MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petra Zahrádková

Odhadování parametrů gamma rozdělení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Tímto bych ráda poděkovala svému vedoucímu práce panu doc. Mgr. Michalu Kulichovi, Ph.D. za vstřícné rady a poznámky ke svému zpracování práce, neboť byly velice přínosné.

Název práce: Odhadování parametrů gamma rozdělení

Autor: Petra Zahrádková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Je známo, že maximálně věrohodné odhady obou parametrů gamma rozdělení nemají explicitní vyjádření. Gamma rozdělení je speciálním případem zobecněného gamma rozdělení, které obsahuje tři parametry. Dvě ze tří věrohodnostních rovnic zobecněného gamma rozdělení lze použít jako odhadovací rovnice pro parametry gamma rozdělení, z nichž lze explicitně vyjádřit odhady neznámých parametrů. Intuitivně by se nové odhady vyjádřené z věrohodnostních rovnic měly nacházet velmi blízko maximálně věrohodným odhadům. Práce tuto domněnku upevňuje na základě asymptotického chování nových odhadů. Kromě toho lze explicitní vyjádření upravit tak, aby byly nové odhady nestranné.

Klíčová slova: gamma rozdělení, zobecněné gamma rozdělení, odhadování parametrů, metoda maximální věrohodnosti

Title: Parameter estimation of gamma distribution

Author: Petra Zahrádková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. Mgr. Michal Kulich, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: It is well-known that maximum likelihood (ML) estimators of the two parameters in a Gamma distribution do not have closed forms. The Gamma distribution is a special case of a generalized Gamma distribution. Two of the three likelihood equations of the generalized Gamma distribution can be used as estimating equations for the Gamma distribution, based on which simple closed-form estimators for the two Gamma parameters are available. Intuitively, performance of the new estimators based on likelihood equations should be close to the ML estimators. The study consolidates this conjecture by establishing the asymptotic behaviours of the new estimators. In addition, the closed-forms enable bias-corrections to these estimators.

Keywords: gamma distribution, generalized gamma distribution, parameter estimation, maximum likelihood estimation

Obsah

Úvod

Gamma rozdělení je užitečným modelem v mnoha oblastech statistiky, kde není možné použít normální rozdělení. Často se používá například k modelování křehkosti a náhodných efektů. Je také oblíbené v oblasti fyzikální a biologické vědy.

Nejznámější metoda odhadování parametrů je metoda maximální věrohodnosti. Bohužel pro dvouparametrové gamma rozdělení neexistují explicitní vyjádření maximálně věrohodných odhadů. To způsobuje potíže při zpracování dat, neboť je zapotřebí maximálně věrohodné odhady vyjádřit numericky. Přestože momentové odhady lze snadno explicitně vyjádřit, nejsou příliš efektivní ani u dat menšího rozsahu.

Jedním ze způsobů, jak získat jednoduché a efektivní odhady parametrů gamma rozdělení, je vycházet ze zobecněného gamma rozdělení. Toto rozdělení, které popisuje článek (Stacy, 1962), je flexibilním modelem, jehož speciálním případem není pouze gamma rozdělení, ale také Weibullovo, exponenciální a χ^2 rozdělení. Mnoho studií se zabývalo odhadováním parametrů samotného zobecněného gamma rozdělení, například článek (Lawless, 1980), ale i tato cesta se zdá být velmi obtížná.

Překvapivě lze postupovat tak, že budeme předpokládat data ze zobecněného gamma rozdělení a sestavíme pro ně tři věrohodnostní rovnice. Odhady dvou parametrů gamma rozdělení budou potom odvozeny jen ze dvou těchto rovnic. V této práci dále zjistíme, že naše nové odhady mají explicitní vyjádření, jsou silně konzistentní a že jsou velmi blízko maximálně věrohodným odhadům. Navíc mohou být upraveny na nestranné odhady.

1. Základní vlastnosti gamma rozdělení

1.1 Gamma rozdělení

V odborné literatuře se často používají různé parametrizace pro parametry gamma rozdělení. Držme se tedy následující parametrizace gamma rozdělení označované jako $\Gamma(\alpha,\beta)$ s hustotou

$$f_{gam}(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\exp(-x/\beta), \qquad x>0, \quad \alpha,\beta>0,$$

kde α je parametr tvaru, β je škálovací parametr a $\Gamma(\cdot)$ je gamma funkce.

Nechť náhodná veličina X má gamma rozdělení, $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$, potom

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\ X^z &= \int_0^\infty x^z \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta}dx = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1+z}e^{-x/\beta}dx = \\ &= \frac{\beta^{\alpha+z}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha+z-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(\alpha+z)}{\Gamma(\alpha)}\beta^z \qquad (1.1)\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\ X &= \alpha\beta, \qquad (1.2)\\ \mathsf{E}\ X^2 &= (\alpha+1)\alpha\beta^2,\\ \mathrm{var}(X) &= \mathsf{E}\ X^2 - \Big(\mathsf{E}\ X\Big)^2 = (\alpha+1)\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2(\alpha+1-\alpha) = \\ &= \alpha\beta^2 \qquad (1.3)\end{aligned}$$

1.2 Momentové odhady

Nechť $\mathbb{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ je náhodný výběr z $\Gamma(\alpha,\beta)$. Díky vyjádření (1.2) a (1.3) jako empirických odhadů získáme momentové odhady $\widehat{\alpha}_m, \widehat{\beta}_m$ parametrů α a β ze soustavy odhadovacích rovnic

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\mathrm{var}(X_1)}{\mathsf{E}\ X_1},\\ \alpha &= \frac{\mathsf{E}\ X_1}{\beta},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_m &= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\Big)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i} = \\ &= \frac{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^n X_i},\\ \widehat{\alpha}_m &= \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}.\end{aligned}$$

Věta 1. $\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha}_m-\alpha,\widehat{\beta}_m-\beta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{d}\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2(\alpha+1)\alpha & -2(\alpha+1)\beta\\ -2(\alpha+1)\beta & (2\alpha+3)\beta^2/\alpha\end{pmatrix}\right).$

Důkaz. Označme $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ a $\overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. Dále definujme funkci $g(x,y)=(g_1(x,y),g_2(x,y))$, kde

$$
\begin{aligned}
g_1(x,y)&=\frac{x^2}{y-x^2},\\
g_2(x,y)&=\frac{y-x^2}{x}.
\end{aligned}
$$

Všimneme si, že

$$
\begin{aligned}
g_1(\overline{X}_n,\overline{Y}_n)&=\frac{\overline{X}_n^2}{\overline{Y}_n-\overline{X}_n^2}=\frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^n X_i^2-\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}=\\
&=\widehat{\alpha}_m,\\
g_2(\overline{X}_n,\overline{Y}_n)&=\frac{\overline{Y}_n-\overline{X}_n^2}{\overline{X}_n}=\frac{n\sum_{i=1}^n X_i^2-\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^n X_i}=\\
&=\widehat{\beta}_m,
\end{aligned}
$$

tedy $g(\overline{X}_n,\overline{Y}_n)=(\widehat{\alpha}_m,\widehat{\beta}_m)$ a dále že

$$
\begin{aligned}
g_1(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2)&=g_1(\alpha\beta,(\alpha+1)\alpha\beta^2)=\frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+1)\alpha\beta^2-\alpha^2\beta^2}=\frac{\alpha}{(\alpha+1)-\alpha}=\\
&=\alpha,\\
g_2(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2)&=g_2(\alpha\beta,(\alpha+1)\alpha\beta^2)=\frac{(\alpha+1)\alpha\beta^2-\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta}=(\alpha+1)\beta-\alpha\beta=\\
&=\beta,
\end{aligned}
$$

a tedy $g(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2)=(\alpha,\beta)$.

Podle centrální limitní věty pro nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory platí

$$\sqrt{n}\left((\overline{X}_n,\overline{Y}_n)-(\alpha\beta,(\alpha+1)\alpha\beta^2)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{d}\mathcal{N}_2(\mathbf{0},\Sigma),$$

kde

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\alpha\beta^2 & 2(\alpha+1)\alpha\beta^3\\ 2(\alpha+1)\alpha\beta^3 & (4\alpha+6)(\alpha+1)\alpha\beta^4\end{pmatrix},$$

neboť

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X_1)&=\alpha\beta^2,\\
\operatorname{var}(X_1^2)&=\mathsf{E}\ X_1^4-(\mathsf{E}\ X_1^2)^2=\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha)}\beta^4-(\alpha+1)^2\alpha^2\beta^4=\\
&=\beta^4((\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha-(\alpha+1)^2\alpha^2)=\\
&=(\alpha+1)\alpha\beta^4(\alpha^2+5\alpha+6-\alpha^2-\alpha)=\\
&=(4\alpha+6)(\alpha+1)\alpha\beta^4,\\
\operatorname{cov}(X_1,X_1^2)&=\mathsf{E}\ X_1^3-\mathsf{E}\ X_1\,\mathsf{E}\ X_1^2=(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha\beta^3-\alpha\beta(\alpha+1)\alpha\beta^2=\\
&=(\alpha+1)\alpha\beta^3(\alpha+2-\alpha)=\\
&=2(\alpha+1)\alpha\beta^3.
\end{aligned}
$$

Dále

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x(y-x^2)+2x^3}{(y-x^2)^2} = \frac{2xy}{(y-x^2)^2}, \\
\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) &= \frac{-x^2}{(y-x^2)^2}, \\
\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) &= -\frac{y}{x^2} - 1, \\
\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{x},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_1}{\partial x}(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2) &= \frac{2(\alpha+1)\alpha^2\beta^3}{((\alpha+1)\alpha\beta^2-\alpha^2\beta^2)^2} = \frac{2(\alpha+1)\alpha^2\beta^3}{\alpha^2\beta^4((\alpha+1)-\alpha)^2} = \frac{2(\alpha+1)}{\beta}, \\
\frac{\partial g_1}{\partial y}(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2) &= \frac{-\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^4} = -\frac{1}{\beta^2}, \\
\frac{\partial g_2}{\partial x}(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2) &= -\frac{(\alpha+1)\alpha\beta^2}{\alpha^2\beta^2} - 1 = -1 - \frac{1}{\alpha} - 1 = -\frac{1}{\alpha} - 2, \\
\frac{\partial g_2}{\partial y}(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2) &= \frac{1}{\alpha\beta},
\end{aligned}
$$

a tudíž

$$
\mathbb{A} = \nabla g(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2) = \begin{pmatrix} 2(\alpha+1)/\beta & -1/\beta^2 \\ -1/\alpha-2 & 1/\alpha\beta \end{pmatrix}.
$$

Nyní s využitím Δ-metody dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{n}\left(g(\overline{X}_n,\overline{Y}_n) - g(\mathsf{E}\ X_1,\ \mathsf{E}\ X_1^2)\right) = \\
&\qquad = \sqrt{n}\left((\widehat{\alpha}_m,\widehat{\beta}_m) - (\alpha,\beta)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}_2(\mathbf{0},\mathbb{A}\Sigma\mathbb{A}^\top),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma\mathbb{A}^\top &= \begin{pmatrix} \alpha\beta^2 & 2(\alpha+1)\alpha\beta^3 \\ 2(\alpha+1)\alpha\beta^3 & (4\alpha+6)(\alpha+1)\alpha\beta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(\alpha+1)/\beta & -1/\alpha-2 \\ -1/\beta^2 & 1/\alpha\beta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \beta^2 \\ -2(\alpha+1)\alpha\beta & 4(\alpha+1)\beta^3 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

neboť

$$
2(\alpha+1)\alpha\beta - 2(\alpha+1)\alpha\beta = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
4(\alpha+1)^2\alpha\beta^2 - (4\alpha+6)(\alpha+1)\alpha\beta^2 &= (\alpha+1)\alpha\beta^2(4\alpha+4-4\alpha-6) = \\
&= -2(\alpha+1)\alpha\beta^2,
\end{aligned}
$$

$$
-\beta^2 - 2\alpha\beta^2 + 2(\alpha+1)\beta^2 = \beta^2(-1-2\alpha+2\alpha+2) = \beta^2,
$$

$$
\begin{aligned}
&-2(\alpha+1)\beta^3 - 4(\alpha+1)\alpha\beta^3 + (4\alpha+6)(\alpha+1)\beta^3 = \\
&\qquad = (\alpha+1)\beta^3(-2-4\alpha+4\alpha+6) = 4(\alpha+1)\beta^3
\end{aligned}
$$

a celkem tedy

$$\mathbb{A}\Sigma\mathbb{A}^\top = \begin{pmatrix} 2(\alpha+1)/\beta & -1/\beta^2 \\ -1/\alpha - 2 & 1/\alpha\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta^2 \\ -2(\alpha+1)\alpha\beta & 4(\alpha+1)\beta^3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2(\alpha+1)\alpha & -2(\alpha+1)\beta \\ -2(\alpha+1)\beta & (2\alpha+3)\beta^2/\alpha \end{pmatrix},$$

díky rovnostem

$$2(\alpha+1)\beta - 4(\alpha+1)\beta = -2(\alpha+1)\beta,$$
$$-\frac{\beta^2}{\alpha} - 2\beta^2 + 4(\alpha+1)\frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha}(-1 - 2\alpha + 4\alpha + 4) = \frac{(2\alpha+3)\beta^2}{\alpha}.$$

□

Z důkazu této věty můžeme získat asymptotické rozptyly momentových odhadů parametrů α, β. Pro $\widehat{\alpha}_m$ je to $2(\alpha+1)\alpha$ a pro $\widehat{\beta}_m$ je asymptotický rozptyl $(2\alpha+3)\beta^2/\alpha$.

1.3 Maximálně věrohodné odhady

Pro náhodný výběr $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ z $\Gamma(\alpha, \beta)$ použijeme metodu maximální věrohodnosti. Nejdříve vyjádříme věrohodnostní funkci jako sdruženou hustotu gamma rozdělení pro náhodný výběr $\mathbb{X}$, která je funkcí parametrů α a β

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n f_{gam}(X_i;\, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{X_i^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \exp(-X_i/\beta) =$$
$$= \frac{\prod_{i=1}^n X_i^{\alpha-1}}{\beta^{n\alpha}\Gamma(\alpha)^n} \exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

a dále logaritmickou věrohodnostní funkci

$$\ell(\alpha, \beta) = \log\{L(\alpha, \beta)\} =$$
$$= (\alpha - 1)\sum_{i=1}^n \log X_i - n\alpha \log\beta - n\log\Gamma(\alpha) - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^n X_i.$$

Věrohodnostní rovnice získáme z parciálních derivací funkce ℓ

$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \log X_i - n\log\beta - n\psi(\alpha),$$
$$\frac{\partial \ell(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = -\frac{n\alpha}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^n X_i,$$

kde

$$\psi(\alpha) = \frac{\partial \log\Gamma(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \tag{1.4}$$

je digamma funkce. Maximálně věrohodné odhady $\widehat{\alpha}_{ML}$, $\widehat{\beta}_{ML}$ parametrů α a β tedy získáme jako řešení soustavy věrohodnostních rovnic

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \log X_i - n \log \widehat{\beta}_{ML} - n\psi(\widehat{\alpha}_{ML}), \qquad (1.5)\\
0 &= -\frac{n\widehat{\alpha}_{ML}}{\widehat{\beta}_{ML}} + \frac{1}{\widehat{\beta}_{ML}^2} \sum_{i=1}^{n} X_i.
\end{aligned}
$$

Odhad $\widehat{\beta}_{ML}$ snadno vyjádříme jako

$$\widehat{\beta}_{ML} = \frac{1}{\widehat{\alpha}_{ML}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a dosazením výrazu do (1.5) získáme věrohodnostní rovnici pro $\widehat{\alpha}_{ML}$:

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{i=1}^{n} \log X_i + n \log \widehat{\alpha}_{ML} - n \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) - n\psi(\widehat{\alpha}_{ML}),\\
\log \widehat{\alpha}_{ML} - \psi(\widehat{\alpha}_{ML}) = \log \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log X_i, \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

ovšem z této rovnice je již nutné vyjádřit odhad $\widehat{\alpha}_{ML}$ numericky a tím pádem i odhad $\widehat{\beta}_{ML}$.

Z knihy (Anděl, 2007) víme, že asymptotické rozptyly maximálně věrohodných odhadů nabývají dolní Rao-Cramérovy meze, tj

$$\sqrt{n} \left((\widehat{\alpha}_{ML}, \widehat{\beta}_{ML}) - (\alpha, \beta) \right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbf{J}^{-1}(\alpha, \beta))$$

Spočtěme tedy Fisherovu informační matici parametrů α a β.

$$
\begin{aligned}
\log f(x;\, \alpha, \beta) &= (\alpha - 1) \log x - \alpha \log \beta - \log \Gamma(\alpha) - \frac{x}{\beta},\\
\frac{\partial \log f(x;\, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= \log x - \log \beta - \psi(\alpha),\\
\frac{\partial \log f(x;\, \alpha, \beta)}{\partial \beta} &= -\frac{\alpha}{\beta} + \frac{x}{\beta^2},\\
\frac{\partial^2 \log f(x;\, \alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} &= -\psi_1(\alpha),\\
\frac{\partial^2 \log f(x;\, \alpha, \beta)}{\partial \alpha \partial \beta} &= -\frac{1}{\beta},\\
\frac{\partial^2 \log f(x;\, \alpha, \beta)}{\partial \beta^2} &= \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{2x}{\beta^3},\\
\mathbf{J}(\alpha, \beta) &= \begin{pmatrix} \psi_1(\alpha) & \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} & \frac{\alpha}{\beta^2} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

kde $\psi_1(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \psi(\alpha)$ je trigamma funkce. Nyní matici invertujeme

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{J}(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha\psi_1(\alpha) - 1}{\beta^2},\\
\mathbf{J}^{-1}(\alpha, \beta) &= \frac{\beta^2}{\alpha\psi_1(\alpha) - 1} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta^2} & -\frac{1}{\beta} \\ -\frac{1}{\beta} & \psi_1(\alpha) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\psi_1(\alpha) - 1} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \beta^2 \psi_1(\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

a odsud získáme asymptotické rozptyly pro maximálně věrohodné odhady. Konkrétně tedy $\alpha/(\alpha\psi_1(\alpha) - 1)$ pro $\widehat{\alpha}_{ML}$ a $\beta^2\psi_1(\alpha)/(\alpha\psi_1(\alpha) - 1)$ pro $\widehat{\beta}_{ML}$.

2. Nové odhady

2.1 Zobecněné gamma rozdělení

Definice 1 (zobecněné gamma rozdělení)**.** *Nechť X je náhodná veličina, jejíž hustota je*

$$f_{gg}(x;\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\gamma x^{\alpha\gamma-1}}{\beta^{\alpha\gamma}\Gamma(\alpha)}\exp\left\{-(x/\beta)^{\gamma}\right\},\qquad x>0,\quad \alpha,\beta,\gamma>0.$$

Toto rozdělení nazveme zobecněné gamma rozdělení a označíme ho $gg(\alpha,\beta,\gamma)$.

Zobecněné gamma rozdělení navržené v článku (Stacy, 1962) nezobecňuje pouze gamma rozdělení $\Gamma(\alpha,\beta)$ $(\gamma=1)$. Jeho speciálními případy jsou také rozdělení χ^2 $(\alpha=n/2,\beta=2,\gamma=1)$, exponenciální $Exp(\lambda)$ $(\alpha=1,\beta=1/\lambda,\gamma=1)$ a Weibullovo $We(\lambda)$ $(\alpha=1,\beta=\lambda,\gamma=k)$.

Toto rozdělení lze také získat transformací náhodné veličiny $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$. V literatuře (Zhi-Sheng Ye a Nan Chen, 2017) je chybně uvedena transformace $X^{\gamma}\sim gg(\alpha,\beta,\gamma)$, z této transformace bychom však zobecněné gamma rozdělení nezískali.

Lemma 2. *Náhodná veličina $Z=\beta(\frac{X}{\beta})^{1/\gamma}$ pro $X\sim\Gamma(\alpha,\beta),\alpha,\beta,\gamma>0$ má zobecněné gamma rozdělení.*

Důkaz. Nechť $t: x\to\beta(\frac{x}{\beta})^{1/\gamma}$, $t:(0,\infty)\to(0,\infty)$ je funkce transformace. Potom $t^{-1}: z\to\beta(\frac{z}{\beta})^{\gamma}$, $t^{-1}:(0,\infty)\to(0,\infty)$ a podle věty o transformaci náhodné veličiny máme

$$\begin{aligned}f(z)&=f_{gam}(t^{-1}(z))\left|\frac{\partial}{\partial z}t^{-1}(z)\right|=\\&=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\left(\frac{z}{\beta}\right)^{\gamma(\alpha-1)}\beta^{\alpha-1}\exp\left\{-\left(\frac{z}{\beta}\right)^{\gamma}\right\}\gamma\left(\frac{z}{\beta}\right)^{\gamma-1}=\\&=\frac{\gamma z^{\gamma\alpha-1}}{\beta^{\gamma\alpha}\Gamma(\alpha)}\exp\left\{-\left(\frac{z}{\beta}\right)^{\gamma}\right\}=f_{gg}(z).\end{aligned}$$

Tedy $Z\sim gg(\alpha,\beta,\gamma)$. □

2.2 Odvození odhadů

Z (1.6) již víme, že maximálně věrohodné odhady parametrů α a β z věrohodnostních rovnic pro $\mathbb{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ náhodný výběr z rozdělení $\Gamma(\alpha,\beta)$ nemají explicitní vyjádření. Podle článku (Zhi-Sheng Ye a Nan Chen, 2017) lze překvapivě získat dvě odhadovací rovnice pro parametry gamma rozdělení z věrohodnostních rovnic pro $\mathbb{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ náhodný výběr, o kterém se předpokládá, že je z $gg(\alpha,\beta,\gamma)$. Nakonec lze ukázat, že vzniklé odhady jsou srovnatelné s maximálně věrohodnými odhady gamma rozdělení.

Nechť náhodný výběr $\mathbb{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ je z rozdělení $\Gamma(\alpha,\beta)$, kde α a β jsou parametry, které chceme odhadnout. Zřejmě je náhodný výběr $\mathbb{X}$ z rozdělení

$gg(\alpha, \beta, \gamma)$ pro $\gamma = 1$. Budeme prozatím uvažovat, že náhodný výběr $\mathbb{X}$ je ze zobecněného gamma rozdělení s neznámým parametrem γ. Pro tyto tři neznámé parametry nyní odvodíme věrohodnostní rovnice jako v metodě maximální věrohodnosti.

Nejdříve vyjádříme věrohodnostní funkci

$$
\begin{aligned}
L_{gg}(\alpha, \beta, \gamma) = \prod_{i=1}^{n} f_{gg}(X_i;\, \alpha, \beta, \gamma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma X_i^{\alpha\gamma - 1}}{\beta^{\alpha\gamma}\Gamma(\alpha)} \exp\{-(X_i/\beta)^\gamma\} = \\
= \left(\frac{\gamma}{\beta^{\alpha\gamma}\Gamma(\alpha)}\right)^n \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^\gamma\right\} \prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha\gamma-1},
\end{aligned}
$$

dále logaritmickou věrohodnostní funkci

$$
\begin{aligned}
\ell_{gg}(\alpha, \beta, \gamma) &= \log\{L(\alpha, \beta, \gamma)\} = \\
&= n\log\gamma - n\alpha\gamma\log\beta - n\log\Gamma(\alpha) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^\gamma + (\alpha\gamma - 1)\sum_{i=1}^{n}\log X_i
\end{aligned}
$$

a z ní vytvoříme parciální derivace podle neznámých parametrů α, β a γ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \ell_{gg}}{\partial \alpha}(\alpha, \beta, \gamma) &= -n\gamma\log\beta - n\psi(\alpha) + \gamma\sum_{i=1}^{n}\log X_i, \\
\frac{\partial \ell_{gg}}{\partial \beta}(\alpha, \beta, \gamma) &= -\frac{n\alpha\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^\gamma, \qquad (2.1) \\
\frac{\partial \ell_{gg}}{\partial \gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{n}{\gamma} - n\alpha\log\beta - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^\gamma \log\left(\frac{X_i}{\beta}\right) + \alpha\sum_{i=1}^{n}\log X_i = \\
&= \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^\gamma \log\left(\frac{X_i}{\beta}\right) + \alpha\sum_{i=1}^{n}\log\frac{X_i}{\beta}. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Položme tyto parciální derivace rovno nule. Vyřešením takové soustavy rovnic bychom získali maximálně věrohodné odhady pro parametry α, β a γ. My ale chceme získat odhady pouze pro parametry α a β, které se vyskytují v gamma rozdělení. Položíme tedy (2.1) rovno nule jako u metody maximální věrohodnosti a vyjádříme parametr β jako funkci parametrů α a γ:

$$
\begin{aligned}
-\frac{n\alpha\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^\gamma &= 0, \\
\frac{\gamma}{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^\gamma - n\alpha\right) &= 0, \\
\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\beta}\right)^\gamma &= n\alpha, \\
\sum_{i=1}^{n} X_i^\gamma &= n\alpha\beta^\gamma, \qquad (2.3) \\
\beta(\alpha, \gamma) &= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^\gamma}{n\alpha}\right)^{1/\gamma}. \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Nyní upravíme (2.2):

$$
\begin{aligned}
&\frac{n}{\gamma} - n\alpha \log\beta - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\beta}\right)^{\gamma} \log\left(\frac{X_i}{\beta}\right) + \alpha \sum_{i=1}^{n} \log X_i = \\
&= \frac{n}{\gamma} - n\alpha \log\beta - \frac{1}{\beta^{\gamma}} \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} (\log X_i - \log\beta) + \alpha \sum_{i=1}^{n} \log X_i = \\
&= \frac{n}{\gamma} - n\alpha \log\beta - \frac{1}{\beta^{\gamma}} \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \log X_i + \frac{1}{\beta^{\gamma}} \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \log\beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} \log X_i .
\end{aligned}
$$

Za β chceme dosadit (2.4), k tomu ale využijeme rovnosti (2.3), výraz opět položíme roven nule a vyjádříme parametr α jako funkci parametru γ:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{n}{\gamma} - n\alpha \log\beta - \frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma}} \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \log X_i + n\alpha \log\beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} \log X_i , \\
0 &= \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma}}{\gamma} - n\alpha \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \log X_i + \alpha \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \log X_i , \\
-\frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma}}{\gamma} &= \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \log X_i - n \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \log X_i \right), \\
\alpha(\gamma) &= \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma}}{n\gamma \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \log X_i - \gamma \sum_{i=1}^{n} X_i^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \log X_i} . \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Vraťme se ale ke gamma rozdělení. Využijeme toho, že pro něj platí $\gamma = 1$. Pak z výrazů (2.4) a (2.5) získáme nové odhady pro parametry α a β jako

$$
\widehat{\alpha} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} \log X_i} \qquad (2.6)
$$

a

$$
\widehat{\beta} = \frac{1}{n^2} \left(n \sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} \log X_i \right) . \qquad (2.7)
$$

Často se také uvádí jiná parametrizace gamma rozdělení, v níž se nahradí parametr β parametrem $\lambda = 1/\beta$. Předchozí metodu můžeme aplikovat i na tuto parametrizaci a dostaneme odhad parametru λ jako

$$
\widehat{\lambda} = \frac{n^2}{n \sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} \log X_i} , \qquad (2.8)
$$

což je ale pouze převrácená hodnota odhadu $\widehat{\beta}$. Odhad parametru α zůstává stejný jako v (2.6).

3. Vlastnosti nových odhadů

V této kapitole se budeme věnovat vlastnostem našich nových odhadů $\widehat{\alpha}$ a $\widehat{\beta}$. Ukážeme, že jsou to silně konzistentní odhady parametrů α a β, dále odvodíme jejich asymptotické rozdělení a budeme zkoumat nestrannost. Tvrzení a jejich hrubě popsané důkazy uvádí článek (Zhi-Sheng Ye a Nan Chen, 2017). V této práci jsou ovšem uvedeny i s podrobnými výpočty, např. přesný výpočet odvození asymptotického rozdělení.

3.1 Silná konzistence

Věta 3. *Odhady $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ a $\widehat{\lambda} = 1/\widehat{\beta}$ dané výrazy* (2.6), (2.7) *a* (2.8) *jsou silně konzistentními odhady parametrů α, β a λ.*

Důkaz. Nechť $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je náhodný výběr z $\Gamma(\alpha, \beta)$ a $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Označme

$$\begin{aligned}
\overline{X}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \\
\overline{Y}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i, \\
\overline{Z}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i.
\end{aligned}$$

Z (1.2) již víme, že $\mathsf{E}\ X = \alpha\beta$. Z momentové vytvořující funkce náhodné veličiny $\log X$:

$$M_{\log X}(z) = \mathsf{E}\,[e^{z \log X}] = \mathsf{E}\ X^z \overset{(1.1)}{=} \frac{\Gamma(\alpha+z)}{\Gamma(\alpha)}\beta^z$$

odvodíme střední hodnotu náhodné veličiny $\log X$ a tedy

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[\log X] &= \frac{\partial}{\partial z} M_{\log X}(0) = \frac{\Gamma'(\alpha+z)}{\Gamma(\alpha)}\beta^z + \frac{\Gamma(\alpha+z)}{\Gamma(\alpha)}\beta^z \log\beta \bigg|_{z=0} = \\
&= \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \log\beta = \psi(\alpha) + \log\beta. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Dále počítejme:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[X\log X] &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^\alpha \log x\, e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^\alpha \log(\beta t)\, e^{-t} dt = \\
&= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{(\alpha+1)-1} \log t\, e^{-t} dt + \frac{\beta\log\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{(\alpha+1)-1}\, e^{-t} dt = \\
&= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma'(\alpha+1) + \frac{\beta\log\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1) = \alpha\beta\frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + \alpha\beta\log\beta = \\
&= \alpha\beta\left(\psi(\alpha+1) + \log\beta\right). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Silný zákon velkých čísel pro nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory nám dává

$$\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{s.\,j.} \left(\alpha\beta, \psi(\alpha) + \log\beta, \alpha\beta(\psi(\alpha+1) + \log\beta)\right).$$

Definujme dvě funkce $g_1, g_2 : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$,

$$g_1(x,y,z) = z - xy, \tag{3.3}$$
$$g_2(x,y,z) = \frac{x}{z-xy}. \tag{3.4}$$

Obě tyto funkce jsou spojité v bodě $(x,y,z) = (\alpha\beta, \psi(\alpha) + \log\beta,$ $\alpha\beta(\psi(\alpha+1) + \log\beta))$, proto použijeme větu o spojité transformaci náhodných veličin a dostaneme

$$g_1\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{s.\,j.} g_1(\alpha\beta, \psi(\alpha) + \log\beta, \alpha\beta(\psi(\alpha+1) + \log\beta)),$$
$$g_2\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{s.\,j.} g_2(\alpha\beta, \psi(\alpha) + \log\beta, \alpha\beta(\psi(\alpha+1) + \log\beta)),$$

přičemž

$$\begin{aligned} g_1\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n\right) &= \overline{Z}_n - \overline{X}_n\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \log X_i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n \log X_i = \\ &\overset{(2.7)}{=} \widehat{\beta}, \\ g_2\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n\right) &= \frac{\overline{X}_n}{\overline{Z}_n - \overline{X}_n\overline{Y}_n} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \log X_i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n \log X_i} = \\ &= \frac{n\sum_{i=1}^n X_i}{n\sum_{i=1}^n X_i \log X_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n \log X_i} \overset{(2.6)}{=} \widehat{\alpha}. \end{aligned}$$

S využitím rovnosti

$$\begin{aligned} \psi(\alpha+1) - \psi(\alpha) &\overset{(1.4)}{=} (\log\Gamma(\alpha+1) - \log\Gamma(\alpha))' = \left(\log\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\right)' = (\log\alpha)' = \\ &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \tag{3.5}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} &g_1(\alpha\beta, \psi(\alpha) + \log\beta, \alpha\beta(\psi(\alpha+1) + \log\beta)) = \\ &= \alpha\beta(\psi(\alpha+1) + \log\beta) - \alpha\beta(\psi(\alpha) + \log\beta) = \alpha\beta(\psi(\alpha+1) - \psi(\alpha)) \overset{(3.5)}{=} \beta, \end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned} &g_2(\alpha\beta, \psi(\alpha) + \log\beta, \alpha\beta(\psi(\alpha+1) + \log\beta)) = \\ &\quad = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta(\psi(\alpha+1) + \log\beta) - \alpha\beta(\psi(\alpha) + \log\beta)} = \frac{1}{\psi(\alpha+1) - \psi(\alpha)} \overset{(3.5)}{=} \alpha. \end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\widehat{\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{s.\,j.} \alpha,$$
$$\widehat{\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{s.\,j.} \beta.$$

Fakt, že $\widehat{\lambda} = 1/\widehat{\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{s.\,j.} 1/\beta = \lambda$, plyne ihned z využití věty o spojité transformaci na vztah $\widehat{\beta} \xrightarrow[n\to\infty]{s.\,j.} \beta$. □

3.2 Asymptotické rozdělení

Věta 4.

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha}-\alpha,\widehat{\beta}-\beta\right)$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{d}\mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha^2(1+\alpha\psi_1(\alpha+1)) & -\alpha\beta(1+\alpha\psi_1(\alpha+1))\\ -\alpha\beta(1+\alpha\psi_1(\alpha+1)) & \beta^2(1+\alpha\psi_1(\alpha))\end{pmatrix}\right),$$

kde $\psi_1(\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\psi(\alpha)$ *je trigamma funkce.*

Důkaz. Nejprve vyjádříme trigamma funkci jako

$$\psi_1(\alpha)=\left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)'=\frac{\Gamma''(\alpha)\Gamma(\alpha)-\Gamma'(\alpha)^2}{\Gamma^2(\alpha)}=\frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2=$$
$$=\frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\psi^2(\alpha) \tag{3.6}$$

a odvodíme vztah

$$\psi_1(\alpha+1)-\psi_1(\alpha)=(\psi(\alpha+1)-\psi(\alpha))'\overset{(3.5)}{=}\left(\frac{1}{\alpha}\right)'=-\frac{1}{\alpha^2}. \tag{3.7}$$

Nechť opět $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$. Definujeme

$$\begin{aligned}
v_\alpha &\equiv \mathsf{E}\left[\log X\right]\overset{(3.1)}{=}\psi(\alpha)+\log\beta,\\
u_\alpha &\equiv \mathsf{E}\left[\log X\right]^2=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}\log^2 x\, e^{-\frac{x}{\beta}}dx=\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\log^2(\beta t)\, e^{-t}dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(\log\beta+\log t)^2\, e^{-t}dt=\\
&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\log^2\beta\,\Gamma(\alpha)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty 2\log\beta\,\log t\, t^{\alpha-1}\, e^{-t}dt+\\
&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \log^2\beta\, t^{\alpha-1}\, e^{-t}dt=\log^2\beta+2\log\beta\,\psi(\alpha)+\frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\overset{(3.6)}{=}\\
&=\log^2\beta+2\log\beta\,\psi(\alpha)+\psi_1(\alpha)+\psi^2(\alpha)=\psi_1(\alpha)+v_\alpha^2.
\end{aligned}$$

A později zjistíme, že se nám bude hodit vztah

$$\begin{aligned}
u_{\alpha+2}&=\psi_1(\alpha+2)+v_{\alpha+2}^2\overset{(3.7)}{=}\psi_1(\alpha+1)-\frac{1}{(\alpha+1)^2}+\psi^2(\alpha+2)+\\
&\quad+2\psi(\alpha+2)\log\beta+\log^2\beta\overset{(3.5)}{=}\psi_1(\alpha+1)-\frac{1}{(\alpha+1)^2}+\\
&\quad+\left(\psi(\alpha+1)+\frac{1}{\alpha+1}\right)^2+2\left(\psi(\alpha+1)+\frac{1}{\alpha+1}\right)\log\beta+\log^2\beta=\\
&=\psi_1(\alpha+1)-\frac{1}{(\alpha+1)^2}+\psi^2(\alpha+1)+\frac{2}{\alpha+1}\psi(\alpha+1)+\frac{1}{(\alpha+1)^2}+\\
&\quad+2\psi(\alpha+1)\log\beta+\frac{2}{\alpha+1}\log\beta+\log^2\beta=\psi_1(\alpha+1)+\psi^2(\alpha+1)+\\
&\quad+2\psi(\alpha+1)\log\beta+\log^2\beta+\frac{2}{\alpha+1}\left(\psi(\alpha+1)+\log\beta\right)=\\
&=\psi_1(\alpha+1)+v_{\alpha+1}^2+\frac{2}{\alpha+1}v_{\alpha+1}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Dále počítejme

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[X\log X] &\overset{(3.2)}{=} \alpha\beta\,(\psi(\alpha+1)+\log\beta) = \alpha\beta\, v_{\alpha+1},\\
\mathsf{E}\,[X\log X]^2 &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{(\alpha+2)-1}\log^2 x\, e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \\
&= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \log^2(\beta t)\, t^{(\alpha+2)-1}\, e^{-t}dt = \\
&= \frac{\beta^2\log^2\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) + \frac{2\beta^2\log\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma'(\alpha+2) + \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma''(\alpha+2) = \\
&= \frac{\beta^2\alpha(\alpha+1)\log^2\beta}{\Gamma(\alpha+2)}\Gamma(\alpha+2) + \frac{\beta^2\alpha(\alpha+1)2\log\beta}{\Gamma(\alpha+2)}\Gamma'(\alpha+2) + \\
&\quad + \frac{\beta^2\alpha(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\Gamma''(\alpha+2) = \beta^2\alpha(\alpha+1)(\log^2\beta + \\
&\quad + 2\log\beta\,\psi(\alpha+2) + \psi_1(\alpha+2) + \psi^2(\alpha+2)) = \\
&= \beta^2\,\alpha(\alpha+1)\,u_{\alpha+2},\\
\mathsf{E}\,[X\log^2 X] &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{(\alpha+1)-1}\log^2 x\, e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \\
&= \frac{\alpha\beta}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty \log^2(\beta t)\, t^{(\alpha+1)-1}\, e^{-t}dt = \alpha\beta\, u_{\alpha+1},\\
\mathsf{E}\,[X^2\log X] &= \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{(\alpha+2)-1}\log x\, e^{-\frac{x}{\beta}}dx = \\
&= \frac{\beta^2\alpha(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\int_0^\infty \log(\beta t)\, t^{(\alpha+2)-1}\, e^{-t}dt = \beta^2\alpha(\alpha+1)\, v_{\alpha+2}.
\end{aligned}
$$

Podle centrální limitní věty pro nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory máme

$$
\sqrt{n}\left((\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n) - (\alpha\beta, v_\alpha, \alpha\beta\, v_{\alpha+1})\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}_3(\mathbf{0}, \Sigma),
$$

kde asymptotickou kovarianční matici $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^3$ spočítáme z předchozích výrazů jako

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \mathrm{var}(X) \overset{(1.3)}{=} \alpha\beta^2,\\
\sigma_{22} &= \mathrm{var}(\log X) = \mathsf{E}\,[\log X]^2 - (\mathsf{E}\,[\log X])^2 = u_\alpha - v_\alpha^2 = \psi_1(\alpha),\\
\sigma_{33} &= \mathsf{E}\,[X\log X]^2 - (\mathsf{E}\,[X\log X])^2 = \beta^2\,\alpha(\alpha+1)\,u_{\alpha+2} - \alpha^2\beta^2 v_{\alpha+1}^2 = \\
&= \alpha\beta^2\left((\alpha+1)u_{\alpha+2} - \alpha v_{\alpha+1}^2\right),\\
\sigma_{12} = \sigma_{21} &= \mathrm{cov}(X,\,\log X) = \mathsf{E}\,[X\log X] - \mathsf{E}\;X\,\mathsf{E}\,[\log X] = \alpha\beta\, v_{\alpha+1} - \alpha\beta\, v_\alpha = \\
&= \alpha\beta\,(\psi(\alpha+1) - \psi(\alpha)) \overset{(3.5)}{=} \beta,\\
\sigma_{13} = \sigma_{31} &= \mathrm{cov}(X, X\log X) = \mathsf{E}\,[X^2\log X] - \mathsf{E}\;X\,\mathsf{E}\,[X\log X] = \\
&= \beta^2\alpha(\alpha+1)\,v_{\alpha+2} - \alpha^2\beta^2 v_{\alpha+1} = \alpha\beta^2\,((\alpha+1)v_{\alpha+2} - \alpha v_{\alpha+1}) = \\
&= \alpha\beta^2(\alpha\psi(\alpha+2) + \alpha\log\beta + \psi(\alpha+2) + \log\beta - \alpha\psi(\alpha+1) - \\
&\qquad - \alpha\log\beta) = \alpha\beta^2\,(\alpha(\psi(\alpha+2) - \psi(\alpha+1)) + \psi(\alpha+2) + \log\beta) \overset{(3.5)}{=} \\
&= \alpha\beta^2\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} + \psi(\alpha+1) + \log\beta\right) = \alpha\beta^2(1 + v_{\alpha+1}),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23} = \sigma_{32} &= \operatorname{cov}(\log X, X\log X) = \mathsf{E}\left[X\log^2 X\right] - \mathsf{E}\left[\log X\right]\mathsf{E}\left[X\log X\right] = \\ &= \alpha\beta\, u_{\alpha+1} - v_\alpha\,\alpha\beta\, v_{\alpha+1} = \alpha\beta(u_{\alpha+1} - v_\alpha\, v_{\alpha+1}) = \\ &= \alpha\beta(\psi_1(\alpha+1) + v_{\alpha+1}^2 - v_\alpha\, v_{\alpha+1}) = \alpha\beta(\psi_1(\alpha+1)+ \\ &\qquad + v_{\alpha+1}(v_{\alpha+1} - v_\alpha)) \overset{(3.5)}{=} \alpha\beta\left(\psi_1(\alpha+1) + v_{\alpha+1}\frac{1}{\alpha}\right) = \\ &= \beta(\alpha\psi_1(\alpha+1) + v_{\alpha+1}).\end{aligned}$$

Nyní použijeme Δ-metodu s funkcemi g_1 a g_2 (3.3), (3.4) definované již v předchozím důkazu, o nichž víme, že

$$\begin{aligned} g_2\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n\right) &= \widehat{\alpha}, \\ g_1\left(\overline{X}_n, \overline{Y}_n, \overline{Z}_n\right) &= \widehat{\beta}, \\ g_2(\mathsf{E}\ X,\ \mathsf{E}\left[\log X\right],\ \mathsf{E}\left[X\log X\right]) &= \alpha, \\ g_1(\mathsf{E}\ X,\ \mathsf{E}\left[\log X\right],\ \mathsf{E}\left[X\log X\right]) &= \beta. \end{aligned}$$

Potom

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = \frac{z}{(z-xy)^2}, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x^2}{(z-xy)^2}, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-x}{(z-xy)^2}, \\ &\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = -y, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = -x, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 1, \end{aligned}$$

a tedy pro $G(x,y,z) = (g_2(x,y,z), g_1(x,y,z))$ máme

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \nabla G(\mathsf{E}\ X,\ \mathsf{E}\left[\log X\right],\ \mathsf{E}\left[X\log X\right]) = \nabla G(\alpha\beta, v_\alpha, \alpha\beta\, v_{\alpha+1}) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha\, v_{\alpha+1}}{\beta} & \alpha^2 & -\frac{\alpha}{\beta} \\ -v_\alpha & -\alpha\beta & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x}(\alpha\beta, v_\alpha, \alpha\beta\, v_{\alpha+1}) &= \frac{\alpha\beta\, v_{\alpha+1}}{(\alpha\beta\, v_{\alpha+1} - \alpha\beta\, v_\alpha)^2} = \frac{\alpha\beta\, v_{\alpha+1}}{\alpha^2\beta^2(v_{\alpha+1} - v_\alpha)^2} \overset{(3.5)}{=} \frac{\alpha\, v_{\alpha+1}}{\beta}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(\alpha\beta, v_\alpha, \alpha\beta\, v_{\alpha+1}) &= \frac{\alpha^2\beta^2}{\beta^2} = \alpha^2, \\ \frac{\partial g_2}{\partial z}(\alpha\beta, v_\alpha, \alpha\beta\, v_{\alpha+1}) &= \frac{-\alpha\beta}{\beta^2} = -\frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

A z Δ-metody nakonec

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha} - \alpha, \widehat{\beta} - \beta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}_2(\mathbf{0}, \mathbb{A}\Sigma\mathbb{A}^\top),$$

kde

$$\begin{aligned}\Sigma &= \begin{pmatrix} \alpha\beta^2 & \beta & \alpha\beta^2(1+v_{\alpha+1}) \\ \beta & \psi_1(\alpha) & \beta(\alpha\psi_1(\alpha+1) + v_{\alpha+1}) \\ \alpha\beta^2(1+v_{\alpha+1}) & \beta(\alpha\,\psi_1(\alpha+1) + v_{\alpha+1}) & \alpha\beta^2((\alpha+1)\,u_{\alpha+2} - \alpha\, v_{\alpha+1}^2) \end{pmatrix}, \\ \mathbb{A}^\top &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha\, v_{\alpha+1}}{\beta} & -v_\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha\beta \\ -\frac{\alpha}{\beta} & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Prvky $\Sigma\mathbb{A}^\top$ pak spočteme jako

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \alpha^2\beta\, v_{\alpha+1} + \alpha^2\beta - \alpha^2\beta(1+v_{\alpha+1}) = 0,\\
a_{21} &= \alpha\, v_{\alpha+1} + \alpha^2\psi_1(\alpha) - \alpha^2\psi_1(\alpha+1) - \alpha\, v_{\alpha+1} = \alpha^2(\psi_1(\alpha) - \psi_1(\alpha+1)) \overset{(3.7)}{=} 1,\\
a_{31} &= \alpha^2\beta\,(v_{\alpha+1}(1+v_{\alpha+1}) + \alpha\,\psi_1(\alpha+1) + v_{\alpha+1} - (\alpha+1)\,u_{\alpha+2} + \alpha\, v_{\alpha+1}^2) =\\
&\overset{(3.8)}{=} \alpha^2\beta\,(2v_{\alpha+1} + (\alpha+1)\,v_{\alpha+1}^2 + \alpha\,\psi_1(\alpha+1) - (\alpha+1)\,\psi_1(\alpha+1) - 2v_{\alpha+1} -\\
&\qquad - (\alpha+1)\,v_{\alpha+1}^2) = \alpha^2\beta\,((\alpha-\alpha-1)\psi_1(\alpha+1)) = -\alpha^2\beta\,\psi_1(\alpha+1),\\
a_{12} &= -\alpha\beta^2\, v_\alpha - \alpha\beta^2 + \alpha\beta^2(1+v_{\alpha+1}) = \alpha\beta^2(v_{\alpha+1} - v_\alpha) \overset{(3.5)}{=} \beta^2,\\
a_{22} &= -\beta\, v_\alpha - \alpha\beta\,\psi_1(\alpha) + \alpha\beta\,\psi_1(\alpha+1) + \beta\, v_{\alpha+1} =\\
&= \beta\,(v_{\alpha+1} - v_\alpha + \alpha\,(\psi_1(\alpha+1) - \psi_1(\alpha))) \overset{(3.5),(3.7)}{=} \beta\,(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}) = 0,\\
a_{32} &= -\alpha\beta^2\, v_\alpha(1+v_{\alpha+1}) - \alpha\beta^2(\alpha\,\psi_1(\alpha+1) + v_{\alpha+1}) +\\
&\qquad + \alpha\beta^2((\alpha+1)\,u_{\alpha+2} - \alpha\, v_{\alpha+1}^2) \overset{(3.8)}{=} \alpha\beta^2(-v_\alpha(1+v_{\alpha+1}) - \alpha\,\psi_1(\alpha+1) -\\
&\qquad - v_{\alpha+1} + (\alpha+1)\,\psi_1(\alpha+1) + 2\, v_{\alpha+1} + (\alpha+1)\, v_{\alpha+1}^2 - \alpha\, v_{\alpha+1}^2) =\\
&= \alpha\beta^2(\psi_1(\alpha+1) + v_{\alpha+1} + v_{\alpha+1}^2 - v_\alpha(1+v_{\alpha+1})) = \alpha\beta^2(\psi_1(\alpha+1) +\\
&\qquad = (1+v_{\alpha+1})(v_{\alpha+1} - v_\alpha)) \overset{(3.5)}{=} \beta^2(\alpha\,\psi_1(\alpha+1) + 1 + v_{\alpha+1}).
\end{aligned}$$

Celkem potom

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}\Sigma\mathbb{A}^\top =\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\alpha\, v_{\alpha+1}}{\beta} & \alpha^2 & -\frac{\alpha}{\beta} \\ -v_\alpha & -\alpha\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta^2 \\ 1 & 0 \\ -\alpha^2\beta\,\psi_1(\alpha+1) & \beta^2(\alpha\,\psi_1(\alpha+1) + 1 + v_{\alpha+1}) \end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix} \alpha^2(1+\alpha\psi_1(\alpha+1)) & -\alpha\beta(1+\alpha\psi_1(\alpha+1)) \\ -\alpha\beta(1+\alpha\psi_1(\alpha+1)) & \beta^2(1+\alpha\psi_1(\alpha)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

kde prvky této matice jsou spočítány jako

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \alpha^2 + \alpha^3\,\psi_1(\alpha+1) = \alpha^2(1+\alpha\psi_1(\alpha+1)),\\
b_{12} &= \alpha\beta\, v_{\alpha+1} - \alpha\beta(\alpha\,\psi_1(\alpha+1) + 1 + v_{\alpha+1}) = -\alpha\beta(\alpha\,\psi_1(\alpha+1) + 1),\\
b_{21} &= -\alpha\beta - \alpha^2\beta\,\psi_1(\alpha+1) = -\alpha\beta(1 + \alpha\,\psi_1(\alpha+1)),\\
b_{22} &= -\beta^2\, v_\alpha + \beta^2(\alpha\,\psi_1(\alpha+1) + 1 + v_{\alpha+1}) = \beta^2(\alpha\,\psi_1(\alpha+1) + 1 + v_{\alpha+1} - v_\alpha) =\\
&\overset{(3.7)}{=} \beta^2\left(\alpha\,\psi_1(\alpha) - \frac{\alpha}{\alpha^2} + 1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \beta^2(\alpha\,\psi_1(\alpha) + 1).
\end{aligned}$$

□

Z důkazu této věty získáváme asymptotické rozptyly našich nových odhadů. Pro $\widehat{\alpha}$ je to $\alpha^2(1+\alpha\psi_1(\alpha+1))$ a pro $\widehat{\beta}$ je asymptotický rozptyl $\beta^2(1+\alpha\,\psi_1(\alpha))$.

3.3 Nestrannost

V této části ukážeme, jak lze získat nestranný odhad parametru β pouhou úpravou odhadu $\widehat{\beta}$. Článek (Zhi-Sheng Ye a Nan Chen, 2017) také uvádí, že nestranný odhad parametru α z odhadu $\widehat{\alpha}$ získat nelze, ale lze odhad $\widehat{\alpha}$ upravit tak, aby byl nestranným odhadem parametru $1/\alpha$.

Věta 5. *Nestranný odhad parametru β je*

$$\widetilde{\beta} = \frac{n}{n-1}\widehat{\beta} = \frac{1}{n(n-1)}\left(n\sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i=1}^{n}\log X_i \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

a nestranný odhad parametru $1/\alpha$ je

$$\widetilde{\alpha^{-1}} = \frac{n}{n-1}\widehat{\alpha}^{-1} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i=1}^{n}\log X_i \sum_{i=1}^{n} X_i}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} X_i}.$$

Důkaz. V této práci uvedeme důkaz pouze první části. Důkaz nestrannosti odhadu $\widetilde{\alpha^{-1}}$ je technicky náročný a je uveden v článku (Zhi-Sheng Ye a Nan Chen, 2017).

Nejdříve vyjádříme $\widehat{\beta}$ jako

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta} &\overset{(2.7)}{=} \frac{1}{n^2}\left(n\sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i=1}^{n}\log X_i \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n\sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i\neq j}^{n} X_i \log X_j\right) = \\
&= \frac{1}{n^2}\left((n-1)\sum_{i=1}^{n} X_i \log X_i - \sum_{i\neq j}^{n} X_i \log X_j\right),
\end{aligned}$$

Přičemž X_i jsou stále nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny z $\Gamma(\alpha, \beta)$ a veličiny X_i a $\log X_j$ jsou nezávislé právě tehdy, když $i \neq j$. Na základě odvozených momentů (1.2), (3.1), a (3.2) z důkazů předchozích vět počítejme

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,\widehat{\beta} &= \frac{1}{n^2}\left((n-1)\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left[X_i \log X_i\right] - \sum_{i\neq j}^{n} \mathsf{E}\,X_i\,\mathsf{E}\,\log X_j\right) = \\
&= \frac{1}{n^2}\{(n-1)n\alpha\beta\left(\psi(\alpha+1) + \log\beta\right) - \\
&\qquad - n(n-1)\alpha\beta(\psi(\alpha) + \log\beta)\} \overset{(3.5)}{=} \frac{n-1}{n}\beta.
\end{aligned}$$

Pak tedy nestranný odhad parametru β je $\dfrac{n}{n-1}\beta$. □

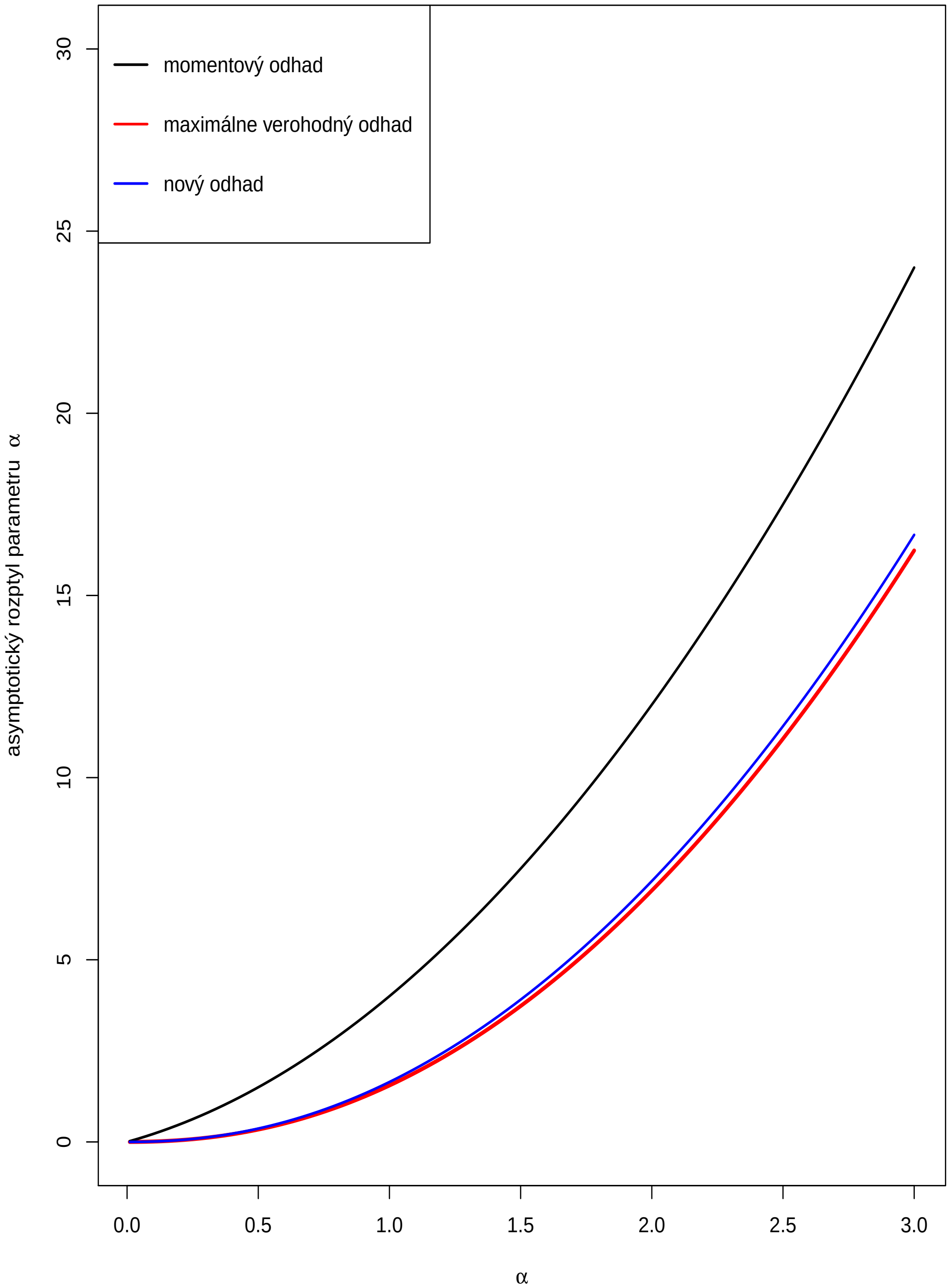
4. Porovnání odhadů

V této kapitole porovnáme asymptotické rozptyly všech tří odhadů parametrů α a β, tedy maximálně věrohodných, momentových a našich nových odhadů. Asymptotický rozptyl značený $\operatorname{avar}(\widehat{\alpha})$ budeme chápat jako rozptyl odhadu $\sqrt{n}(\widehat{\alpha} - \alpha)$ a podobně pro ostatní odhady. Z předchozích kapitol víme, že

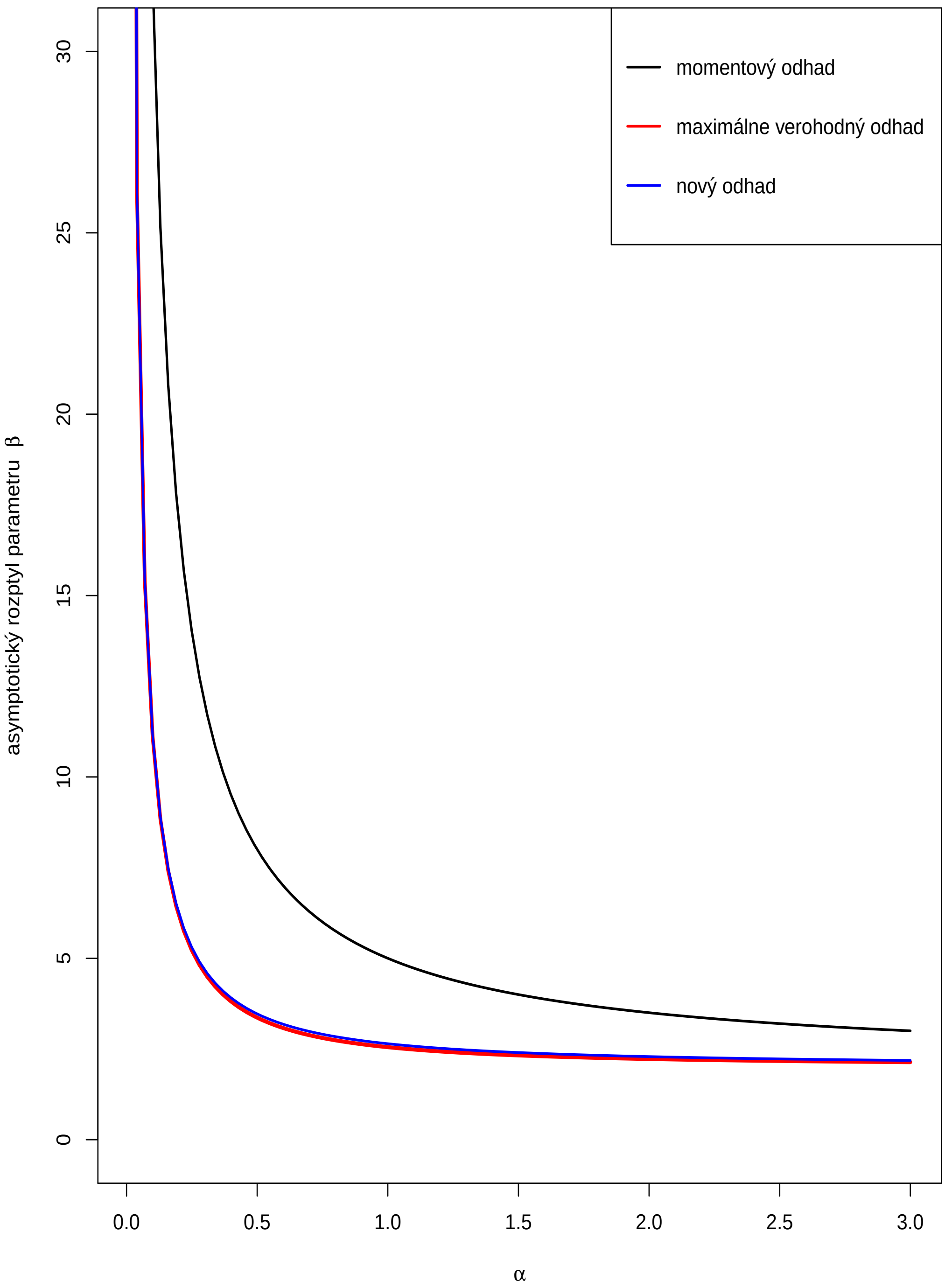
$$\begin{aligned}
\operatorname{avar}(\widehat{\alpha}_{ML}) &= \frac{\alpha}{\alpha\psi_1(\alpha) - 1}, & \operatorname{avar}(\widehat{\beta}_{ML}) &= \frac{\beta^2\psi_1(\alpha)}{\alpha\psi_1(\alpha) - 1},\\
\operatorname{avar}(\widehat{\alpha}_m) &= 2(\alpha+1)\alpha, & \operatorname{avar}(\widehat{\beta}_m) &= \frac{\beta^2(2\alpha+3)}{\alpha},\\
\operatorname{avar}(\widehat{\alpha}) &= \alpha^2(1 + \alpha\psi_1(\alpha+1)), & \operatorname{avar}(\widehat{\beta}) &= \beta^2(1 + \alpha\,\psi_1(\alpha)).
\end{aligned}$$

Protože asymptotické rozptyly odhadů $\widehat{\beta}_{ML}/\beta$, $\widehat{\beta}_m/\beta$, $\widehat{\beta}/\beta$ už nezávisí na parametru β, porovnáme tak odhady pouze v závislosti na parametru α. Jak už je v první kapitole uvedeno, z knihy (Anděl, 2007) víme, že asymptotické rozptyly maximálně věrohodných odhadů dosahují dolní Rao-Cramérovy meze. A protože explicitně vyjádřené rozdíly asymptotických rozptylů by nám na první pohled odhady neporovnaly tak, abychom si o nich udělali představu, srovnáme výrazy numericky.

Na obrázcích 4.1 a 4.2 porovnáváme průběh funkcí popisující asymptotické rozptyly odhadů parametrů α a β pro $\alpha \in [0{,}01; 3]$. Vidíme, že asymptotické rozptyly obou našich nových odhadů velmi dobře aproximují asymptotické rozptyly maximálně věrohodných odhadů, zatímco asymptotické rozptyly momentových odhadů se od nich výrazně vzdalují.



Obrázek 4.1: Asymptotické rozptyly odhadů $\widehat{\alpha}_{ML}$, $\widehat{\alpha}_m$ a $\widehat{\alpha}$ v závislosti na parametru α.



Obrázek 4.2: Asymptotické rozptyly odhadů $\widehat{\beta}_{ML}/\beta$, $\widehat{\beta}_m/\beta$, $\widehat{\beta}/\beta$ v závislosti na parametru α.

Závěr

Odvodili jsme momentové odhady parametrů gamma rozdělení a jejich asymptotické rozdělení. Vyjádřili jsme rovnice pro maximálně věrohodné odhady a z nich jsme zjistili, že tyto odhady lze spočítat jedině numericky. Přestože neznáme jejich explicitní vyjádření, dokázali jsme určit jejich asymptotické rozdělení.

Dále se v práci popisuje metoda, díky níž jsme odvodili naše nové odhady. Vychází z věrohodnostních rovnic pro zobecněné gamma rozdělení a přesto mají explicitní vyjádření. Dále jsme se zabývali vlastnostmi těchto nových odhadů. Dokázali jsme jejich silnou konzistenci, určili jsme jejich asymptotické rozdělení a pokusili jsme se upravit naše nové odhady tak, aby byly nestranné. Nakonec jsme porovnali asymptotické rozptyly všech tří možných odhadů parametrů gamma rozdělení a zjistili jsme, že naše nové odhady velmi dobře aproximují maximálně věrohodné odhady, což je dobrý výsledek.

Seznam použité literatury

ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.

LAWLESS, J. F. (1980). Inference in the generalized gamma and log gamma distributions. *Technometrics*, **22**(3), 409–419. doi: 10.1080/00401706.1980.10486173. URL `https://amstat.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1980.10486173`.

STACY, E. W. (1962). A generalization of the gamma distribution. *Ann. Math. Statist.*, **33**(3), 1187–1192. doi: 10.1214/aoms/1177704481. URL `https://doi.org/10.1214/aoms/1177704481`.

ZHI-SHENG YE a NAN CHEN (2017). Closed-form estimators for the gamma distribution derived from likelihood equations. *The American Statistician*, **71** (2), 177–181. doi: 10.1080/00031305.2016.1209129. URL `https://doi.org/10.1080/00031305.2016.1209129`.

Seznam obrázků