MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lenka Hýlová

Nestandardní analýza a její aplikace

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Chtěla bych tímto poděkovat doc. RNDr. Daliboru Pražákovi, Ph.D. za odborné vedení této práce a množství věcných připomínek po celou dobu jejího vzniku.

Název práce: Nestandardní analýza a její aplikace

Autor: Lenka Hýlová

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Cílem této práce je aplikovat metody nestandardní analýzy na téma silné derivace. Nejprve shrneme základní poznatky o nestandardní analýze, nestandardně definujeme některé pojmy z matematické analýzy (spojitost, derivace, ...) a dokazujeme ekvivalenci standardních a nestandardních definic. Ve druhé kapitole zavádíme pojem silné derivace (standardně i nestandardně) a dokazujeme pravidla pro její výpočet a některé základní vlastnosti. Například, pokud má funkce v nějakém bodě silnou derivaci, je na nějakém okolí tohoto bodu Lipschitzovská. V závěru práce zavádíme silnou parciální derivaci a dokazujeme tvrzení, které nám říká, že existence parciálních derivací funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, z nichž jedna je silná, implikuje existenci totálního diferenciálu.

Klíčová slova: univerzum princip transferu internální a externální množiny

Title: Non-standard analysis and its applications

Author: Lenka Hýlová

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Dalibor Pražák, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The aim of this thesis is to apply methods of nonstandard analysis on the topic of strong derivative. First of all, we sum up basic knowlegde of nonstandard analysis, we introduce some nonstandard definitons (such as continuity, derivative, ...) and we prove the equivalence of standard and nonstandard definitions. In the second chapter we introduce the notion of strong derivative (in both standard and nonstandard way) and we prove rules for its computing and some basic properties. For example, if a function has strong derivative at some point, then it satisfies a Lipschitz condition in a neighbourhood of this point. In the final part of the thesis we define strong partial differentiability and we prove the theorem which claims that the existence of partial derivatives of a function from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}$ with respect to both factors, one of them strong, implies the existence of a total derivative.

Keywords: universe transfer principle internal and external sets

Obsah

Úvod

Nestandardní analýza nabízí alternativní pohled na matematiku. Jedním z jejích nástrojů jsou nekonečně velká a nekonečně malá (inifitesimální) čísla, díky kterým lze běžné pojmy především z matematické analýzy (posloupnosti, řady, spojistost funkcí, ...) definovat intuitivnějším způsobem. Myšlenky nestandardní analýzy jsou staré už několik století – používali je především Newton a Leibniz. Jejich snaha ale narážela na nepřesně definované pojmy a nedostatečně rozvinuté odvětví matematické logiky. Za zakladatele moderní nestandardní analýzy je považován Abraham Robinson, který v roce 1996 vydal svou knihu *Non-standard analysis* (Robinson (1966)).

V této práci aplikujeme přístup nestandardní analýzy na téma silné derivace. Silná diferenovatelnost (strong differentiability/strict differentiability) je silnější vlastnost než obyčejná diferencovatelnost a má zajímavé důsledky. Například, má-li funkce v nějakém bodě silnou derivaci, pak je na okolí tohoto bodu Lipschitzovská.

V první kapitole shrneme základní poznatky o nestandardní analýze, především ty, které budeme následně využívat. V této části čerpáme z knihy *Lectures on the Hyperreals* (Goldblatt (2012)), ale obsahuje navíc některé příklady a důkazy, které v knize nebyly provedeny do detailů. Tato kapitola si neklade za cíl podrobný a úplný úvod do problematiky nestandardní analýzy. Pro tyto účely může velice dobře posloužit právě Goldblattova (Goldblatt (2012)) a také Robinsonova kniha (Robinson (1966)), která je sice podrobnější, ale vzhledem ke své abstraktnosti a požadavkům na rozsáhlé znalosti z matematické logiky pro začátečníky méně vhodná.

Druhá kapitola vychází z článku *Strong Derivatives and Inverse Mappings* (Nijenhuis (1974)), ve kterém autor zavádí pojem silné derivace a dále s ním pracuje. V této práci nejprve silnou derivaci definujeme v řeči nestandardní analýzy pro reálné funkce a následně nestandardními metodami ověříme její základní vlastnosti. Později pojem rozšíříme i pro funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Nakonec definujeme silnou parciální derivaci, ale naše definice je oproti článku pozměněná, protože původní definice byla pro naše potřeby zbytečně komplikovaná. Hlavním výsledkem této části je tvrzení o vztahu existence parciálních derivací, z nichž jedna je silná, a existence totálního diferenciálu.

1. Nestandardní analýza

1.1 Prinicip transferu

Budeme pracovat s *univerzem* $\mathbb{U}$, což je soubor objektů (mohou to být množiny, funkce, relace, posloupnosti, ...) na nosné množině $\mathbb{X}$. Jeho prvky budeme nazývat *standardní*.

Definice 1. *Formulí* nazveme výrok složený z prvků $\mathbb{U}$, logických spojek, závorek a proměnných vázaných kvantifikátory.

Nestandardní analýza pracuje s rozšířeným univerzem $\mathbb{U}'$, které vytvoříme *-transformací. Způsob rozšíření je podrobně popsán v (Goldblatt, 2012, 162–170). Pro naše účely stačí zjednodušeně říci, že *-transformace je zobrazení z $\mathbb{U}$ do rozšířeného univerza $\mathbb{U}'$ takové, že zachovává prvky. Standardní formuli rozšíříme pomocí *-transformace tak, že každý prvek $a \in \mathbb{U}$ nahradíme $^*a \in \mathbb{U}'$ a logické spojky ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\iff$, ...), závorky, kvantifikátory ($\exists$, $\forall$) i proměnné necháme nezměněné.

Poznámka 2. Pro zjednodušení budeme vynechávat * před běžnými relačními symboly (jako například $=$, $<$, $\geq$, ...), funkcemi (sin, cos, e^x, log, ...) a rozšířením $^*f$ jakékoli standardní funkce f.
Ohvězdičkováním formule myslíme její *-transformaci.

Příklad 3.

- Formuli $\varphi \wedge \psi$ (φ, ψ jsou také formule) transferem převedeme na $^*\varphi \wedge {}^*\psi$. Ohvězdičkovali jsme obě podformule a konjunkce jakožto logická spojka zůstala nezměněná.

- Formuli $2 < f(x)$ transfer změní na $2 < {}^*f(x)$, protože 2 jako konstanta a x jako proměnná zůstávají stejné a podle konvence vynecháváme * u běžných relačních symbolů. Pokud je z kontextu jasné, že pracujeme s rozšířenou funkcí $^*f$, může se vynechat * i u f.

- Je-li φ formule $(\forall x, y \in \mathbb{R})[(x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R})(x < z < y)]$, pak $^*\varphi$ je

$$(\forall x, y \in {}^*\mathbb{R})[(x < y) \Rightarrow (\exists z \in {}^*\mathbb{R})(x < z < y)],$$

  jelikož kvantifikátory, logické spojky, proměnné a (podle konvence) relační symboly zůstaly nezměněné.

$\triangle$

Axiom 4. *Je-li A nekonečná množina v $\mathbb{U}$, pak $\{^*a; a \in A\} \subset {}^*A$.*

Definice 5. Prvky rozšíření reálných čísel $^*\mathbb{R}$ nazveme *hyperreálná čísla*, prvky rozšíření přirozených čísel $^*\mathbb{N}$ *hyperpřirozená čísla*.

Axiom 4 nám říká, že rozšíření je netriviální, neboli každé rozšíření nekonečné množiny obsahuje nestandardní prvky (takové, které nevzniknou ohvězdičkováním standardních prvků). Speciálně existují nekonečně velká hyperpřirozená čísla a taky nekonečně malá (infinitesimální) hyperreálná čísla (viz Definice 9).

Axiom 6 (Princip transferu). *Standardní formule φ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když $^*\varphi$ je pravdivá.*

Princip transferu je základní postup, jakým lze převést matematický problém formulovaný ve standardním jazyce do nestandardního světa, v něm ho vyřešit a poté transformovat zpět. Většinu příkladů tvoří formule, na jejichž začátku se vyskytuje univerzální nebo existenciální kvantifikátor. Z obecného principu transferu tedy můžeme odvodit následující používanější případy.
Univerzální transfer: Nějaká „vlastnost“ platí pro všechna reálná čísla, právě když platí pro všechna hyperreálná čísla.

Příklad 7. Vezměme uzavřený interval $[a, b]$, kde a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tento interval můžeme zapsat pomocí formule

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \in [a, b] \iff a \leq x \leq b).$$

Ohvězdičkujeme-li nyní tuto formuli a použijeme-li princip transferu, získáme formuli

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(x \in {}^*[a, b] \iff a \leq x \leq b),$$

což můžeme chápat jako definici nestandardního rozšíření intervalu reálných čísel ${}^*[a, b]$.

△

Existenciální transfer: Existuje hyperreálné číslo splňující určitou „vlastnost“, právě když existuje i reálné číslo splňující danou „vlastnost“. Pokud chceme dokázat, že existuje reálné číslo s nějakou „vlastností“, bývá většinou jednodušší dokázat existenci hyperreálného čísla s touto „vlastností“ a poté použít existenciální transfer.

Příklad 8. (Archimédova vlastnost) Buď $r \in \mathbb{R}$ a N neomezené hyperpřirozené číslo (viz Definice 9). Pak $r < N$, tedy platí formule $(\exists n \in {}^*\mathbb{N})(r < n)$. Díky principu transferu platí $(\exists n \in \mathbb{N})(r < n)$.

△

1.2 Aritmetika hyperreálných čísel

Definice 9. Hyperreálné číslo a nazveme

- *infinitesimálním*, jestliže pro všechna $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ platí $|a| < \varepsilon$ (množinu všech infinitesimálních čísel označíme $\mathbb{I}$),
- *neomezeným*, jestliže všechna $r \in \mathbb{R}^+$ splňují $|a| > r$,
- *omezeným*, jestliže existuje $r \in \mathbb{R}^+$ takové, že $|a| < r$.

Řekneme, že hyperreálné číslo a je *nekonečně blízko* hyperreálnému číslu b (značíme $a \simeq b$), jestliže $a - b \in \mathbb{I}$.

Poznámka 10. Všechna reálná čísla jsou omezená a jediným infinitesimálním reálným číslem je 0. Z následující Věty 11 (i) plyne, že „být nekonečně blízko“ je relace ekvivalence.

Věta 11. *Nechť $\mu, \nu \in \mathbb{I}$, nechť $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ jsou omezená, ale ne infinitesimální a $C, D \in {}^*\mathbb{R}$ neomezená. Pak platí:*

(i) $-\mu$, $\mu + \nu$, $\mu \cdot \nu$, $\mu \cdot a$, $\dfrac{\mu}{a}$, $\dfrac{\mu}{C}$ *a* $\dfrac{a}{C}$ *jsou infinitesimální,*

(ii) $-a$, $a + \mu$, $a \cdot b$, $\dfrac{1}{a}$ *a* $\dfrac{a}{b}$ *jsou omezená, ale nejsou infinitesimální,*

(iii) pro $\mu \neq 0$ *jsou* $-C$, $C + \nu$, $C + a$, $C \cdot a$, $C \cdot D$, $\dfrac{a}{\mu}$, $\dfrac{C}{\mu}$ *a* $\dfrac{C}{a}$ *neomezená,*

(iv) jsou-li x, y *omezená a platí-li* $x \simeq x'$ *a* $y \simeq y'$, *pak* $x + y \simeq x' + y'$, $x - y \simeq x' - y'$, $x \cdot y \simeq x' \cdot y'$, *a pokud* $y \not\simeq 0$, *platí i* $\dfrac{x}{y} \simeq \dfrac{x'}{y'}$,

(v) $a \simeq b$ *právě když* $\dfrac{a}{b} \simeq 1$.

Důkaz. (i) Dokážeme pouze, že součet infinitesimálních čísel je infinitesimální. Ostatní tvrzení se dokážou analogicky. To, že μ, ν jsou infinitesimální, podle definice znamená, že pro všechna $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ platí $|\mu| < \varepsilon$ a $|\nu| < \varepsilon$. Buď $\delta \in \mathbb{R}^+$. Pro odhad součtu použijeme trojúhelníkovou nerovnost:

$$|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Jelikož δ bylo libovolné, je $\mu + \nu$ infinitesimální.

(ii) Ověříme, že podíl $\frac{a}{b}$ je omezený a neinfinitesimální. Jelikož a i b jsou omezená, ale ne infinitesimální, existují kladná reálná čísla p_1, p_2, q_1, q_2 taková, že $p_1 < |a| < q_1$ a $p_2 < |b| < q_2$. Pak máme odhad

$$\frac{p_1}{q_2} < \left|\frac{a}{b}\right| < \frac{q_1}{p_2},$$

kde $\frac{q_1}{p_2}, \frac{p_1}{q_2} \in \mathbb{R}^+$, což jsme chtěli dokázat. Podobně se ověří i zbývající tvrzení.

(iii) Ukážeme, že podíl $\frac{a}{\mu}$ je neomezený. Podle definice infinitesimálního čísla platí $|\mu| < \varepsilon$ pro všechna $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Buď $r \in \mathbb{R}^+$. Pak podle předchozí části je $\frac{|a|}{r}$ kladné neinfinitesimální číslo, platí tedy $|\mu| < \frac{|a|}{r}$. Jelikož r i $|\mu|$ jsou kladná, můžeme poslední vztah vynásobit r a vydělit $|\mu|$, čímž získáme $r < \frac{|a|}{|\mu|}$. Konečně se dostáváme k odhadu

$$\left|\frac{a}{\mu}\right| = \frac{|a|}{|\mu|} > r,$$

neboli $\frac{a}{\mu}$ je neomezené. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

(iv) Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Součet i rozdíl dokážeme najednou s použitím trojúhelníkové nerovnosti: $|(x \pm y) - (x' \pm y')| \leq |x - x'| + |y - y'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Jelikož ε bylo libovolné, máme $x \pm y \simeq x' \pm y'$.

Součin spočítáme podobně:

$$|x \cdot y - x' \cdot y'| \leq |x \cdot y - x \cdot y'| + |x \cdot y' - x' \cdot y'| \leq$$
$$\leq |x| \cdot |y - y'| + |y'| \cdot |x - x'| < (|x| + |y'|)\, \varepsilon.$$

Jelikož x, y jsou omezené a $y \simeq y'$, existuje konstanta $K \in \mathbb{R}^+$ (nezávislá na ε) taková, že $|x| + |y'| \leq K$. Tedy pro všechna $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ platí

$$|x \cdot y - x' \cdot y'| \leq K\varepsilon.$$

Předpokládejme nyní, že $y \not\simeq 0$. Pak i $y' \not\simeq 0$. Odhadujeme výraz

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}\right| \leq \left|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y}\right| + \left|\frac{x'}{y} - \frac{x'}{y'}\right| \leq \left|\frac{1}{y}\right| \cdot |x - x'| + |x'| \cdot \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y'}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{y}\right| \cdot |x - x'| + \left|\frac{x'}{y \cdot y'}\right| \cdot |y' - y| < \varepsilon \left(\left|\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{x'}{y \cdot y'}\right|\right).$$

Podle části (ii) jsou $\dfrac{1}{y}$ i $\dfrac{x'}{y \cdot y'}$ omezené, opět tedy existuje $K \in \mathbb{R}^+$ tak, že $\left|\dfrac{1}{y}\right| + \left|\dfrac{x'}{y \cdot y'}\right| \leq K$. Dohromady máme

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \left(\left|\frac{x}{y} - \frac{x'}{y'}\right| < K \cdot \varepsilon\right).$$

(v) Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Pak platí

$$a \simeq b \iff \forall \xi \in \mathbb{R}^+ : (|a - b| < \xi) \iff \forall \xi \in \mathbb{R}^+ : \left(\left|\frac{a}{b} - 1\right| < \frac{\xi}{b}\right).$$

Zvolíme-li $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \simeq \varepsilon \cdot b$, dostáváme $\left|\frac{a}{b} - 1\right| < \varepsilon$. Protože ε bylo libovolné, máme $a \simeq b \Rightarrow \frac{a}{b} \simeq 1$.

Naopak,

$$\frac{a}{b} \simeq 1 \iff \forall \xi \in \mathbb{R}^+ : \left(\left|\frac{a}{b} - 1\right| < \xi\right) \iff \forall \xi \in \mathbb{R}^+ : (|a - b| < b \cdot \xi).$$

Opět zvolíme $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \simeq \frac{\varepsilon}{b}$ a dostáváme $|a - b| < \varepsilon$. Jelikož ε bylo libovolné, platí i druhá implikace.

□

1.3 Základní pojmy z matematické analýzy nestandardně

V této části zopakujeme standardní definice některých pojmů ze základních kurzů matematické analýzy, zavedeme jejich nestandardní definice a ukážeme ekvivalenci obou definic.

Definice 12 (Spojitost)**.** Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ je *spojitá v* x_0, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1 \in \mathbb{R} : (|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Věta 13. *Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ je v x_0 spojitá právě tehdy, když*

$$\forall y \in {}^*\mathbb{R} : (x_0 \simeq y \Rightarrow f(x_0) \simeq f(y)).$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\forall y \in {}^*\mathbb{R} : (x_0 \simeq y \Rightarrow f(x_0) \simeq f(y))$, a buď $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Je-li $d \in \mathbb{I}$, $d > 0$, pak pro libovolné $y \in {}^*\mathbb{R}$ splňující $|x_0 - y| < d$ máme $x_0 \simeq y$, tedy podle předpokladu platí $f(x_0) \simeq f(y)$, tudíž $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$, protože ε je reálné kladné. Dostáváme platnost výroku

$$\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+\ \forall y \in {}^*\mathbb{R} :\ (|y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Použijeme-li nyní princip transferu, získáme platnost formule

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall y \in \mathbb{R} :\ (|y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

tedy f je spojitá v x_0.

Naopak, buď $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a nalezneme $\delta \in \mathbb{R}^+$ ze standardní definice spojitosti takové, že platí

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} :\ (|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Aplikací principu transferu dostáváme

$$\forall x_1 \in {}^*\mathbb{R} :\ (|x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Pokud $x \simeq y$, pak $|x - y| < \delta$, tedy podle předchozího platí $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Jelikož $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bylo libovolné, plyne odtud $f(x) \simeq f(y)$. □

Příklad 14. Ukážeme, že funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je spojitá pro $x \in \mathbb{R}^+$. Buď $\mu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq 0$. Počítáme

$$\sqrt{x+\mu} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+\mu} - \sqrt{x})\frac{\sqrt{x+\mu} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\mu} + \sqrt{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{x+\mu} + \sqrt{x}}.$$

Pro $x \in \mathbb{R}^+$ není součet $\sqrt{x} + \sqrt{x+\mu}$ infinitesimální, tudíž celý zlomek je nekonečně blízko nuly (podle Věty 11 (i)). Dostáváme požadovaný výsledek.

△

Definice 15 (Derivace)**.** Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ má v bodě x_0 *derivaci* $L \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall x_1 \in \mathbb{R} : \left(0 < |x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - L\right| < \varepsilon\right).$$

Derivaci funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}$ budeme značit $f'(x)$.

Věta 16. *Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ má v x_0 derivaci $L \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé nenulové infinitesimální μ je $f(x_0+\mu)$ definované a platí*

$$\frac{f(x_0+\mu)-f(x_0)}{\mu} \simeq L. \tag{1.1}$$

Důkaz. Nechť f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Buď $\mu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq 0$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a k němu najděme $\delta \in \mathbb{R}^+$ z definice derivace. Pak $|(x_0+\mu)-x_0| = |\mu| < \delta$, protože μ je infinitesimální a δ reálné. Ze standardní definice derivace a transferu dostáváme, že

$$\left|\frac{f(x_0+\mu)-f(x_0)}{\mu} - L\right| < \varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bylo libovolné, platí závěr.
Naopak, nechť pro každé $\mu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq 0$ platí (1.1). Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Zvolíme-li $d \in \mathbb{I}$, $d > 0$, pak všechna μ taková, že $0 < |\mu| < d$, jsou infinitesimální, a tedy platí (1.1). Tudíž platí formule

$$\exists\, \delta \in {}^*\mathbb{R}^+\ \forall\, \mu \in {}^*\mathbb{R} : \left(0 < |\mu| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x_0+\mu)-f(x_0)}{\mu} - L\right| < \varepsilon\right),$$

neboli

$$\exists\, \delta \in {}^*\mathbb{R}^+\ \forall\, x_1 \in {}^*\mathbb{R} : \left(0 < |x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} - L\right| < \varepsilon\right).$$

S použitím transferu dostáváme

$$\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall\, x_1 \in \mathbb{R} : \left(0 < |x_1 - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} - L\right| < \varepsilon\right).$$

□

Příklad 17. Buď $f(x) = \frac{1}{x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ukážeme, že $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Buď $\mu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq 0$. Máme:

$$\frac{\frac{1}{x+\mu} - \frac{1}{x}}{\mu} = \frac{x-(x+\mu)}{\mu x(x+\mu)} = -\frac{1}{x(x+\mu)} \simeq -\frac{1}{x^2},$$

kde poslední ekvivalence platí díky Větě 11(iv), jelikož $\frac{1}{x} \simeq \frac{1}{x+\mu}$ a pro $x \neq 0$ je $\frac{1}{x}$ omezené číslo.

△

Příklad 18. Buď $f(x) = \sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Spočítáme $f'(x)$. Buď $\mu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq 0$. Výpočet nám dává:

$$\frac{\sin(x+\mu)-\sin x}{\mu} = \frac{\sin x \cos\mu + \cos x \sin\mu - \sin x}{\mu} = \sin x \frac{\cos\mu - 1}{\mu} + \cos x \frac{\sin\mu}{\mu}.$$

Nyní využijeme známých limit $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, což v řeči nestandardní analýzy znamená, že $\frac{\sin \mu}{\mu} \simeq 1$ a $\frac{1-\cos \mu}{\mu^2} \simeq \frac{1}{2}$. Dostáváme tedy (s využitím Věty 11 (iv))

$$\frac{\sin(x+\mu) - \sin x}{\mu} \simeq -\sin x \cdot \frac{\mu}{2} + \cos x \simeq \cos x,$$

což podle Věty 16 znamená, že $(\sin x)' = \cos x$.

△

Definice 19. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je v $\vec{x}$ *diferencovatelná* (má *totální diferenciál*), jestliže existuje lineární zobrazení $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ takové, že pro všechna $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každý vektor $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ splňující $0 < \|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$ je $f(\vec{y})$ definované a platí

$$\frac{|f(\vec{y}) - f(\vec{x}) - L(\vec{y} - \vec{x})|}{\|\vec{y} - \vec{x}\|} < \varepsilon.$$

Věta 20. *Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je v $\vec{x}$ diferencovatelná právě tehdy, když existuje lineární zobrazení $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ takové, že pro každý vektor $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ splňující $\forall i \in \{1, \dots, n\} : \mu_i \simeq 0$ a $\vec{\mu} \neq \vec{0}$ je $f(\vec{x} + \vec{\mu})$ definované a platí*

$$\frac{f(\vec{x} + \vec{\mu}) - f(\vec{x}) - L(\vec{\mu})}{\|\vec{\mu}\|} \simeq 0.$$

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu Věty 16. □

2. Silná derivace

2.1 Základní definice

Nejprve zavedeme *silnou derivaci* dvěma způsoby a ukážeme ekvivalenci obou definic (standardní i nestandardní).

Definice 21 (Silná derivace)**.** Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ má v x_0 *silnou derivaci* $L \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} :\\ &\qquad \left((|x_1 - x_0| < \delta \wedge |x_2 - x_0| < \delta \wedge x_1 \neq x_2) \Rightarrow \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - L \right| < \varepsilon \right).\end{aligned}$$

Silnou derivaci funkce f v bodě x_0 budeme značit $\mathbf{D}f(x_0)$.

Věta 22. *Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ má v x_0 silnou derivaci $L \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každá infinitesimální μ, ν, $\mu \neq \nu$, jsou $f(x_0 + \mu)$ a $f(x_0 + \nu)$ definované a platí*

$$\frac{f(x_0 + \mu) - f(x_0 + \nu)}{\mu - \nu} \simeq L. \tag{2.1}$$

Důkaz. Nechť f má silnou derivaci v x_0. Nechť $\mu, \nu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a k němu $\delta \in \mathbb{R}^+$ z definice silné derivace. Pak $|(x_0 + \mu) - x_0| = |\mu| < \delta$ a $|(x_0 + \nu) - x_0| = |\nu| < \delta$, protože μ a ν jsou infinitesimální a δ reálné. Ze standardní definice silné derivace a transferu dostáváme, že

$$\left| \frac{f(x_0 + \mu) - f(x_0 + \nu)}{\mu - \nu} - L \right| < \varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bylo libovolné, platí (2.1).
Naopak, nechť platí nestandardní definice. Buď $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\mu, \nu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$. Podle předpokladu platí (2.1), speciálně tedy máme (můžeme volit $\delta \in \mathbb{I}$, $\delta > 0$)

$$\begin{aligned}&\exists\, \delta \in {}^*\mathbb{R}^+\ \forall\, \mu, \nu \in {}^*\mathbb{R} :\\ &\qquad \left((\mu \neq \nu \wedge |\mu| < \delta \wedge |\nu| < \delta) \Rightarrow \left| \frac{f(x_0 + \mu) - f(x_0 + \nu)}{\mu - \nu} - L \right| < \varepsilon \right),\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}&\exists\, \delta \in {}^*\mathbb{R}^+\ \forall\, x_1, x_2 \in {}^*\mathbb{R} :\\ &\qquad \left((x_1 \neq x_2 \wedge |x_1 - x_0| < \delta \wedge |x_2 - x_0| < \delta) \Rightarrow \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - L \right| < \varepsilon \right).\end{aligned}$$

Transfer nám dává:

$$\begin{aligned}&\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} :\\ &\qquad \left((x_1 \neq x_2 \wedge |x_1 - x_0| < \delta \wedge |x_2 - x_0| < \delta) \Rightarrow \left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - L \right| < \varepsilon \right).\end{aligned}$$

□

Pokud ve standardní definici zvolíme $x_2 = x_0$ a v nestandardní $\nu = 0$, dostaneme definici klasické derivace. Tedy máme následující důsledek.

Důsledek 23. *Je-li $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ silně diferencovatelná v bodě x_0, je diferencovatelná v bodě x_0 a platí $\mathbf{D}f(x_0) = f'(x_0)$.*

Příklad 24. Ukážeme, že mocninná funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ má silnou derivaci na celém $\mathbb{R}$. Buďte $\mu, \nu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$. Běžnými úpravami dostáváme:

$$\frac{f(x+\mu) - f(x+\nu)}{\mu - \nu} = \frac{(x+\mu)^n - (x+\nu)^n}{\mu - \nu} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \mu^{n-i} - \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \nu^{n-i}}{\mu - \nu} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i (\mu^{n-i} - \nu^{n-i})}{\mu - \nu} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{n-i-1} \mu^{n-i-1-j} \nu^j \simeq n x^{n-1}.$$

Poslední vztah platí, protože konečná mocnina, součet i součin infinitesimálních čísel je infinitesimální (podle Věty 11) – jediný sčítanec, který není infinitesimální, je ten s indexem $i = n - 1$. Věta 22 nám dává požadovaný výsledek.

$\triangle$

Dále ukážeme, že pro silnou derivaci platí analogické vzorce jako pro běžnou derivaci.

Lemma 25. *Nechť $U \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, $f, g\colon U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$ a nechť f i g mají silnou derivaci v bodě x_0. Pak platí:*

(i) $\mathbf{D}(f+g)(x_0) = \mathbf{D}f(x_0) + \mathbf{D}g(x_0)$,

(ii) $\forall a \in \mathbb{R} : \mathbf{D}(af)(x_0) = a\mathbf{D}f(x_0)$,

(iii) $\mathbf{D}(fg)(x_0) = \mathbf{D}f(x_0)g(x_0) + f(x_0)\mathbf{D}g(x_0)$.

Důkaz. Buďte $\mu, \nu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$. Podle předpokladu jsou f i g silně diferencovatelné v bodě x_0, existují tedy reálná čísla K, L taková, že

$$\frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{\mu - \nu} \simeq L \ \text{ a } \ \frac{g(x_0+\mu) - g(x_0+\nu)}{\mu - \nu} \simeq K.$$

Ve všech částech důkazu budeme využívat Větu 11 (iv).

(i) Platí

$$\frac{(f+g)(x_0+\mu) - (f+g)(x_0+\nu)}{\mu - \nu} = \frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{\mu - \nu} +$$
$$+ \frac{g(x_0+\mu) - g(x_0+\nu)}{\mu - \nu} \simeq K + L = \mathbf{D}f(x_0) + \mathbf{D}g(x_0).$$

Nyní z Věty 22 dostáváme, že součet $f + g$ je silně diferencovatelný v bodě x_0 a pro derivaci platí $\mathbf{D}(f+g)(x_0) = \mathbf{D}f(x_0) + \mathbf{D}g(x_0)$.

(ii) Ekvivalence $\simeq$ je platná i po přenásobení omezeným hyperreálným číslem (Věta 11 (iv)), tedy i jakýmkoli reálným číslem. Proto platí

$$\frac{f(x_0+\mu)-f(x_0+\nu)}{\mu-\nu} \simeq L \Rightarrow \frac{(af)(x_0+\mu)-(af)(x_0+\nu)}{\mu-\nu} = $$
$$= a\frac{f(x_0+\mu)-f(x_0+\nu)}{\mu-\nu} \simeq aL = a\mathbf{D}f(x_0).$$

Opět podle Věty 22 je silná derivace funkce af definovaná v bodě x_0 a je rovna $\mathbf{D}(af)(x_0) = a\mathbf{D}f(x_0)$.

(iii) Snadným výpočtem dostáváme

$$\frac{(fg)(x_0+\mu)-(fg)(x_0+\nu)+f(x_0+\mu)g(x_0+\nu)-f(x_0+\mu)g(x_0+\nu)}{\mu-\nu} =$$
$$= \frac{f(x_0+\mu)[g(x_0+\mu)-g(x_0+\nu)]+g(x_0+\nu)[f(x_0+\mu)-f(x_0+\nu)]}{\mu-\nu} \simeq$$
$$\simeq f(x_0+\mu)\mathbf{D}g(x_0)+g(x_0+\nu)\mathbf{D}f(x_0).$$

Funkce f je spojitá v bodě x_0, platí tedy $f(x_0+\mu) \simeq f(x_0)$. Nyní můžeme obě strany vynásobit $\mathbf{D}g(x_0)$, protože $\mathbf{D}g(x_0)$ je omezená (Věta 11 (iv)). Analogický postup provedeme pro funkci g a $\mathbf{D}f(x_0)$ a dostáváme

$$f(x_0+\mu)\mathbf{D}g(x_0)+g(x_0+\nu)\mathbf{D}f(x_0) \simeq f(x_0)\mathbf{D}g(x_0)+\mathbf{D}f(x_0)g(x_0).$$

Spojením obou výrazů a díky Větě 22 máme

$$\mathbf{D}(fg)(x_0) = \mathbf{D}f(x_0)g(x_0)+f(x_0)\mathbf{D}g(x_0),$$

což dokončuje důkaz lemmatu.

□

Věta 26. *Nechť $U \subset \mathbb{R}$ je otevřená množina, $f\colon U \to \mathbb{R}$, $g\colon f(U) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$ a nechť f má silnou derivaci v bodě x_0 a g má silnou derivaci v $f(x_0)$. Pak platí $\mathbf{D}(g \circ f)(x_0) = \mathbf{D}g(f(x_0))\mathbf{D}f(x_0)$.*

Důkaz. Buďte $\mu, \nu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$. Funkce f má podle předpokladu silnou derivaci v bodě x_0 a funkce g má silnou derivaci v bodě $f(x_0)$, platí tedy

$$\frac{f(x_0+\mu)-f(x_0+\nu)}{\mu-\nu} \simeq \mathbf{D}f(x_0) \;\text{ a }\; \frac{g(f(x_0)+\mu)-g(f(x_0)+\nu)}{\mu-\nu} \simeq \mathbf{D}g(f(x_0)).$$

Nejprve předpokládejme, že $\mathbf{D}f(x_0) \neq 0$. Pak nutně musí platit

$$\forall \mu, \nu \in \mathbb{I}, \mu \neq \nu :\; f(x_0+\mu) \neq f(x_0+\nu).$$

Máme

$$\frac{g(f(x_0+\mu))-g(f(x_0+\nu))}{\mu-\nu} \cdot \frac{f(x_0+\mu)-f(x_0+\nu)}{f(x_0+\mu)-f(x_0+\nu)} =$$
$$= \frac{g(f(x_0+\mu))-g(f(x_0+\nu))}{f(x_0+\mu)-f(x_0+\nu)} \cdot \frac{f(x_0+\mu)-f(x_0+\nu)}{\mu-\nu}.$$

Zbývá dokázat vztah

$$\frac{g(f(x_0+\mu)) - g(f(x_0+\nu))}{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)} \simeq \mathbf{D}g(f(x_0)).$$

Z diferencovatelnosti funkce f máme její spojitost v x_0 – platí $f(x_0+\mu) \simeq f(x_0)$, tudíž existuje $\mu_1 \in \mathbb{I}$ takové, že $f(x_0+\mu) = f(x_0) + \mu_1$. Podobně existuje $\nu_1 \in \mathbb{I}$ tak, že platí $f(x_0+\nu) = f(x_0) + \nu_1$. Dosadíme-li tyto vztahy do vyšetřovaného zlomku, dostáváme

$$\frac{g(f(x_0+\mu)) - g(f(x_0+\nu))}{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)} = \frac{g(f(x_0)+\mu_1) - g(f(x_0)+\nu_1))}{\mu_1 - \nu_1} \simeq \mathbf{D}g(f(x_0)), \tag{2.2}$$

jelikož μ_1 i ν_1 jsou infinitesimální.

Nyní předpokládejme, že $\mathbf{D}f(x_0) = 0$. Jelikož $\mathbf{D}g(f(x_0))$ existuje, je konečná (podle definice se jedná o reálné číslo). Tedy pravá strana rovnosti ve znění věty je rovna 0. Zbývá ukázat, že i levá strana této rovnosti je rovna 0, neboli

$$\forall \mu, \nu \in \mathbb{I}, \mu \neq \nu : \left(\frac{g(f(x_0+\mu)) - g(f(x_0+\nu))}{\mu - \nu} \simeq 0 \right).$$

Buďte $\mu, \nu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Pokud $f(x_0+\mu) = f(x_0+\nu)$, je celý zlomek 0 a rovnost platí. Dále předpokládejme, že $f(x_0+\mu) \neq f(x_0+\nu)$. Podobně jako v předchozím případě existují infinitesimální μ_1 a ν_1 taková, že platí (2.2). Z tohoto vztahu a konečnosti derivace funkce g v bodě $f(x_0)$ plyne, že existuje konstanta $K \in \mathbb{R}^+$ taková, že

$$\left| \frac{g(f(x_0+\mu)) - g(f(x_0+\nu))}{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)} \right| < K.$$

Jelikož $\mathbf{D}f(x_0) = 0$, platí

$$\left| \frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{\mu - \nu} \right| \simeq 0.$$

Opět počítáme

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{g(f(x_0+\mu)) - g(f(x_0+\nu))}{\mu - \nu} \cdot \frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)} \right| = \\
&\quad = \left| \frac{g(f(x_0+\mu)) - g(f(x_0+\nu))}{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)} \right| \cdot \left| \frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{\mu - \nu} \right| \leq \\
&\qquad \leq K \left| \frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{\mu - \nu} \right| \simeq K\varepsilon \simeq 0.
\end{aligned}$$

Dostáváme

$$\frac{g(f(x_0+\mu)) - g(f(x_0+\nu))}{\mu - \nu} \simeq 0,$$

což dokončuje důkaz věty. □

2.2 Vztah mezi silnou derivací a spojitostí klasické derivace

Věta 27. *Buď $U \subset \mathbb{R}$ otevřená množina. Pokud je $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferencovatelná v okolí bodu $x_0 \in U$ a f' je spojitá v x_0, pak je f silně diferencovatelná v x_0.*

Důkaz. Podle předpokladu je f diferencovatelná na okolí bodu x_0, tudíž existuje reálný interval $[a, b]$ takový, že $x_0 \in (a, b)$, f je spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b). Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě existuje $x \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x).$$

Jelikož i pro jakýkoli podinterval $(c, d) \subset (a, b)$ platí, že f je spojitá na $[c, d]$ a diferencovatelná na (c, d), dostáváme

$$\forall c, d \in [a, b]\,,\ c < d\ \exists x \in (c, d) : \left(\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(x) \right).$$

Aplikací principu transferu získáme platnost formule

$$\forall c, d \in {}^*[a, b]\,,\ c < d\ \exists x \in {}^*(c, d) : \left(\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(x) \right).$$

Buďte nyní $\mu, \nu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\nu < \mu$. Pak $x_0 + \mu, x_0 + \nu \in {}^*[a, b]$. Podle předchozí formule existuje $x \in {}^*\mathbb{R}$ takové, že $x > x_0 + \nu$, $x < x_0 + \mu$ a

$$\frac{f(x_0 + \mu) - f(x_0 + \nu)}{\mu - \nu} = f'(x).$$

Jelikož je derivace spojitá v x_0 a $|x - x_0| \in \mathbb{I}$, máme (z nestandardní definice spojitosti, Věta 13) $f'(x) \simeq f'(x_0)$. Dostáváme tedy

$$\frac{f(x_0 + \mu) - f(x_0 + \nu)}{\mu - \nu} \simeq f'(x_0).$$

Podle Věty 22 je f silně diferencovatelná v x_0. □

Příklad 28. Větu 27 můžeme použít k důkazu existence a výpočtu silné derivace v nějakém bodě pro funkce, které v něm mají spojitou derivaci. Například běžná derivace funkce $f(x) = e^x$ existuje na $\mathbb{R}$ a je rovna e^x, což je spojitá funkce. Podle Věty 27 existuje silná derivace na $\mathbb{R}$. Ta už se nutně musí rovnat běžné derivaci, platí tedy $\mathbf{D}f(x) = e^x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

△

Věta 29. *Buď $U \subset \mathbb{R}$ otevřená množina a $f\colon U \to \mathbb{R}$ funkce silně diferencovatelná v x_0. Nechť derivace $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in A \subset U$ a nechť je x_0 hromadný bod A. Pak zobrazení $x \mapsto f'(x)$, $x \in A$, je spojité v x_0.*

Důkaz. Předpoklad, že derivace $f'(x)$ existuje pro všechna $x \in A$ se dá vyjádřit formulí

$$\forall x \in A\ \exists L \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+\ \forall y \in \mathbb{R} : \left(0 < |x-y| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - L\right| < \varepsilon\right).$$

Nyní použijeme princip transferu a dostaneme

$$\forall x \in {}^*A\ \exists L \in {}^*\mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}^+ \exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+\ \forall y \in {}^*\mathbb{R} : \left(0 < |x-y| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - L\right| < \varepsilon\right), \quad (2.3)$$

z čehož získáme vztah pro derivaci v nestandardním bodě – L je určeno jednoznačně a budeme ho značit $f'(x)$. Chceme-li dokázat spojitost funkce f' v bodě x_0 vzhledem k A, stačí podle Věty 13 dokázat, že pro všechna infinitesimální ν, pokud $x_0 + \nu \in {}^*A$, je $f'(x_0+\nu) \simeq f'(x_0)$.

Buď $\nu \in \mathbb{I}$ takové, že $x_0 + \nu \in {}^*A$. Pak existuje derivace $f'(x_0+\nu)$. Buď $\varepsilon \in \mathbb{I}$, $\varepsilon > 0$ a k němu příslušné $\delta \in {}^*\mathbb{R}^+$ z (2.3). Zvolíme-li nyní $\xi \in \mathbb{I}$, $\xi \neq 0$, $|\xi| < \delta$, máme

$$\left|\frac{f(x_0+\nu+\xi) - f(x_0+\nu)}{\xi} - f'(x_0+\nu)\right| < \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon \in \mathbb{I}$ a $\varepsilon > 0$, je $\varepsilon < \xi$ pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^+$, takže můžeme psát

$$\frac{f(x_0+\nu+\xi) - f(x_0+\nu)}{\xi} \simeq f'(x_0+\nu).$$

Nyní označíme $\mu := \nu + \xi$. Pak můžeme předchozí vztah přepsat jako

$$\frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{\mu - \nu} \simeq f'(x_0+\nu).$$

Jelikož $\mu \in \mathbb{I}$ (Věta 11 (i)), $\mu \neq \nu$ a silná derivace v x_0 existuje, máme

$$\mathbf{D}f(x_0) \simeq \frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{\mu - \nu}.$$

Podle Důsledku 23 je f diferencovatelná v x_0 a platí $\mathbf{D}f(x_0) = f'(x_0)$. Dáme-li všechno dohromady, dostáváme

$$f'(x_0) = \mathbf{D}f(x_0) \simeq \frac{f(x_0+\mu) - f(x_0+\nu)}{\mu - \nu} \simeq f'(x_0+\nu),$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Příklad 30. Buď

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{je-li } x \neq 0, \\ 0, & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

Ukážeme, že f je diferencovatelná v 0, ale není tam silně diferencovatelná. Nejprve spočítáme $f'(x)$. Použijeme vztahy pro derivaci součtu, součinu a složené funkce (analogie Lemmatu 25 a Věty 26 pro klasickou derivaci). Derivace elementárních funkcí vyskytujících se v definici f jsme už odvodili v Příkladech 17, 18 a 24. Pro $x \neq 0$ dostáváme

$$\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Buď $\mu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq 0$. Derivaci f v 0 dopočítáme z definice:

$$\frac{f(\mu) - f(0)}{\mu} = \frac{\mu^2 \sin\left(\frac{1}{\mu}\right) - 0}{\mu} = \mu \sin\left(\frac{1}{\mu}\right) \simeq 0,$$

kde poslední ekvivalence platí díky Větě 11 (i), protože sinus je omezená funkce. Tato derivace není spojitá v nule, protože

$$\lim_{x \to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

neexistuje kvůli členu $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Proto podle Věty 29 nemůže existovat silná derivace v 0.

$\triangle$

2.3 Silná derivace pro funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$

Nyní rozšíříme definici silné derivace pro funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a ukážeme, že tato definice je v souladu s definicí v jedné dimenzi.

Definice 31. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je v $\vec{x}$ *silně diferencovatelná*, jestliže existuje lineární zobrazení $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ takové, že pro všechna $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé vektory $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n), \vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ splňující $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$, $\|\vec{x} - \vec{z}\| < \delta$ a $\vec{y} \neq \vec{z}$ jsou $f(\vec{y})$ a $f(\vec{z})$ definované a platí

$$\frac{|f(\vec{y}) - f(\vec{z}) - L(\vec{y} - \vec{z})|}{\|\vec{y} - \vec{z}\|_2} < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Silnou derivaci funkce f v $\vec{x}$ značíme $\mathbf{D}f(\vec{x})$.

Poznámka 32. V definici můžeme místo normy $\|\cdot\|_2$ použít jakoukoli jinou normu definovanou na $\mathbb{R}^n$, protože jsou ekvivalentní a výraz v (2.4) platí i po přenásobení kladným reálným číslem.

Věta 33. *Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná na okolí bodu $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je v $\vec{x}$ silně diferencovatelná právě tehdy, když existuje lineární zobrazení $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ takové, že pro každé vektory $\vec{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in {}^*\mathbb{R}^n$ splňující $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \mu_i \simeq 0 \simeq \nu_i$ a $\vec{\mu} \neq \vec{\nu}$ jsou $f(\vec{x} + \vec{\mu})$ a $f(\vec{x} + \vec{\nu})$ definované a platí*

$$\frac{f(\vec{x} + \vec{\mu}) - f(\vec{x} + \vec{\nu}) - L(\vec{\mu} - \vec{\nu})}{\|\vec{\mu} - \vec{\nu}\|_2} \simeq 0 \tag{2.5}$$

Důkaz. Důkaz je analogický důkazu Věty 22. $\square$

Poznámka 34. Silná derivace v $\mathbb{R}$ je speciální případ silné derivace v $\mathbb{R}^n$. Pro $n = 1$ dostáváme z (2.5) výraz (2.1): $\|\mu - \nu\|_2 = |\mu - \nu|$ a jelikož je L lineární zobrazení, máme $L(\mu - \nu) = (\mu - \nu) \cdot L(1)$, kde $L(1)$ je nějaká reálná konstanta. Je-li $\mu - \nu > 0$, dostáváme z (2.5)

$$\frac{f(x+\mu) - f(x+\nu) - (\mu - \nu)L(1)}{\mu - \nu} \simeq 0 \Rightarrow \frac{f(x+\mu) - f(x+\nu)}{\mu - \nu} \simeq L(1),$$

což přesně odpovídá (2.1).

Je-li $\mu - \nu < 0$, můžeme obě strany (2.5) vynásobit -1 (Věta 11(iv)). Pak máme

$$\begin{aligned} 0 \simeq \frac{f(x+\mu) - f(x+\nu) - (\mu - \nu)L(1)}{-|\mu - \nu|} &= \frac{f(x+\mu) - f(x+\nu) - (\mu - \nu)L(1)}{\mu - \nu} \\ \Rightarrow \frac{f(x+\mu) - f(x+\nu)}{\mu - \nu} \simeq L(1), \end{aligned}$$

neboli opět platí (2.1), což znamená, že $L(1) = f'(x)$.

Věta 35. *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina. Pokud je $f\colon U \to \mathbb{R}$ silně diferencovatelná v $\vec{x} \in U$, pak existuje okolí bodu $\vec{x}$, na kterém f splňuje Lipschitzovu podmínku.*

Důkaz. Jelikož f je silně diferencovatelná v $\vec{x}$, existuje $\delta \in {}^*\mathbb{R}^+$ (stačí vzít $\delta \in \mathbb{I}, \delta > 0$) takové, že pro všechna $\vec{a}, \vec{b} \in {}^*\mathbb{R}^n$ splňující $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$, $\left\|\vec{x} - \vec{b}\right\| < \delta$, $\vec{a} \neq \vec{b}$ platí

$$\frac{\left|f(\vec{a}) - f(\vec{b}) - L(\vec{a} - \vec{b})\right|}{\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|_2} \simeq 0,$$

tudíž máme

$$\frac{\left|f(\vec{a}) - f(\vec{b}) - L(\vec{a} - \vec{b})\right|}{\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|_2} \leq 1. \tag{2.6}$$

Jedna ze základních vlastností reálných čísel se dá popsat formulí

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}^+ : (x \leq y \Rightarrow zx \leq zy)\,.$$

Transferem dostáváme

$$\forall x, y \in {}^*\mathbb{R}\ \forall z \in {}^*\mathbb{R}^+ : (x \leq y \Rightarrow zx \leq zy)\,.$$

Můžeme tedy nerovnost v (2.6) vynásobit $\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|_2$ a dostáváme

$$\left|f(\vec{a}) - f(\vec{b}) - L(\vec{a} - \vec{b})\right| \leq \left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|_2.$$

Pro $\vec{a} = \vec{b}$ platí rovnost triviálně. Dohromady získáváme formuli

$$\begin{aligned} &\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in {}^*\mathbb{R}^n : \\ &\Big(\Big(\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \wedge \left\|\vec{x} - \vec{b}\right\| < \delta\Big) \Rightarrow \left|f(\vec{a}) - f(\vec{b}) - L(\vec{a} - \vec{b})\right| < \left\|\vec{a} - \vec{b}\right\|_2\Big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

L je spojité lineární zobrazení, tedy existuje konstanta $C \in {}^*\mathbb{R}^+$ taková, že platí

$$\left|L(\vec{a}-\vec{b})\right| \leq \|L\| \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|_2 < C \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|_2. \tag{2.8}$$

Zvolme δ splňující (2.7) a C splňující (2.8), buďte $\vec{a}$, $\vec{b} \in U(\vec{x}, \delta)$. Máme

$$\left|f(\vec{a})-f(\vec{b})\right| \leq \left|f(\vec{a})-f(\vec{b})-L(\vec{a}-\vec{b})\right| + \left|L(\vec{a}-\vec{b})\right| < (C+1) \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|_2.$$

Dohromady máme

$$\exists \delta \in {}^*\mathbb{R}^+ \ \exists C \in {}^*\mathbb{R}^+ \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in {}^*\mathbb{R}^n : \\ \left(\left(\|\vec{x}-\vec{a}\| < \delta \wedge \left\|\vec{x}-\vec{b}\right\| < \delta\right) \Rightarrow \left|f(\vec{a})-f(\vec{b})\right| \leq (C+1)\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\right).$$

Použijeme-li nyní princip transferu, dostaneme

$$\exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ \exists C \in \mathbb{R}^+ \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n : \\ \left(\left(\|\vec{x}-\vec{a}\| < \delta \wedge \left\|\vec{x}-\vec{b}\right\| < \delta\right) \Rightarrow \left|f(\vec{a})-f(\vec{b})\right| \leq (C+1)\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\right).$$

Tato formule nám říká, že existuje okolí $\vec{x}$, na kterém je f Lipschitzovská. $\square$

2.4 Silná parciální derivace

Na úvod této části zavedeme silnou parciální derivaci a opět dokážeme ekvivalenci standardní a nestandardní definice. Poté ukážeme, že existence silných parciálních derivací postačuje pro existenci totálního diferenciálu.

Definice 36 (Silná parciální derivace)**.** Buď $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ otevřená a $f\colon U \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je *silně parciálně diferencovatelná podle první proměnné* v bodě $(x_0, y_0) \in U$, pokud existuje $L_1 \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $\delta \in \mathbb{R}^+$ a $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ tak, že pro všechna $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ platí

$$(|x_1 - x_0| < \delta \wedge |x_2 - x_0| < \delta \wedge x_1 \neq x_2 \wedge |y - y_0| < \delta_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left|\frac{f(x_1,y) - f(x_2,y)}{x_1 - x_2} - L_1\right| < \varepsilon.$$

Silnou parciální derivaci funkce f podle první proměnné v bodě (x_0, y_0) budeme značit $(\mathbf{D_1} f)_{(x_0,y_0)}$. Analogicky definujeme *silnou parciální derivaci podle druhé proměnné* a budeme ji značit $(\mathbf{D_2} f)_{(x_0,y_0)}$.

Poznámka 37. Tuto definici jsme oproti Nijenhuisovu článku (Nijenhuis (1974)) pozměnili (původně tam byla navíc podmínka, že f je spojitá vzhledem ke druhé proměnné v (x_0, y_0)). Naše definice je jednodušší a pro účely této práce plně postačující.

Věta 38. *Buď $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ otevřená a $f\colon U \to \mathbb{R}$. Funkce f je silně parciálně diferencovatelná podle první proměnné v bodě $(x_0, y_0) \in U$ právě tehdy, když existuje $L_1 \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna infinitesimální μ, ν, ξ, $\mu \neq \nu$ platí*

$$\frac{f(x_0 + \mu, y_0 + \xi) - f(x_0 + \nu, y_0 + \xi)}{\mu - \nu} \simeq L_1. \tag{2.9}$$

Důkaz. Předpokládejme, že f je silně parciálně diferencovatelná podle první proměnné v bodě (x_0, y_0). Buďte $\mu, \nu, \xi \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$. Zvolme $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ a k němu $\delta, \delta_1 \in \mathbb{R}^+$ z definice silné parciální derivace. Pak $|(x_0+\mu)-x_0| = |\mu| < \delta$, $|(x_0+\nu)-x_0| = |\nu| < \delta$ a $|(y_0+\xi)-y_0| = |\xi| < \delta_1$, protože μ, ν a ξ jsou infinitesimální. Standardní definice silné parciální derivace nám dává

$$\left| \frac{f(x_0+\mu, y_0+\xi) - f(x_0+\nu, y_0+\xi)}{\mu-\nu} - L_1 \right| < \varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ bylo libovolné, platí (2.9).
Naopak, buď $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\mu, \nu, \xi \in \mathbb{I}$, $\mu \neq \nu$. Podle předpokladu platí (2.9), tedy (např. volíme-li $\delta, \delta_1 \in \mathbb{I}$, $\delta, \delta_1 > 0$)

$$\begin{aligned} &\exists\, \delta, \delta_1 \in {}^*\mathbb{R}^+ \;\forall\, \mu, \nu, \xi \in {}^*\mathbb{R} : (\mu \neq \nu \wedge |\mu| < \delta \wedge |\nu| < \delta \wedge |\xi| < \delta_1) \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \left| \frac{f(x_0+\mu, y_0+\xi) - f(x_0+\nu, y_0+\xi)}{\mu-\nu} - L_1 \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} &\exists\, \delta, \delta_1 \in {}^*\mathbb{R}^+ \;\forall\, x_1, x_2, y \in {}^*\mathbb{R} : \\ &\qquad (x_1 \neq x_2 \wedge |x_1 - x_0| < \delta \wedge |x_2 - x_0| < \delta \wedge |y - y_0| < \delta_1) \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \left| \frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2} - L_1 \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Transfer nám dává

$$\begin{aligned} &\exists\, \delta, \delta_1 \in \mathbb{R}^+ \;\forall\, x_1, x_2, y \in \mathbb{R} : \\ &\qquad (x_1 \neq x_2, \wedge |x_1 - x_0| < \delta \wedge |x_2 - x_0| < \delta \wedge |y - y_0| < \delta_1) \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \left| \frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2} - L_1 \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Poznámka 39. Analogická věta platí i pro parciální derivaci podle druhé proměnné.

Věta 40. *Buď $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ otevřená, $f\colon U \to \mathbb{R}$ silně parciálně diferencovatelná v bodě $(x_0, y_0) \in U$ vzhledem k oběma proměnným. Pak je f silně diferencovatelná v (x_0, y_0) a platí $(\mathbf{D}f)_{(x_0,y_0)}(u, v) = (\mathbf{D_1}f)_{(x_0,y_0)}u + (\mathbf{D_2}f)_{(x_0,y_0)}v$.*

Důkaz. Buďte $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2), \vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, $\vec{\mu} \neq \vec{\nu}$. Nejprve předpokládejme, že $\mu_1 \neq \nu_1$ a $\mu_2 \neq \nu_2$. Funkce f je silně parciálně diferencovatelná podle první proměnné v bodě (x_0, y_0), proto podle Věty 38 existuje $L_1 \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\frac{f(x_0+\mu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2)}{\mu_1 - \nu_1} \simeq L_1.$$

Z tohoto vztahu se odvodí

$$\frac{f(x_0+\mu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2) - L_1(\mu_1 - \nu_1)}{|\mu_1 - \nu_1|} \simeq 0.$$

Funkce f je silně parciálně diferencovatelná i podle druhé proměnné v bodě (x_0, y_0), proto existuje $L_2 \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\frac{f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\nu_2)}{\mu_2-\nu_2} \simeq L_2,$$

neboli

$$\frac{f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\nu_2) - L_2(\mu_2-\nu_2)}{|\mu_2-\nu_2|} \simeq 0.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|\mu_1-\nu_1| \geq |\mu_2-\nu_2|$. Pak platí $\|\vec{\mu}-\vec{\nu}\|_\infty = |\mu_1-\nu_1|$ a

$$\begin{aligned}\frac{|f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\nu_2) - L_2(\mu_2-\nu_2)|}{|\mu_2-\nu_2|} &\geq \\ \geq \frac{|f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\nu_2) - L_2(\mu_2-\nu_2)|}{|\mu_1-\nu_1|}&,\end{aligned}$$

dostáváme tedy

$$\frac{f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\nu_2) - L_2(\mu_2-\nu_2)}{|\mu_1-\nu_1|} \simeq 0.$$

Dohromady máme (s využitím Věty 11 (iv))

$$\begin{aligned}&\frac{f(x_0+\mu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\nu_2) - L_1(\mu_1-\nu_1) - L_2(\mu_2-\nu_2)}{\|\vec{\mu}-\vec{\nu}\|_\infty} = \\ &= \frac{f(x_0+\mu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2) - L_1(\mu_1-\nu_1)}{|\mu_1-\nu_1|} + \\ &+ \frac{f(x_0+\nu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\nu_2) - L_2(\mu_2-\nu_2)}{|\mu_1-\nu_1|} \simeq 0,\end{aligned}$$

čímž je důkaz této části dokončen.

Pokud $\mu_1 = \nu_1$ (případ $\mu_2 = \nu_2$ je analogický), dostáváme

$$\begin{aligned}&\frac{f(x_0+\mu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\nu_1, y_0+\nu_2) - L_1(\mu_1-\nu_1) - L_2(\mu_2-\nu_2)}{\|\vec{\mu}-\vec{\nu}\|_\infty} = \\ &= \frac{f(x_0+\mu_1, y_0+\mu_2) - f(x_0+\mu_1, y_0+\nu_2) - L_2(\mu_2-\nu_2)}{|\mu_2-\nu_2|} \simeq 0,\end{aligned}$$

kde poslední vztah platí, protože se jedná o silnou parciální derivaci podle druhé proměnné. □

Z důkazu je patrné, že pro existenci běžné derivace stačí, aby pouze jedna z parciálních derivací byla silná (pokud silná derivace je podle první proměnné, zvolíme $\nu_1 = \nu_2 = 0$). To nám dává následující důsledek.

Důsledek 41. *Buď $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ otevřená, $f\colon U \to \mathbb{R}$ parciálně diferencovatelná v bodě $(x_0, y_0) \in U$ vzhledem k oběma proměnným a nechť je jedna z těchto parciálních derivací silná. Pak je f diferencovatelná v (x_0, y_0).*

Příklad 42. Definujme funkci f předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{je-li } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{je-li } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Parciální derivace podle x i y v bodě $(0,0)$ jsou rovny 0, jelikož pro $\mu \in \mathbb{I}$, $\mu \neq 0$ platí

$$\frac{f(\mu,0)-f(0,0)}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{\mu \cdot 0}{\mu^2+0^2} - 0 = 0 = \frac{f(0,\mu)-f(0,0)}{\mu}.$$

Jenže f není spojitá v bodě $(0,0)$, protože volíme-li $\nu = \mu$,

$$f(\mu,\nu) = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} = \frac{1}{2} \not\to f(0,0).$$

Tudíž f nemá derivaci v $(0,0)$ a podle předchozí věty nemůže být ani jedna parciální derivace v $(0,0)$ silná.

$\triangle$

Závěr

Ačkoli je v současnosti nestandardní analýza spíše doplňkovým odvětvím matematiky, určitě stojí za povšimnutí. Pojmy definované pomocí nekonečné blízkosti jsou intuitivnější než klasické „$\varepsilon - \delta$ definice“. Některé důkazy mohou být díky nestandardní analýze elegantnější, jiné zase složitější. Nejvhodnější je kombinovat oba přístupy a z každého využít toho, v čem je právě on lepší.

Na úvod jsme přiblížili základní princip, o který se nestandardní analýza opírá — princip transferu — a naučili se pracovat s nově zavedenými hyperreálnými čísly. Poté jsme nestandardně definovali některé pojmy ze základních kurzů matematické analýzy a ukázali, že tyto definice jsou ekvivalentní těm standardním.

Ve druhé kapitole jsme definovali pojem silné derivace a dokázali pravidla pro výpočet silné derivace součtu, součinu a podílu dvou funkcí a také složené funkce (tato pravidla jsou stejná jako u klasické derivace). Následně jsme si ukázali postačující podmínku pro existenci silné derivace a vlastnosti, kterými silná derivace převyšuje tu klasickou – jestliže je funkce diferencovatelná na nějaké množině a silně diferencovatelná v jejím hromadném bodě, pak už je derivace nutně spojitá v tomto bodě, a pokud má funkce v nějakém bodě silnou derivaci, je na nějakém okolí tohoto bodu Lipschitzovská.

V poslední části jsme zavedli silnou parciální derivaci. Nejdůležitějším závěrem této kapitoly je tvrzení, podle kterého je pro existenci totálního diferenciálu funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ postačující existence parciálních derivací, z nichž jedna je silná.

Seznam použité literatury

Goldblatt, R. (2012). *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Non-standard Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York. ISBN 9781461206156.

Nijenhuis, A. (1974). Strong derivatives and inverse mappings. *The American Mathematical Monthly*, **81**(9), 969–980.

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis*. Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland Pub. Co.