Posudek oponenta bakalářské práce

Název: Nestandardní analýza a její aplikace
Autor: Lenka Hýlová

Shrnutí obsahu práce

Tématem práce je studium silných derivací reálných funkcí metodami nestandardní analýzy (NSA). V první kapitole autorka vysloví základní axiomy, které jí umožní práci s nestandardním univerzem, zavádí hyperpřirozená a hyperreálná čísla a zkoumá klasické pojmy spojitosti a derivace reálné funkce pomocí nestandardních technik. Druhá kapitola se věnuje silné derivaci a studuje vztahy mezi existencí silné derivace a spojitostí klasické derivace pro reálné funkce jedné i více proměnných metodami NSA. Závěr druhé kapitoly se zabývá silnými parciálními derivacemi a důkazem diferencovatelnosti funkce dvou proměnných za předpokladu existence obou parciálních derivací, z nichž je alespoň jedna silná.

Celkové hodnocení práce

Téma práce. Zadání práce, tj. seznámení se základními principy NSA a jejich aplikace na konkrétní partie klasické analýzy, bylo splněno. Téma práce je přiměřeně náročné i přesto, že zavedení nestandardních metod není rigorózní.

Vlastní příspěvek. Práce obsahuje vlastní příspěvek autorky. Jde zejména o druhou kapitolu, kde autorka pomocí nestandardních metod ukazuje výsledky dokázané dříve pomocí standardních metod.

Matematická úroveň. Matematická úroveň práce je velmi dobrá. Práce obsahuje jen drobné a jednoduše odstranitelné matematické chyby.

Práce se zdroji. Zdroje jsou citovány správně. V případech, kdy autorka dokazuje nestandardními metodami výsledek z jiného článku, by snad mohlo být odkázáno na konkrétní větu z původního článku.

Formální úprava. Formálně je práce naprosto vyhovující. Práce je psaná přehledně a je téměř bez chyb.

Připomínky a otázky

V práci se nevyskytují závažné chyby. Jedinou výtkou je tak fakt, že nezanedbatelná část důkazů probíhá podle velmi podobného schématu. Ačkoli je toto v NSA do jisté míry obvyklé, v tomto případě by textu mohlo prospět, pokud by autorka nejprve ukázala nestandardní charakterizaci limity a na tuto charakterizaci pak pouze odkazovala. Studované pojmy (spojitost, derivace) by pak mohly být definovány přímo pomocí limit bez nutnosti opakovaného použití ε-δ definic, které jsou i přes svou „připravenost na transfer“ trochu nepřehledné.

Méně závažné připomínky uvádím níže.

1. str. 3: Vzhledem k dalšímu by bylo vhodné zmínit, že nosná množina $\mathbb{X}$, resp. univerzum $\mathbb{U}$, nějakým způsobem obsahuje reálná čísla.
2. str. 3, Příklad 3: Formálně by nebylo na škodu zmínit, že ve formuli $2 < f(x)$ je x proměnná hned zpočátku. Lze si totiž představit např. $x \in \mathbb{X}$, tedy že x je konstanta.

3. str. 3, Axiom 3: Je zvykem ostrou inkluzi mezi množinami A, B značit $A \subsetneq B$. Symbol $\subset$ má typicky stejný význam jako symbol $\subseteq$.

4. str. 6, bod (v): Jelikož b může být záporné a $\xi \in \mathbb{R}^+$, nerovnosti typu $|a - b| < b \cdot \xi$ nemusí platit.

5. str. 7, Definice 12: Formulace „funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu x_0 je spojitá, pokud…“ není hezká. Buď pro jednoduchost definuji f na $\mathbb{R}$, nebo minimalisticky požaduji f definovanou na okolí bodu x_0. Toto se vyskytuje na více místech práce, namátkou ve Větě 13, Definici 15, Větě 16 a dále.

6. str. 10, Věta 22: $f(x_0 + \mu)$ a $f(x_0 + \nu)$ jsou vždy definované, jelikož je f definovaná na okolí bodu x_0.

7. str. 12, ř. -5: Nerovnost po „Pak nutně musí platit…“ by si možná zasloužila podrobnější komentář.

8. str. 13, ř. -4: Konec důkazu je potřeba drobně změnit. Jelikož $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, plyne z $K\varepsilon \simeq 0$ nutně $K \simeq 0$, což je ve sporu s $K \in \mathbb{R}^+$.

9. str. 15, ř. 8: Formálně je nutné použít variantu Věty 13. Ta totiž předpokládá, že funkce je definovaná na okolí nějakého bodu. Zde však vyšetřujeme spojitost pouze na množině, kde je x_0 hromadným bodem.

10. str. 15, ř. 10: Jak víme, že existuje nějaké $\nu \in \mathbb{I}$ tak, aby $x_0 + \nu \in {}^*A$?

11. str. 15, ř. 11 a 14: Kvůli čitelnosti není vhodné ihned po sobě používat symbol ξ pro různé proměnné ($\xi \in \mathbb{I}$ vs. $\xi \in \mathbb{R}^+$).

12. str. 17, (2.7): Je nutná neostrá nerovnost pro případ $\vec{a} = \vec{b}$.

13. str. 18, Definice 36: Šlo by v rámci zjednodušení zajít až tak daleko, že bychom z definice silné parciální derivace vypustili δ_1 a nahradili ho δ?

Závěr

Práci považuji za pěknou a doporučuji ji uznat jako bakalářskou práci. Návrh hodnocení zašlu předsedovi zkušební subkomise.

Jakub Slavík
ÚTIA AV ČR
5. června 2018