



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Hledík

Buffonova úloha o jehle a její zobecnění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 18. 5. 2018

Podpis autora

Tímto bych chtěl velmi poděkovat mému vedoucímu doc. RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za jeho cenné rady, nezměrnou ochotu a čas, který mi věnoval.

Název práce: Buffonova úloha o jehle a její zobecnění

Autor: Jakub Hledík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této bakalářské práci uvádíme podrobná odvození výsledků několika variant Buffonovy úlohy o jehle. Vedle základní úlohy řešíme její rozšíření na obdélníkovou mříž, známé jako Laplaceovo rozšíření, dále se zabýváme rovnoběžníkovou, trojúhelníkovou a šestiúhelníkovou mříží. Zmiňujeme také krátce využití úlohy pro odhad čísla π s odkazy na příslušnou literaturu. Pro potřeby výpočtů uvádíme a dokazujeme tvrzení o obsahu mnohoúhelníku na základě znalosti kartézských souřadnic jeho vrcholů. Na závěr zmiňujeme způsob výpočtu pravděpodobnosti protnutí složených mříží, který předvádíme na mříži složené z pravidelného šestiúhelníku a kosočtverce.

Klíčová slova: geometrická pravděpodobnost, Buffonova úloha, Laplaceovo rozšíření

Title: Buffon needle problem and its generalizations

Author: Jakub Hledík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis contains detailed derivation of results of several generalizations of the Buffon needle problem. Next to the original problem we study grids composed of rectangles, known as Buffon-Laplace needle problem, then grids composed of parallelograms, triangles or hexagons. The application of this problem is briefly shown on the estimation of π , additional references are mentioned. We provide a proof of the theorem computing the area of a polygon, if the Cartesian coordinates of its vertices are known. Finally, we show how to solve grids composed of several different shapes, this is demonstrated on the grid composed of a regular hexagon and a diamond.

Keywords: geometric probability, Buffon needle, Buffon-Laplace problem

Obsah

Úvod	2
1 Buffonova úloha o jehle	3
1.1 Buffonova úloha na rovnoběžné linky	3
1.1.1 Zadání úlohy	3
1.1.2 Řešení	3
1.1.3 Závěr	5
1.2 Laplaceovo rozšíření na obdélníkovou mříž	5
1.2.1 Zadání úlohy	5
1.2.2 Řešení	6
1.2.3 Jiný přístup k řešení	8
1.2.4 Závěr	10
1.3 Rovnoběžníková mříž	10
1.3.1 Zadání úlohy	10
1.3.2 Řešení	10
1.3.3 Jiný přístup k řešení	14
2 Pravidelné mnohoúhelníky	16
2.1 Rovnostranný trojúhelník	17
2.1.1 Řešení	17
2.1.2 Závěr	19
2.2 Pravidelný šestiúhelník	20
2.2.1 Řešení	20
2.2.2 Závěr	24
3 Složené mříže	25
3.1 Šestiúhelník a kosočtverec	25
3.1.1 Zadání úlohy	25
3.1.2 Řešení	25
Závěr	27
Seznam použité literatury	28

Úvod

Buffonova úloha o jehle je jedním z nejnámějších problémů geometrické pravděpodobnosti. Úkolem je určit pravděpodobnost, se kterou jehla hozená na podlahu pokrytou rovnoběžnými stejně vzdálenými čarami protne některou z čar. V literatuře lze nalézt různá řešení včetně odvození. Tuto úlohu je možné rozšiřovat uvažováním jiných struktur, na které jehla dopadá. Pro rozšíření se ovšem v literatuře nachází ve většině případů pouze výsledky, neuvádí se bližší odvození ani dílčí výpočty. Cílem této práce je nalézt odvození příslušných výsledků a sepsat řešení pro vybraná rozšíření Buffonovy úlohy.

Nejprve vyřešíme původní úlohu spolu s Laplaceovým rozšířením, kde budeme uvažovat obdélníkovou mříž namísto rovnoběžných linek. Následovat bude obecná rovnoběžníková mříž. Poté budeme zkoumat pravidelné mnohoúhelníky, nalezneme řešení pro jehly dopadající na rovnostranný trojúhelník a pravidelný šestiúhelník. Na závěr naznačíme postup pro složitější mříže sestávající ze zmíněných tvarů. Práce je navíc doplněna o stručné historické poznámky související s Buffonovou úlohou, které ilustrují například její využití pro experimentální odhad čísla π , a další doplňující otázky.

V této práci předpokládáme základní znalosti z teorie pravděpodobnosti, definici geometrické pravděpodobnosti uvádíme na začátku první kapitoly.

1. Buffonova úloha o jehle

V průběhu 18. století se začínají zkoumat problémy, které bychom dnes zařadili pod úlohy geometrické pravděpodobnosti. Tím nejznámějším problémem je bezpochyby Bertrandův paradox z roku 1889 uvedený v Bertrand (1889). Buffonova úloha zveřejněna již v roce 1733 patří k prvním podobného typu, byť bylo její řešení publikováno až v roce 1777. Touto úlohou začneme, uvedeme ale nejprve definici geometrické pravděpodobnosti podle Dupač a Hušková (2013).

Definice 1 (geometrická pravděpodobnost). *Nechť množina S je borelovská podmnožina \mathbb{R}^n s kladnou a konečnou Lebesgueovou mírou $\lambda(S)$. Pro borelovskou podmnožinu $A \subseteq S$ definujeme geometrickou pravděpodobnost předpisem*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(S)}.$$

Nyní se již přesuneme k samotné úloze formulované Georgesem Buffonem v Buffon (1733) s řešením od téhož autora v Buffon (1777).

1.1 Buffonova úloha na rovnoběžné linky

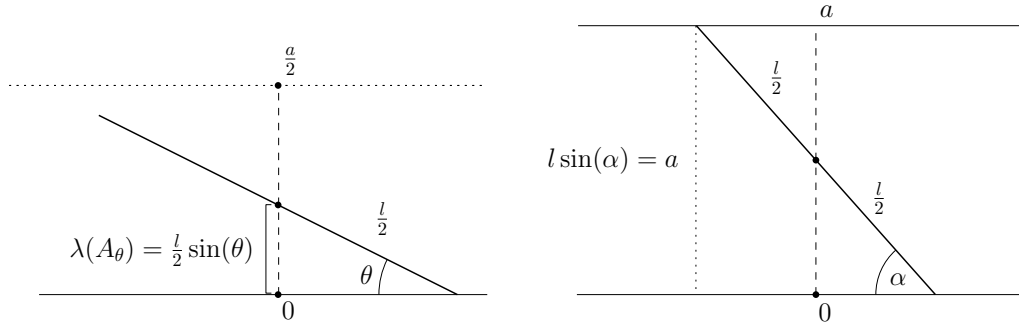
1.1.1 Zadání úlohy

Na rovinu pokrytou rovnoběžnými přímkami s rozestupy $a > 0$ je náhodně umístěna úsečka (jehla) o délce $l > 0$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne alespoň jednu z rovnoběžných přímek?

1.1.2 Řešení

Bez újmy na obecnosti lze uvažovat pouze dvě rovnoběžné přímky se zadaným rozestupem $a > 0$ a jehlu dopadající svým středem mezi tyto dvě linky. Poté lze jednoznačně popsat každou jehlu pozicí jejího středu a jejím natočením. Jako pozici středu můžeme v tomto případě uvažovat pouze vzdálenost $x \in (0, a)$ od jedné předem zvolené linky, natočením pak myslíme záporně orientovaný úhel $\theta \in (0, \pi)$, který jehla svírá s linkami. Formálně vzato jehla neprotínající linky s nimi žádný úhel nespívá, tento nedostatek lze odstranit uvažováním přímky vzniklé prodloužením jehly, ta již protíná linky a svírá s nimi úhel, o kterém budeme dále hovořit jako o úhlu, který svírá samotná jehla. Tento úhel uvažujeme jako realizaci náhodné veličiny Θ . Vzhledem k symetrii se můžeme dále omezit na $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $x \in (0, \frac{a}{2})$.

K řešení přistoupíme následovně. Zvolme pevně nějakou hodnotu odchylky $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ a určíme pravděpodobnost protnutí některé z linek jehlou svírající s linkami úhel θ , tedy $P(\text{protnutí} | \Theta = \theta)$. Tuto pravděpodobnost spočítáme podle definice geometrické pravděpodobnosti. Označme S jako množinu všech přípustných středů jehel a $A_\theta \subset S$ jako množinu středů těch jehel, které svírají úhel θ a protínají některou z linek.



Obrázek 1.1: Pro pevné θ je vlevo zobrazena jehla taková, že jehly se středem blíže k lince protnou linku a naopak. Vpravo poté pro $l > a$ největší natočení takové, že se takto natočená jehla ještě vejde mezi dvě linky.

V tomto případě jsou množiny S i A_θ reálné intervaly a platí

$$P(\text{protnutí} | \Theta = \theta) = \frac{\lambda(A_\theta)}{\lambda(S)} = \frac{\lambda(A_\theta)}{\lambda((0, \frac{a}{2}))} = \frac{2}{a} \lambda(A_\theta).$$

Jelikož odchyška Θ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ s hustotou

$$f_\Theta(\theta) = \frac{2}{\pi},$$

dostaneme výslednou pravděpodobnost protnutí jako

$$P(\text{protnutí}) = \int_0^{\pi/2} P(\text{protnutí} | \Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \lambda(A_\theta) d\theta. \quad (1.1)$$

Zbývá nalézt velikost množiny A_θ . Hledání rozdělíme na několik případů v závislosti na délce jehly.

1. $0 < l \leq a$

Zvolme $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ pevné a nalezneme jehlu svírající úhel θ a dotýkající se linky. Pak množina A_θ obsahuje jehly ležící svým středem blíže k lince než právě nalezená jehla. Určíme (viz obrázek 1.1)

$$\lambda(A_\theta) = \frac{l}{2} \sin(\theta).$$

Podle (1.1) potom platí

$$P(\text{protnutí}) = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \lambda(A_\theta) d\theta = \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \sin(\theta) d\theta = \frac{2l}{\pi a}.$$

2. $a < l < \infty$

Jelikož je jehla delší než mezera mezi linkami, tak se při vhodném natočení mezi linky nevejde, a tedy ať bude její střed ležet kdekoliv, vždy protne aspoň jednu linku. Tomu se bude dít pro velké hodnoty odchyšky Θ . Nalezneme tedy nejmenší úhel takový, že pro větší úhly jehla vždy protne linky. Ten je zobrazen na obrázku 1.1 a platí $\alpha = \arcsin(a/l)$. Potom pro $\theta \geq \alpha$ platí

$$\lambda(A_\theta) = \lambda(S) = \frac{a}{2}.$$

Pro $\theta < \alpha$ dostaneme obdobným způsobem jako v případě kratší jehly

$$\lambda(A_\theta) = \frac{l}{2} \sin(\theta).$$

Výsledná pravděpodobnost protnutí je podle (1.1) rovna

$$\begin{aligned} P(\text{protnutí}) &= \frac{4}{\pi a} \int_0^{\pi/2} \lambda(A_\theta) d\theta \\ &= \frac{4}{\pi a} \left(\int_0^{\arcsin(a/l)} \frac{l}{2} \sin(\theta) d\theta + \int_{\arcsin(a/l)}^{\pi/2} \frac{a}{2} d\theta \right) \\ &= \frac{2l}{\pi a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) + 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{a}{l}\right) \\ &= \frac{2l}{\pi a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) + \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{a}{l}\right). \end{aligned}$$

1.1.3 Závěr

Pravděpodobnost, že jehla protne alespoň jednu z rovnoběžných přímk, je

$$P(\text{protnutí}) = \begin{cases} \frac{2l}{\pi a}, & \text{je-li } 0 < l \leq a, \\ \frac{2l}{\pi a} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \right) + \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{a}{l}\right), & \text{je-li } a < l < \infty. \end{cases} \quad (1.2)$$

Tohoto výsledku je možné využít k odhadu čísla π provedením N hodů jehlou na rovnoběžnou síť linek. Označíme Z počet jehel zasahujících linku, potom pravděpodobnost protnutí odhadneme relativní četností zásahu $Z/N \approx 2l/\pi a$, pro jehlu délky l a rozestupy a mezi linkami, kde $l \leq a$. Dostáváme odhad

$$\hat{\pi} = \frac{2lN}{aZ}. \quad (1.3)$$

Nejznámějšího výsledku tohoto experimentu dosáhl Lazzarini (1901). S parametry $l = 2,5$ cm, $a = 3$ cm, $N = 3408$ napočítal $Z = 1808$ zásahů a odhadl tak

$$\hat{\pi} = 3,1415929 \dots$$

To je přesnost na šest desetinných míst, ovšem tento experiment byl později zpochybněn a prakticky i vyvrácen, podrobněji o něm pojednává Badger (1994).

1.2 Laplaceovo rozšíření na obdélníkovou mříž

Jako první rozšíření Buffonovy úlohy budeme místo rovnoběžných linek uvažovat obdélníkovou mříž. Také tuto úlohu můžeme nalézt v Buffon (1777), ovšem Buffonovo odvození obsahovalo chybu. První správné řešení lze nalézt v Laplace (1812), proto se o této úloze hovoří jako o Buffonově-Laplaceově úloze o jehle nebo o Laplaceově rozšíření Buffonovy úlohy.

1.2.1 Zadání úlohy

Do roviny pokryté obdélníkovou sítí o rozměrech $a, b > 0$ je náhodně umístěna úsečka (jehla) o délce $l > 0$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne alespoň jednu z přímk tvořící obdélníkovou síť?

1.2.2 Řešení

Nechť je $0 < a \leq b$ a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že střed jehly dopadá pouze do jednoho obdélníku s rozměry a, b . Jehly jsou jednoznačně určeny pozicí středu a záporně orientovaným úhlem θ , který svírají s kratší ze stran obdélníku. Díky symetrii můžeme uvažovat $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Pozice středu bude v tomto případě určena vzdálenostmi $x \in (0, a)$ a $y \in (0, b)$ od jednoho pevně zvoleného vrcholu. Postupovat budeme obdobně jako v předchozí úloze s tím rozdílem, že je zde výhodnější počítat pravděpodobnost neprotnutí. Množina S je zde dvourozměrná a platí

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in (0, a), y \in (0, b)\}, \quad \lambda(S) = ab.$$

Pro pevné $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ hledáme množinu N_θ středů těch jehel, které svírají úhel θ a neprotínají žádnou z linek. Z definice geometrické pravděpodobnosti platí

$$P(\text{neprotnutí} | \Theta = \theta) = \frac{\lambda(N_\theta)}{\lambda(S)} = \frac{\lambda(N_\theta)}{ab}.$$

Odchylka Θ má i tentokrát rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ s hustotou $f_\Theta(\theta) = \frac{2}{\pi}$, a pro výslednou pravděpodobnost neprotnutí tak platí

$$P(\text{neprotnutí}) = \int_0^{\pi/2} P(\text{neprotnutí} | \Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi ab} \int_0^{\pi/2} \lambda(N_\theta) d\theta. \quad (1.4)$$

Hledání $\lambda(N_\theta)$ rozdělíme na několik případů podle délky jehly.

1. $0 < l \leq a$

Buď $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ pevné. Jako na obrázku 1.2 nalezneme množinu N_θ , platí

$$\lambda(N_\theta) = (a - l \cos(\theta))(b - l \sin(\theta)).$$

Z (1.4) potom dostáváme

$$\begin{aligned} P(\text{neprotnutí}) &= \frac{2}{\pi ab} \int_0^{\pi/2} (a - l \cos(\theta))(b - l \sin(\theta)) d\theta \\ &= 1 - \frac{2al + 2bl - l^2}{\pi ab}. \end{aligned}$$

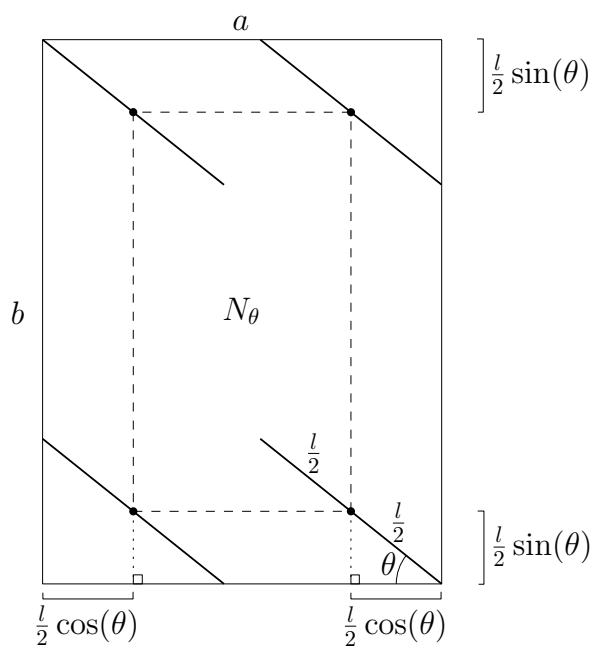
2. $a < l \leq b$

Jelikož je jehla delší než strana a , pak se pro malé hodnoty odchylky jehla do obdélníku nevejde nezávisle na poloze jejího středu, pro takové úhly θ je $N_\theta = \emptyset$. Označme α nejmenší úhel takový, že $N_\alpha \neq \emptyset$ (tedy α určuje, jak nejméně musí být jehla natočená, aby se vešla do obdelníku). Určíme (viz obrázek 1.3), že

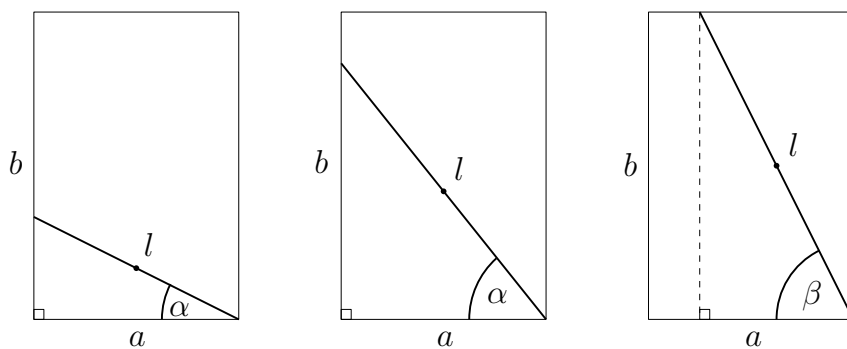
$$\alpha = \arccos\left(\frac{a}{l}\right).$$

Pro $\theta < \alpha$ platí $\lambda(N_\theta) = 0$. Naopak pro velké hodnoty odchylky nejsme nijak omezeni, neboť jehla je stále kratší než b . Pro $\theta > \alpha$ platí obdobně jako v případě kratší jehly

$$\lambda(N_\theta) = (a - l \cos(\theta))(b - l \sin(\theta)).$$



Obrázek 1.2: Pro dané θ leží středy jehel neprotínajících žádnou ze stran uvnitř čárkovaného obdélníku.



Obrázek 1.3: Vlevo je (pro jehly $a < l \leq b$) nejmenší úhel, pro který se jehla ještě vejde do obdélníku. Uprostřed totéž pro delší jehly ($b < l \leq \sqrt{a^2 + b^2}$), vpravo zase takový úhel, že jehly s větší odchylkou se už nevejdou do obdélníku.

Výsledná pravděpodobnost neprotnutí je zde podle (1.4) rovna

$$\begin{aligned} P(\text{neprotnutí}) &= \frac{2}{\pi ab} \int_{\arccos(a/l)}^{\pi/2} (a - l \cos(\theta))(b - l \sin(\theta)) d\theta \\ &= 1 - \frac{a^2 + 2bl - 2b\sqrt{l^2 - a^2} + 2ab \arccos(a/l)}{\pi ab}. \end{aligned}$$

3. $b < l \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

Jelikož je stále $l > a$, položíme α jako v předchozím případě. Nyní se ale také pro velké hodnoty odchylky jehla nevejde do obdélníku. Označme tedy β největší úhel takový, že $N_\beta \neq \emptyset$ (tedy největší úhel, kdy se ještě jehla vejde do obdélníku). Pomocí obrázku 1.3 určíme $\beta = \arcsin(b/l)$. Potom pro $\theta < \alpha$ platí $\lambda(N_\theta) = 0$, pro $\alpha < \theta < \beta$ je

$$\lambda(N_\theta) = (a - l \cos(\theta))(b - l \sin(\theta))$$

a pro $\beta < \theta$ je opět $\lambda(N_\theta) = 0$. Podle (1.4) dostáváme

$$\begin{aligned} P(\text{neprotnutí}) &= \frac{2}{\pi ab} \int_{\arccos(a/l)}^{\arcsin(b/l)} (a - l \cos(\theta))(b - l \sin(\theta)) d\theta \\ &= 1 - \frac{a^2 + b^2 + l^2 - 2b\sqrt{l^2 - a^2} - 2a\sqrt{l^2 - b^2}}{\pi ab} \\ &\quad - \frac{2ab \arccos(a/l) + 2ab \arccos(b/l)}{\pi ab}. \end{aligned}$$

4. $\sqrt{a^2 + b^2} < l$

Takto dlouhá jehla se již do obdélníku nevejde, rovnost $\lambda(N_\theta) = 0$ platí pro všechna $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, a tedy i $P(\text{neprotnutí}) = 0$.

Výslednou pravděpodobnost protnutí strany obdélníku již snadno určíme jako pravděpodobnost doplňkového jevu.

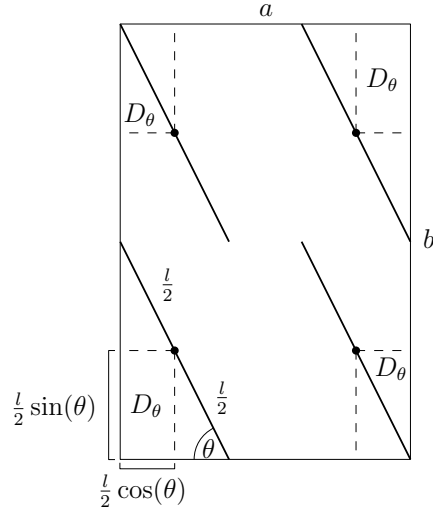
1.2.3 Jiný přístup k řešení

Stejně výsledky je také možné získat mírně odlišným přístupem. Obdélníková mříž se totiž skládá ze dvou sad rovnoběžných linek, které svírají úhel $\frac{\pi}{2}$. Označme je podle rozestupů jako A -sít a B -sít. V tomto označení je například strana délky b částí A -sítě. Jelikož už známe ze sekce 1.1 pravděpodobnost protnutí pro každou sadu linek zvlášť (označme tyto pravděpodobnosti P_A a P_B), pak pokud určíme pravděpodobnost protnutí obou sad zároveň (označme tuto pravděpodobnost jako P_2), budeme znát i řešení zadané úlohy, neboť

$$P(\text{protnutí}) = P_A + P_B - P_2.$$

Ukážeme zde výpočet pouze pro jehly kratší než obě stany obdélníku. Označme D_θ množinu těch středů jehel, které svírají úhel θ a protnou obě dvě sady linek, z geometrické pravděpodobnosti platí

$$P(\text{protnutí obou sad} | \Theta = \theta) = \frac{\lambda(D_\theta)}{\lambda(S)} = \frac{\lambda(D_\theta)}{ab}.$$



Obrázek 1.4: Střed y jehel protínajících obě strany leží v některém ze čtyř obdélníků v rozích, množina D_θ je jejich sjednocením.

Pro pravděpodobnost protnutí obou sad pak platí

$$P_2 = \int_0^{\pi/2} \mathbb{P}(\text{protnutí obou sad} \mid \Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi ab} \int_0^{\pi/2} \lambda(D_\theta) d\theta.$$

Jehly protínající obě strany musí zřejmě ležet poblíž rohů obdélníku. Přesněji když za daného θ sestrojíme jehly dotýkající se obou stran obdélníku jako na obrázku 1.4, pak jehly protínající obě strany mají svůj střed v jednom ze čtyř obdélníků v rozích původního. Platí

$$\begin{aligned} \lambda(D_\theta) &= 4 \frac{l}{2} \cos(\theta) \frac{l}{2} \sin(\theta) = \frac{l^2}{2} \sin(2\theta), \\ P_2 &= \frac{2}{\pi ab} \int_0^{\pi/2} \frac{l^2}{2} \sin(2\theta) d\theta = \frac{l^2}{\pi ab}, \end{aligned}$$

z (1.2) již máme $P_A = \frac{2l}{\pi a}$ a $P_B = \frac{2l}{\pi b}$ a konečně

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{protnutí}) &= P_A + P_B - P_2 = \frac{2l}{\pi a} + \frac{2l}{\pi b} - \frac{l^2}{\pi ab} \\ &= \frac{2bl + 2al - l^2}{\pi ab}. \end{aligned}$$

Pro delší jehly je první přístup k řešení výpočetně mírně jednodušší, i proto bývá podobný způsob uváděn ve většině literatury, například v Fengfan a Deyi (2011). Naproti tomu druhý způsob řešení poskytuje více informací. Jednak dokážeme určit, kolik sítí bylo protnuto, nebo také vyjádřit pravděpodobnost protnutí obou sítí.

1.2.4 Závěr

Pravděpodobnost, že náhodně zvolená jehla protne některou z přímek tvořící obdélníkovou síť o rozměrech a, b , kde $0 < a \leq b$, je

$$P = \begin{cases} \frac{1}{\pi ab} (2al + 2bl - l^2), & \text{je-li } 0 < l \leq a, \\ \frac{1}{\pi ab} \left(a^2 + 2bl - 2b\sqrt{l^2 - a^2} + 2ab \arccos(a/l) \right), & \text{je-li } a < l \leq b, \\ \frac{1}{\pi ab} \left(a^2 + b^2 + l^2 - 2b\sqrt{l^2 - a^2} - 2al\sqrt{l^2 - b^2} \right. \\ \quad \left. + 2ab \arccos(a/l) + 2ab \arccos(b/l) \right), & \text{je-li } b < l \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 1, & \text{je-li } \sqrt{a^2 + b^2} < l < \infty. \end{cases}$$

Stejně jako u základní Buffonovy úlohy můžeme použít výsledku k odhadu čísla π . Schuster (1974) ukazuje na mříži s parametry $a = b = 2l$, že pro 100 hodů jehlou odhad

$$\frac{1}{\hat{\pi}} = \frac{1}{200} (\text{počet protnutí } A\text{-sítě} + \text{počet protnutí } B\text{-sítě})$$

čísla $1/\pi$ má menší rozptyl než odhad (1.3) pomocí $N = 200$ hodů jehlou na rovnoběžné linky. V knize Solomon (1978) lze nalézt doplňující výpočty k Schusterovu pozorování.

1.3 Rovnoběžníková mříž

Nyní dále zobecníme Laplaceovo rozšíření. Budeme opět uvažovat dvě sady rovnoběžných linek, ale tentokrát na sebe tyto sady nemusí být kolmé, mohou mezi sebou svírat libovolný nenulový úhel.

1.3.1 Zadání úlohy

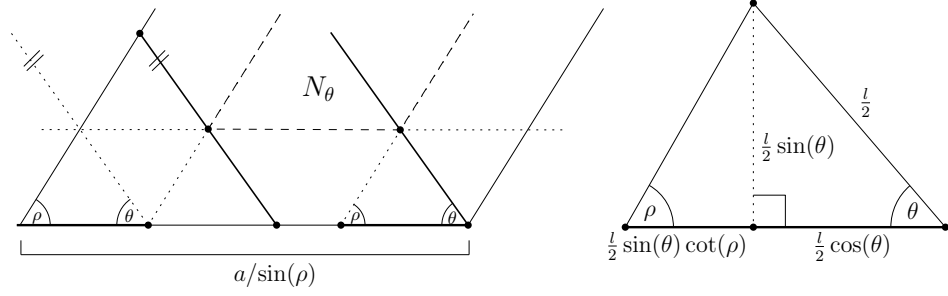
Uvažujme sadu rovnoběžných linek s rozestupy a (dále o nich budeme hovořit jako o A -síti) a sadu rovnoběžných linek s rozestupy b (dále jen B -sít), které svírají s první sadou úhel $\rho \in (0, \frac{\pi}{2})$. Předpokládejme $0 < b \leq a$. S jakou pravděpodobností protne náhodně zvolená jehla délky $l > 0$ některou z linek?

1.3.2 Řešení

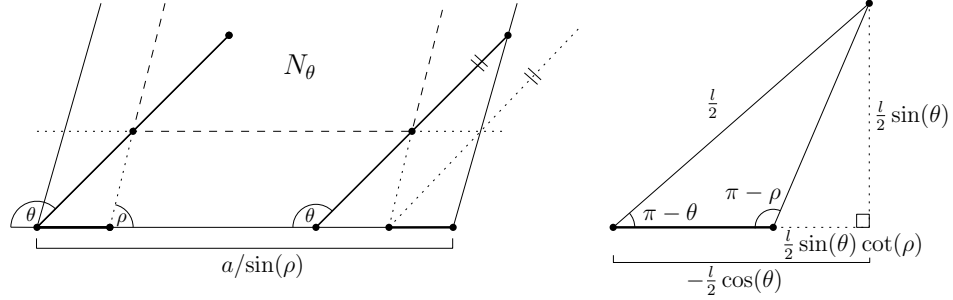
Jehly jsou opět určeny jednoznačně pozicí svého středu a úhlem θ svírajícím s A -sítí v záporném směru. Bez újmy na obecnosti uvažujme jehly dopadající pouze do jednoho rovnoběžníku vymezeného výše popsány linkami, ten také označíme za množinu S . Platí

$$\lambda(S) = \frac{ab}{\sin(\rho)},$$

$$P(\text{neprotnutí} | \Theta = \theta) = \frac{\lambda(N_\theta)}{\lambda(S)} = \frac{\lambda(N_\theta) \sin(\rho)}{ab},$$



Obrázek 1.5: Množina N_θ pro $\theta \in (0, \pi - \rho)$.



Obrázek 1.6: Množina N_θ pro $\theta \in (\pi - \rho, \pi)$.

kde N_θ označuje množinu středů jehel, které neprotínají žádnou z linek. Odchylka Θ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, \pi)$ s hustotou $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi}$ a pro výslednou pravděpodobnost neprotnutí platí

$$P(\text{neprotnutí}) = \int_0^\pi P(\text{neprotnutí} | \Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = \frac{\sin(\rho)}{\pi ab} \int_0^\pi \lambda(N_\theta) d\theta. \quad (1.5)$$

Úlohu budeme dělit podle délky jehly na několik případů. Označme délku kratší úhlopříčky rovnoběžníku jako u_1 a té delší jako u_2 .

1. $0 < l < b$

Pro $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí (viz obrázek 1.5)

$$\lambda(N_\theta) = \left(\frac{a}{\sin(\rho)} - l \cot(\rho) \sin(\theta) - l \cos(\theta) \right) (b - l \sin(\theta)),$$

tento předpis platí i pro $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \rho)$. Pro $\theta \in (\pi - \rho, \pi)$ platí (viz obrázek 1.6)

$$\lambda(N_\theta) = \left(\frac{a}{\sin(\rho)} + l \cot(\rho) \sin(\theta) + l \cos(\theta) \right) (b - l \sin(\theta)).$$

Výsledná pravděpodobnost neprotnutí žádné z linek je tedy podle (1.5) rovna

$$\begin{aligned} P(\text{neprotnutí}) &= \frac{\sin(\rho)}{\pi ab} \int_0^\pi \lambda(N_\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi ab} (l^2(\pi/2 - \rho) \cos(\rho) + l^2 \sin(\rho) - 2al - 2bl + ab\pi). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Připomeňme si řešení problému pro obdélníkovou mříž. V prvním kroku jsme pro krátkou jehlu našli $\lambda(N_\theta)$. Při postupném prodlužování jehly se pouze zmenšovala množina $\{\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) : \lambda(N_\theta) > 0\}$, v samotném výpočtu pravděpodobnosti neprotnutí se tak zmenšovala množina úhlů, přes které jsme integrovali, což odpovídá tomu, že pro některé úhly se jehla od určité délky do obdélníku už nevešla. Aplikování této úvahy na případ rovnoběžníku nám dává za úkol najít pro zvětšující se l úhly takové, že se takto dlouhá a natočená jehla do rovnoběžníku nevejde. První taková situace nastane pro $l > b$, tuto situaci ještě vyřešíme zvlášť.

2. $b < l \leq a$

Jehla delší než výška rovnoběžníku se zřejmě nevejde pro úhly kolem $\pi/2$. Přesněji pro každé $l > b$ existuje právě jedno $\beta > 0$ takové, že platí

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} + \beta \right) \Leftrightarrow \text{jehla protne } B\text{-sít nezávisle na pozici středu.}$$

Z obrázku 1.7 určíme $\beta = \arccos(b/l)$. Jiná omezení v tuto chvíli nemáme, proto dostáváme

$$\begin{aligned} \text{P(neprotnutí)} &= \frac{\sin(\rho)}{\pi ab} \left(\int_0^{\pi/2-\beta} \lambda(N_\theta) d\theta + \int_{\pi/2+\beta}^\pi \lambda(N_\theta) d\theta \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\pi ab} \left(2a\sqrt{l^2 - b^2} - 2al - b^2 \sin(\rho) \right. \\ \quad \left. + 2ab \arcsin(b/l) \right), & \text{je-li } l \geq \frac{b}{\sin(\rho)}, \\ \frac{1}{\pi ab} \left(\sqrt{l^2 - b^2}(2a + b \cos(\rho)) - 2al - 2bl \right. \\ \quad \left. + \arcsin(b/l)(2ab + l^2 \cos(\rho)) \right. \\ \quad \left. + l^2(\sin(\rho) - \rho \cos(\rho)) \right), & \text{je-li } l < \frac{b}{\sin(\rho)}. \end{cases} \end{aligned}$$

3. $a < l \leq u_2$

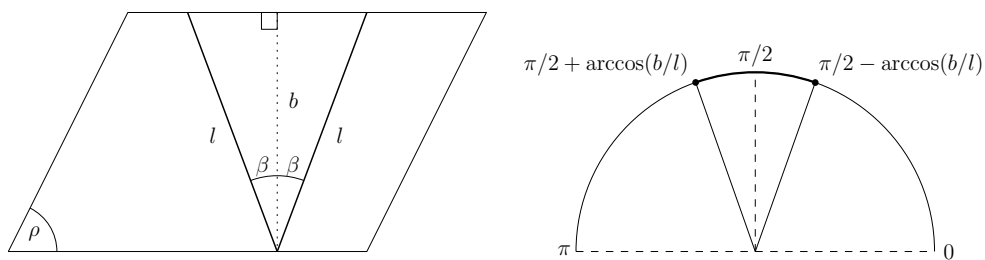
Pro jehly delší než a se jehly pod určitými úhly nevejdou také mezi A -sít. Jehla kolmá na A -sít svírá úhel $\pi/2 - \rho$, a tedy podobně jako v předešlém kroku pro $l > a$ existuje právě jedno $\alpha > 0$ takové, že platí

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{2} - \rho - \alpha, \frac{\pi}{2} - \rho + \alpha \right) \Leftrightarrow \text{jehla protne } A\text{-sít nez. na pozici středu.}$$

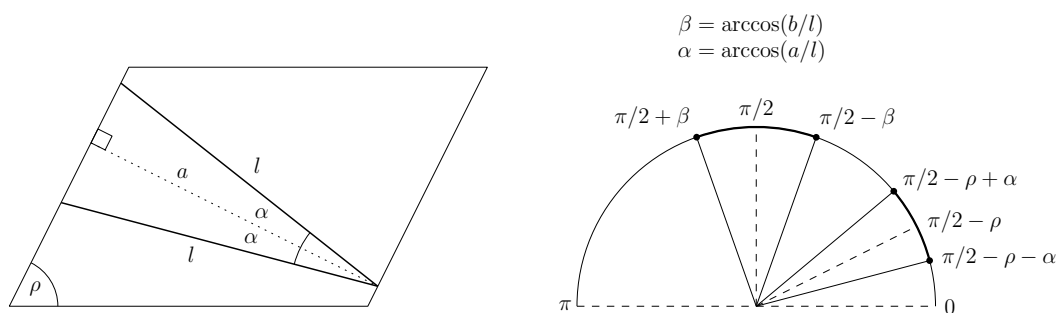
Z obrázku 1.8 určíme $\alpha = \arccos(a/l)$. Zároveň zůstává v platnosti omezení při protnutí B -sítě z předešlého kroku. Čím bude jehla delší, tím se budou zvětšovat i určená omezení. V závislosti na délce jehly a parametrech mříže mohou nastat dvě situace, které vyšetříme za pomoci obrázku 1.9.

(a) $\pi/2 - \rho - \alpha < 0$

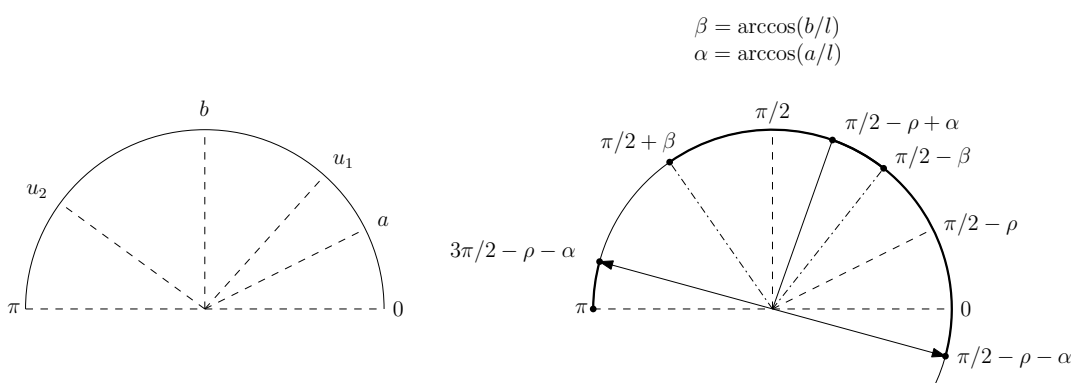
Jehla svírající úhel 0 se nevejde do rovnoběžníku, vešla by se až jehla svírající právě úhel $\pi/2 - \rho - \alpha < 0$. Toto natočení je ale stejné, přičteme-li k němu úhel π , tím dostaneme úhel $3\pi/2 - \rho - \alpha$, který leží v $(0, \pi)$. Vzniká tak omezení pro $\theta \in (3\pi/2 - \rho - \alpha, \pi)$.



Obrázek 1.7: Omezení úhlu θ pro $b \leq l < a$.



Obrázek 1.8: Omezení úhlu θ pro $a \leq l$.



Obrázek 1.9: Omezení úhlu θ pro délku jehly blíží se k u_2 . Vlevo naznačeny úhly, které svírají významné úsečky rovnoběžníku.

(b) $\pi/2 - \rho + \alpha > \pi/2 - \beta$

Splněním této nerovnosti máme jehlu delší než kratší z úhlopříček. Znamená to, že se pouze spojila omezení získaná z protnutí A -sítě a B -sítě.

Položme tedy množinu K jako

$$K = (0, \pi/2 - \rho - \alpha) \cup (\pi/2 - \rho + \alpha, \pi/2 - \beta) \cup (\pi/2 + \beta, \min\{\pi, 3\pi/2 - \rho - \alpha\}),$$

spolu s úmluvou $(a, b) = \emptyset$, kdykoliv $b < a$. Výslednou pravděpodobnost neprotnutí dostaneme integrováním přes množinu K :

$$P(\text{neprotnutí}) = \frac{\sin(\rho)}{\pi ab} \int_K \lambda(N_\theta) d\theta.$$

4. $u_2 < l < \infty$

V tomto případě se jehla už do rovnoběžníku nevejde a

$$P(\text{neprotnutí}) = 0.$$

1.3.3 Jiný přístup k řešení

Jako v případě obdélníkové mříže naznačíme výpočet pravděpodobnosti protnutí s využitím rovnosti

$$P(\text{protnutí}) = P_A + P_B - P_2,$$

kde P_A a P_B označuje pravděpodobnost protnutí jednotlivých sítí a P_2 pravděpodobnost protnutí obou sítí zároveň. Označme D_θ množinu těch středů jehel, které svírají úhel θ a protnou obě dvě sady linek. Z geometrické pravděpodobnosti platí

$$P(\text{protnutí obou sad} | \Theta = \theta) = \frac{\lambda(D_\theta)}{\lambda(S)} = \frac{\lambda(D_\theta) \sin(\rho)}{ab},$$

dále obdobně jako v (1.5) platí pro pravděpodobnost protnutí obou sad linek

$$P_2 = \int_0^\pi P(\text{protnutí obou sad} | \Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = \frac{\sin(\rho)}{\pi ab} \int_0^\pi \lambda(D_\theta) d\theta.$$

Pro určení množiny D_θ můžeme znovu využít obrázků 1.5 a 1.6, dostáváme

$$\lambda(D_\theta) = \begin{cases} (l \cot(\rho) \sin(\theta) + l \cos(\theta)) l \sin(\theta), & \text{je-li } \theta \in (0, \pi - \rho), \\ (-l \cot(\rho) \sin(\theta) - l \cos(\theta)) l \sin(\theta), & \text{je-li } \theta \in (\pi - \rho, \pi). \end{cases}$$

V (1.2) jsme dostali $P_A = \frac{2l}{\pi a}$ a $P_B = \frac{2l}{\pi b}$ a spočítáme

$$P_2 = \frac{\sin(\rho)}{\pi ab} \int_0^\pi \lambda(D_\theta) d\theta = \frac{1}{ab\pi} (l^2(\pi/2 - \rho) \cos(\rho) + l^2 \sin(\rho)),$$

$$\begin{aligned} P(\text{protnutí}) &= P_A + P_B - P_2 = \frac{2l}{\pi a} + \frac{2l}{\pi b} - \frac{1}{ab\pi} (l^2(\pi/2 - \rho) \cos(\rho) + l^2 \sin(\rho)) \\ &= \frac{1}{\pi ab} (2al + 2bl - l^2(\pi/2 - \rho) \cos(\rho) - l^2 \sin(\rho)). \end{aligned}$$

Těchto výsledků použijeme k řešení úlohy uvedené v Schuster (1974). Schuster hledá úhel ρ sevřený mezi dvěma sadami rovnoběžných stejně vzdálených linek takový, pro který jsou průtnutí jednotlivých sad linek nezávislé jevy ($P_2 = P_A P_B$). Tuto rovnost vyjádříme jako

$$\begin{aligned} P_A P_B &= P_2 \\ \frac{4l^2}{ab\pi^2} &= \frac{1}{ab\pi} (l^2(\pi/2 - \rho) \cos(\rho) + l^2 \sin(\rho)) \\ \frac{4}{\pi} &= (\pi/2 - \rho) \cos(\rho) + \sin(\rho). \end{aligned}$$

Označme nyní

$$f(\rho) := (\pi/2 - \rho) \cos(\rho) + \sin(\rho).$$

Tato funkce je pro $\rho \in (0, \pi/2)$ spojitá a pro její derivaci na tomto intervalu platí

$$f'(\rho) = (\rho - \pi/2) \sin(\rho) < 0,$$

tedy f je klesající, navíc

$$f(\pi/2-) = 1 < 4/\pi < \pi/2 = f(0+),$$

potom pro $\rho \in (0, \pi/2)$ existuje právě jedno řešení rovnice

$$f(\rho) = 4/\pi.$$

Toto řešení nalezneme numericky, $\rho \doteq 0,766048$.

2. Pravidelné mnohoúhelníky

V této kapitole budeme zkoumat pravděpodobnost protnutí u jehly dopadající na pravidelné mnohoúhelníky. Budeme vždy uvažovat mnohoúhelník se stranou délky a , na který náhodně dopadá jehla (takovým způsobem, že její střed leží uvnitř mnohoúhelníku). Zformulujeme nejprve tvrzení o obsahu pravidelného mnohoúhelníku.

Tvrzení 1. *Bud' $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, pak pro obsah pravidelného n -úhelníku o straně délky $a > 0$ platí*

$$S = \frac{na^2}{4 \tan(\pi/n)}.$$

Důkaz. Pravidelný n -úhelník lze rozdělit na n rovnoramenných trojúhelníků se základnou délky a a výškou v_a (viz obrázek 2.1). Potom platí

$$S = n \frac{1}{2} a v_a = n \frac{1}{2} a \frac{a}{2} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{na^2}{4 \tan(\pi/n)}.$$

□

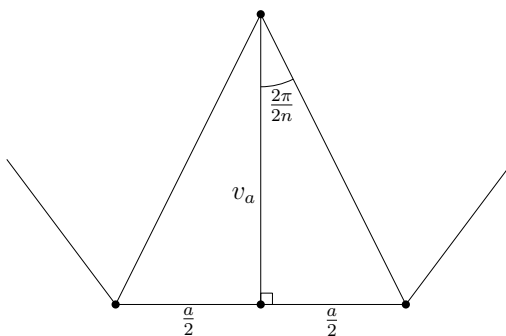
Pozice jehly a její natočení je jednoznačně určeno souřadnicemi středu a úhlem $\theta \in (0, \pi)$, který svírá jehla s jednou zvolenou stranou. Postupujeme obdobně jako v předešlých kapitolách, z definice geometrické pravděpodobnosti platí pro každé $\theta \in (0, \pi)$ vztah

$$\mathbf{P}(\text{neprotnutí} | \Theta = \theta) = \frac{\lambda(N_\theta)}{\lambda(S)} = \frac{4 \tan(\pi/n) \lambda(N_\theta)}{na^2},$$

kde N_θ je množina středů jehel, které při $\Theta = \theta$ leží uvnitř zadaného mnohoúhelníku. Výslednou pravděpodobnost neprotnutí dostaneme jako

$$\mathbf{P}(\text{neprotnutí}) = \int_0^\pi \mathbf{P}(\text{neprotnutí} | \Theta = \theta) f_\Theta(\theta) d\theta = \frac{4 \tan(\pi/n)}{na^2} \int_0^\pi \lambda(N_\theta) f_\Theta(\theta) d\theta. \quad (2.1)$$

Následuje tvrzení umožňující výpočet obsahu mnohoúhelníku, pokud jsou známy kartézské souřadnice všech jeho vrcholů. V literatuře bývá označováno jako *tkaníčkový algoritmus* (podle způsobu výpočtu), nebo jako *Gaussova plošná formule* (tvrzení lze dostat jako důsledek Gaussovy věty o divergenci).



Obrázek 2.1: Rozklad n -úhelníku na rovnoramenné trojúhelníky.

Tvrzení 2. Označme souřadnice vrcholů n -úhelníku v pořadí proti směru hodinových ručiček $[x_i, y_i]$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Potom pro obsah tohoto n -úhelníku platí

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n \right).$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí podle počtu vrcholů. Nechť $n = 3$. Označíme souřadnice vrcholů proti směru hodinových ručiček $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a $[x_3, y_3]$. Pak strany vycházející z prvního vrcholu můžeme reprezentovat vektory

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1), \\ \vec{v} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Pro obsah trojúhelníku platí formule

$$\begin{aligned} 2S &= |\vec{u} \times \vec{v}| \\ &= x_3 y_2 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1 - x_2 y_3 + x_1 y_3 + x_2 y_1 - x_1 y_1 \\ &= x_3 y_2 - x_3 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_3 + x_1 y_3 + x_2 y_1 \\ &= \sum_{i=1}^2 x_i y_{i+1} + x_3 y_1 - \sum_{i=1}^2 x_{i+1} y_i - x_1 y_3, \end{aligned}$$

kde $\vec{u} \times \vec{v}$ značí vektorový součin vektorů \vec{u} a \vec{v} . Předpokládejme nyní platnost tvrzení pro $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme $(n+1)$ -úhelník s vrcholy $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$, $[x_{n+1}, y_{n+1}]$. Rozdělme $(n+1)$ -úhelník úsečkou spojující první a n -tý vrchol na trojúhelník (jeho obsah označíme A) a n -úhelník (o obsahu B). Oba tyto mnohoúhelníky splňují indukční předpoklad a platí

$$\begin{aligned} 2S &= 2A + 2B \\ &= (x_1 y_n + x_n y_{n+1} + x_{n+1} y_1 - x_n y_1 - x_{n+1} y_n - x_1 y_{n+1}) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} + x_{n+1} y_1 - \sum_{i=1}^n x_{i+1} y_i - x_1 y_{n+1}. \end{aligned}$$

□

2.1 Rovnostranný trojúhelník

Jako první z pravidelných mnohoúhelníků budeme zkoumat rovnostranný trojúhelník o straně délky a . Samotné výsledky lze nalézt v Fengfan a Deyi (2011).

2.1.1 Řešení

Vzhledem k symetrii se bez újmy na obecnosti můžeme omezit na $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$, odchylka pak má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, \frac{\pi}{6})$ s hustotou

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{6}{\pi}.$$

Hledání množiny N_θ středů jehel, které při $\Theta = \theta$ neprotnou stranu trojúhelníku, rozdělíme podle délky jehly.

1. $0 < l < \frac{\sqrt{3}a}{2}$

Z obrázku 2.2 určíme množinu N_θ . Je jí trojúhelník, který má zřejmě stejné úhly jako zadaný trojúhelník, tedy je i rovnostranný. Jeho strana má délku

$$a - \frac{l \sin(\theta)}{\sqrt{3}} - l \cos(\theta).$$

Podle tvrzení 1 určíme jeho obsah

$$\begin{aligned} \lambda(N_\theta) &= \frac{3(a - l \sin(\theta)/\sqrt{3} - l \cos(\theta))^2}{4 \tan(\pi/3)} \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{1}{2}al \sin(\theta) - \frac{1}{2}\sqrt{3}al \cos(\theta) + \frac{l^2 \sin^2(\theta)}{4\sqrt{3}} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{3}l^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{2}l^2 \sin(\theta) \cos(\theta). \end{aligned}$$

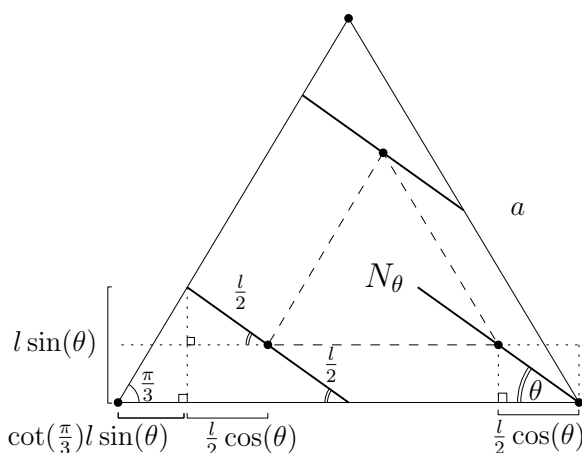
Podle (2.1) potom dostáváme

$$P(\text{neprotnutí}) = \frac{12}{\sqrt{3}\pi a^2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \lambda(N_\theta) d\theta = \frac{\pi(3a^2 + 2l^2) + 3\sqrt{3}l(l - 4a)}{3\pi a^2}.$$

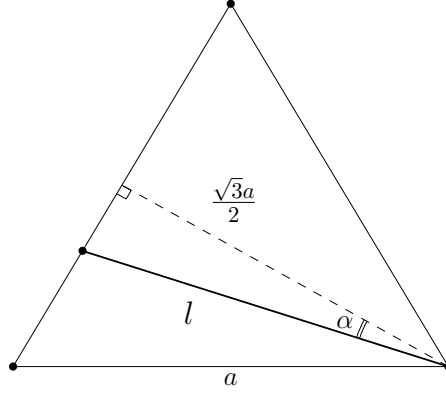
2. $\frac{\sqrt{3}a}{2} \leq l < a$

Jehla je delší než těžnice trojúhelníku, pokud tedy budeme volit jehly natočené přibližně jako jedna z těžnic, nevejdou se do zadaného trojúhelníku. Přesněji existuje úhel α takový, že pro $\theta > \frac{\pi}{6} - \alpha$ se jehla s úhlem $\Theta = \theta$ nevejde do trojúhelníku, tedy $N_\theta = \emptyset$. Nechť α je největší takové, potom je z obrázku 2.3 vidět, že

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}a}{2l}\right).$$



Obrázek 2.2: Střed y jehel neprotínajících strany trojúhelníku mají středy uvnitř čárkovaně naznačeného trojúhelníku.



Obrázek 2.3: Jehly s úhlem větším, než svírá zobrazená jehla, se do trojúhelníku nevejdou.

Pro $\theta \in (0, \frac{\pi}{6} - \alpha)$ nadále platí jako v předchozím případě

$$\begin{aligned} \lambda(N_\theta) &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{1}{2}al \sin(\theta) - \frac{1}{2}\sqrt{3}al \cos(\theta) + \frac{l^2 \sin^2(\theta)}{4\sqrt{3}} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sqrt{3}l^2 \cos^2(\theta) + \frac{1}{2}l^2 \sin(\theta) \cos(\theta). \end{aligned}$$

Podle (2.1) potom dostáváme

$$\begin{aligned} \text{P(neprotnutí)} &= \frac{12}{\sqrt{3}\pi a^2} \int_0^{\pi/6 - \alpha} \lambda(N_\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi(3a^2 + 2l^2) + 3\sqrt{3}l(l - 4a)}{3\pi a^2} \\ &\quad + \frac{9a\sqrt{12l^2 - 9a^2} - 6(3a^2 + 2l^2) \arccos\left(\frac{\sqrt{3}a}{2l}\right)}{3\pi a^2}. \end{aligned}$$

3. $a \leq l$

Pro jehlu delší než strana trojúhelníku je pro každé $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$ množina N_θ prázdná, a tedy

$$\text{P(neprotnutí)} = 0.$$

2.1.2 Závěr

Pravděpodobnost, že náhodně zvolená jehla délky l protne stranu rovnostranného trojúhelníku se stranou délky a , je

$$\text{P} = \begin{cases} \frac{1}{3\pi a^2} (12\sqrt{3}al - 2\pi l^2 - 3\sqrt{3}l^2), & \text{je-li } 0 < l < \frac{\sqrt{3}a}{2}, \\ \frac{1}{3\pi a^2} (12\sqrt{3}al - 2\pi l^2 - 3\sqrt{3}l^2 - 9a\sqrt{12l^2 - 9a^2} + (18a^2 + 12l^2) \arccos\left(\frac{\sqrt{3}a}{2l}\right)), & \text{je-li } \frac{\sqrt{3}a}{2} \leq l < a, \\ 1, & \text{je-li } a \leq l < \infty. \end{cases}$$

2.2 Pravidelný šestiúhelník

Dále budeme zkoumat pravděpodobnost průtnutí při dopadu na pravidelný šestiúhelník, i tyto výsledky se uvádí bez řešení v Fengfan a Deyi (2011).

2.2.1 Řešení

I zde se díky symetrii můžeme bez újmy na obecnosti omezit na $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$, náhodná veličina Θ pak má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, \frac{\pi}{6})$ s hustotou

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{6}{\pi}.$$

Podle (2.1) stačí nalézt množinu N_{θ} středů jehel, které při odchylce $\Theta = \theta$ leží uvnitř šestiúhelníku. Hledání rozdělíme podle délky jehly.

1. $0 < l < a$

Umístíme-li střed kružnice opsané pravidelnému šestiúhelníku v rovině do bodu $[0, 0]$, potom vrcholy mají souřadnice

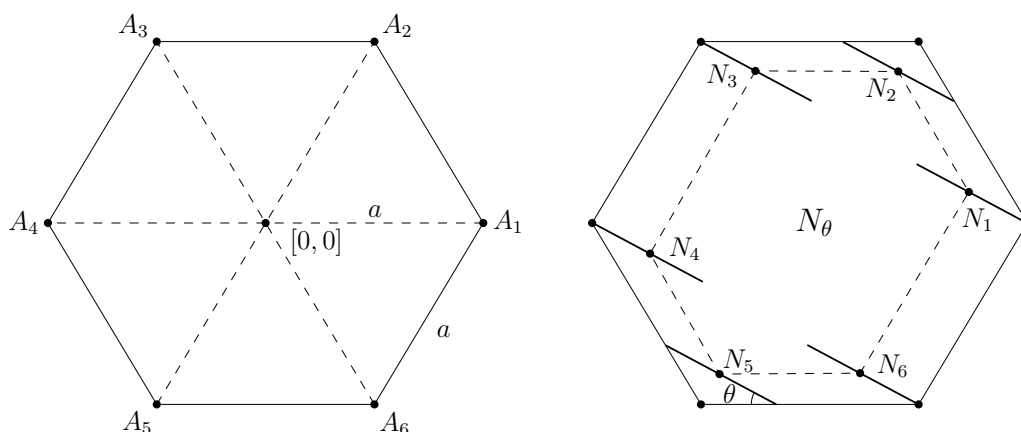
$$\left[a \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right), a \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

Množina N_{θ} je šestiúhelník, nalezneme nyní souřadnice jeho vrcholů. Jak vidíme na obrázku 2.4, nastávají u vrcholů dvě situace. Buď se hraniční jehla přímo dotýká vrcholu šestiúhelníku (jako tomu je u vrcholů N_1, N_3, N_4 a N_6), nebo se vrcholu nedotýká (situace u vrcholů N_2 a N_5). Všimněme si, že pro každé $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$ si vrcholy N_1, \dots, N_6 zachovávají takto uvedené rozdělení do dvou skupin. V první skupině je (viz obrázek 2.5) vertikální posun vrcholu N_i oproti A_i roven (až na znaménko)

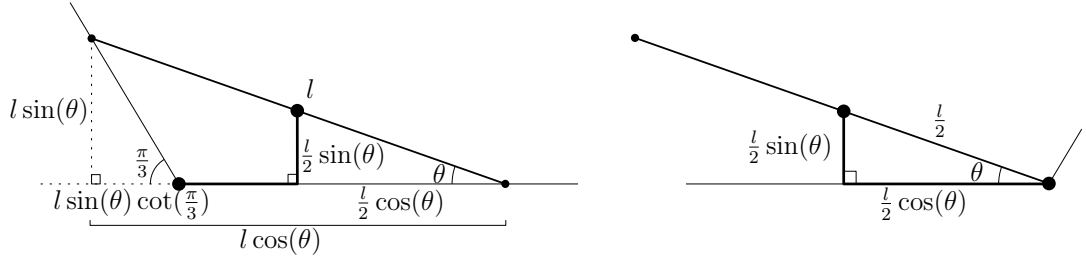
$$\frac{l}{2} \sin(\theta)$$

a horizontální posun roven (opět až na znaménko)

$$\frac{l}{2} \cos(\theta).$$



Obrázek 2.4: Vlevo je šestiúhelník zasazen do kartézské soustavy souřadnic, vpravo naznačena množina N_{θ} .



Obrázek 2.5: Vertikální a horizontální posuny souřadnic vrcholů množiny N_θ oproti původnímu šestiúhelníku.

Pro vrcholy druhé skupiny je vertikální posun stejný a horizontální je až na znaménko roven

$$l \cos(\theta) - \frac{l}{2} \cos(\theta) - \frac{l}{\sqrt{3}} \sin(\theta) = \frac{l}{2} \cos(\theta) - \frac{l}{\sqrt{3}} \sin(\theta).$$

Ani znaménko posunutí se pro $\theta \in (0, \frac{\pi}{6})$ nemění, můžeme tedy určit souřadnice vrcholů množiny N_θ , viz tabulka 2.1. Poté podle tkaničkového algoritmu (tvrzení 2) určíme obsah množiny N_θ . Dostáváme

$$\lambda(N_\theta) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} - al \sin(\theta) - \sqrt{3}al \cos(\theta) - \frac{l^2 \sin^2(\theta)}{\sqrt{3}} + l^2 \sin(\theta) \cos(\theta). \quad (2.2)$$

Výslednou pravděpodobnost neprotnutí dostáváme podle (2.1) jako

$$\begin{aligned} P(\text{neprotnutí}) &= \frac{4 \tan(\frac{\pi}{6})}{6a^2} \int_0^\pi \lambda(N_\theta) f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}\pi a^2} \int_0^{\pi/6} \lambda(N_\theta) d\theta \\ &= 1 - \frac{l^2}{9a^2} - \frac{4l}{\sqrt{3}\pi a} + \frac{l^2}{\sqrt{3}\pi a^2}. \end{aligned}$$

Vrchol	Souřadnice X	Souřadnice Y
N_1	$a - \frac{l}{2} \cos(\theta)$	$\frac{l}{2} \sin(\theta)$
N_2	$\frac{l}{2\sqrt{3}} \sin(\theta) + \frac{a}{2} - \frac{l}{2} \cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{l}{2} \sin(\theta)$
N_3	$-\frac{a}{2} + \frac{l}{2} \cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{l}{2} \sin(\theta)$
N_4	$-a + \frac{l}{2} \cos(\theta)$	$-\frac{l}{2} \sin(\theta)$
N_5	$-\frac{l}{2\sqrt{3}} \sin(\theta) - \frac{a}{2} + \frac{l}{2} \cos(\theta)$	$-\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{l}{2} \sin(\theta)$
N_6	$\frac{a}{2} - \frac{l}{2} \cos(\theta)$	$-\frac{\sqrt{3}a}{2} + \frac{l}{2} \sin(\theta)$

Tabulka 2.1: Souřadnice vrcholů množiny N_θ pro jehly $l < a$.

Vrchol	Souřadnice X	Souřadnice Y
N_1	$a - \frac{l}{2} \cos(\theta)$	$\frac{l}{2} \sin(\theta)$
N_3	$\frac{l \sin(\theta)}{2\sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{3}a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta)$
N_4	$-a + \frac{l}{2} \cos(\theta)$	$-\frac{l}{2} \sin(\theta)$
N_6	$-\frac{l \sin(\theta)}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{2\sqrt{3}a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta)$

Tabulka 2.2: Souřadnice vrcholů množiny N_θ pro jehly $a \leq l < \sqrt{3}a$.

2. $a \leq l < \sqrt{3}a$

Pro malé úhly tvoří množinu N_θ rovnoběžník, nalezneme tedy úhel α takový, že pro $\theta < \alpha$ je množinou N_θ rovnoběžník a pro $\theta > \alpha$ už šestiúhelník. Z obrázku 2.6 určíme

$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}a}{2l}\right).$$

Všimněme si také, že platí $\alpha < \pi/6$. Posuny vrcholů N_1 a N_4 jsou určeny stejně jako v předchozím případě, posunutí zbývajících dvou vrcholů určíme z obrázku 2.7, horizontální je roven h a vertikální je roven $(l/2) \sin(\theta) + v$, kde

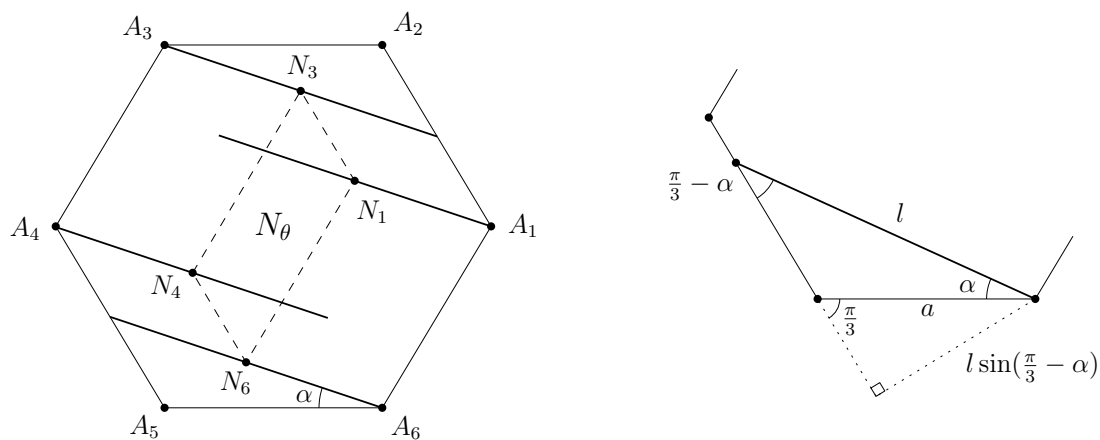
$$\begin{aligned} h &= \frac{l}{2} \cos(\theta) - \left(l \cos(\theta) - a - \frac{l \sin(\theta)}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{2} = \frac{a}{2} + \frac{l \sin(\theta)}{2\sqrt{3}}, \\ \frac{l}{2} \sin(\theta) + v &= \frac{l}{2} \sin(\theta) + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(l \cos(\theta) - a - \frac{l \sin(\theta)}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} l \cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}a}{2}. \end{aligned}$$

Výsledné souřadnice vrcholů množiny N_θ shrnuje tabulka 2.2, poté pomocí tkaničkového algoritmu vyjádříme obsah množiny $\lambda(N_\theta)$ jako

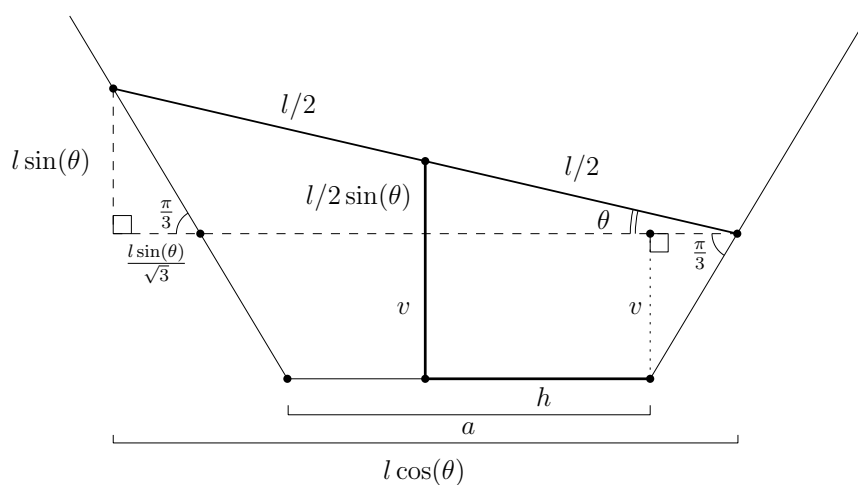
$$\lambda(N_\theta) = 2\sqrt{3}a^2 - 2\sqrt{3}al \cos(\theta) - \frac{l^2 \sin^2(\theta)}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{3}l^2 \cos^2(\theta).$$

Pro $\theta > \alpha$ potom dostáváme obsah množiny N_θ jako v předchozím bodu (2.2) a podle (2.1) pro pravděpodobnost neprotnutí platí

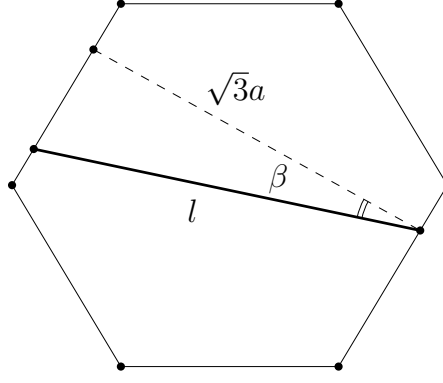
$$\begin{aligned} P(\text{neprotnutí}) &= \frac{4}{\sqrt{3}\pi a^2} \int_0^{\pi/6} \lambda(N_\theta) d\theta \\ &= \frac{5}{3} + \frac{l^2}{3a^2} - \frac{\sqrt{12l^2 - 9a^2}}{\pi a} - \frac{(6a^2 + 4l^2) \arcsin(\sqrt{3}a/2l)}{3\pi a^2}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.6: Množina N_θ pro malé úhly, vpravo naznačen výpočet úhlu α .



Obrázek 2.7: Vertikální a horizontální posun souřadnice středu jehly oproti vrcholu šestiúhelníku pro dlouhé jehly a $\theta < \alpha$.



Obrázek 2.8: Největší úhel, se kterým se jehla vejde do šestiúhelníku, je $\pi/6 - \beta$.

3. $\sqrt{3}a \leq l < 2a$

Všimněme si, že nyní je $\alpha > \pi/6$. Díky tomu bude množina N_θ buď rovnoběžník popsaný v předchozím bodě, nebo prázdná množina. Druhý případ nastává pro $\theta > \pi/6 - \beta$, kde z obrázku 2.8 určíme

$$\beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}a}{l}\right).$$

Poté pro pravděpodobnost neprotnutí platí

$$\begin{aligned} P(\text{neprotnutí}) &= \frac{4}{\sqrt{3}\pi a^2} \int_0^{\pi/6} \lambda(N_\theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3} + \frac{l^2}{9a^2} - \frac{2\sqrt{3}}{\pi} - \frac{l^2}{\sqrt{3}\pi a^2} \\ &\quad + \frac{10\sqrt{l^2 - 3a^2}}{\sqrt{3}\pi a} - \frac{(24a^2 + 2l^2) \arccos(\sqrt{3}a/l)}{3\pi a^2}. \end{aligned}$$

4. $2a \leq l < \infty$

Takto dlouhá jehla se již do šestiúhelníku nevejde, pro všechna $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$ platí $N_\theta = \emptyset$, a tedy

$$P(\text{neprotnutí}) = 0.$$

2.2.2 Závěr

Pravděpodobnost, že náhodně zvolená jehla délky l protne stranu pravidelného šestiúhelníku se stranou délky a , je

$$P = \begin{cases} \frac{1}{9a^2\pi} (\pi l^2 + 12\sqrt{3}al - 3\sqrt{3}l^2), & \text{je-li } 0 < l \leq a, \\ \frac{3}{9a^2\pi} (-2\pi a^2 - \pi l^2 + 3a\sqrt{12l^2 - 9a^2} \\ \quad + (6a^2 + 4l^2) \arcsin(\sqrt{3}a/2l)), & \text{je-li } a < l \leq \sqrt{3}a, \\ \frac{1}{9a^2\pi} (3\sqrt{3}l^2 + 18\sqrt{3}a^2 - \pi l^2 - 3\pi a^2 \\ \quad - 30a\sqrt{3l^2 - 9a^2} + (72a^2 + 6l^2) \arccos(\sqrt{3}a/l)), & \text{je-li } \sqrt{3}a < l \leq 2a, \\ 1, & \text{je-li } 2a < l < \infty. \end{cases}$$

3. Složené mříže

V závěrečné kapitole se jen krátce podíváme na mříže, jejichž základní vzor se skládá z několika geometrických útvarů. Pro ilustraci uvedeme postup na mříži složené z šestiúhelníků a rovnoběžníků (uvedená například v Fengfan a Deyi (2011)).

3.1 Šestiúhelník a kosočtverec

3.1.1 Zadání úlohy

Uvažujme mříž vzniklou opakováním základního vzoru skládajícího se z pravidelného šestiúhelníku o straně délky $k > 0$ a kosočtverce o straně téže délky (viz obrázek 3.1). S jakou pravděpodobností protne náhodně zvolená úsečka délky $l > 0$ některou z čar?

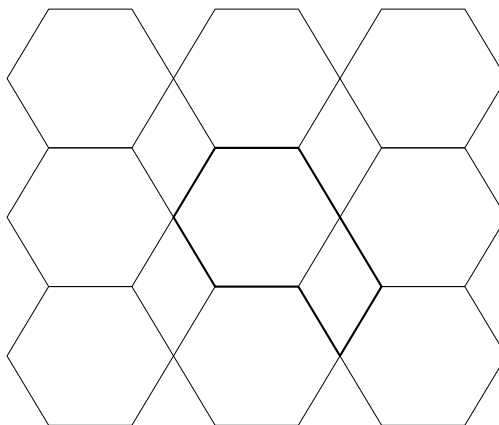
3.1.2 Řešení

Bez újmy na obecnosti uvažujme jehlu dopadající svým středem pouze do základního vzoru. Označme A jev, že střed dopadne do šestiúhelníku, a B jev, že střed dopadne do kosočtverce. Potom pro pravděpodobnost protnutí některé z čar platí podle věty o úplné pravděpodobnosti

$$P(\text{protnutí}) = P(\text{protnutí} | A) P(A) + P(\text{protnutí} | B) P(B).$$

Pravděpodobnost jevů A a B určíme z definice geometrické pravděpodobnosti. Obsah šestiúhelníku je roven $3\sqrt{3}k^2/2$, obsah kosočtverce pak $\sqrt{3}k^2/2$, dostáváme

$$P(A) = \frac{3\sqrt{3}k^2/2}{3\sqrt{3}k^2/2 + \sqrt{3}k^2/2} = \frac{3}{4},$$
$$P(B) = \frac{\sqrt{3}k^2/2}{3\sqrt{3}k^2/2 + \sqrt{3}k^2/2} = \frac{1}{4}.$$



Obrázek 3.1: Mříž ze šestiúhelníků a kosočtverců, tučně vyznačen základní vzor.

Podmíněné pravděpodobnosti jsme již vypočítali v předchozích kapitolách, v případě kosočtverce dosazujeme do výsledku (1.6) z důvodu jiné parametrizace $a = b = \sqrt{3}k/2$ a $\rho = \pi/3$. Vyjádříme pouze případ, kdy je $0 < l < a = b$, platí

$$\begin{aligned} P(\text{protnutí}) &= P(\text{protnutí} | A) P(A) + P(\text{protnutí} | B) P(B) \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{l^2}{9a^2} + \frac{4l}{\sqrt{3}\pi a} - \frac{l^2}{\sqrt{3}\pi a^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\pi ab} (l^2(\pi/2 - \rho) \cos(\rho) - 2al - 2bl + ab\pi + l^2 \sin(\rho)) \right) \\ &= \frac{l^2}{18k^2} - \frac{5l^2}{4\sqrt{3}\pi k^2} + \frac{5l}{\sqrt{3}\pi k}. \end{aligned}$$

Fengfan a Deyi (2011) dále řeší zobecnění této úlohy na rovnostranný šestiúhelník s vnitřními úhly 2α a $\pi - \alpha$ a kosočtvercem s úhly 2α a $\pi - 2\alpha$ nebo také v návaznosti na Caristi a Ferrara (2004) mříž vytvořenou z osmiúhelníku s úhly $\pi - \alpha$ a $\pi/2 + \alpha$ a ze čtverce.

Závěr

Ačkoliv je Buffonova úloha téměř 300 let stará, je toto téma stále živé a vznikají nové práce, které se mu věnují. I v tomto roce například vyšel článek Barilla a kol. (2018) zabývající se konkrétním rozšířením Buffonovy úlohy.

V práci jsme našli podrobná odvození pro základní úlohu, obdélníkovou, rovnoběžníkovou, trojúhelníkovou a šestiúhelníkovou mříž. V závěrečné kapitole jsme naznačili řešení úlohy pro složené mříže, které můžeme nalézt v článkách Caristi a Ferrara (2004) a Fengfan a Deyi (2011). U rovnoběžníkové a obdélníkové mříže navíc zdůrazníme nalezení jiného přístupu k řešení, který se v literatuře vyskytuje jen velmi zřídka, ale ze kterého získáváme více informací. S jeho pomocí jsme například obecně vyřešili problém, jehož pouze konkrétní řešení nacházíme v Schuster (1974). Cílem práce však bylo odvození a sepsání základních výsledků, pro které je klasický přístup výhodnější, proto jsme se druhému přístupu věnovali jen okrajově. Ve druhé kapitole jsme dokázali tvrzení pro výpočet obsahu n -úhelníku, známe-li kartézské souřadnice jeho vrcholů.

Výsledky některých rozšíření Buffonovy úlohy nalezneme kromě výše zmíněných článků také v De-Lin (1994). Naše výpočty se dopracovaly ke stejným výsledkům, navíc jsme si v programu Mathematica vytvořili vlastní simulace pro experimentální ověření dosažených výsledků.

Seznam použité literatury

- BADGER, L. (1994). Lazzarini's lucky approximation of π . *Mathematics Magazine*, **67**(2), 83–91.
- BARILLA, D., CARISTI, G. a PUGLISI, A. (2018). On Buffon needle problem for an irregular lattice. *International Journal of Economics and Management Systems*, **3**, 36–38.
- BERTRAND, J. (1889). *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris.
- BUFFON, G. (1733). Editor's note concerning a lecture given 1733 by Mr. Le Clerc de Buffon to the Royal Academy of Sciences in Paris. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*.
- BUFFON, G. (1777). Essai d'arithmétique morale. *Histoire naturelle, générale et particulière, Supplément*, **4**, 46–123.
- CARISTI, G. a FERRARA, M. (2004). On Buffon's problem for a lattice and its deformations. *Contributions to Algebra and Geometry*, **45**(1), 13–20.
- DE-LIN, R. (1994). *Topics in Integral Geometry*. World Scientific Publishing Company, Singapore.
- DUPAČ, V. a HUŠKOVÁ, M. (2013). *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Karolinum, Praha.
- FENGFAN, X. a DEYI, L. (2011). On generalized Buffon needle problem for lattices. *Acta Mathematica Scientia*, **31B**(1), 303–308.
- LAPLACE, P.-S. (1812). *Théorie Analytique des Probabilités*. Veuve Courcier, Paris.
- LAZZARINI, M. (1901). Un' applicazione del calcolo della probabilita alla ricerca sperimentale di un valore approssimato di π . *Periodico di Matematica*, **4**, 140–143.
- SCHUSTER, E. F. (1974). Buffon's needle experiment. *The American Mathematical Monthly*, **81**(1), 26–29.
- SOLOMON, H. (1978). *Geometric Probability*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.