gradient.

Zkuste si vzpomenout, popřípadě najít o jaký vztah se jedná. Připomeňte si, co gradient znamená, a jak se počítá (v kartézských souřadnicích).

Řešení nápovědy

Pro potenciál a elektrickou intenzitu platí:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Výsledkem operátoru gradient je vektor, který udává směr, ve kterém potenciál φ nejvíce roste. Elektrická intenzita $\vec{E}$ tedy míří směrem, ve kterém elektrický potenciál nejrychleji klesá (ve vztahu je znaménko mínus).

V kartézských souřadnicích se gradient počítá podle vztahu:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Pro ověření obráceného vztahu využijeme

$$\varphi = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

kde integrace probíhá z místa A, kde jsme zvolili nulovou hodnotu potenciálu, do místa B, kde hodnotu potenciálu určujeme.

Řešení – ověření vztahu

Máme ověřit, zda platí vztah zmíněný v řešení nápovědy

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Ověření můžeme provést jen pro body na ose půlobruče a jen pro z–ovou složku, protože v části b) jsme určili pouze závislost potenciálu na souřadnici z.

Potenciál na ose půlbruče je

$$\varphi = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

Složka gradientu potenciálu do osy z je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\lambda R}{(z^2 + R^2)^{3/2}} 2z = -\frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}},$$

což dáva z-tovou složku elelktrické intenzity E_z ve stejném tvaru jako přímý výpočet v části a)

$$E_z = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Nyní ještě ověříme, zda platí obrácený vztah

$$\varphi = -\int_{\infty}^{\hat{z}} E_z \mathrm{d}z,$$

kde integrujeme podél osy z z „nekonečna“, kde je potenciál roven nule, do místa se souřadnicí $\hat{z}$.

Dosadíme-li vypočítanou hodnotu E_z, dostaneme

$$\varphi = -\int_{\infty}^{\hat{z}} \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathrm{d}z,$$

$$\varphi = -\frac{\lambda R}{4\epsilon_0} \int_{\infty}^{\hat{z}} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathrm{d}z.$$

Integrál budeme řešit pomocí substituce, použijeme substituci:

$$R^2 + z^2 = a,$$

$$2z\mathrm{d}z = \mathrm{d}a,$$

$$z \to \infty \Rightarrow a \to \infty \qquad ; \qquad z = \hat{z} \Rightarrow a = \hat{z}^2 + R^2.$$

$$\varphi = -\frac{\lambda R}{8\epsilon_0} \int_{\infty}^{\hat{z}^2+R^2} \frac{1}{a^{3/2}} \mathrm{d}a,$$

$$\varphi = \frac{\lambda R}{4\epsilon_0} \left[\frac{1}{a^{1/2}}\right]_{\infty}^{\hat{z}^2+R^2}.$$

Po dosazení mezí dostáváme

$$\varphi = \frac{\lambda R}{4\epsilon_0} \frac{1}{(R^2+\hat{z}^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+\hat{z}^2}}.$$

Jelikož $\hat{z}$ je libovolný bod na ose z, můžeme přeznačit jeho souřadnici na z

$$\varphi = \frac{\lambda R}{4\epsilon_0} \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}},$$

čímž dostaneme očekávaný výraz.

Odpověď

Elektrická intenzita na ose homogenně nabité půlobruče

$$E_z = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

$$E_x = 0.$$

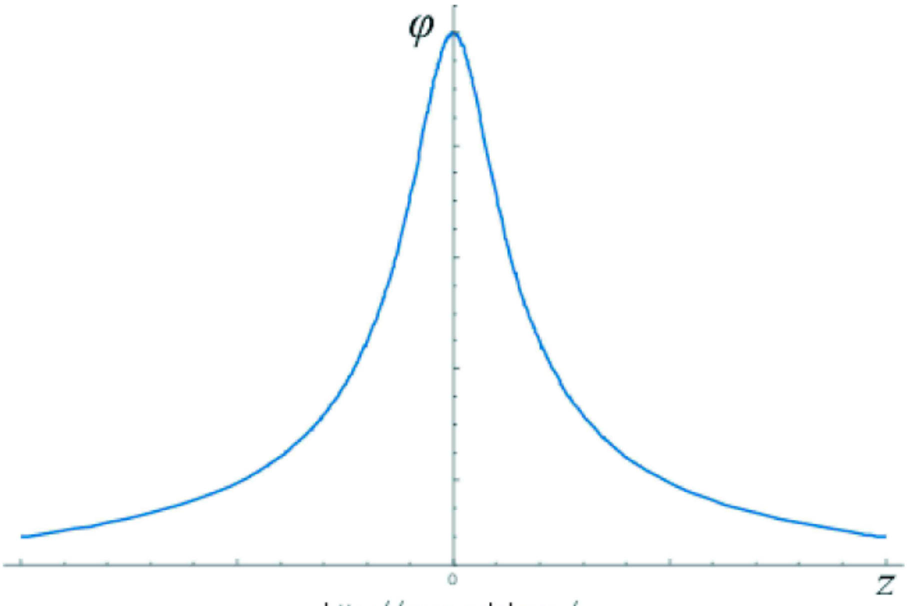
Potenciál na ose homogenně nabité půlobruče

$$\varphi = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

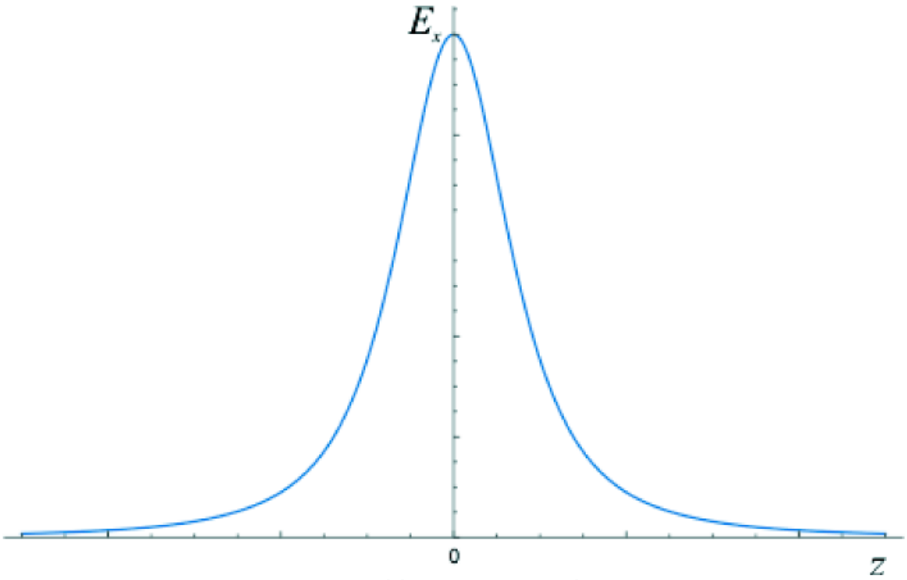
Dále jsme ověřili pro body na ose obruče platnost vztahu mezi $\vec{E}$ a φ.

Grafy průběhu elektrické intenzity a potenciálu

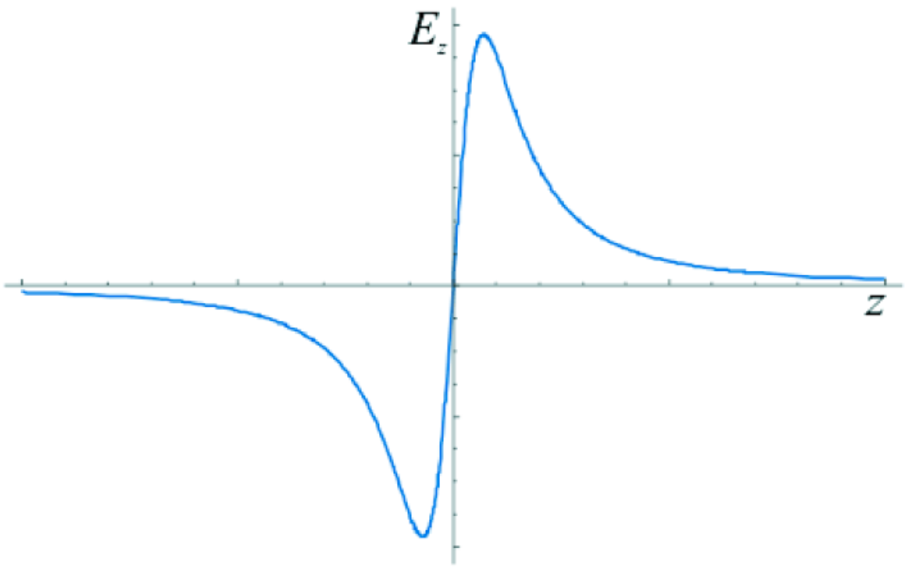
Na následujících obrázcích si můžeme prohlédnout průběhy závislostí elektrické intenzity a potenciálu na vzdálenosti z od středu půlobruče.



http://reseneulohy.cz/



http://reseneulohy.cz/



http://reseneulohy.cz/

Čtvrtkružnice a oblouk o úhlu β

Čtvrtkružnice

Výpočet elektrické intenzity a potenciálu na ose z jsme dělali pro půlkružnici. Ukažme si, jak by to dopadlo s čtvrtkružnicí.

Pro půlkružnici jsme odvodili následující vztahy

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\alpha,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\pi} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\pi} \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

U čtvrtkružnice bude změna pouze v mezích integrálů.

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Po zintegrování dostaneme

$$E_z = \frac{1}{8\epsilon_0}\frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}},$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

Obdobně pro potenciál půlkružnice jsme odvodili

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\alpha.$$

U čtvrtkružnice bude změna pouze v mezích integrálu.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha.$$

Po zintegrování dostaneme

$$\varphi = \frac{1}{8\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Oblouk o úhlu β

Opět využijme výsledků, které jsme odvodili. Konkrétní úhel v mezích integrálů nyní nahradíme obecným úhlem β.

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\beta} \mathrm{d}\alpha,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\beta} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \int_0^\beta \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha,$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}} \int_0^\beta \mathrm{d}\alpha.$$

Po zintegrování dostaneme

$$E_z = \frac{\beta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} (-\cos\beta + 1),$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \sin\beta,$$

$$\varphi = \frac{\beta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Komentář – závislost na velikosti úhlu β

Srovnáme-li z složku elektrické intenzity půlkružnice, čtvrtkružnice a oblouku o úhlu β, můžeme si všimnout, že je tato složka elektrické intenzity úměrná velikosti oblouku. V případě půlkružince je $\beta = \pi$ a čtvrtkružnice $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Půlkružnice

$$E_z = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

Čtvrtkružnice

$$E_z = \frac{1}{8\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

Oblouk o úhlu β

$$E_z = \frac{\beta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}.$$

Srovnáním potenciálů dojdeme ke stejnému závěru.

Půlkružnice

$$\varphi = \frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Čtvrtkružnice

$$\varphi = \frac{1}{8\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

Oblouk o úhlu β

$$\varphi = \frac{\beta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{z^2+R^2}}.$$

U x a y složky elektrické intenzity úměrnost velikosti oblouku neplatí.

Potenciál a z složka elektrické intenzity jsou úměrné velikosti oblouku, který je nabit elektrickým nábojem, jelikož každý nabitý „kousíček“ obruče přispívá k celkové hodnotě stejně. Ale u x a y složky elektrické intenzity se příspěvek k celkové hodnotě mění, pro některé části obruče je kladný, pro některé naopak záporný, proto není možné, aby x a y složka elektrické intenzity byly úměrné velikosti oblouku.

Nabitá obruč

Úloha číslo: 2004

V bodech na ose obruče o poloměru R, která je nabita lineární hustotou λ, určete přímou integrací

a) elektrickou intenzitu $\vec{E}$,

b) potenciál φ.

c) Ověřte platnost vztahu mezi $\vec{E}$ a φ.

Nápověda a)

Kladný bodový náboj Q vytváří v místě o vzdálenosti r pole o velikosti intenzity

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Vektor intenzity $\vec{E}$ míří směrem od náboje, pokud je Q kladný. V opačném případě míří k náboji.

Zamyslete se nad tím, jak bychom tohoto poznatku mohli využít v této úloze.

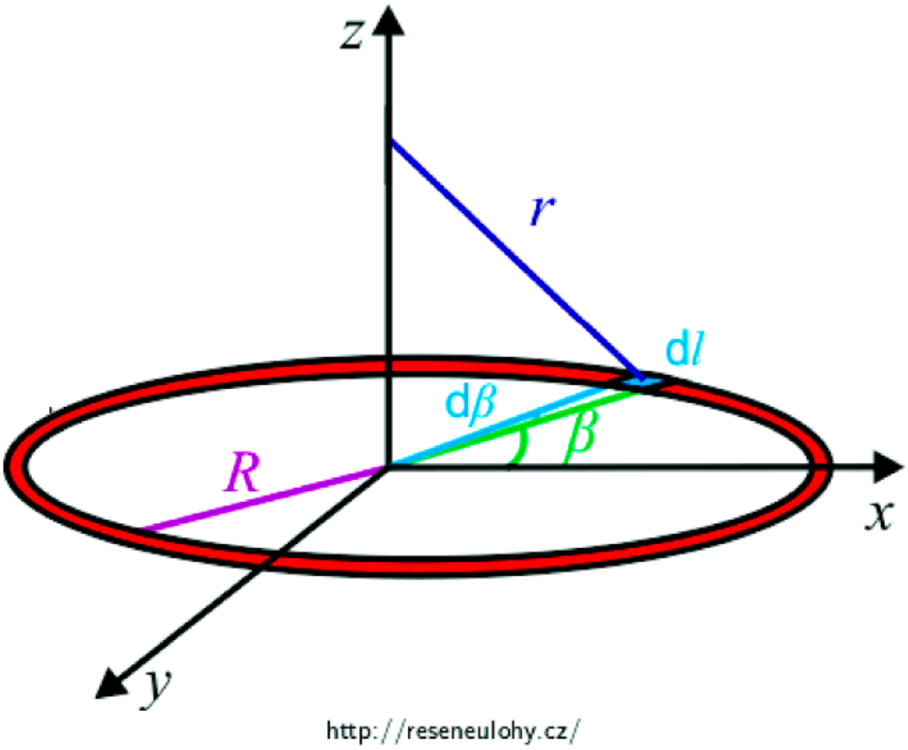
Řešení nápovědy a)

Obruč rozdělíme na malé kousky, které se budou chovat jako bodové náboje. Celkovou intenzitu získáme „sečtením“ (přesněji integrováním) příspěvků od všech těchto malých kousků.

Rozbor a)

Nejprve si celou situaci nakreslíme do kartézských souřadnic. Osa obruče bude splývat s osou z a obruč bude ležet v rovině xy.

Obruč rozdělíme na malé části, které se budou chovat jako bodové náboje. Celkovou intenzitu získáme zintegrováním příspěvků intenzit od jednotlivých kousků.



Řešení a)

Bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r pole o intenzitě

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Je-li obruč nabita s lineární hustotou λ, potom náboj dQ na nekonečně malém kousku obruče dl má velikost:

$$\mathrm{d}Q = \lambda \mathrm{d}l,$$

kde $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\beta$ (viz výpočet délky kruhového oblouku v radiánech).

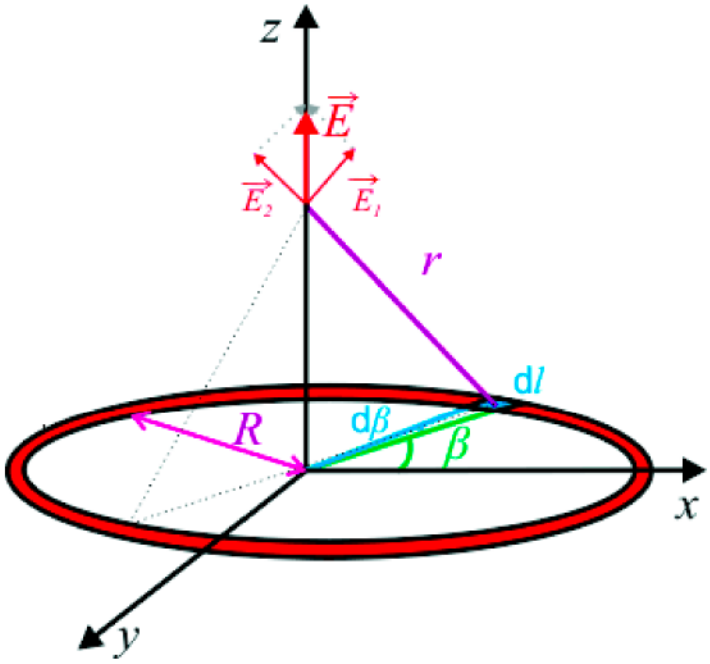
Potom

$$\mathrm{d}Q = \lambda R \mathrm{d}\beta$$

a tudíž

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{r^2}\mathrm{d}\beta. \tag{1}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že obruč je nabitá kladně. Nyní se zaměřme na směr výsledné intenzity. Využijeme souměrnost obruče.



http://reseneulohy.cz/

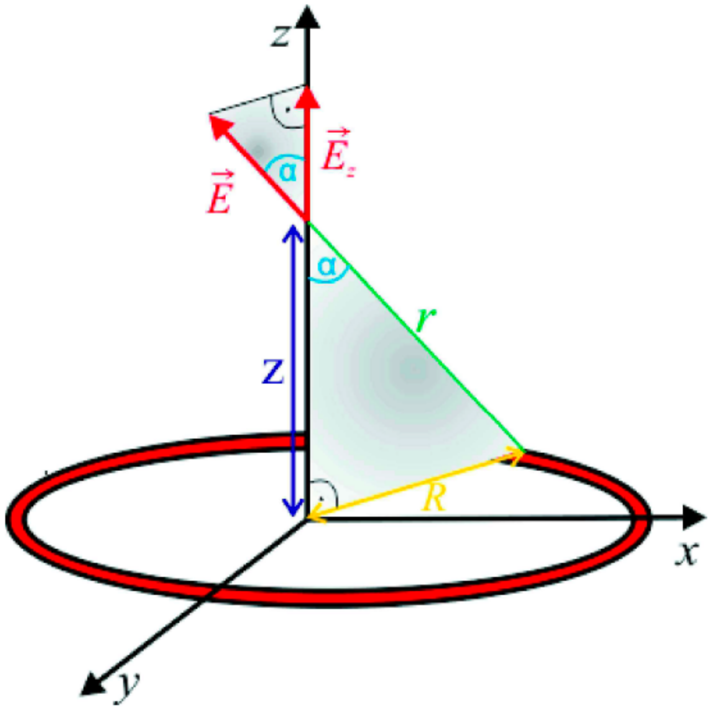
Z obrázku je patrné, že výsledný směr intenzity elektrického pole bude mít směr osy z, jelikož x-ová složka elektrické intenzity od malého kousku obruče se odečte s x-ovou složkou elektrické intenzity od malého kousku obruče, který je symetrický (středově souměrný) s tímto malým kouskem podle středu obruče. Stejně tak bude y-ová složka také nulová.

Pozn.: Pokud bychom si představili příspěvky k celkové intenzitě od všech kousků obruče, tak vyplní povrch kužele. Z toho je patrné, že jejich součet bude mířit ve směru osy obruče, tj. bude mít nenulovou pouze z–ovou složku.

Nyní se vrátíme k rovnici (1):

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{r^2}\mathrm{d}\beta.$$

Do obrázku si zakreslíme úhel α a elektrickou intenzitu promítneme do směru z, neboli vyjádříme její z–ovou složku. Ostatní složky elektrické intenzity nás nemusí zajímat, jelikož z důvodu symetrie se vzájemně odečtou (viz výše).



Je zřejmé, že

$$\mathrm{d}E_z = \cos\alpha\,\mathrm{d}E. \tag{2}$$

Pozn.: V tomto vztahu již vystupuje velikost intenzity E a velikost její složky E_z.

Oba pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné (mají stejné 2 úhly – pravý a α), tudíž můžeme vyjádřit

$$\cos\alpha = \frac{z}{r}$$

a z Pythagorovy věty víme:

$$r^2 = R^2 + z^2,$$

což nám dáva

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \tag{3}$$

Spojením (1), (2) a (3) dostaneme

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{z^2 + R^2}\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}d\beta,$$

$$dE_z = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}}d\beta,$$

což zintegrujeme podél celého obvodu kružnice, tj. integrovat budeme přes úhel β

$$E_z = \int_0^{2\pi}\frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}}\mathrm{d}\beta.$$

Vzdálenosti R a z nezávisejí na úhlu β, proto je můžeme z integrálu vytknout

$$E_z = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(z^2 + R^2)^3}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta.$$

Po zintegrování dostáváme

$$E_z = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}} 2\pi,$$

$$E_z = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}}.$$

Tedy

$$\vec{E} = \left(0,\ 0,\ \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}}\right).$$

Nápověda b)

Analogicky jako v části a) využijeme vztahu pro potenciál bodového náboje. Potenciál bodového náboje ve vzdálenosti r je

$$\varphi = k\frac{Q}{r}.$$

Vymyslete, jak vztahu využít pro výpočet potenciálu na ose obruče.

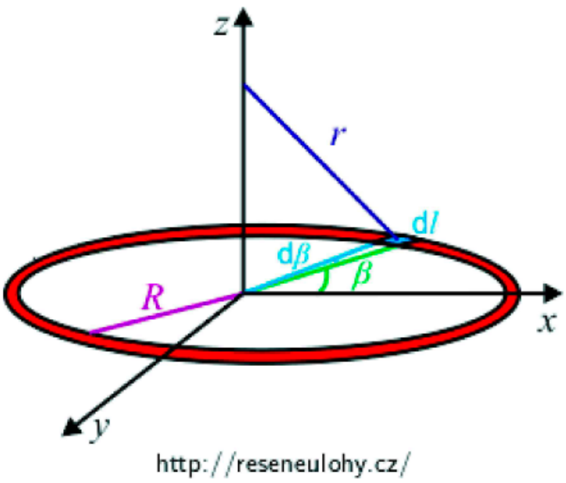
Řešení nápovědy b)

Obruč rozdělíme na malé kousky, které se budou chovat jako bodové náboje. Celkový potenciál získáme „sečtením“ (přesněji integrováním) všech příspěvků od těchto malých kousků.

Rozbor b)

Podobně jako v a) si celou situaci nakreslíme do kartézských souřadnic. Osa obruče bude splývat s osou z a obruč bude ležet v rovině xy.

Obruč rozdělíme na malé části, které se budou chovat jako bodové náboje. Pak využijeme poznatku z nápovědy b).



Řešení b)

Bodový náboj Q vytváří ve vzdálenost r potenciál

$$\varphi = k\frac{Q}{r}.$$

Zaměříme-li se na jednu malou část obruče, pak potenciál od této části v daném místě na ose obruče je

$$d\varphi = k\frac{dQ}{r}, \tag{4}$$

a jelikož je obruč nabita s lineární hustotou λ, pak

$$dQ = \lambda dl.$$

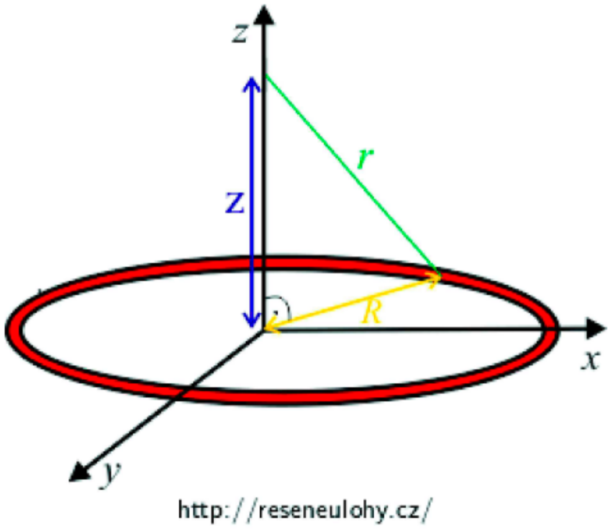
Využijeme-li navíc poznatku $dl = Rd\beta$, pak dostaneme

$$dQ = \lambda R d\beta. \tag{5}$$

Z (4) a (5)

$$d\varphi = k\frac{\lambda R}{r}d\beta. \tag{6}$$

Nyní se zaměříme na vyjádření vzdálenosti r pomocí parametrů obruče a vzdálenosti z.



Z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku, vyjádříme r využitím Pythagorovy věty

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}. \tag{7}$$

Spojením (6) a (7) dostaneme

$$d\phi = k\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}d\beta.$$

Protože potenciál je skalární veličina, není třeba se zabývat jeho směrem a můžeme rovnou zintegrovat jednotlivé příspěvky:

$$\varphi = \int_0^{2\pi} k\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}d\beta,$$

$$\phi = k\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\beta,$$

$$\varphi = k\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}2\pi,$$

tedy

$$\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Nápověda c)

Potenciál a elektrickou intenzitu spojuje vztah, ve kterém vystupuje matematický operátor gradient.

Zkuste si vzpomenout, popřípadě najít o jaký vztah se jedná. Připomeňte si, co gradient znamená a jak se počítá (v kartézských souřadnicích).

Řešení nápovědy c)

Pro potenciál a elektrickou intenzitu platí:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Výsledkem operátoru gradient je vektor, který udává směr, ve kterém potenciál φ nejrychleji roste. Elektrická intenzita $\vec{E}$ tedy míří směrem, ve kterém elektrický potenciál nejrychleji klesá (ve vztahu je znaménko mínus).

V kartézských souřadnicích se gradient funkce f počítá podle vztahu:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Pro ověření obráceného vztahu využijeme

$$\varphi = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

kde integrace probíhá z místa A, kde jsme zvolili nulovou hodnotu potenciálu, do místa B, kde hodnotu potenciálu určujeme.

Řešení c)

Máme ověřit, zda platí vztah zmíněný v řešení nápovědy c), tj. vztah

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Ověření můžeme provést jen pro body na ose obruče a jen pro z–ovou složku, protože v části b) jsme určili pouze potenciál na ose z. Pro z-tovou složku elektrické intenzity v bodech osy obruče by mělo platit $E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Spočtěme tedy uvedenou derivaci.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}(-1)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}}2z = -\frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}}.$$

Tedy

$$E_z = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}},$$

což je stejný vztah, jaký nám vyšel přímou integrací v části a).

Nyní ještě ověříme, zda platí obrácený vztah

$$\varphi = -\int_{\infty}^{\hat{z}} E_z \mathrm{d}z.$$

Dosadíme-li vypočítanou hodnotu E_z z části a), dostaneme

$$\varphi = -\int_{\infty}^{\hat{z}} \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}} \mathrm{d}z.$$

Konstanty vytkneme před integrál

$$\varphi = -\frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \int_{\infty}^{\hat{z}} \frac{z}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}} \mathrm{d}z.$$

Integrál budeme řešit pomocí substituce,

$$a = R^2 + z^2,$$

$$\mathrm{d}a = 2z\mathrm{d}z$$

a přepočítáme meze:

$$z \to \infty \Rightarrow a \to \infty \qquad ; \qquad z = \hat{z} \Rightarrow a = R^2 + \hat{z}^2.$$

$$\varphi = -\frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \int_{\infty}^{R^2+\hat{z}^2} \frac{1}{2a^{3/2}} \mathrm{d}a,$$

Spočteme integrál

$$\varphi = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{a^{1/2}}\right]_{\infty}^{R^2+\hat{z}^2},$$

a dosadíme meze

$$\varphi = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{1}{(R^2+\hat{z}^2)^{1/2}}.$$

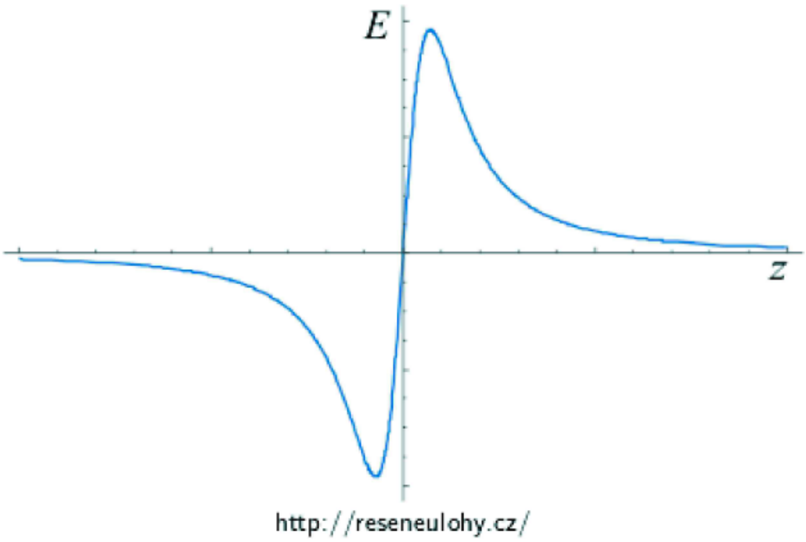
Jelikož $\hat{z}$ je libovolný bod na ose z, můžeme napsat

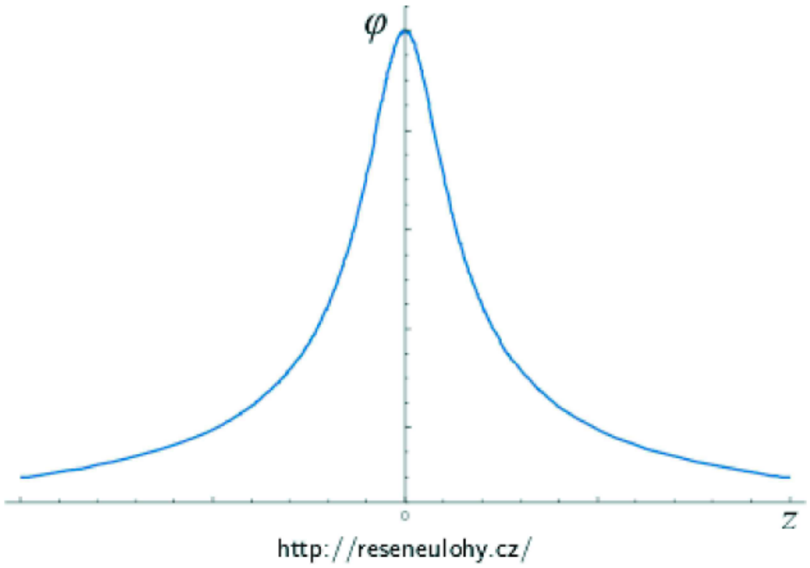
$$\varphi = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}.$$

což je stejný vztah, jaký nám vyšel přímou integrací v části b).

Grafy průběhu elektrické intenzity a potenciálu

Na následujících obrázcích si můžeme prohlédnout průběhy závislostí elektrické intenzity a potenciálu na vzdálenosti z od středu obruče.





Odpověď

Velikost elektrické intenzity na ose homogeně nabité obruče je

$$E = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}},$$

intenzita míří ve směru osy z.

Potenciál na ose homogeně nabité obruče má velikost

$$\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

Dále jsme pro body na ose obruče ověřili platnost vztahu mezi $\vec{E}$ a φ.

Analogická úloha

Analogickou úlohou je úloha Nabitá půlobruč.

Nabitá kruhová deska

Úloha číslo: 2007

Přímou integrací určete elektrickou intenzitu a potenciál na ose kruhového disku o poloměru R, který je homogenně nabitý plošnou hustotou σ. Ověřte vztah mezi elektrickou intenzitou a potenciálem.

Nápověda – elektrická intenzita

Kladný bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r pole o velikosti intenzity

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Vektor intenzity $\vec{E}$ míří směrem od náboje, pokud je Q kladný. V opačném případě míří k náboji.

Zamyslete se nad tím, jak bychom tohoto poznatku mohli využít v této úloze.

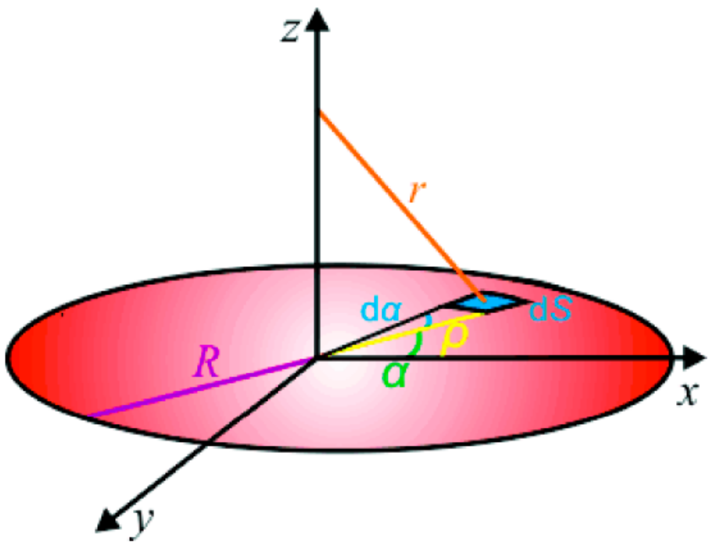
Řešení nápovědy

Kruhový disk rozdělíme na malé kousky (plošky dS), které se budou chovat jako bodové náboje. Celkovou intenzitu získáme „sečtením“ (přesněji integrováním) příspěvků od všech těchto malých kousků.

Rozbor – elektrická intenzita

Pro lepší představu si celou situaci nakreslíme do kartézských souřadnic. Do obrázku si vyznačíme také cylindrické souřadnice ρ, α, z.

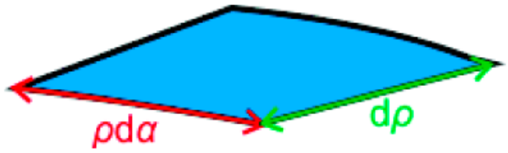
Pozn. pro cylindrické souřadnice se standartně používá písmen r, φ, z. Jelikož se písmenem φ označuje elektrický potenciál, s kterým budeme počítat, bylo nutné úhel označit jinak.



Dle nápovědy rozdělíme disk na malé (infinitezimální) plošky, které se budou chovat jako bodové náboje.

Obsah nekonečně malé plošky

Vztah pro výpočet obsahu nekonečné malé plošky si odvodíme z obrázku.



Pro nekonečně malou plošku platí

$$dS = \rho \, d\alpha \, d\rho.$$

Řešení – elektrická intenzita

Bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r pole o velikosti intenzity

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Velikost elektrické intenzity od nekonečné malé plošky dS

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}.$$

Je-li disk nabit s plošnou hustotou σ, potom náboj na nekonečně malém kousku disku dS je:

$$dQ = \sigma dS,$$

kde $dS = \rho \, d\alpha \, d\rho$ viz předchozí oddíl.

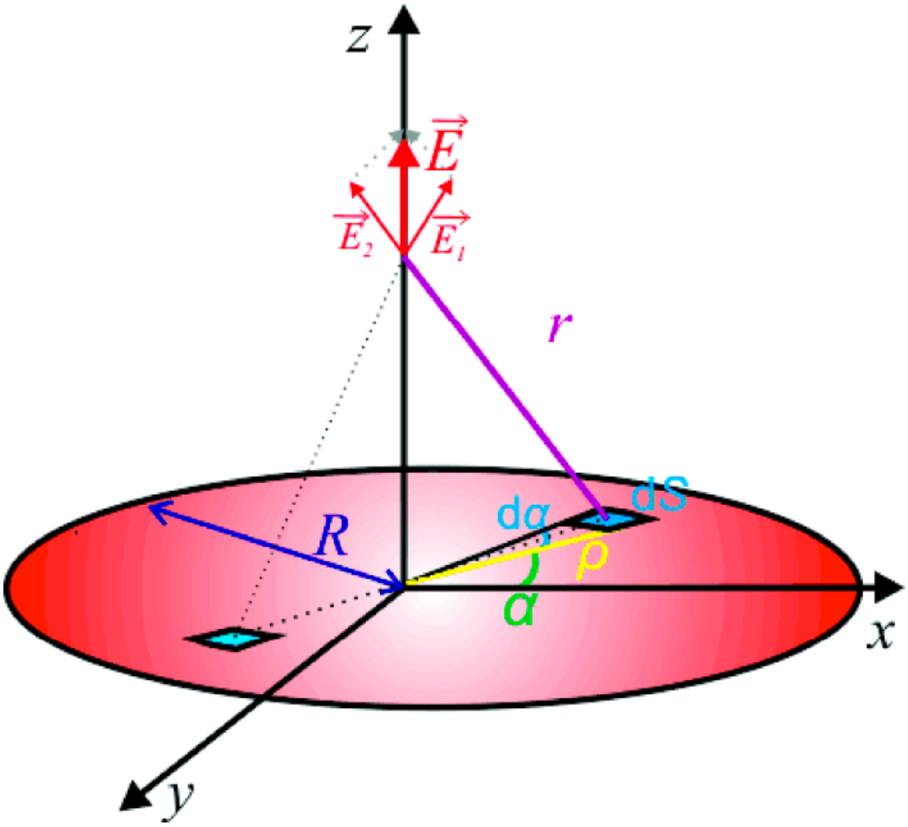
Potom dostáváme

$$dQ = \sigma\rho d\alpha d\rho$$

a tudíž

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\rho d\alpha d\rho}{r^2}. \tag{1}$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že disk je nabit kladně. Nyní se zaměříme na směr intenzity. Stejně jako v úloze Nabitá obruč využijeme souměrnosti disku.

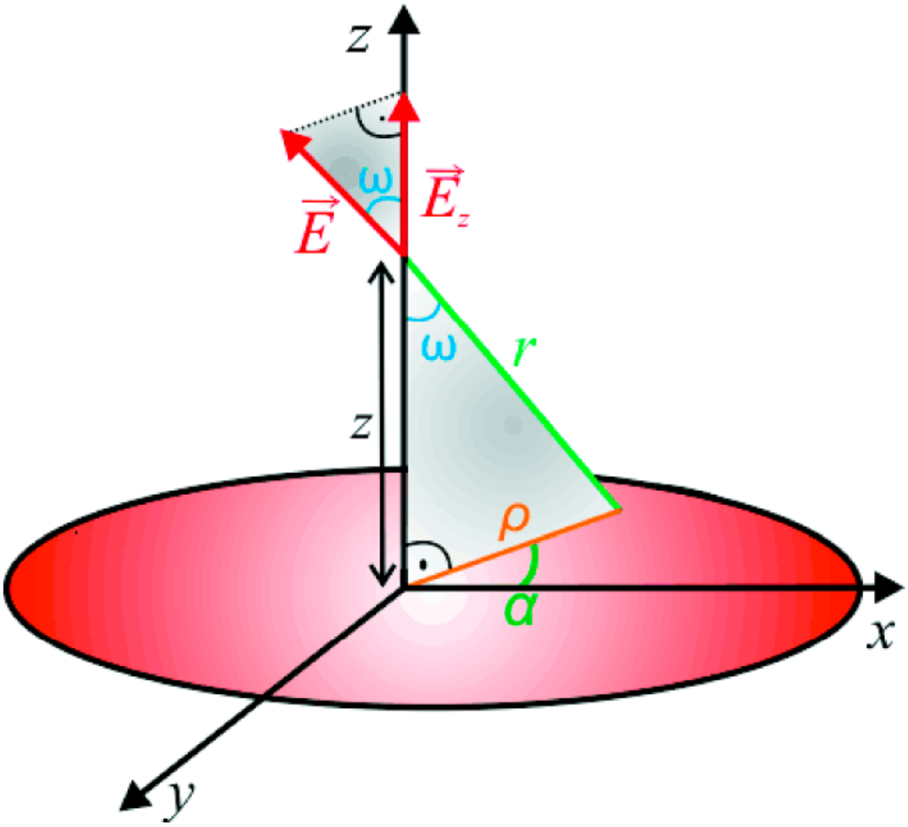


Z obrázku je patrné, že směr celkové intenzity elektrického pole bude mít směr osy z, jelikož x-ová složka elektrické intenzity od plošky disku se odečte s x-ovou složkou elektrické intenzity plošky, která je symetrická (středově souměrná) s touto ploškou podle středu disku. Stejně tak bude y-ová složka celkové intenzity také nulová.

Nyní se vrátíme k rovnici (1).

V obrázku si označíme úhel ω a elektrickou intenzitu od jedné malé plošky promítneme do směru z, neboli vyjádříme její z-ovou složku:

$$E_z = E \cos \omega. \tag{2}$$



Z pravoúhlosti spodního šedého trojúhelníku dostaneme

$$\cos\omega = \frac{z}{r}$$

a Pythagorova věta nám k tomu přidá

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

což dává

$$\cos\omega = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \tag{3}$$

Spojením (1), (2) a (3) dostaneme

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\rho\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho}{\rho^2 + z^2}\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}},$$

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho$$

což zintegrujeme přes obsah celého disku, tj. budeme integrovat přes ρ a α

$$E_z = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho.$$

Veličiny σ a z jsou nezávislé na integračních proměnných ρ a α, tudíž je můžeme vytknout před integrál

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho.$$

Nyní výraz zintegrujeme přes proměnou α, jelikož se ve výrazu α nevyskytuje, integrujeme vlastně konstantu

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathrm{d}\rho,$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathrm{d}\rho.$$

Tento integrál budeme řešit substitucí:

$$a = \rho^2 + z^2,$$

$$\mathrm{d}a = 2\rho \mathrm{d}\rho,$$

přepočítáme meze:

$$\rho = 0 \Rightarrow a = z^2; \qquad \rho = R \Rightarrow a = z^2 + R^2,$$

a dosadíme do původního integrálu

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{1}{2a^{3/2}} \mathrm{d}a,$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_{z^2}^{z^2+R^2} a^{-3/2} \mathrm{d}a,$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[-2a^{-1/2}\right]_{z^2}^{z^2+R^2}, \tag{*}$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Po úpravě dostáváme:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right).$$

Vzdálenost z bereme jako kladnou, proto ještě doplníme absolutní hodnotu.

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right).$$

Nápověda – potenciál

Analogicky jako v části a) využijeme vztah pro potenciál bodového náboje. Potenciál bodového náboje ve vzdálenosti r je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Vymyslete, jak vztah využít pro výpočet potenciálu na ose nabitého disku.

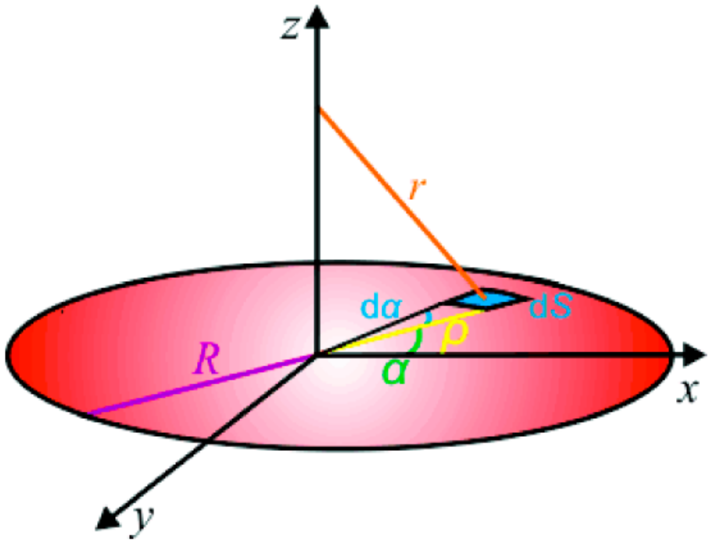
Řešení nápovědy

Disk rozdělíme na malé kousky, které se budou chovat jako bodové náboje. Celkový potenciál získáme „sečtením“ (přesněji integrováním) příspěvků od všech těchto malých kousků.

Rozbor – potenciál

Podobně jako v a) si celou situaci nakreslíme a použijeme kartézské souřadnice. Osa disku bude splývat s osou z a disk bude ležet v rovině xy.

Disk rozdělíme na (nekonečné) malé plošky, které se budou chovat jako bodové náboje. Pak využijeme poznatku z nápovědy a potenciál získáme integrací příspěvků všech plošek.



Řešení – potenciál

Bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r potenciál

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}.$$

Zaměříme-li se na malou plošku disku $\mathrm{d}S$ s nábojem $\mathrm{d}Q$, pak potenciál $\mathrm{d}\varphi$ od této plošky je

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r}. \tag{4}$$

Jelikož je disk nabit plošnou hustotou σ, můžeme napsat

$$\mathrm{d}Q = \sigma \mathrm{d}S.$$

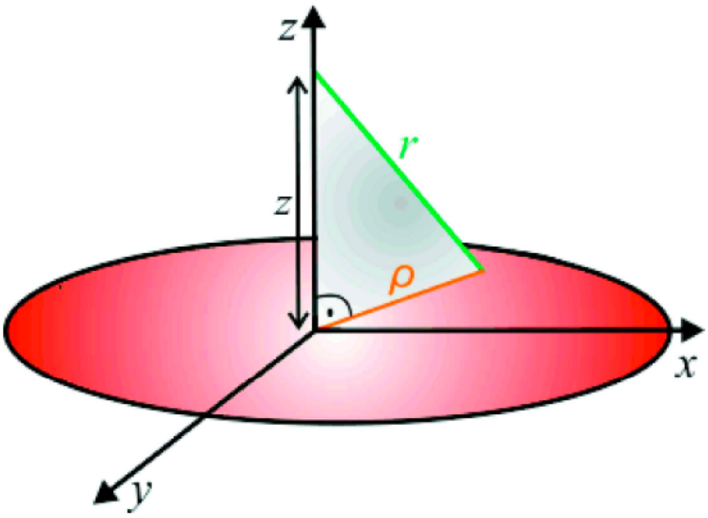
Díky poznatku $\mathrm{d}S = \rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho$ (viz Rozbor – elektrická intenzita – obsah nekonečně malé plošky), dostaneme

$$\mathrm{d}Q = \sigma\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho. \tag{5}$$

Spojením (4) a (5) získáme

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\rho}{r}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho. \tag{6}$$

Nyní se zaměříme na vyjádření vzdálenosti r pomocí parametrů disku a vzdálenosti z.



Aplikujeme Pythagorovu větu na pravoúhlý trojúhelník na obrázku a vyjádříme r,

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \tag{7}$$

Spojením (6) a (7) získáme rovnici

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho,$$

což zintegrujeme přes celý obsah disku, tj. budeme integrovat přes ρ a α.

$$\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha,$$

k a σ jsou konstanty, tudíž je můžeme vytknout před integrál.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha,$$

integrovaná funkce není závislá na α, proto můžeme přes α jednoduše vyintegrovat:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi\sigma\int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\mathrm{d}\rho,$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\mathrm{d}\rho.$$

Na vyřešení tohoto integrálu použijeme stejnou substituci jako v části a)

$$a = \rho^2 + z^2.$$

Dosadíme

$$\mathrm{d}a = 2\rho\mathrm{d}\rho,$$

$$\rho = 0 \Rightarrow a = z^2 \qquad ; \qquad \rho = R \Rightarrow a = R^2 + z^2.$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{z^2}^{R^2+z^2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{d}a,$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}a$$

a spočteme

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[a^{\frac{1}{2}} \right]_{z^2}^{z^2+R^2}, \tag{**}$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2+R^2} - z \right).$$

Vzdálenost z bereme jako kladnou, proto ještě doplníme absolutní hodnotu.

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2+R^2} - |z| \right).$$

Nápověda – ověření vztahu mezi potenciálem a elektrickou intenzitou

Potenciál a elektrickou intenzitu nám dává do vztahu jedna z rovností, ve které vystupuje matematický operátor gradient.

Zkuste si vzpomenout, popřípadě najít o jaký vztah se jedná. Připomeňte si, co gradient znamená a jak se počítá (v kartézských souřadnicích).

Řešení nápovědy

Pro potenciál a elektrickou intenzitu platí:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Výsledkem operátoru gradient je vektor, který udává směr, ve kterém potenciál φ nejvíce roste. Elektrická intenzita $\vec{E}$ tedy míří směrem, ve kterém elektrický potenciál nejrychleji klesá (ve vztahu je znaménko mínus).

V kartézských souřadnicích se gradient počítá podle vztahu:

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Pro ověření obráceného vztahu využijeme

$$\varphi = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

kde integrace probíhá z místa A, kde jsme zvolili nulovou hodnotu potenciálu, do místa B, kde hodnotu potenciálu určujeme.

Řešení – ověření vztahu mezi potenciálem a elektrickou intenzitou

Máme ověřit, zda platí vztah zmíněný v řešení nápovědy c)

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Ověření můžeme provést jen pro body na ose obruče a jen pro z–ovou složku, protože v části b) jsme určili pouze potenciál na ose z.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} (z^2+R^2)^{-\frac{1}{2}} 2z - 1 \right).$$

Tedy

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

což souhlasí s výpočtem.

Nyní ještě ověříme, zda platí obrácený vztah

$$\varphi = -\int_{\infty}^{\hat{z}} E_z \mathrm{d}z,$$

kde integrujeme podél osy z z „nekonečna“, kde je potenciál roven nule, do místa se souřadnicí $\hat{z}$. Protože intenzita má směr osy, můžeme použít vztah $\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = E_z\,\mathrm{d}z$. Dosadíme-li vztah pro E_z z části a), dostaneme

$$\varphi = -\int_{\infty}^{\hat{z}} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\mathrm{d}z,$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{\infty}^{\hat{z}} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\mathrm{d}z,$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\left[\frac{z}{1}\right]_{\infty}^{\hat{z}} - \int_{\infty}^{\hat{z}} \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\mathrm{d}z\right),$$

Zbývající integrál budeme řešit pomocí stejné substituce jako v předchozích částech:

$$R^2 + z^2 = a$$

$$2z\mathrm{d}z = \mathrm{d}a$$

$$z \to \infty \Rightarrow a \to \infty \qquad ; \qquad z = \hat{z} \Rightarrow a = \hat{z}^2 + R^2.$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left([z]_{\infty}^{\hat{z}} - \int_{\infty}^{\hat{z}^2+R^2} \frac{1}{2a^{1/2}}\mathrm{d}a\right),$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left([z]_{\infty}^{\hat{z}} - \int_{\infty}^{\hat{z}^2+R^2} \frac{1}{2}a^{-1/2}\mathrm{d}a\right),$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left([z]_{\infty}^{\hat{z}} - \left[\frac{1}{2}\frac{a^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_{\infty}^{\hat{z}^2+R^2}\right). \tag{8}$$

Hodnotu integrálu nemůžeme dopočítat, jelikož dostáváme neurčitý výraz $\infty - \infty$. Příčinou potíží bylo rozdělení původního integrálu na dva. Z toho důvodu spočítáme původní integrál nejprve jako neurčitý a teprve potom dosadíme meze do výsledného výrazu.

Integrál nebudeme počítat celý znovu, využijeme toho, co jsme již spočítali. Odstraníme z výrazu (8) meze a dosadíme do výsledku použitou substici $a = R^2 + z^2$ (substituce), máme neurčitý integrál spočítaný

$$-\int \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\mathrm{d}z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(z - (R^2+z^2)^{1/2}\right) + \text{konstanta}.$$

Do něj teď doplníme meze

$$\varphi = -\int_{\infty}^{\hat{z}} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\mathrm{d}z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[z - \sqrt{(R^2+z^2)}\right]_{\infty}^{\hat{z}}.$$

Horní mez lze dosadit bez potíží, dosazení spodní (nevlastní) meze znamená spočítat limitu

$$\lim_{z\to\infty} z - \sqrt{(R^2+z^2)} =$$

kterou rozšíříme výrazem $z + \sqrt{R^2+z^2}$ dostaneme

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{z^2 - (R^2+z^2)}{z+\sqrt{R^2+z^2}} = \lim_{z\to\infty} \frac{-R^2}{z+\sqrt{R^2+z^2}} = 0.$$

Výsledkem dosazení mezí je výraz

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\hat{z} - \sqrt{R^2+z^2} - 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+\hat{z}^2} - \hat{z}).$$

Jelikož $\hat{z}$ je libovolný bod na ose z, můžeme přeznačit jeho souřadnici na z

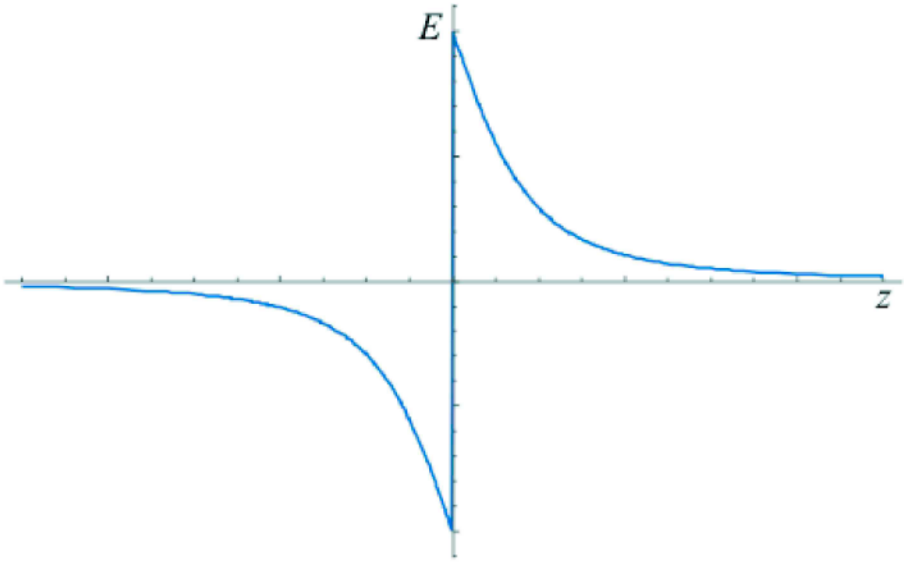
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2} - z),$$

čímž dostaneme očekávaný výraz.

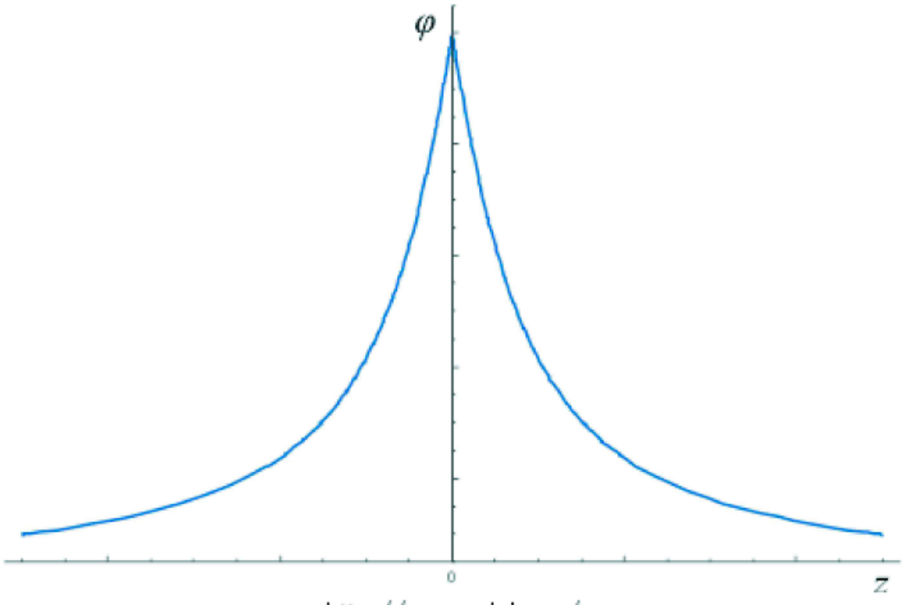
Grafy průběhu elektrické intenzity a potenciálu

Na následujících obrázcích si můžeme prohlédnout závislosti elektrické intenzity a potenciálu na vzdálenosti z od středu disku.

Pozn. při vykreslování grafů je z bráno jako kladné, jelikož jde o vzdálenost.



http://reseneulohy.cz/



Pro $z = 0$ procházíme nabitou plochou. Potenciál je spojitý, kdežto elektrická intenzita má v tomto bodě skok, jehož velikost je $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, což je v souladu s teorií.

Komentář – alternativní řešení s využitím úlohy o obruči

Elektrickou intenzitu a potenciál na ose z homogenně nabitého disku můžeme také najít o něco rychleji s využitím výsledků úlohy Nabitá obruč.

Na ose homogenně nabité obruče o poloměru R je ve vzdálenosti z potenciál (viz Nabitá obruč, Řešení b))

$$\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

a elektrická intenzita (viz Nabitá obruč, Řešení a))

$$E_z = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}}.$$

Začněme potenciálem φ. Představíme si disk jako mnoho „velmi tenkých“ (nekonečně tenkých) obručí naskládaných do sebe. Ploměr této obruče označíme ρ a její tloušťku $\mathrm{d}\rho$. Vztah mezi plošnou hustotou náboje disku σ a délkovou hustotou náboje λ nalezneme třeba pomocí vyjádření celkového náboje jedné obruče

$$Q = \lambda \cdot \text{délka obruče} = \sigma \cdot \text{plocha obruče} \quad \Rightarrow \quad \lambda\, 2\pi\rho = \sigma 2\pi\rho \mathrm{d}\rho \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sigma \mathrm{d}\rho.$$

Pak můžeme napsat, že příspěvek k potenciálu $\mathrm{d}\varphi$ od jedné nekonečně tenké obruče o poloměru ρ je

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\sigma\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\mathrm{d}\rho.$$

Zintegrujeme-li tento výraz přes celý disk (nasčítáme příspěvky od každé z obručí, což můžeme, jelikož je potenciál skalární veličina), dostaneme vztah pro potenciál homogenně nabitého disku

$$\varphi = \int_0^R \frac{1}{2\epsilon_0}\frac{\sigma\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\mathrm{d}\rho.$$

Po zintegrování (využijeme stejnou substituci jako v předešlých oddílech) dostaneme

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - z\right).$$

Nyní se zaměříme na velikost elektrické intenzity E. Již víme, že výsledný směr elektrické intenzity na ose obruče míří ve směru její osy. Stejně jako při výpočtu potenciálu si pomyslně „rozřežeme“ disk na jednotlivé obruče. Jednotlivé příspěvky k elektrické intenzitě od každé obruče můžeme nasčítat (naintegrovat), jelikož mají všechny stejný směr (směr osy obruče).

Příspěvek k elektrické intenzitě $\mathrm{d}E_z$ od jedné nekonečně tenké obruče o poloměru ρ bude

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\lambda\rho}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(z^2+\rho^2)^3}}\mathrm{d}\rho.$$

Zintegrujeme-li (opět stejná substituce) tento výraz přes celý disk, dostaneme vztah pro elektrickou intenzitu homogenně nabitého disku

$$E_z = \int_0^R \frac{\lambda\rho}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{(z^2+\rho^2)^3}}\mathrm{d}\rho = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{(z^2+R^2)}}\right).$$

Odpověď

Elektrická intenzita na ose homogenně nabitého disku na směr osy z a velikost

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right).$$

Potenciál na ose homogenně nabitého disku

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{z^2+R^2} - |z|\right).$$

Dále jsme pro body na ose obruče ověřili platnost vztahu mezi $\vec{E}$ a φ.

Limitní přechod k nabité ploše

Nyní zkusme uvažovat nekonečný poloměr disku. Vznikne homogeně nabitá rovina. Využijme dosavadních výpočtů, pro určení intenzity a potenciálu ve vzdálenost z, nad touto plochou.

Intenzita v okolí homogenně nabité roviny

Z předchozích výpočtů využijeme (viz (*))

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\left[-2a^{-1/2}\right]_{z^2}^{z^2+R^2}.$$

Pokud $R \to \infty$, pak

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\left[-2a^{-1/2}\right]_{z^2}^{\infty} = -\frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\left[\frac{2}{\sqrt{a}}\right]_{z^2}^{\infty} = -\frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\left(0 - \frac{2}{z}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Potenciál homogenně nabité roviny

Z předchozích výpočtů využijeme (viz (**))

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[a^{\frac{1}{2}}\right]_{z^2}^{z^2+R^2},$$

Pokud $R \to \infty$, pak

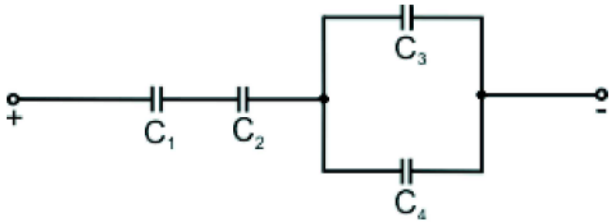
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[a^{\frac{1}{2}} \right]_{z^2}^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\infty - z) = \infty.$$

Po dosazení mezí nám vychází potenciál nekonečný, protože výpočet potenciálu předpokládá nulový potenciál v nekonečnu, ale nám do nekonečna zasahuje nabitá plocha. Abychom se potenciálu dopočítali, museli bychom zvolit jiný postup výpočtu, zde se omezíme pouze na odkaz na úlohu, kde je potenciál rovnoměrně nabité roviny počítán Pole rovnoměrně nabité roviny.

Spojování kondenzátorů I

Úloha číslo: 2014

Kondenzátory jsou zapojeny dle obrázku. Určete celkovou kapacitu zapojení, napětí a náboje na deskách jednotlivých kondenzátorů při zapojení na napětí 100 V.



Nejprve počítejte obecně, poté pro hodnoty $C_1 = C_3 = 1\,\mu F$, $C_2 = C_4 = 10\,\mu F$.

Nápověda – kapacita, napětí a náboj

Kapacita vyjadřuje schopnost vodiče uchovat elektrický náboj, pro daný kondenzátor (vodič) je konstantní a je definována jako

$$C = \frac{Q}{U},$$

kde Q náboj na kondenzátoru při napětí U. Více o kapacitě si můžete přečíst na Encyklopedie fyziky F.

Vyhledejte si vztahy týkající se kapacity, napětí a náboje pro seriově a paralelně zapojené kondenzátory.

Řešení nápovědy – kapacita

Při **paralelním** zapojení kondenzátorů je celková kapacita rovna součtu jednotlivých kapacit

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

Při **sériovém** zapojení je převrácená hodnota celkové kapacity rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých kapacit

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Řešení nápovědy – napětí a náboj

Při **sériovém** zapojení kondenzátorů je na všech kondenzátorech stejný náboj. Napětí se v tomto případě sčítají

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3,$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3.$$

Napětí se rozdělí v obráceném poměru kapacit.

Při **paralelním** zapojení se náboje na jednotlivých kondenzátorech sčítají. Napětí je na všech kondenzátorech stejné

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

$$U = U_1 = U_2 = U_3.$$

Náboj se rozdělí v poměru kapacit.

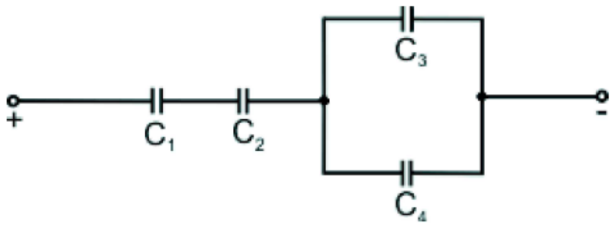
Rozbor

Paralelně zapojené kondenzátory můžeme nahradit jedním kondenzátorem s kapacitou, která je rovna součtu kapacit na obou kondenzátorech. Tím získáme obvod jen se třema sériově zapojenými kondenzátory. Při sériovém zapojení je převrácená hodnota celkové kapacity rovna součtu převrácených hodnot kapacit jednotlivých kondenzátorů. Tak určíme celkovou kapacitu.

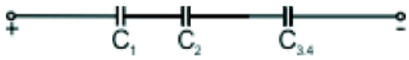
Celkový náboj je přímo úměrný celkové kapacitě a celkovému napětí (tj. napětí na baterii).

Známe-li napětí a celkovou kapacitu zapojení, můžeme dopočítat celkový náboj. Náboje na kondenzátorech 1,2 a kondenzátoru 34 jsou rovny celkovému náboji, ze znalosti náboje a kapacity kondenzátoru můžeme dopočítat napětí. Napětí na kondezátorech 3 a 4 je rovno napětí na kondenzátoru 34, ze znalosti kapacity a napětí dopočítáme náboj.

Řešení – kapacita



Pro vypočítání celkové kapacity využijeme poznatků z nápovědy. Zaměříme se nejprve na paralelní část obvodu a kondenzátory C_3, C_4 nahradíme kondenzátorem C_{34} (dle vztahu z nápovědy).



$$C_{34} = C_3 + C_4,$$

$$C_{34} = 1\,\mu F + 10\,\mu F = 11\,\mu F.$$

U sériové části postupujeme analogicky. Kondenzátory C_1, C_2, C_{34} nahradíme kondenzátorem C_C.

Pro celkovou kapacitu platí:

$$\frac{1}{C_C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{34}},$$

$$\frac{1}{C_C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4},$$

$$\frac{1}{C_C} = \frac{(C_3 + C_4)C_2 + (C_3 + C_4)C_1 + C_1C_2}{C_1C_2(C_3 + C_4)}.$$

Což po úpravě dává obecné řešení

$$C_C = \frac{C_1C_2(C_3+C_4)}{(C_3+C_4)C_2+(C_3+C_4)C_1+C_1C_2}.$$

Využijeme-li, že v této úloze speciálně platí $C_1 = C_3$ a $C_2 = C_4$, získáme

$$C_C = \frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)C_2+(C_1+C_2)C_1+C_1C_2},$$

vytkneme výraz $C_1 + C_2$

$$C_C = \frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}.$$

Dosadíme zadané hodnoty

$$C_C = \frac{1\cdot 10\cdot(1+10)}{(1+10)^2+1\cdot 10}\,\mu F,$$

$$C_C \doteq 0{,}84\,\mu F.$$

Řešení – napětí a náboj

V předchozím oddíle jsem spočetli celkovou kapacitu zapojení $C_C = \frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2} \doteq 0{,}84\,\mu F$.

Z definice kapacity $C = \frac{Q}{U}$ spočítáme celkový náboj

$$Q_C = C_C U,$$

$$Q_C = \frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U.$$

Náboj na kondenzátorech C_1, C_2 a C_{34} je stejný a je roven celkovému náboji Q_C.

$$Q_C = Q_1 = Q_2 = Q_{34}.$$

Z definice kapacity dopočteme napětí na jednotlivých kondenzátorech.

Kondenzátor C_1

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{\frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U}{C_1} = \frac{C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U.$$

Kondenzátor C_2

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{\frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U}{C_2} = \frac{C_1(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U.$$

Kondenzátor C_{34}

$$U_{34} = \frac{Q_{34}}{C_{34}}.$$

Z předchozích výpočtů víme, že $C_{34} = C_3 + C_4 = C_1 + C_2$,

$$U_{34}=\frac{\frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U}{C_1+C_2}=\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U.$$

Ověřme ještě naše výpočty. Mělo by platit $U=U_1+U_2+U_{34}$.

$$\textit{Levá strana}=U.$$

$$\textit{Pravá strana}=U_1+U_2+U_{34}=\frac{C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U+\frac{C_1(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U+\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U=$$

$$=U\frac{C_2(C_1+C_2)+C_1(C_1+C_2)+C_1C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}=U\frac{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}=U.$$

$$\textit{Levá strana}=\textit{Pravá strana}.$$

Kondenzátory C_3 a C_4

Napětí na paralelně spojených kondenzátorech je stejné, v našem případě

$$U_3=U_4=U_{34}.$$

Z definice kapacity dopočítáme náboj.

$$Q_3=U_3C_3=\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}UC_1=\frac{C_1^2C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U.$$

$$Q_4=U_4C_4=\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}UC_2=\frac{C_1C_2^2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U.$$

Učiňme ověření našich výpočtů, mělo by platit $Q_3+Q_4=Q_{34}=Q_C$.

$$\textit{Levá strana}=Q_3+Q_4=\frac{C_1^2C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U+\frac{C_1C_2^2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U=\frac{C_1^2C_2+C_1C_2^2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U=$$

$$=\frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U.$$

$$\textit{Pravá strana}=Q_{34}=Q_C=\frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U.$$

$$\textit{Levá strana}=\textit{Pravá strana}.$$

Dosazení konkrétních hodnot

$C_1=C_3=1\ \mu\mathrm{F}$, $C_2=C_4=10\ \mu\mathrm{F}$, $U=100\mathrm{V}$.

$$Q_C=Q_1=Q_2=\frac{C_1C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U=\frac{1\cdot10\cdot(1+10)}{(1+10)^2+1\cdot10}100\ \mu\mathrm{C}\doteq 84\ \mu\mathrm{C}.$$

$$U_1=\frac{C_2(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U=\frac{10\cdot(1+10)}{(1+10)^2+1\cdot10}\cdot100\ \mathrm{V}\doteq 84\ \mathrm{V}.$$

$$U_2=\frac{C_1(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U=\frac{1\cdot(1+10)}{(1+10)^2+1\cdot10}\cdot100\ \mathrm{V}\doteq 8{,}4\ \mathrm{V}.$$

$$U_{34}=U_3=U_4=\frac{C_1C_2}{(C_1+C_2)^2+C_1C_2}U=\frac{1\cdot10}{(1+10)^2+1\cdot10}\cdot100\ \mathrm{V}\doteq 7{,}6\ \mathrm{V}.$$

$$Q_3 = \frac{C_1^2 C_2}{(C_1+C_2)^2 + C_1 C_2} U = \frac{1^2 \cdot 10}{(1+10)^2 + 1 \cdot 10} \cdot 100\ \mu\mathrm{C} \doteq 7{,}6\ \mu\mathrm{C}.$$

$$Q_4 = \frac{C_1 C_2^2}{(C_1+C_2)^2 + C_1 C_2} U = \frac{1 \cdot 10^2}{(1+10)^2 + 1 \cdot 10} \cdot 100\ \mu\mathrm{C} \doteq 76\ \mu\mathrm{C}.$$

Odpověď

Celková kapacita zapojení $C = 0{,}84\,\mu F$.

Náboje a napětí na jednotlivých kondenzátorech:

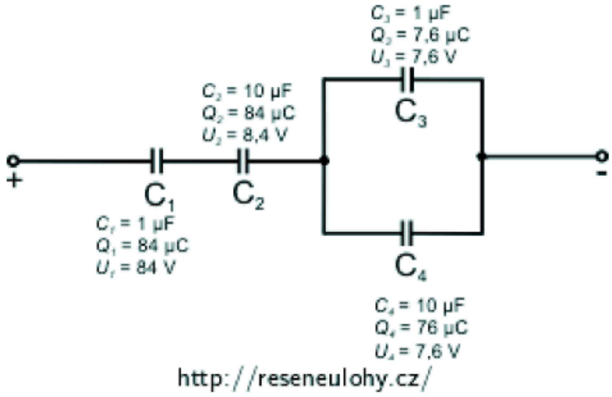
$$Q_1 = 84\ \mu\mathrm{C} \quad U_1 = 84\ V \qquad C_1 = 1\ \mu\mathrm{F}$$

$$Q_2 = 84\ \mu\mathrm{C} \qquad U_2 = 8{,}4\ V \qquad C_2 = 10\ \mu\mathrm{F}$$

$$Q_3 = 7{,}6\ \mu\mathrm{C} \qquad U_3 = 7{,}6\ V \qquad C_3 = 1\ \mu\mathrm{F}$$

$$Q_4 = 76\ \mu\mathrm{C} \qquad U_4 = 7{,}6\ V \qquad C_4 = 10\ \mu\mathrm{F}$$

Komentář – výsledky

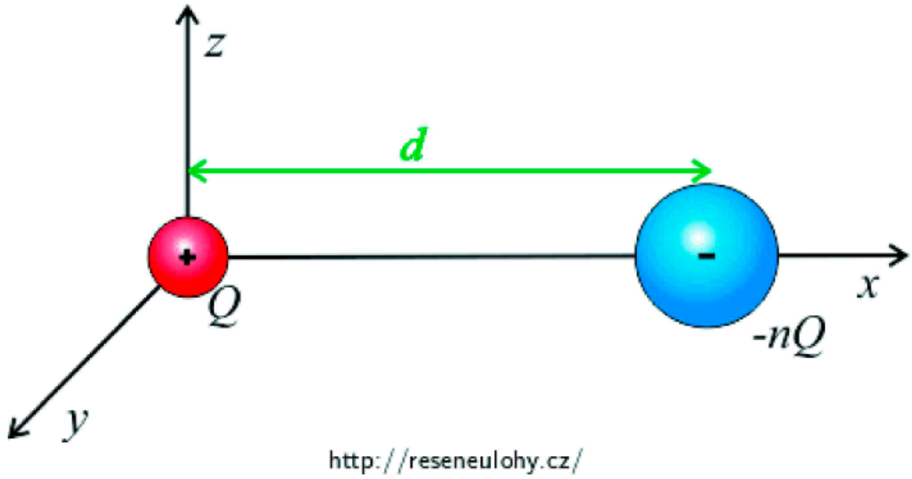


Kapacita kondenzátoru 4 je desetkrát větší než kapacita kondenzátoru 3, srovnáme-li náboje, vidíme, že se náboj rozdělil v poměru kapacit (náboj na 4 je desetkrát větší než na 3). Obdobně kondenzátor 2 má desetkrát větší kapacitu než kondenzátor 1, srovnáme-li napětí, vidíme, že se rozdělilo v opačném poměru kapacit (napětí na 2 je desetkrát menší než na 1).

Ekvipotenciální plocha

Úloha číslo: 2025

Bodový náboj o velikosti Q leží v počátku souřadného systému, bodový náboj o velikosti $-nQ$ v místě o souřadnicích $(d, 0, 0)$, $n > 0$, $d > 0$. Jaký tvar má plocha, na které je potenciál roven potenciálu v nekonečnu?



Nápověda – elektrický potenciál

Potenciál v nekonečnu obvykle volíme roven nule. Při této volbě má potenciál bodového náboje Q ve vzdálenosti r od tohoto náboje velikost

$$\varphi = k\frac{Q}{r}.$$

Rozbor

Obvykle pokládáme potenciál v nekonečnu roven 0, to učiníme i v této úloze. Budeme tedy hledat místa, kde je celkový potenciál nulový. Celkový potenciál v daném místě získáme jako součet potenciálů od obou nábojů.

Uvažujme libovolný bod B v prostoru o souřadnicích $\mathrm{B} = [x; y; z]$.

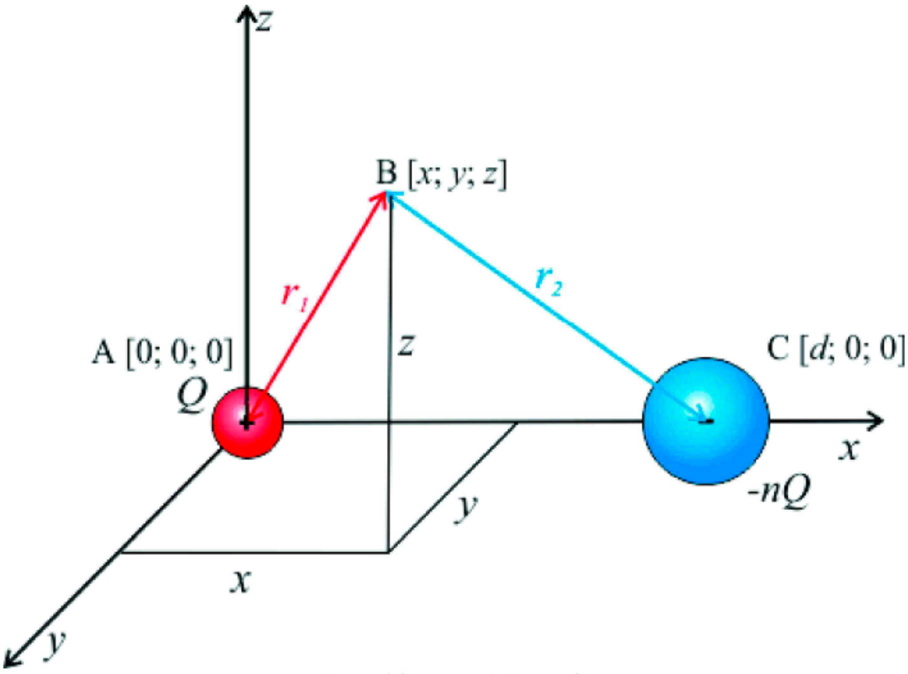
Je-li φ_1 potenciál v bodě B od náboje Q a φ_2 potenciál v bodě B od náboje $-nQ$, pak musí platit

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0. \tag{1}$$

Zbývá vyjádřit potenciál φ_1 a φ_2 v bodě B od obou nábojů a řešit uvedenou rovnici.

Řešení

Abychom vyjádřili φ_1 a φ_2 nakreslíme si celou situaci do kartézských souřadnic. Bod B je obecný bod v prostoru popsaný souřadnicemi $\mathrm{B} = [x;\ y;\ z]$.



Začněme s vyjádřením potenciálu φ_1, který v bodě B vytváří náboj Q

$$\varphi_1 = k\frac{Q}{r_1}, \tag{2}$$

kde r_1 je vzdálenost bodu B od bodového náboje Q. Protože známe souřadnice obou bodů vzdálenost r_1 spočteme jako

$$r_1 = \sqrt{(0-x)^2 + (0-y)^2 + (0-z)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{3}$$

Spojením (2) a (3) dostaneme

$$\varphi_1 = k\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{4}$$

Analogicky vyjádříme potenciál φ_2 v bodě B od náboje $-nQ$

$$\varphi_2 = k\frac{-nQ}{r_2}, \tag{5}$$

kde r_2 je vzdálenost bodu B od bodového náboje $-nQ$,

$$r_2 = \sqrt{(d-x)^2 + (0-y)^2 + (0-z)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(d-x)^2 + y^2 + z^2}. \tag{6}$$

Spojením (5) a (6) dostaneme

$$\varphi_2 = k\frac{-nQ}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2 + z^2}}. \tag{7}$$

Vzhledem k tomu, že pro potenciál bodového náboje používáme vztah, ve kterém je v nekonečnu nulový potenciál, hledáme body, pro které platí

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0.$$

Dosadíme vyjádření potenciálů (4) a (7).

$$k\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + k\frac{-nQ}{\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2}} = 0$$

a rovnici upravíme

$$k\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = k\frac{nQ}{\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{n}{\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2}},$$

$$\sqrt{(d-x)^2+y^2+z^2} = n\sqrt{(x^2+y^2+z^2)},$$

Protože jsou obě strany rovnosti kladné, umocníme ji na druhou a upravíme

$$(d-x)^2+y^2+z^2 = n^2(x^2+y^2+z^2),$$

$$d^2-2xd+x^2+y^2+z^2 = n^2x^2+n^2y^2+n^2z^2,$$

$$d^2 = (n^2-1)x^2+2xd+(n^2-1)y^2+(n^2-1)z^2.$$

V rovnici se vyskytují členy typu x^2, y^2 atp., to nás vede k myšlence, že by se mohlo jednat o tzv. kvadratickou plochu (mezi ně patří např. kulová plocha, elipsoid, hyperbolická plocha...).

Zdá se, že by bylo výhodné rovnici vydělit výrazem n^2-1. Ten je ale pro $n=1$ nulový, proto teď budeme řešit za podmínky $n \neq 1$ a případ $n=1$ vyřešíme později.

$$\frac{d^2}{n^2-1} = x^2 + 2\frac{d}{n^2-1}x + y^2 + z^2.$$

Na pravé straně členy s x doplníme na úplný čtverec

$$\frac{d^2}{n^2-1} = \left(x+\frac{d}{n^2-1}\right)^2 - \left(\frac{d}{n^2-1}\right)^2 + y^2 + z^2,$$

a upravíme:

$$\frac{d^2}{n^2-1} + \frac{d^2}{(n^2-1)^2} = \left(x+\frac{d}{n^2-1}\right)^2 + y^2 + z^2,$$

$$\frac{d^2n^2}{(n^2-1)^2} = \left(x+\frac{d}{n^2-1}\right)^2 + y^2 + z^2.$$

Poslední výraz je středová rovnice kulové plochy se středem $S = \left[-\frac{d}{n^2-1}, 0, 0\right]$ a poloměrem $R = \frac{dn}{n^2-1}$. Což je hledaná plocha.

Nyní se vrátíme k případu $n=1$

$$d^2 = (n^2-1)x^2+2xd+(n^2-1)y^2+(n^2-1)z^2,$$

$$d^2 = (1^2-1)x^2+2xd+(1^2-1)y^2+(1^2-1)z^2,$$

$$d^2 = 2xd,$$

$$x = \frac{d}{2}.$$

Pro $n = 1$ je místem s nulovým potenciálem rovina popsaná rovnicí $x = \frac{d}{2}$, což je rovina kolmá na osu x, která ji protíná v bodě $[\frac{d}{2};\ 0;\ 0]$.

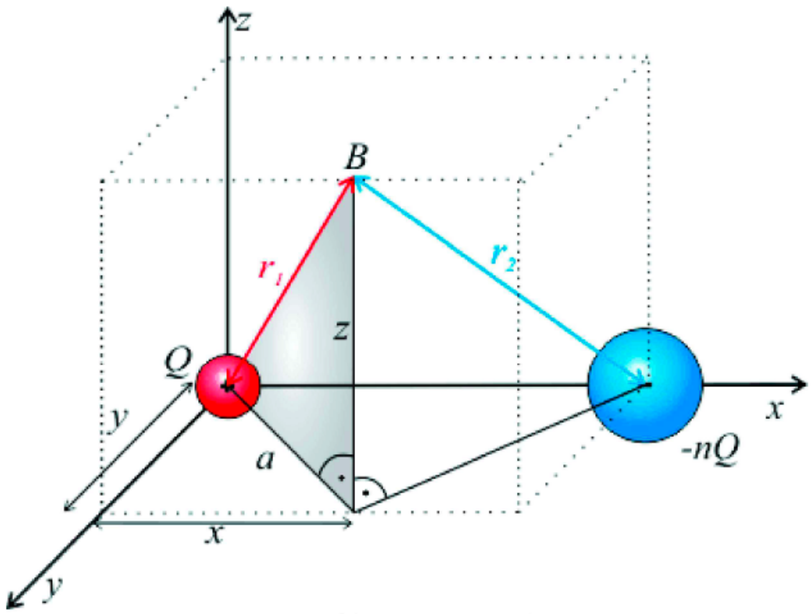
Pro $n = 1$ mají oba náboje stejnou velikost a opačná znaménka, potenciál se „vynuluje“ v místech, které mají stejnou vzdálenost od obou nábojů, tedy leží v rovině jejich symetrie.

Odpověď

Pro $n > 0 \wedge n \neq 1$ je plocha na které je potenciál roven potenciálu v nekonečnu kulová plocha se středem $S = \left[-\frac{d}{n^2-1};\ 0;\ 0\right]$ a poloměrem $R = \frac{dn}{n^2-1}$, pro $n = 1$ je to rovina popsaná rovnicí $x = \frac{d}{2}$, což je rovina kolmá na osu x, která ji protíná v bodě $[\frac{d}{2};\ 0;\ 0]$.

Komentář – zjednodušený výpočet vzdálenosti

V řešení je vzdálenost bodu B od nábojů spočítána pomocí vztahů z analytické geometrie. Lze to ale vyjádřit i bez nich.



Bod B je obecný bod v prostoru popsaný souřadnicemi $B = [x; y; z]$.

Z obrázku je vidět, že

$$r_1 = \sqrt{a^2 + z^2} \tag{8}$$

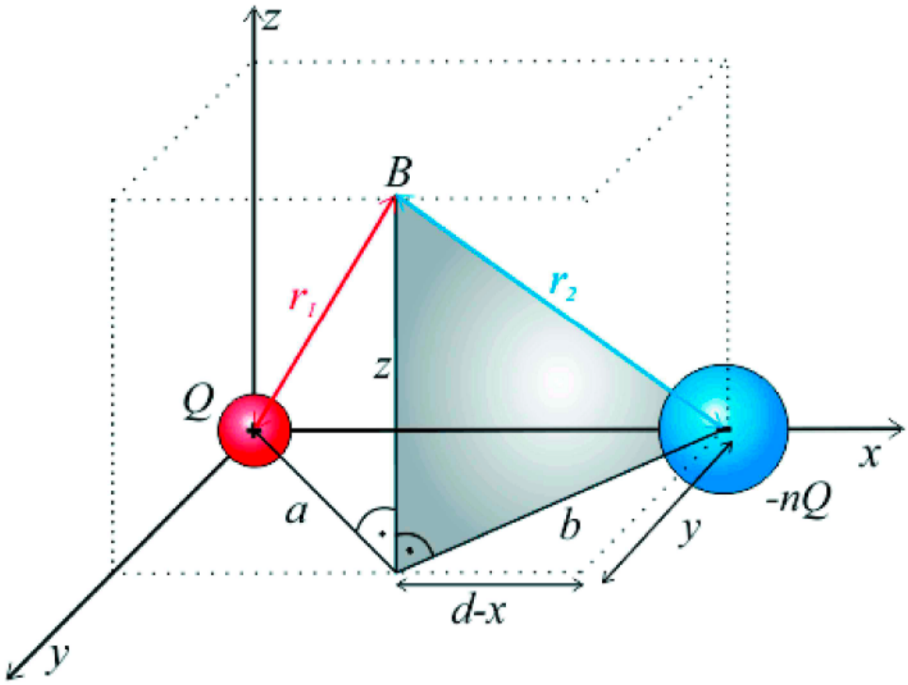
a

$$a^2 = x^2 + y^2. \tag{9}$$

Spojením (8) a (9) dostaneme

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{10}$$

Analogicky vyjádříme vzdálenost r_2 od náboje $-nQ$



http://reseneulohy.cz/

$$r_2 = \sqrt{b^2 + z^2} \tag{11}$$

a

$$b^2 = (d - x)^2 + y^2. \tag{12}$$

Spojením (11) a (12) dostaneme

$$r_2 = \sqrt{(d - x)^2 + y^2 + z^2}. \tag{13}$$

Přímý vodič v magnetickém poli

Úloha číslo: 2128

Přímý vodič délky 1 m se nachází v homogenním magnetickém poli o magnetické indukci 2 mT. Je umístěn kolmo k magnetickým indukčním čarám. Jakou rychlostí se musí vodič pohybovat, aby indukované napětí mělo velikost 3 mV?

Nápověda

Ve vodiči se bude indukovat napětí. Vyhledejte si, jak zní Faradayův zákon elektromagnetické indukce a v něm použitý magnetický indukční tok.

O elektromagnetické indukci si můžete přečíst např. zde: Elektromagnetická indukce F.

Řešení nápovědy

Znění Faradayova zákonu elektromagnetické indukce:

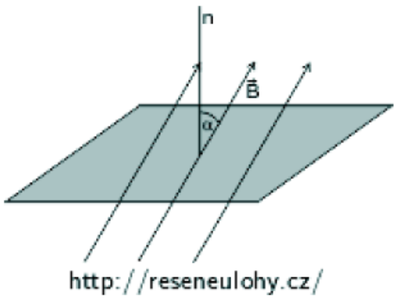
Změní-li se magnetický indukční tok ve vodiči za dobu Δt o $\Delta\Phi$, vzniká ve vodiči indukované elektromotorické napětí, jehož střední hodnota je

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

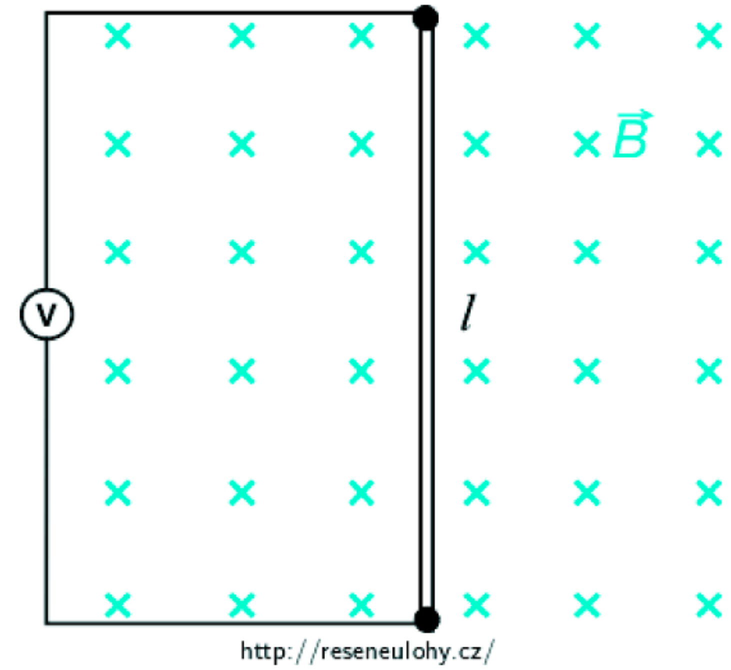
Magnetický indukční tok je definován vztahem

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

kde S je obsah uvažované rovinné plochy umístěné v **homogenním magnetickém poli** o magnetické indukci $\vec{B}$. Úhel α je úhel, který svírá normála plochy s vektorem magnetické indukce $\vec{B}$.

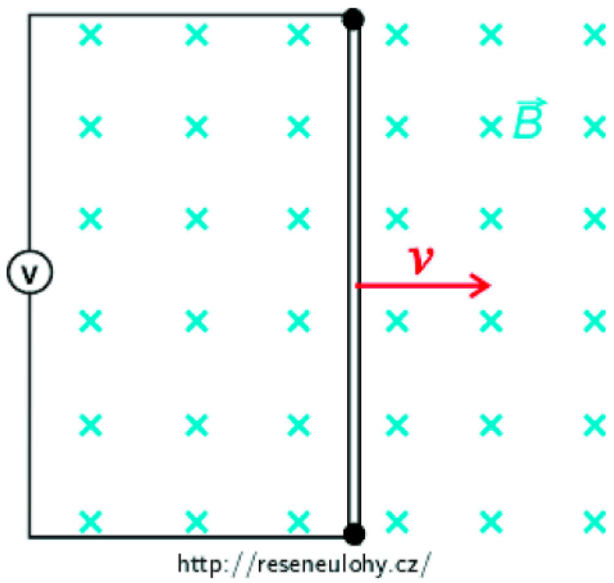


Rozbor



Podle Faradayova zákona se ve smyčce znázorněné na obrázku indukuje elektromotorické napětí, pokud se mění magnetický indukční tok plochou smyčky. Ten si můžeme představit jako „počet indukčních čar procházejících plochou smyčky“. Velmi důležité je si uvědomit, že nezáleží na celkovém počtu indukčních čar procházejících plochou smyčky, ale opravdu pouze na změně „jejich počtu“. Velikost elektromagnetického napětí a indukovaného proudu závisí na rychlosti změny „tohoto počtu“. Pohybuje-li se vodič stálou rychlostí doleva, nebo doprava, zvětšuje se, nebo zmenšuje obsah plochy smyčky, tedy i indukční tok smyčkou. V obvodu se bude v takovém případě indukovat napětí.

Řešení



Jak jsme si již v nápovědě řekli, zákon elektromagnetické indukce má tvar

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{1}$$

kde Φ je magnetický indukční tok, který je definován vztahem

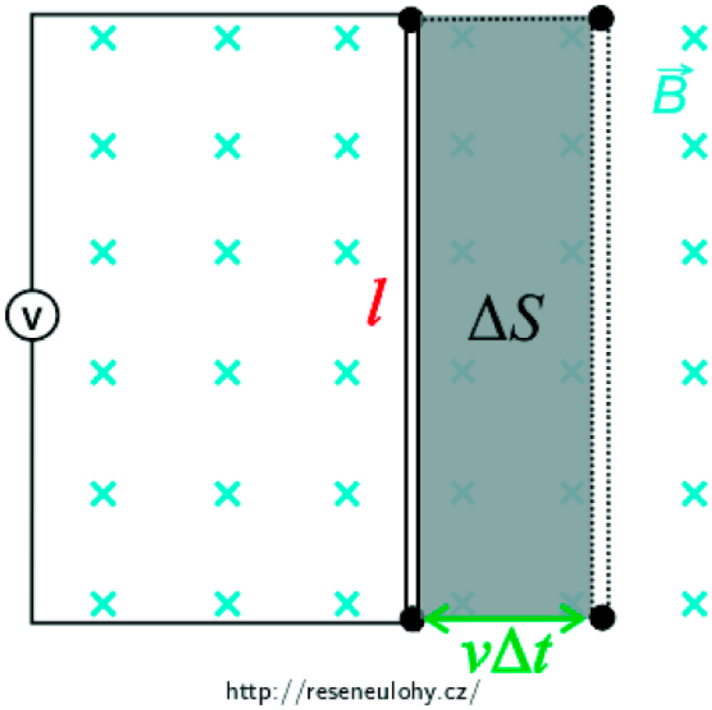
$$\Phi = BS\cos\alpha.$$

Úhel α je úhel, který svírá normála plochy s vektorem magnetické indukce $\vec{B}$. V našem případě je smyčka (její plocha) kolmá na vektor magnetické indukce a i během pohybu kolmá zůstává. Úhel, který svírá normála smyčky s vektorem magnetické indukce, je $\alpha = 0^\circ$. Můžeme tedy napsat

$$\Phi = BS. \tag{2}$$

Pohybuje-li se vodič doprava, nebo doleva rychlostí v, mění se plocha smyčky.

Za čas Δt se vodič posune o vzdálenost



$$\Delta s = v\Delta t,$$

a plocha se tedy změní o

$$\Delta S = lv\Delta t. \tag{3}$$

Spojením (1), (2) a (3), dostaneme

$$U_i = -\frac{Blv\Delta t}{\Delta t} = -Blv.$$

Z rovnice vyjádříme rychlost v

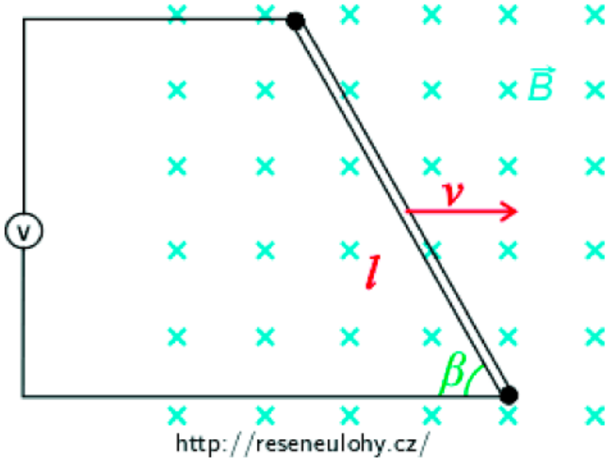
$$v = -\frac{U_i}{Bl}.$$

Znaménko mínus nám objasní Lenzův zákon, jenž hovoří o tom, že indukovaný proud v uzavřeném obvodu má takový směr, aby svým magnetickým polem působil proti změně indukčního toku, která je jeho příčinou.

Budou-li konce vodiče vodivě spojeny, aby vznikl elektrický obvod, bude obvodem procházet proud, jehož velikost bychom mohli dopočítat, pokud bychom znali celkový odpor obvodu.

Komentář – směr pohybu vodiče

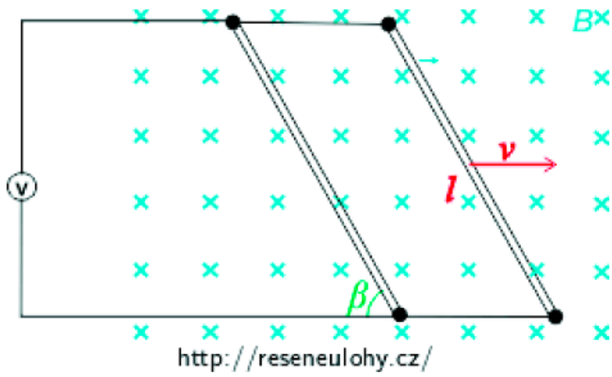
Zamysleme se nad případem, kdy se je vodič kolmý k vektorům magnetické indukce, ale jeho pohyb není kolmý, viz obrázek.



Stejně jako v případě ze zadání, se mění tok magnetický indukční tok. A stejně jako v předchozím případě použijeme Faradayův zákon magnetické indukce.

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(BS\cos\alpha)}{\Delta t} = -\frac{\Delta(BS)}{\Delta t}.$$

Stejně jako v předchozím případě je $\cos\alpha = 1$, jelikož normála plochy (smyčky) svírá s vektorem magnetické indukce 0°.



Pohybuje-li se vodič doprava, nebo doleva rychlostí $\boldsymbol{v}$, mění se plocha smyčky.

Za čas Δt se vodič posune o vzdálenost

$$\Delta s = v\Delta t.$$

Když uvažujeme o tom, o kolik se změní plocha smyčky, je důležité si uvědomit, obsah jakého rovinného útvaru počítáme. Obrázek nám zcela správně ilustruje, že se jedná o rovnoběžník. Pro připomenutí, obsah rovnoběžníku se počítá podle vzorce $S = av_a$, kde v_a je výška strany $\boldsymbol{a}$.

V našem výpočtu bude straně $\boldsymbol{a}$ odpovídat vodič délky $\boldsymbol{l}$. Výšku na stranu $\boldsymbol{l}$ označíme $\boldsymbol{b}$ a dopočítáme pomocí goniometrických funkcí,

$$b = v\Delta t\cos\beta.$$

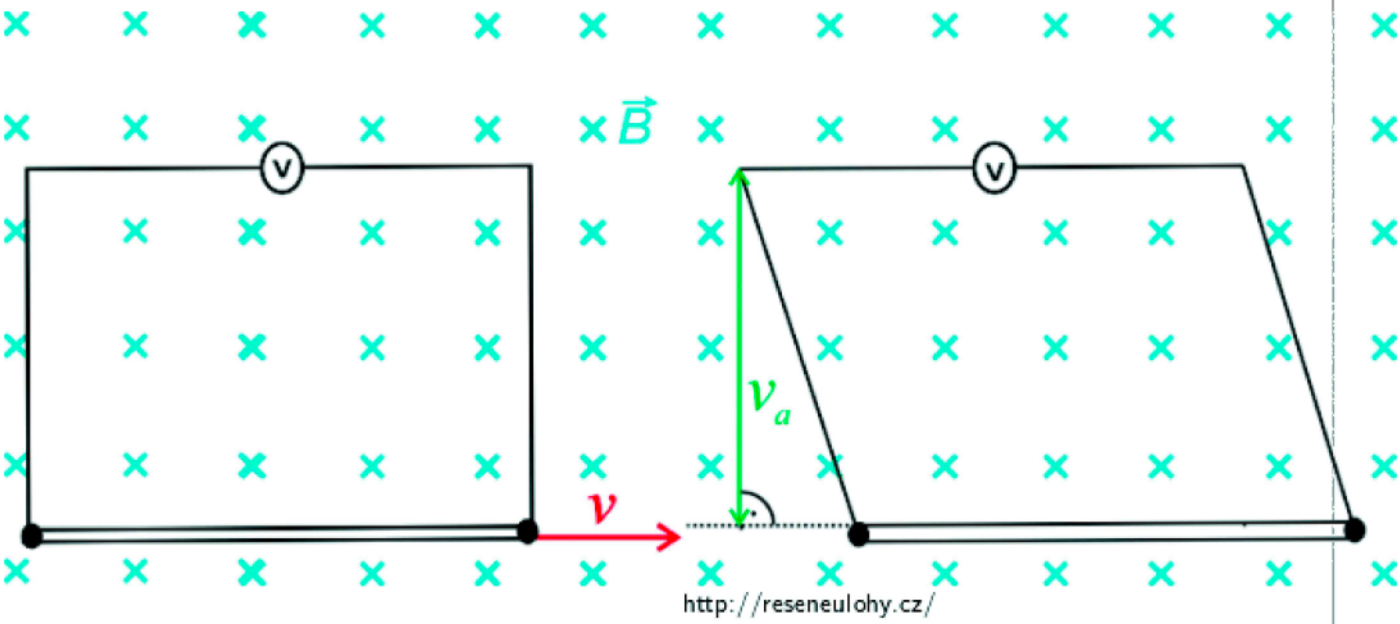
$$S = lv\Delta t\cos\beta.$$

Vrátíme-li se k Faradyovu zákonu elektromagnetické indukce, dostaneme

$$U_i = -\frac{Blv\Delta t\cos\beta}{\Delta\, t} = -Blv\cos\beta.$$

Volíme-li $\beta = 90^\circ$, pak je směr pohybu kolmý na vektor magnetické indukce a jedná se o případ, který jsme počítali původně. Po dosazení vyjde stejný výsledek, jako v předchozím výpočtu, což nás utvrzuje ve správnosti výpočtu.

Pro $\beta = 0^\circ$, naopak dostáváme nulové indukované napětí. I tento výsledek je zcela správný, pokud je $\beta = 0^\circ$, pak se vodič sice pohybuje kolmo k vektoru magnetické indukce, ale plocha smyčky zůstává stejná, viz obrázek.



Zápis a číselné dosazení

$l = 1\,\mathrm{m}$	délka vodiče
$B = 2\,\mathrm{mT}$	magnetická indukce pole
$U_i = 3\,\mathrm{mV}$	indukované napětí na vodiči
$v = ?\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	rychlost pohybu vodiče

$$v = \frac{U_i}{Bl} = \frac{3{\cdot}10^{-3}}{2{\cdot}10^{-3}\cdot 1}\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 1{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Odpověď

Vodič se musí pohybovat rychlostí $1{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ kolmo na indukční čáry.

Urychlený elektron

Úloha číslo: 2129

Elektron byl urychlen napětím 500 V. Jaké rychlosti dosáhl? Jaká byla vzdálenost, kterou při urychlování urazil, jestliže se pohyboval po dobu 2 µs.

Pozn. Budeme předpokládat, že počáteční rychlost elektronu je nulová.

Rozbor

Úlohu lze řešit dvojím způsobem

a) pomocí úvah o energiích

b) zkoumáním silového působení

a) Nápověda k energetickým úvahám

Elektron je urychlován. Musí tedy na něj působit síly, které konají práci. Jakou práci vykonají? Jak tato práce souvisí se zadaným napětím?

a) Řešení nápovědy

Na elektron působí elektrostatická síla, která je zodpovědná za urychlování elektronu. Elektrostatické pole je konzervativní, neboli vykonaná práce při přemisťování náboje $\boldsymbol{q}$, z místa **A** do místa **B** nezávisí na dráze. Práce je dána pouze koncovou a počáteční polohou náboje. Vykonaná práce při přemístění náboje $\boldsymbol{q}$ je úměrná tomuto náboji, $\boldsymbol{U}$ je konstanta úměrnosti, kterou nazýváme napětí

$$W_{AB} = qU_{AB}.$$

Více o práci v elektrostatickém poli se dočtete na Encyklopedie fyziky F.

a) Řešení pomocí energetických úvah

Práce při přemístění náboje $\boldsymbol{q}$ z místa **A** do místa **B** lze vyjádřit vztahem

$$W_{AB} = qU_{AB}, \qquad (1)$$

kde $\boldsymbol{U}$ je napětí mezi body **A** a **B**. (viz Nápověda k energetickým úvahám)

Práce, kterou vykoná elektrostatické pole, se přemění na kinetickou energii elektronu

$$W = \Delta E_k.$$

Do rovnice dosadíme (1) a definici kinetické energie

$$qU_{AB} = \frac{1}{2}m_e(v_k^2 - v_p^2),$$

kde v_k je koncová rychlost elektronu a v_p je počáteční rychlost elektronu. Jelikož v zadání předpokládáme nulovou počáteční rychlost, můžeme napsat

$$qU_{AB} = \frac{1}{2} m_e v_k^2,$$

z rovnice vyjádříme v_k

$$v_k = \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m_e}}.$$

Pozn. práce je v tomto případě rovna změně potenciální energie. Analogické je to v tíhovém poli země. Když těleso padá z nějaké výšky $\boldsymbol{h}$, tíhové pole koná práci. Vykonaná práce se přemění na kinetickou energii, neboli potenciální energie se přemění na kinetickou energii.

Za předpokladu, že elektrostatické pole je homogenní můžeme dopočítat také vzdálenost, jež elektron urazil. Bez tohoto předpokladu bychom nebyli schopni uraženou vzdálenost dopočítat.

Pozn. Přesněji řečeno, v případě, že neznáme průběh elektrického pole, nemůžeme vzdálenost dopočítat. Pokud bychom průběh znali, i když by nebyl homogenní, byli bychom schopni vzdálenost dopočítat za použití pokročilejší matematiky.

Další výpočty děláme za předpokladu, že dané elektrické pole je homogenní.

Na elektron v homogenním elektrickém poli působí konstantní síla, proto se pohybuje rovnoměrně zrychleně. Vyjádřeme zrychlení elektronu $\boldsymbol{a}$

$$a = \frac{v_k - v_p}{t} = \frac{\sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m_e}}}{t} = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m_e}}. \tag{2}$$

Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu se vypočítá podle vztahu $s = s_p + v_p t + \frac{1}{2} a t^2$, kde s_p je počáteční dráha, která je nulová a v_p je počáteční rychlost, která je také nulová. Po dosazení vyjádřeného zrychlení (2) dostaneme

$$s = \frac{1}{2}\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m_e}}t^2 = t\sqrt{\frac{qU_{AB}}{2m_e}}. \tag{3}$$

Zápis a číselné dosazení

$U = 500\,\mathrm{V}$	napětí
$t = 2\,\mu\,\mathrm{s}$	doba pohybu
$v_0 = 0\,\mathrm{m\ s^{-1}}$	počáteční rychlost
$v = ?\,(\mathrm{m\ s^{-1}})$	konečná rychlost
$e = 1{,}602{\cdot}10^{-19}\,\mathrm{C}$	náboj elektronu
$m_e = 9{,}11{\cdot}10^{-31}\,\mathrm{kg}$	hmotnost elektronu
$s = ?\,(\mathrm{m})$	dráha elektronu

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m_e}} = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = \sqrt{\frac{2{\cdot}1{,}6{\cdot}10^{-19}\cdot 500}{9{,}11{\cdot}10^{-31}}}\mathrm{m\ s^{-1}} \doteq 1{,}3{\cdot}10^7\ \mathrm{m\ s^{-1}}.$$

$$s = t\sqrt{\frac{qU}{2m_e}} = t\sqrt{\frac{eU}{2m_e}} = 2{\cdot}10^{-6}\cdot\sqrt{\frac{1{,}6{\cdot}10^{-19}\cdot 500}{2{\cdot}9{,}11{\cdot}10^{-31}}}\ \mathrm{m} \doteq 13{,}3\ \mathrm{m}.$$

b) Nápověda ke zkoumání silového působení

Jaké síly na elektron působí a co zapříčiňují? Jak tyto síly souvisejí se zadaným napětím?

b) Řešení nápovědy

Na elektron působí elektrostatická síla, které jej urychluje. Souvislost síly s napětím můžeme vyjádřit pouze za předpokladu, že elektrostatické pole je homogenní, viz následující řešení.

Řešení zkoumáním silového působení

V následujícím výpočtu budeme předpokládat, že elektrické pole, jež urychlovalo elektron, je homogenní.

Elektron byl urychlován napětím U. Je-li mezi dvěma body se vzdáleností s homogenní elektrické pole o intenzitě E, pak mezi těmito body vzniká napětí o velikosti

$$U = Es. \tag{4}$$

Pomocí velikosti intenzity elektrického pole E, můžeme vyjádřit velikost síly F, která na elektron v tomto poli působí

$$F = qE,$$

a dosazením (4) dostaneme

$$F = q\frac{U}{s}. \tag{5}$$

Druhý Newtonův pohybový zákon nám dává

$$F = m_e a,$$

z čehož si vyjádříme zrychlení a dosadíme (5)

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{qU}{m_e s}. \tag{6}$$

Jelikož je síla působící na elektron konstantní, víme, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb. Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí platí

$$s = \frac{1}{2}at^2, \tag{7}$$

kde s je dráha, po kterou byl elektron urychlován.

Spojením (6) a (7) dostaneme

$$s = \frac{1}{2}\frac{qU}{m_e s}t^2,$$

vyjádříme s

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{qU}{m_e}t^2} = t\sqrt{\frac{qU}{2m_e}}. \tag{8}$$

Srovnáme-li výraz (8) s výrazem, který nám vyšel při řešení přes energie (3), zjistíme, že jsou sobě rovny. Proto i číselné dosazení bude stejné.

Nyní ještě vyjádříme rychlost, které elektron při urychlování dosáhl. Zrychluje-li objekt rovnoměrně z nulové počáteční rychlosti, pak za čas t dosáhne rychlosti

$$v = at,$$

kde $\boldsymbol{a}$ je zrychlení, které máme vyjádřené výše, viz (6). Dosazením zrychlení do výrazu dostaneme

$$v = \frac{qU}{m_e s}t = \frac{qU}{m_e \frac{\sqrt{2}t}{2}\sqrt{\frac{qU}{m_e}}}t = \sqrt{\frac{2qU}{m_e}}.$$

Odpověď

Elektron dosáhl rychlosti $1{,}3 \cdot 10^7\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ a urazil při tom dráhu $13{,}3\ \mathrm{m}$.

Analogická úloha s nenulovou počáteční rychlostí

Analogickou úlohou s elektronem nalétávajícím do elektrostatického pole s nenulovou rychlostí je úloha Elektron nalétávající do elektrického pole.

Pole nabité roviny mnoha způsoby

Úloha číslo: 2132

Vypočtěte elektrickou intenzitu v okolí homogenně nabité nekonečné roviny. (Plošnou hustotu náboje označte σ.)

a) přímou integrací za využití polárních souřadnic,

b) přímou integrací, rovinu uvažujte jako soustavu „mnoha přímek“ vedle sebe,

c) integrací potenciálu a užití vztahu mezi intenzitou a potenciálem,

d) pomocí Gaussovy věty elektrostatiky.

Pozn. předpokládejte, že rovina je nabita kladně.

a) Nápověda – přímá integrace pomocí polárních souřadnic

Kladný bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r pole o velikosti intenzity

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Vektor intenzity $\vec{E}$ míří směrem od náboje, pokud je Q kladný. V opačném případě míří k náboji.

Zamyslete se nad tím, jak bychom tohoto poznatku mohli využít v této úloze.

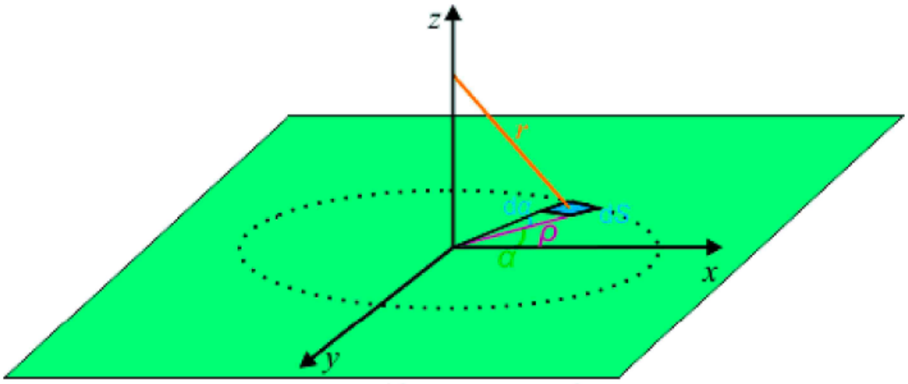
a) Řešení nápovědy – přímá integrace pomocí polárních souřadnic

Rovinu rozdělíme na malé kousky (plošky $\mathrm{d}S$), které se budou chovat jako bodové náboje. Celkovou intenzitu získáme „sečtením“ (přesněji integrováním) příspěvků od všech těchto malých kousků.

a) Rozbor – přímá integrace pomocí polárních souřadnic

Pro lepší představu si celou situaci nakreslíme do kartézských souřadnic. Do obrázku si vyznačíme také cylindrické souřadnice ρ, α, z.

Pozn. pro cylindrické souřadnice se standardně používá písmen r, φ, z. Jelikož se písmenem φ označuje elektrický potenciál, s kterým budeme počítat, bylo nutné úhel označit jinak. Vzdálenost bodu od počátku soustavy souřadné obvykle značíme písmenem $\boldsymbol{r}$, toto označení jsme nahradili písmenem ρ, jelikož písmeno $\boldsymbol{r}$ vystupuje ve vzorci pro intenzitu bodového náboje. Pro shrnutí, ρ je vzdálenost bodu od počátku soustavy souřadné a $\boldsymbol{r}$ je vzdálenost bodu od místa, v němž počítáme intenzitu elektrického pole (bod na ose z).

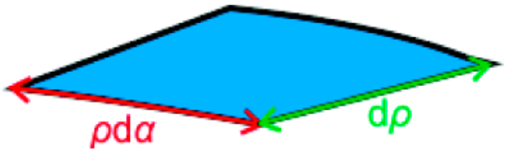


http://reseneulohy.cz/

Dle nápovědy rozdělíme rovinu na malé (infinitezimální) plošky, které se budou chovat jako bodové náboje.

Obsah nekonečně malé plošky

Vztah pro výpočet obsahu infinitezimálně malé plošky si odvodíme z obrázku.



Pro infinitezimálně malou plošku platí

$$\mathrm{d}S = \rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho.$$

a) Řešení – přímá integrace pomocí polárních souřadnic

Bodový náboj Q vytváří ve vzdálenosti r pole o velikosti intenzity

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Velikost elektrické intenzity od infinitezimálně malé plošky $\mathrm{d}S$ *je*

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}Q}{r^2}.$$

Je-li rovina nabita s plošnou hustotou σ, potom náboj na infinitezimálně malém kousku roviny $\mathrm{d}S$ je:

$$\mathrm{d}Q = \sigma \mathrm{d}S,$$

kde $\mathrm{d}S = \rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\rho$ viz předchozí oddíl.

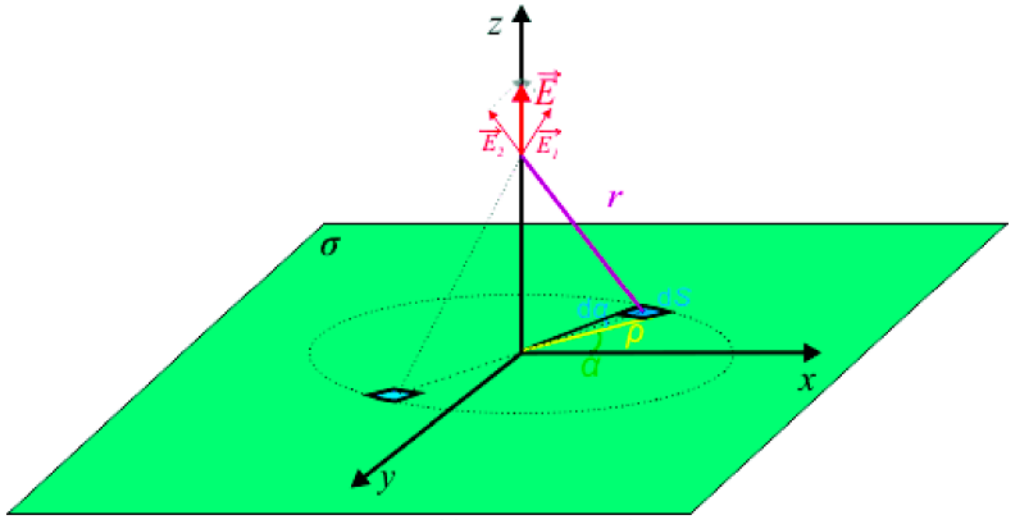
Potom dostáváme

$$\mathrm{d}Q = \sigma\rho \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\rho$$

a tudíž

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\rho\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho}{r^2}. \tag{1}$$

Nyní se zaměříme na směr intenzity. Víme, že jde o nekonečnou rovinu, která je homogenně nabitá.

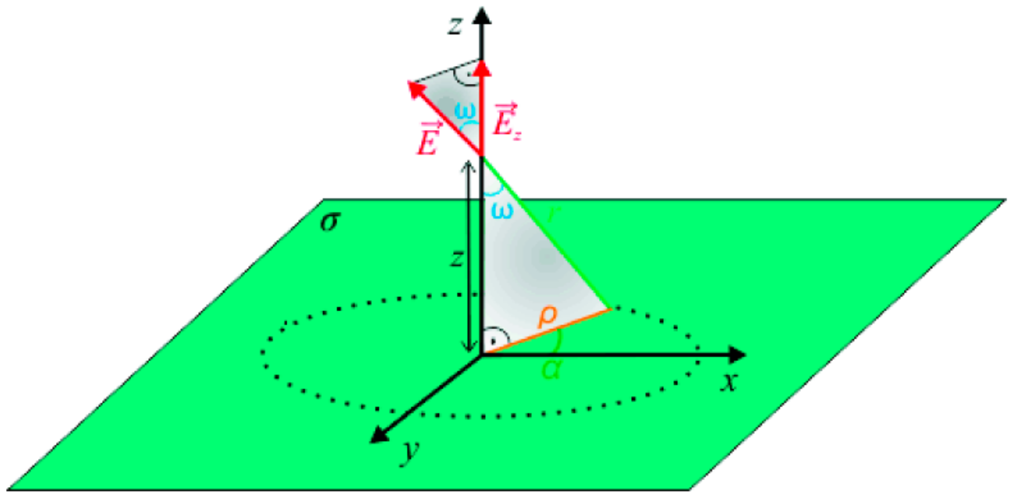


http://reseneulohy.cz/

Z obrázku je patrné, že směr celkové intenzity elektrického pole bude mít směr osy z, jelikož x-ová složka elektrické intenzity od nějaké konkrétní plošky roviny se odečte s x-ovou složkou elektrické intenzity plošky, která je symetrická (středově souměrná) s touto ploškou podle počátku souřadného systému. Stejně tak bude y-ová složka celkové intenzity také nulová.

V obrázku si označíme úhel ω a elektrickou intenzitu od jedné malé plošky promítneme do směru z, neboli vyjádříme její z-ovou složku:

$$E_z = E \cos \omega. \tag{2}$$



http://reseneulohy.cz/

Z pravoúhlosti spodního šedého trojúhelníku dostaneme

$$\cos \omega = \frac{z}{r}$$

a Pythagorova věta nám k tomu přidá

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

což dává

$$\cos \omega = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \tag{3}$$

Spojením (1), (2) a (3) dostaneme

$$\mathrm{d}E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\rho\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho}{\rho^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho,$$

což zintegrujeme přes celou rovinu, tj. budeme integrovat přes ρ a α, ρ nabývá hodnot od 0 do ∞ a α nabývá hodnot od 0 do 2π,

$$E_z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho.$$

Veličiny σ a z jsou nezávislé na integračních proměnných ρ a α, tudíž je můžeme s ostatními konstantami vytknout před integrál

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\rho.$$

Nyní výraz zintegrujeme přes proměnou α, jelikož se ve výrazu α nevyskytuje, integrujeme vlastně konstantu

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}2\pi\int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho,$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho.$$

Zbývající integrál přes ρ budeme řešit substitucí:

$$a = \rho^2 + z^2,$$

$$\mathrm{d}a = 2\rho\mathrm{d}\rho,$$

přepočítáme meze:

$$\rho = 0 \Rightarrow a = z^2; \qquad \rho = \infty \Rightarrow a = \infty,$$

a dosadíme do původního integrálu

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_{z^2}^\infty \frac{1}{2a^{3/2}}\mathrm{d}a,$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\int_{z^2}^\infty a^{-3/2}\mathrm{d}a,$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\left[-2a^{-1/2}\right]_{z^2}^\infty,$$

$$E_z = -0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}.$$

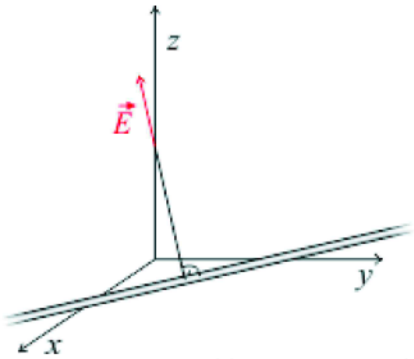
Poslední zlomek ve výsledku je jednotkový vektor rovnoběžný s osou z, který určuje směr elektrické intenzity. Pokud by rovina byla nabita kladně, pak elektrická intenzita míří ve směru kladné osy z, pokud jsem nad rovinou a elektrická intenzita míří ve směru záporné osy z, pokud jsem pod rovniou.

b) Nápověda – přímá integrace pomocí „mnoha přímek"

Homogenně nabitá přímka, s lineární hustotou náboje λ, vytváří kolem sebe pole o velikosti (viz Pole nabité přímky)

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z.}$$

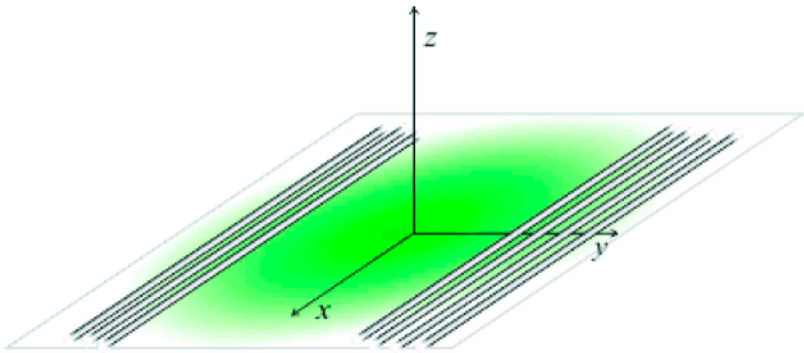
Elektrická intenzita míří kolmo od vodiče a jají směr je zobrazen na následujícím obrázku.



http://reseneulohy.cz/

Zamyslete se nad tím, jak bychom tohoto poznatku mohli využít.

b) Rozbor – přímá integrace pomocí „mnoha přímek"



http://reseneulohy.cz/

Rovinu si rozdělíme na nekonečně mnoho navzájem rovnoběžných přímek. Celkovou intenzitu získáme „sečtením" (přesněji integrováním) příspěvků od všech těchto malých kousků.

b) Řešení – přímá integrace pomocí „mnoha přímek"

Zvolme si kartézskou soustavou souřadnou tak, že nabitá rovina leží v rovině xy a my hledáme elektrickou intenzitu na ose z.

Víme, že homogenně nabitá přímka s lineární hustotou λ, vytváří ve vzdálenosti r elektrické pole o velikosti

Viz Pole nabité přímky.

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \tag{4}$$

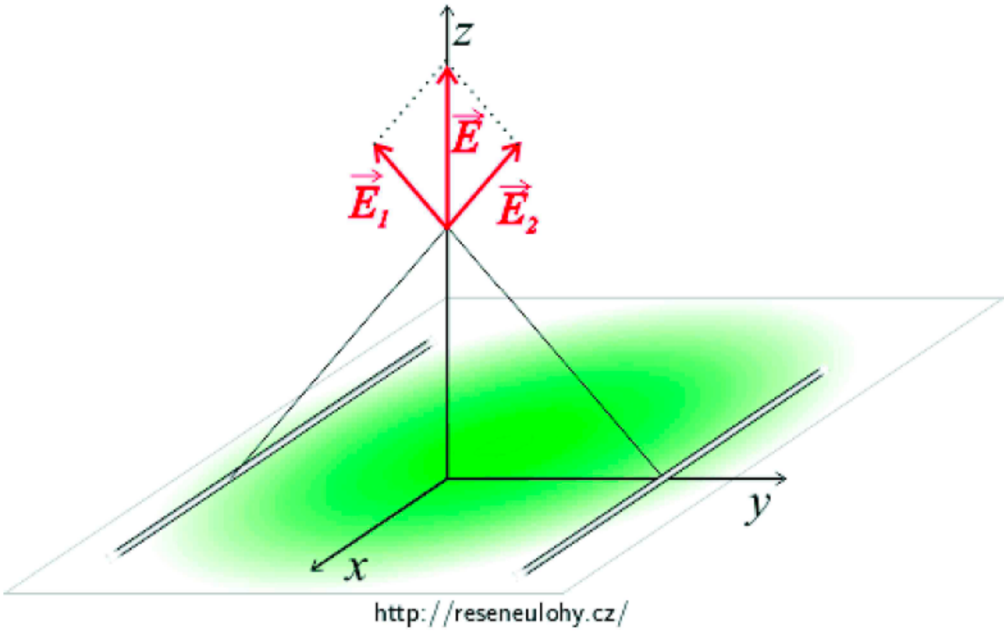
Lineární hustota λ souvisí s plošnou hustotou σ vztahem

$$\lambda = \sigma \,\mathrm{d}y.$$

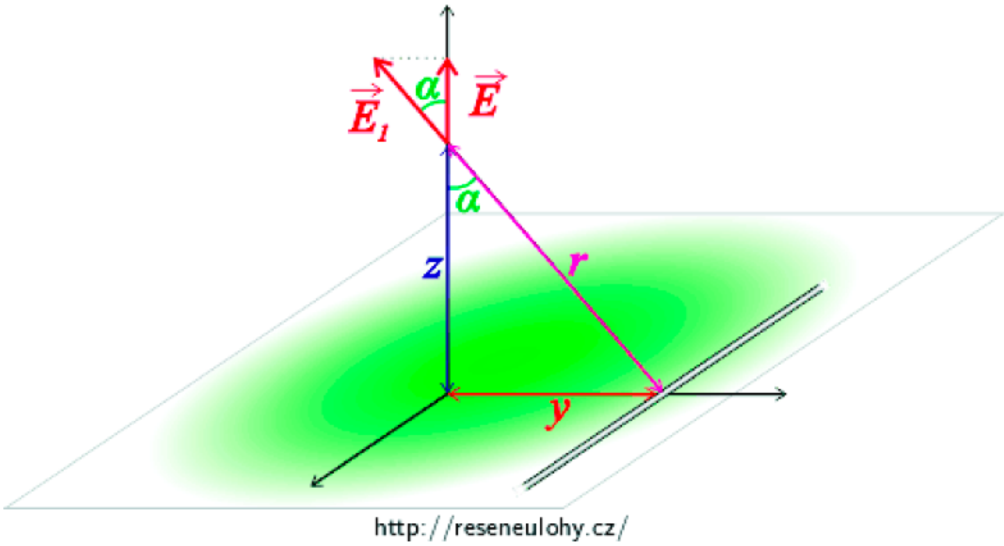
Pokud si představíme rovinu jako velmi mnoho navzájem rovnoběžných přímek, pak příspěvek k intenzitě elektrického pole od jedné přímky je

$$dE = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r}\mathrm{d}y.$$

Zamysleme se nad symetrií úlohy.



Z obrázku je vidět, že ke každé přímce existuje přímka s ní symetrická podle námi zvolené kartézské osy x. Všechny příspěvky mají nulovou x-vou složku, příspěvky k y-ové složce elektrické intenzity od symetricky umístěných přímek se navzájem odečtou a nenulová zůstane pouze z-ová složka.



V obrázku si označíme úhel α a elektrickou intenzitu od jedné přímky promítneme do směru z, neboli vyjádříme její z složku.

$$E_z = \cos\alpha \, E. \tag{5}$$

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků dostaneme

$$\cos\alpha = \frac{z}{r},$$

kde $r = \sqrt{z^2 + y^2}$.

Spojením (4) a (5) dostaneme

$$\mathrm{d}E_z = \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}} \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+y^2}} \mathrm{d}y,$$

což zintegrujeme přes všechny přímky, tj. budeme integrovat přes y

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0(z^2+y^2)} \mathrm{d}y,$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

Tento integrál vede na funkci arcustangens (funkce inverzní k funkci tangens). Připomeneme si derivaci funkce arcustangens

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arctg}\,x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

a integrál, jenž počítáme, upravíme na takový tvar, abychom vzorec mohli použít. Z jmenovatele integrálu vytkneme z^2,

$$E_z = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(\frac{y}{z})^2}\mathrm{d}y,$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 z}\left[z\arctan\frac{y}{z}\right]_{-\infty}^{\infty}.$$

O funkci arkustangens víme,

$$\lim_{y\to\pm\infty}\arctan\frac{y}{z} = \pm\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,z = \pm\frac{\pi}{2}\frac{|z|}{z},$$

což po dosazení dává

$$E_z = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 z}(z\frac{|z|}{z}\frac{\pi}{2}+z\frac{|z|}{z}\frac{\pi}{2}),$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{|z|}{z}.$$

Pozn.: funkce $\mathrm{sgn}\,x$, které říkáme *signum*, je funkce která vrací znaménko proměnné, tedy je-li $x>0$, pak $\mathrm{sgn}\,x=1$, je-li $0>x$, pak $\mathrm{sgn}\,x=-1$, a pro $x=0$ je $\mathrm{sgn}\,x=\mathrm{sgn}0=0$.

c) Nápověda – intenzita z potenciálu

Potenciál a elektrickou intenzitu nám dává do vztahu jedna z rovností, ve které vystupuje matematický operátor gradient.

Zkuste si vzpomenout, popřípadě najít o jaký vztah se jedná. Připomeňte si, co gradient znamená a jak se počítá (v kartézských souřadnicích).

Dále zkuste najít, jaký je potenciál nad rovnoměrně nabitou rovinou s plošnou hustotou σ.

c) Řešení nápovědy – intenzita z potenciálu

Pro potenciál a elektrickou intenzitu platí:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Výsledkem operátoru gradient je vektor, který udává směr, ve kterém potenciál φ nejvíce roste. Elektrická intenzita $\vec{E}$ tedy míří směrem, ve kterém elektrický potenciál nejrychleji klesá (ve vztahu je znaménko mínus).

V kartézských souřadnicích se gradient počítá podle vztahu:

$$\mathrm{grad}\,f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

c) Nápověda – vztah pro potenciál v okolí nabité roviny

Potenciál elektrického pole homogenně nabité roviny má tvar (viz Potenciál rovnoměrně nabité roviny)

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z|.$$

c) Řešení – intenzita z potenciálu

Elektrická intenzita a potenciál elektrického pole, jsou spjaty rovností

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Pravá strana rovnosti nám říká, jak se počítá gradient ze skalární funkce v kartézských souřadnicích.

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}|z|.$$

Pozn. v tomto případě známe závislost potenciálu na všech souřadnicích (máme ho vyjádřený ve všech bodech), tudíž můžeme počítat všechny složky elektrické intenzity. Jinak tomu bylo u výpočtu na ose homogenně nabité obruče, viz Elektrické pole na ose obruče, i když se může zdát, že se jedná o podobný případ.

Výpočet prvních dvou složek intenzity je jednoduchý

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Při výpočtu z-tové složky, tj. při derivování výrazu pro potenciál podle z, si kvůli absolutní hodnotě rozdělíme příklad na dvě části. Derivaci budeme počítat zvlášť pro $z > 0$ a pro $z < 0$.

Pro $z > 0$ bude mít potenciál v okolí nabité roviny tvar

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z,$$

po zderivování dostaneme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{pro } \forall z > 0.$$

Pro $z < 0$ bude mít potenciál v okolí nabité roviny tvar

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z,$$

po zderivování dostaneme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{pro } \forall z < 0.$$

Oba výsledky můžeme propojit a zapsat v jednom výrazu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|} \qquad \text{pro } \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Pro elektrickou intenzitu tedy dostáváme vztah

$$\vec{E} = \left(0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\right), \qquad \text{pro } \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Stejně jako v a) a b) je poslední zlomek ve výsledku jednotkový vektor rovnoběžný s osou z, který určuje směr elektrické intenzity. Pokud by rovina byla nabita kladně, pak elektrická intenzita míří ve směru kladné osy z, pokud jsem nad rovinou a elektrická intenzita míří ve směru záporné osy z, pokud jsem pod rovinou.

d) Odkaz – pomocí Gaussovy věty elektrostatiky

Výpočet elektrostatické intenzity v okolí homogenně nabité roviny pomocí Gaussovy věty elektrostatiky je řešen v úloze Pole rovnoměrně nabité roviny.

Magnetické pole přímého vodiče

Úloha číslo: 2133

Pomocí Ampérova zákona odvoďte vztah pro magnetické pole kolem dlouhého přímého vodiče, kterým prochází proud I. Uvažujte a) velmi tenký dlouhý přímý vodič, b) vodič o poloměru R, c) vodič jako tlustostěnnou trubku o poloměrech $R_1 < R_2$. Ve všech případech je proud rozložen rovnoměrně v průřezu vodiče.

Nápověda

Protože se jedná o homogenní rozložení proudu, bude vytvořené magnetické pole válcově symetrické. Pro určení magnetického pole použijeme Ampérův zákon.

Ampérův zákon

Celkový proud procházející plochou, kterou ohraničuje uzavřená křivka, vynásobený permeabilitou vakua se rovná integrálu magnetické indukce podél této křivky.

$$\mu_o I_c = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

Nápověda – jak správně volit Ampérovu křivku

Při řešení úloh Ampérovým zákonem využíváme symetrie situace. Tedy použijeme takovou křivku, podél níž je magnetická indukce konstantní, popřípadě volíme takovou křivku, podél níž jsme schopni popsat průběh magnetické indukce.

V tomto případě budeme jako Ampérovu křivku volit kružnici.

Řešení – dlouhý přímý vodič

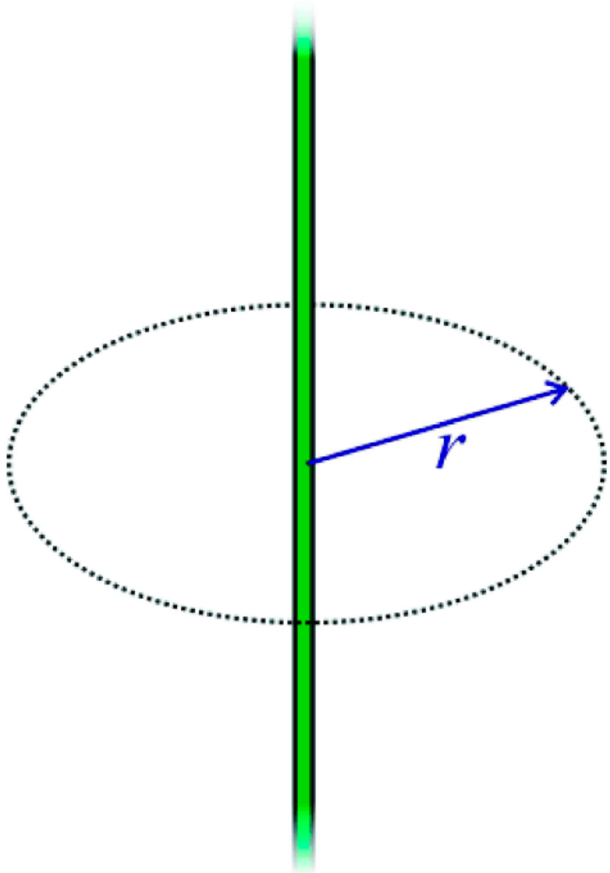
Pro určení směru magnetické indukce si vzpomeňme na **Ampérovo pravidlo pravé ruky:** *„jestliže palec pravé ruky ukazuje směr elektrického proudu ve vodiči, pak pokrčené prsty ukazují orientaci magnetických indukčních čar.“* Velikost magnetické indukce bude pravděpodobně záviset na procházejícímu proudu ve vodiči I a na vzdálenosti bodu od vodiče.

Úlohu máme řešit pomocí Ampérova zákona,

$$\mu_0 I_c = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}.$$

Ampérovou křivkou bude kružnice o poloměru r, kružnice je vhodná volba Ampérovy křivky, jelikož směr vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ je k ní tečný, má tedy stejný směr jako infinitezimální posunutí ve směru křivky $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$. Ampérův zákon proto můžeme přepsat do skalárního tvaru

$$\mu_0 I_c = \oint_\Gamma B \, \mathrm{d}l.$$



http://reseneulohy.cz/

Díky symetrii také víme, že velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ je podél celé kružnice konstantní. Můžeme tedy psát

$$\oint_\Gamma B\,\mathrm{d}l = B\oint_\Gamma \mathrm{d}l,$$

kde křivkový integrál přes uzavřenou křivku Γ je délka této křivky. Délka kružnice o poloměru $\boldsymbol{r}$ je $2\pi r$. I_c je celkový proud procházející křivkou, tedy $I_c = I$, což nám dohromady dáva

$$\mu_0 I = B\,2\pi r,$$

z čehož vyjádříme $\boldsymbol{B}$,

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{r}.$$

Získaný výsledek nám říká, jaká je velikost magnetické indukce ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ od vodiče. Směr orientace vektoru magnetické indukce můžeme určit pomocí Ampérova pravidla pravé ruky.

Nápověda – vodič o poloměru R

Jak se bude lišit výpočet magnetické indukce u vodiče o poloměru $\boldsymbol{R}$, od výpočtu s dlouhým přímým vodičem v předchozí části úlohy?

Řešení nápovědy – vodič o poloměru R

Vně vodiče bude výpočet stejný jako pro případ přímého dlouhého vodiče. Uvnitř vodiče bude výpočet probíhat hodně podobně, jenom je třeba si uvědomit, že Ampérova křivka bude „uvnitř“ vodiče, a tak její plochou nebude procházet veškerý proud.

Řešení – vodič o poloměru R

Pro případ vodiče o poloměru $\boldsymbol{R}$ musíme uvažovat dva případy magnetické pole vně vodiče a magnetické pole uvnitř vodiče.

a) vně vodiče

Výpočet magnetické intenzity vně vodiče bude stejný jako v případě přímého dlouhého přímého vodiče a dostaneme také stejný vztah

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{r},$$

tento vztah platí pro $r > R$.

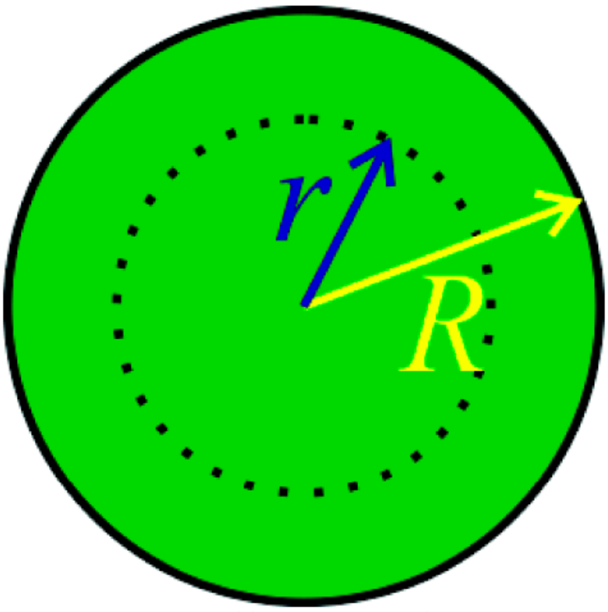
b) uvnitř vodiče

Výpočet magnetického pole uvnitř vodiče bude analogický s výpočtem magnetického pole v okolí dlouhého přímého vodiče. Úlohu máme řešit pomocí Ampérova zákona.

$$\mu_0 I_c = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}.$$

Jako Ampérovou křivku budeme volit kružnici o poloměru $\boldsymbol{r}$ $(R > r)$. Stejně jako vně kružnice je směr vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ tečný ke křivce, má tedy stejný směr jako infinitezimální posunutí ve směru křivky $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$. Ampérův zákon proto můžeme přepsat opět do skalárního tvaru

$$\mu_0 I_c = \oint_\Gamma B\,\mathrm{d}l.$$



Díky symetrii také víme, že velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ je podél celé kružnice konstantní, můžeme tedy $\boldsymbol{B}$ vytknout před integrál

$$\mu_0 I_c = \oint_\Gamma B\,\mathrm{d}l = B\oint_\Gamma \mathrm{d}l = B2\pi r.$$

Určitý integrál přes uzavřenou křivku Γ se rovná její délce, tedy délce kružnice o poloměru $\boldsymbol{r}$ (obvod kružnice je $2\pi r$).

I_c je celkový proud procházející plochou křivky, který si vyjádříme pomocí proudové hustoty. Proudová hustota je obecně definována jako

$$j = \frac{I}{S},$$

kde $\boldsymbol{I}$ je proud procházející plochou o obsahu $\boldsymbol{S}$. Jelikož známe proud procházející vodičem, můžeme vyjádřit proudovou hustotu jako

$$J = \frac{I}{\pi R^2}.$$

Když známe proudovou hustotu, můžeme vyjádřit celkový proud procházející plochou křivky o poloměru $\boldsymbol{r}$ (plocha křivky je πr^2)

$$I_c = J\, S = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2.$$

Vrátíme-li se zpět k našemu integrálu a dosadíme-li za celkový proud procházející plochou křivky, dostaneme

$$\mu_0 \frac{I r^2}{R^2} = B\, 2\pi r,$$

z čehož vyjádříme $\boldsymbol{B}$

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{rI}{R},$$

tento vztah platí uvnitř vodiče, tedy pro $R > r$.

Nápověda – vodič jako tlustostěnná trubka

Pokud je vodičem tlustostěnná trubka, tak je třeba si ho rozdělit na tři různé případy – oblasti. Řešení je už velmi podobné tomu, co jsme spočítali v předchozích částech úlohy.

Řešení nápovědy – vodič jako tlustostěnná trubka

Příklad budeme řešit pro

a) $r > R_2 > R_1$,

b) $R_2 > r > R_1$,

c) $R_2 > R_1 > r$.

Řešení – vodič jako tlustostěnná trubka

a) vně tlustostěnné trubky $(r > R_2 > R_1)$

Výpočet této části bude úplně stejný jako výpočet magnetického pole v okolí dlouhého přímého vodiče a výpočet magnetického pole v okolí vodiče o poloměru $\boldsymbol{R}$.

Ampérovou křivkou bude kružnice o poloměru $r > R_2 > R_1$. Směr vektoru magnetické indukce $\vec{B}$ je tečný ke křivce, má tedy stejný směr jako infinitezimální posunutí ve směru křivky $\mathrm{d}\vec{l}$. Ampérův zákon proto můžeme přepsat do tvaru

$$\mu_0 I_c = \oint_\Gamma B\, \mathrm{d}l.$$

Díky symetrii také víme, že velikost magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ je podél celé kružnice konstantní. Můžeme tedy psát

$$\oint_\Gamma B\,\mathrm{d}l = B\oint_\Gamma \mathrm{d}l,$$

kde křivkový integrál přes uzavřenou křivku Γ je délka této křivky, tj. $2\pi r$, I_c je celkový proud procházející křivkou, tedy $I_c = I$. Což nám dohromady dává

$$\mu_0 I = B\,2\pi r,$$

z čehož vyjádříme $\boldsymbol{B}$

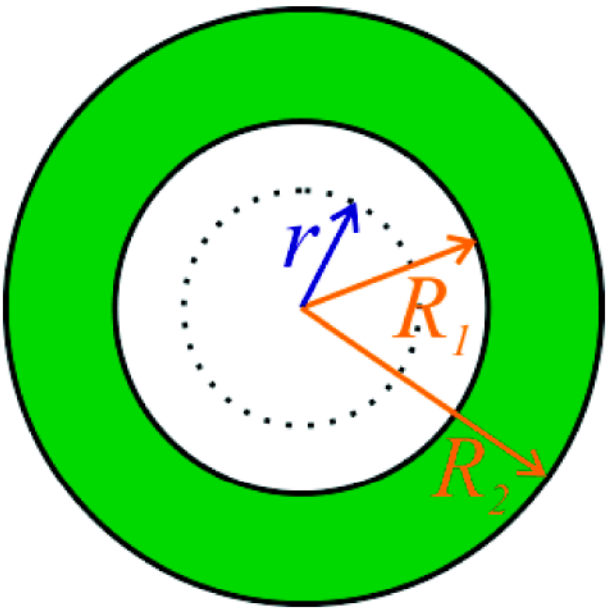
$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{r}.$$

b) uvnitř tlustostěnné trubky $(R_2 > r > R_1)$

Tato úloha je řešena zde Dutý válcový vodič, Řešení a).

c)uvnitř tlustostěnné trubky $(R_2 > R_1 > r)$

Výpočet je téměř stejný jako pro případ vně tlustostěnné trubky. Rozdílné je, že Ampérovou křivkou je kružnice o poloměru $R_2 > R_1 > r$. Dále je rozdílné, že proud procházející uzavřenou Ampérovou křivkou je nulový, tedy $I = 0\ \mathrm{A}$. Použijeme-li vztah z předešlého výpočtu, dostaneme



$$\mu_0 I = B\,2\pi r,$$

kde, jak již bylo řečeno, $I = 0\ \mathrm{A}$ a proto

$$B = 0\ \mathrm{T}.$$

Odpověď

a) Magnetická indukce ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ od dlouhého přímého vodiče, kterým prochází proud $\boldsymbol{I}$ je

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{r}.$$

b) Magnetická indukce ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ $(r > R)$ od vodiče o poloměru $\boldsymbol{R}$, kterým prochází proud $\boldsymbol{I}$ je

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{r}.$$

Magnetická indukce ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ ($R > r$) od vodiče o poloměru $\boldsymbol{R}$, kterým prochází proud $\boldsymbol{I}$ je

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{rI}{R}.$$

c) Magnetická indukce ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ ($r > R_2 > R_1$) od dlouhé tlustostěnné trubky, kterou prochází proud $\boldsymbol{I}$ je

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{I}{r}.$$

Magnetická indukce ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ ($R_2 > r > R_1$) od dlouhé tlustostěnné trubky, kterou prochází proud $\boldsymbol{I}$ je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(a^2 - b^2\right)}\frac{r^2 - b^2}{r}.$$

Magnetická indukce ve vzdálenosti $\boldsymbol{r}$ ($R_2 > R_1 > r$) od dlouhé tlustostěnné trubky, kterou prochází proud $\boldsymbol{I}$ je

$$B = 0\ \mathrm{T}.$$

RC obvod

Úloha číslo: 2136

Nenabitý kondenzátor o kapacitě C_0 je v čase $t = 0$ připojen sériově přes rezistor o odporu R_0 ke zdroji o stejnosměrném napětí U_0. Vypočtěte časový průběh proudu obvodem.

Nápověda – co se bude dít v obvodu

Po připojení obvodu ke zdroji napětí bude obvodem zpočátku procházet velký proud, ten bude nabíjet kondenzátor, na kondenzátoru tak bude vznikat opačné napětí, což způsobí, že se proud bude postupně snižovat. Při úplném nabití kondenzátoru, klesne proud na nulu.

Nápověda

Zamyslete se nad tím, jak se rozdělí napětí zdroje mezi kondenzátor a rezistor. Čemu je úměrné napětí na kondenzátoru, resp. na rezistoru?

Řešení nápovědy

Vztahy, které platí pro ustálený proud, platí i když je proud proměnný, musíme ale všechny veličiny brát v nějakém konkrétním časovém okamžiku, protože jsou časově závislé.

Druhý Kirchhoffův zákon nám říká, že součet úbytků napětí na spotřebičích se musí rovnat součtu elektromotorických napětí zdrojů v této části obvodu. Tedy napětí zdroje se musí rovnat součtu napětí na kondenzátoru a napětí na rezistoru.

Náboj na kondenzátoru je úměrný kapacitě C a napětí U, na které je kondenzátor nabit, tj.

$$Q = CU.$$

Napětí na kondenzátoru je tedy přímo úměrné náboji a nepřímo úměrné kapacitě.

Napětí na rezistoru je úměrné jeho odporu a procházejícímu proudu, viz Ohmův zákon.

Řešení

Při sepnutí spínače začne obvodem procházet proud, který bude nabíjet kondenzátor. Náboj na kondenzátoru se bude v čase zvyšovat, až do své maximální hodnoty.

Podle druhého Kirchhoffova zákona musí být napětí zdroje rovno součtu napětí na rezistoru a napětí na kondenzátoru.

$$U_0 = U_R(t) + U_C(t).$$

Pozn. Zápis $f(t)$ znamená, že daná funkce f je funkcí času, tedy že se hodnota s časem může měnit.

Využijeme Ohmův zákon $U_R = RI$ a definici kapacity $Q = UC$. Ohmův zákon, stejně jako vztah pro napětí na kondenzátoru platí v každém okamžiku, v rovnici tudíž uvažujeme okamžité hodnoty veličin. Důležité je si také uvědomit, že $\boldsymbol{Q}$ je náboj na kondenzátoru v čase $\boldsymbol{t}$.

$$U_0 = RI(t) + \frac{Q(t)}{C}.$$

Protože proud je definován jako „náboj za čas“, okamžitý náboj na kondenzátoru v čase t můžeme vyjádřit jako

$$Q(t) = \int_{t'=0}^{t} I(t')\mathrm{d}t',$$

výraz dosadíme do předešlé rovnice

$$U_0 = RI(t) + \frac{\int_{t'=0}^{t} I(t')\mathrm{d}t'}{C},$$

rovnici zderivujeme podle t

$$0 = R\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{I(t)}{C}.$$

Dostali jsme diferenciální rovnici prvního řádu s konstantními koeficienty a nulovou pravou stranou. Budeme ji řešit metodou separace proměnných, což znamená, že na jednu stranu přesuneme výrazy s funkcí I a na druhou stranu vše ostatní

$$\frac{1}{I(t)}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC},$$

$$\int \frac{1}{I(t)}\mathrm{d}I = -\int \frac{1}{RC}\mathrm{d}t,$$

$$\ln I = -\frac{t}{RC} + k,$$

z rovnice vyjádříme proud I

$$I = e^{\frac{-t}{RC}+k} = e^{\frac{-t}{RC}}\, e^{k},$$

e^k je konstanta, označíme ji jako I_A

$$I = I_A\, e^{\frac{-t}{RC}}. \tag{1}$$

Z počátečních podmínek dopočítáme konstantu I_A. Víme, že v čase $t = 0$ je sepnut spínač a kondenzátor je vybitý, tedy $U_C = 0$, tudíž $U_0 = U_R = R\,I(t = 0)$. Počáteční podmínky dosadíme do (1).

$$I(t = 0) = I_A\, e^{\frac{0}{RC}},$$

$$\frac{U_0}{R} = I_A.$$

Časový průběh proudu obvodem

$$I = \frac{U_0}{R}\, e^{\frac{-t}{RC}}.$$

V čase $t = 0$ je proud maximální, s rostoucím časem exponencielně klesá. Kondenzátor se bude na začátku nabíjet nejrychleji. S rostoucím časem bude klesat proud, který ho nabíjí. Pro čas $t \to \infty$ bude proud nulový, kondenzátor tedy bude plně nabit.

Graf

Následující aplet nám vykresluje funkci $y = I(t) = \frac{U_0}{R}\, e^{\frac{-t}{RC}}$, tedy proud jako funkci času. Změnou parametrů R, C a U (všechny veličiny jsou v základních SI jednotkách) si můžete zobrazit, jak časový průběh proudu na nich závisí, tj. jak rychle se bude kondenzátor nabíjet při daných parametrech.

Na ose y je proud v ampérech a na ose x je čas v sekundách.

Následující aplet nám vykresluje funkci $y = U_C(t) = U_0\,(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$, tedy napětí na kondenzátoru jako funkci času (výpočet je uveden níže). Změnou parametrů $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{U}$ (všechny veličiny jsou v základních SI jednotkách) si můžete prohlédnout, jak se bude průběh napětí v čase proměňovat, respektive jak rychle se bude kondenzátor nabíjet při nastavených parametrech.

Na ose y je napětí ve voltech a na ose x je čas v sekundách.

Úlohy na práci s grafy

1. Ukažte, že s rostoucí kapacitou kondenzátoru, roste čas potřebný k jeho nabití.

2. Ukažte, že pokud nabíjíme kondenzátor přes menší odpor, tak se kondenzátor nabíjí větším proudem a nabíjení je rychlejší.

3. Ukažte, že s rostoucím napětím zdroje, roste čas potřebný k nabití kondenzátoru. Zdůvodňete proč silnější zdroj nabíjí kondenzátor déle, neměl by to spíše zvládnout rychleji?

Poznámka: Výpočet napětí na kondenzátoru U_C

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int_{t'=0}^{t} I(t')\mathrm{d}t' = \frac{1}{C}\int_{t'=0}^{t} \frac{U_0}{R}\, e^{\frac{-t'}{RC}}\mathrm{d}t' = \frac{U_0}{CR}\left[-RCe^{\frac{-t'}{RC}}\right]_{t'=0}^{t} 0 = U_0(1 - e^{\frac{-t}{RC}}).$$

Paralelní zapojení reálných zdrojů

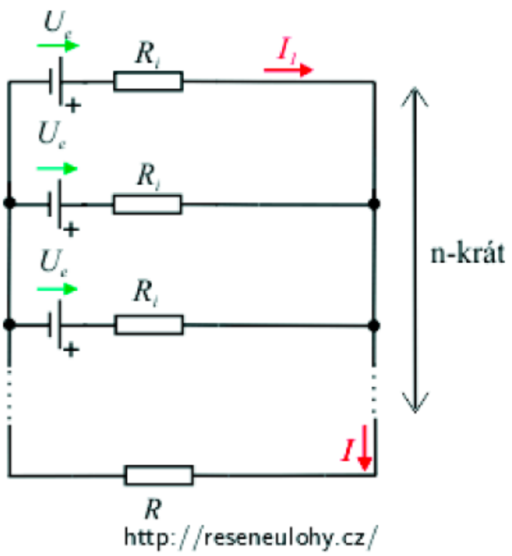
Úloha číslo: 2149

Určete elektromotorické napětí $U_{e,v}$ a vnitřní odpor $R_{i,v}$ zdroje, kterým bychom ekvivalentně nahradili zapojení n stejných paralelně zapojených baterii s parametry U_e a R_i. Úlohu řešte metodou lineární superpozice.

Odkaz – metoda lineární superpozice

O tom co je linearní superpozice a jak ji lze použít na příklady tohoto typu, se můžete dočíst na odkazu Metoda lineární superpozice.

Rozbor



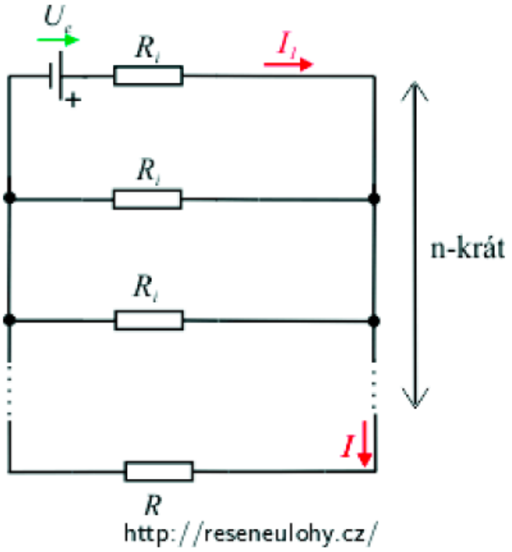
Metodou lineární superpozice vyjádříme proud I procházející rezistorem o odporu R. Výsledky vztah poté srovnáme s Ohmovým zákonem pro uzavřený obvod a odsud určíme hledané elektromotorické napětí a vnitřní odpor náhradního zdroje.

Stručně o metodě lineární superpozice:

Metodu lineární superpozice používáme v obvodech, ve kterých působí více zdrojů elektrické energie. Proud na vybraném prvku se určí tak, že necháme v obvodu zapojený jen jeden zdroj napětí a ostatní zdroje napětí nahradíme jejich vnitřním odporem. Stanovíme proud na uvažovaném prvku v takto upraveném obvodu. Toto provedeme postupně pro každý zdroj. Výsledný proud na uvažovaném prvku je potom součet proudů vyvolaných jednotlivými zdroji samostatně.

Řešení

Úlohu řešíme metodou lineární superpozice. Necháme první zdroj napětí, ostatní zdroje nahradíme jejich vnitřními odpory a vyjádříme proud procházející rezistorem o odporu R.



Nejprve vyjádříme celkový odpor zapojení. V obvodu je $(n-1)$ paralelně zapojených rezistorů s odporem $\boldsymbol{R_i}$ k nim je paralelně zapojen rezistor o odporu $\boldsymbol{R}$ a tato soustava rezistorů je v sérii s odporem $\boldsymbol{R_i}$.

Celkový odpor $(n-1)$ paralelně zapojených rezistorů s odporem R_i se spočítá jako

$$\frac{1}{R_{v1}} = \frac{1}{R_i} + \ldots + \frac{1}{R_i} = \frac{n-1}{R_i},$$

$$R_{v1} = \frac{R_i}{n-1}.$$

Připojíme-li paralelně k tomu rezistoru rezistor o odporu $\boldsymbol{R}$, výsledný odpor bude

$$\frac{1}{R_{v2}} = \frac{1}{\frac{R_i}{n-1}} + \frac{1}{R},$$

$$R_{v2} = \frac{R_i R}{(n-1)R + R_i}.$$

Tento výsledný odpor je v sérii s vnitřním odporem zdroje, celkový odpor zapojení

$$R_c = R_i + \frac{R_i R}{(n-1)R + R_i}.$$

Z Ohmova zákona vyjádříme proud I_1, což je proud, který prochází obvodem na obrázku

$$I_1 = \frac{U_e}{R_i + \frac{R_i R}{(n-1)R+R_i}} = \frac{U_e[(n-1)R + R_i]}{R_i^2 + (n-1)RR_i + R_i R} = \frac{U_e[(n-1)R + R_i]}{R_i^2 + nRR_i},$$

který se rozdělí do jednotlivých větví paralelního zapojení $(n-1)$ rezistorů s odporem R_i a rezistoru s odporem R. Při výpočtu proudu I_{R1} rezistorem s odporem R využijeme toho, že v paralelním zapojení se proud rozdělí v obráceném poměru k odporům

$$\frac{I_{R1}}{I_1} = \frac{R_{v2}}{R},$$

odkud vyjádříme

$$I_{R1} = \frac{U_e[(n-1)R + R_i]}{R_i^2 + nRR_i} \frac{\frac{R_i R}{(n-1)R+R_i}}{R} = \frac{U_e}{R_i + nR}.$$

Jelikož máme stejné zdroje, příspěvek k proudu rezistorem R od každého zdroje bude stejný. Proud procházející rezistorem R bude

$$I = nI_{R1} = \frac{nU_e}{R_i + nR}.$$

Ohmův zákon pro uzavřený obvod má obecně tvar

$$I = \frac{U_e}{R_i + R}.$$

Proud procházející rezistorem o odporu R upravíme do tvaru Ohmova zákona pro uzavřený obvod

$$I = \frac{nU_e}{R_i + nR} = \frac{U_e}{\frac{R_i}{n} + R}.$$

Porovnáním s Ohmovým zákonem pro uzavřený obvod, získáme

$$U_{e,v} = U_e.$$

$$R_{i,v} = \frac{R_i}{n}.$$

K čemu je to dobré?

Paralelní zapojení zdrojů nám zmenší vliv vnitřního odporu a zvýší dodávaný proud.

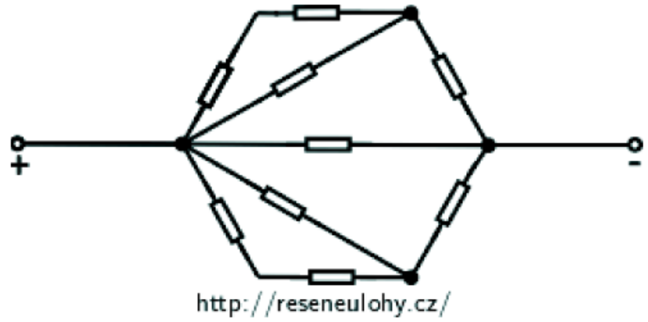
Odpověď

Elektromotorické napětí zdroje, kterým bychom nahradili n paralelně zapojených zdrojů $U_{e,v} = U_e$ a odpor tohoto zdoje $R_{i,v} = \frac{R_i}{n}$.

Netradiční obvody 3

Úloha číslo: 2153

Určete celkový odpor zapojení dle obrázku. Všechny rezistory mají stejný odpor R. Určete také napětí a proudy jednotlivými rezistory.

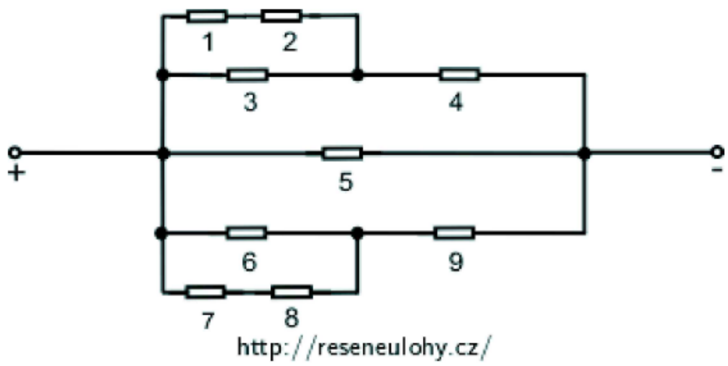


Nápověda

Pokud si nejste jisti, jak se obvody s rezistory řeší, projděte si úlohu Řešení obvodu s rezistory.

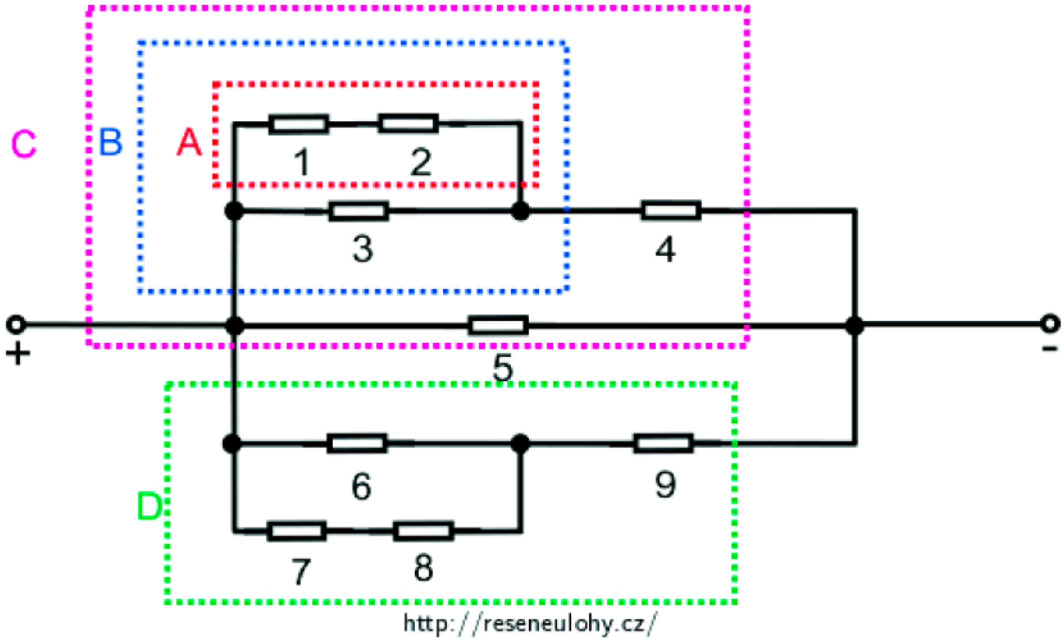
Klíčem k úspěchu je překreslit si celý obvod do „obvyklejšího tvaru“ tak, aby zapojení zůstalo stejné, ale bylo lépe vidět, který rezistor je s kterým zapojen paralelně resp. sériově.

Řešení nápovědy



Řešení – celkový odpor

Schéma rezistorů si překreslíme do obvyklejší formy a vyznačíme jednotlivé části, po kterých budeme obvod řešit.



Nyní budeme skupiny rezistorů nahrazovat jedním rezistorem, využijeme k tomu vztahy pro paralelní a sériové zapojení (viz nápověda). Využijeme také symetrii obvodu, abychom některé výpočty nemuseli provádět dvakrát. Všechny rezitory mají stejný odpor R.

Rezistory 1 a 2 jsou zapojeny sériově

$$R_A = R + R = 2R.$$

Rezistory A a 3 jsou zapojeny paralelně

$$\frac{1}{R_B} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R},$$

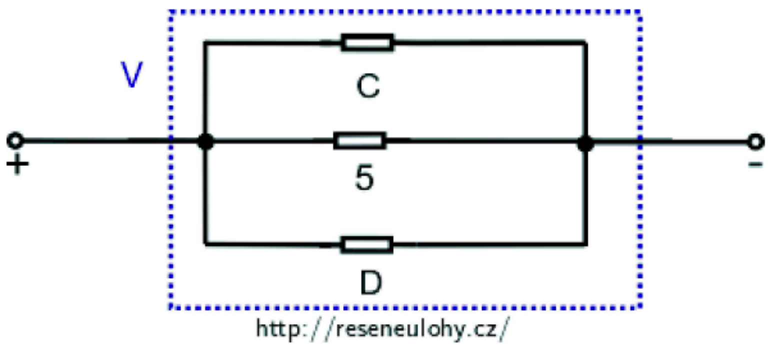
$$R_B = \frac{2}{3}R.$$

Rezistory B a 4 jsou zapojeny sériově

$$R_C = R_B + R = \frac{5}{3}R.$$

Díky symetrii obvodu, můžeme vyjádřit odpor spodní části rezistorů D

$$R_D = R_C = \frac{5}{3}R.$$



Rezistory C, D a 5 jsou zapojeny paralelně

$$\frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} + \frac{1}{R},$$

$$R_V = \frac{5}{11} R.$$

Výsledný odpor zapojení je $R_V = \frac{5}{11} R$.

Nápověda – napětí a proud jednotlivými rezistory

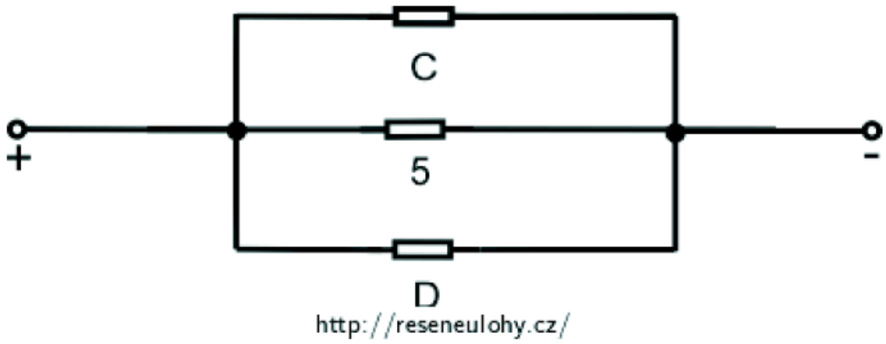
Připomeňme si, co platí pro proud v sériovém a paralelním zapojení:

1. Při sériovém zapojení je celkový proud procházející obvodem roven proudům procházejícím jednotlivými spotřebiči. Napětí na rezistorech zapojených do série se sčítají.

2. Při paralelním zapojení platí, že součet proudů procházejících jednotlivými spotřebiči se rovná celkovému proudu. Napětí je na všech větvích stejné.

Díky těmto dvěma podmínkám si vyjádříme proudy procházející jednotlivými rezistory v obvodu v závislosti na celkovém proudu. Tentokrát budeme ale postupovat obráceně než v první části úlohy. Začneme od obvodu „s jediným rezistorem“ a budeme postupně „přidávat rezisotry“ až dostaneme původní zapojení.

Řešení – napětí a proud



Nyní se vraťme k obvodu s rezistory C, D a 5, napětí na těchto rezistorech je stejné (viz nápověda) a je stejné jako napětí U na celém zapojení

$$U_C = U_D = U_5 = U.$$

Z předchozích výpočtů známe hodnoty odporů jednotlivých rezistorů

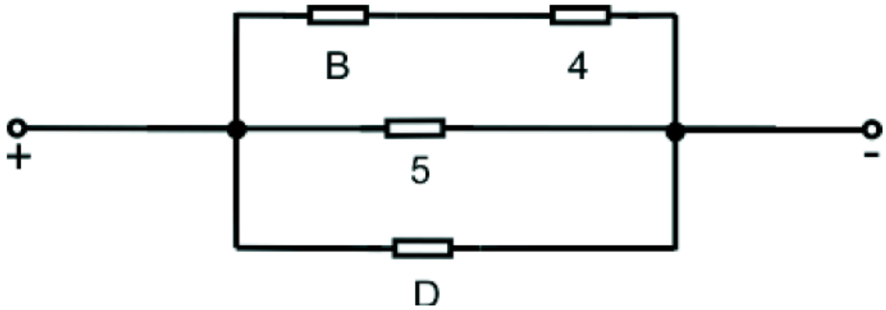
$$R_C = R_D = \frac{5}{3} R \qquad R_5 = R.$$

Proudy jednotlivými rezistory vyjádříme z Ohmova zákona $R = \frac{U}{I}$

$$I_C = I_D = \frac{3}{5} \frac{U}{R}.$$

$$R_5 = \frac{U}{R}.$$

Dále budeme úlohu řešit pouze pro horní část obvodu, ve spodní části obvodu budou díky symetrii zapojení stejné hodnoty.



http://reseneulohy.cz/

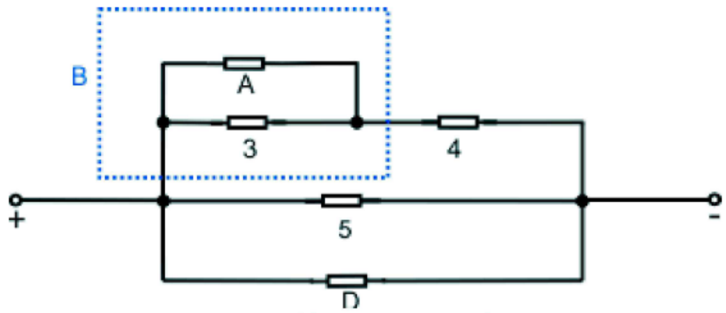
Rezistor C vzniknul nahrazením sériově zapojených rezistorů B a 4. Těmito rezistory musí procházet stejný proud jako nahrazujícím rezistorem C

$$I_B = I_5 = I_C = \frac{3}{5}\frac{U}{R}.$$

Napětí vyjádříme z Ohmova zákona $U = RI$

$$U_B = \frac{2}{3}R\frac{3}{5}\frac{U}{R} = \frac{2}{5}U.$$

$$U_4 = R\frac{3}{5}\frac{U}{R} = \frac{3}{5}U.$$



http://reseneulohy.cz/

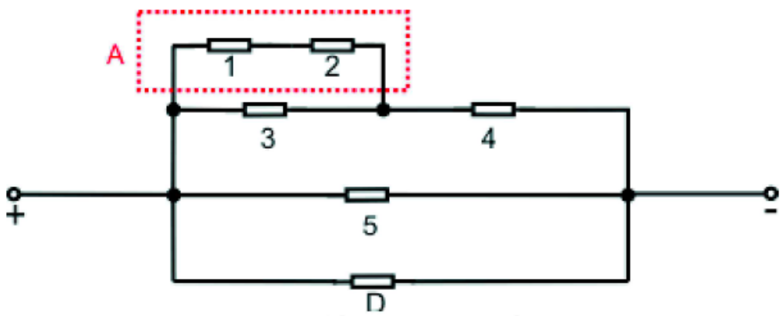
Rezistor B vzniknul nahrazením paraleleně zapojených rezistorů A a 3. Napětí na těchto rezistorech je tedy stejné a je stejné jako napětí na rezistoru B.

$$U_A = U_3 = U_B = \frac{2}{5}U.$$

Proud vyjádříme o Ohmova zákona

$$I_A = \frac{\frac{2}{5}U}{2R} = \frac{1}{5}\frac{U}{R}.$$

$$I_3 = \frac{\frac{2}{5}U}{R} = \frac{2}{5}\frac{U}{R}.$$



http://reseneulohy.cz/

Rezistor A vzniknul nahrazením sériově zapojených rezistorů 1 a 2, tedy proud procházející těmito rezistory je stejný jako proud procházející rezistorem A.

$$I_1 = I_2 = I_A = \frac{1}{5}\frac{U}{R}.$$

Napětí vyjádříme z Ohmova zákona a zároveň využijeme toho, že se jedná o dva zcela identické rezistory

$$U_1 = U_2 = R\frac{1}{5}\frac{U}{R} = \frac{1}{5}U.$$

Jelikož je obvod souměrný (a rezistory mají stejný odpor), nemusíme již dopočítávat náboje a napětí na rezistorech 6, 7, 8 a 9. Hodnoty budou odpovídat hodnotám rezistorů souměrných podle osy. Tedy například napětí a náboj na rezistoru 1 je stejné jako na rezistoru 7.

Odpověď

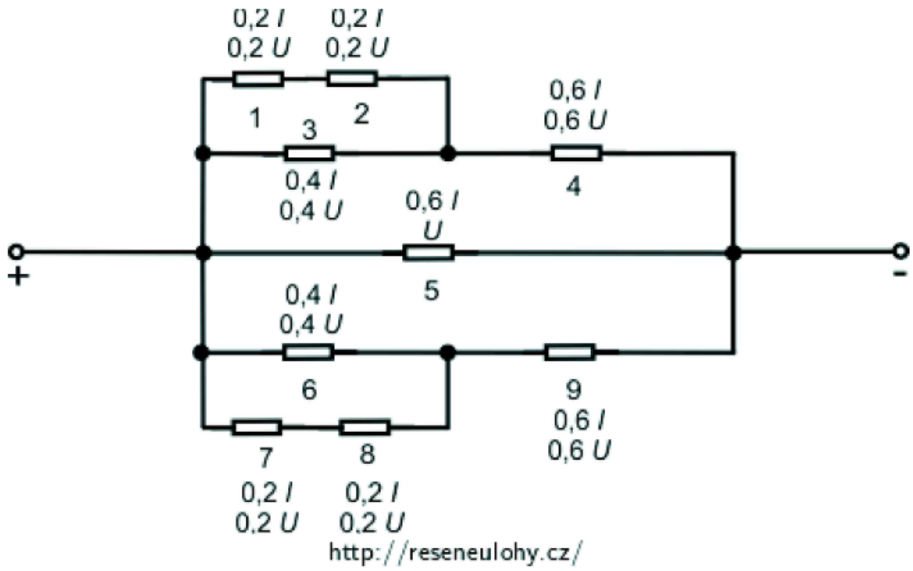
Celkový odpor zapojení $R_V = \frac{5}{11}R$.

Proudy a napětí na jednotlivých rezistorech:

$$I_1 = I_7 = \frac{1}{5}\frac{U}{R} \quad I_2 = I_8 = \frac{1}{5}\frac{U}{R} \quad I_3 = I_6 = \frac{2}{5}\frac{U}{R} \quad I_4 = I_9 = \frac{3}{5}\frac{U}{R} \quad I_5 = \frac{3}{5}\frac{U}{R}$$

$$U_1 = U_7 = \frac{1}{5}U \quad U_2 = U_8 = \frac{1}{5}U \quad U_3 = U_6 = \frac{2}{5}U \quad U_4 = U_9 = \frac{3}{5}U \quad U_5 = U$$

V následujícím schématu je použito označení $I = \frac{U}{R}$, kde $\boldsymbol{U}$ je napětí na obvodu a $\boldsymbol{R}$ je odpor každého z rezistorů.



Zapojování reálných zdrojů

Úloha číslo: 2051

Určete elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor R_i zdroje, kterým bychom ekvivalentně nahradili zapojení dvou sériově, resp. paralelně zapojených baterii s parametry $U_{e1} = 1,4\,V$, $R_{i1} = 0{,}6\,\Omega$ a $U_{e2} = 1,2\,V$, $R_{i2} = 0,4\,\Omega$.

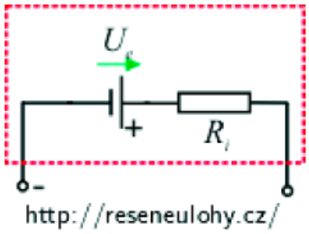
Jaký proud poteče rezistorem o odporu $R = 4,2\,\Omega$ připojíme-li ho na tento zdroj?

Nápověda

Uvědomte si, co je elektromotorické napětí, svorkové napětí a co je vnitřní odpor baterie.

Řešení nápovědy

Zdroj s vnitřním odporem si můžeme představit jako sériově zapojený ideální zdroj (bez vnitřního odporu) a rezistor s odporem rovným vnitřnímu odporu zdroje.



Pozn.: Pokud máme nějaký reálný zdroj (např. baterii), tak to, co je uvnitř červeného obdélníku, je schéma vnitřku baterie.

Elektromotorické napětí U_e je tzv. napětí na prázdno. Naměříme ho na svorkách zdroje, pokud není ke zdroji připojen žádný spotřebič, neboli zdrojem neteče žádný proud. (Uvědomte si, že voltmetr má opravdu obrovský odpor, a tedy proud protékající voltmetrem je zanedbatelně malý).

Svorkové napětí U_s se také měří na svorkách zdroje a to v případě, že ke zdroji je připojen nějaký spotřebič o odporu R. Po připojení spotřebiče ke zdroji, obvodem začne téct proud a napětí, které naměří připojený voltmetr, klesne o úbytek napětí na vnitřním odporu zdroje. Svorkové napětí je tedy menší než elektromotorické napětí a jeho hodnota závisí i na protékajícím proudu.

Matematicky to můžeme vyjádřit pomocí tzv. zatěžovací charakteristiky zdroje

$$U_s = U_e - IR_i,$$

kde U_s je svorkové napětí, U_e je elektromotorické napětí, R_i je vnitřní odpor zdroje a I je proud procházející obvodem.

Proud procházející spotřebičem o odporu R spočítáme pomocí Ohmova zákona pro část obvodu,

$$I = \frac{U_s}{R},$$

vyjádříme svorkové napětí a dosadíme do zatěžovací charakteristiky a vyjádříme I

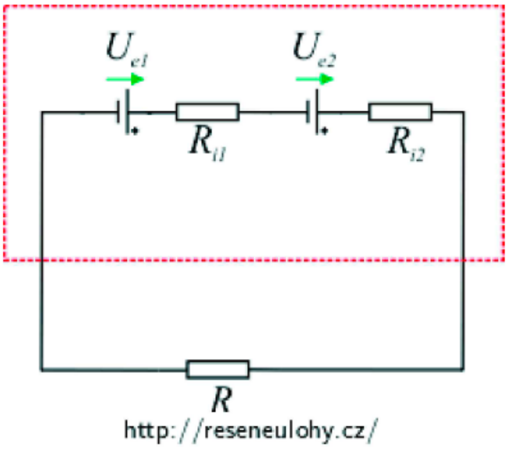
$$RI = U_e - IR_i,$$

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}.$$

Poslední vztah je tzv. Ohmův zákon pro uzavřený obvod.

Více o vnitřním odporu a zatěžovací charakteristice se můžete dočíst například na Encyklopedie fyziky F.

Rozbor – sériově



Pozn. červený rámeček ohraničuje „vnitřek" zdroje.

Naším úkolem je naleznout parametry zdroje (elektromotorické napětí a vnitřní odpor), kterým bychom ekvivalentně nahradili tyto dvě sériově zapojené baterie. To znamená najít zdroj, který vykazuje stejné vlastnosti.

Napětí na sériově zapojených zdrojích, které mají stejnou orientaci, se sčítá. Podobně celkový odpor dvou sériově zapojených rezistorů je dán jejich součtem. Obojí je důsledkem 2. Kirchhoffova zákona. Proud procházející rezistorem spočteme pomocí Ohmova zákona.

Řešení – sériově

Jak bylo řečeno v rozboru, napětí na dvou sériově zapojených zdrojích spočteme jako jejich součet. Jedná se o důsledek 2. Kirchhoffova zákona, více je to rozebráno v oddílu níže, viz Výpočet pomocí Kirchhoffových zákonů .

$$U_e = U_{e1} + U_{e2}.$$

Obdobně je to s vnitřním odporem. Jelikož jsou zdroje zapojeny sériově, jsou i vnitřní odpory zapojeny sériově. Celkový odpor dvou sériově zapojených rezistorů spočítáme jako jejich součet.

$$R_{ic} = R_{i1} + R_{i2}.$$

Proud procházející připojeným rezistorem o odporu R spočítáme podle Ohmova zákonu pro uzavřený obvod

$$I = \frac{U_e}{R + R_i},$$

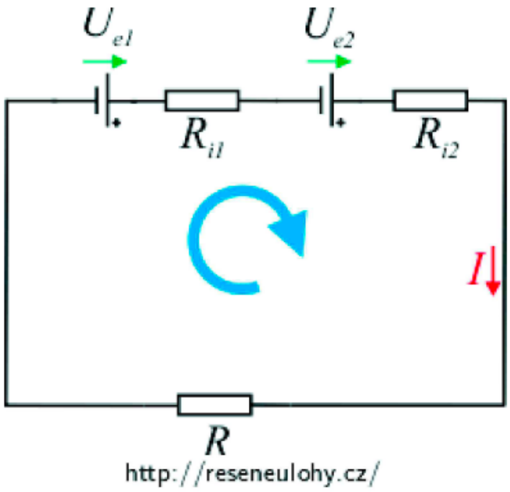
kde U_e je celkové elektromotorické napětí a R_i je celkový vnitřní odpor zdroje.

Celkový odpor zapojení spočítáme obdobně jako při výpočtu celkového vnitřního odporu, jelikož celkový vnitřní rezistor a připojený rezistor jsou v sérii.

Proud procházející připojeným rezistorem a tedy i celým obvodem

$$I = \frac{U_{e1} + U_{e2}}{R_{i1} + R_{i2} + R}.$$

Výpočet pomocí Kirchhoffových zákonů



Znění Kirchhoffových zákonů.

Kuchařka pro použití Kirchhoffových zákonů.

Obvod nemá žádné uzly, proto je zřejmé, že celým obvodem teče stejný proud ***I***.

Pro vyjádření proudu ***I*** využijeme druhého Kirchhoffova zákona.

$$U_{e1} + U_{e2} = R_{i1}I + R_{i2}I + RI,$$

$$U_{e1} + U_{e2} = I(R_{i1} + R_{i2} + R),$$

$$I = \frac{U_{e1} + U_{e2}}{R_{i1} + R_{i2} + R}.$$

Výsledek porovnáme s Ohmovým zákonem pro uzavřený obvod.

$$I = \frac{U_e}{R + R_i}.$$

Porovnáním získáme

$$U_e = U_{e1} + U_{e2}.$$

$$R_i = R_{i1} + R_{i2}.$$

Zápis a číselné dosazení – sériově

$U_{e1} = 1{,}4\ \mathrm{V}$	elektromotorické napětí první baterie
$R_{i1} = 0{,}6\ \Omega$	vnitřní odpor první baterie
$U_{e2} = 1{,}2\ \mathrm{V}$	elektromotorické napětí druhé baterie
$R_{i1} = 0{,}4\ \Omega$	vnitřní odpor druhé baterie
$R = 4{,}2\ \Omega$	odpor připojeného rezistoru
$I = ?\ (\mathrm{A})$	proud procházející rezistorem
$U_e = ?\ (\mathrm{V})$	celkové elektromotorické napětí zdroje
$R_{ic} = ?\ (\Omega)$	celkový vnitřní odpor zdroje

$$U_e = U_{e1} + U_{e2} = 1{,}4 + 1{,}2\ \mathrm{V} = 2{,}6\ \mathrm{V}.$$

$$R_{ic} = R_{i1} + R_{i2} = 0{,}6 + 0{,}4\,\Omega = 1\,\Omega.$$

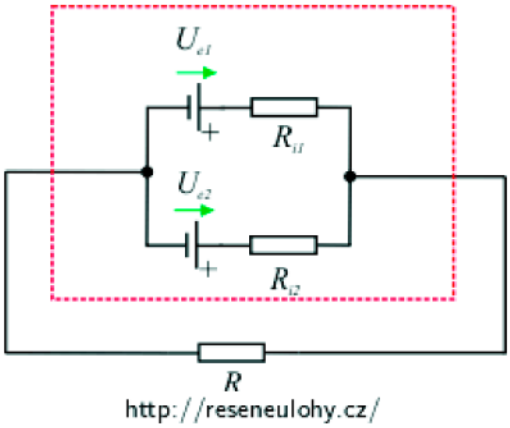
$$I = \frac{U_{e1} + U_{e2}}{R_{i1} + R_{i2} + R} = \frac{1{,}4 + 1{,}2}{0{,}6 + 0{,}4 + 4{,}2}\,\mathrm{A} = 0{,}5\,\mathrm{A}.$$

Nápověda – paralelně

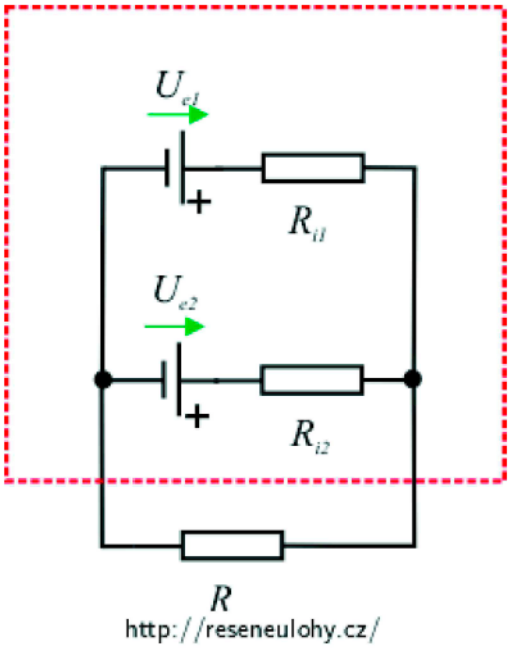
Nakreslete si obrázek vystihující zadání. Připomeňte si, jak zní a jak se používají Kirchhoffovy zákony? Jak by se daly Kirchhoffovy zákony použít v této úloze?

Řešení nápovědy

Situaci nám zachycuje následující obrázek.



Což si můžeme pro lepší názornost překreslit jako



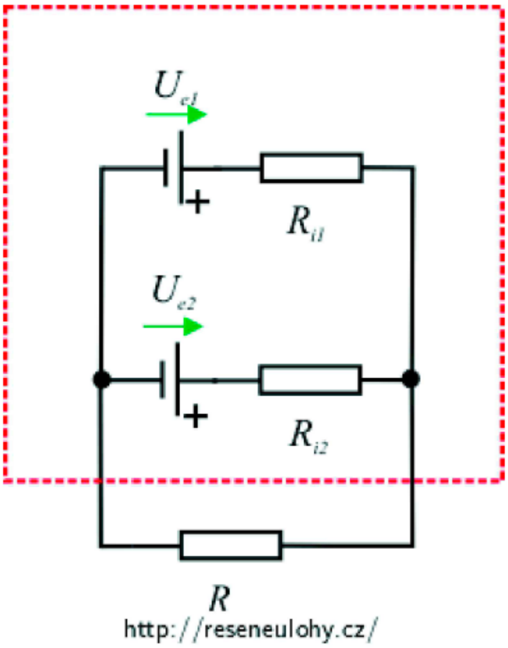
Odkaz – Kirchhoffovy zákony a „kuchařka" pro jejich použití

Znění Kirchhoffových zákonů.

Kuchařka pro použití Kirchhoffových zákonů.

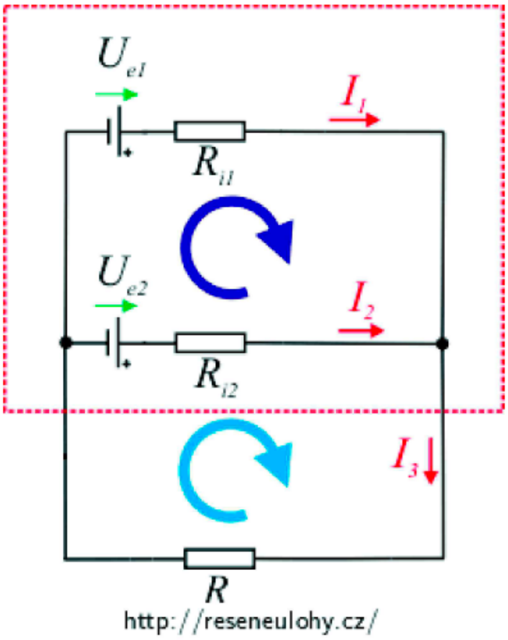
Rozbor – paralelně

Situaci si nakreslíme.



V obvodu máme zapojeno více zdrojů, proto použijeme k řešení Kirchhoffovy zákony. S jejich pomocí nalezneme vztah pro proud I procházející připojeným spotřebičem. Porovnáním získaného vztahu a Ohmova zákona pro uzavřený obvod určíme elektromotorické napětí a vnitřní odpor zdroje, který by ekvivalentně nahradil paralelně zapojené baterie.

Řešení – paralelně



Dle prvního Kirchhoffova zákona si zapíšeme rovnice pro uzly A a B (jsou stejné, proto ji stačí napsat jen jednou)

$$I = I_1 + I_2. \tag{1}$$

Dle druhého Kirchhoffova zákona si zapíšeme rovnice pro jednotlivé smyčky.

Pozn. pozor na znaménkovou konvenci viz Kuchařka.

$$U_{e1} - U_{e2} = R_{i1} I_1 - R_{i2} I_2,$$

$$U_{e2} = R_{i2} I_2 + RI.$$

Z rovnice (1) si vyjádříme I_1 a dosadíme do soustavy

$$U_{e1} - U_{e2} = R_{i1}(I - I_2) - R_{i2}I_2$$

$$U_{e2} = R_{i2}I_2 + RI$$

Protože naším cílem je najít vztah pro I, vyjádříme z druhé rovnice I_2

$$U_{e2} = R_{i2}I_2 + RI \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{U_{e2} - RI}{R_{i2}}$$

a dosadíme do první rovnice

$$U_{e1} - U_{e2} = R_{i1}I - R_{i1}\frac{U_{e2} - RI}{R_{i2}} - R_{i2}\frac{U_{e2} - RI}{R_{i2}}.$$

Rovnici rozšíříme výrazem R_{i2}

$$R_{i2}(U_{e1} - U_{e2}) = R_{i2}R_{i1}I - R_{i1}(U_{e2} - RI) - R_{i2}(U_{e2} - RI),$$

a vyjádříme I

$$I = \frac{R_{i1}U_{e2} + R_{i2}U_{e1}}{R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R}.$$

Výsledek upravíme tak, aby byl podobný tvaru Ohmova zákona pro uzavřený obvod $I = \frac{U_e}{R+R_i}$ (tj. chceme, aby jmenovatel zlomku měl tvar $\boldsymbol{R}$ + *něco*)

$$I = \frac{R_{i1}U_{e2} + R_{i2}U_{e1}}{R_{i1}R_{i2} + (R_{i1} + R_{i2})R} = \frac{R_{i1}U_{e2} + R_{i2}U_{e1}}{(R_{i1} + R_{i2})\left(\frac{R_{i1}R_{i2}}{R_{i1}+R_{i2}} + R\right)} = \frac{\frac{R_{i1}U_{e2}+R_{i2}U_{e1}}{R_{i1}+R_{i2}}}{R + \frac{R_{i1}R_{i2}}{R_{i1}+R_{i2}}}.$$

Porovnáním získáme

$$U_e = \frac{R_{i1}U_{e2} + R_{i2}U_{e1}}{R_{i1} + R_{i2}}.$$

$$R_i = \frac{R_{i1}R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}}.$$

Zápis a číselné dosazení – paralelně

$U_{e1} = 1{,}4\ \mathrm{V}$	elektromotorické napětí první baterie
$R_{i1} = 0{,}6\ \Omega$	vnitřní odpor první baterie
$U_{e2} = 1{,}2\ \mathrm{V}$	elektromotorické napětí druhé baterie
$R_{i1} = 0{,}4\ \Omega$	vnitřní odpor druhé baterie
$R = 4{,}2\ \Omega$	odpor připojeného rezistoru
$I = ?\ (\mathrm{A})$	proud procházející rezistorem
$U_e = ?\ (\mathrm{V})$	celkové elektromotorické napětí zdroje
$R_{ic} = ?\ (\Omega)$	celkový vnitřní odpor zdroje

$$R_{ic} = \frac{R_{i1}R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}6 + 0{,}4}\ \Omega = 0{,}24\ \Omega.$$

$$I = \frac{R_{i1}U_{e2} + R_{i2}U_{e1}}{R_{i1}R_{i2} + R_{i1}R + R_{i2}R} = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}2 + 0{,}4 \cdot 1{,}4}{0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 4{,}2 + 0{,}4 \cdot 4{,}2}\ \mathrm{A} \doteq 0{,}29\ \mathrm{A}.$$

$$U_e = \frac{R_{i1}U_{e2} + R_{i2}U_{e1}}{R_{i1} + R_{i2}} = \frac{1{,}4 \cdot 0{,}4 + 1{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}4 + 0{,}6}\ \mathrm{V} = 1{,}28\ \mathrm{V}.$$

Odpověď

Při sériovém zapojení má zdroj elektromotorické napětí $U_e = 2{,}6\ \mathrm{V}$ a vnitřní odpor $R_i = 1\ \Omega$. Připojeným rezistorem prochází proud $I = 0{,}5\ \mathrm{A}$.

Při paralelním zapojení má zdroj elektromotorické napětí $U_e = 1{,}28\ \mathrm{V}$ a vnitřní odpor $R_i = 0{,}24\ \Omega$. Připojeným rezistorem prochází proud $I \doteq 0{,}29\ \mathrm{A}$.

Shrnutí a něco navíc

Celkový vnitřní odpor spočítáme z vnitřních odporů jednotlivých zdrojů. Můžeme si to představit tak, že v náhradním zapojení vynecháme ideální zdroje a spočítáme celkový odpor zapojení vnitřních odporů jednotlivých zdrojů.

Určit celkové elektromotorické napětí už tak jednoduché ale není. Při sériovém zapojení se elektromotorická napětí sčítají. Ale u paralelního zapojení nepočítáme pouze z elektromotorických napětí jednotlivých zdrojů, ale ve výpočtu vystupuje také vnitřní odpor těchto zdrojů, protože je třeba započítat úbytky napětí na jednotlivých vnitřních odporech.

1) Paralelní zapojení dvou a více zdrojů

Paralelní zapojení dvou stejných zdrojů

Obecně jsme odvodili pro dva různé paralelně zapojené zdroje vztahy

$$U_e = \frac{R_{i1}U_{e2} + R_{i2}U_{e1}}{R_{i1} + R_{i2}}.$$

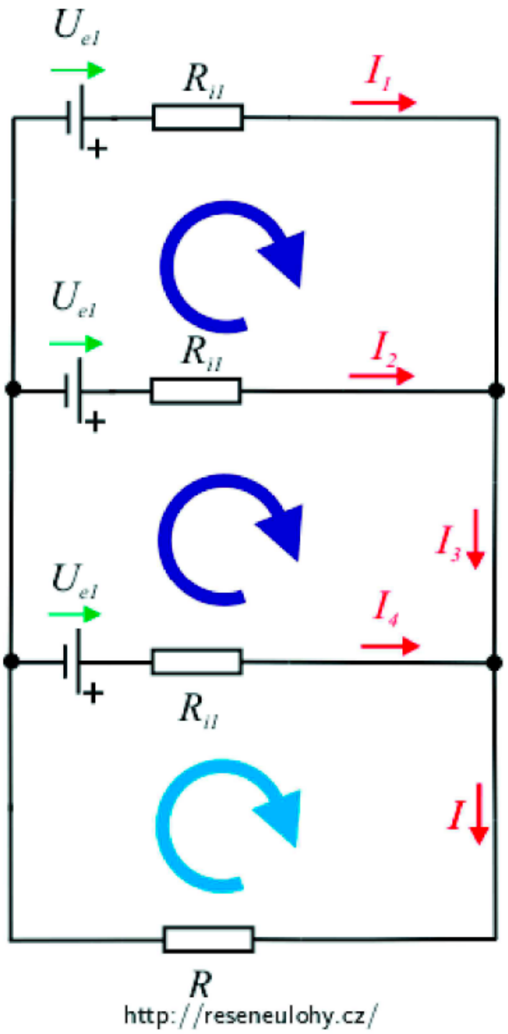
$$R_i = \frac{R_{i1}R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}}.$$

Máme-li dva stejné zdroje, pak $R_{i1} = R_{i2}$ a $U_{e1} = U_{e2}$

$$U_e = \frac{R_{i1}U_{e1} + R_{i1}U_{e1}}{R_{i1} + R_{i1}} = U_{e1}.$$

$$R_i = \frac{R_{i1}R_{i1}}{R_{i1} + R_{i1}} = \frac{R_{i1}}{2}.$$

Paralelní zapojení více stejných zdrojů



Stejně jako jsme odvodili vztah pro dva různé paralelně zapojené zdroje, odvodíme vztah pro tři stejné paralelně zapojené zdroje. Pro výpočet použijeme Kirchhoffových zákonů.

Dle prvního zákonu si zapíšeme rovnice pro jednotlivé uzly

$$I_1 + I_2 = I_3,$$

$$I_3 + I_4 = I.$$

Z čehož vyjádříme $\boldsymbol{I}$

$$I = I_1 + I_2 + I_4.$$

Dle druhého zákona si zapíšeme rovnice pro jednotlivé smyčky

$$U_{e1} - U_{e1} = R_{i1}I_1 - R_{i1}I_2$$

$$U_{e1} - U_{e1} = R_{i1}I_2 - R_{i1}I_4$$

$$U_{e1} = R_{i1}I_4 + RI$$

$$0 = R_{i1}I_1 - R_{i1}I_2$$

$$0 = R_{i1}I_2 - R_{i1}I_4$$

$$U_{e1} = R_{i1}I_4 + RI$$

$$R_{i1}I_1 = R_{i1}I_2 \implies I_1 = I_2 \tag{*}$$

$$R_{i1}I_2 = R_{i1}I_4 \implies I_2 = I_4 \tag{**}$$

$$U_{e1} = R_{i1}I_4 + RI. \tag{***}$$

Nyní se vrátíme k rovnic, jež jsme získali z prvního Kirchhoffova zákona

$$I = I_1 + I_2 + I_4.$$

do rovnice dosadíme (*) a (**)

$$I = 3I_1 = 3I_2 = 3I_4,$$

$$I_4 = \frac{I}{3}.$$

Poslední rovnost dosadíme do (***) a vyjádříme I

$$U_{e1} = R_{i1}\frac{I}{3} + RI,$$

$$U_{e1} = I(\frac{R_{i1}}{3} + R),$$

$$I = \frac{U_{e1}}{\frac{R_{i1}}{3} + R}.$$

Výsledek srovnáme s Ohmovým zákonem pro uzavřený obvod

$$I = \frac{U}{R_i + R}.$$

Porovnáním získáme

$$U_e = U_{e1}.$$

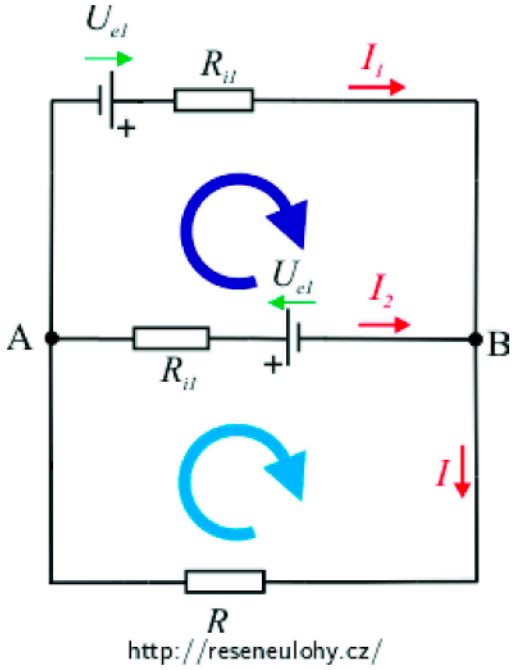
$$R_i = \frac{R_{i1}}{3}.$$

Je zřejmé, že pro n stejných paralelně zapojených zdrojů, by výpočet probíhal stejně. Můžeme tedy napsat celkové elektromotorické napětí a celkový vnitřní odpor pro n stejných paralelně zapojených zdrojů

$$U_e = U_{e1}.$$

$$R_i = \frac{R_{i1}}{n}.$$

2) Antiparalelní zapojení dvou stejných zdrojů



Z předchozích výpočtů víme, že máme-li dva paralelně zapojené zdroje o elektromotorickém napětí U_{e1} a U_{e2} s vnitřními odpory R_{i1} a R_{i2}, pak pro celkové elektromotrické napětí a celkový odpor platí

$$U_e = \frac{R_{i1}U_{e1} + R_{i1}U_{e1}}{R_{i1} + R_{i1}}.$$

$$R_i = \frac{R_{i1}R_{i1}}{R_{i1} + R_{i1}}.$$

Máme-li zapojené dva zdroje antiparalelně, pak $U_{e1} = -U_{e2}$ a $R_{i1} = R_{i2}$. Po dosazení dostaneme

$$U_e = 0\,\mathrm{V}.$$

$$R_i = \frac{R_{i1}}{2}.$$

Zde je důležité si uvědomit, že i když na zdroj připojím rezistor (stejně tak, když ho nepřipojím) o odporu R, tak proud poteče pouze smyčkou se zdroji („uvnitř baterie“), velikost tohoto proudu bude $I_B = \frac{U_{e1}}{R_{i1}}$ a baterie se bude rychle vybíjet. Připojeným rezistorem nepoteče proud, protože celkové elektromotorické napětí zdroje je nulové (body A a B mají stejný potenciál).

Odkaz – n paralelních zdrojů metodou lineární superpozice

Na tuto úvohy navazuje úloha Paralelní zapojení reálných zdrojů.