

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jan Vraštil

Asteroidy vnitřního pásu ve spin-orbitální resonanci

Astronomický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. David Vokrouhlický DrSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FA

Praha 2013

Rád bych zde poděkoval zejména profesoru D. Vokrouhlickému, za spoustu času, kterého strávil při odborných konzultacích, radách a konstruktivních připomínkách. Zároveň však také musím poděkovat za pevné nervy při opravě mých pravopisných chyb – zejména pak vyjmenovaných slov a shody podmětu s přísudkem.

Dále bych chtěl poděkovat Pepovi Ďurechovi spolu s Pepou Hanušem za pomoc při analýze světelných křivek, následném rozboru výsledků a nakonec za postřehy a doporučení při samotném psaní práce.

Závěrem musím určitě poděkovat rodině za jazykové a matematické připomínky k práci, které se jistě podepsaly na celkové úrovni této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne

Podpis autora

Název práce: Asteroidy vnitřního pásu ve spin-orbitální resonanci

Autor: Jan Vraštil

Katedra: Astronomický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. David Vokrouhlický DrSc., Astronomický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt:

Souvislosti: V minulosti byly ve vnější části hlavního pásu objeveny asteroidy, jejichž rotační osy jsou téměř rovnoběžné. Působením YORP efektu se z původně náhodných směrů postupně stáčely, až se zachytily ve spi-orbitální resonanci s frekvencí s_6 .

Cíl: Ve vnitřní části hlavního pásu je kinematika orbitálního pohybu značně složitější, což je způsobeno hlavně blízkostí vlastní frekvence s a rezonanční frekvence s_6 . Přesto ukážeme, že i v těchto částech se mohou nacházet asteroidy ve spin-orbitální resonanci – asteroid 20 Massalia.

Metodika: Ke studiu pohybu orbitálního pohybu jsme použili integrátor SWIFT. Vývoj rotační jsme zkoumali za pomoci programu, který je popsán v kapitole 3, a jeho výpis je součástí dodatků. K určení směru rotační osy a tvaru asteroidů jsme použili metodu inverze světelných křivek.

Výsledky: Asteroidy ve vnitřní části hlavního pásu, které mají nízký vlastní sklon I , se mohou (při vhodně orientované rotační ose) dlouhodobě udržet ve spin-orbitální resonanci se sekulární frekvencí s_6 . Naopak pro asteroidy s vysokými sklony je zachycení velmi obtížné, ne-li nemožné.

Klíčová slova: hlavní pás, asteroidy, spin-orbitální rezonance, Slivanovy stavy

Title: Inner belt asteroids in the spin-orbital resonance

Author: Jan Vrařtil

Department: Astronomical Institute of Charles University in Prague

Supervisor: prof. RNDr. David Vokrouhlický DrSc., Astronomical Institute of Charles University in Prague

Abstract:

Context: Slivan (2002) determined spin state of ten asteroids in the Koronis family. Surprisingly, all four asteroids with prograde sense of rotation were shown to have spin axes nearly parallel in the inertial space. All asteroids with retrograde sense of rotation had large obliquities and rotation periods either short or long. It was shown that Yarkovsky–O’Keefe–Radzievskii–Paddack (YORP) effect can explain all these peculiar facts. In particular, it drives spin axes of the prograde rotators to be captured in a secular spin-orbital resonance known as Cassini state 2. Vokrouhlický et al. (2002) dubbed these configurations "Slivan states".

Aims: A question arises whether Slivan states could exist also in other regions of the main asteroid belt, in particular its inner part, where observations are most easily obtained. Here, however, dynamical difficulties arise due to convergence of the proper frequency s and the planetary frequency s_6 . We investigate possibilities of a long-term stable capture in the Slivan state in the inner part of the main belt.

Method: We used SWIFT integrator to determine orbital evolution of selected asteroids in the inner part of the main belt. In the case of 20 Massalia, we observed the asteroid in 2011, and used these new data to help better solve the rotation state using the lightcurve inversion method developed originally by M. Kaasalainen. Finally, we wrote and debugged numerical code, which is able to efficiently simulate secular evolution of the asteroid’s spin axis. This tool is used to study stability of the Slivan states in the inner part of the main belt.

Results: We find that stable Slivan states can exist in the inner part of the main belt provided proper orbital inclination is small (e.g., the case of asteroid 20 Massalia). However, when the proper inclination value is too large, or the asteroid in the innermost part of the asteroid belt (Flora region), long-term stability of the Slivan states is impossible.

Keywords: main belt, asteroids, spin-orbital resonance, Slivan states

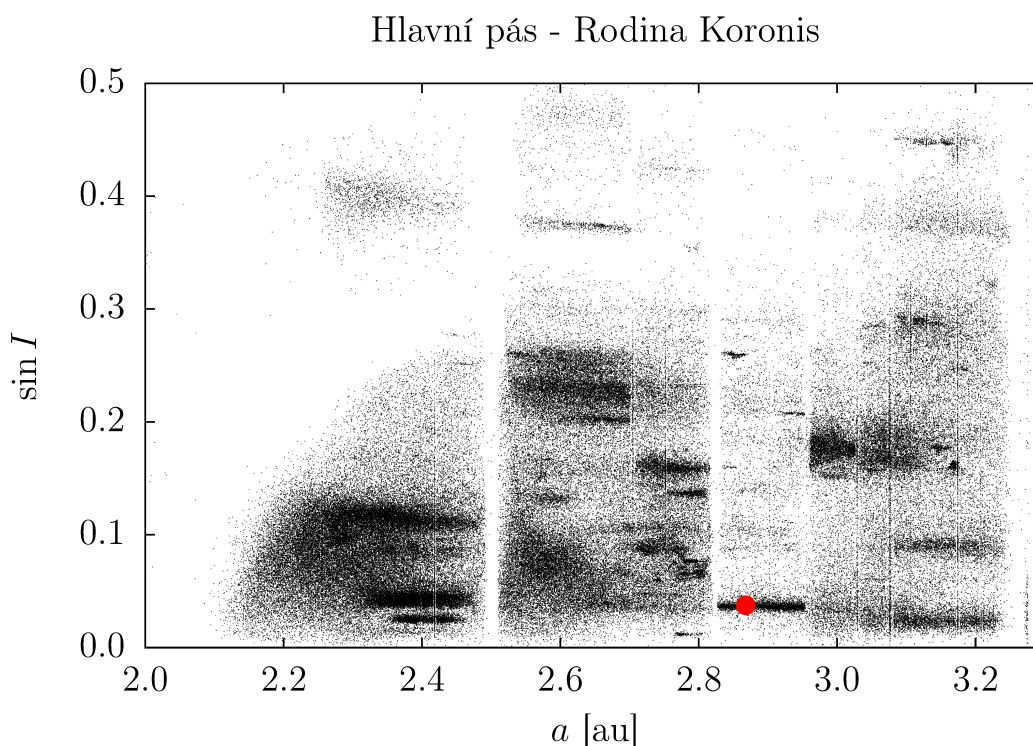
Obsah

1	Úvod	3
2	Popis Cassiniho dynamiky	8
2.1	Gravitační moment síly a model fixní dráhy	9
2.2	Precese dráhy a Colombův model	17
2.2.1	Hamiltonovský popis	20
2.2.2	Cassiniho stavy	28
3	Numerický integrátor	32
3.1	Přímé Lieovy–Poissonovy integrátory	33
3.1.1	Rozdělení Hamiltoniánu na tři části	34
3.1.2	Rozdělení Hamiltoniánu na dvě části	36
3.1.3	Leapfrogging	38
4	Asteroid 20 Massalia – kompletní analýza dat	39
4.1	Fotometrická data	39
4.2	Hledání rotační periody	45
4.3	Hledání pólů a určení tvaru	47
4.4	Vývoj dráhy a Fourierova spektrální analýza	52
4.5	Podmínky Cassiniho stavu 2	58
5	Možné Slivanovy stavy v rodině Flora	67
5.1	291 Alice	70
5.2	700 Auravictrix	78
6	Diskuse přesnosti parametru Δ	87
7	Závěr	92
	Literatura	93
	Seznam použitých zkratk a konstant	97
	Seznam označení	98
	Přílohy	100
A	Obrazová příloha	101
A.1	367 Amicitia	102
A.2	770 Bali	104
A.3	800 Kressmannia	106
A.4	825 Tanina	108
A.5	915 Cosette	109
A.6	937 Bethgea	112
A.7	951 Gaspra	114
A.8	1514 Ricouxa	115
A.9	1675 Simonida	116

A.10 1682 Karel	118
A.11 2017 Wesson	120
B Tenzor setrvačnosti	122
C Integrátor rotace	129
D Diskrétní Fourierova transformace	136
E Pomocné výpočty	148

1. Úvod¹

V roce 2002 studoval Slivan směry rotačních os asteroidů v rodině Koronis [30]. Tato asteroidální rodina leží ve vnější části Hlavního pásu asteroidů (viz obrázek 1.1). Její stáří se odhaduje na 2.5 miliard let. Členové této rodiny mají nízké vlastní sklony $\approx 2^\circ$, což se v pozdějších částech této práce ukáže jako zásadní podmínka, pro dlouhodobé stabilní udržení asteroidu ve spin-orbitální rezonanci. Jde navíc o velkou rodinu – celkový počet známých členů je skoro 6000, ale asteroidů s průměrem větším než 20 km je jen 20. Dokonce jde o jednu z prvních objevených asteroidálních rodin v roce 1918 Hirajamou. Metodou inverze světelných křivek (popsanou Kaasalainenem v článcích [19] a [20]) Slivan určil směry rotačních os deseti asteroidů z této rodiny. V tabulce 1.1 jsou vidět výsledky pro zmíněné asteroidy a na obrázku 1.4 jsou vidět směry rotačních os pro jednotlivé asteroidy (převzato ze Slivanovy práce [32]).²



Obrázek 1.1: Na obrázku je vynesena vlastní velká poloosa a a sklon I pro prvních 200 000 asteroidů v databázi AstDys [2]. Červeným bodem je zde vyznačen asteroid 158 Koronis.

Písmenem ε je označena obliquita, kterou rozumíme úhel sevřený rotační osou a normálou k rovině oběžné dráhy. Na první pohled je zřejmé, že směry os nejsou rozděleny náhodně. Takové rozdělení bychom neočekávali, neboť asteroidální rodiny vznikají srážkou dvou asteroidů a úlomky (které pak tvoří jednotlivé členy rodiny) jsou vyvrženy do okolí s různou počáteční rychlostí a také s různě orientovanými rotačními osami. Jak je ale vidět, tyto osy rozhodně náhodně orien-

¹V celé práci (pokud není řečeno jinak) je používána notace, označení veličin a konstant, popřípadě jejich hodnoty a jednotky uvedené v tabulkách 7.2, 7.3 a 7.4 na stranách 97 až 99.

²Dále se Slivan zabývá rodinou Koronis v článcích [31] a [33].

	Asteroid	$\varepsilon[^\circ]$
158	Koronis	159
167	Urda	163
208	Lacrimosa	156
243	Ida	156
277	Elvira	169
321	Florentina	154
534	Nassovia	42
311	Claudia	50
720	Bohlinia	50
1223	Neckar	47

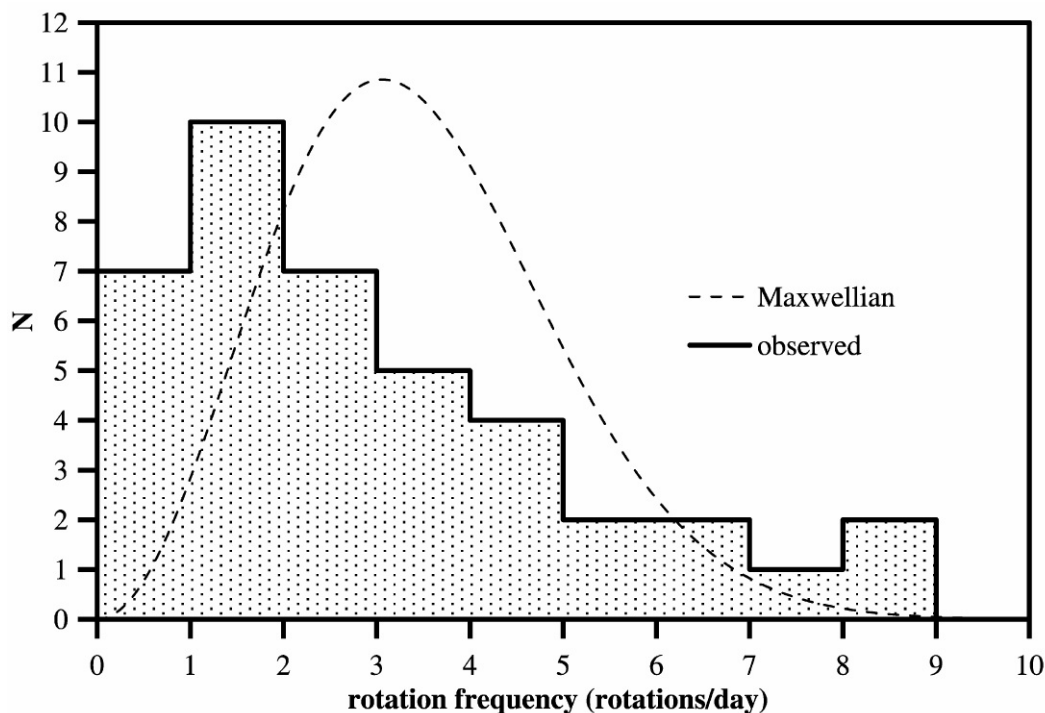
Tabulka 1.1: Hodnoty obliquity ε pro asteroidy určené Slivanem [30].

tované nejsou, naopak zdá se, že existují dva směry, které jsou upřednostňovány před ostatními. Ve skutečnosti dokonce rotační osy prográdně rotujících asteroidů míří v inerciálním prostoru téměř rovnoběžnými směry. Musíme však říci, že metodou inverze světelných křivek dostal Slivan pro každý asteroid dvě možná řešení rotačního pólu. Obě dvě řešení mají velmi podobnou ekliptikální šířku β , ale zhruba o $\approx 180^\circ$ se liší délka λ . Hodnoty v tabulce 1.1 platí pro obě dvě možná řešení, avšak tvrzení o rovnoběžnosti rotačních os prográdních rotátorů bude platit pouze pro jedno řešení.

Na základě úvah o vzniku asteroidální rodiny by se dalo očekávat, že i rotační periody budou mít náhodné (Maxwellovo) rozdělení. Jak však ze Slivanových pozorování a následně i publikovaného článku [31] vyplývá, existuje v oblasti pomalých a rychlých rotátorů výrazně vyšší počet asteroidů, než jak by odpovídalo Maxwellovu rozdělení. Naopak v oblasti středních rotačních period lze pozorovat výrazně menší počet těles. Na obrázku 1.2 lze porovnat pozorované hodnoty a předpokládané rozdělení. Obrázek byl převzat ze Slivanovy práce [31], na vodorovné ose je vynesena rotační frekvence v jednotkách d^{-1} , na svislé ose N označuje počet pozorovaných asteroidů, které rotují s danou frekvencí.

Rok poté, co Slivan publikoval svůj první článek o zvláště orientovaných směrech rotačních os asteroidů v rodině Koronis, přišel Vokrouhlický et al. s vysvětlením celého problému. V článku [40] je objasněna jak orientace rotačních os všech zkoumaných asteroidů, tak přebytek rychlých a pomalých rotátorů. Fyzikálním mechanismem, který toto způsobuje je YORP efekt. Ten dokáže za dobu 2.5 miliard let při vhodně zvolených počátečních podmínkách naklonit rotační osu tak, aby se dostala do oblasti spin-orbitální rezonance (viz obrázek 1.3, převzato z [40]), která je schopná zadržet rotační osu na časových škálách miliard let, než se opět působením YORPu z této oblasti uvolní. Tento efekt tedy dokáže vysvětlit, jak je možné, že pozorujeme velké množství asteroidů, které rotují s podobně orientovanými osami.

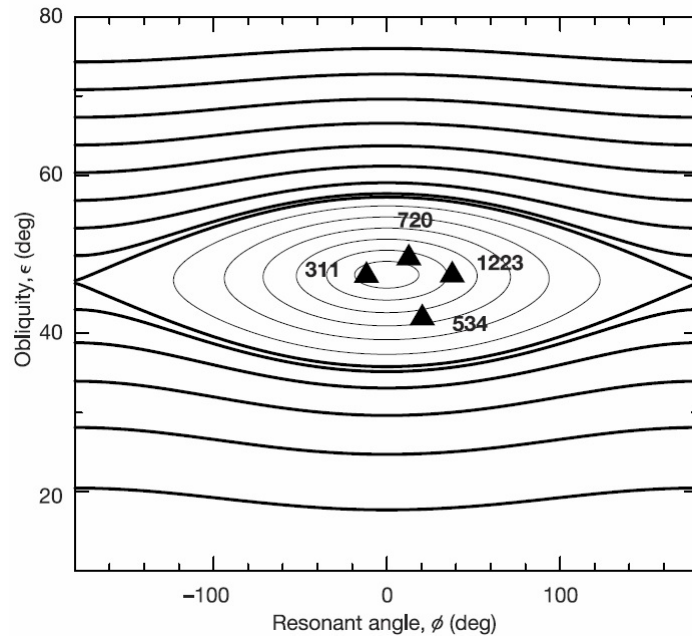
YORP efekt je elegantním řešením pro celý problém, který v rodině Koronis pozorujeme, protože dokáže navíc vysvětlit přebytek rychlých a pomalých rotátorů, oproti původnímu předpokladu. Různá údolí, krátery nebo naopak vyvýšeniny na povrchu asteroidu způsobí, že odražené a vyzářené světlo, které s sebou odnáší i malou část hybnosti asteroidu, neodlétá ve stejném směru, ve kterém na asteroid dopadlo. To pak na rozdíl od klasického Yarkovského jevu, který mění



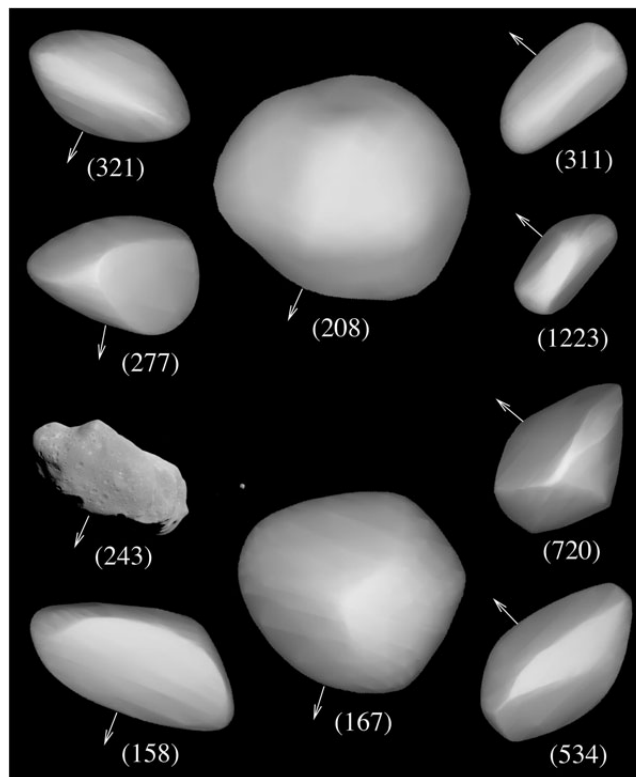
Obrázek 1.2: Převzato ze Slivanovy práce [31]. Na vodorovné ose je vynesena rotační frekvence v jednotkách d^{-1} a na svislé je počet asteroidů. Přerušovanou čarou je vyznačeno očekávané Maxwelllovo rozdělení. Plnou čarou jsou pak vyneseny pozorované počty asteroidů s danou frekvencí.

velkou poloosu a , způsobí, že se rotační osa asteroidu naklání v prostoru. Vyzařené fotony také fungují jako reakční pohon, který dlouhodobě zrychluje nebo zpomaluje rotaci asteroidu. Tím pak lze vysvětlit přebytek rychlých a pomalých rotátorů v rodině Koronis. Teorii YORP efektu lze najít v některém z přehledových článků – například v [27] nebo [4].

Stejná fyzikální podstata, která dokáže udržet rotační osy asteroidů po dlouhou dobu v rovnoběžných směrech, funguje i na mnohem větších hmotnostních škálách. V podobném stavu, ve kterém se nacházejí retrográdní asteroidy v rodině Koronis, se pravděpodobně nachází Venuše. Naopak stejně jako v případě prográdních asteroidů se v podobné rezonanci (s planetární frekvencí s_8 , která přísluší Neptunu) může nacházet rotační osa Saturnu. V podobných stavech se pak nachází také například náš Měsíc a Merkur. Samozřejmě otázkou pak je, jak se dokázali tato velká tělesa do těchto stavů dostat, protože YORP efekt je pro takto hmotné objekty naprosto zanedbatelný a na časových škálách existence Vesmíru není schopen změnit směr rotační osy ani rotační rychlost. Tyto otázky byly podrobně řešeny, ale jejich diskuse přesahuje rámec této diplomové práce.



Obrázek 1.3: Převzato z práce [40]. Úhel ϕ je shodný s úhlem φ používaným v této práci. Souřadný systém se stáčí rovnoměrně v inerciálním prostoru s frekvencí $s_6 = -26.33''/\text{rok}$. Odečítá se v rovině dráhy asteroidu od kolmice k uzlové přímce ve směru orbitálního pohybu směrem k průmětu vektoru \mathbf{s} , což je jednotkový vektor mířící ve směru rotační osy – viz obrázek 2.8 na straně 27.



Obrázek 1.4: Převzato ze Slivanovy práce [32]. Na obrázku jsou zobrazeny směry rotačních os pro 10 asteroidů, které Slivan studoval. Kolmice k ekliptice míří na tomto obrázku směrem nahoru.

Vnitřní část hlavního pásu

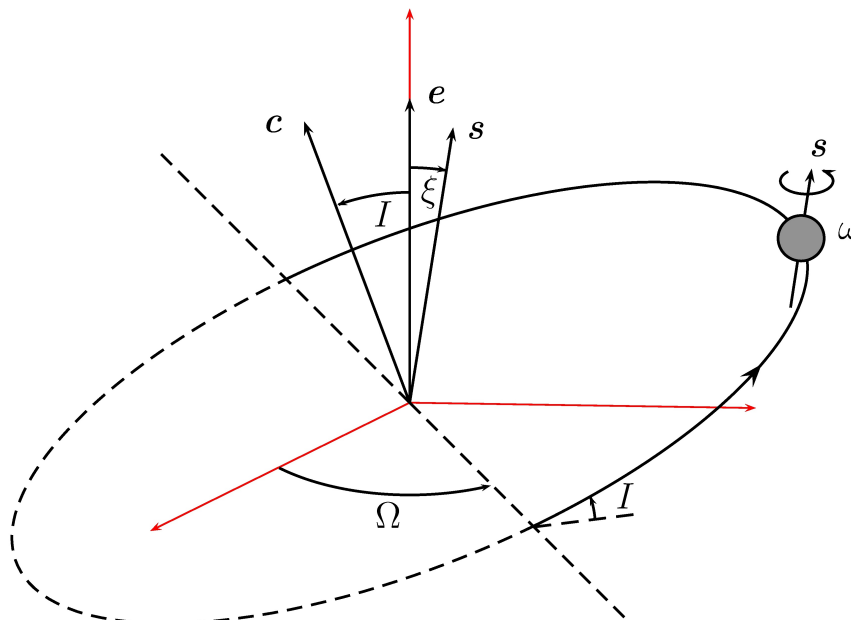
Na rozdíl od Slivana se budeme v této práci zabývat asteroidy ve vnitřní části hlavního pásu. Vzhledem k menší vzdálenosti jsou tyto asteroidy observačně výhodnější a i s malými dalekohledy lze pořídit kvalitní data. V první teoreticky laděné kapitole odvodíme pohybové rovnice, které popisují vývoj rotační osy asteroidu. V další části naznačíme princip integrátoru, který umí efektivně tyto pohybové rovnice řešit a který je k dispozici na přiloženém CD. Ve třetí kapitole se pak zabýváme analýzou fotometrických dat asteroidu 20 Massalia, jejich zpracováním a určením směru rotační osy a tvaru asteroidu. Na příkladech asteroidů z rodiny Flora pak ukážeme rozdílné možnosti pro zachycení těchto asteroidů ve spin-orbitální rezonanci. V poslední kapitole pak krátce diskutujeme přesnost určení tvaru metodou inverze světelných křivek. Na vybraných asteroidech, u kterých známe přesné tvary z průletů vesmírných sond nebo z radarových pozorování, ukážeme srovnání těchto tvarů s modely získanými metodou inverze světelných křivek.

2. Popis Cassiniho dynamiky³

Z historického kontextu zde uvádíme Cassiniho zákony o pohybu Měsíce, přestože se jinak v práci zabýváme pouze asteroidy. Na následujících stránkách je ukázáno odvození rovnice precese rotační osy asteroidu. Pro případ Měsíce by výpočet probíhal podobně s tím rozdílem, že při spin-orbitální rezonanci 1 : 1, což je právě případ Měsíce, je pak třeba přistupovat jinak při středování momentu síly působícího na těleso přes orbitální oběh a přes vlastní rotaci (lze najít například v Pealově práci [29]).

V roce 1693 Domenico Cassini formuloval 3 zákony pojednávající o rotačním stavu Měsíce:

1. Střední rotační perioda rotace Měsíce je rovna střední oběžné periodě kolem Země (spin-orbitální rezonance 1 : 1).
2. Rotační osa Měsíce s a normála k ekliptice e – viz obrázek 2.1 – udržují stálý vzájemný úhel $\xi \approx 1^\circ 32'$, vektor s tedy preceduje kolem vektoru e po kuželi s tímto vrcholovým úhlem.
3. Normálový vektor k dráze Měsíce c leží spolu s vektory e a s stále v jedné rovině, tj. s leží stále v rovině definované vektory e a c . Analogicky se 3. zákon někdy formuluje takto: výstupní uzel lunární dráhy je stále shodný se sestupným uzlem lunárního rovníku.



Obrázek 2.1: K popisu Cassiniho zákonů. Oběžná dráha Měsíce je pootočena o úhel Ω a je nakloněna o úhel I vůči referenční rovině. Jednotkový vektor c je kolmý na orbitální rovinu, vektor e má také jednotkovou velikost a je kolmý na rovinu ekliptiky. Jednotkový vektor s míří ve směru rotační osy Měsíce, který rotuje s úhlovou rychlostí ω .

³V této kapitole je použito stejné nebo podobné odvození vzorců jako v poznámkách k přednášce Nebeská mechanika II [38].

V této kapitole se pokusíme popsat jaké dynamické procesy stojí za 2. a 3. zákonem. Jde zjevně o projev určité rezonance mezi precesí uzlu dráhy Měsíce a precesí jeho rotační osy. Prvním krokem bude tedy odvození precesní frekvence, kterou způsobuje gravitační pole centrálního tuhého tělesa.

2.1 Gravitační moment síly a model fixní dráhy

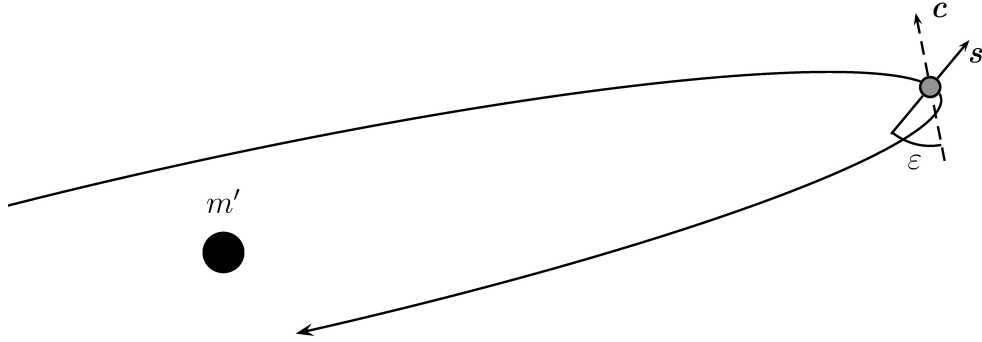
Při odvozování pohybových rovnic budeme předpokládat rotaci v základním neexcitovaném stavu (tedy kolem hlavní osy tenzoru momentu setrvačnosti C), pak platí:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T}, \quad (2.1)$$

spolu s

$$\mathbf{L} = C\omega\mathbf{s}. \quad (2.2)$$

Vektor \mathbf{L} označuje moment hybnosti, \mathbf{T} moment síly, ω úhlovou frekvenci rota-



Obrázek 2.2: Geometrie řešeného problému. Kolem centrálního tělesa (Slunce, Země) o hmotnosti m' obíhá satelit (asteroid, Měsíc, planeta) po eliptické dráze. Vektor \mathbf{c} je kolmý na oběžnou dráhu tělesa, vektor \mathbf{s} míří ve směru rotační osy a svírá s vektorem \mathbf{c} úhel ε , který v této práci nazýváme obliquita.

ce Měsíce (nebo asteroidu) a \mathbf{s} je jednotkový vektor ve směru rotační osy. Pro moment síly platí vztah

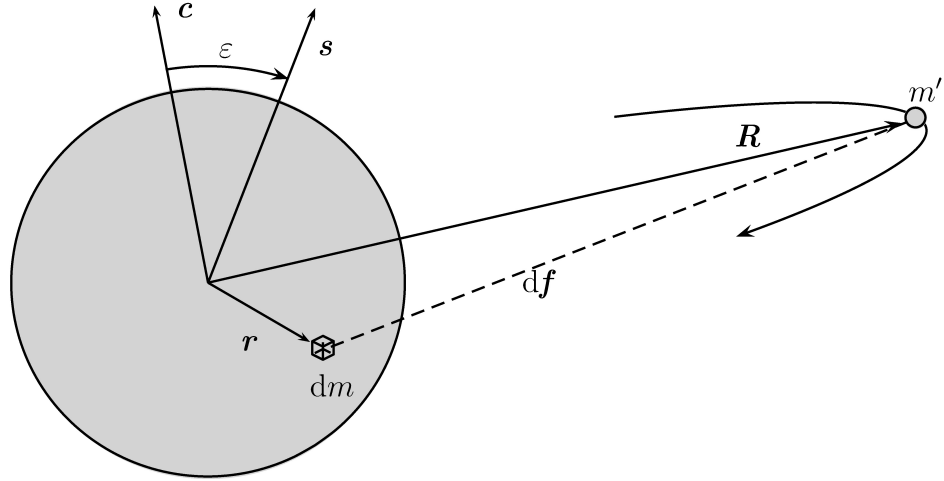
$$\mathbf{T} = \int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{f}, \quad (2.3)$$

s jehož využitím lze získat celkový moment síly, který dlouhodobě působí na těleso, integrací přes celý objem V . K tomu budeme potřebovat vyjádřit diferenciál $d\mathbf{f}$. Z obrázku 2.3 a z Newtonova gravitačního zákona plyne

$$d\mathbf{f} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{r}}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} Gm'dm. \quad (2.4)$$

Než rovnici (2.3) zintegrujeme přes objem tělesa, udělejme Taylorův rozvoj členu $|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^{-3}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^3} &= \frac{1}{(R^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R} + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^3} \left[1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{R^2} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right]^{-3/2} \\ &= \frac{1}{R^3} \left[1 + 3\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{R^2} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$



Obrázek 2.3: Soustava spojená se satelitem. Vektor \mathbf{r} míří z těžiště satelitu k objemovému elementu dm , vektor \mathbf{R} pak míří od Měsíce nebo asteroidu směrem k Zemi (Slunci). Výsledná síla, kterou Slunce působí na element dm , je označena $d\mathbf{f}$.

což plyne z

$$(1 - x)^{-\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \text{ pro } |x| < 1, \quad (2.6)$$

kde $o(x)$ označuje klasické „malé ó od x “ – více v poznámce ⁴.

Pak tedy platí⁵:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \int_V \mathbf{r} \times d\mathbf{f} = \frac{Gm'}{R^3} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{R} \left[1 + 3 \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}}{R^2} + o\left(\frac{r}{R}\right) \right] dm = \\ &= \frac{Gm'}{R^3} \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{R} dm + \frac{3Gm'}{R^5} \int_V \{ [(\mathbf{r}\mathbf{r}) \mathbf{R}] \times \mathbf{R} + \dots \} dm. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Díky volbě počátku souřadného systému v těžišti bude první integrál nulový. Pro vyčíslení druhého použijeme definice tenzoru setrvačnosti:

$$I_{ij} = \int (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) dm, \quad (2.10)$$

kde I_{ij} jsou složky tenzoru setrvačnosti \mathbb{I} . Pokud zanedbáme členy řádu r^2/R^2 v integrandu rovnice (2.9), lze tuto rovnici vyjádřit

$$\mathbf{T} \doteq \frac{3Gm'}{R^5} (\mathbb{I}\mathbf{R}) \times \mathbf{R}. \quad (2.11)$$

⁴Říkáme, že „ f je malé ó od h pro x jdoucí k x_0 “ a píšeme

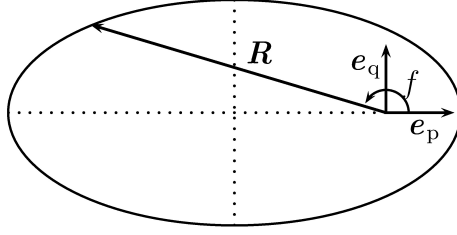
$$f(x) = o(h(x)) \text{ pro } x \rightarrow x_0, \quad (2.7)$$

právě tehdy když

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0. \quad (2.8)$$

Tento zápis znamená, že $f(x)$ je mnohem menší než $h(x)$ pro x blízka x_0 .

⁵Označení: zápisem $\mathbf{v}\mathbf{v}$ myslíme tenzorový součin $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$.



Obrázek 2.4: K zavedení parametrizace vektoru \mathbf{R} . Jednotkový vektor \mathbf{e}_p míří ve směru pericentra, vektor \mathbf{e}_q je kolmý na \mathbf{e}_p a zároveň $(\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_q)$ míří ve směru orbitálního momentu hybnosti. Excentrická anomálie f je úhel, který svírá průvodič \mathbf{R} a vektor \mathbf{e}_p .

Pokud jsou navíc osy souřadného systému natočeny ve směru hlavních os tenzoru setrvačnosti, je \mathbb{I} diagonální

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

kde $A \leq B \leq C$ jsou hlavní momenty tenzoru setrvačnosti. Takový systém se pak nazývá vlastním systémem tělesa.

Pro dlouhodobé, tedy sekulární efekty ovlivňující rotační osu \mathbf{s} použijeme střední hodnotu \mathbf{T} spočtenou dvojím časovým středováním přes jeden oběh kolem tělesa m' a také přes vlastní rotaci tělesa m . Výpočet začneme prvním středováním:

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{T} dl = \frac{1}{2\pi\eta} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{T} \left(\frac{R}{a} \right)^2 df, \quad (2.13)$$

kde a je velká poloosa, l označuje střední⁶ a f pravou⁷ anomálii, která je zobrazena na obrázku 2.4. Písmenem η označujeme

$$\eta = \sqrt{1 - e^2}, \quad (2.14)$$

kde e je dráhová excentricita⁸. Zavedme nyní jednotkový vektor \mathbf{e}_p , který vede z ohniska směrem k pericentru, a jednotkový vektor \mathbf{e}_q , který je k němu kolmý (pootočen ve směru oběhu tělesa) – viz obrázek 2.4. Pak lze při použití vyjádření momentu síly (2.11) a následující substitute:

$$\mathbf{R} = R(f) [\cos f \mathbf{e}_p + \sin f \mathbf{e}_q], \quad (2.15)$$

⁶ $l = n(t - t_0)$, kde n je střední pohyb.

⁷Pravá anomálie souvisí s excentrickou anomálií E vztahem:

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

Excentrická anomálie splňuje Keplerovu rovnici:

$$E - e \sin E = n(t - t_0).$$

⁸ $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, kde b je vedlejší poloosa elipsy, po které asteroid obíhá kolem Slunce.

přepsat rovnici (2.13) do tvaru:

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{3Gm'}{2\pi\eta} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{1}{R^3} (\mathbb{I}[\cos f \mathbf{e}_p + \sin f \mathbf{e}_q]) \times [\cos f \mathbf{e}_p + \sin f \mathbf{e}_q] df. \quad (2.16)$$

V dalším kroku roznásobíme závorky a vytkneme členy s a , η :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}} = \frac{3Gm'}{a^3\eta^3} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a\eta^2}{R}\right) \{ \cos^2 f (\mathbb{I}\mathbf{e}_p) \times \mathbf{e}_p + \sin^2 f (\mathbb{I}\mathbf{e}_q) \times \mathbf{e}_q + \\ \sin f \cos f [(\mathbb{I}\mathbf{e}_q) \times \mathbf{e}_p + (\mathbb{I}\mathbf{e}_p) \times \mathbf{e}_q] \} df. \end{aligned} \quad (2.17)$$

První člen v integrálu vyjádříme z rovnice kuželosečky:

$$\frac{R}{a} = \frac{\eta^2}{1 + e \cos f}, \quad \text{tedy} \quad \frac{a\eta^2}{R} = 1 + e \cos f. \quad (2.18)$$

Vzhledem k tomu, že výraz na druhém řádku v rovnici (2.17) je lichá funkce f a při použití rovnice kuželosečky dostaneme:

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{3Gm'}{b^3} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e \cos f) \{ \cos^2 f (\mathbb{I}\mathbf{e}_p) \times \mathbf{e}_p + \sin^2 f (\mathbb{I}\mathbf{e}_q) \times \mathbf{e}_q \} df, \quad (2.19)$$

kde b označuje

$$b = a\eta, \quad (2.20)$$

což odpovídá zavedení dráhové excentricity, respektive vedlejší poloosy v poznámce 8. A nakonec, protože platí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cos x \, dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \, dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx &= \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx &= \pi, \end{aligned} \quad (2.21)$$

lze výraz upravit do tvaru⁹:

$$\bar{\mathbf{T}} = \frac{3Gm'}{2a^3\eta^3} [(\mathbb{I}\mathbf{e}_p) \times \mathbf{e}_p + (\mathbb{I}\mathbf{e}_q) \times \mathbf{e}_q]. \quad (2.22)$$

⁹Při odvození se tiše počítá s tím, že $\mathbb{I} \neq \mathbb{I}(f)$, což ale obecně nemusí platit. Zvláště v rezonančních případech je toto třeba vzít na vědomí.

Výsledek (2.22) se teď pokusíme upravit do tvaru, ve kterém nevystupují vektory \mathbf{e}_p a \mathbf{e}_q , a zároveň přikročíme ke druhému středování přes rotační pohyb tělesa. Vyjádřeme si nejprve celý tenzor setrvačnosti jako součet následujících částí¹⁰:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (A - B) + \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (B - A) + \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[C - \frac{1}{2} (A + B) \right] + \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (A + B), \end{aligned} \quad (2.23)$$

stále tedy platí:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = A, \\ I_{22} &= \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = B, \\ I_{33} &= C - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = C. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Je vidět, že pokud se v rovnici (2.22) použije příspěvek tenzoru setrvačnosti s \mathbb{E}_4 , tak díky identitě

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} \equiv 0, \quad (2.25)$$

která platí pro každý vektor \mathbf{v} , bude i tento příspěvek nulový.

Podívejme se nyní na příspěvek k \mathbb{I} od \mathbb{E}_3 :

$$\Delta\mathbb{I} = \left[C - \frac{1}{2} (A + B) \right] \mathbb{E}_3. \quad (2.26)$$

Tento příspěvek vypadá takto v systému spojeném s tělesem v souřadném systému definovaném báзовými vektory $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{s})$. Pokud přejdeme do obecnějšího souřadného systému – například do systému, který je definován triádou oskulační dráhy $(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q, \mathbf{c})$, bude platit:

$$\mathbf{x} = \mathbb{R}\mathbf{x}', \quad (2.27)$$

respektive pro tenzorové veličiny platí

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}\mathbb{T}'\mathbb{R}^T, \quad (2.28)$$

¹⁰Každá matice na pravé straně rovnice (2.23) je v textu označena \mathbb{E}_1 až \mathbb{E}_4 podle řádku, na kterém se v této rovnici nachází.

kde \mathbb{R} je matice přechodu

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} e'_{1x} & e'_{2x} & s_x \\ e'_{1y} & e'_{2y} & s_y \\ e'_{1z} & e'_{2z} & s_z \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Pak $\Delta\mathbb{I}$ snadno vyjádříme¹¹:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbb{I} &\approx \begin{pmatrix} e'_{1x} & e'_{2x} & s_x \\ e'_{1y} & e'_{2y} & s_y \\ e'_{1z} & e'_{2z} & s_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'_{1x} & e'_{1y} & e'_{1z} \\ e'_{2x} & e'_{2y} & e'_{2z} \\ s_x & s_y & s_z \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} e'_{1x} & e'_{2x} & s_x \\ e'_{1y} & e'_{2y} & s_y \\ e'_{1z} & e'_{2z} & s_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ s_x & s_y & s_z \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} s_x^2 & s_x s_y & s_x s_z \\ s_x s_y & s_y^2 & s_y s_z \\ s_x s_z & s_z s_y & s_z^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Neboli rozepsáno po složkách platí

$$\Delta I_{ij} \approx s_i s_j, \text{ (pozn.}^{12}\text{)} \quad (2.31)$$

a po dosazení do rovnice (2.22) dává $\Delta\mathbb{I}$ příspěvek k $\bar{\mathbf{T}}$

$$\Delta\bar{\mathbf{T}} = \frac{3 Gm'}{2 b^3} \left[(\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{s})(\mathbf{s} \times \mathbf{e}_p) + (\mathbf{e}_q \cdot \mathbf{s})(\mathbf{s} \times \mathbf{e}_q) \right] \left[C - \frac{1}{2}(A + B) \right], \quad (2.32)$$

ten vzhledem k pravotočivosti a jednotkové velikosti bázových vektorů lze přepsat

$$\Delta\bar{\mathbf{T}} = -\frac{3 Gm'}{2 b^3} \left[C - \frac{1}{2}(A + B) \right] (\mathbf{c} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{c} \times \mathbf{s}). \quad (2.33)$$

Nyní nám už zbývá jen příspěvek od \mathbb{E}_1 a \mathbb{E}_2 :

$$\Delta\mathbb{I}'_{12} = \frac{1}{2} (B - A) (\mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_1), \quad (2.34)$$

který je vyjádřen v systému spojeném s tělesem. V novém systému spojeném s oskulační drahou přejde tento příspěvek na tvar

$$\begin{aligned} \Delta\mathbb{I}'_{12} &\approx \begin{pmatrix} e'_{1x} & e'_{2x} & s_x \\ e'_{1y} & e'_{2y} & s_y \\ e'_{1z} & e'_{2z} & s_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'_{1x} & e'_{1y} & e'_{1z} \\ e'_{2x} & e'_{2y} & e'_{2z} \\ s_x & s_y & s_z \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} e'_{1x} & e'_{2x} & s_x \\ e'_{1y} & e'_{2y} & s_y \\ e'_{1z} & e'_{2z} & s_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e'_{1x} & -e'_{1y} & -e'_{1z} \\ e'_{2x} & e'_{2y} & e'_{2z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} -e'_{1x}{}^2 + e'_{2x}{}^2 & -e'_{1x}e'_{1y} + e'_{2x}e'_{2y} & -e'_{1x}e'_{1z} + e'_{2x}e'_{2z} \\ -e'_{1y}e'_{1x} + e'_{2y}e'_{2x} & -e'_{1y}{}^2 + e'_{2y}{}^2 & -e'_{1y}e'_{1z} + e'_{2y}e'_{2z} \\ -e'_{1z}e'_{1x} + e'_{2z}e'_{2x} & -e'_{1z}e'_{1y} + e'_{2z}e'_{2y} & -e'_{1z}{}^2 + e'_{2z}{}^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

¹¹Příspěvek k \mathbb{I} je v původním souřadném systému “čárkovaný”.

¹²Tuto práci jsme si mohli odpustit, kdybychom se podívali na \mathbb{E}_3 a tvar vektoru \mathbf{s} v bázi $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{s})$, kde jsou jeho složky $\mathbf{s} = (0, 0, 1)$, a tedy $\mathbb{E}_3 \approx \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}$. A jelikož rovnice (2.31) je tenzorová, musí platit v každé bázi, tedy i speciálně v bázi $(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_q, \mathbf{c})$.

což lze po složkách zapsat ve tvaru

$$\Delta I_{12ij} = \frac{1}{2} (B - A) (e'_{2i} e'_{2j} - e'_{1i} e'_{1j}). \quad (2.36)$$

Vektory e'_1 a e'_2 jsou směry hlavních os tenzoru setrvačnosti vyjádřené v systému os (e_p, e_q, c) . Díky rotaci tělesa můžeme vektory e_1 a e_2 vyjádřit jako

$$\begin{aligned} e'_1 &= \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - t_0)\right) e'_1(t_0) + \sin\left(\frac{2\pi}{P}(t - t_0)\right) e'_2(t_0), \\ e'_2 &= -\sin\left(\frac{2\pi}{P}(t - t_0)\right) e'_1(t_0) + \cos\left(\frac{2\pi}{P}(t - t_0)\right) e'_2(t_0), \end{aligned} \quad (2.37)$$

kde t_0 označuje libovolný počátek měření času a P je rotační perioda. Nenápadně jsme zde přešli k druhé části středování přes vlastní rotaci tělesa m . Pokud se nejedná o případ spin-orbitální rezonance, tedy že $\varphi = \frac{2\pi}{P}(t - t_0) \neq f$, lze středování v rovnici (2.19) provést odděleně pro f a pro φ – příspěvek od tohoto členu je pak díky vlastnostem goniometrických funkcí nulový. V případě spin-orbitální rezonance, kdy je $\varphi = f$, se musí středovat společně. Naštěstí obecně u asteroidů k takové rezonanci nedochází, takže se žádné chyby nedopouštíme.

Celkově lze tedy vystředovaný moment síly přes oběh i přes rotaci zapsat

$$\bar{\mathbf{T}} = -\frac{3}{2} \frac{Gm'}{b^3} \left[C - \frac{1}{2}(A + B) \right] (\mathbf{c} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{c} \times \mathbf{s}). \quad (2.38)$$

Za použití rovnic (2.2) a (2.1) upravíme do tvaru

$$\boxed{C \frac{d(\mathbf{s}\omega)}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{Gm'}{b^3} \left[C - \frac{1}{2}(A + B) \right] (\mathbf{c} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{c} \times \mathbf{s}).} \quad (2.39)$$

Podívejme se nyní co se stane s předchozí rovnicí, pokud ji vynásobíme vektorem \mathbf{s} – pravá strana bude díky vlastnostem vektorového součinu nulová a levá po vydělení konstantou vypadá takto:

$$\mathbf{s} \cdot \frac{d(\mathbf{s}\omega)}{dt} = 0, \quad (2.40)$$

což derivací součinu upravíme na tvar

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \frac{d\omega}{dt} + \omega \mathbf{s} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = 0. \quad (2.41)$$

První člen bude díky jednotkové velikosti \mathbf{s} , roven $d\omega/dt$. Druhý pak upravíme pomocí vztahu

$$\frac{d(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})}{dt} = \mathbf{s} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} + \mathbf{s} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}, \quad (2.42)$$

tedy

$$\mathbf{s} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})}{dt}. \quad (2.43)$$

Ale protože derivace konstanty je nula, tak

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad (2.44)$$

a tedy ω je konstantní. Nyní můžeme zavést precesní konstantu α definovanou vztahem

$$\alpha = \frac{3 Gm' C - \frac{1}{2}(A + B)}{2 b^3 \omega C} \quad (2.45)$$

a můžeme rovnici (2.39) přepsat do jednoduchého tvaru

$$\boxed{\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\alpha(\mathbf{c} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{c} \times \mathbf{s})}. \quad (2.46)$$

Poslední zlomek v rovnici (2.45) se tradičně označuje

$$\boxed{\Delta = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{C}}, \quad (2.47)$$

čehož se budeme v dalším textu držet. Jak se později ukáže, jde o stěžejní parametr celého problému, který je ale bohužel zatížen největší nejistotou.

Obdobně jako v minulém případě nyní využijeme vlastností vektorového součinu a podíváme se, co se s rovnicí stane, když ji vynásobíme \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = 0. \quad (2.48)$$

Pokud navíc uvažujeme jen dráhu, která je fixní v prostoru, tedy $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}(t)$, můžeme psát

$$\frac{d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{s})}{dt} = 0, \quad (2.49)$$

a tedy vektory \mathbf{c} a \mathbf{s} svírají konstantní úhel – zavádíme proto obliquitu ε vztahem

$$\cos \varepsilon = \mathbf{c} \cdot \mathbf{s}. \quad (2.50)$$

Abychom nyní našli řešení rovnice (2.46), natočme osy souřadného systému tak, že

$$\mathbf{c} = (0, 0, 1), \quad (2.51)$$

pak lze psát \mathbf{s} ve tvaru

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cos \varepsilon). \quad (2.52)$$

Rozepíšeme-li rovnici (2.46) po složkách:

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= \alpha \cos \varepsilon s_2, \\ \dot{s}_2 &= -\alpha \cos \varepsilon s_1, \\ \dot{s}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pro druhé derivace pak platí

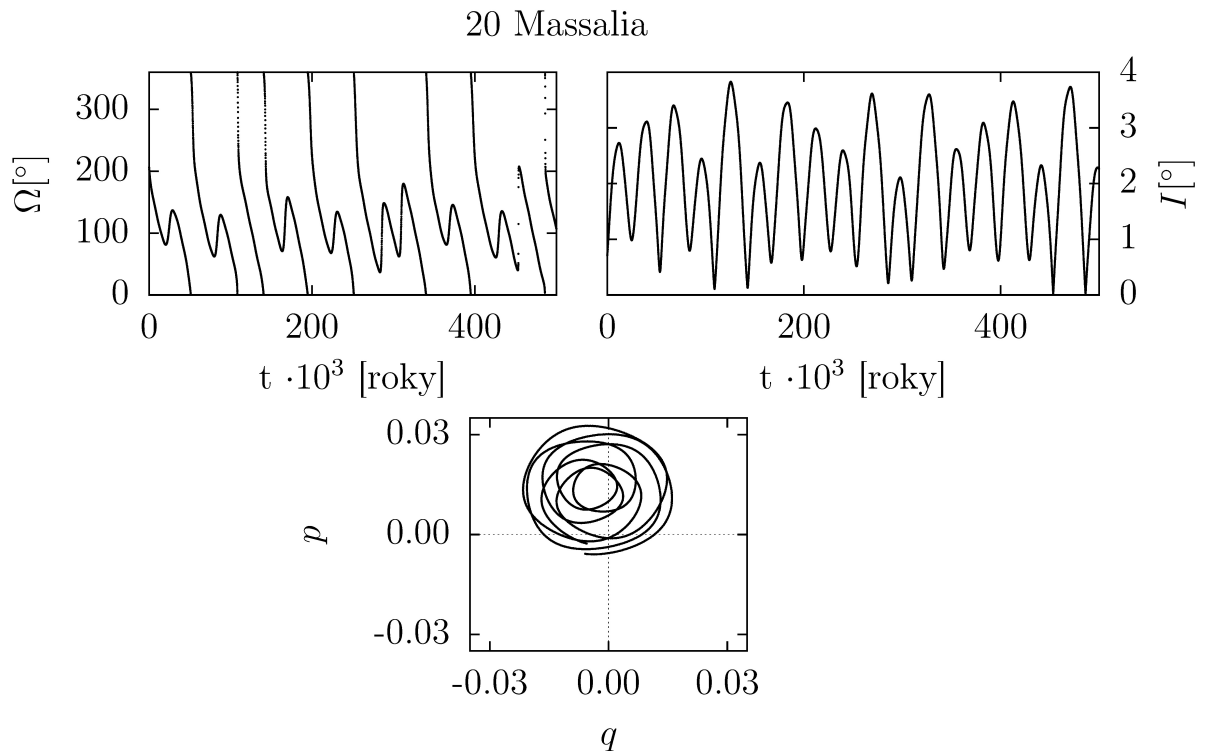
$$\begin{aligned}\ddot{s}_1 &= -\alpha^2 \cos^2 \varepsilon s_1, \\ \ddot{s}_2 &= -\alpha^2 \cos^2 \varepsilon s_2, \\ \ddot{s}_3 &= 0.\end{aligned}\tag{2.54}$$

Z těchto tří vztahů je zřejmé, že vektor \mathbf{s} preceduje kolem \mathbf{c} po kuželi s vrcholovým úhlem ε a s frekvencí ω_p

$$\omega_p = \alpha \cos \varepsilon.\tag{2.55}$$

2.2 Precese dráhy a Colombův model

Případ probíraný v předchozí části se velmi liší od reálných pozorovaných objektů, kdy dráha není fixní v prostoru, ale preceduje v prostoru díky působení planet a Slunce. A nejedná se o nějaké pomalé změny – např. dráha asteroidu 20 Massalie, která s vlastní velkou poloosou $a = 2.4086$ au leží ve vnitřní části hlavního pásu, stáčí výstupní uzel Ω s periodou $P_\Omega \approx 50\,000 - 60\,000$ let. U našeho Měsíce se dokonce uzlová přímka stáčí s periodou pouhých 18.6 let. Na obrázku 2.5 lze navíc vidět silně nelineární průběh stáčení dráhy Massalie. Časový rozestup jednotlivých bodů je 50 let. Keplerovy elementy jsou vztaženy vůči ekliptikálnímu inerciálnímu systému J2000.0.



Obrázek 2.5: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupního uzlu Ω asteroidu 20 Massalia za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

Volba referenčního systému

Standardně se v planetární teorii používají dva různé referenční systémy. Jedním z nich je ekliptikální systém vztažený k nějaké dané epoše. V dnešní době se běžně používá systém J2000.0. Počátek souřadného systému je nevhodnější volit ve Slunci, případně v těžišti Sluneční soustavy nebo Země. Osa X pak míří k jarnímu bodu, osa Z k severnímu pólu ekliptiky a osu Y definujeme tak, aby systém byl pravotočivý.

Druhým používaným referenčním systémem je systém spojený s Laplaceovou rovinou (někdy nazývanou invariantní). Tato rovina prochází těžištěm soustavy a zároveň je kolmá na celkový moment hybnosti Sluneční soustavy:

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{R}_j \times \dot{\mathbf{R}}_j, \quad (2.56)$$

kde m_j , \mathbf{R}_j a $\dot{\mathbf{R}}_j$ označují hmotnost, polohový vektor a rychlost j -tého tělesa, N je celkový počet těles v soustavě. Ve Sluneční soustavě k tomuto vektoru nejvíce přispívají plynní obři Jupiter a Saturn. Ze zákona zachování celkového momentu hybnosti vyplývá, že Laplaceova invariantní rovina je v čase neměnná (proto název invariantní). Vztah této roviny vůči rovině ekliptiky vztažené ke konkrétnímu datu lze spočítat stejným způsobem jako postupovali Souami a Souchay v [35] a [36] a odvodit sklon a délku výstupného uzlu Laplaceovy roviny vůči rovině ekliptiky (J2000.0):

$$\begin{aligned} I_{\text{Lap}} &= 1^\circ 34' 43'' \\ \Omega_{\text{Lap}} &= 107^\circ 34' 56'', \\ \varpi &= 17^\circ 25'. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Na obrázku 2.6 je vidět průběh délky výstupného uzlu Ω a sklonu I vůči Laplaceově invariantní rovině. Na první pohled je vidět naprosto jiný charakter funkce $\Omega(t)$ v obou systémech. Zatímco v invariantním systému se výstupný uzel zhruba rovnoměrně stáčí v prostoru, tak v případě ekliptikálního dělá „kličky“ nebo zrychluje natolik, že jednotlivé body integrace nejsou spojitě. Obdobně to platí i pro $I(t)$, kde se v různých souřadných systémech mění velikost oscilací. Toto rozdílné chování výstupného uzlu (a sklonu) ve dvou různých systémech je způsobeno pouze vzájemnou geometrií obou systémů.

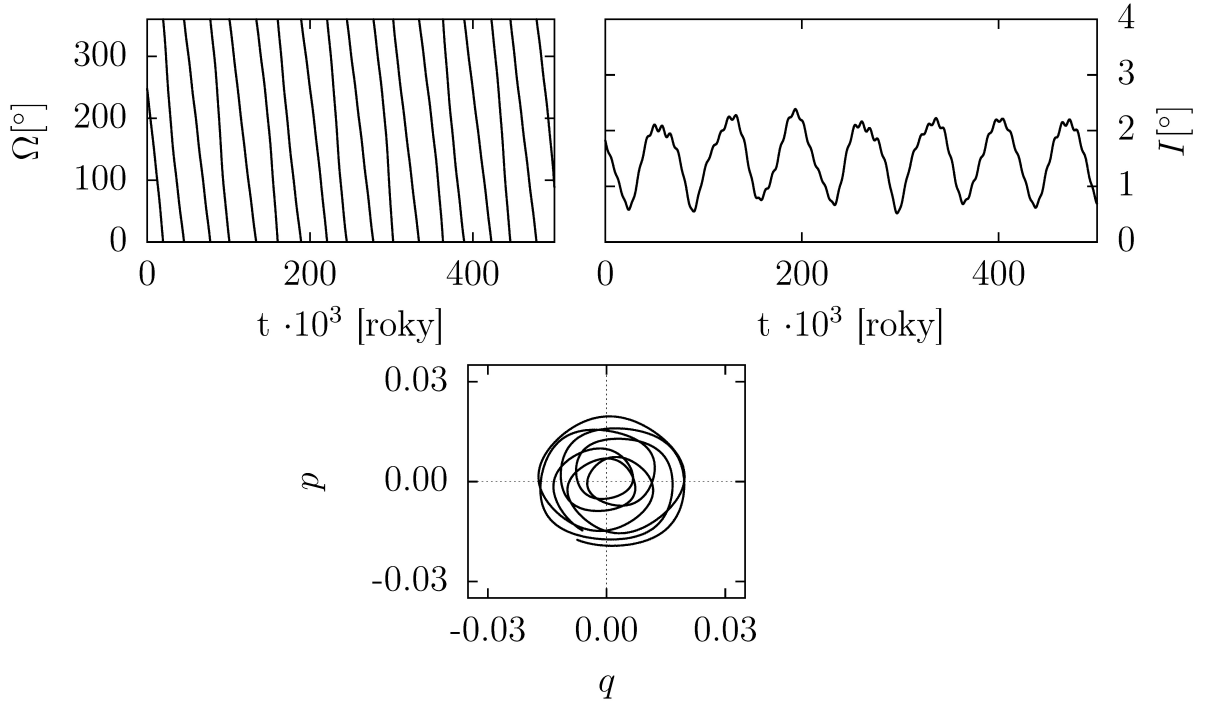
V principu bychom mohli k popisu vývoje orbitálních elementů použít jakýkoliv ze zmíněných systémů. Hlavně z důvodu, že se směry rotačních os tradičně udávají v ekliptikální délce λ a ekliptikální šířce β , budeme používat ekliptikální systém, od kterého budeme odvozovat Keplerovy elementy¹³.

Zavedení nesingulárních proměnných

V řadě případů se při zkoumání vývoje dráhových elementů asteroidů dostaneme do situace, kdy sklon $I = 0^\circ$ nebo excentricita $e = 0$. V takových chvílích jsou ale

¹³Jedinou výjimkou bude Fourierova analýza pohybu, kdy z numerických důvodů je výhodnější používat Laplaceův invariantní systém. V tomto systému jsou pak nízkofrekvenční čáry mnohem ostřejší. Amplitudy i frekvence jsou v obou systémech stejné, pouze ve fázi je posun o ϖ .

20 Massalia



Obrázek 2.6: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 20 Massalia za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla Laplaceova invariantní rovina.

Keplerovy elementy nepoužitelné! V případě, kdy oběžná dráha splývá s referenční rovinou nelze vhodně definovat uzlovou přímku a tedy ani délku výstupného uzlu Ω . Stejně tak pro kruhovou dráhu nemůžeme zavést pericentrum a nelze tedy určit ani argument pericentra ω . Z toho důvodu je výhodnější definovat nesingulární proměnné, které budou dobře definovány pro každou orbitální konfiguraci. Zavedme je následujícím vztahem:

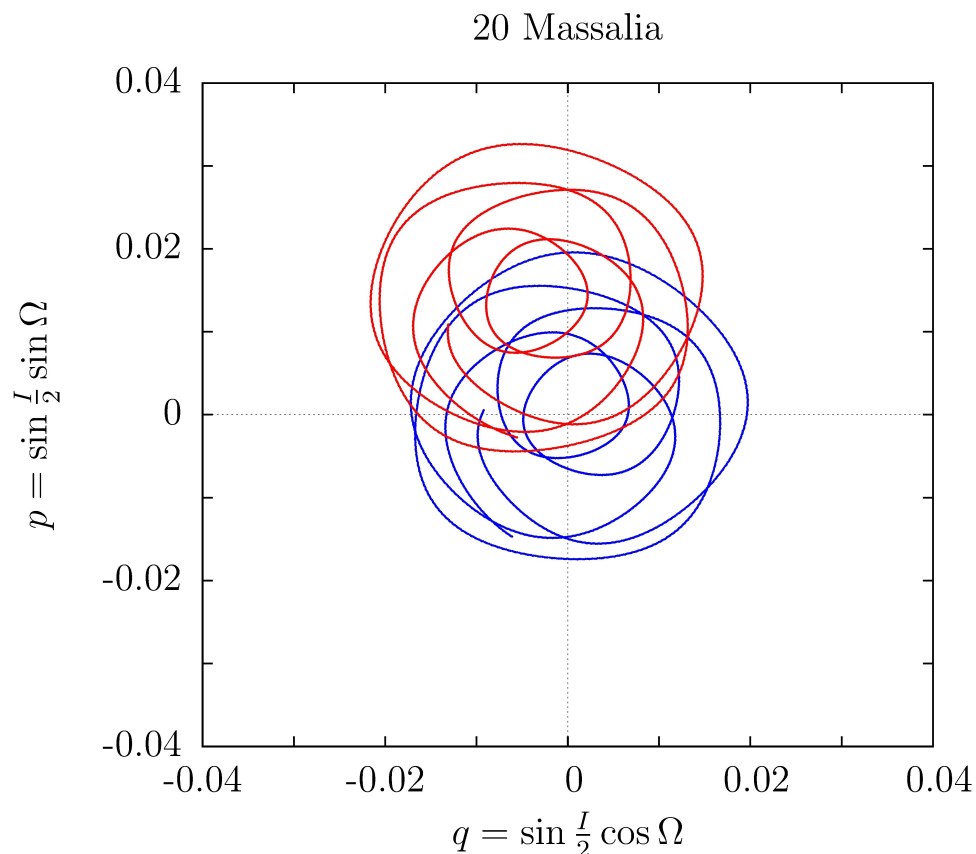
$$\begin{aligned}
 q + ip &= \sin \frac{I}{2} e^{i\Omega} = \sin \frac{I}{2} [\cos \Omega + i \sin \Omega] \\
 k + ih &= e e^{i(\Omega + \omega)} = e [\cos (\Omega + \omega) + i \sin (\Omega + \omega)].
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

Je zřejmé, že takto zvolené souřadnice odstraňují problém pro případ, kdy dráha leží v referenční rovině, respektive pro kruhové dráhy. Elementy q, p a k, h pak v takovém případě jednoduše procházejí bodem $[0,0]$. Pro naše účely budeme používat proměnné q, p . Na obrázcích 2.5 a 2.6 je pak vidět průběh p, q pro prvních 200 000 let integrace.

Stojí za povšimnutí, že trajektorie Massalie vyjádřená proměnnými (q, p) má v obou dvou referenčních systémech stejný tvar, ač $\Omega(t)$ a $I(t)$ vypadají naprosto odlišně. Přechod od jednoho systému k druhému se pak realizuje pootočením o úhel ϖ a posunutím o konstantní vektor \mathbf{p} – tyto parametry jsou závislé na vzájemné geometrii obou souřadných systémů. Pro přechod z Laplaceovy roviny

do ekliptikálního systému k epoše J2000.0 přibližně platí ([35]):

$$\begin{aligned} \varpi &\cong 17.4^\circ, \\ \mathbf{p} &\cong \begin{pmatrix} \sin \frac{I_{\text{Lap}}}{2} \cos \Omega_{\text{Lap}} \\ \sin \frac{I_{\text{Lap}}}{2} \sin \Omega_{\text{Lap}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.59)$$



Obrázek 2.7: Rozdíl nesingulárních elementů q, p Massalie ve dvou různých systémech – modře je vykreslen průběh $q + ip$ vůči Laplaceově invariantní rovině a červeně vůči rovině ekliptiky. Je vidět, že ač je průběh singulárních elementů Ω, I v obou dvou systémech velmi rozdílný, v nesingulárních jsou až na posunutí a otočení stejné. Pro přehlednost jsou na obrázku zobrazeny výsledky pro prvních 150 tisíc let integrace.

Průběh q, p pro oba dva souřadné systémy lze porovnat na obrázku 2.7 – červeně je vyznačena trajektorie v ekliptikálních souřadnicích a modře v Laplaceově rovině.

2.2.1 Hamiltonovský popis

V této podkapitole upravíme rovnici precese popsanou v předchozí části do nového souřadného systému, v kterém budeme moci lépe studovat efekty stáčení výstupního uzlu dráhy Ω . Pomocí Fourierovy aproximace pak budeme schopni řešit vývoj rotační osy i pro nelineární případy závislosti $\Omega(t)$.

Před odvozením Colombova modelu se podíváme, jak se změní podoba rovnic odvozených v předchozí části, které platily v inerciálním souřadném systému $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, při přechodu do nových neinerciálních souřadnic.

Transformace souřadnic do oskulační dráhy

Nejprve přejdeme do nového souřadného systému $(\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}')$, který je spojen s oskulační dráhou asteroidu. Tento souřadný systém je definován bázovými vektory $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$: vektor \mathbf{a} leží v uzlové přímce a míří ve směru výstupného uzlu, vektor \mathbf{c} míří ve směru orbitálního momentu hybnosti. Vektor \mathbf{b} pak definujeme tak, aby vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tvořily pravotočivý systém, tedy:

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}. \quad (2.60)$$

Transformaci $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \rightarrow (\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}')$ lze vyjádřit¹⁴:

$$\mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x}, \quad (2.61)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & \sin I \\ 0 & -\sin I & \cos I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\cos I \sin \Omega & \cos I \cos \Omega & \sin I \\ \sin I \sin \Omega & -\sin I \cos \Omega & \cos I \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Rovnici (2.1), která ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T}, \quad (2.63)$$

platí v inerciálním systému $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, je třeba přepsat do rotující, tj. neinerciální, soustavy $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$:

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbb{A}\mathbf{L}) = \frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbf{L} + \mathbb{A}\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbb{A}^{-1}\mathbf{L}' + \mathbf{T}'. \quad (2.64)$$

Tuto rovnici lze s využitím vztahu

$$\mathbf{L}' = C\omega\mathbf{s}' \quad (2.65)$$

jednoduše přepsat do tvaru

$$C\frac{d}{dt}(\omega\mathbf{s}') = \frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbb{A}^{-1}C\omega\mathbf{s}' - \alpha C\omega(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{s}')(\mathbf{c}' \times \mathbf{s}'). \quad (2.66)$$

Momentem setrvačnosti C lze samozřejmě rovnici podělit. Podobným trikem, jaký byl použit výše, se přesvědčíme o vlastnostech ω – opět tedy vynásobíme rovnici vektorem \mathbf{s}' . Díky tomu nám na pravé straně zbyde jen člen s maticí přechodu \mathbb{A} :

$$\mathbf{s}' \cdot \frac{d}{dt}(\omega\mathbf{s}') = \mathbf{s}' \cdot \left(\frac{d\mathbb{A}}{dt}\mathbb{A}^{-1}\omega\mathbf{s}' \right). \quad (2.67)$$

¹⁴Vektorové veličiny budeme značit stejně jako souřadné systémy – tedy vektor \mathbf{v}' je transformovaný vektor \mathbf{v} .

Nyní vyjádříme časovou derivaci \mathbb{A} :

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin \Omega \dot{\Omega} & \cos \Omega \dot{\Omega} & 0 \\ -\cos I \cos \Omega \dot{\Omega} + \sin I \sin \Omega \dot{I} & -\sin I \cos \Omega \dot{I} - \cos I \sin \Omega \dot{\Omega} & \cos I \dot{I} \\ \cos I \sin \Omega \dot{I} + \sin I \cos \Omega \dot{\Omega} & -\cos I \cos \Omega \dot{I} + \sin I \sin \Omega \dot{\Omega} & -\sin I \dot{I} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

a inverzní matici k \mathbb{A} :

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\cos I \sin \Omega & \sin I \sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos I \cos \Omega & -\sin I \cos \Omega \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Součin dvou předchozích matic pak snadno spočteme:

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cos I \dot{\Omega} & -\sin I \dot{\Omega} \\ -\cos I \dot{\Omega} & 0 & \dot{I} \\ \sin I \dot{\Omega} & -\dot{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

Podívejme se nyní zpět na rovnici (2.67) a upravujme pravou stranu:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' \cdot \frac{d}{dt} (\omega \mathbf{s}') &= \mathbf{s}' \cdot \left(\frac{d\mathbb{A}}{dt} \mathbb{A}^{-1} \omega \mathbf{s}' \right) \\ \mathbf{s}' \cdot \frac{d}{dt} (\omega \mathbf{s}') &= \mathbf{s}' \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & \cos I \dot{\Omega} & -\sin I \dot{\Omega} \\ -\cos I \dot{\Omega} & 0 & \dot{I} \\ \sin I \dot{\Omega} & -\dot{I} & 0 \end{pmatrix} \omega \mathbf{s}' \right] \\ \mathbf{s}' \cdot \frac{d}{dt} (\omega \mathbf{s}') &= \begin{pmatrix} s'_1 & s'_2 & s'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_2 \cos I \dot{\Omega} - s'_3 \sin I \dot{\Omega} \\ -s'_1 \cos I \dot{\Omega} + s'_3 \dot{I} \\ s'_1 \sin I \dot{\Omega} - s'_2 \dot{I} \end{pmatrix} \omega. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Pokud roznásobíme výraz na pravé straně, zjistíme že:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s'_1 & s'_2 & s'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_2 \cos I \dot{\Omega} - s'_3 \sin I \dot{\Omega} \\ -s'_1 \cos I \dot{\Omega} + s'_3 \dot{I} \\ s'_1 \sin I \dot{\Omega} - s'_2 \dot{I} \end{pmatrix} &= \\ s'_1 s'_2 \cos I \dot{\Omega} - s'_1 s'_3 \sin I \dot{\Omega} - s'_1 s'_2 \cos I \dot{\Omega} + s'_2 s'_3 \dot{I} + s'_1 s'_3 \sin I \dot{\Omega} - s'_2 s'_3 \dot{I} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Výše uvedené počítání jsme si mohli ušetřit, kdybychom si uvědomili, že matice (2.70) je antisymetrická, a pak, pokud ji označíme \mathbb{C} , identicky platí:

$$C_{ij} s_i s_j \equiv 0. \quad (2.73)$$

Rovnice (2.67) nyní přešla do tvaru:

$$\mathbf{s}' \cdot \frac{d}{dt} (\omega \mathbf{s}') = 0, \quad (2.74)$$

což snadno upravíme derivací výrazu v závorkách:

$$\mathbf{s}' \cdot \frac{d\omega}{dt} \mathbf{s}' + \mathbf{s}' \cdot \frac{d\mathbf{s}'}{dt} \omega = 0. \quad (2.75)$$

Z prvního členu vymizí \mathbf{s}' , protože $\mathbf{s}' \cdot \mathbf{s}' = 1$. Analogickým postupem jako v rovnicích (2.40) až (2.43) dostáváme

$$\frac{d\omega}{dt} = 0. \quad (2.76)$$

Vidíme, že i v tomto případě se ω zachovává. Nyní můžeme přepsat rovnici precese v nových souřadnicích

$$\boxed{\frac{d\mathbf{s}'}{dt} = \frac{d\mathbb{A}}{dt} \mathbb{A}^{-1} \mathbf{s}' - \alpha(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{s}')(\mathbf{c}' \times \mathbf{s}'),} \quad (2.77)$$

kde první člen na pravé straně popisuje vliv pohybu oskulační dráhy.

Pomocná transformace souřadnic

Pro zcela obecný případ je pak dále vhodné provést ještě dodatečné otočení kolem osy \mathbf{Z}' o $-\Omega$. Jde tedy o transformaci $(\mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}') \rightarrow (\mathbf{X}'', \mathbf{Y}'', \mathbf{Z}'')$. Tato transformace řeší problematiku situace, kdy $I \rightarrow 0^\circ$ – obdobně jako nesingulární proměnné q, p . V předchozím systému by v takovém případě osa \mathbf{X}' neměla smysl. Naopak v nových souřadnicích \mathbf{X}'' splyne s \mathbf{X} . Matici přechodu k novému souřadnému systému spočteme jednoduchým vynásobením matic:

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{A} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\cos I \sin \Omega & \cos I \cos \Omega & \sin I \\ \sin I \sin \Omega & -\sin I \cos \Omega & \cos I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \Omega + \cos I \sin^2 \Omega & -(\cos I - 1) \cos \Omega \sin \Omega & -\sin I \sin \Omega \\ -(\cos I - 1) \cos \Omega \sin \Omega & \cos I \cos^2 \Omega + \sin^2 \Omega & \sin I \cos \Omega \\ \sin I \sin \Omega & -\sin I \cos \Omega & \cos I \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Inverzní matici opět dostaneme jednoduchým výpočtem:

$$\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B}^T = \begin{pmatrix} \cos^2 \Omega + \cos I \sin^2 \Omega & -(\cos I - 1) \cos \Omega \sin \Omega & \sin I \sin \Omega \\ -(\cos I - 1) \cos \Omega \sin \Omega & \cos I \cos^2 \Omega + \sin^2 \Omega & -\sin I \cos \Omega \\ -\sin I \sin \Omega & \sin I \cos \Omega & \cos I \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Abychom mohli přepsat rovnici (2.77) do nových souřadnic, budeme navíc ještě potřebovat časovou derivaci matice přechodu¹⁵ \mathbb{B} , respektive její součin s \mathbb{B}^{-1} :

$$\frac{d\mathbb{B}}{dt} \mathbb{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & (\cos I - 1) \dot{\Omega} & -\cos \Omega \sin I \dot{\Omega} - \sin \Omega \dot{I} \\ -(\cos I - 1) \dot{\Omega} & 0 & \cos \Omega \dot{I} - \sin I \sin \Omega \dot{\Omega} \\ \cos \Omega \sin I \dot{\Omega} + \sin \Omega \dot{I} & \sin I \sin \Omega \dot{\Omega} - \cos \Omega \dot{I} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

¹⁵Matici $\frac{d\mathbb{B}}{dt}$ lze najít v dodatku E na straně 148.

Nyní tedy můžeme napsat nový tvar rovnice (2.77):

$$\frac{d\mathbf{s}''}{dt} = \frac{d\mathbb{B}}{dt}\mathbb{B}^{-1}\mathbf{s}'' - \alpha(\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{s}'')(\mathbf{c}'' \times \mathbf{s}''). \quad (2.81)$$

První člen na pravé straně vypadá po roznásobení takto:

$$\frac{d\mathbb{B}}{dt}\mathbb{B}^{-1}\mathbf{s}'' = \begin{pmatrix} s_2'' (\cos I - 1) \dot{\Omega} - s_3'' (\cos \Omega \sin I \dot{\Omega} + \sin \Omega \dot{I}) \\ -s_1'' (\cos I - 1) \dot{\Omega} + s_3'' (\cos \Omega \dot{I} - \sin I \sin \Omega \dot{\Omega}) \\ s_1'' (\cos \Omega \sin I \dot{\Omega} + \sin \Omega \dot{I}) + s_2'' (\sin I \sin \Omega \dot{\Omega} - \cos \Omega \dot{I}) \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

což využijeme pro vytknutí vektoru \mathbf{s} v předposlední rovnici:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{s}''}{dt} = -\{\alpha(\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{s}'')\mathbf{c}'' + \mathbf{h}\} \times \mathbf{s}'',} \quad (2.83)$$

kde \mathbf{h} snadno dopočteme:

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \begin{pmatrix} \cos \Omega \dot{I} - \sin I \sin \Omega \dot{\Omega} \\ \sin \Omega \dot{I} + \sin I \cos \Omega \dot{\Omega} \\ (\cos I - 1) \dot{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega \dot{I} - \sin I \sin \Omega \dot{\Omega} \\ \sin \Omega \dot{I} + \sin I \cos \Omega \dot{\Omega} \\ (\cos^2 \frac{I}{2} - \sin^2 \frac{I}{2} - 1) \dot{\Omega} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \Omega \dot{I} - \sin I \sin \Omega \dot{\Omega} \\ \sin \Omega \dot{I} + \sin I \cos \Omega \dot{\Omega} \\ -2 \sin^2 \frac{I}{2} \dot{\Omega} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Jednotlivé složky vektoru \mathbf{h} označíme stejně jako Laskar v [23]

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \\ -2\mathcal{C} \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Hamiltonovy rovnice

Pro lepší popis je dále vhodné parametrizovat jednotkový vektor \mathbf{s}'' :

$$\mathbf{s}'' = \begin{pmatrix} \sin \varepsilon \cos \lambda \\ \sin \varepsilon \sin \lambda \\ \cos \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

kde ε je obliquita měřená od osy \mathbf{c} a λ má význam (zeměpisné) délky a je měřeno od \mathbf{a}' . Místo úhlu λ se tradičně používá precesní úhel $\psi = \pi/2 - \lambda$. Parametrizaci \mathbf{s}'' lze pak zapsat ve tvaru

$$\mathbf{s}'' = \begin{pmatrix} \sin \varepsilon \sin \psi \\ \sin \varepsilon \cos \psi \\ \cos \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Podívejme se nyní na rovnici (2.83) po složkách, s tím že za \mathbf{c} dosadíme

$$\mathbf{c}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Nejprve třetí a nejjednodušší složka:

$$\frac{ds_3''}{dt} = -\alpha (c_1''s_2'' - s_1''c_2'') (s_1''c_1'' + s_2''c_2'' + s_3''c_3'') - (h_1s_2'' - h_2s_1''), \quad (2.89)$$

což se po dosazení za c_i'' , h_i a s_i'' zjednoduší na tvar

$$\frac{d}{dt} (\cos \varepsilon) = \mathcal{A} \sin \varepsilon \cos \psi - \mathcal{B} \sin \varepsilon \sin \psi, \quad (2.90)$$

kde označíme-li $\mathcal{X} = \cos \varepsilon$, dostaneme:

$$\boxed{\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \sqrt{1 - \mathcal{X}^2} (-\mathcal{A} \cos \psi + \mathcal{B} \sin \psi)}. \quad (2.91)$$

Tato rovnice na rozdíl od fixního modelu popisuje časové změny obliquity způsobené precesí dráhy. První a druhou složku rovnice (2.83) napíšeme pod sebe:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1''}{dt} &= \sin \psi \frac{d}{dt} \sin \varepsilon + \sin \varepsilon \cos \psi \dot{\psi} = \alpha \cos \varepsilon s_2'' - \mathcal{B} \cos \varepsilon - 2\mathcal{C}s_2'', & / \cdot \cos \psi \\ \frac{ds_2''}{dt} &= \cos \psi \frac{d}{dt} \sin \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \psi \dot{\psi} = -\alpha \cos \varepsilon s_1'' + \mathcal{A} \cos \varepsilon + 2\mathcal{C}s_1''. & / \cdot (-\sin \psi) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Po vynásobení obě rovnice sečteme:

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon \dot{\psi} &= \alpha \cos \varepsilon (s_2'' \cos \psi + s_1'' \sin \psi) - \mathcal{B} \cos \varepsilon \cos \psi - 2\mathcal{C}s_2 \cos \psi - \\ &\quad \mathcal{A} \cos \varepsilon \sin \psi - 2\mathcal{C}s_1'' \sin \psi \end{aligned} \quad (2.93)$$

a upravíme

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon \dot{\psi} &= \alpha \cos \varepsilon (s_2'' \cos \psi + s_1'' \sin \psi) - \cos \varepsilon (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi) - \\ &\quad 2\mathcal{C} (s_2'' \cos \psi + s_1'' \sin \psi), \end{aligned} \quad (2.94)$$

což lze přepsat

$$\sin \varepsilon \dot{\psi} = (\alpha \cos \varepsilon - 2\mathcal{C}) (s_2'' \cos \psi + s_1'' \sin \psi) - \cos \varepsilon (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi). \quad (2.95)$$

Pokud dosadíme za s_1'' a s_2'' , lze tuto rovnici ještě dále zjednodušit

$$\sin \varepsilon \dot{\psi} = (\alpha \cos \varepsilon - 2\mathcal{C}) \sin \varepsilon - \cos \varepsilon (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi). \quad (2.96)$$

Nyní už jen rovnici vydělíme $\sin \varepsilon$ a opět dosadíme $\mathcal{X} = \cos \varepsilon$:

$$\boxed{\frac{d\psi}{dt} = \alpha \mathcal{X} - 2\mathcal{C} - \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{1 - \mathcal{X}^2}} (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi)}. \quad (2.97)$$

Rovnice (2.91) a (2.97) jsou Hamiltonovy rovnice systému s Hamiltoniánem:

$$\boxed{\mathcal{H}(\mathcal{X}, \psi; t) = \frac{\alpha}{2} \mathcal{X}^2 - 2\mathcal{C}\mathcal{X} + \sqrt{1 - \mathcal{X}^2} (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi)}. \quad (2.98)$$

\mathcal{X} má roli zobecněného impulzu a ψ je pak zobecněná souřadnice. Pak tedy platí

$$\dot{\mathcal{X}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{X}}. \quad (2.99)$$

Hamiltonián \mathcal{H} je závislý na čase, protože

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}(t) \\ \mathcal{B} &= \mathcal{B}(t) \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}(t) \\ \alpha &= \alpha(t) = \alpha(a(t), e(t)). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Colombův model

Představme si dráhu, která rovnoměrně preceduje v inerciálním prostoru a svírá stálý sklon k referenční rovině – tedy

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= \text{konst. a} \\ I &= \text{konst.}\end{aligned}\tag{2.101}$$

Předpokládáme též, že velká poloosa a a excentricita e jsou konstantní. Modelu s takovými předpoklady se pak říká Colombův. Je pojmenovaný po italském profesorovi teoretické mechaniky Giuseppe Colombovi, který jako první tento model navrhl a vyřešil v [7]. Předpoklady modelu docela dobře splňuje např. Massalia, v případě, že jako referenční rovinu vezmeme Laplaceovu invariantní rovinu – viz obrázek 2.6 na straně 19. Pro složitější případy, kdy se dráha nestáčí rovnoměrně, pak Colombův předpoklad splňuje každý člen Fourierovy aproximace proměnných q, p , respektive I, Ω :

$$\sin \frac{I}{2} e^{i\Omega} = q + ip \doteq \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j e^{i(\nu_j t + \varphi_j)},\tag{2.102}$$

kde \mathcal{A}_j jsou amplitudy, ν_j frekvence a φ_j fáze. Říkáme aproximace, protože rovnost mezi funkcí a její Fourierovou řadou platí pro periodické funkce, ale v našem případě q ani p matematicky přesně vzato periodické nejsou.

Rozepíšme nyní složky vektoru \mathbf{h} za zjednodušujících předpokladů Colombova modelu ($\dot{I} = 0$):

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\sin I \sin \Omega \dot{\Omega}, \\ \mathcal{B} &= +\sin I \cos \Omega \dot{\Omega}, \\ \mathcal{C} &= \sin^2 \frac{I}{2} \dot{\Omega}\end{aligned}\tag{2.103}$$

a dosaďme je do Hamiltoniánu (2.98) spolu s Colombovým předpokladem:

$$\Omega = \Omega(t) = \dot{\Omega}t + \Omega_0.\tag{2.104}$$

Dostaneme tedy:

$$\mathcal{H}(\mathcal{X}, \psi; t) = \frac{\alpha}{2} \mathcal{X}^2 - 2\dot{\Omega} \sin^2 \frac{I}{2} \mathcal{X} + \dot{\Omega} \sin I \sqrt{1 - \mathcal{X}^2} (\cos \Omega \cos \psi - \sin \Omega \sin \psi),\tag{2.105}$$

a nakonec použijeme vzorec $\cos(\psi + \Omega) = \cos \psi \cos \Omega - \sin \psi \sin \Omega$:

$$\boxed{\mathcal{H}(\mathcal{X}, \psi) = \frac{\alpha}{2} \mathcal{X}^2 - 2\dot{\Omega} \sin^2 \frac{I}{2} \mathcal{X} + \dot{\Omega} \sin I \sqrt{1 - \mathcal{X}^2} \cos(\psi + \Omega).}\tag{2.106}$$

Zaveďme nyní nové kanonické proměnné (\mathcal{X}', φ) pomocí vytvořující funkce F :

$$(\mathcal{X}, \psi) \xrightarrow{F} (\mathcal{X}', \varphi),\tag{2.107}$$

Nový Hamiltonián, který již není funkcí času, a je tedy integrálem pohybu, se nazývá se Colombův integrál a označujeme jej \mathcal{C} :

$$\mathcal{H}'(\mathcal{X}', \varphi) = \mathcal{C}. \quad (2.113)$$

Hamiltonovy rovnice v nových proměnných zapíšeme analogicky rovnicím (2.99)

$$\dot{\mathcal{X}}' = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \varphi}, \text{ a } \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{X}'}. \quad (2.114)$$

Nejprve napíšeme a budeme dále upravovat rovnici pro $\dot{\mathcal{X}}'$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{X}}' &= -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \varphi} = \dot{\Omega} \sin I \sqrt{1 - \mathcal{X}'^2} \sin \varphi, \\ \frac{d}{dt}(-\cos \varepsilon) &= \dot{\Omega} \sin I \sin \varepsilon \sin \varphi, \\ \sin \varepsilon \dot{\varepsilon} &= \dot{\Omega} \sin I \sin \varepsilon \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.115)$$

což po vydělení obou stran rovnice $\cos \varepsilon$ dá:

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = \dot{\Omega} \sin I \sin \varphi.} \quad (2.116)$$

Pro $\dot{\varphi}$ pak platí:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \mathcal{X}'} = \alpha \mathcal{X}' - \dot{\Omega} \cos I + \dot{\Omega} \cos \varphi \sin I \frac{2\mathcal{X}'}{2\sqrt{1 - \mathcal{X}'^2}}, \quad (2.117)$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = -\alpha \cos \varepsilon - \dot{\Omega} \cos I + \dot{\Omega} \sin I \cos \varphi \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}.} \quad (2.118)$$

2.2.2 Cassiniho stavy

Podívejme se teď na stacionární řešení rovnic (2.116) a (2.118), tj. $\dot{\varepsilon} = 0$ a $\dot{\varphi} = 0$. Taková řešení se pak nazývají Cassiniho stavy. Z první rovnice okamžitě plyne

$$\sin \varphi = 0, \quad (2.119)$$

odtud

$$\varphi = 0, \pi, \quad (2.120)$$

a tedy

$$\cos \varphi = \begin{cases} 1 & \text{pro } \varphi = 0 \\ -1 & \text{pro } \varphi = \pi, \end{cases} \quad (2.121)$$

což využijeme v druhé rovnici. Tu nyní napíšeme a budeme dále upravovat:

$$\begin{aligned} 0 &= -\alpha \cos \varepsilon - \dot{\Omega} \cos I \pm \dot{\Omega} \sin I \frac{\cos \varepsilon}{\sin \varepsilon}, \\ 0 &= -\alpha \sin \varepsilon \cos \varepsilon - \dot{\Omega} \cos I \sin \varepsilon \pm \dot{\Omega} \sin I \cos \varepsilon, \\ 0 &= -\alpha \sin \varepsilon \cos \varepsilon - \dot{\Omega} (\cos I \sin \varepsilon \mp \sin I \cos \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.122)$$

na což použijeme vzorec pro sinus součtu úhlů a dostaneme

$$0 = -\frac{\alpha}{2} \sin(2\varepsilon) - \dot{\Omega} \sin(\varepsilon \mp I), \quad (2.123)$$

$$\boxed{\kappa \sin(2\varepsilon) = -\sin(\varepsilon \mp I)}, \quad (2.124)$$

kde znaménko „−“ odpovídá $\varphi = 0$ a „+“ odpovídá $\varphi = \pi$. Parametr κ jsme zavedli vztahem:

$$\kappa = \frac{\alpha}{2\dot{\Omega}}. \quad (2.125)$$

V závislosti na velikosti parametru κ jsou možné 2, 3 nebo 4 stacionární řešení.

$$|\kappa| \begin{cases} < \kappa_* & 2 \text{ řešení} \\ = \kappa_* & 3 \text{ řešení} \\ > \kappa_* & 4 \text{ řešení,} \end{cases} \quad (2.126)$$

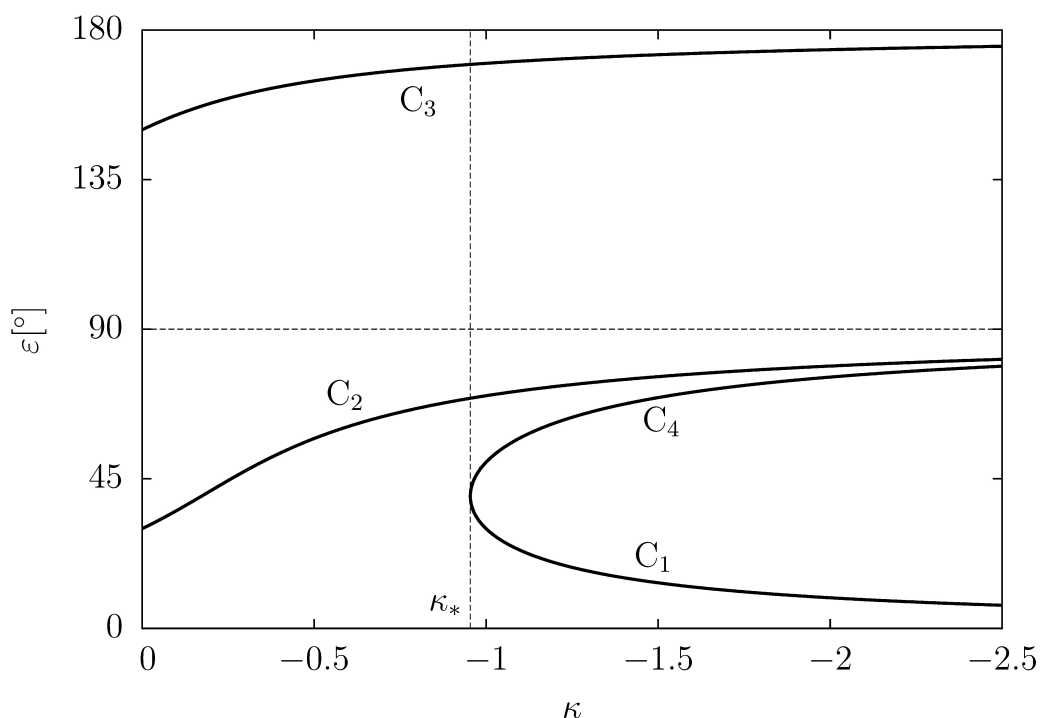
kde κ_* označuje

$$\kappa_* = \frac{1}{2} (\sin^{2/3} I + \cos^{2/3} I)^{3/2}. \quad (2.127)$$

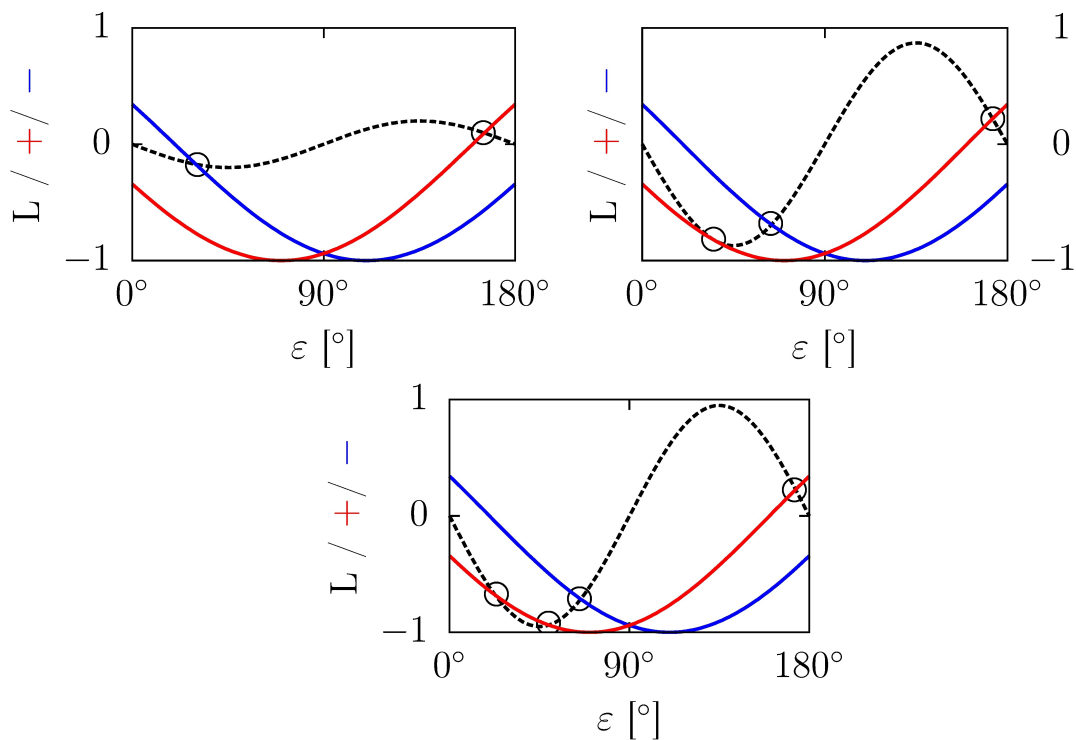
Obrázek 2.9 zobrazuje polohy a počet Cassiniho stavů (C_1 až C_4) v závislosti na κ . Pro větší názornost obrázku je zvolen vysoký sklon, $I = 30^\circ$. Podrobný rozbor Cassiniho stavů lze nalézt v práci Henrarda a Muriganda z roku 1987 [16].

Na obrázku 2.10 jsou vidět všechny tři možnosti v trochu jiném provedení než na obrázku 2.9 – černou přerušovanou čarou, respektive symbolem „L“, je označena levá strana rovnice, modrou barvou, respektive symbolem „−“, je označena pravá strana s variantou „−“ a červenou barvou, respektive symbolem „+“, značíme pravou stranu s „+“. Počet možných stacionárních řešení pak na obrázcích odpovídá počtu průsečíků černé křivky s barevnými. Je zajímavé, že v případě čtyř stacionárních řešení (3. graf na obrázku 2.10) tři body mají vždy obliquitu v intervalu 0° až 90° .

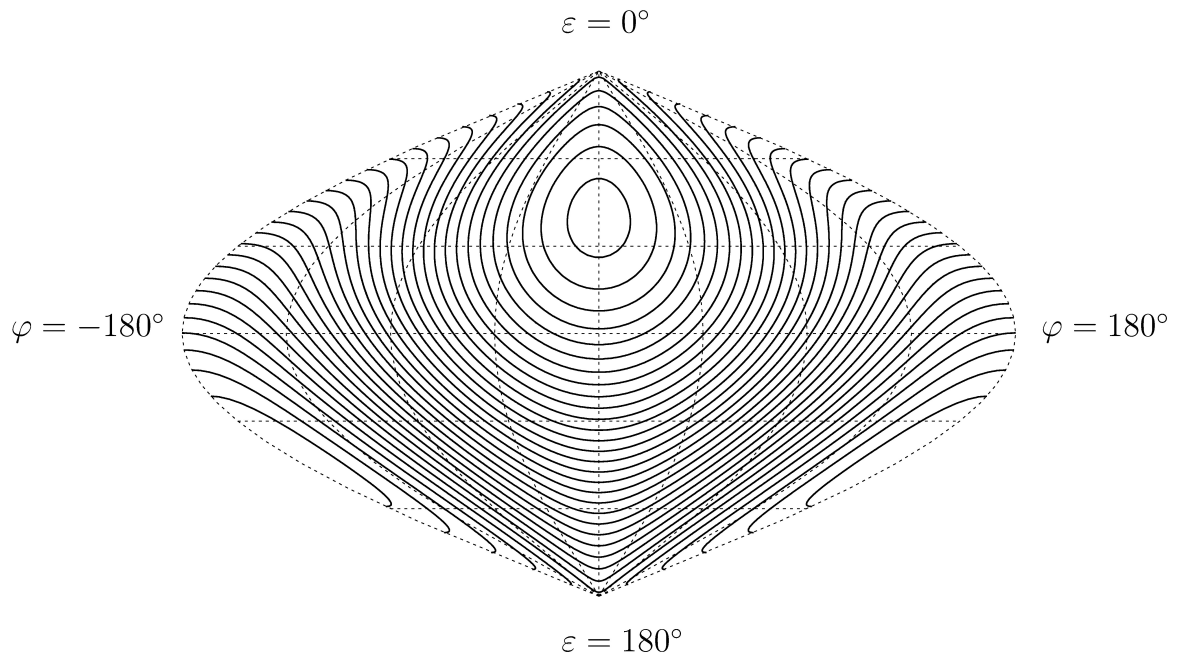
Možnost dvou stacionárních bodů je zobrazena na obrázku 2.11. Parametry Hamiltoniánu (respektive Colombova integrálu \mathcal{C}), jehož izočáry jsou na obrázku vykresleny, jsou uvedeny v popisu obrázku 2.11. Příklad se čtyřmi Cassiniho stavy je pak zobrazen na obrázku 2.12. Parametry Hamiltoniánu jsou opět uvedeny v popisu obrázku.



Obrázek 2.9: Počet a poloha Cassiniho stavů. V závislosti velikosti parametru κ mohou existovat dva, tři nebo čtyři stacionární stavy. Tyto body se nazývají Cassiniho stavy, C_1 , C_2 a C_3 jsou stabilní, C_4 je nestabilní. O spin-orbitální rezonanci mluvíme v případě, že se pól nachází v Cassiniho stavu 2, a navíc $|\kappa| > \kappa_*$. Konstanta κ_* závisí pouze na sklonu I , který byl v případě zobrazeném na obrázku roven 30° .



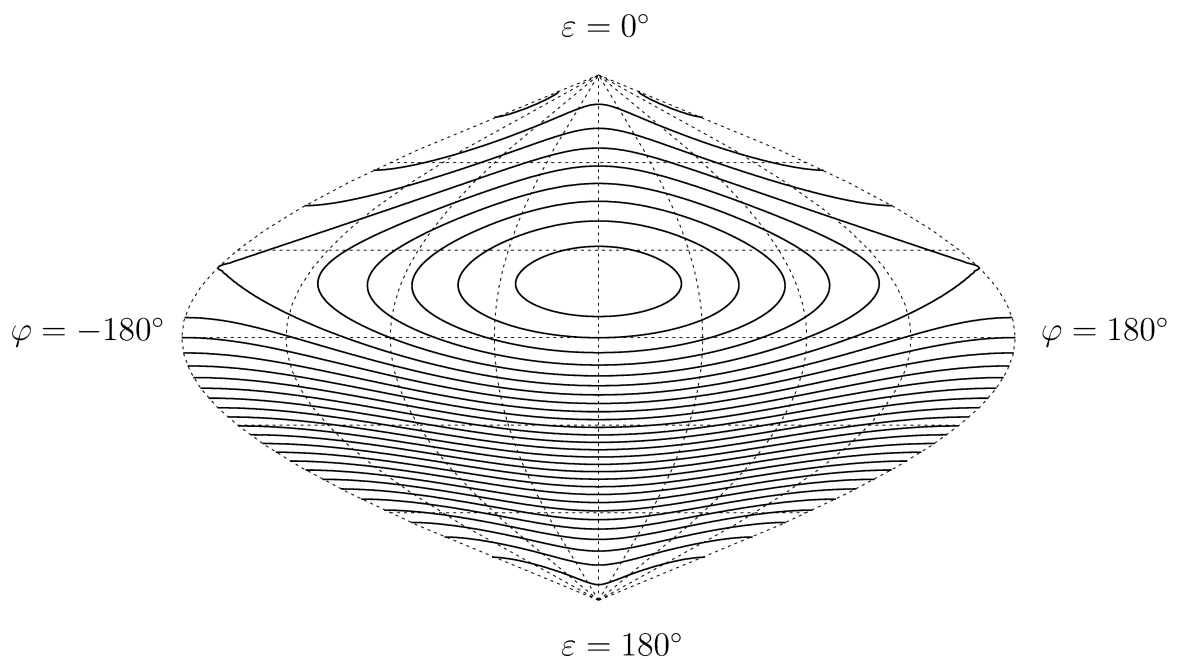
Obrázek 2.10: Grafické řešení rovnice (2.124). Levá strana rovnice je označena černou přerušovanou čarou, pravá strana ve tvaru „ $-\sin(\varepsilon + I)$ “ je označena červenou barvou, modře je pak označen průběh funkce „ $-\sin(\varepsilon - I)$ “.



Obrázek 2.11: Podoba fázového prostoru. Na obrázku jsou vykresleny křivky konstantního Hamiltoniánu \mathcal{H} pro případ dvou stacionárních (Cassiniho) stavů.

Parametry Hamiltoniánu:

$\Delta = 0.01$, $\dot{\Omega} = -100''/\text{rok}$, $P = 8.098$ h, $a = 2.4089$ au, $e = 0.142452$, $I = 50^\circ$.



Obrázek 2.12: Podoba fázového prostoru. Na obrázku jsou vykresleny křivky konstantního Hamiltoniánu \mathcal{H} pro případ čtyř stacionárních (Cassiniho) stavů.

Parametry Hamiltoniánu:

$\Delta = 0.4$, $\dot{\Omega} = -20''/\text{rok}$, $P = 8.098$ h, $a = 2.4089$ au, $e = 0.142452$, $I = 17^\circ$.

3. Numerický integrátor¹⁶

V předchozí kapitole jsme odvodili Hamiltonián (2.98), respektive Hamiltonovy rovnice (2.91) a (2.97) popisující vývoj směru rotační osy:

$$\mathcal{H}(\mathcal{X}, \psi; t) = \frac{\alpha}{2} \mathcal{X}^2 - 2\mathcal{C}\mathcal{X} + \sqrt{1 - \mathcal{X}^2} (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi), \quad (3.1)$$

respektive rovnice

$$\frac{d\mathcal{X}}{dt} = \sqrt{1 - \mathcal{X}^2} (-\mathcal{A} \cos \psi + \mathcal{B} \sin \psi), \quad (3.2)$$

a

$$\frac{d\psi}{dt} = \alpha \mathcal{X} - 2\mathcal{C} - \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{1 - \mathcal{X}^2}} (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi), \quad (3.3)$$

kde \mathcal{A} , \mathcal{B} a \mathcal{C} byly definovány vztahy:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \cos \Omega \dot{I} - \sin I \sin \Omega \dot{\Omega}, \\ \mathcal{B} &= \sin \Omega \dot{I} + \sin I \cos \Omega \dot{\Omega}, \\ \mathcal{C} &= \sin^2 \frac{I}{2} \dot{\Omega} \end{aligned} \quad (3.4)$$

a α bylo zavedeno vztahem

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{Gm'}{a^3 \eta^3 \omega} \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{C}. \quad (3.5)$$

Parametr α , který v Hamiltoniánu vystupuje, je závislý na excentricitě e a velké poloose a . Avšak excentricita i velká poloosa jsou obě funkcemi času. Stejně tak Ω , $\dot{\Omega}$, I a \dot{I} závisí na čase. Vzhledem k tomu, že tuto závislost neznáme, nebo ji neumíme zapsat pomocí kombinace elementárních funkcí, nelze Hamiltonovy rovnice řešit. Naštěstí známe hodnoty těchto parametrů alespoň v diskrétních bodech díky integrátoru SWIFT, který umí efektivně řešit Newtonovy pohybové rovnice popisující oběžný pohyb asteroidu kolem Slunce i s přispěním gravitačního působení planet. Pak ale potřebujeme rovnice (3.2) a (3.3) řešit v těchto diskrétních bodech. Pro tento účel by samozřejmě šlo použít jednoduchou Eulerovu integrační metodu, avšak bylo by třeba volit velmi malý časový krok, protože chyba s časem roste. Tato metoda se tedy jeví z hlediska přesnosti nevhodná pro časové škály miliónů let, pro které potřebujeme asteroid studovat, nehledě na výpočetní čas. Proto budeme potřebovat výpočetně rychlou a dostatečně přesnou integrační metodu. Breiter et al. popsali v [5] efektivní integrační metodu, kterou se pokusíme na následujících stránkách stručně shrnout. Daná metoda je také v podobě zdrojového kódu v jazyce Fortran k dispozici v dodatku C na straně 129.

¹⁶V této kapitole jsou použity přeložené části textu [5].

3.1 Přímé Lieovy–Poissonovy integrátory

Na základě principů symplektické integrační metody lze rozdělit Hamiltonián na několik nezávislých částí, které umíme analyticky vyřešit. Výsledné řešení je pak kombinací jednotlivých příspěvků.

Budeme zde řešit dva možné způsoby rozdělení Hamiltoniánu – nejprve na tři a poté na dvě části. Nejprve si ale upravme Hamiltonián (3.1) při zavedení vektoru \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \mathcal{X}^2} \sin \psi \\ \sqrt{1 - \mathcal{X}^2} \cos \psi \\ \mathcal{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

a nových proměnných E a u tak, že:

$$\mathcal{K}(\mathbf{w}) = \mathcal{H}(\mathbf{v}, u) + E = \frac{\alpha(u)}{2} z^2 + \mathcal{A}(u)x + \mathcal{B}(u)y - 2\mathcal{C}(u)z + E = \text{konst.}, \quad (3.7)$$

kde¹⁷ $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, E, u) = (x, y, z, E, u)$. Zavedením těchto nových souřadnic jsme se tedy zbavili časové závislosti Hamiltoniánu \mathcal{H} . Nyní definujme Poissonovy závorky

$$\{f; g\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \mathbb{J}(\mathbf{v}) \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{w}} \right)^T, \quad (3.8)$$

kde \mathbb{J} je matice ve tvaru

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y & 0 & 0 \\ z & 0 & -x & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Toto zavedení stále splňuje Jacobiho identitu a stále platí, že „ $\dot{}$ “ je derivace podle času t jakožto nezávislé proměnné. Pohybové rovnice lze pak jednoduše zapsat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{w}} = \{\mathbf{w}; \mathcal{K}\}, \quad (3.10)$$

neboli

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{E} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = (1, 1, 1, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 & -z & y & 0 & 0 \\ z & 0 & -x & 0 & 0 \\ -y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{A}(u) \\ \mathcal{B}(u) \\ \alpha(u)z - 2\mathcal{C} \\ 1 \\ \frac{d\alpha}{du} \frac{z^2}{2} + \frac{d\mathcal{A}}{du} x + \frac{d\mathcal{B}}{du} y - 2 \frac{d\mathcal{C}}{du} z \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

¹⁷**Změna značení:** v této kapitole budeme znakem \mathbf{w} označovat vektor v pětirozměrném prostoru oproti normálnímu značení. Vektor \mathbf{v} je dle zavedení trojrozměrný. Obdobně i matice \mathbb{J} je matice 5×5 .

a po jednotlivých složkách

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha(u)zy - 2\mathcal{C}(u)y - \mathcal{B}(u)z, \\
\dot{y} &= -\alpha(u)zx + 2\mathcal{C}(u)x + \mathcal{A}(u)z, \\
\dot{z} &= -\mathcal{A}(u)y + \mathcal{B}(u)x, \\
\dot{E} &= -\frac{d\alpha}{du}\frac{z^2}{2} - \frac{d\mathcal{A}}{du}x - \frac{d\mathcal{B}}{du}y + 2\frac{d\mathcal{C}}{du}z, \\
\dot{u} &= 1.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Upravme nyní Taylorův rozvoj $\mathbf{w}(t + \tau)$:

$$\mathbf{w}(t + \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{w}(t) \tau^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tau^k \frac{d^k}{dt^k} \right) \mathbf{w}(t) = \exp\left(\tau \frac{d}{dt}\right) \mathbf{w}(t). \tag{3.13}$$

Exponenciálu v poslední rovnici označujeme Ψ_τ , což je operátor propagace v čase, kterým působíme na \mathbf{w}

$$\mathbf{w}(t + \tau) = \Psi_\tau \mathbf{w}(t). \tag{3.14}$$

3.1.1 Rozdělení Hamiltoniánu na tři části

Hamiltonián \mathcal{K} rozdělme na tři části:

$$\mathcal{K}(\mathbf{w}) = \mathcal{K}_0(E) + \mathcal{K}_1(z, u) + \mathcal{K}_2(\mathbf{v}, u), \tag{3.15}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_0 &= E, \\
\mathcal{K}_1 &= \frac{\alpha(u)}{2} z^2, \\
\mathcal{K}_2 &= \mathcal{A}(u)x + \mathcal{B}(u)y - 2\mathcal{C}(u)z.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

1) Část \mathcal{K}_0

Pohybové rovnice generované Hamiltoniánem \mathcal{K}_0 jsou pak

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}} &= 0, \\
\dot{E} &= 0, \\
\dot{u} &= 1.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Propagaci v čase vyjádříme pomocí operátoru $\Psi_{0,\tau}$:

$$\begin{aligned}
\Psi_{0,\tau} \mathbf{v} &= \mathbf{v}, \\
\Psi_{0,\tau} E &= E, \\
\Psi_{0,\tau} u &= u + \tau.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Poznamenejme, že zbývající části \mathcal{K}_1 a \mathcal{K}_2 neobsahují E , a tedy díky tvaru \mathbb{J} bude u konstantní.

2) Část \mathcal{K}_1

Část \mathcal{K}_1 obsahuje jen jeden člen, který je úměrný z^2 . Pohybové rovnice

$$\dot{\mathbf{w}} = \{\mathbf{w}; \mathcal{K}_1\} \quad (3.19)$$

budou popisovat rotaci kolem osy z s frekvencí αz :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(u)zy \\ \dot{y} &= -\alpha(u)zx \\ \dot{z} &= 0 \\ \dot{E} &= -\frac{d\alpha(u)}{du} \frac{z^2}{2} \\ \dot{u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Řešením těchto rovnic dostaneme operátor pro propagaci v čase pro vektor \mathbf{v} :

$$\Psi_{1,\tau} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}, \quad (3.21)$$

kde $\psi = \alpha(u)z\tau$. Operátor pro časový vývoj je jednoduše

$$\Psi_{1,\tau} u = u. \quad (3.22)$$

Operátor pro vývoj energie nebudeme potřebovat.

3) Část \mathcal{K}_2

Nyní nám už zbývají jen příspěvky od Hamiltoniánu \mathcal{K}_2 . Pohybové rovnice lze zapsat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & -2\mathcal{C}(u) & -\mathcal{B}(u) \\ 2\mathcal{C}(u) & 0 & \mathcal{A}(u) \\ \mathcal{B}(u) & -\mathcal{A}(u) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (3.23)$$

kde $\boldsymbol{\omega} = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, 2\mathcal{C})$. Tato rovnice popisuje rotaci vektoru \mathbf{v} kolem konstantního vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Řešením těchto rovnic dostaneme operátor pro propagaci v čase pro vektor \mathbf{v} :

$$\Psi_{2,\tau} \mathbf{v} = \frac{\mathbb{M}}{\omega^2} \mathbf{v}, \quad (3.24)$$

kde složky matice \mathbb{M} jsou:

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \mathcal{A}^2 + (\mathcal{B}^2 + 4\mathcal{C}^2) \cos(\omega\tau), \\
M_{12} &= 2\mathcal{A}\mathcal{B} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - 2\mathcal{C}\omega \sin(\omega\tau), \\
M_{13} &= -4\mathcal{A}\mathcal{C} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - \mathcal{B}\omega \sin(\omega\tau), \\
M_{21} &= 2\mathcal{A}\mathcal{B} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + 2\mathcal{C}\omega \sin(\omega\tau), \\
M_{22} &= \mathcal{B}^2 + (\mathcal{A}^2 + 4\mathcal{C}^2) \cos(\omega\tau), \\
M_{23} &= -4\mathcal{B}\mathcal{C} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + \mathcal{A}\omega \sin(\omega\tau), \\
M_{31} &= -4\mathcal{A}\mathcal{C} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + \mathcal{B}\omega \sin(\omega\tau), \\
M_{32} &= -4\mathcal{B}\mathcal{C} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - \mathcal{A}\omega \sin(\omega\tau), \\
M_{33} &= 4\mathcal{C}^2 + (\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2) \cos(\omega\tau),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

kde

$$\omega = \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + 4\mathcal{C}^2}. \tag{3.26}$$

Pro \dot{E} a \dot{u} platí vztahy:

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= -\mathbf{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{du}, \\
\dot{u} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

takže operátor Ψ pro proměnnou u bude mít tvar

$$\Psi_{2,\tau}u = u. \tag{3.28}$$

V případě, že známe explicitní tvar jednotlivých částí, můžeme aproximovat řešení rovnice (3.12) pro krok od t do $t+h$, složením všech operátorů propagace Ψ :

$$\mathbf{w}(t+h) = \Psi_{2,h} \circ \Psi_{1,h} \circ \Psi_{0,h} \mathbf{w}(t) + O(h^2). \tag{3.29}$$

3.1.2 Rozdělení Hamiltoniánu na dvě části

Rozdělme nyní \mathcal{K} na dvě části:

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_{20}, \tag{3.30}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 &= \frac{\alpha(u)}{2} z^2, \\
\mathcal{K}_{20} &= \mathcal{A}(u)x + \mathcal{B}(u)y - 2\mathcal{C}(u)z + E = \boldsymbol{\omega}(u) \cdot \mathbf{v} + E.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Vzhledem ke tvaru \mathcal{K}_1 bude mít operátor Ψ_1 stejný tvar jako v předchozí části. Druhá část \mathcal{K}_{20} pak vede na rovnice

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{3.32}$$

$$\dot{E} = -\mathbf{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{du}, \quad (3.33)$$

$$\dot{u} = 1. \quad (3.34)$$

Rovnice (3.23) a (3.32) nebo (3.27) a (3.33) vypadají na první pohled podobně, ale to co je dělá rozdílnými, je právě poslední rovnice (3.34) $\dot{u} = 1$.

Rovnice (3.32) popisuje chování vektoru \mathbf{e} , který je v inerciálním prostoru konstantní, v novém neinerciálním prostoru, kde $\mathbf{e}' = \mathbf{v}$. Operátor časového vývoje pak vyjádříme:

$$\Psi_{20,\tau} \mathbf{v} = \mathbb{M}_{20} \mathbf{v}, \quad (3.35)$$

kde \mathbb{M}_{20} je matice přechodu do inerciálního vztažného systému v čase $t = u$ a pak zpět do systému, který je spojen s dráhou v čase $t + \tau$. Tedy

$$\mathbb{M}_{20} = \mathbb{R}_3(-\Omega_1)\mathbb{R}_1(I_1)\mathbb{R}_3(\Omega_1 - \Omega_0)\mathbb{R}_1(-I_0)\mathbb{R}_3(\Omega_0), \quad (3.36)$$

kde $\mathbb{R}_i(\phi)$ je matice otočení kolem i -té osy o úhel ϕ a

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega(u), \\ \Omega_1 &= \Omega(u + \tau), \\ I_0 &= I(u), \\ I_1 &= I(u + \tau). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Jak jsme několikrát zmínili v minulé kapitole, je výhodnější používat místo Keplerových nesingulární elementy q, p . Pokud tedy místo Ω_0 a I_0 použijeme q_0 a p_0 , za Ω_1 a I_1 vezmeme q_1 a p_1 , lze za použití matice

$$\mathbb{R}(q, p) = \begin{pmatrix} 1 - 2p^2 & 2qp & 2p\vartheta \\ 2pq & 1 - 2q^2 & -2q\vartheta \\ -2p\vartheta & 2q\vartheta & 2\vartheta^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

kde $\vartheta = \sqrt{1 - q^2 - p^2}$, přepsat matici \mathbb{M}_{20} do jednoduchého tvaru

$$\mathbb{M}_{20} = [\mathbb{R}(q_1, p_1)]^T \mathbb{R}(q_0, p_0). \quad (3.39)$$

Pro čas obdobně jako v případě rozdělení na tři části platí:

$$\Psi_{20,\tau} u = u + \tau, \quad (3.40)$$

čímž máme Ψ_{20} hotový¹⁸. Můžeme tedy zapsat propagaci vektoru \mathbf{w} v čase složením operátorů Ψ_1 a Ψ_{20} :

$$\mathbf{w}(t + h) = \Psi_{1,h} \circ \Psi_{20,h} \mathbf{w}(t) + O(h^2). \quad (3.41)$$

¹⁸Znalost vývoje E opět není pro naše účely potřeba.

3.1.3 Leapfrogging

Integrační algoritmy prvního řádu, které byly popsány v předchozích částech této kapitoly mají výhodu jen v tom, že používají oskulační elementy s pevným integračním krokem h . Avšak jejich nízká přesnost je většinou nedostatečná. Na druhou stranu integrátory vyšších řádů (třetího a vyšší) používají zpětné mezikroky, aby se zvýšila jejich přesnost, čímž se ale dopouštíme větších kumulativních chyb způsobených zaokrouhlováním. Další jejich nevýhodou je, že potřebují nerovnoměrné mapování oskulačních elementů. Tyto nevýhody stojí zřejmě za vysokým množstvím numerických integrátorů, které pracují na principu přeskokování (leapfrogging), který je také znám jako Newtonova–Strömerova–Verletova metoda. Tato metoda používá pouze dopředné kroky s rovnoměrně rozmístěnými mezikroky, což je pro náš případ zvláště výhodné. Existují samozřejmě i algoritmy vyšších řádů, které pracují s rozděleným Hamiltoniánem, aniž by musely provádět zpětné kroky, ale ty jsou omezeny konkrétním tvarem Hamiltoniánu. V našem případě by je bylo možné použít v metodě pracující s Hamiltoniánem rozděleným na dvě části za předpokladu $z\alpha \ll \omega$ nebo $z\alpha \gg \omega$. Pro malé poruchy by bylo možné použít také symplektické korektory, a tím vylepšit metody prvního řádu nebo druhého řádu.

Pro celkově jednodušší algoritmus a hlavně rovnoměrné integrační kroky použijeme zmíněný Newtonův–Strömerův–Verletův algoritmus. Tato metoda použitá na integrátor Hamiltoniánu složeného ze tří částí vede na

$$\mathbf{w}(t + \tau) = \Psi_{0,h/2} \circ \Psi_{1,h/2} \circ \Psi_{2,h} \circ \Psi_{1,h/2} \circ \Psi_{0,h/2} \mathbf{w}(t) + O(h^3) \quad (3.42)$$

a obdobně pro dvoučástový případ:

$$\mathbf{w}(t + \tau) = \Psi_{1,h/2} \circ \Psi_{20,h} \circ \Psi_{1,h/2} \mathbf{w}(t) + O(h^3). \quad (3.43)$$

Druhou metodu jsme použili v programu `Spin_dynamics_integrator`, který je k dispozici v dodatku C na straně 129. Možné výsledky tohoto programu, lze najít v dalších kapitolách, kde jsou podrobně diskutovány jednotlivé asteroidy.

4. Asteroid 20 Massalia – kompletní analýza dat

V této kapitole se budeme podrobně zabývat asteroidem 20 Massalia – zpracováním dostupných fotometrických dat, jejich analýzou a následným určením směru rotační osy a tvaru asteroidu. Nakonec probereme možnosti a podmínky zachycení Massalie ve spin-orbitální rezonanci s planetární frekvencí s_6 .

Asteroid s pořadovým číslem 20 byl objeven dvěma nazávislými pozorovateli – 19. září 1852 italským astronomem Annibale de Gasparisem, který pozoroval v Neapoli, a o noc později francouzským astronomem Jeanem Chacornacem v Marseille. Po druhém z měst je pak tento asteroid pojmenován.¹⁹

Jde o asteroid spektrálního typu S ([9]), což jsou běžné kamenné asteroidy skládající se z hořčnatých a železitých silikátů. S četností 17 % jde o druhý nejběžnější typ ve Sluneční soustavě. Ve vnitřní části hlavního pásu jde dokonce o dominantní spektrální typ. Družice Hipparcos pozorovala blízký průlet Massalie kolem asteroidu 44 Nysa v roce 1992, z čehož se J. Bangeovi [3] podařilo určit hmotnost a hustotu Massalie:

$$\begin{aligned} m_{\text{Mass}} &= (2.42 \pm 0.41) \cdot 10^{-12} M_{\odot} \\ \rho_{\text{Mass}} &= (2.67 \pm 1.06) \text{ g/cm}^3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Další parametry, které budou potřeba ke studiu vývoje rotační osy, shrnuje tabulka 4.1:

Velká poloosa	2.40851 au	Vlastní frekvence s	-45.1161 "/rok
Excentricita	0.142596	Vlastní frekvence g	40.8761 "/rok
Sklon dráhy	0.708°		

Tabulka 4.1: 20 Massalia – parametry, převzato z [2].

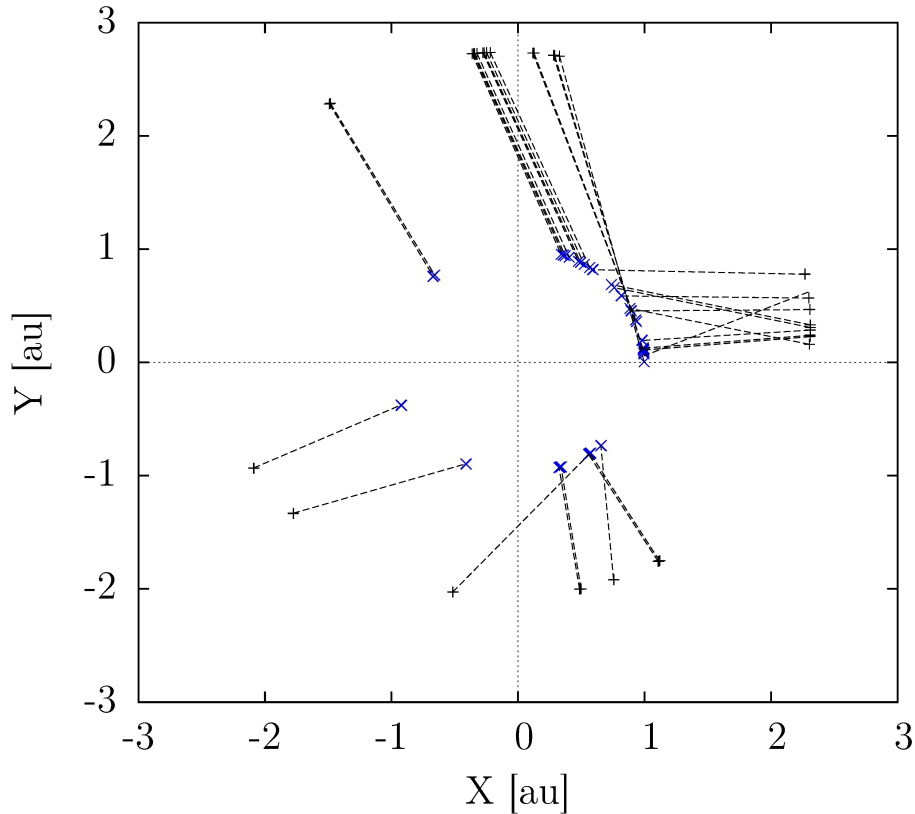
4.1 Fotometrická data

Pro celkovou analýzu toho, zda se Massalia nachází v rezonančním stavu či nikoli, zejména k určení parametru Δ a směru rotační osy, jsme použili metodu inverze světelných křivek získaných fotometrickým pozorováním. Tuto metodu vyvinuli Kaasalainen a Torppa ([19] a [20]). Použili jsme světelné křivky z [11], [17] a tři jsem na jaře 2011 napozoroval sám. Celkem bylo použitelných 33 světelných křivek pokrývajících období od 1955 do roku 2012. Na obrázku 4.1 jsou zobrazeny polohy Země modře a Massalie černě – jednotlivé body označují pozorovací noci, popřípadě skupinu pozorovacích nocí v rozmezí několika týdnů. Přerušovanou čarou je pak spojena poloha Země a Massalie v danou pozorovací noc.

Data Massalie pořizená metodou diferenciální fotometrie z ondřejovského 65cm dalekohledu (observatoř č. 557 dle IAU²⁰) jsou zobrazena na obrázku 4.2. V té

¹⁹Jde o přepis názvu tohoto města v řečtině: Marseille – *Μασσαλία*.

²⁰International Astronomical Union = Mezinárodní Astronomická Unie



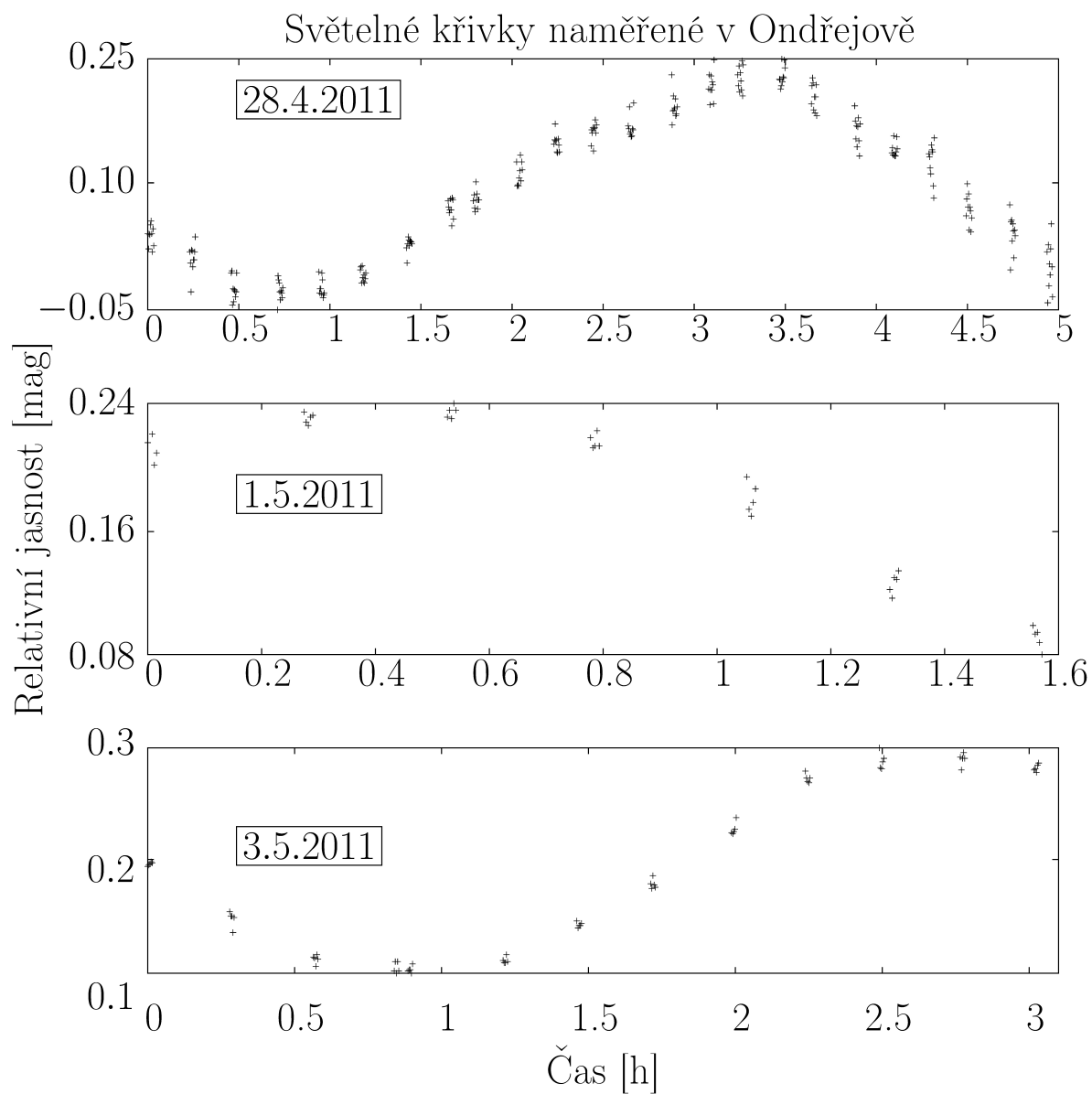
Obrázek 4.1: Geometrie pozorování. Ve středu obrázku leží Slunce, modrými křížky je označena poloha Země a černými poloha Massalie. Černou přerušovanou čarou je pak vyznačena poloha obou těles v danou pozorovací noc.

době měla Massalia jasnost kolem 10 mag ve viditelné části spektra, což je pro takto velký dalekohled příliš jasný objekt. Z toho důvodu se musely pořizovat extrémně krátké expozice – přibližně pěti sekundové – aby nedošlo k saturaci jednotlivých pixelů CCD kamery a aby byla zachována lineární závislost signálu na počtu dopadajících fotonů. Takto se vždy udělala krátká série jednou za čtvrt hodiny a zbytek času se pozorovala jiná planetka (což je dobře vidět na obrázku 4.2). Dalším problémem při pozorování byla příliš řídká hvězdná pole, kterými se Massalia pohybovala. To by u „normální“ planetky nevadilo ba naopak, ale u takto jasného objektu jsme potřebovali alespoň srovnatelně jasnou hvězdu, kterou bychom při zpracování použili jako srovnávací hvězdu. Proto také některé dny, ač by byly jinak výborné pozorovací podmínky, nešlo Massalii pozorovat. Na obrázku 4.4 je vyhledávací mapka pro noc z 3. na 4. května 2011. Je na ni dobře vidět, jak je Massalia jasnější, než naprostá většina hvězd v okolí. Úhlové rozměry mapky odpovídají zornému poli CCD čipu, který je v ohnisku ondřejovského 65cm dalekohledu.

V tabulce 4.2 jsou uvedeny všechny noci, ze kterých pochází nová data, která zatím nebyla v modelu použita.

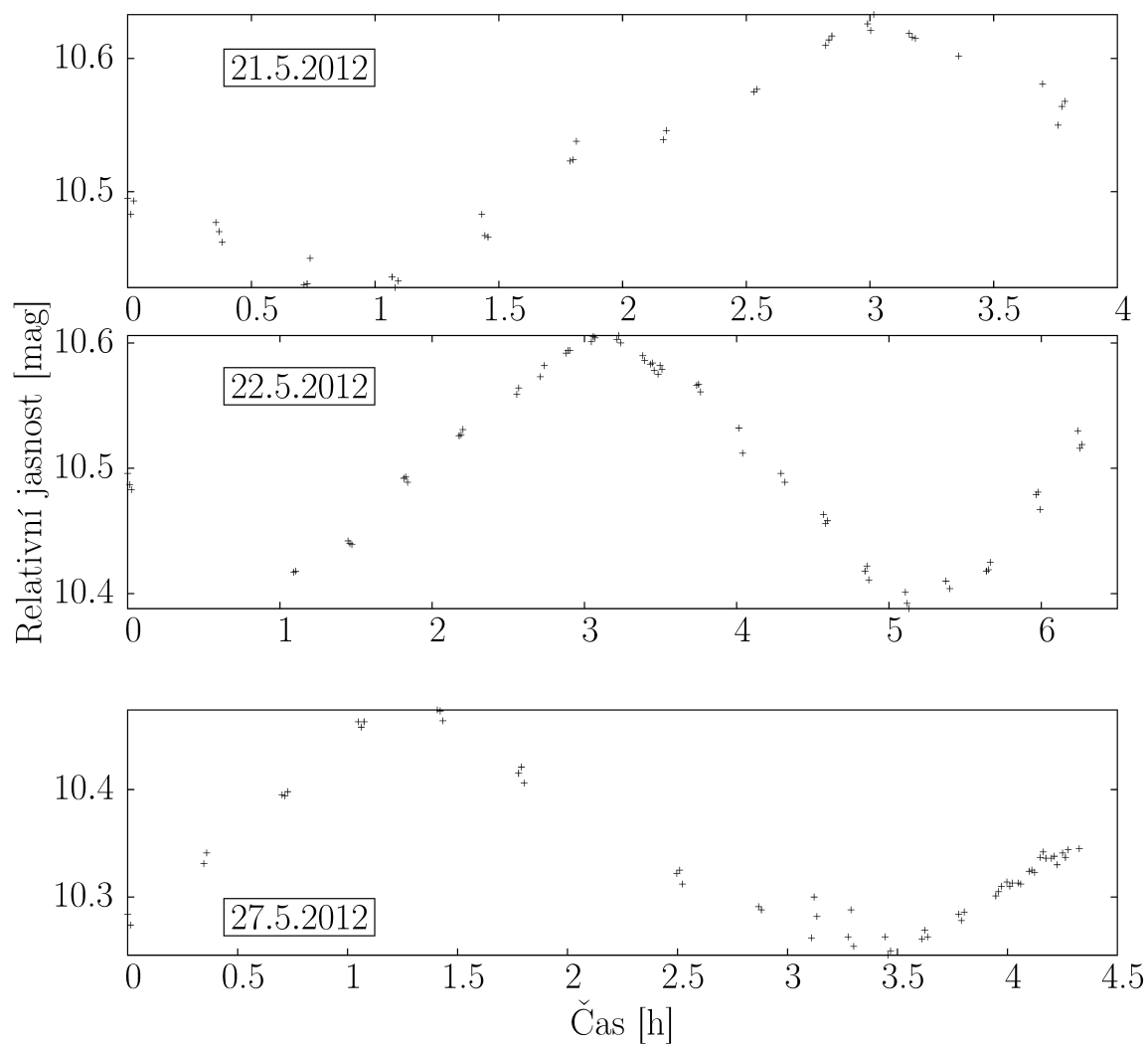
Rok	Datum	Jasnost [mag]	Fáze [°]	Eklip. délka [°]	Eklip. šířka [°]
2011	18.4.	9.9	16.5	181.96	-0.27
2011	1.5.	10.2	20.4	187.61	-0.23
2011	3.5.	10.3	20.9	188.17	-0.22
2012	20.3.	11.8	20.8	263.11	0.59
2012	24.3.	11.8	21.07	263.93	0.60
2012	25.3.	11.8	21.12	264.13	0.60
2012	10.4.	11.6	21.47	267.38	0.62
2012	11.4.	11.6	21.46	267.58	0.62
2012	16.5.	11.1	17.84	274.63	0.66
2012	19.5.	11.0	17.42	275.23	0.66
2012	21.5.	11.0	16.73	275.63	0.66
2012	22.5.	11.0	16.49	275.83	0.66
2012	27.5.	10.9	15.19	276.83	0.67
2012	29.5.	10.8	14.62	277.24	0.67
2012	30.5.	10.8	14.33	277.44	0.67
2012	31.5.	10.8	14.03	277.64	0.67
2012	7.7.	10.0	0.65	285.04	0.69

Tabulka 4.2: Pozorování Massalie. Na jaře 2011 byla Massalia pozorovaná v Ondřejově na 65cm dalekohledu. Ostatní pozorování provedl David Higgins na observatoři Hunters Hill v Austrálii. Jasnost je udávána ve viditelné oblasti spektra. Souřadnice platí pro 20:00 UT daného dne. Fáze je úhel mezi Sluncem asteroidem a pozorovatelem.

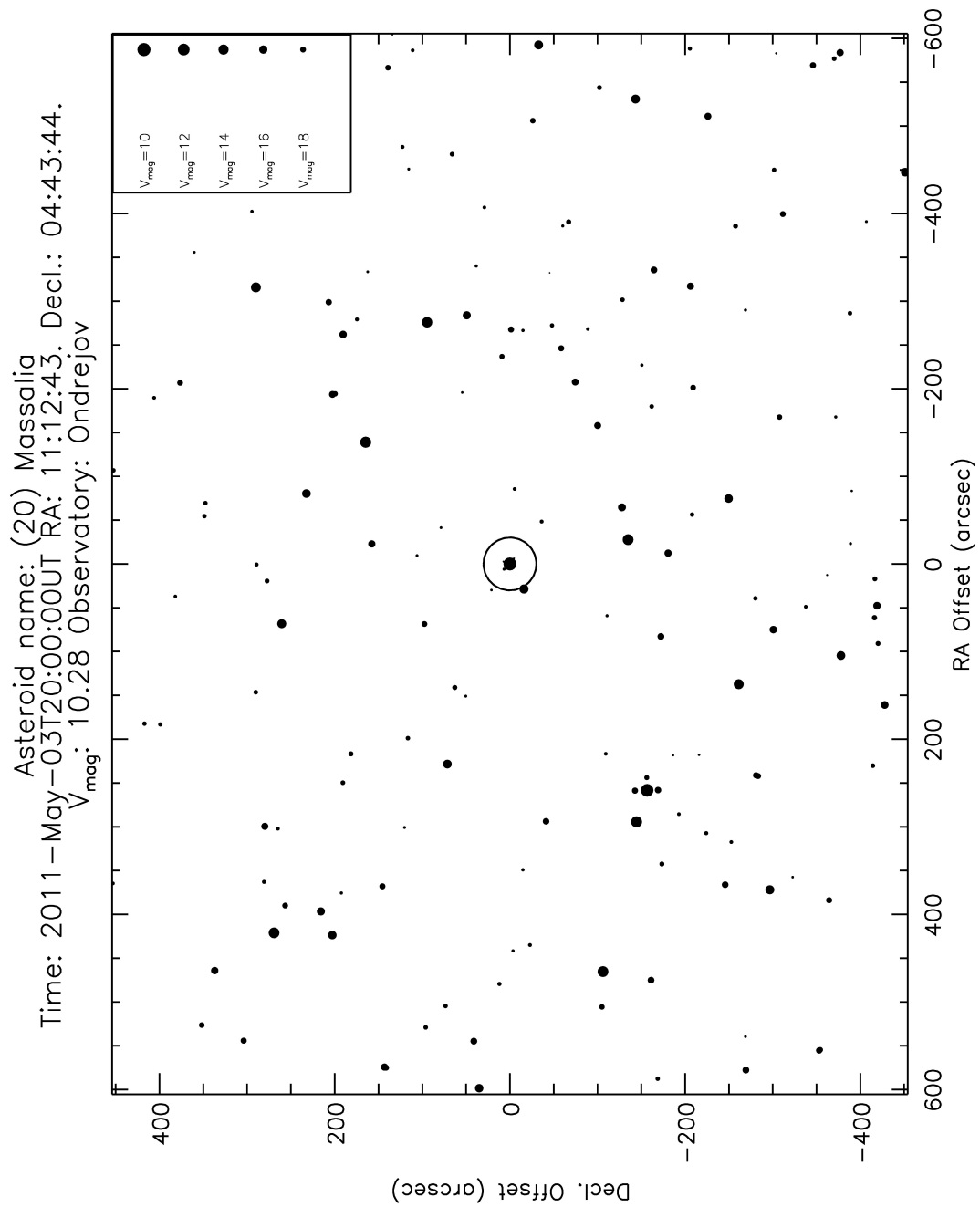


Obrázek 4.2: Na obrázku jsou zobrazeny všechny tři světelné křivky pozorované v Ondřejově na jaře 2011. Jednotlivé body jsou od sebe časově vzdáleny přibližně 8 s.

Světelné křivky naměřené D. Higginsem



Obrázek 4.3: Na obrázku jsou tři vybrané světelné křivky, které napozoroval na jaře 2012 D. Higgins v Austrálii.



Obrázek 4.4: Vyhledávací mapka pro pozorování asteroidu Massalia v noci z 3. na 4. května 2011. Převzato z [1].

4.2 Hledání rotační periody

Po shromáždění všech dostupných světelných křivek je třeba určit přesnou siderickou rotační periodu.²¹ K tomu je potřeba znát geometrii uspořádání pozorovatele (respektive Země) a Massalie vůči Slunci²². Také je třeba počítat s konečnou rychlostí světla a opravit pozorovatelem měřený čas o dobu letu světla od asteroidu k pozorovateli. Program `periodscan`, který je dostupný ke stažení ze stránek [11], pak pracuje tak, že pro každou zkoumanou periodu zkusí šest směrů rotační osy, které jsou uvedeny v tabulce 4.3.

	$\lambda_{\text{ini}} [^\circ]$	$\beta_{\text{ini}} [^\circ]$
1	0	0
2	180	0
3	90	60
4	240	60
5	90	-60
6	240	-60

Tabulka 4.3: Výchozí počáteční póly, ze kterých program `periodscan` zkouší pro danou periodu najít nejlepší řešení rotačního pólu a tvaru.

Poté se program změnou velikosti jednotlivých plošek snaží dosáhnout co nejlepší shody syntetické a naměřené světelné křivky. Nejlepší shodu pro danou periodu program zaznamená spolu s RMS²³ respektive χ^2 .

Pro χ^2 modelu platí:

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{L_o^{(i)}}{\bar{L}_o^{(i)}} - \frac{L_c^{(i)}}{\bar{L}_c^{(i)}} \right)^2, \quad (4.2)$$

kde $L_o^{(i)}$ a $L_c^{(i)}$ jsou pozorované a modelové jasnosti celé i -té světelné křivky, které jsou normalizované průměrnými hodnotami $\bar{L}_o^{(i)}$ a $\bar{L}_c^{(i)}$ opět přes i -tou křivku. Hodnotu RMS pak spočteme jednoduše

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}, \quad (4.3)$$

kde N je počet naměřených bodů.

Postup, kdy hledáme co nejlepší shodu pro dané počáteční podmínky, se opakuje, dokud program neprohledá celý interval period, který uživatel zvolil ve vstupním souboru. Pokud jsme zvolili interval zkoumaných period v okolí skutečné hodnoty, může výsledek vypadat podobně jako na obrázku 4.5, kde je zobrazen výsledek `periodscanu` pro Massalii.

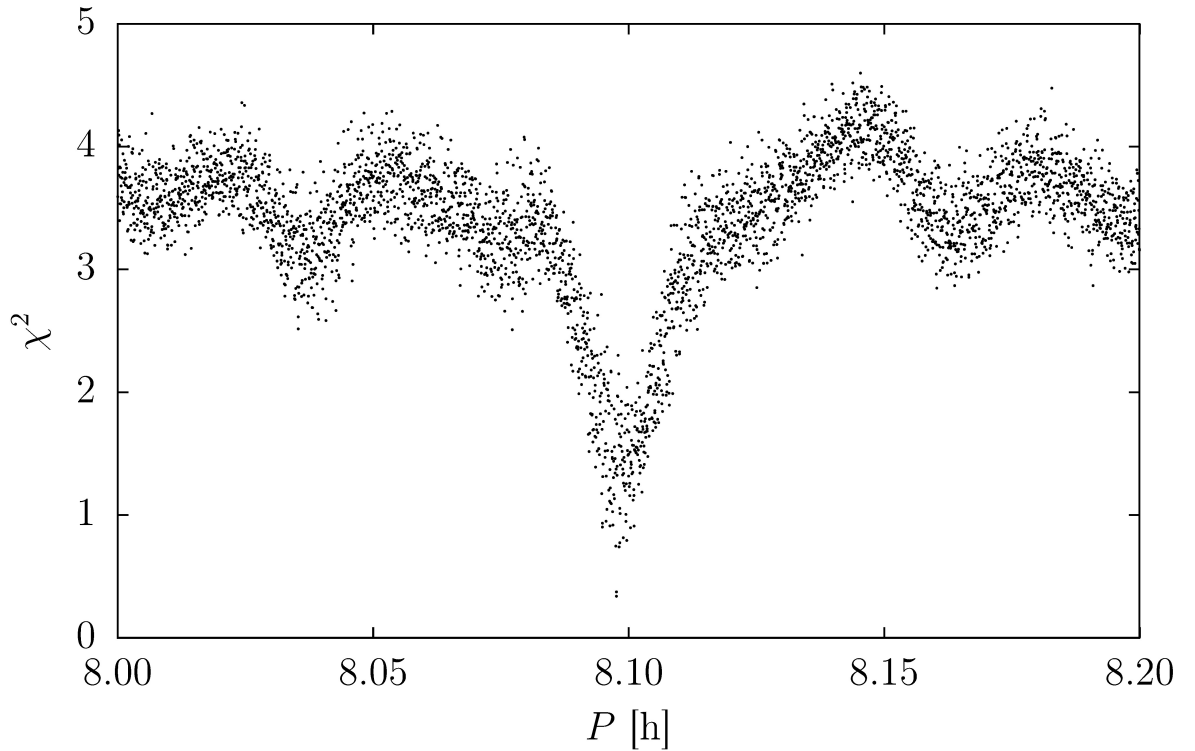
Tato fáze zabere nejvíce výpočetního času – například v případě Massalie byl zkoumaný interval dlouhý jen 12 minut, přesto výpočet trval několik dnů. v případě, že jsou k dispozici jen řídká fotometrická data (například z astrometrických

²¹Siderická perioda je doba potřebná k otočení asteroidu o 2π vzhledem k vzdáleným hvězdám. Naproti tomu synodická perioda je definovaná vzhledem k pozorovateli, a je tedy ovlivněna pohybem Země.

²²Jako vstup se v programu `periodscan` ve skutečnosti používají polohy Země a Slunce v souřadnicích, v jejichž počátku leží zkoumaný asteroid.

²³Root Mean Square = Střední kvadratická odchylka.

20 Massalia



Obrázek 4.5: Průběh χ^2 v závislosti na siderické rotační periodě Massalie. Je vidět jasné minimum v malém okolí periody $P = 8.0975$ h.

přehlídek), musí se prozkoumat řádově delší interval – až 100 hodin – pak ale výpočet může trvat i měsíce!

V našem případě jsme dostali dvě periody s podobnou hodnotou χ^2 , které však leží tak blízko vedle sebe, že půjde o jedno a totéž minimum:

P [h]	RMS	χ^2
8.097588	0.013757	0.339141
8.097590	0.014438	0.373539

Tabulka 4.4: Dva různé výsledky periodscanu – jedná se o totéž globální minimum χ^2 , do kterého však jeden z pólů (popř. oba dva) nestačily dokonvergovat.

Přesnost určení siderické periody odpovídá zhruba

$$\Delta P \simeq \frac{1}{20} \frac{P^2}{t_{\max} - t_{\min}}, \quad (4.4)$$

kde t_{\max} a t_{\min} jsou okamžiky, kdy byl asteroid pozorován naposled a kdy poprvé. Pokud bychom zkoumali jemně závislost $\chi^2(P)$, zjistili bychom, že se χ^2 periodicky mění a jednotlivá minima jsou od sebe vzdáleny o přibližně:

$$\Delta P \simeq \frac{1}{2} \frac{P^2}{t_{\max} - t_{\min}}, \quad (4.5)$$

z čehož pro periodu Massalie $P = 8.1$ h a $t_{\max} - t_{\min} = 57$ let snadno spočteme

$$\Delta P = 6.7 \cdot 10^{-5} \text{h}. \quad (4.6)$$

Avšak rozdíl nalezených period v tabulce 4.4 je pouze řádu 10^{-6} , takže z této úvahy můžeme usuzovat, že se nacházíme stále ve stejném minimu

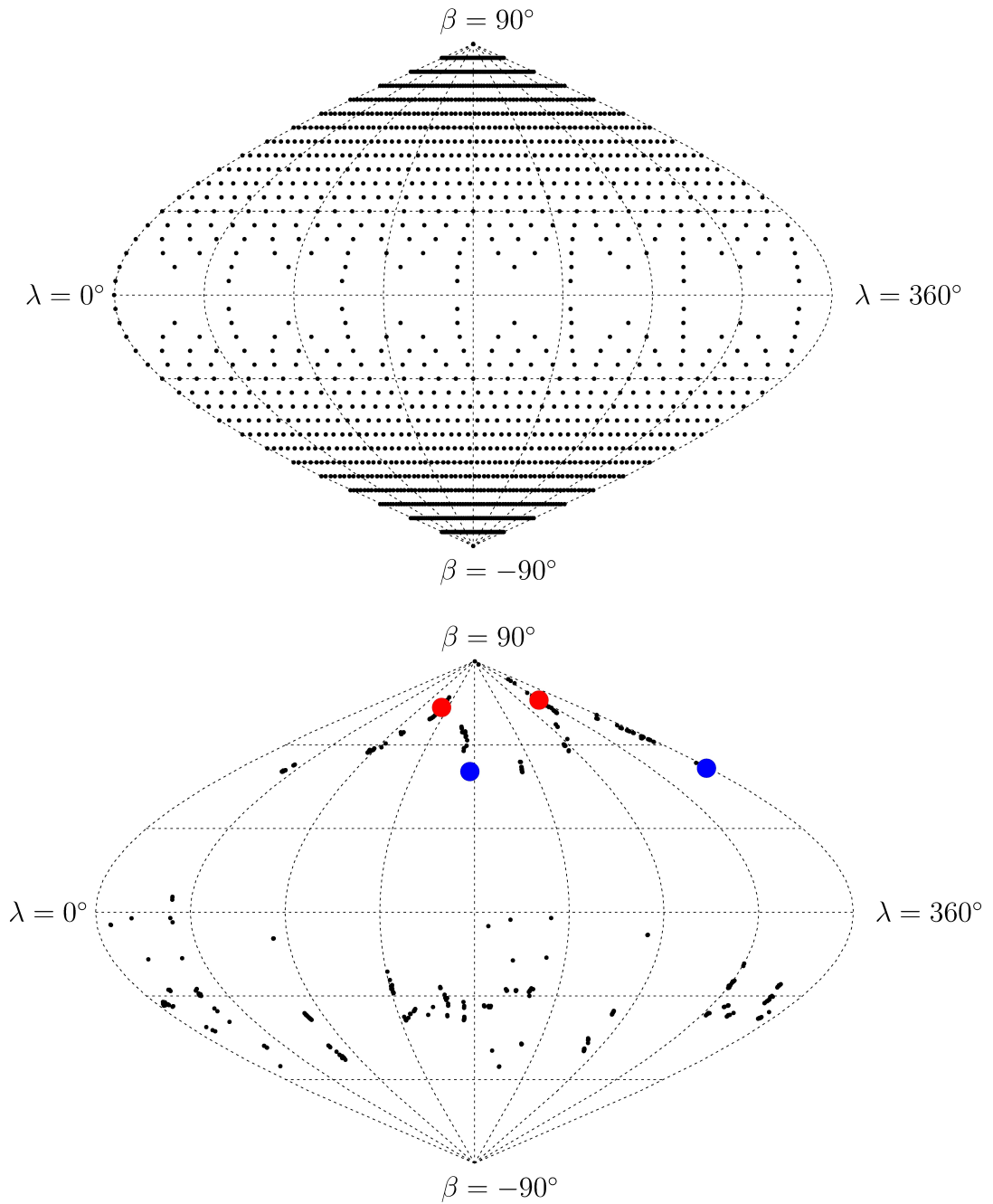
4.3 Hledání pólů a určení tvaru

Při hledání rotačních pólů se postupuje obdobně, jako tomu bylo v případě rotační periody – s tím rozdílem, že periodu již známe z programu `periodscan` a nyní ji použijeme jako počáteční hodnotu, kterou dále optimalizujeme (pro hledání pólů jsme použili $P = 8.097588$ h). Zkoumané výchozí póly rozšíříme z šesti na několik desítek až stovek.²⁴ V případě Massalie testovaných směrů bylo dokonce 1666. v horní polovině obrázku 4.6 jsou vidět výchozí směry, které byly při hledání použity. Z každého takového směru se pak program snaží dokonvergovat k co nejlepšímu řešení. Výsledek po konvergenci je zobrazen na spodní polovině obrázku 4.6. Barevně jsou označena místa kde se shlukovaly póly po konvergenci. Tím, že při určení směru osy nemá odchylka několika stupňů žádný vliv, byly za totéž řešení považovány všechny výsledné směry, které byly v 30 stupňovém okolí bodu s nejnižším χ^2 .

Ač na „jižní“ polokouli skončilo nezanedbatelné množství řešení, nebere se žádný z nich jako skutečný směr rotační osy Massalie v potaz. To je dáno tím, že **všechny** tyto směry mají mnohem horší shodu s pozorovanými daty, než je tomu u řešení na severní polokouli. Například rotační osa, která by mířila přesně do jižního pólu má $\chi^2 = 1.59$, oproti tomu kdyby mířila do pólu severního $\chi^2 = 0.36$! Pravděpodobně zde budou ležet různá lokální minima, ze kterých se však program neumí při hledání dostat, a proto ani velký počet konvergenčních kroků v tomto případě nepomohl. Toto je důsledek použití gradientní metody, která typicky konverguje do nejbližšího lokálního minima, a proto se musí testovat různé počáteční hodnoty parametrů.

²⁴Použit byl program `pole_search` od Josefa Ďurecha.

Výchozí a konečné směry rotační osy



Obrázek 4.6: Na horní polovině obrázku jsou tečkami označeny směry rotačních pólů, které sloužily jako počáteční směr, ze kterého program `pole_search` vycházel při hledání nejlepšího řešení. Na spodním obrázku jsou pak vidět výsledné směry rotačních pólů po konvergenci. Barevnými body jsou pak označeny směry s nejlepším řešením (výrazně nižší χ^2 než ostatní body).

Pro získání modelové světelné křivky a konvexního tvaru asteroidu, který je definován vrcholy (N_{points}) a jednotlivými trojúhelníky (N_{Δ}), se nakonec použijí postupně programy: `convexinv`, `minkowski` a nakonec `standardtri` – všechny dostupné v balíku programů, který lze stáhnout na stránkách [11]. Tvary všech čtyř modelů jsou vyobrazeny na obrázku 4.8. Každý modelový asteroid je zobrazen ze tří pohledů – první dva od rovníku a poslední od pólu.

Celou dobu nás zajímal směr rotačního pólu a parametr Δ , který prakticky nelze jinou metodou získat. Pro připomenutí jsme jej definovali vztahem

$$\Delta = \frac{C - \frac{1}{2}(A + B)}{C}, \quad (4.7)$$

kde A, B, C jsou momenty tenzoru setrvačnosti. Ty snadno určíme metodou popsanou v [10]. Pro tento účel jsme měli připravený program `Tensor setrvačnosti`, který byl naprogramován podle zmíněného článku. Výsledky pro všechny čtyři modely shrnuje tabulka 4.5:

P [h]	χ^2	λ [°]	β [°]	Δ	ξ [°]	Ξ	N_{points}	N_{Δ}
8.097588	0.013288	306.5	76.0	0.11	87	1.086	1014	2024
8.097588	0.013301	125.1	73.3	0.07	41	1.004	1012	2020
8.097589	0.013821	176.4	50.4	0.31	3	1.001	1006	2008
8.097590	0.013850	357.4	51.6	0.32	3	1.001	1012	2020

Tabulka 4.5: 20 Massalia – výsledky programů `pole_search`, `inertia` od Josefa Hanuše a `Tensor setrvačnosti` – více o programu v dodatku B. P je siderická rotační perioda, χ^2 je definovaný vztahem (4.2), λ a β jsou ekliptikální délka a šířka, Δ je definovaná vztahem (4.7), ξ je úhel, který svírá rotační osa a nejdelší osa tenzoru setrvačnosti, $\Xi = C/I_{33}$ a nakonec N_{points} a N_{Δ} označují počet bodů a trojúhelníků, ze kterých je daný model složen.

V předchozí tabulce byl nově zaveden úhel ξ , který svírá osa s největším momentem tenzoru setrvačnosti s rotační osou. Parametr Ξ je definován jako poměr C/I_{33} , kde I_{33} je maximální složka nediagonalizovaného tenzoru setrvačnosti s počátkem vztažného systému v těžišti asteroidu. Tento parametr je stěžejní pro určení toho, zda se jedná o reálný fyzikální model, nebo jde jen o matematické řešení, které v praxi nenastane. v teoretickém úvodu kapitoly 2 jsme předpokládali rotaci kolem hlavní osy tenzoru setrvačnosti – tj. Ξ by měl být blízký²⁵ 1. To že asteroid rotuje v základním stavu lze poznat ze světelných křivek z několika po sobě jdoucích nocí. V případě excitované rotace bychom v křivkách pozorovali více periodických složek, nejen jednu základní nebo vyšší harmonické frekvence.

Kaasalainen et al. v [21] určil rotační póly a tvary 20 asteroidů – včetně Massalie. Určili dvě možná fyzikální řešení pólu a tvaru Massalie. Tato řešení se shodují s třetím a čtvrtým pólem v tabulce 4.5. Pokud jim při analýze vyšly nějaká jiná řešení, tak šlo pouze o matematická řešení, která však nemají fyzikální opodstatnění. My jsme použili stejné křivky jako Kaasalainen, avšak po přidání nových světelných křivek z let 2011 a 2012 a po provedené analýze, nám vychází jako možné fyzikální řešení navíc i druhý pól ($\Xi_2 = 1.004$). To je už samo o sobě dosti

²⁵Obdobně by měl být i ξ blízký 0°, ale u asteroidů s „pravidelným“ tvarem se může ξ rychle měnit při malých deformacích tvaru, a proto nelze na jeho hodnotu stoprocentně spoléhat jako na ukazatel „reálnosti“ modelu.

podezřelé, že by se po přidání nových dat nezúžil okruh možných řešení, ale naopak se nejistota ještě zvětšila. Bude zde zřejmě potřeba ještě hlubší analýza dat (popřípadě nová měření), abychom mohli nějaké řešení vyloučit. V další analýze se zaměříme pouze na třetí a čtvrtý pól, které podobně určil i Kaasalainen.

Nyní je zřejmé barevné označení pólů na obrázku 4.6 – červeně označené jsou první dva póly s nefyzikálním tvarem (dle Kaasalainena [21]), zatímco reálné řešení dávají modře označené póly.

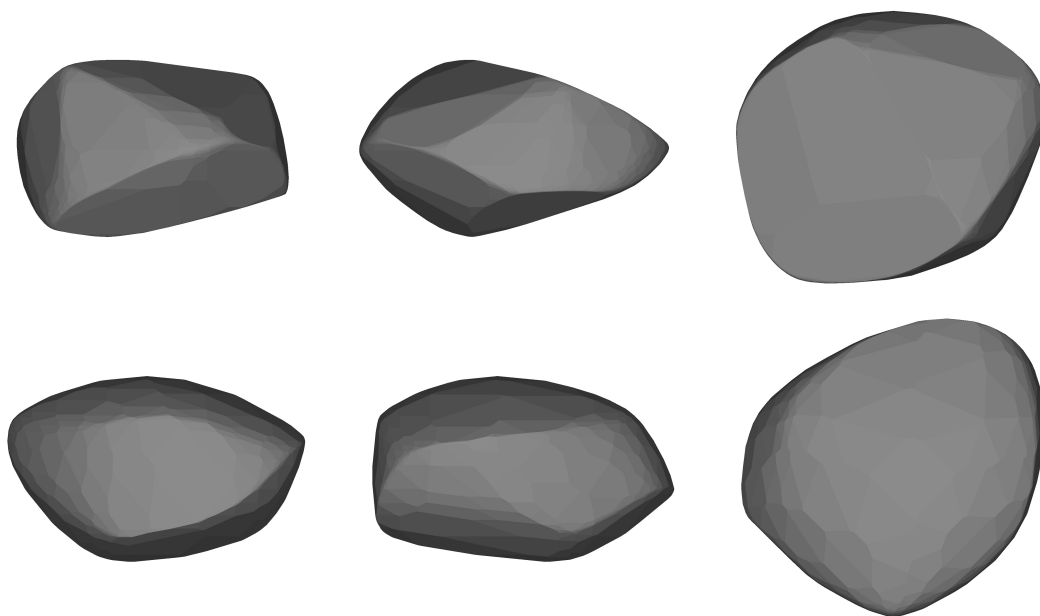
Předpoklad o rotaci v základním stavu lze odůvodnit podobou světelných křivek. Otázkou je proč jsme hned v úvodu takový stav předpokládali? Jak Burns a Safronov odvodili v [6] (a Harris v [14] na ně navázal), lze dobu T , za kterou se asteroid dostane z excitovaného stavu zpět do základního, kdy rotuje kolem nejdelší osy tenzoru setrvačnosti, odhadnout za vzorce

$$T = \frac{P^3}{\mathcal{C}^3 D^2}. \quad (4.8)$$

V této rovnici pak P označuje rotační periodu v hodinách, D je střední průměr asteroidu v kilometrech a \mathcal{C} je konstanta blízká 17, T pak vychází v miliardách let. Pokud do předchozího vzorce dosadíme známé hodnoty Massalie: $P = 8.097$ h a $D = 150$ km, dostáváme:

$$T_{\text{Mass}} \cong 4800 \text{ let.} \quad (4.9)$$

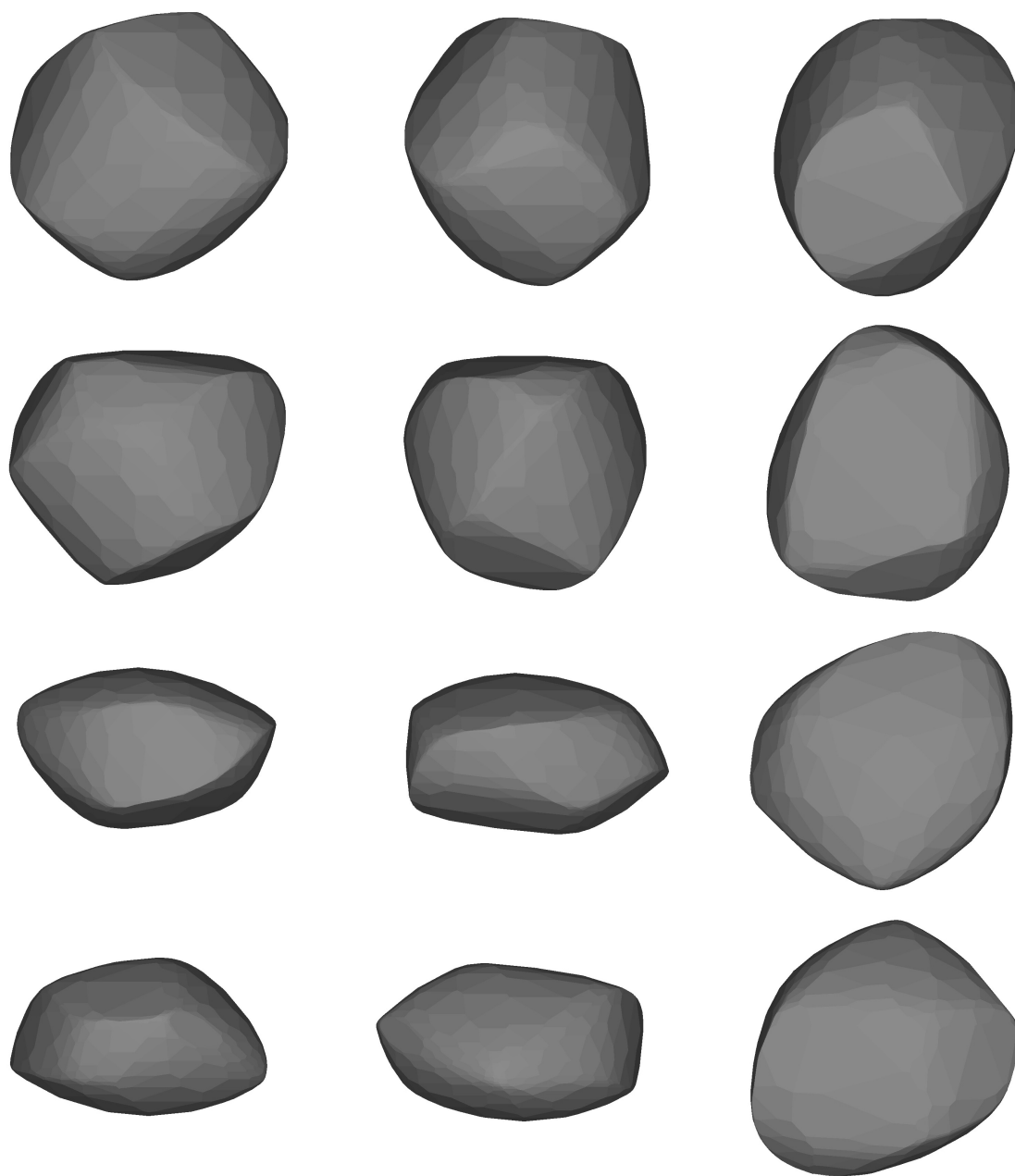
Tato doba je ovšem o pět řádů kratší než čas, který uplynul od poslední události, která mohla rotaci Massalie vyexcitovat – a sice vznik rodiny Massalia před 150 až 200 miliony lety, což bylo dokázáno numerickými simulacemi, jejichž výsledky publikovali Vokrouhlický et al. v [39].



Obrázek 4.7: Srovnání starého (horní) a nového (spodní) modelového tvaru. rotační osy obou modelů míří (v rámci chyby) stejným směrem.

Na obrázku 4.7 je vidět srovnání modelových tvarů, které odpovídají čtvrtému pólu v tabulce 4.5 před a po přidání nových dat z let 2011 a 2012. Je zřejmé

celkové zlepšení modelu, který už není tak „zubatý“ a celkově vypadá reálněji. A na obrázku 4.8 jsou pak zobrazeny modelové tvary pro všechny čtyři řešení, které nám vyšly.



Obrázek 4.8: Na obrázku jsou zobrazeny čtyři modely, které odpovídají čtyřem pólům, které jsme našli pomocí opakované konvergence s různými počátečními podmínkami. Každý model je zobrazen třikrát – první dva pohledy jsou od rovníku asteroidu a poslední směrem od pólu.

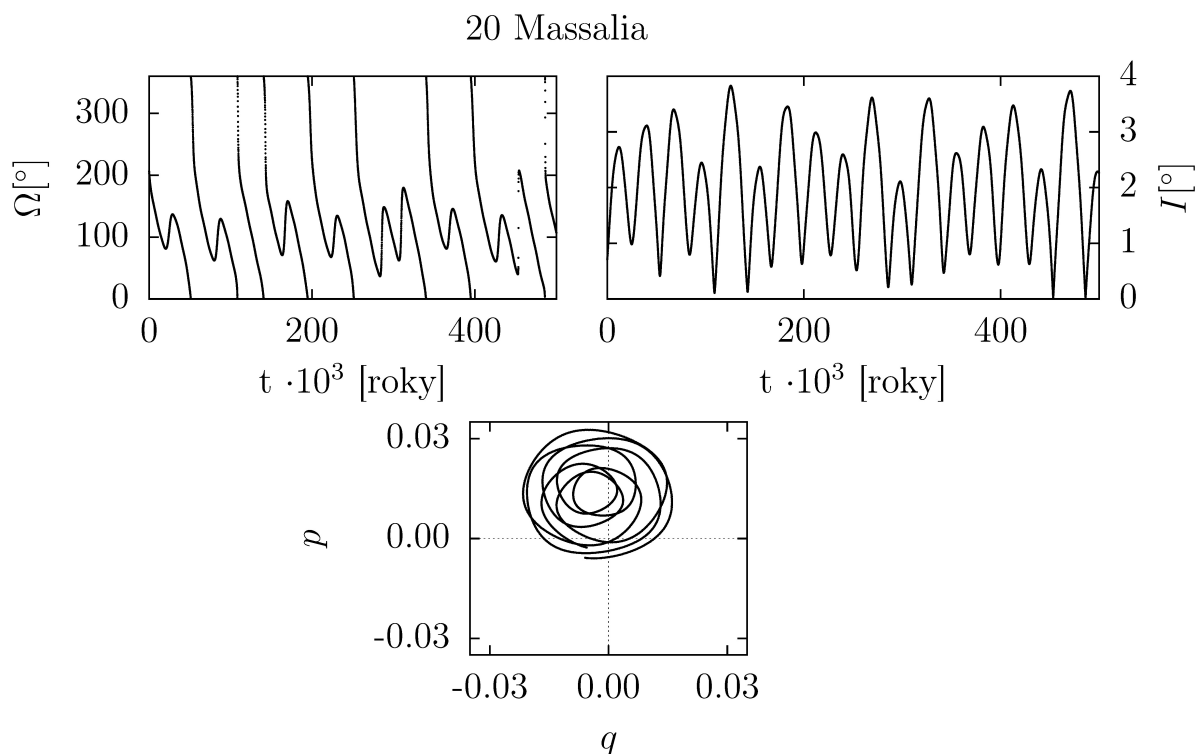
4.4 Vývoj dráhy a Fourierova spektrální analýza

Do Hamiltoniánu (2.112):

$$\mathcal{H}'(\mathcal{X}', \varphi) = \frac{\alpha}{2} \mathcal{X}'^2 - \dot{\Omega} \cos I \mathcal{X}' + \dot{\Omega} \sin I \sqrt{1 - \mathcal{X}'^2} \cos \varphi \quad (4.10)$$

vstupuje kromě rotační složky pohybu – obliquity a precesního úhlu (respektive \mathcal{X}' a φ) – také orbitální část: $I, \alpha(a(t), e(t))$. Z tohoto důvodu potřebujeme pro řešení vývoje rotační osy znát i vývoj orbitálních elementů – zejména pak a, e, I, Ω . Naštěstí existuje sofistikovaný balík programů SWIFT²⁶, který je optimalizovaný pro řešení pohybových rovnic těles v poli Slunce a ostatních planet. Celý balík, včetně dokumentace, je ke stažení ze stránek [25].

Integraci jsme spustili pro testovací částici, která měla stejnou počáteční polohu a rychlost jako Massalia ve zvoleném okamžiku. Gravitační pole bylo generováno Sluncem a osmi planetami – polohy, rychlosti a hmotnosti opět odpovídaly skutečným tělesům. Pohyb Massalie jsme sledovali po dobu deseti miliónů let s integračním krokem 5 dnů a hodnoty jsme vypisovali po 50 letech. Výsledky pro vybrané elementy jsou zobrazeny na obrázcích 4.9 a 4.10.

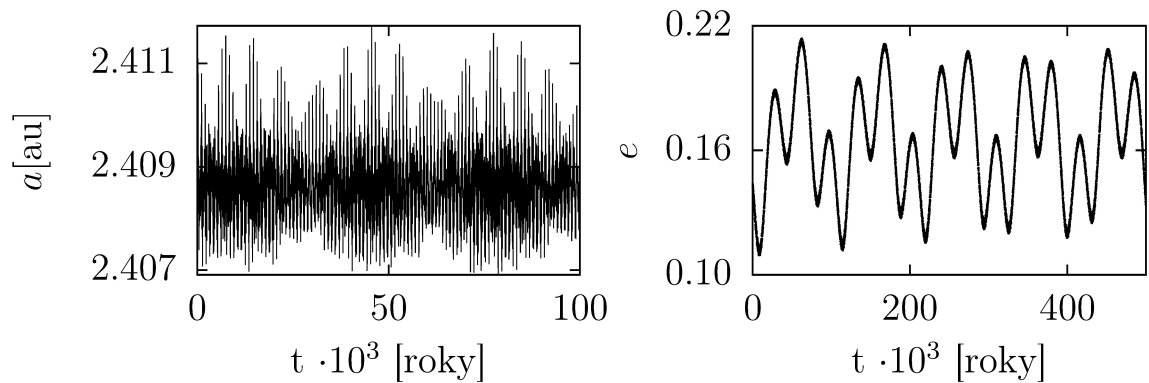


Obrázek 4.9: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 20 Massalia za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesignulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

Pro připomenutí – nesignulární proměnné q a p jsme definovali vztahem:

$$q + ip = \sin \frac{I}{2} e^{i\Omega} = \sin \frac{I}{2} [\cos \Omega + i \sin \Omega]. \quad (4.11)$$

²⁶SWIFT – a solar system integration software package.



Obrázek 4.10: Vývoj orbitálních elementů velké poloosy a a excentricity e asteroidu 20 Massalia za prvních 100 a 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let.

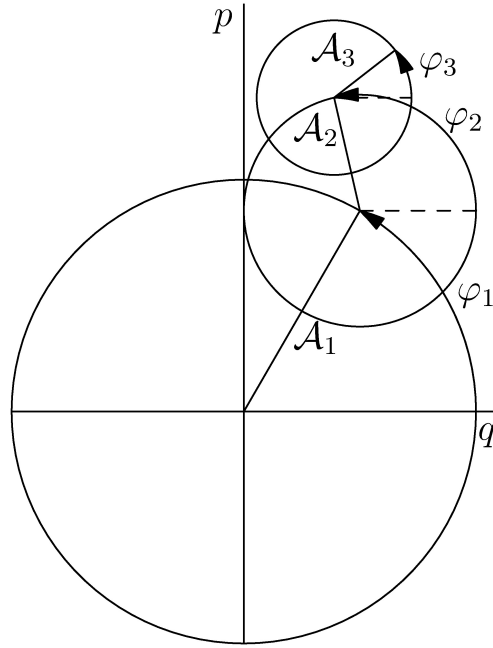
V kapitole 2 byl na příkladu Massalie ukázán rozdíl průběhu (singulárních) Keplerových elementů – délky výstupného uzlu Ω a sklonu I s časem. Ukázali jsme, že na zvolených časových intervalech Massalia neprodělává žádné dramatické změny a že občasný rychlý průběh $\Omega(t)$ je čistě důsledkem volby referenčního systému, respektive singularity Keplerových elementů pro případy s nízkým sklonem I . V Laplaceově invariantním systému se dráha pomalu stáčila v inerciálním prostoru a sklon kmital v malém rozpětí kolem střední hodnoty. Na obrázku 4.10 je pak vidět vývoj velké poloosy a a excentricity e . Až na ojedinělé rychlé nárusty a poklesy, je velká poloosa po většinu času zhruba konstantní. Přestože excentricita e se relativně rychle mění, nedostává se k extrémním hodnotám a drží se kolem 0.16. Čtenář by si mohl myslet, že takto velké změny musí mít velký dopad na model, který jsme odvodili v kapitole o precesi, ale excentricita e vystupuje v rovnicích pouze jako $\sqrt{1 - e^2}$, a proto mají její změny jen malý efekt.

Colombův model je platný za předpokladu konstantního sklonu dráhy vůči referenční rovině a rovnoměrného stáčení dráhy v inerciálním prostoru. Sklon Massalie sice není v čase konstantní, ale malé změny způsobí to, že vývoj Massalie nebude ve fázovém prostoru probíhat po izolínii Hamiltoniánu, ale bude kolem ní oscilovat. Stáčení dráhy v prostoru také bohužel rovnoměrné není. Z tohoto důvodu jsme použili aproximaci rozkladem do Fourierových řad (respektive epicyklickou aproximaci)²⁷:

$$\sin \frac{I}{2} e^{i\Omega} = q + ip \doteq \sum_{j=1}^N \mathcal{A}_j e^{i(\nu_j t + \varphi_j)}, \quad (4.12)$$

čímž „obejdeme“ nelineární závislost $\Omega(t)$. V každém členu rozvoje jsou pak splněny předpoklady Colombova modelu. Vlastně to znamená, že vývoj rotační osy nebudeme studovat v systému spojeném s asteroidem, ale v systému, který se stáčí (vůči inerciálnímu) s frekvencí ν_j .

²⁷Z technických důvodů je výhodnější Fourierovu analýzu dělat v souřadném systému spojeném s Laplaceovou rovinou. Nízkofrekvenční spektrální čáry nejsou v tomto systému tolik zašumělé a program je snáze najde a odfiltruje. Při přechodu do ekliptikálního systému se změní pouze úhel φ_j , a to o přibližně 17.4° . Amplitudy \mathcal{A}_j i frekvence ν_j budou stejné.



Obrázek 4.11: Aproximaci elementů $q + ip$ ve tvaru (4.12) si lze také snadněji představit pomocí grafického znázornění. Jde vlastně o epicyklickou aproximaci, kdy se všechny průvodiče otáčejí s frekvencí ν_j .

Na obrázku 4.11 jsou vidět v grafickém provedení první tři členy Fourierova rozvoje $q + ip$. Je vidět v porovnání s obrázkem 4.9, že tato aproximace je pro náš problém zcela přirozená.

Na naše data (výstup z integrátoru SWIFT) jsme použili zcela obecnou metodu výpočtu diskrétní Fourierovy transformace popsanou Ferrazem-Mellem v [13]. Tato metoda na rozdíl od rychlé Fourierovy transformace neklade požadavek na pevný časový rozestup analyzovaných dat, ani není potřeba mít 2^N bodů. Na druhou stranu cena za tuto obecnost je vyvážena delším výpočetním časem, který při jemném frekvenčním dělení dosahoval několika hodin.

V principu tato metoda funguje tak, že zkoumanými daty prokládá funkce ve tvaru:

$$f(t) = c_0 + c_1 \sin(\nu t) + c_2 \cos(\nu t) \quad (4.13)$$

a metodou nejmenších čtverců hledá nejlepší konstanty c_0, c_1 a c_2 pro danou frekvenci. Tímto způsobem program určí tyto konstanty pro všechny zkoumané frekvence, a zároveň s tím hledá spektrální čáru s největší amplitudou. Poté co prozkoumá celý zadaný frekvenční interval, odfiltruje program z analyzovaných dat signál, který odpovídá frekvenci s největší amplitudou, a celé hledání se opakuje na opravených datech do té doby, než je nalezen požadovaný počet spektrálních čar. V tabulce 4.6 jsou výsledky Fourierova rozkladu pro prvních 10 členů rozvoje. Dominantní jsou frekvence s – vlastní frekvence stáčení výstupního uzlu a s_6 , což je vnucená frekvence shodná s frekvencí stáčení výstupního uzlu Saturnu²⁸. Jako kontrolu správného chodu programu lze srovnat hodnotu vlastní

²⁸Tato frekvence je určená stavbou celé Sluneční soustavy a vyskytuje se tak ve spektrech i dalších planet.

j	\mathcal{A}_j	$\varphi_j[^\circ]$	$\nu_j["/\text{rok}]$
1	0.01240189	221.080879	-45.10422985
2	0.00662220	289.677883	-26.34786653
3	0.00059284	7.262683	-0.69282440
4	0.00051051	123.930940	-2.99335124
5	0.00041736	50.553873	-57.73020625
6	0.00038744	211.215643	-32.47776293
7	0.00033070	339.751697	126.84621961
8	0.00028828	297.363296	-38.97272644
9	0.00016521	264.914607	-17.74135459
10	0.00011053	271.395241	108.08963596

Tabulka 4.6: 20 Massalia – spektrální rozklad $q + \nu p$. Referenčním systémem byl v tomto případě Laplaceův invariantní systém, a to z numerických důvodů – v případě, že se použije ekliptikální systém, tak použitý program má problém s nízkofrekvenčními čarami – ν_3 a ν_4 , které jsou více zašumělé a nedokáže je pak dobře odfiltrovat.

frekvence s uvedenou v tabulce 4.1 a frekvenci ν_1 spočtenou naším programem. Pozitivní zpětnou vazbou je pro nás fakt, že amplitudy \mathcal{A}_j rychle klesají, a tedy že aproximace Fourierovými řadami byla oprávněná.

Na obrázku 4.12 je vidět průběh amplitudy s frekvencí. Jak je vidět, že spektrální čáry nejsou dokonale ostré. To se projeví hlavně při rozvoji do vyšších řádů, kdy po odfiltrování frekvence zbyde v datech její reziduum. Při rozvoji do přibližně 10. řádu se však tyto rezidua neprojeví. Pojmenování čar na obrázku souvisí s původem čáry. Nucené planetární frekvence jsou označeny číslem, které přísluší dané planetě (viz tabulka 4.7). Vlastní frekvence, které jsou určené polohou asteroidu ve Sluneční soustavě jsou označeny písmeny s a g . Spektrální čáry, které jsou kombinací nějakých základních frekvencí, jsou označeny příslušným popiskem. Například čára „ $s_6 - (g - g_6)$ “²⁹ je kombinací vlastní frekvence stáčení pericentra, nucené frekvence stáčení pericentra Saturnu a nucené frekvence stáčení výstupného uzlu Saturnu.

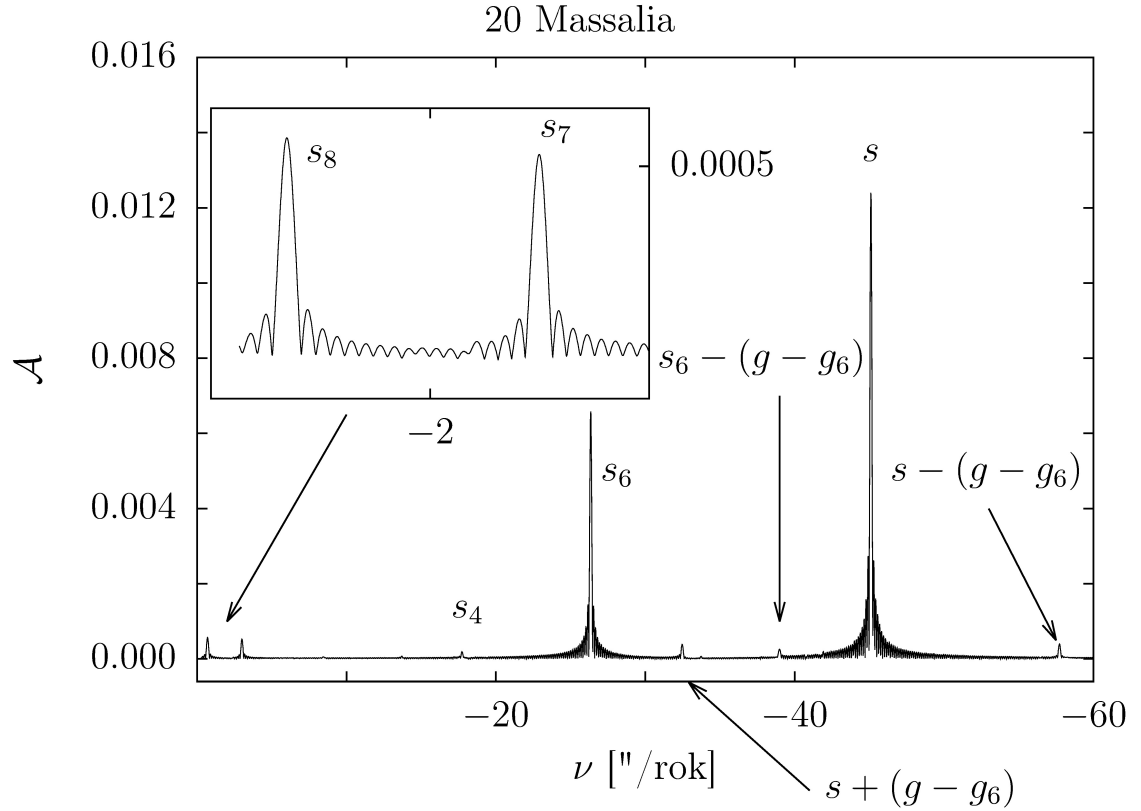
Hodnoty planetárních frekvencí uvedené v tabulce 4.7 jsou převzaty z Laskarovy práce [24].

Tyto frekvence bychom také mohli získat tak, že bychom stejnou spektrální analýzu provedli pro každou planetu. Na obrázcích 4.13 a 4.14 je ukázán spektrální rozklad³⁰ $q + \nu p$ Jupiteru a Saturnu. Na obou dvou spektrech je vidět dominantní frekvence $s_6 = -26.347$ "/rok. Frekvence a amplitudy lze porovnat s údaji v Laskarově článku [24]. Fáze se liší o konstantu $\approx 17^\circ$, což je způsobeno tím, že Laskar prováděl frekvenční analýzu v ekliptikálním systému. Tradičně se frekvence s_5 volí nulová, což odpovídá partikulárnímu řešení Lagrangeových planetárních rovnic, které pak popisuje koplanární případ celé soustavy.

Další spektra jsou uvedena v kapitole 5 a také v obrazové příloze A na straně 101. U všech spekter jsou nejsilnější vlastní frekvence s a nucená frekvence s_6 . Frekvence s_8 a s_7 se také vyskytují, ale mají složitější průběh. Nejvýraznější mezi „slabými“ čarami jsou zrcadlové čáry $s \pm (g - g_6)$, které mají podobnou intenzitu.

²⁹Frekvence $g - g_6$ se v literatuře označuje symbolem ν_6 . Jde o sekulární rezonanci, která hraje důležitou roli v dynamice asteroidů ve vnitřní části hlavního pásu. Z důvodu možné záměny s frekvencí získanou Fourierovým rozkladem ji budeme v textu značit $\bar{\nu}_6$, popřípadě \bar{T}_6 , nebo $\bar{\Omega}_6$.

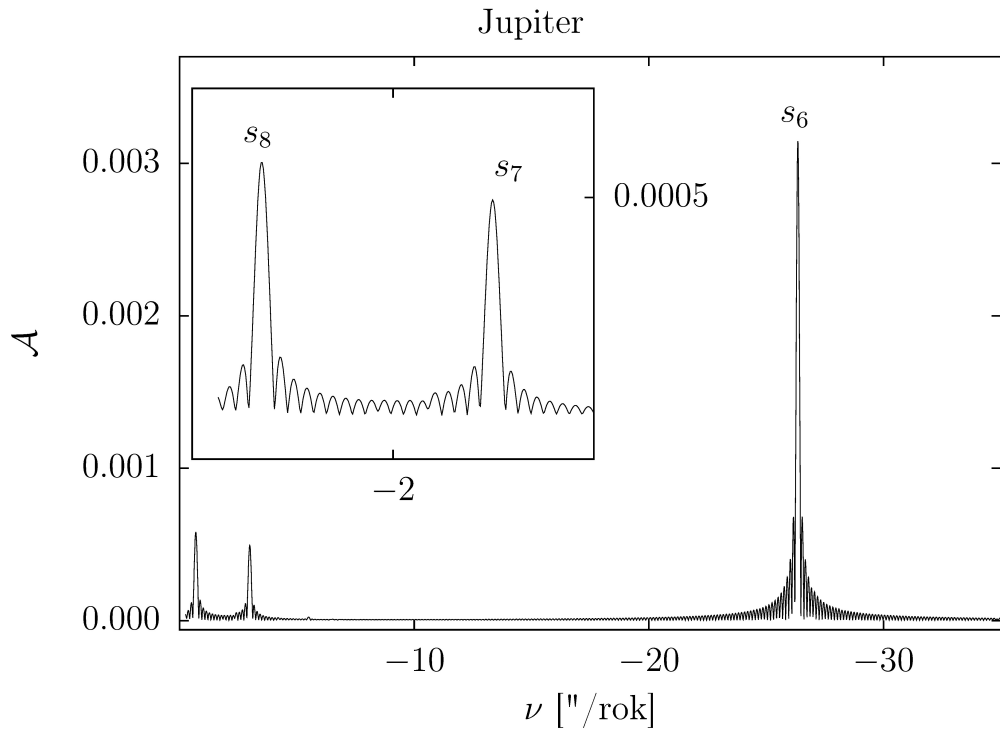
³⁰Souřadný systém byl opět spojen s Laplaceovou rovinou.



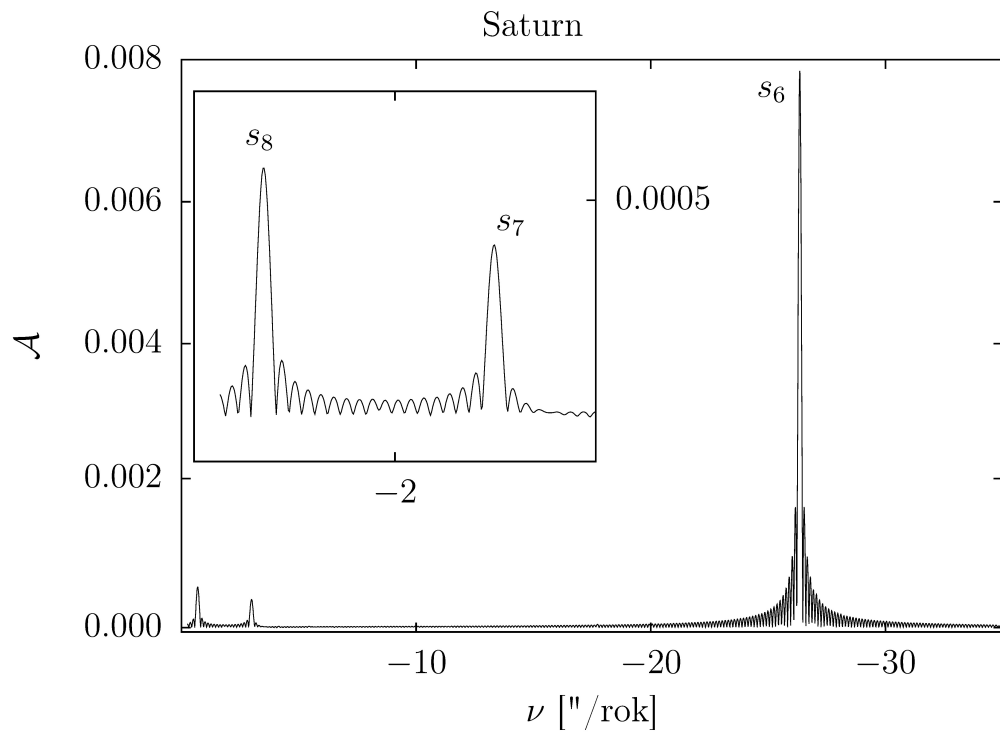
Obrázek 4.12: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + \varphi$ pro Massalii. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupního uzlu a pericentra je v případě Massalie: $s = -45.1$ "/rok a $g = 40.9$ "/rok.

	n	s_n ["/rok]	g_n ["/rok]
Merkur	1	-5.6043	5.5689
Venuše	2	-7.0530	7.4555
Země	3	-18.8499	17.3769
Mars	4	-17.7614	17.9217
Jupiter	5	0.0000	4.2489
Saturn	6	-26.3300	28.2344
Uran	7	-2.9854	3.0695
Neptun	8	-0.6917	0.6669

Tabulka 4.7: Planetární frekvence určené Laskarem [24]. Hodnota frekvence s_5 je tradičně volena nulová, což odpovídá v Lagrangeově-Laplaceově planetární teorii koplanárnímu řešení. Hodnoty jednotlivých frekvencí jsou určeny konfigurací Sluneční soustavy. Pro jinak „poskládaný“ systém by i planetární frekvence měly jiné hodnoty.



Obrázek 4.13: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + ip$ pro Jupiter. Dominantní frekvencí je s_6 , jejíž hodnota je určena stavbou celého planetárního systému, a proto ji lze najít i u ostatních planet – např. Saturn.



Obrázek 4.14: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + ip$ pro Saturn.

4.5 Podmínky Cassiniho stavu 2

Rezonanční stavy budeme hledat v systému, který se rovnoměrně stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 , a který s inerciálním svírá konstantní úhel:

$$I_6 = 2 \arcsin \mathcal{A}_2 \doteq 0.76^\circ.$$

Jak jsme ukázali v předchozích částech, existují v případě Massalie dvě možná řešení pólu, mezi kterými nejsme schopni jen na základě dat, která máme k dispozici, rozhodnout, které je to skutečné řešení.³¹

Bohužel pouze řešení 4 z tabulky 4.5 by mohlo být za určitých podmínek v Cassiniho rezonančním stavu 2. Na obrázku 4.15 jsou vyznačeny polohy obou pólů ve fázovém prostoru a izokřivky Hamiltoniánu (4.10) pro $\Delta = 0.25$.

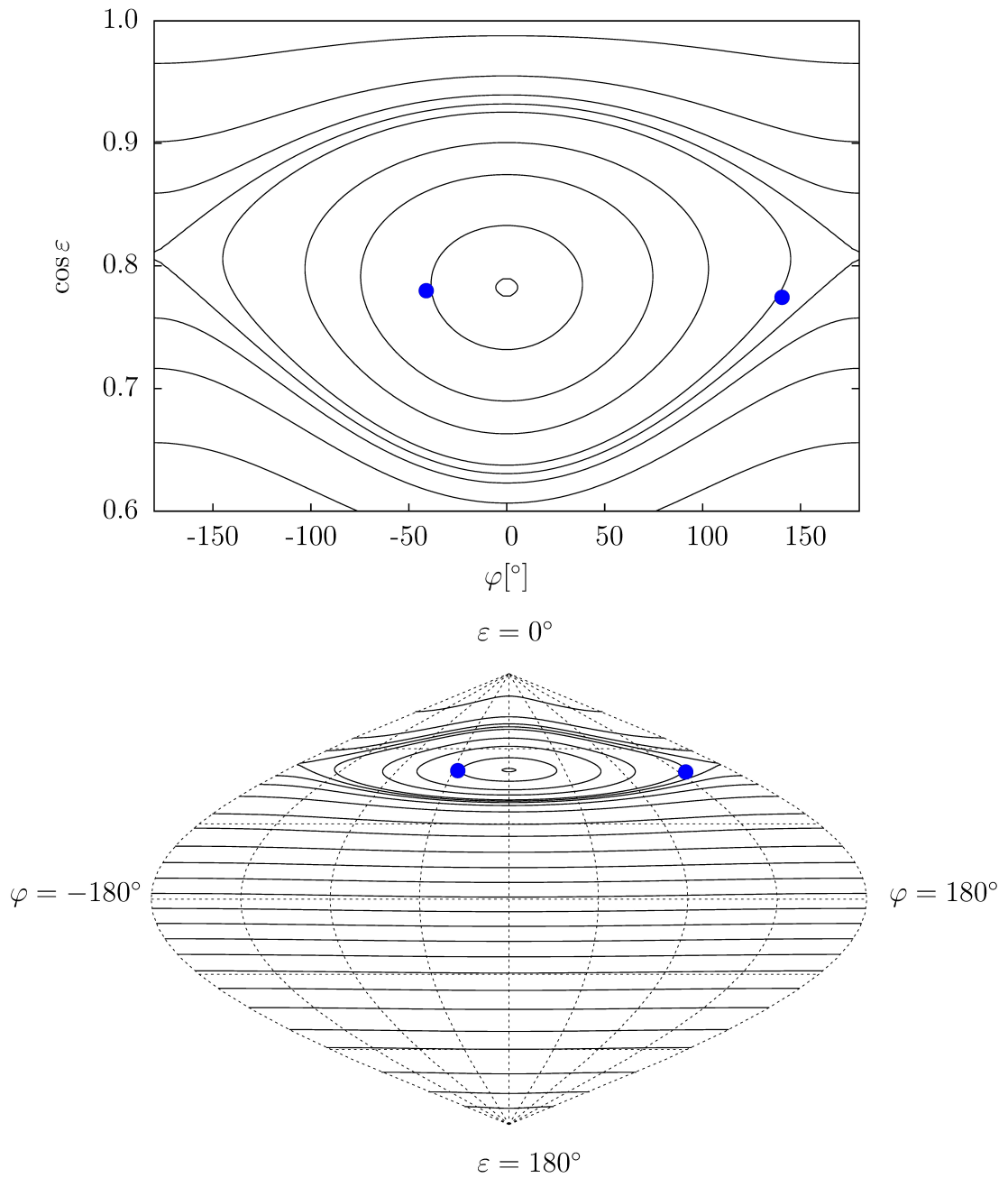
Je vidět, že pouze jeden pól leží v rezonanční oblasti, zatímco druhý bude volně precedovat. Na obou částech obrázku jsou vykresleny stejné izokřivky pouze pokaždé v jiné projekci. Jak bude vidět na dalších obrázcích, pokud budeme zvyšovat parametr Δ (pro připomenutí podle konvexního modelu vychází Δ dokonce 0.32) tak se rezonanční oblast bude posouvat směrem k rovníku ($\varepsilon = 90^\circ$) – takže při speciální volbě Δ by oba póly mohly ležet v rezonanční oblasti. I kdyby takto nastavené podmínky byly reálné, tak by Massalia pravděpodobně opakovaně vstupovala a opouštěla rezonanční oblast kvůli oscilaci sklonu.

Na dalším obrázku 4.16 je případ Massalie pro $\Delta = 0.27$. Je vidět, že v tomto případě by opět jeden pól byl bezpečně v rezonanční zóně a druhý by do ní mohl krátkodobě vstupovat.

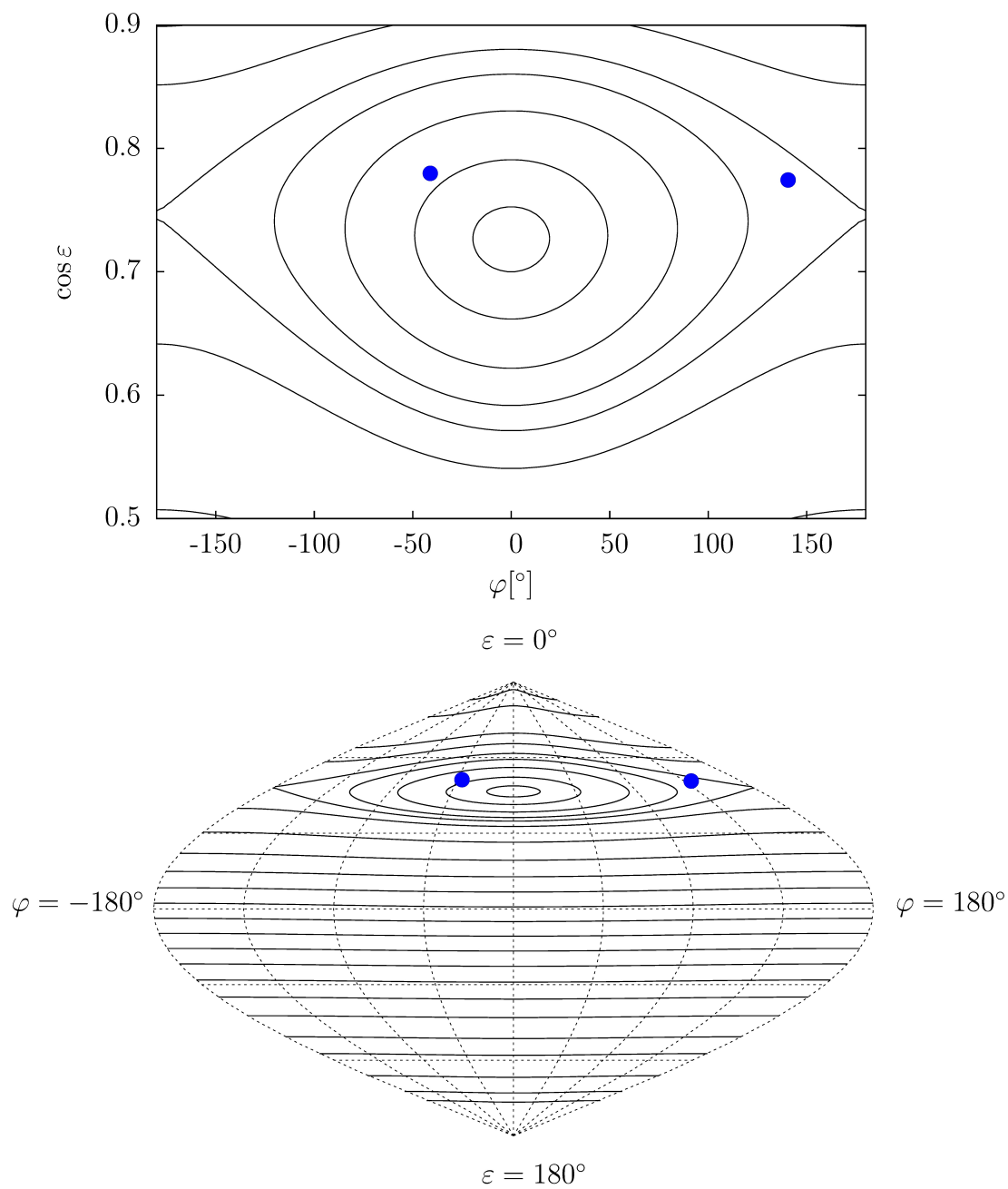
A nakonec na obrázku 4.17 je vidět kritický případ ($\Delta = 0.30$), kdy se i čtvrtý pól začíná nacházet mimo rezonanční oblast, popřípadě se pak Massalia bude střídavě nacházet jednou v Cassiniho stavu 2 a podruhé nikoli.

V tabulce 4.5 je u čtvrtého modelu uvedeno $\Delta = 0.32$, což by dle předchozích řádků mělo vylučovat rezonanční stav pro oba dva modely. Jak bylo také řečeno, parametr Δ je zatížen největší chybou. Uvažme, že jsme jej získali pomocí konvexního modelu, který tedy neuvažuje různé údolí nebo krátery na povrchu asteroidů, a k tomu navíc ani nevíme nic o vnitřní struktuře. Při výpočtech jsme se omezili pouze na předpoklad homogenního rozložení hustoty. Jak ukážeme v kapitole 6 na srovnání modelů a skutečných tvarů několika asteroidů, může se skutečné Δ od modelového velmi lišit. Proto naše úvahy o tom, zda Massalia leží v rezonančním stavu či nikoliv, nebyly zbytečné, protože pro relativně velký interval Δ se Massalia může trvale v rezonanci nacházet a pro další okrajové intervaly se do rezonance může alespoň čas od času dostat.

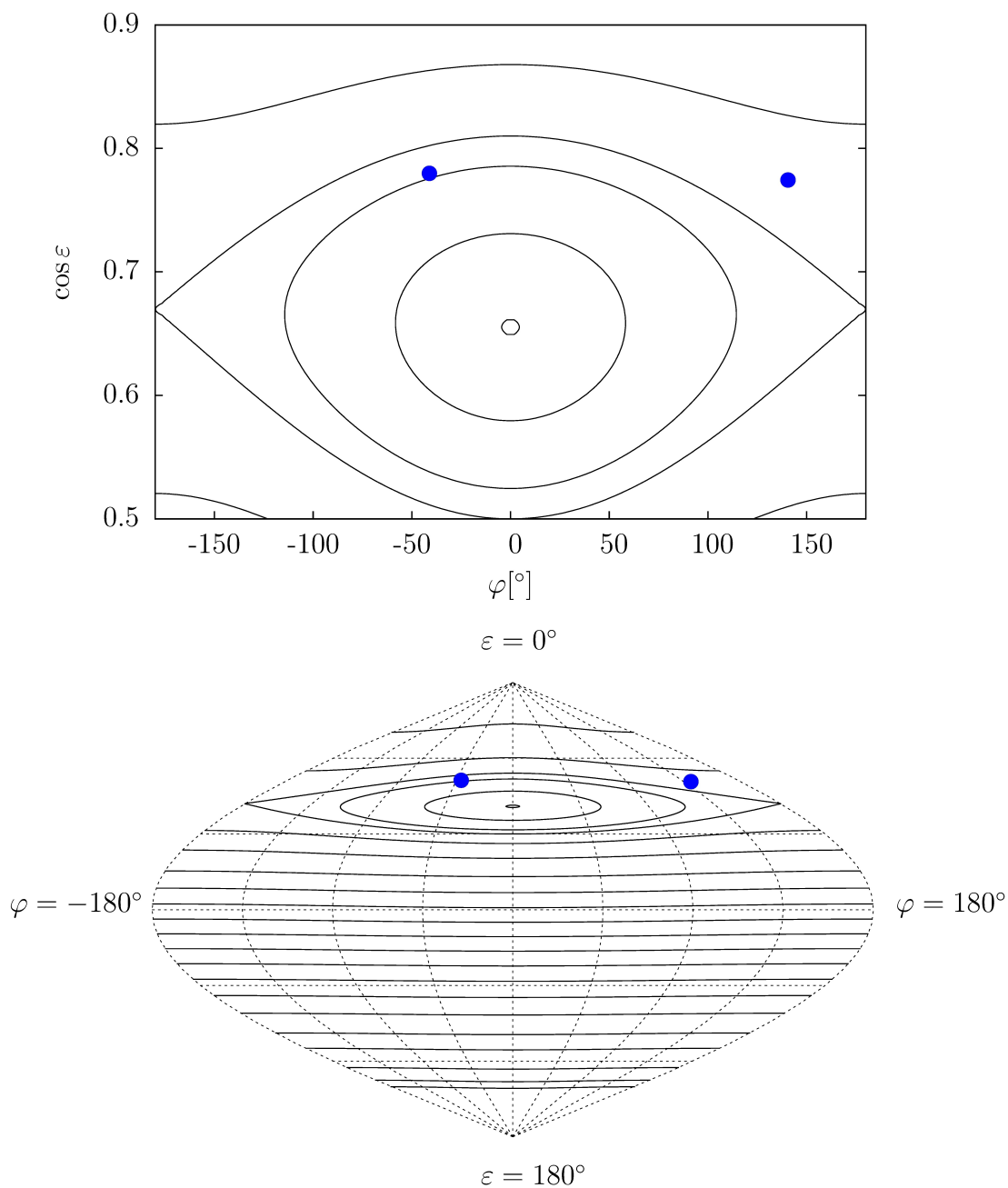
³¹Dalším možným pólem, který nově vyšel oproti předchozí analýze, se nebudeme zabývat.



Obrázek 4.15: Poloha třetího a čtvrtého pólu v tabulce 4.5 ve fázovém prostoru ve dvou různých projekcích. Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.25$.



Obrázek 4.16: Poloha třetího a čtvrtého pólu v tabulce 4.5 ve fázovém prostoru ve dvou různých projekcích. Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.27$.



Obrázek 4.17: Poloha třetího a čtvrtého pólu v tabulce 4.5 ve fázovém prostoru ve dvou různých projekcích. Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.30$.

Prozatím jsme probírali pouze počáteční podmínky, ale nevíme, jak moc bude systém závislý na změnách sklonu dráhy I a jak to ovlivní celý model. Ke studiu vývoje rotační osy jsme použili program `Spin_dynamics_integrator`, který je dispozici v příloze C na straně 129. Integrátor funguje na principech stručně popsaných v kapitole 3. Výpočetní doba pro integraci vývoje rotační osy po dobu pěti miliónů let trvá jen pár sekund. Z toho nejvíce zabere načítání vstupních dat. Není tedy problém prozkoumat během chvíle vývoj rotační osy pro různé hodnoty Δ .

Počáteční směr rotační osy \mathbf{s} je udáván pomocí ekliptikální délky λ a šířky β :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \beta \\ \sin \lambda \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Vektor \mathbf{s} se pak (pro daný čas t) transformuje do souřadného systému, který se stáčí vůči ekliptikálnímu s frekvencí s_6 , se sklonem I_6 a s fází $\varphi_6 = \varphi_0 + \nu_6 t$, kde φ_0 je fáze v čase $t = t_0$, pak lze napsat:

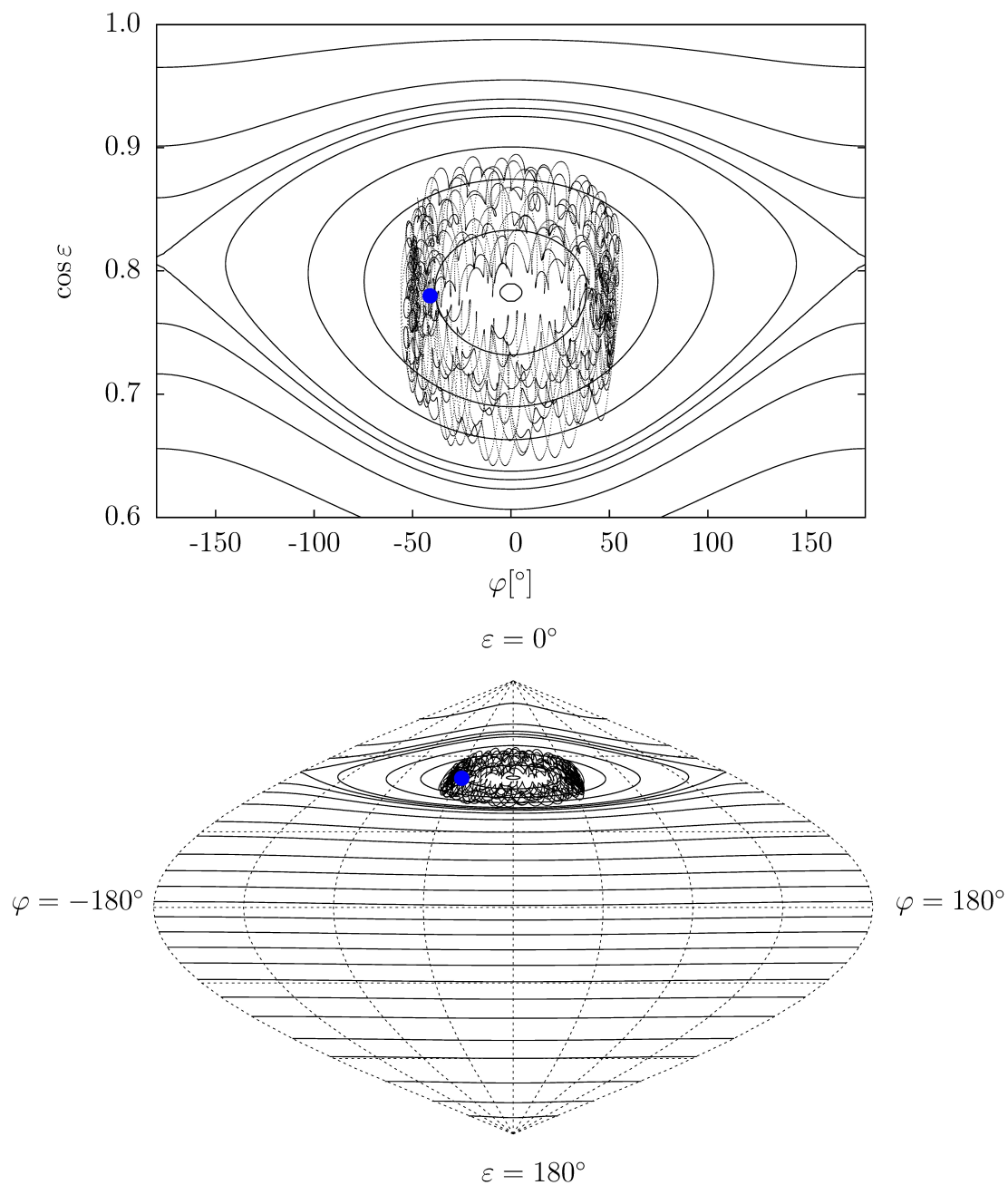
$$\mathbf{s}' = \mathbb{R}_3(-\varphi_6)\mathbb{R}_1(I_6)\mathbb{R}_3(\varphi_6)\mathbf{s}. \quad (4.15)$$

Pak lze vyjádřit nové souřadnice φ a ε :

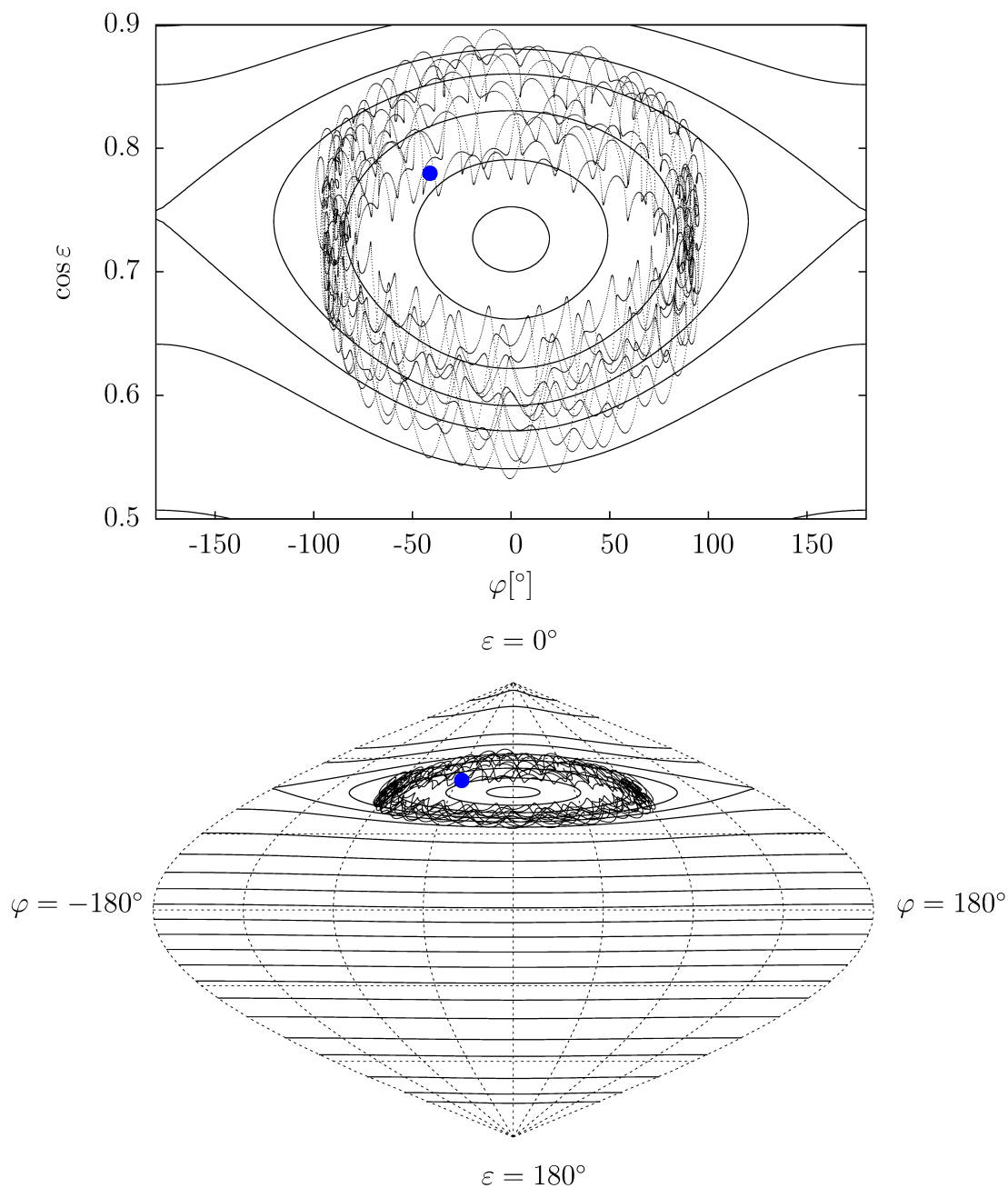
$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{arctg} \left(\frac{s'_1}{s'_2} \right), \\ \varphi &= -(\psi + \varphi_6), \\ \cos \varepsilon &= s'_3, \end{aligned} \quad (4.16)$$

Upozorňujeme, že I_6 je vlastní sklon a φ_6 je vlastní fáze příslušející frekvenci s_6 , **nejde** o šestý člen Fourierova rozvoje. Stejnou transformaci (jen s oskulačními elementy I a Ω) používáme pro přípravu počátečních podmínek ψ a ε pro program `Spin_dynamics_integrator`.

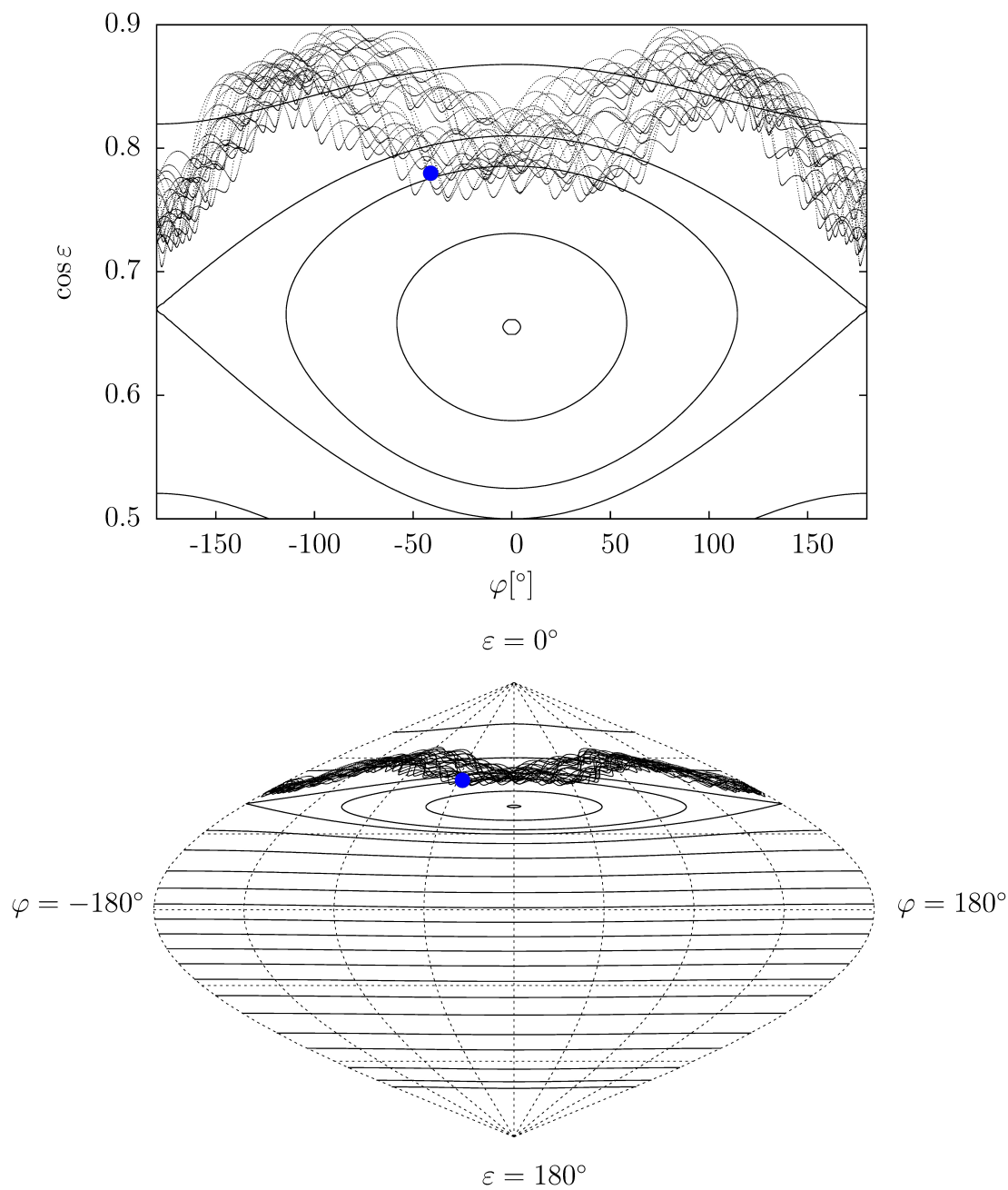
Na následujících obrázcích 4.18, 4.19 a 4.20 je zobrazena trajektorie čtvrtého pólu ve fázovém prostoru po dobu pěti miliónů let pro různé hodnoty parametru Δ .



Obrázek 4.18: Poloha čtvrtého pólu v tabulce 4.5 ve fázovém prostoru ve dvou různých projekcích a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.25$.



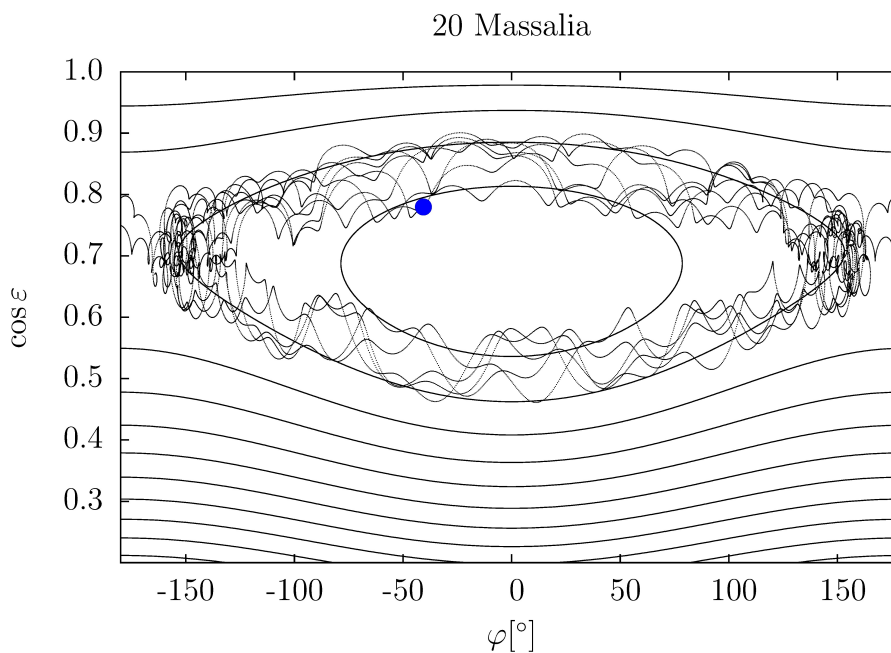
Obrázek 4.19: Poloha čtvrtého pólu v tabulce 4.5 ve fázovém prostoru ve dvou různých projekcích a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.27$.



Obrázek 4.20: Poloha čtvrtého pólu v tabulce 4.5 ve fázovém prostoru ve dvou různých projekcích a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.30$.

Je vidět, že pro $\Delta = 0.25$ a pro $\Delta = 0.27$ se Massalia stabilně drží v rezonanční oblasti po celou dobu integrace. Naproti tomu pro $\Delta = 0.30$ se již po většinu doby pohybuje pouze kolem rezonanční zóny a vstupuje do ní jen krátkodobě.

Při jemném zkoumání různých hodnot parametru Δ se ukazuje, že Massalia se udrží v Cassiniho stavu 2 (ne v rezonanci) pro $\Delta = 0.215 - 0.229$. Pro vyšší hodnoty již jde o případ spin-orbitální rezonance. Pro hodnotu $\Delta = 0.285$ už zas opět rotační pól není dlouhodobě schopen udržet se v rezonanční oblasti a čas od času z ní unikne a opět se vrátí. Vývoj rotační osy za dobu pět miliónů let je vidět na obrázku 4.21.

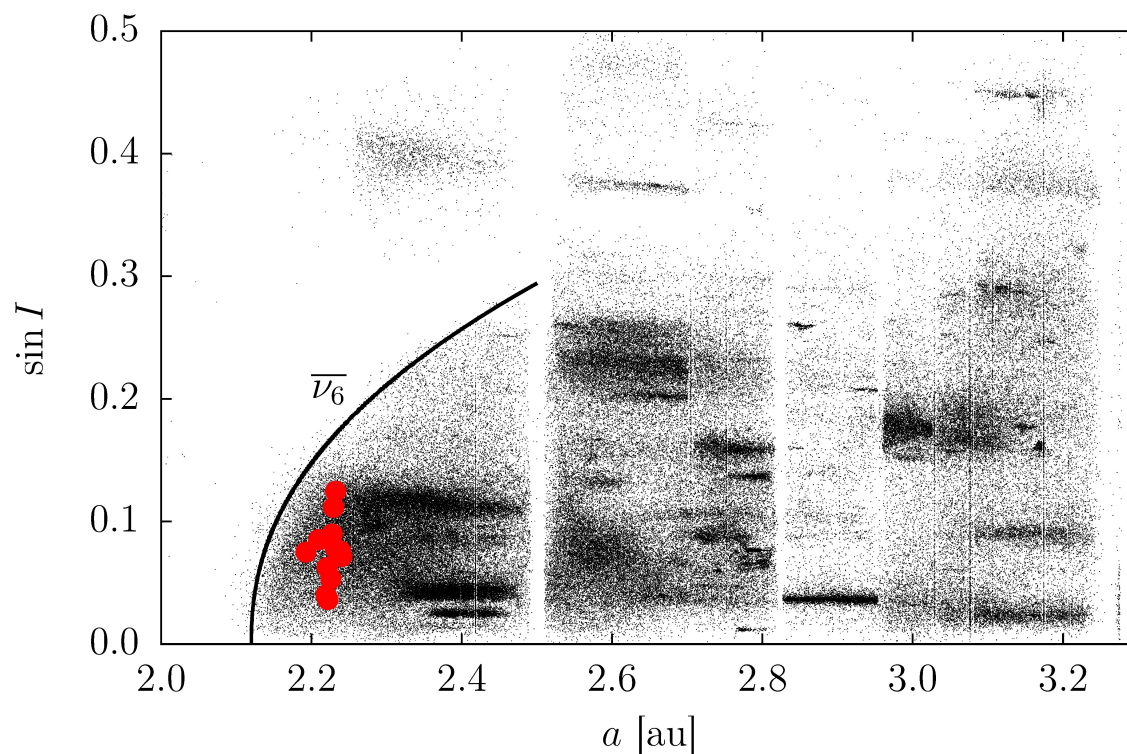


Obrázek 4.21: Poloha čtvrtého pólu v tabulce 4.5 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.285$. Dva sousední body jsou od sebe časově vzdáleny 250 let.

5. Možné Slivanovy stavy v rodině Flora³²

Ve své práci [22] uvádí A. Kryszczyńska směry rotačních os a siderické rotační periody pro 21 asteroidů z rodiny Flora. Použila metodu inverze světelných křivek, stejně jako my v případě Massalie. K dispozici bohužel nejsou získané tvary, nemůžeme tedy ani určit parametr Δ z modelového tvaru. Proto v tabulce 5.2 jsou ve sloupci Δ uvedeny ideální hodnoty, pro které by daný asteroid mohl ležet v Cassiniho stavu 2. Z databáze Damit [11] můžeme u některých asteroidů získat tvar, který byl určený z menšího počtu křivek, než kolik použila A. Kryszczyńska. Hodnoty získané z Damitu jsou pak v tabulce 5.2 uvedeny v závorkách.

Hlavní pás - Rodina Flora



Obrázek 5.1: Na obrázku je vynesena vlastní velká poloosa a a sklon I pro prvních 200 000 asteroidů v databázi AstDys – [2] a poloha sekulární rezonance $\bar{\nu}_6$. Červeným bodem jsou zde vyznačeny vybrané asteroidy z rodiny Flora, které mají v tabulce 5.2 uvedeny nějaký rozsah parametru Δ .

Uveďme také, že rodina Flora se rozkládá na velkém prostoru a obsahuje značné množství asteroidů s různými sklony I . Vysoká amplituda vlastní frekvence s a její blízkost s rezonanční frekvencí s_6 jsou hlavní důvody obtížného zachycení těchto asteroidů ve spin-orbitální rezonanci s frekvencí s_6 . Pro nižší sklony je však amplituda vlastní frekvence s také nižší, takže lze předpokládat, že případní kandidáti budou mít nízké sklony.

³²V celé této kapitole se odkazujeme na práci Agnieszky Kryszczyńskiej [22], popřípadě z ní citujeme.

Na asteroidech 291 Alice a 700 Auravictrix ukážeme, že zachycení asteroidů s vysokým sklonem v Cassiniho stavu 2 je velmi obtížné (ne-li nemožné) a to pouze krátkodobě, popřípadě pro úzce vymezený interval Δ .

	Asteroid	H [mag]	λ [°]	β [°]	P [h]	Δ
281	Lucretia	12.0	148	-72	4.349712	—
			333	-78	4.349712	—
352	Gisela	10.1	16	-40	7.480086	—
			201	-43	7.480086	—
1088	Mitaka	11.3	125	-53	3.035379	—
			125	-53	3.035379	—
1188	Gothlandia	11.4	104	-77	3.491820	—
1219	Britta	11.8	164	-79	5.575565	—

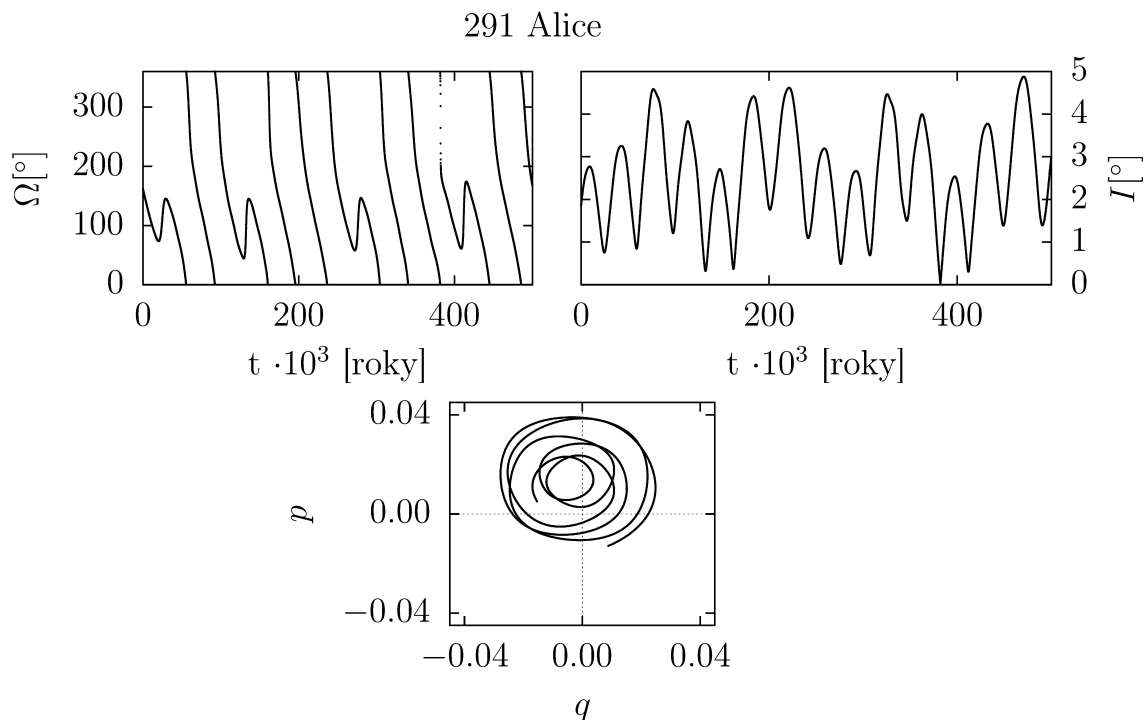
Tabulka 5.1: Retrográdně rotující asteroidy. V tabulce jsou uvedeny směry rotačních pólů a siderické rotační periody retrográdních asteroidů z rodiny Flora, které určila A. Kryszczyńska. H označuje absolutní jasnost, λ a β jsou ekliptikální délka a šířka.

	Asteroid	H [mag]	λ [°]	β [°]	P [h]	Δ
291	Alice	11.4	67	+56	4.316011	0.3410 – 0.3730 0.3960 – 0.3985 (0.35)
			250	+56	4.316011	—
367	Amicitia	10.5	23	+50	5.055012	0.320 – 0.323 (0.33)
			208	+56	5.055012	—
700	Auravictrix	10.9	67	+46	6.074837	—
			269	+51	6.074837	—
770	Bali	10.9	68	+50	5.818942	0.265 – 0.290 (0.28)
			262	+45	5.818942	—
800	Kressmannia	11.2	156	+56	4.460975	—
			328	+59	4.460975	—
825	Tanina	11.4	42	+49	6.939811	—
			231	+56	6.939810	—
915	Cosette	11.5	194	+58	4.469741	—
			352	+54	4.469741	0.410
937	Bethgea	11.7	128	+70	7.539166	—
			305	+79	7.539166	—
1675	Simonida	11.8	23	+58	5.287963	—
			227	+54	5.287963	—
2017	Wesson	12.7	159	+81	3.415582	—
			356	+79	3.415582	—
951	Gaspra	11.5	19	+21	7.420560	
1514	Ricouxa	12.6	58	+69	10.48965	0.150 – 0.170 (0.34)
			251	+75	10.48965	—
1682	Karel	12.7	51	+41	3.374850	0.466 – 0.472 (0.33)
			232	+32	3.374850	
810	Atossa	12.4	12	+67	4.38547	
			188	+69	4.30547	
2156	Kate	12.5	30	+73	5.622078	
			237	+64	5.622078	

Tabulka 5.2: Prográdně rotující asteroidy. V tabulce jsou uvedeny směry rotačních pólů a siderické rotační periody prográdních asteroidů z rodiny Flora, které určila A. Kryszczyńska. H označuje absolutní jasnost, λ a β jsou ekliptikální délka a šířka. Ve sloupci Δ jsou uvedeny možné intervaly, pro které se asteroid dokáže udržet v Cassiniho stavu 2. Ve většině případů však nejde o spin-orbitální rezonanci, neexistují tedy čtyři stacionární řešení pohybových rovnic (tři stabilní a jedno nestabilní), ale pouze dvě (obě stabilní). Hodnoty Δ , které jsou uvedeny v závorkách, jsou spočtené z modelových tvarů z databáze Dafeed [12].

5.1 291 Alice

Asteroid Alice má oproti ostatním členům rodiny Flora nízký sklon, který osciluje kolem střední hodnoty $\approx 2.5^\circ$. Na obrázku 5.2 je vidět vývoj délky výstupného uzlu Ω , sklonu I za prvních 500 tisíc let integrace a nesingulárních elementů q, p za 200 tisíc let. Rozdíl jednotlivých bodů je 50 let.



Obrázek 5.2: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 291 Alice za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaheny, byla rovina ekliptiky.

V tabulce 5.3 jsou uvedeny oskulační Keplerovy elementy Alice spočítané k 56400.0 MJD³³ (18. dubna 2013).

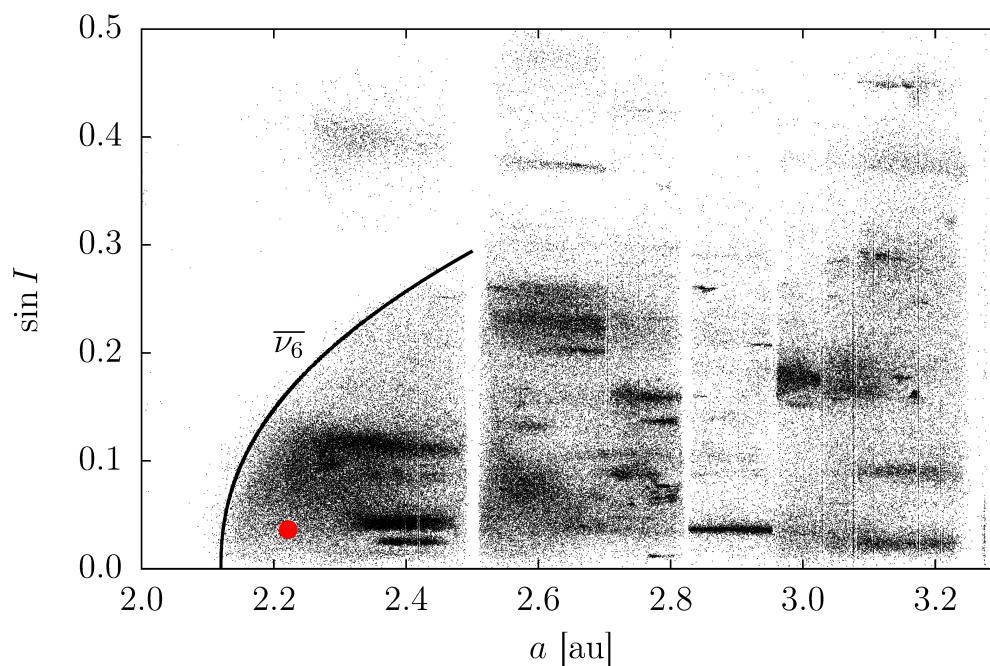
	Hodnota	Jednotky
a	2.22242	au
e	0.092032	—
I	1.854	deg
Ω	161.664	deg
ω	331.787	deg
M	118.05	deg

Tabulka 5.3: 291 Alice – oskulační elementy převzané z [2] a určené k datu 56400.0 MJD.

Polohu Alice v hlavním pásu zobrazuje obrázek 5.3. Nejdůležitější je její vzdálenost od sekulární rezonance $\bar{\nu}_6$ a nízký vlastní sklon I .

³³MJD = Modifikované Juliánské Datum

Hlavní pás - 291 Alice

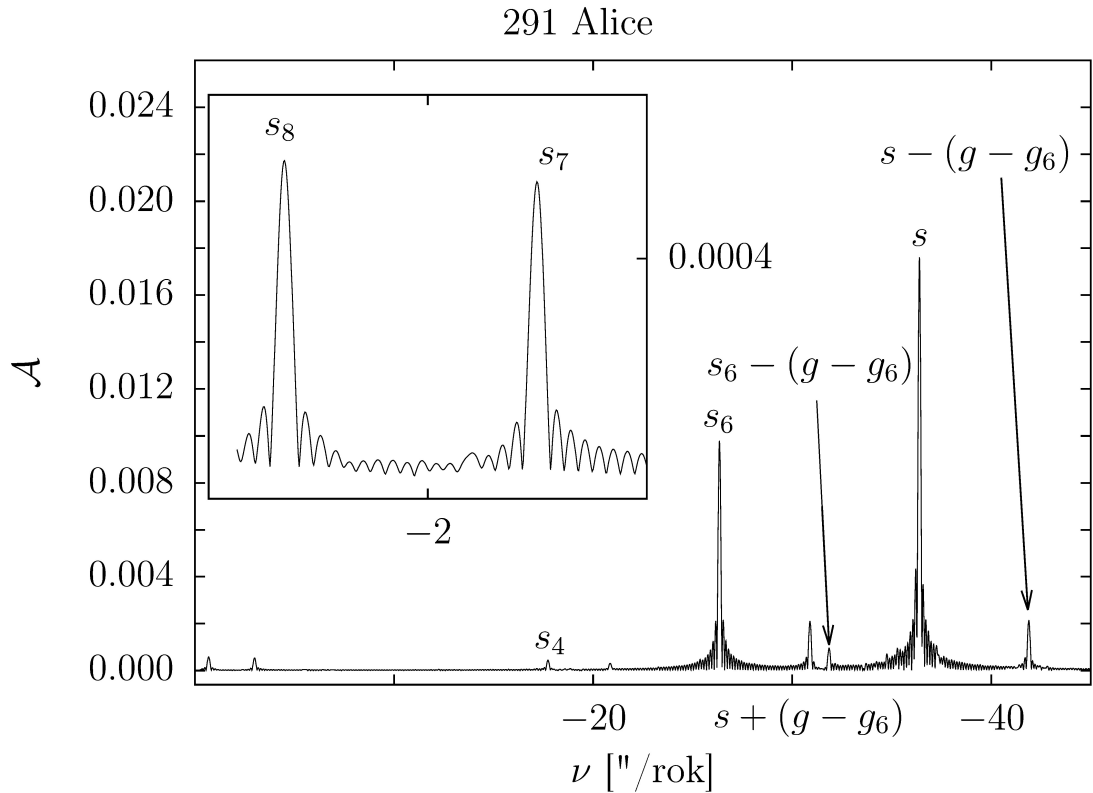


Obrázek 5.3: Poloha asteroidu 291 Alice v Hlavním pásu. Vyneseny jsou zde vlastní elementy velká poloosa a a sklon I .

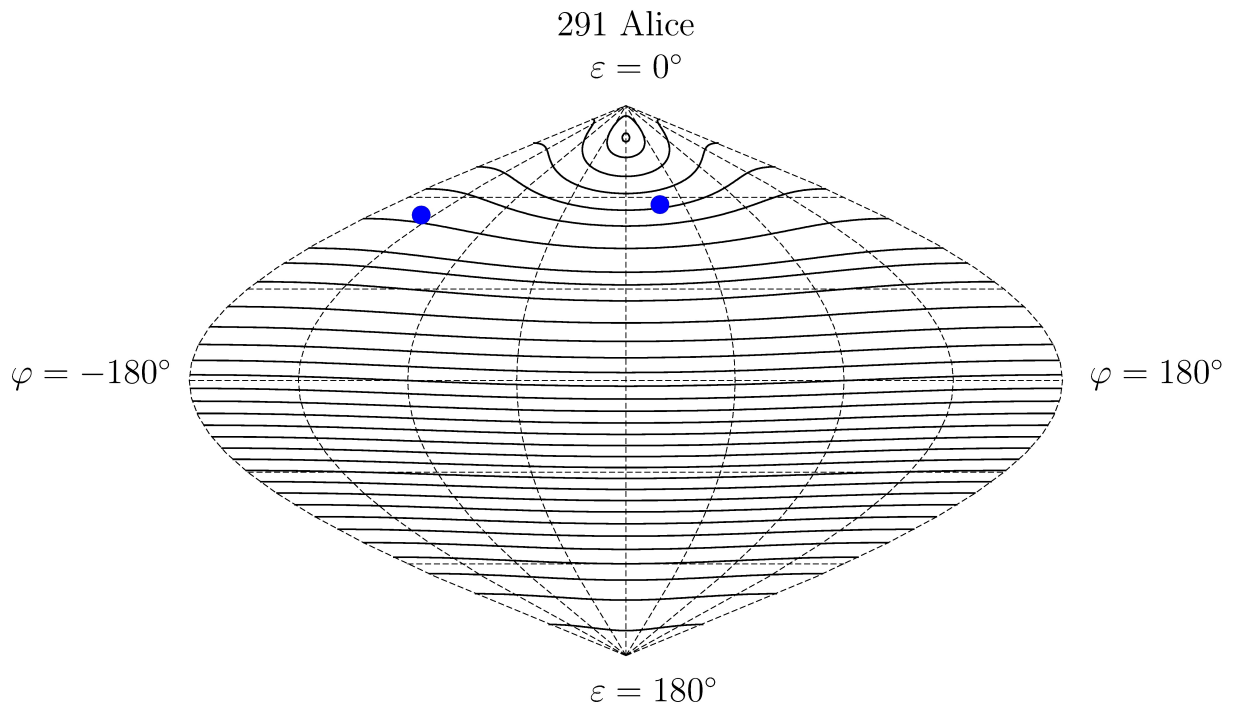
Na obrázku 5.4 je pak zobrazen spektrální rozklad³⁴ nesingulárních elementů $q + ip$. Vyskytují se zde všechny spektrální čáry, které jsme viděli i v případě Massalie, ale čáry s a s_6 již nejsou tak dominantní jako v případě Massalie.

Na následujících obrázcích (5.5 až 5.9) jsou vykresleny křivky konstantního Hamiltoniánu pro různé hodnoty parametru $\Delta = 0.25 - 0.45$. Modrými body jsou označeny výchozí směry rotační osy (viz tabulka 5.2). Pólu s ekliptikální délkou $\lambda = 67^\circ$ odpovídá $\varphi = 32.4^\circ$.

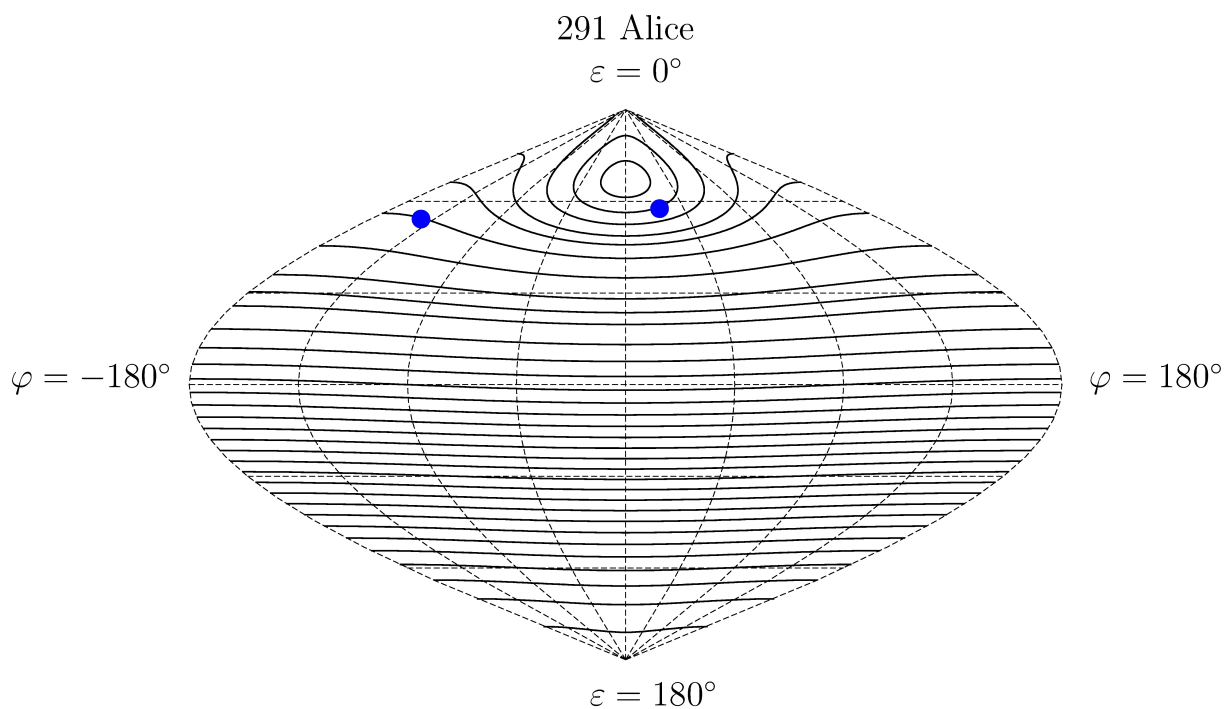
³⁴Planetární frekvence Uranu a Neptunu jsou při použití ekliptikálního systému rozmazané, proto používáme Laplaceovu rovinu.



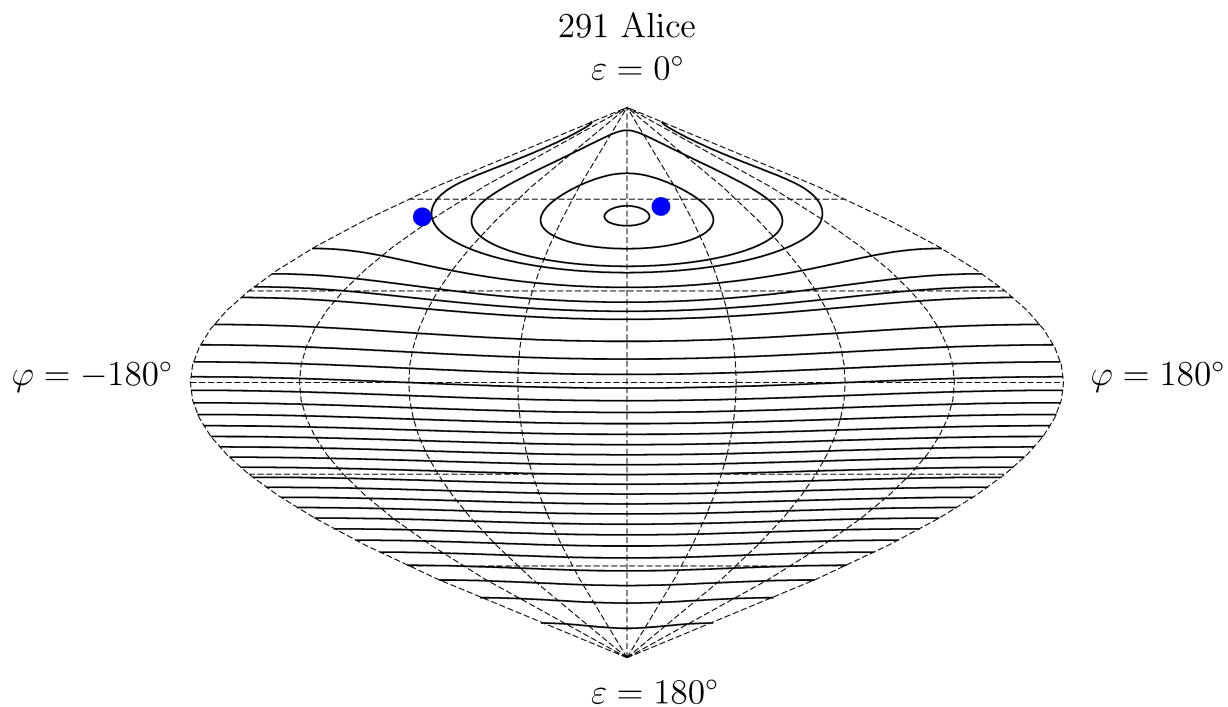
Obrázek 5.4: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q+ip$ pro asteroid 291 Alice. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra je v případě Alice: $s = -36.435$ "/rok a $g = 33.7388$ "/rok.



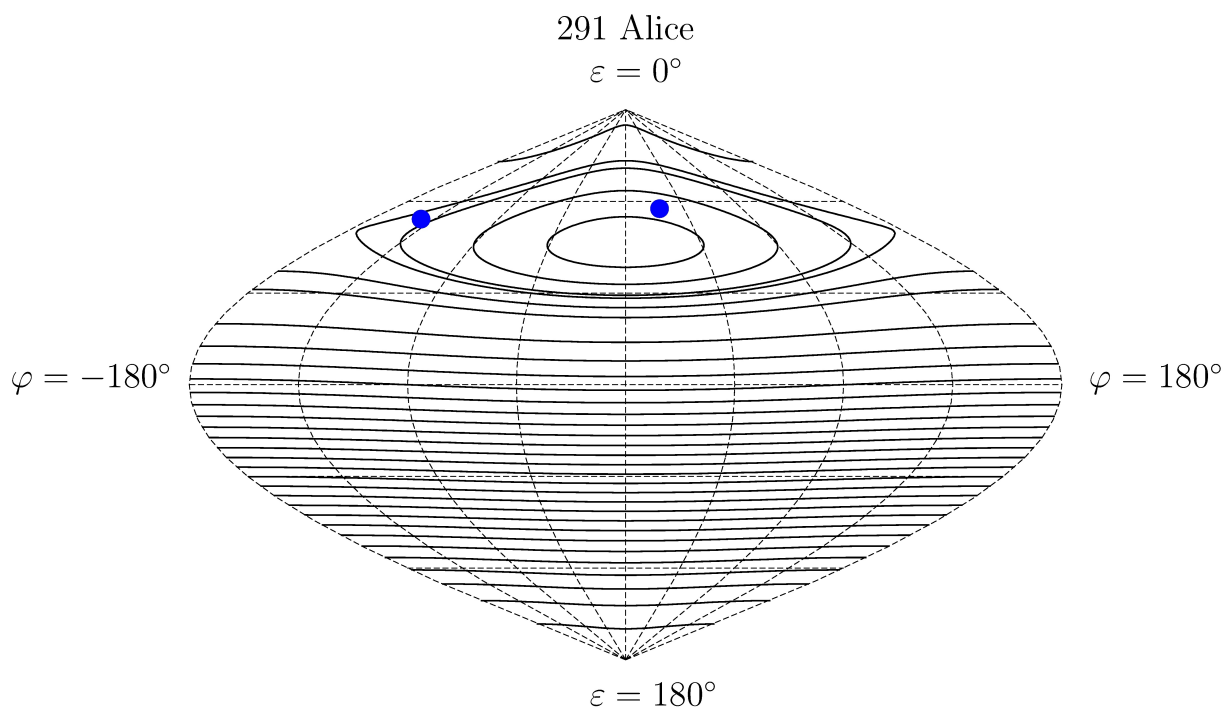
Obrázek 5.5: Polohy rotačních pólů Alice určených Kryszczyńskou (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.25$.



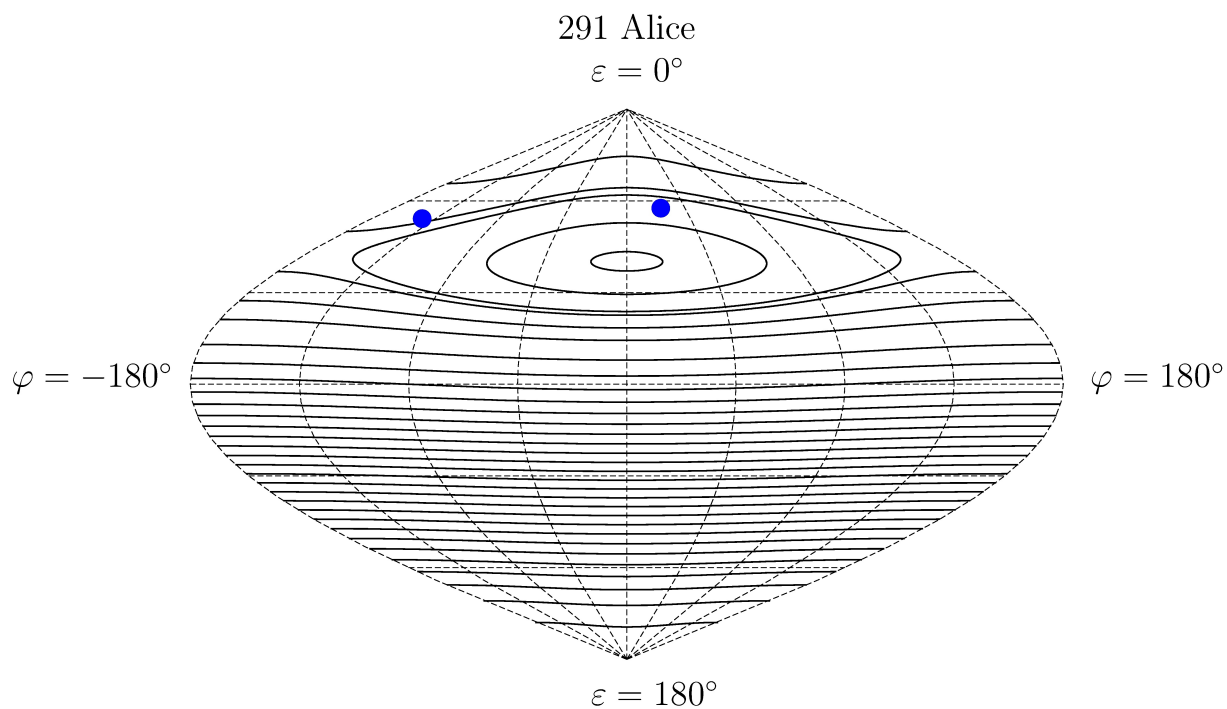
Obrázek 5.6: Polohy rotačních pólů Alice určených Kryszczyńskou (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.30$.



Obrázek 5.7: Polohy rotačních pólů Alice určených Kryszczyńskou (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.35$.

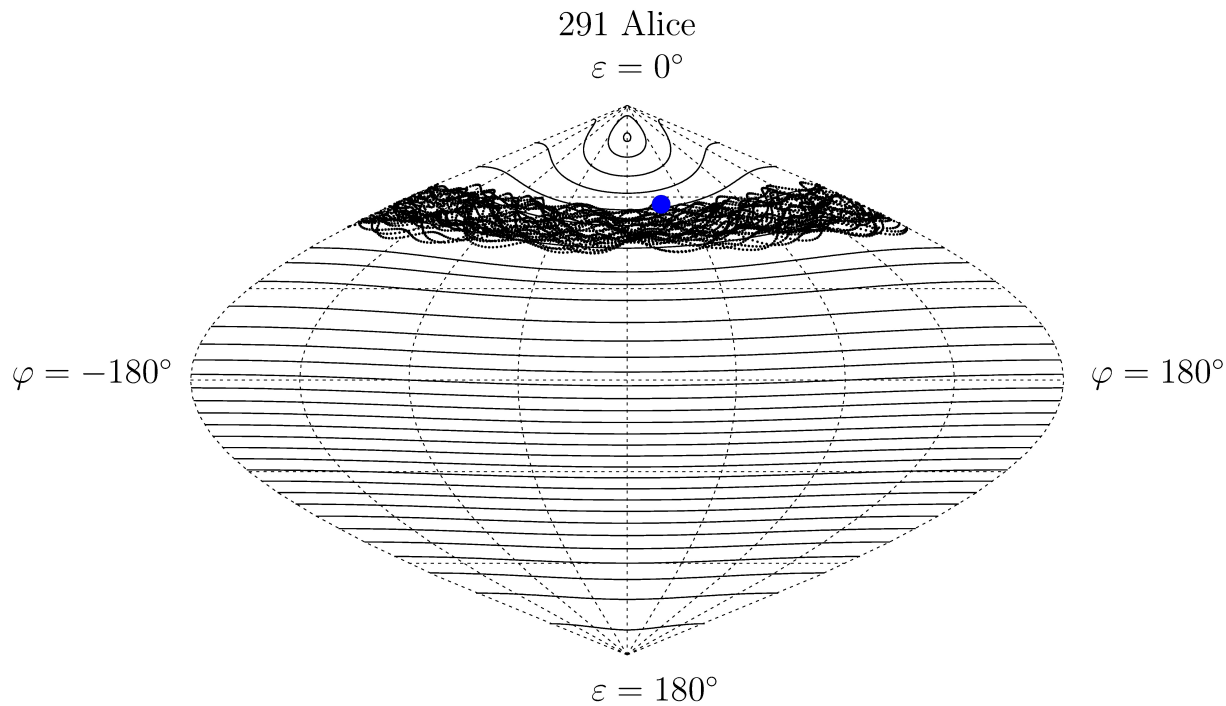


Obrázek 5.8: Polohy rotačních pólů Alice určených Kryszczyńskou (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.40$.

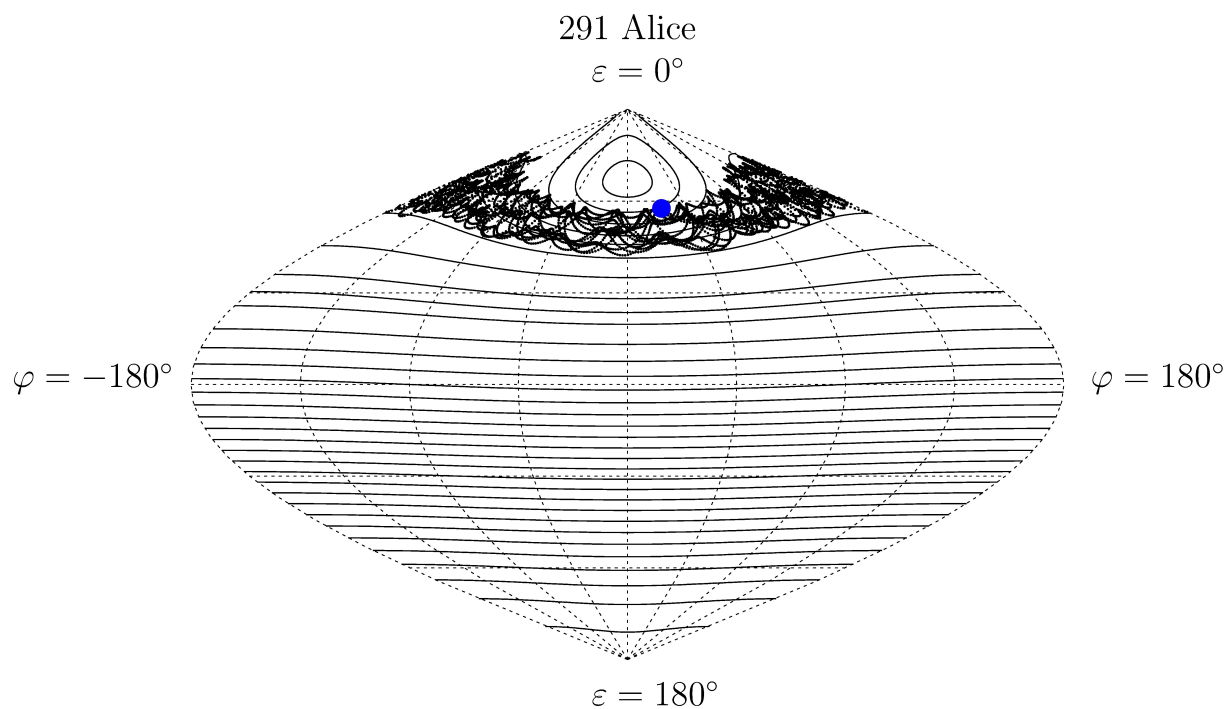


Obrázek 5.9: Polohy rotačních pólů Alice určených Kryszczyńskou (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.45$.

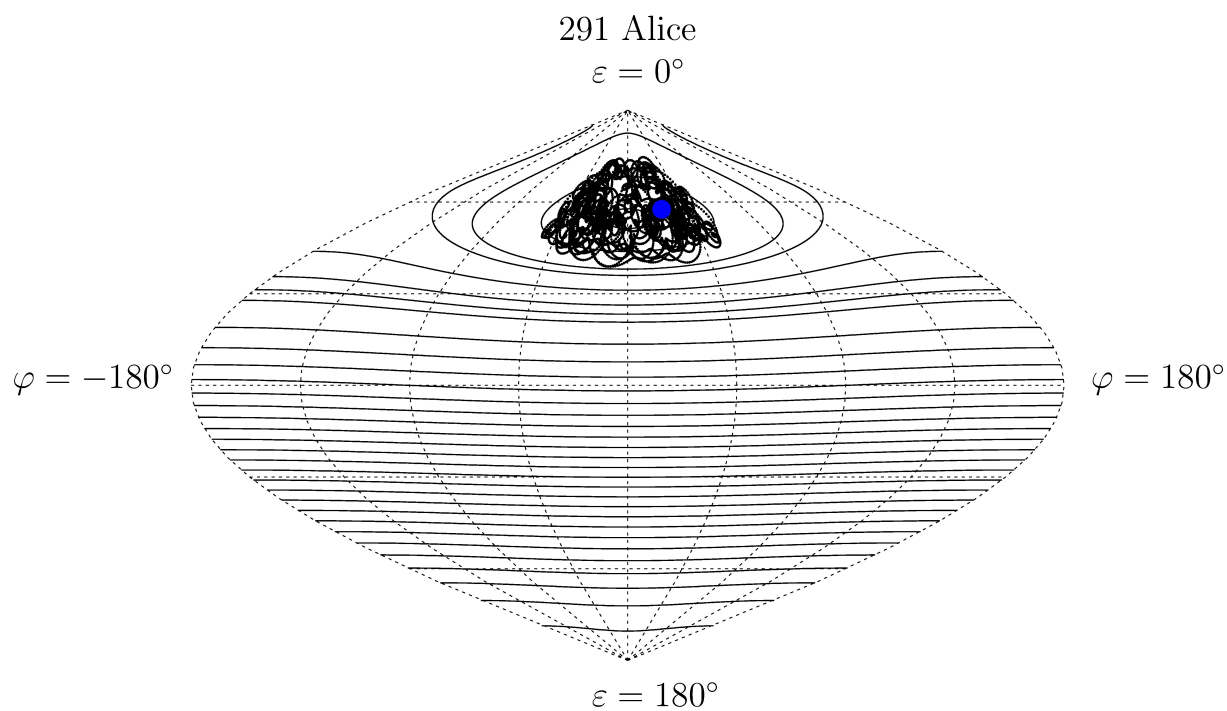
Po zkušenostech s Massalií by se dalo předpokládat, že pól, který leží blíž nulovému poledníku ($\varphi = 0^\circ$), by se měl udržet v rezonančním stavu pro velký rozsah parametru Δ – přibližně od 0.30 až k 0.45. Podívejme se tedy, jak moc ovlivní výsledek blízkost sekulární rezonance $\bar{\nu}_6$ a vyšší sklon. Na obrázcích 5.10 až 5.14 je vidět vývoj směru rotační osy pro hodnoty parametru $\Delta = 0.25 - 0.45$.



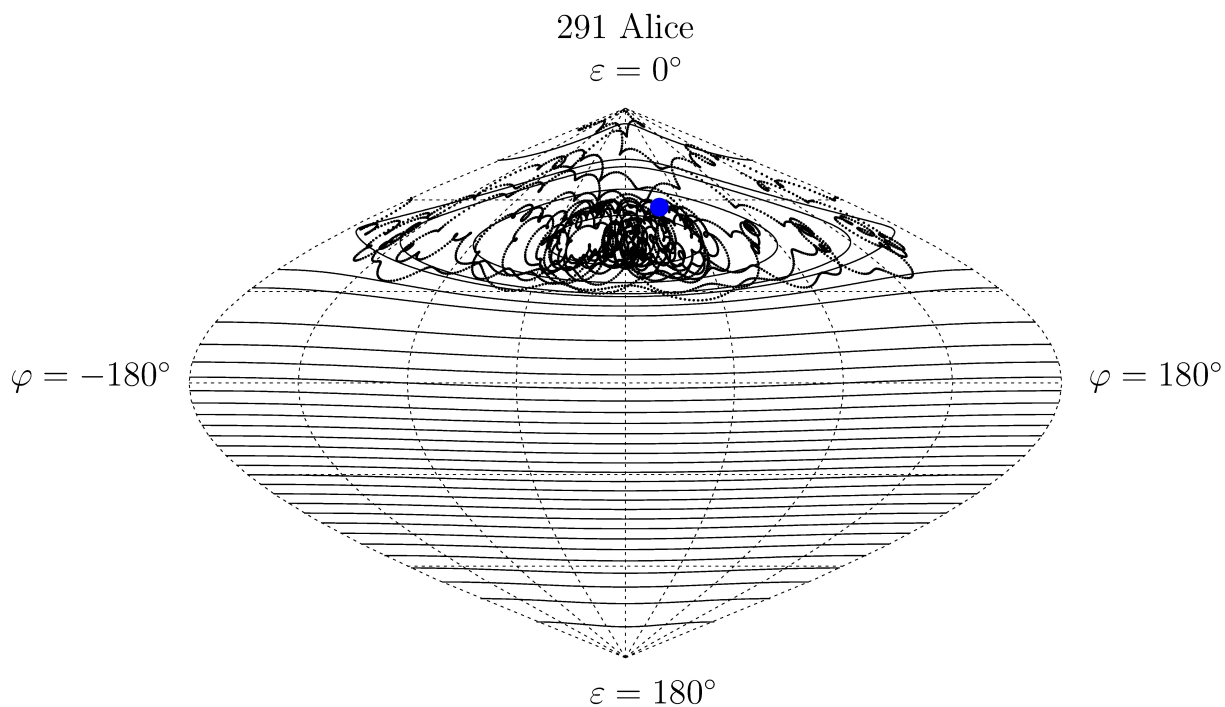
Obrázek 5.10: Poloha prvního pólu v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.25$.



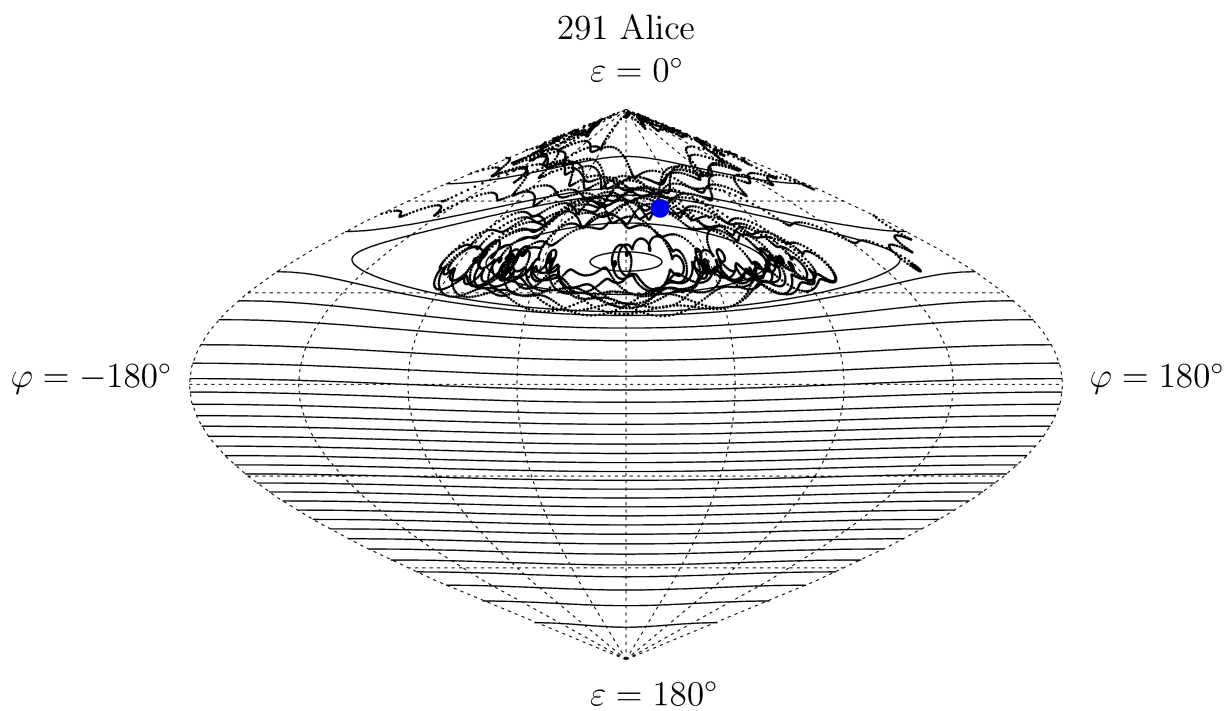
Obrázek 5.11: Poloha prvního pólu v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.30$.



Obrázek 5.12: Poloha prvního pólu v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.35$.



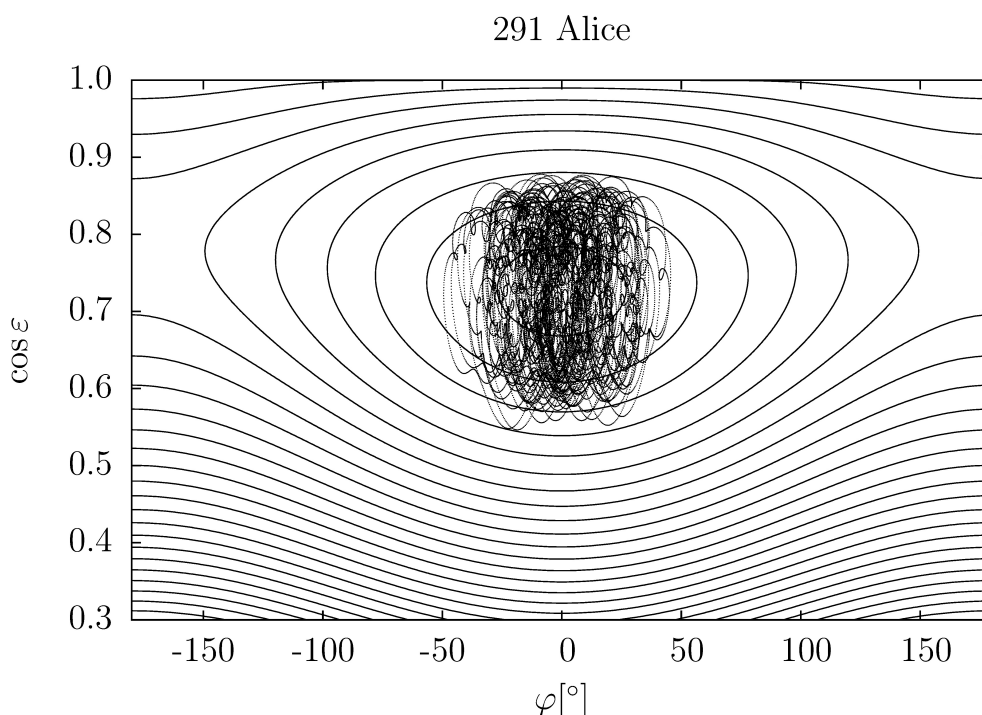
Obrázek 5.13: Poloha prvního pólu v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.40$.



Obrázek 5.14: Poloha prvního pólu v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.45$.

Jak je tedy vidět, v našem prvotním odhadu jsme se spletli. Pól je schopný se udržet dlouhodobě v rezonančním stavu pouze v okolí $\Delta = 0.35$. Pro $\Delta = 0.40$ a $\Delta = 0.45$ se již směr rotační osy asteroidu chová velmi chaoticky. Z hustoty čar na obrázcích 5.10 a 5.10 lze vidět, to co bychom předpokládali a sice, že pro nižší hodnotu Δ (a bližší ideální hodnotě ≈ 0.35) se rotační osa dokáže v Cassiniho stavu 2 udržet po delší dobu.

Po předchozí analýze tedy můžeme tvrdit, že asteroid Alice se při vhodném tvaru ($\Delta \approx 0.35$) může nacházet v stavu Cassiniho stavu 2. To samozřejmě pouze za předpokladu, že rotační osa míří ve směru $\lambda = 67^\circ, \beta = 56^\circ$ (popřípadě v jeho okolí). Rozhodně ale nemůže dlouhodobě v tomto stavu setrvávat druhý možný pól, který A. Kryszczyńska určila.



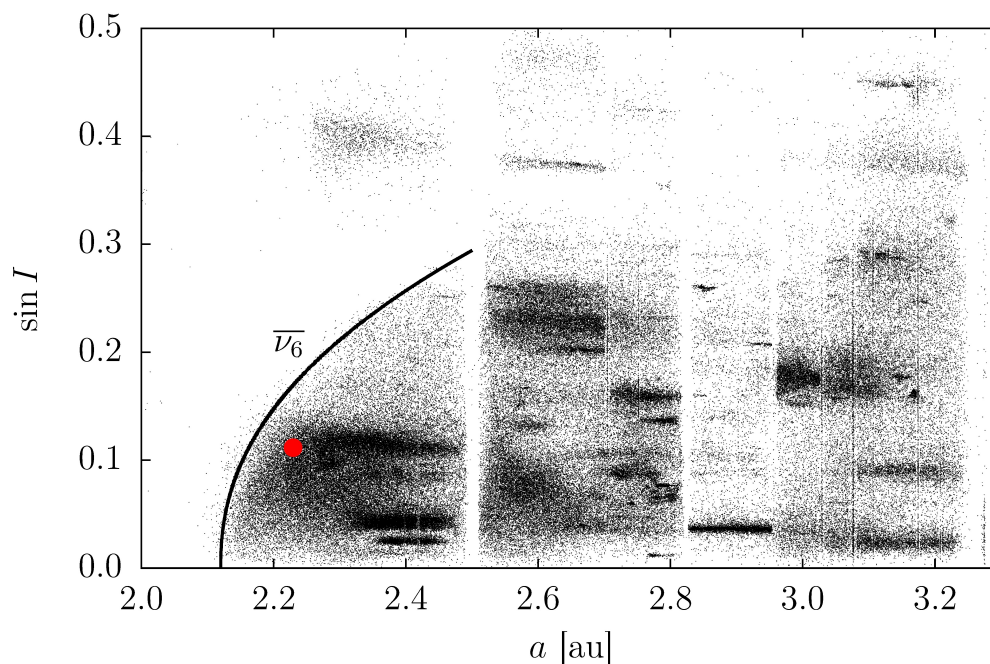
Obrázek 5.15: Výsledek integrace a křivky konstantního Hamiltoniánu pro $\Delta = 0.3963$ po dobu deseti miliónů let. Je vidět, že pro tuto hodnotu parametru Δ se rotační osa Alice dokáže stabilně udržet ve spin-orbitální rezonanci s frekvencí s_6 . Časový rozestup sousedních bodů je 250 let.

V případě, že by se hodnota parametru Δ nacházela ve velmi úzkém intervalu $0.3960 - 0.3985$, mohla by se Alice (pro $\lambda = 67^\circ$) mohla dokonce nacházet ve spin-orbitální rezonanci s planetární frekvencí s_6 . Výsledek integrace vývoje rotační osy po dobu deseti miliónů let je vidět na obrázku 5.15.

5.2 700 Auravictrix

Asteroid Auravictrix jsme ze všech zkoumaných asteroidů z rodiny Flora vybrali jako protiklad k Alici, protože s vlastním sklonem $I = 6.4^\circ$ bude mít vlastní frekvence s mnohem větší amplitudu. Ta vzhledem k blízkosti k rezonanční frekvenci s_6 bude efektivně zabraňovat zachycení rotační osy v Cassiniho stavu 2. Poloha asteroidu v hlavním pásu je zobrazena na obrázku 5.16.

Hlavní pás - 700 Auravictrix

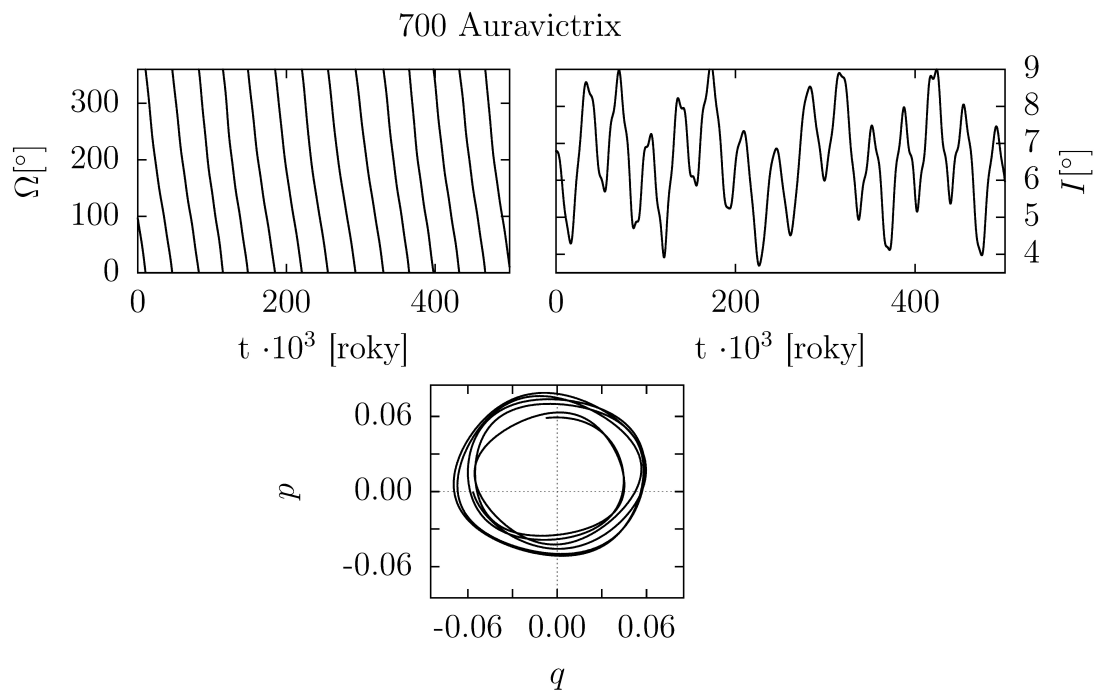


Obrázek 5.16: Poloha asteroidu 700 Auravictrix v hlavním pásu. Vyneseny jsou zde vlastní elementy velká poloosa a a sklon I .

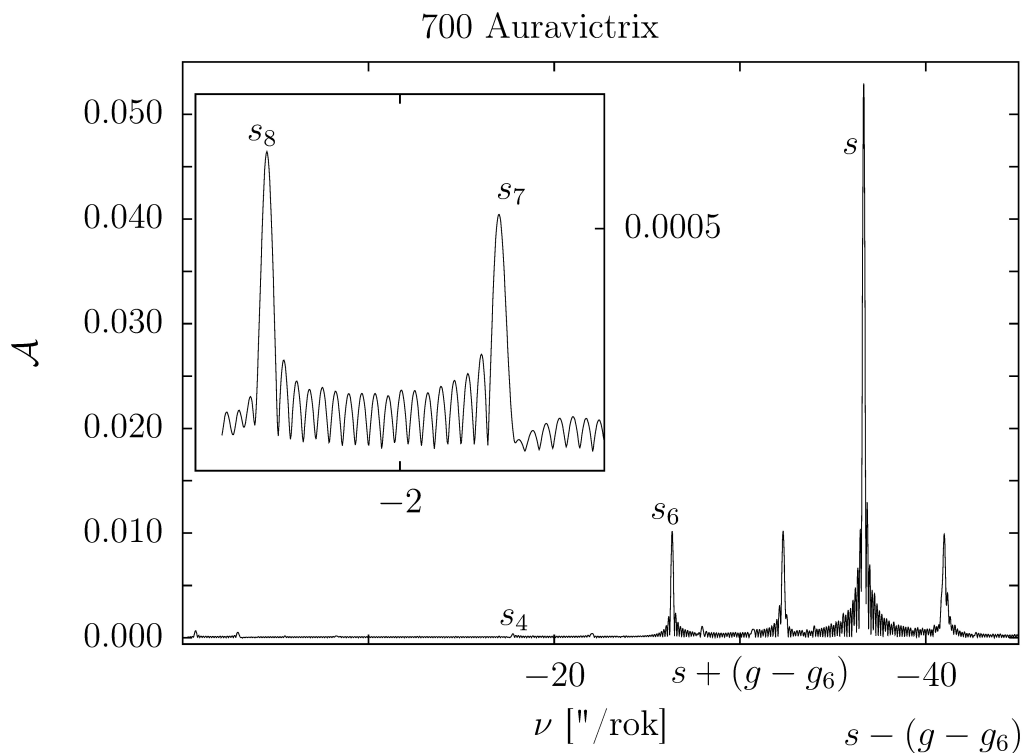
	Hodnota	Jednotky
a	2.22953	au
e	0.103531	—
I	6.79	deg
Ω	96.852	deg
ω	101.996	deg
M	7.019	deg

Tabulka 5.4: 700 Auravictrix – oskulační elementy jsou převzány z [2], určené k datu 56400.0 MJD.

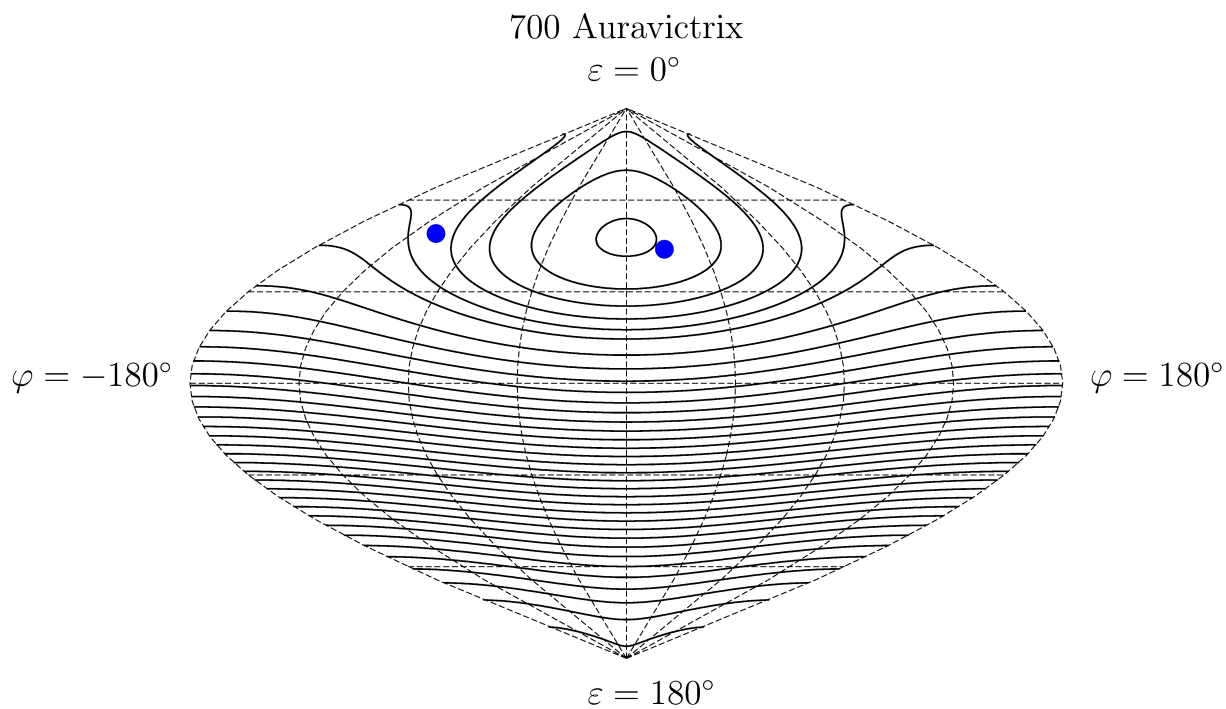
V tabulce 5.4 jsou oskulační elementy k epoše 56400.0 MJD. Na obrázku 5.17 je pak vidět průběh délky výstupného uzlu Ω a sklonu I za prvních 500 tisíc let integrace. Pod nimi jsou pak zobrazeny nesingulární elementy $q + ip$ za 200 tisíc let. Na obrázku 5.18 je pak zobrazen spektrální rozklad $q + ip$. Zde je pak vidět zásadní rozdíl oproti Alici, která má mnohem nižší sklon a tedy i amplituda vlastní frekvence s je mnohem nižší. Jak se ukáže, amplituda vlastní frekvence s bude mít pro možnost zachycení Auravictrix v Cassiniho stavu 2 fatální důsledky.



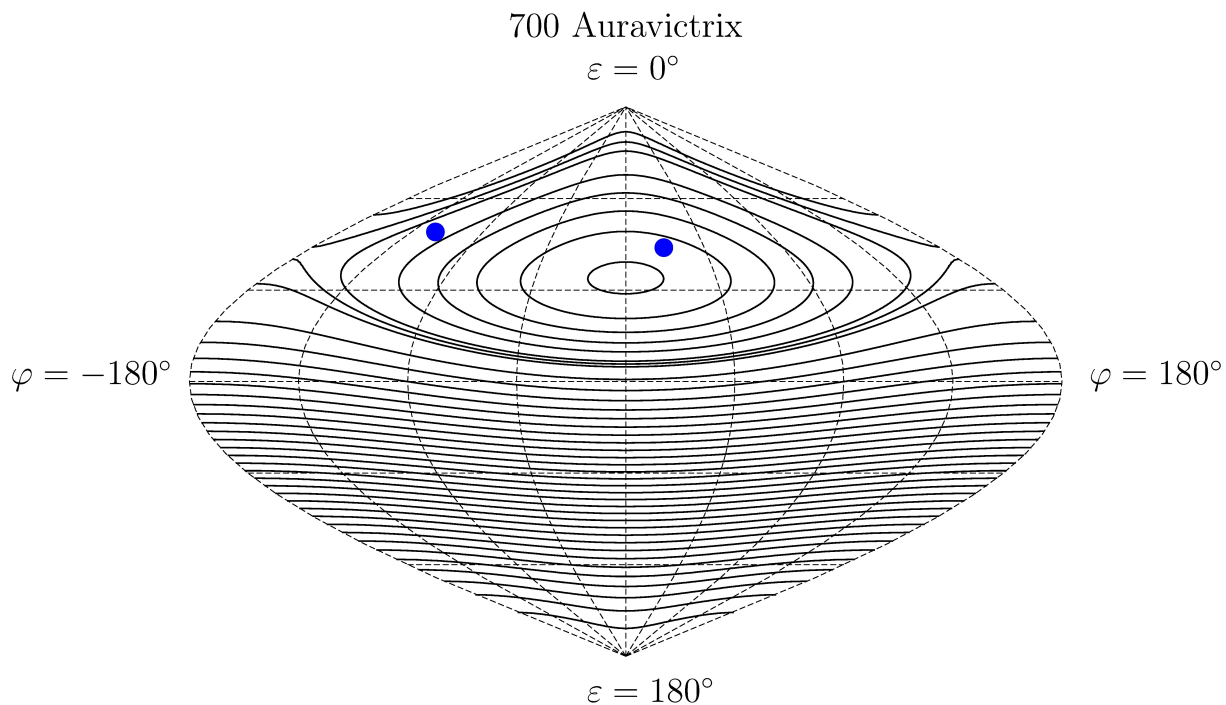
Obrázek 5.17: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 700 Auravictrix za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.



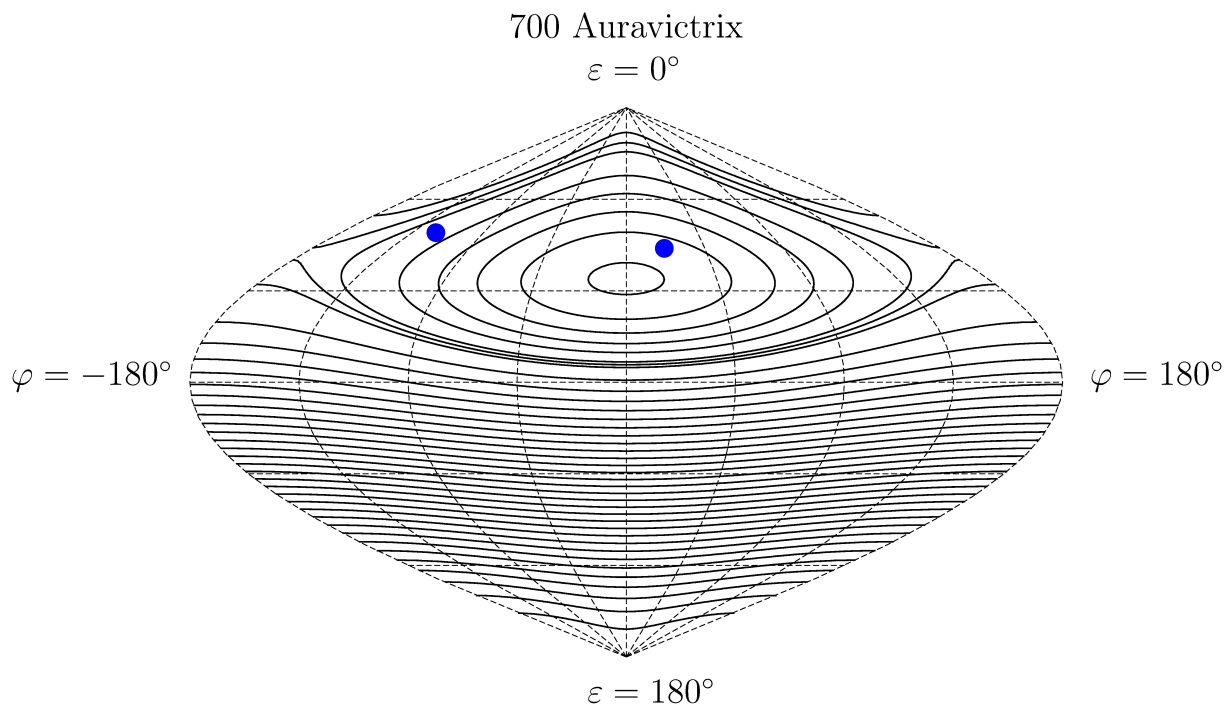
Obrázek 5.18: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + ip$ pro asteroid 700 Auravictrix. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra v tomto případě jsou: $s = -36.6622$ "/rok a $g = 32.5795$ "/rok.



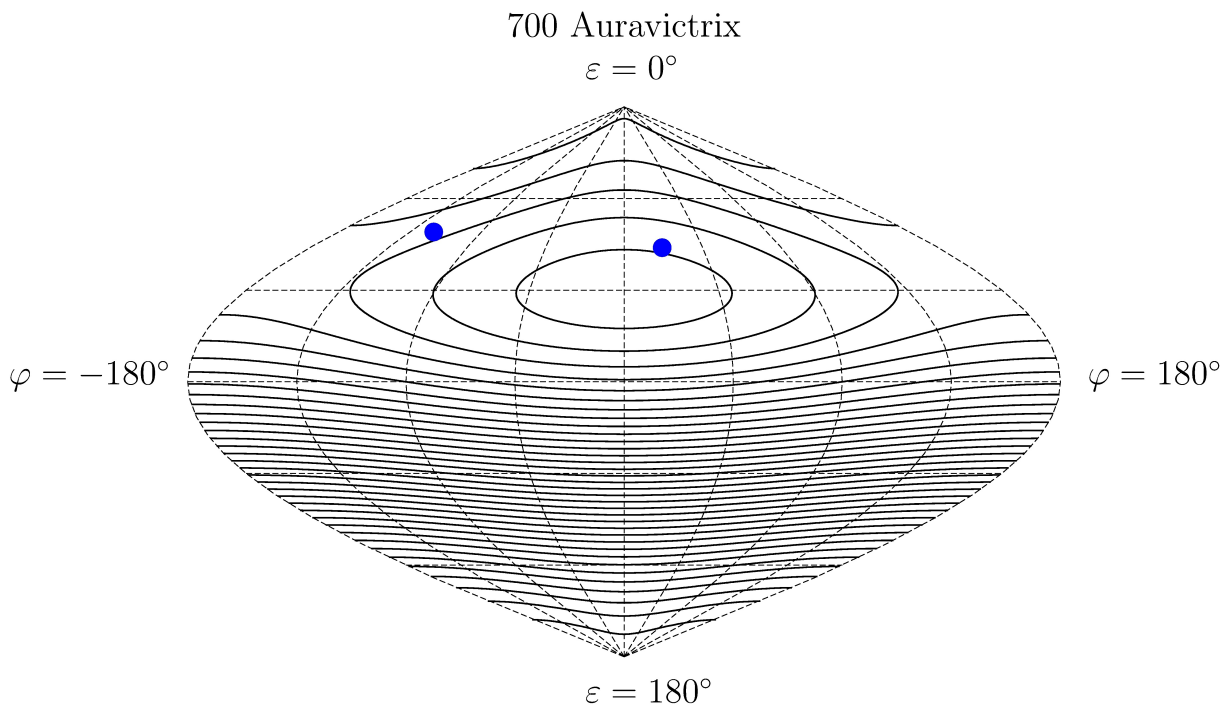
Obrázek 5.19: Polohy rotačních pólů asteroidu Auravictrix určených Kryszczyńską (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.25$.



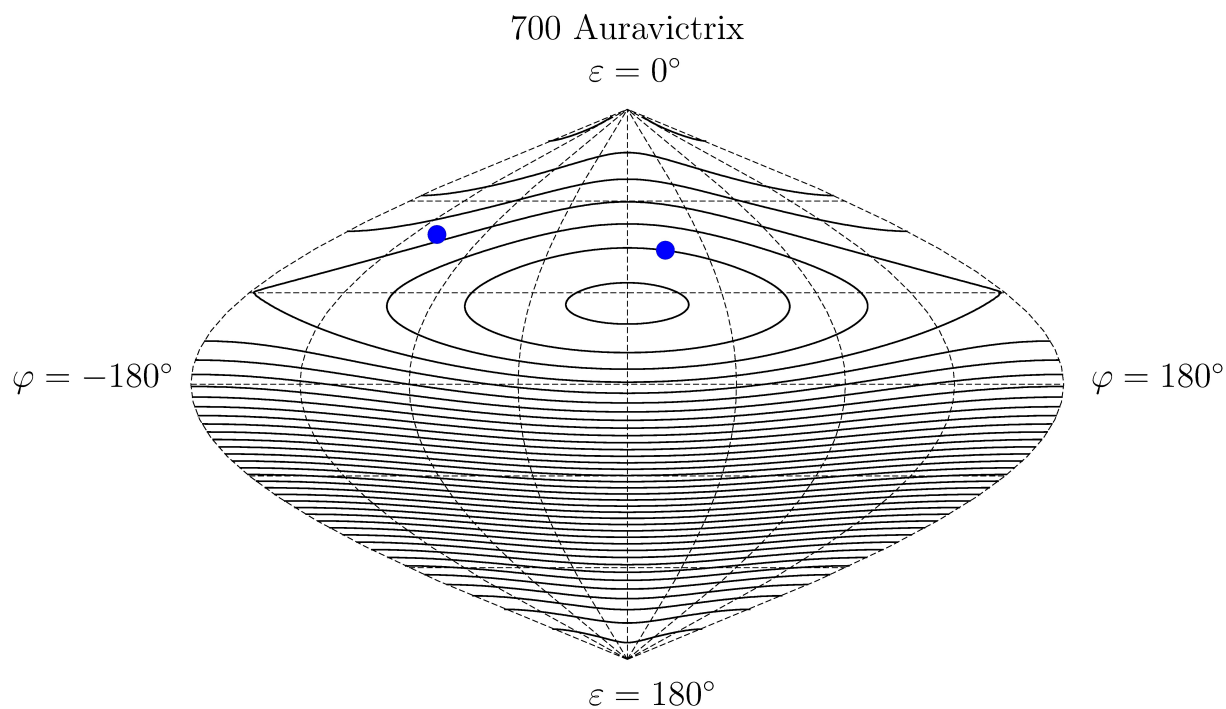
Obrázek 5.20: Polohy rotačních pólů asteroidu Auravictrix určených Kryszczyńską (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.30$.



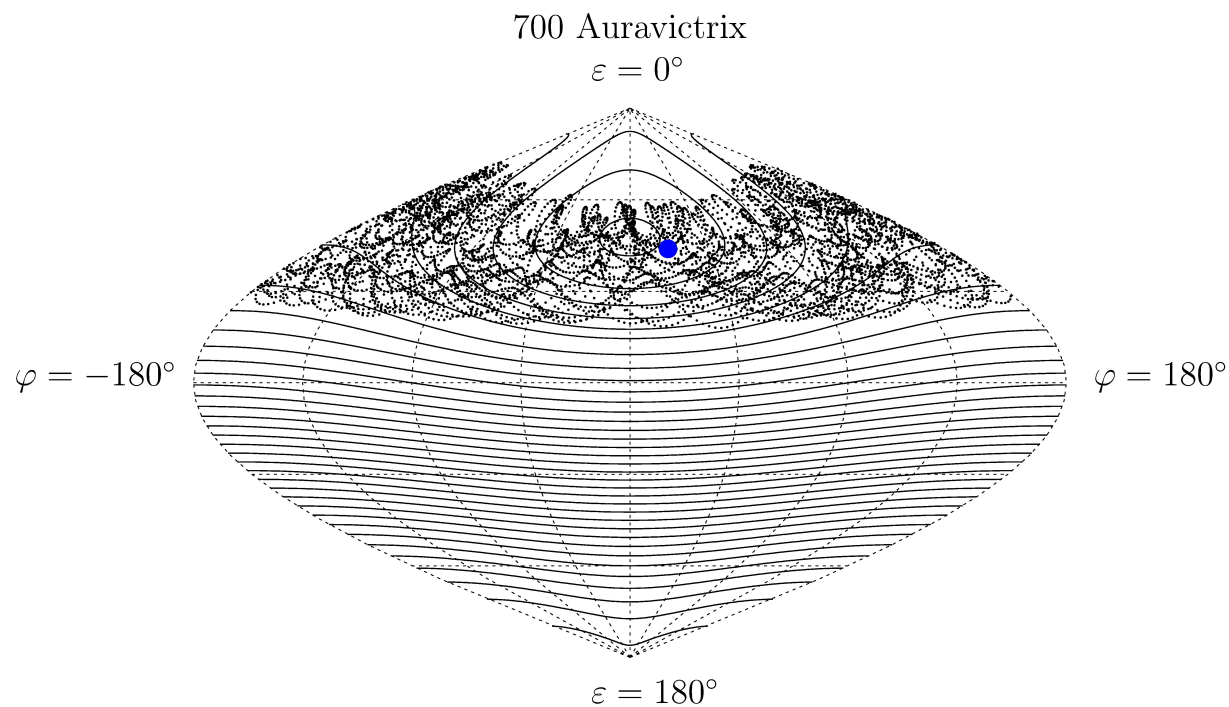
Obrázek 5.21: Polohy rotačních pólů asteroidu Auravictrix určených Kryszczyńskou (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.35$.



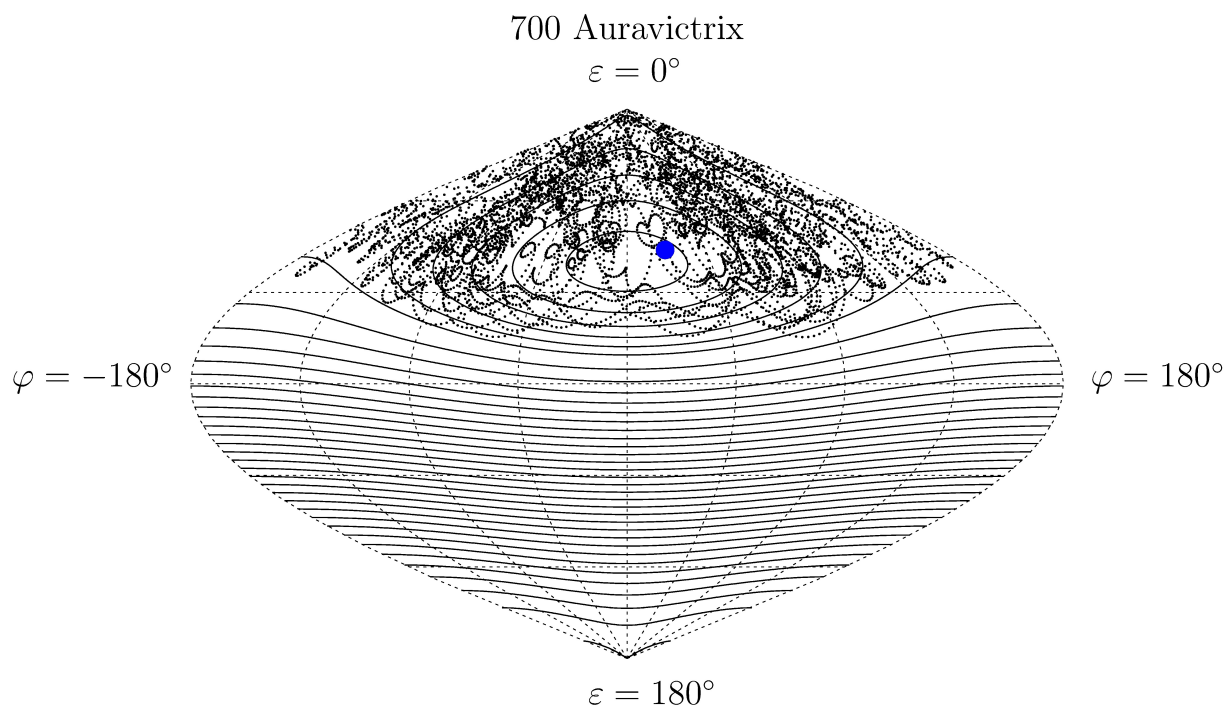
Obrázek 5.22: Polohy rotačních pólů asteroidu Auravictrix určených Kryszczyńskou (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.40$.



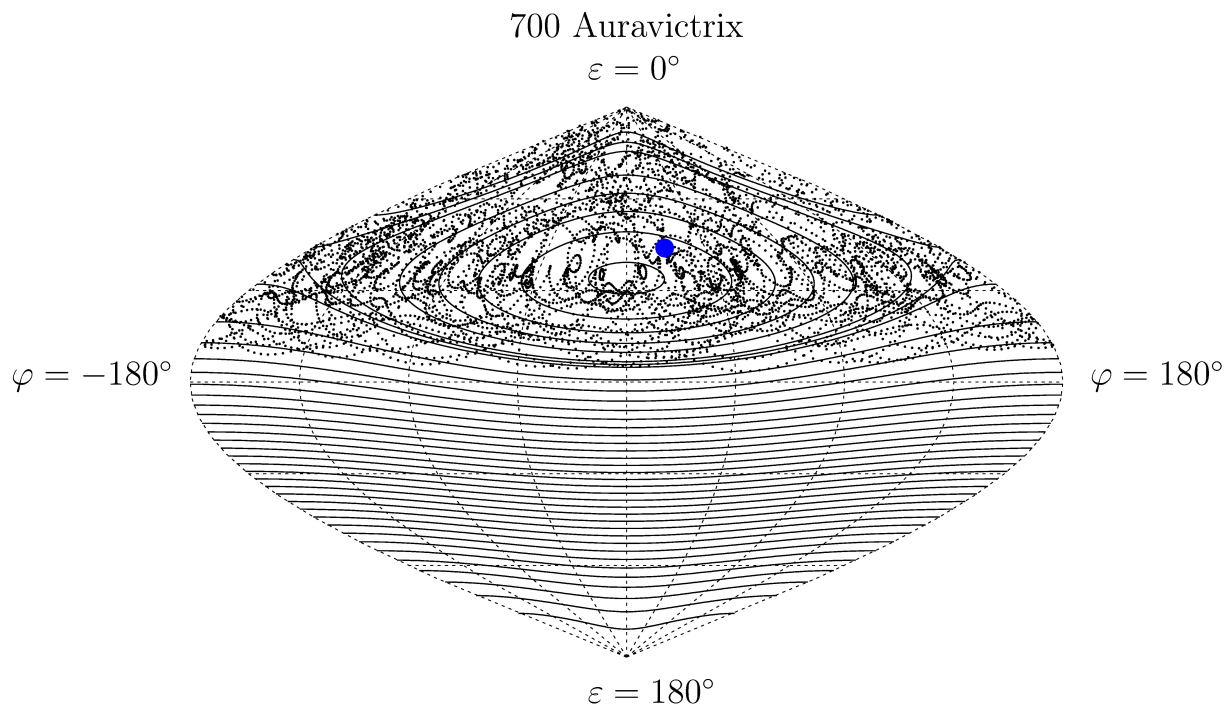
Obrázek 5.23: Polohy rotačních pólů asteroidu Auravictrix určených Kryszczyńskou (viz tabulka 5.2). Souřadný systém se stáčí v inerciálním prostoru s frekvencí s_6 . Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.45$.



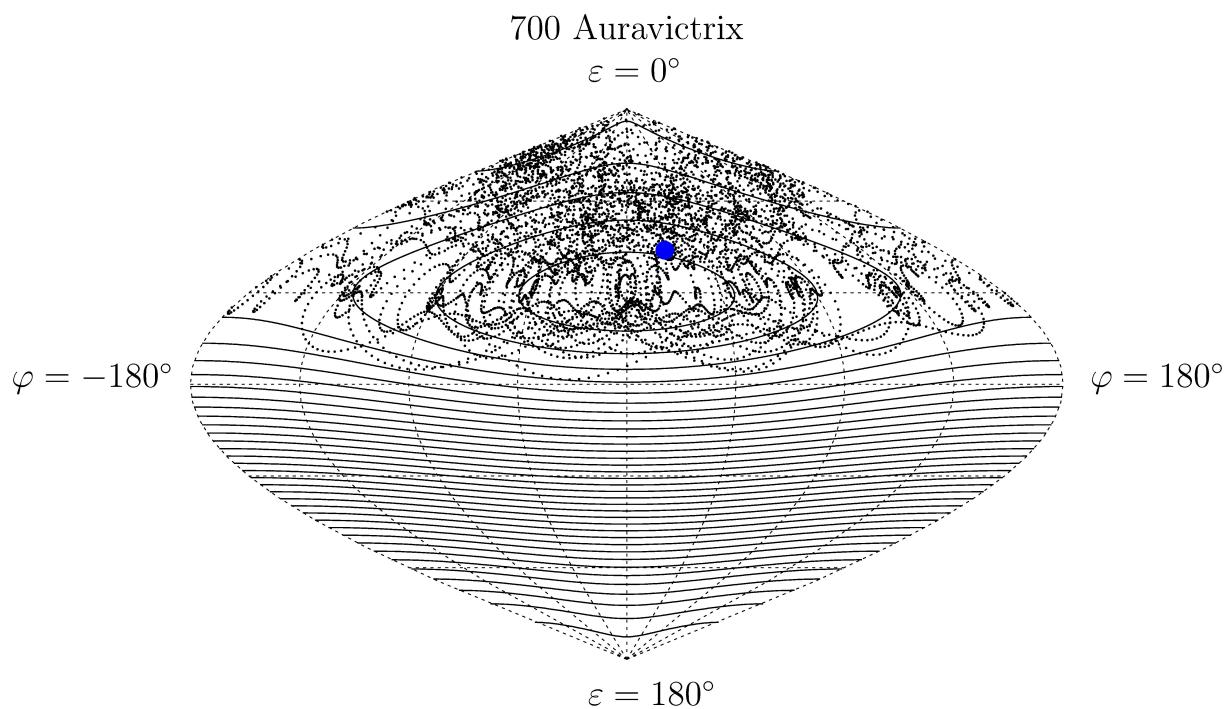
Obrázek 5.24: Poloha prvního pólu asteroidu Auravictrix v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti milionů let. Rozdíl jednotlivých bodů je 750 let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.25$.



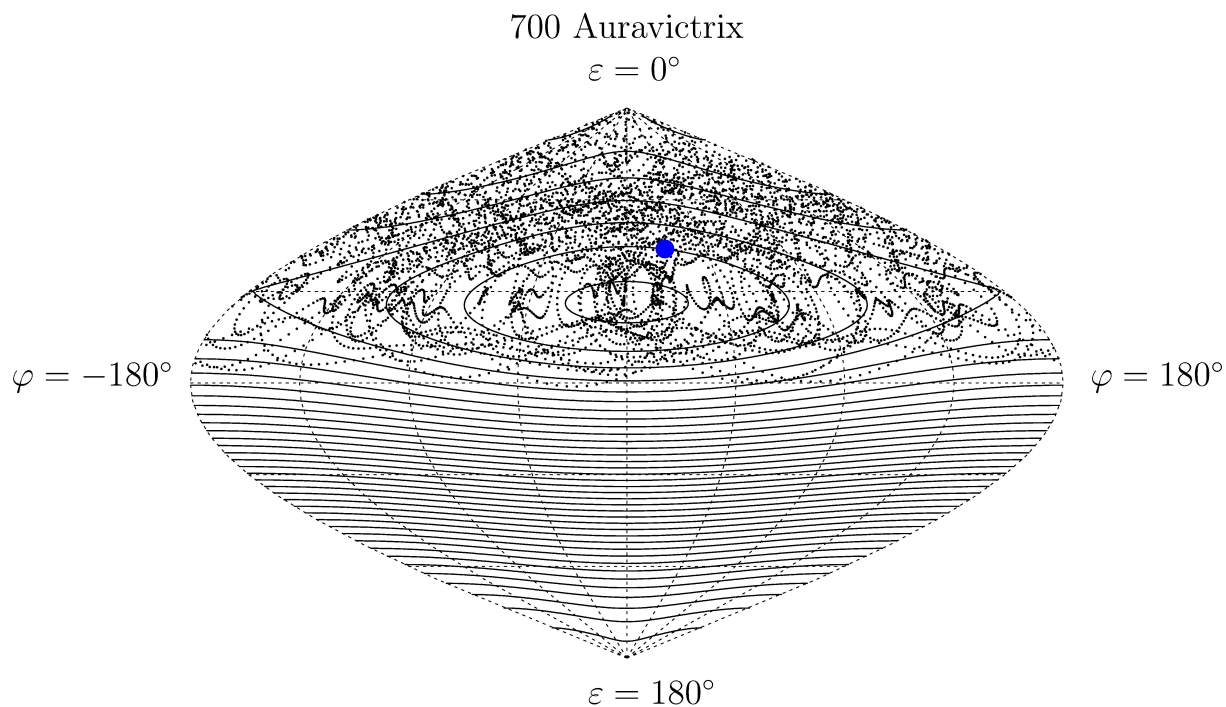
Obrázek 5.25: Poloha prvního pólu asteroidu Auravictrix v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Rozdíl jednotlivých bodů je 750 let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.30$.



Obrázek 5.26: Poloha prvního pólu asteroidu Auravictrix v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Rozdíl jednotlivých bodů je 750 let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.35$.



Obrázek 5.27: Poloha prvního pólu asteroidu Auravictrix v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Rozdíl jednotlivých bodů je 750 let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.40$.



Obrázek 5.28: Poloha prvního pólu asteroidu Auravictrix v tabulce 5.2 ve fázovém prostoru a vývoj rotační osy po dobu pěti miliónů let. Rozdíl jednotlivých bodů je 750 let. Křivky konstantního Hamiltoniánu jsou vykresleny pro $\Delta = 0.45$.

Na obrázcích 5.19 až 5.23 je vidět podoba fázového prostoru pro $\Delta = 0.25$ až $\Delta = 0.45$. Spolu s nimi jsou zde zobrazeny i oba možné póly, které určila A. Kryszczyńska:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 67^\circ, \\ \beta_1 &= +46^\circ, \\ \lambda_2 &= 269^\circ, \\ \beta_2 &= +51^\circ.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Pro další analýzu toho, zda se může Auravitrix udržet v Cassiniho stavu 2, jsme pak vybrali už jen pouze pól č. 1, který leží blíže rezonanční oblasti. Jak je však vidět na obrázcích 5.24 až 5.28 pro $\Delta = 0.25$ až $\Delta = 0.45$, rotační osa se v žádném případě nedokáže dlouhodobě udržet v okolí Cassiniho stavu 2. Velká amplituda vlastní frekvence s způsobí, že trajektorie ve fázovém prostoru prodělává také velké oscilace a snadno se tedy dostane z Cassiniho stavu 2, kde by se v případě malého sklonu snadno udržela. V tomto případě neexistuje žádný interval hodnot parametru Δ , pro které by se rotační pól Auravitrix mohl udržet v Cassiniho stavu 2 nebo ve spin-orbitální rezonanci.

6. Diskuse přesnosti parametru Δ

V předchozích podkapitolách jsme podrobně probírali případ asteroidu 20 Massalia, méně podrobněji pak asteroidy 291 Alice a 700 Auravitrux. Metodou inverze světelných křivek lze určit směr rotačního pólu s přesností $\approx 5^\circ$, což je pro náš problém dostačující. Změna v ekliptikální délce λ ovlivní pouze interval hodnot parametru Δ , pro které je pól schopen se udržet v rezonanční oblasti. Změna v ekliptikální šířce β pak ve většině případů nemá vliv vůbec.

Naproti tomu tvar, který (s výjimkou průletu vesmírných sond kolem asteroidu) nelze v hlavním pásu jinak určit, známe jen velice hrubě díky inverzi světelných křivek. Tato metoda je však schopna učít pouze konvexní model asteroidu. Takový model může velmi dobře reprodukovat naměřené světelné křivky, ale z principu své podstaty nikdy nedokáže vystihnout různé krátery a údolí, které se na povrchu asteroidů nacházejí. Tyto útvary se pak samozřejmě promítnou do výsledné hodnoty parametru Δ .

Abychom zjistili přesnost určení parametru Δ , respektive hlavních momentů tenzoru setrvačnosti, srovnali jsme výsledky inverzní fotometrie se známými tvary několika blízkozemních asteroidů. Každý tvar je zobrazen dvakrát od rovniku a jednou směrem od pólu. Přestože jsou modely a skutečné tvary zobrazeny takto pod sebou, tak si jednotlivé pohledy nemusí odpovídat a modelové a skutečné tvary mohou být vůči sobě různě pootočený.

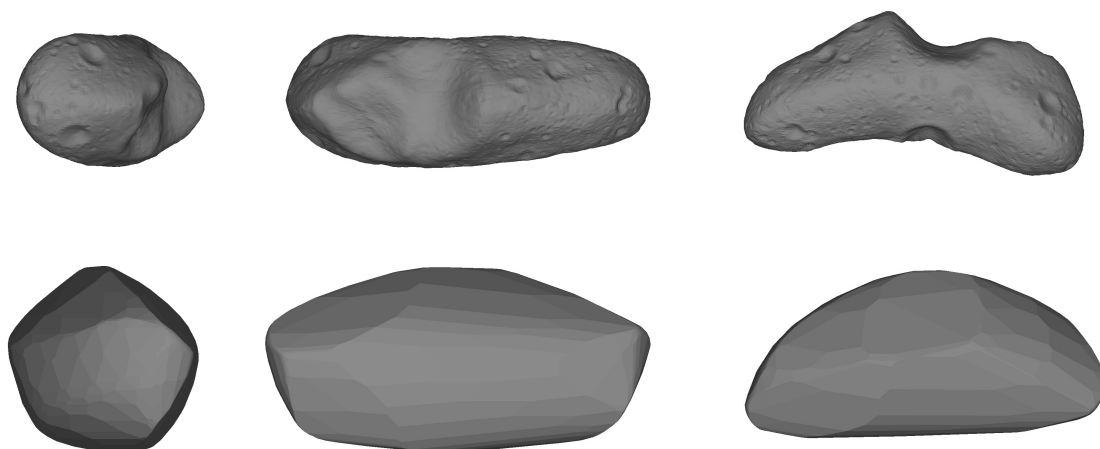
Na obrázcích, které přísluší jednotlivým asteroidům, jsou pod sebou zobrazeny skutečné tvary (popřípadě tvary získané z radarových dat) ve srovnání s konvexními tvary z inverze světelných křivek. Modelové tvary asteroidů byly získány z databázi Damit [11] a Dafeed [12].

433 Eros

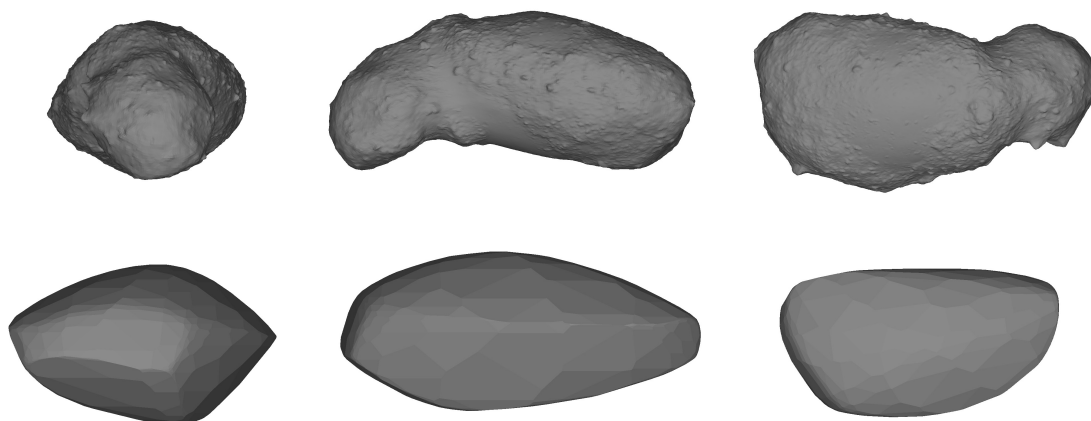
Pro asteroid Eros jsme použili model, který je spočten na základě analýzy celkem 118 světelných křivek pokrývajících období od roku 1951 až do 1993. Výsledný model měl 1010 vrcholů a byl tvořen 2016 trojúhelníky. Porovnání skutečného tvaru asteroidu s modelovým tvarem získaným metodou inverze světelných křivek lze vidět na obrázku 6.1. Skutečný tvar byl určen sondou NEAR Shoemaker v roce 2001. Data jsou k dispozici na stránkách NASA [37]. Použitý tvar asteroidu pro výpočty (na obrázku je zobrazen hrubší tvar) měl celkem 100 352 vrcholů a 200 700 trojúhelníků.

25143 Itokawa

Pro případ Itokawy jsme použili celkem 85 světelných křivek od roku 2000 do 2012. Model, který jsme získali analýzou těchto křivek, má 995 vrcholů a 1986 trojúhelníků (světelné křivky poskytl J. Ďurech). Asteroid Itokawa byl zkoumán japonskou sondou Hayabusa, která se k asteroidu přiblížila v září 2005. Na stránkách Japonské kosmické agentury jsou data volně ke stažení ([18]). K výpočtům momentů tenzoru setrvačnosti jsme použili tvar složený z 25 350 bodů, které byly pospojovány 49 152 trojúhelníky. Srovnání modelu a skutečného tvaru je zobrazeno na obrázku 6.2.



Obrázek 6.1: Srovnání skutečného tvaru asteroidu 433 Eros, který byl získaný na základě pozorování vesmírné sondy NEAR Shoemaker, a modelového konvexního tvaru odvozeného metodou inverze světelných křivek. Skutečný tvar je složen z 200 700 trojúhelníků, model má pak pouze 2016 trojúhelníků.

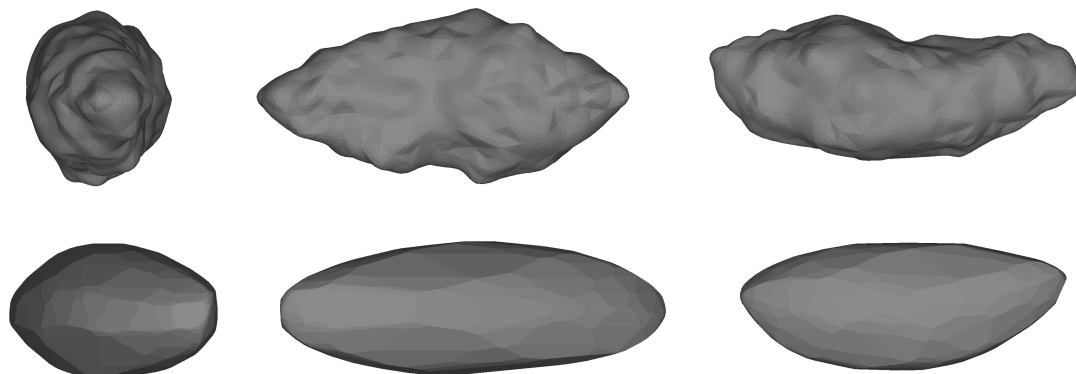


Obrázek 6.2: Srovnání skutečného tvaru asteroidu 25143 Itokawa, který byl získaný na základě pozorování vesmírné sondy Hayabusa, a modelového konvexního tvaru odvozeného metodou inverze světelných křivek. Skutečný tvar je složen z 49152 trojúhelníků, model má pak pouze 1986 trojúhelníků.

Z obou předchozích obrázků je zřejmé, že ač jsme použili velký počet světelných křivek (u Massalie to bylo dokonce jen 33!), tak modely odpovídají skutečnosti jen hrubě.

1620 Geographos

Dalším tělesem, u kterého jsme měli možnost porovnat tvary, byl asteroid 1620 Geographos. Referenční tvar byl získán pomocí radarových měření a je k dispozici v databázi Small Bodies Data Ferret [26].

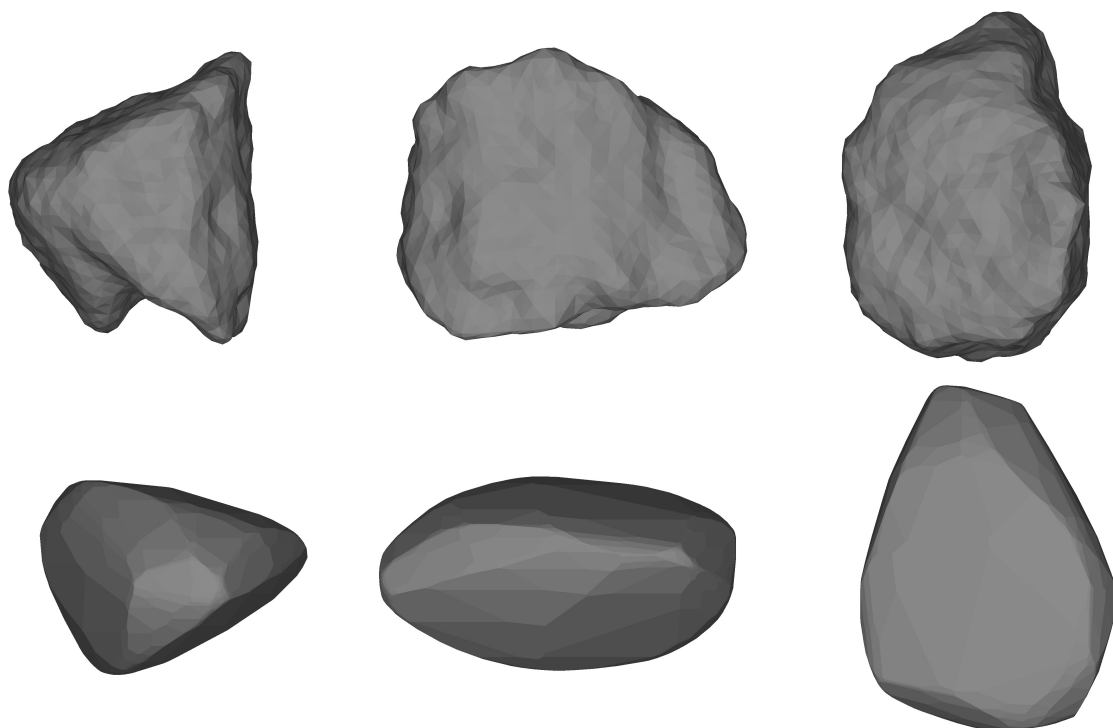


Obrázek 6.3: Srovnání radarového tvaru asteroidu 1620 Geographos a modelového konvexního tvaru odvozeného metodou inverze světelných křivek. Tvar určený na základě radarových pozorování je složen z 16380 trojúhelníků, model má pak pouze 2040 trojúhelníků.

Konvexní model byl získán na základě fotometrických pozorování pokrývajících období 1969 – 2008 (získáno z databáze Damit [11]). Celkem bylo použito 94 světelných křivek. Výsledný model je složený z 1022 bodů, které jsou pospojovány do 2040 trojúhelníků. Tvar určený z radarových pozorování není tak detailní, jako tomu bylo v případě Erosu nebo Itokawy – je složen z 8192 bodů a 16 380 trojúhelníků. Srovnání obou tvarů je zobrazeno na obrázku 6.3.

6489 Golevka

Tvar, který bereme jako reálný, byl získaný z radarových dat ([15]) byl složený pouze z 2048 bodů 4092 trojúhelníků. Model získaný z databáze Dafeed ([12]) zatím ještě není dokonalý. Konvexní model byl konstruován z celkem 49 světelných křivek – byl složený z 1016 bodů a 2028 trojúhelníků. Na obrázku 6.4 je vidět srovnání obou modelů.

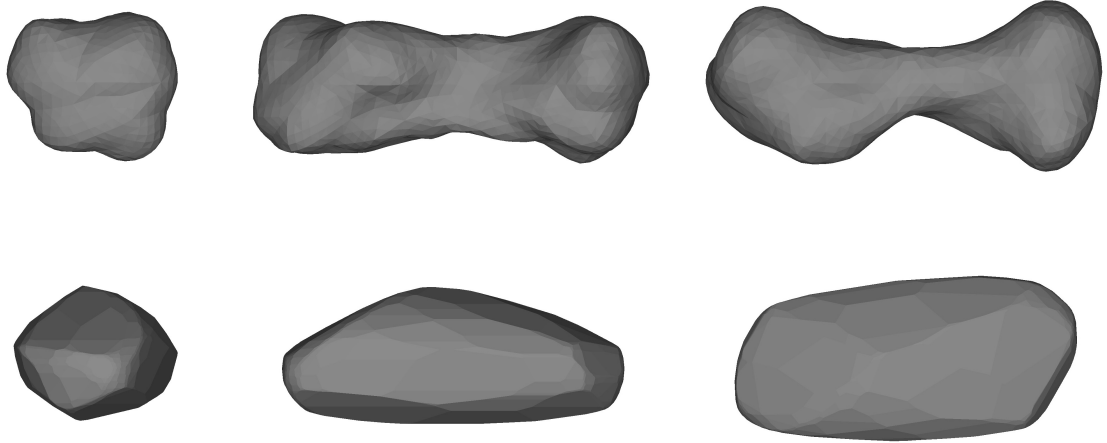


Obrázek 6.4: Srovnání radarového tvaru asteroidu 6489 Golevka a modelového konvexního tvaru odvozeného metodou inverze světelných křivek. Konvexní model ještě není ideální, některé naměřené světelné křivky se zatím moc dobře neshodují s modelem. Tvar určený na základě radarových pozorování je složen z 4092 trojúhelníků, model má pak pouze 2028 trojúhelníků.

216 Kleopatra

Dalším asteroidem, pro který máme podrobnější informaci o jeho tvaru, je Kleopatra. Tvar byl opět určen z radarových dat ([28]) – byl složen z celkem 2048 bodů a 4092 trojúhelníků. Tento tvar jsme porovnávali s konvexním modelem získaným z 55 světelných křivek. Konvexní model měl 1022 bodů a 2040 trojúhelníků. Porovnání lze opět vidět na obrázku 6.5.

V tabulce 6.1 jsou uvedeny výsledky modelů a skutečných tvarů pro všechny zkoumané asteroidy. Označení „real“ patří skutečnému tvaru získaném sondou při blízkém průletu, nebo radarovým pozorováním. Index „lc“ pak patří modelu získaném inverzí světelných křivek. Z výsledků je vidět, že hodnoty parametru Δ spočtené na konvexním modelu mohou vycházet menší i větší než je skutečná hodnota. Bohužel však nemáme k dispozici dostatečné množství asteroidů se známým tvarem, abychom mohli dělat nějaké statistické závěry. Také se nepotvrdilo, že by například pro konvexní modely vycházel parametr Δ systematicky



Obrázek 6.5: Srovnání radarového tvaru asteroidu 216 Kleopatry a modelového konvexního tvaru odvozeného metodou inverze světelných křivek. Tvar určený na základě radarových pozorování je složen z 4092 trojúhelníků, model má pak pouze 2040 trojúhelníků.

vyšší nebo nižší než je jejich skutečná hodnota. Z těchto několika hodnot je však vidět (v případě, že vyloučíme nedokonalý model Golevky³⁵), že chybu modelové hodnoty parametru Δ lze odhadnout $\delta\Delta \gtrsim 0.08$. Pokud by skutečná hodnota Δ pro Massalii byla nižší než, kolik vychází z modelu (0.32), mohl by se rotační pól nacházet v rezonančním stavu ($\Delta = 0.23 - 0.29$).

		Δ_{real}	Δ_{lc}	N_{lc}	$N_{\text{lc-points}}$	$N_{\text{lc-}\Delta}$	$N_{\text{real-points}}$	$N_{\text{real-}\Delta}$
433	Eros	0.41	0.33	118	1010	2016	100 352	200 700
25143	Itokawa	0.38	0.38	85	995	1986	25 350	49 152
1620	Geographos	0.38	0.41	94	1022	2040	8192	16 380
6489	Golevka	0.14	0.33(?)	49	1016	2028	2048	4092
216	Kleopatra	0.43	0.40	55	1022	2040	2048	4092

Tabulka 6.1: Srovnání výsledků určení parametru Δ pro skutečné / radarové tvary ve srovnání s konvexním modelem. Sloupce $N_{\text{lc-points}}$ a $N_{\text{lc-}\Delta}$ označují počet bodů a počet trojúhelníků, ze kterých byl modelový tvar sestaven. Obdobně pro skutečné nebo radarové tvary, které jsou označeny indexem „real“. Hodnoty u konvexního modelu asteroidu Golevka se ještě budou pravděpodobně vyvíjet, podle toho jak se bude zpřesňovat model s přibývajícími daty.

Odhad chyby $\delta\Delta$ se možná časem ukáže jako až příliš optimistický. Navíc pro asteroidy v hlavním pásu, jejichž rotační osa míří ve směru $\beta \approx \pm 90^\circ$, lze velmi špatně určit vertikální rozměr asteroidu. V takových konfiguracích, kdy rotační osa je kolmá k rovině ekliptiky, se totiž změna vertikální složky v relativní fotometrii vůbec neprojeví. Tento rozměr je samozřejmě důležitý pro určení parametru Δ celého asteroidu.

³⁵V případě Golevky zřejmě díky „vykousnutému“ tvaru asteroidu pravděpodobně nepomůže k dobré shodě parametru Δ ani větší množství naměřených světelných křivek.

7. Závěr

Na příkladech asteroidů 20 Massalia a 700 Auravictrix (popřípadě 291 Alice) byl ukázán zásadní rozdíl v možnostech zachycení asteroidu ve spin-orbitální rezonanci s frekvencí s_6 . Nehledě na orientaci rotační osy asteroidu lze obecně tvrdit, že pro vyšší vlastní sklon I existuje mnohem menší interval parametru Δ , pro který je asteroid schopen se dlouhodobě udržet kolem Cassiniho stacionárního bodu 2. Rozdíl mezi spin-orbitální rezonancí a pouhou oscilací kolem Cassiniho stavu 2 je vidět na příkladu asteroidu Alice. V případě, že $\Delta = 0.3410 - 0.3730$, směr rotační osy osciluje kolem Cassiniho stavu 2, tj. nejde o případ spin-orbitální rezonance – ve fázovém prostoru existují pouze dva stabilní stacionární body. Avšak pro $\Delta = 0.3960 - 0.3985$ už jde o případ spin-orbitální rezonance – ve fázovém prostoru existují čtyři možné stacionární řešení, to nestabilní obepíná rezonanční oblast. Na tomto intervalu je také vidět vlastnost, kterou má většina asteroidů A. Kryszyńské – a sice velmi úzce specifikovanou hodnotu Δ , pro kterou jsou schopny udržet se v Cassiniho stavu 2. Mnohdy jde dokonce o diskrétní hodnoty (případná „volnost“ může být v řádu desetitisícin a méně), což je velmi silný požadavek, pokud si uvědomíme, že o tvaru a vnitřní stavbě daného asteroidu mnoho nevíme.

Výsledky uvedené v tabulce 5.2 jednoznačně vyvrací domněnku Agnieszky Kryszyńské, která naopak tvrdí, že i v případě asteroidů z rodiny Flora objevila stejné rezonanční stavy jako Slivan v rodině Koronis. Pro větší vlastní sklon I , respektive amplitudu vlastní frekvence s , jsou oscilace rotačního pólu také větší, a proto je pro něj mnohem těžší se dlouhodobě udržet ve spin-orbitální rezonanci. To může platit i v případě, že projekce rotačního pólu míří ve fázovém prostoru přesně do rezonanční oblasti (jak bylo ukázáno u asteroidu 700 Auravictrix). Navíc pro menší velkou poloosu a se vlastní frekvence s přibližuje rezonanční frekvenci s_6 a snáze s ní tak interaguje, což také vede k tomu, že se asteroid obtížněji udržuje ve spin-orbitální rezonanci právě s frekvencí s_6 .

Případní kandidáti na Slivanovy stavy ve vnitřní části hlavního pásu tedy musí splňovat především podmínku nízkého sklonu. Jedním takovým může být například asteroid 20 Massalia. To samozřejmě za předpokladu, že rotační osa míří ve směru $\lambda = 357.4^\circ$, $\beta = 51.6^\circ$ a navíc, že hodnota parametru Δ bude ležet v intervalu $(0.23 - 0.29)$. Jak bylo také řečeno, bude v případě Massalie potřeba hlubší analýzy dat, abychom mohli vyloučit alespoň jeden z možných pólů.

Zde je vidět hlavní nedostatek metody inverze světelných křivek – nelze rozhodnout, které z řešení je skutečné a které ne. Hodnota parametru Δ nehraje u takovýchto asteroidů tak zásadní roli, protože se v rezonanci dokáží udržet pro velký rozsah hodnot Δ (až jednu desetinu!). K tomu abychom mohli rozhodnout, které z řešení je skutečné, bylo by potřeba dodat některá nová data – pozorování adaptivní optikou, pozorování v infračerveném oboru nebo pozorování zákrytu nějaké hvězdy daným asteroidem. Pozorováním v infračerveném oboru se například podařilo Delbovi a Tangovi v [8] určit směr rotační osy asteroidu 720 Bohlinia (rodina Koronis) a dokázat tak, že se tento asteroid skutečně nachází ve Slivanově stavu.

Literatura

- [1] Asteroid Observing Services, <http://asteroid.lowell.edu/>.
- [2] Asteroids Dynamic Site – AstDyS, <http://hamilton.dm.unipi.it/astdys/>.
- [3] BANGE J. 1998, *An estimation of the mass of asteroid 20–Massalia derived from the HIPPARCOS minor planets data*, A&A, 340, L1 – L4.
- [4] BOTTKÉ W. F., VOKROUHLICKÝ D., RUBINCAM D. P., NESVORNÝ D. 2006, *The Yarkovsky and YORP Effects: Implications for Asteroid Dynamics*, Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 34, 157 – 191.
- [5] BREITER S., NESVORNÝ D., VOKROUHLICKÝ D. 2005, *Efficient Lie-Poisson integrator for secular spin dynamics of rigid bodies*, AJ, 130, 1267 – 1277.
- [6] BURNS J. A., SAFRONOV V. S. 1973, *Asteroid nutation angles*, Mon. Not. R. Astron. Soc., 165, 403 – 411.
- [7] COLOMBO G. 1966, *Cassini’s second and third laws*, AJ, 71, 891 – 896.
- [8] DELBO M., TANGA P. 2008, *Thermal inertia of main belt asteroids smaller than 100 km from IRAS data*, Planet. Space Sci., 57, 259 – 265.
- [9] DEMEO F. E., SLIVAN R. P., BUS S. J. 2009, *An extension of the Bus asteroid taxonomy into the near-infrared*, Icarus, 202, 160 – 180.
- [10] DOBROVOLSKIS A. R. 1996, *Inertia of any polyhedron*, Icarus, 124, 698 – 704.
- [11] ĎURECH J., HANUŠ J., SIDORIN V. 2011, *Database of Asteroid Models from Inversion Techniques*,
<http://astro.troja.mff.cuni.cz/projects/asteroids3D/web.php>.
- [12] ĎURECH J., KAASALAINEN M. 2012, *Damit feeder*,
<http://astro.troja.mff.cuni.cz/projects/dafeed/>.

- [13] FERRAZ-MELLO S. 1980, *Estimation of periods from unequally spaced observation*, AJ, 86, 619 – 624.
- [14] HARRIS A. W. 1987, *Tumbling Asteroids*, Icarus, 107, 209 – 211.
- [15] HUDSON R. S. ET AL. 2004, *ASTEROID RADAR SHAPE MODELS, 6489 GOLEVKA*, NASA Planetary Data System, <http://sbn.psi.edu/ferret/listDatasets.action>.
- [16] HENRARD J., MURIGANDE CH. 1987, *Colombo's top*, Celest. Mech., 40, 345 – 366.
- [17] HIGGINS D., *Hunters hill observatory*, <http://www.david-higgins.com>.
- [18] JAPAN AEROSPACE EXPLORATION AGENCY 2007, *Hayabusa project*, <http://darts.isas.jaxa.jp/planet/project/hayabusa>.
- [19] KAASALAINEN M., TORPPA J. 2001, *Optimization Methods for Asteroid Lightcurve Inversion. I. Shape Determination*, Icarus, 153, 24 – 36.
- [20] KAASALAINEN M., TORPPA J., MUINONEN K. 2001, *Optimization Methods for Asteroid Lightcurve Inversion. II. The Complete Inverse Problem*, Icarus, 153, 37 – 51.
- [21] KAASALAINEN M., TORPPA J., PIIRONEN J. 2002, *Models of Twenty Asteroids from Photometric Data*, Icarus, 159, 369 – 395.
- [22] KRYSZCZYŃSKA A. 2013, *Do Slivan states exist in the Flora family? II. Fingerprints of the Yarkovsky and YORP effects*, A&A, 551, A102.
- [23] LASKAR J. 1992, *Precessional quantities for the Earth over 10 Myr*, Orbital, Rotational and Climatic Interactions in NASA workshop, 35 – 40.
- [24] LASKAR J. 1988, *Secular evolution of the solar system over 10 million years*, A&A, 198, 341 – 362.
- [25] LEVISON H. F., DUNCAN M., *SWIFT – A solar system integration software package*, <http://www.boulder.swri.edu/~hal/swift.html>.

- [26] NEESE C. 2004, *Small Body Radar Shape Models V2.0*, NASA Planetary Data System, <http://sbn.psi.edu/ferret/>.
- [27] NESVORNÝ D., VOKROUHLICKÝ D. 2008, *Analytic theory for the Yarkovsky–O’Keefe–Radzievsky–Paddack effect on obliquity*, AJ, 136, 291 – 299.
- [28] OSTRO S. J. 2004, *ASTEROID RADAR SHAPE MODELS, 216 KLEOPATRA*, NASA Planetary Data System, <http://sbn.psi.edu/ferret/>.
- [29] PEALE S. J. 1969, *Generalized Cassini’s laws*, AJ, 74, 483 – 489.
- [30] SLIVAN S. M. 2002, *Spin vector alignment of Koronis family asteroids*, Nature, 419, 49 – 51.
- [31] SLIVAN S. M., BINZEL R. P., BOROUHAND S. C., PAN M. W., SIMPSON CH. M., TANABE J. T., VILASTRIGO R. M., YEN L. L., DITTEON R. P., PRAY D. P., STEPHENS R. D. 2008, *Rotation rates in the Koronis family, complete to $H \approx 11.2$* , Icarus, 195, 226 – 276.
- [32] SLIVAN S. M., BINZEL R. P., CRESPO DA SILVA L. D., KAASALAINEN M., LYNDAKER M. M., KRČO, M. 2003, *Spin vectors in the Koronis family: comprehensive results from two independent analyses of 213 rotation lightcurves*, Icarus, 162, 285 – 307.
- [33] SLIVAN S. M., BINZEL R. P., KAASALAINEN M., HOCK A. N., KLESMAN A. J., ECKELMAN L. J. 2009, *Spin vectors in the Koronis family. II. Additional clustered spins, and one stray*, Icarus, 200, 514 – 530.
- [34] SOLAR SYSTEM DYNAMICS, *Horizons*, <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>.
- [35] SOUAMI D., SOUCHAY J. 2011, *The Invariable Plane of the Solar System: a natural reference frame in the study of the dynamics of solar system bodies*, Journées des Systèmes de références – Vienna, http://info.tuwien.ac.at/hg/meetings/journees11/Pres/Posters/4.2_Souami.pdf/.
- [36] SOUAMI D., SOUCHAY J. 2012, *The solar system’s invariable plane*, A&A, 543, A133.

- [37] THOMAS P. C., JOSEPH J., CARCICH B. T., RAUGH A. C. 2001, *NEAR MSI SHAPE MODEL FOR 433 EROS V1.0*, NASA Planetary Data System,
<http://sbn.psi.edu/ferret/listDatasets.action>.
- [38] VOKROUHLICKÝ D., *Cassiniho dynamika*, nepublikováno,
<http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~davok/>.
- [39] VOKROUHLICKÝ D., BROŽ M., BOTTKÉ W. F., NESVORNÝ D., MORBIDELLI A. 2006, *Yarkovsky/YORP chronology of asteroid families*, *Icarus*, 182, 118 – 142.
- [40] VOKROUHLICKÝ D., NESVORNÝ D., BOTTKÉ W. F. 2006, *The vector alignments of asteroid spins by thermal torques*, *Nature*, 425, 147 – 151.

Seznam použitých zkratek a konstant

Zkratka	Význam	Překlad
au	Astronomical Unit	Astronomická jednotka
DCDFT	Data Compensated Discrete Fourier Transform	—
IAU	International Astronomical Union	Mezinárodní Astronomická Unie
MJD	Modified Julian Day	Modifikované Juliánské Datum
RMS	Root Mean Square	Střední kvadratická odchylka
SWIFT	A solar system integration software package	—
YORP	Yarkovsky–O’Keefe–Radzievskii–Paddack	—

Tabulka 7.1: Tabulka zkratek

Označení	Název	Hodnota	Jednotky
au	Astronomická jednotka	149 597 870 700	m
M_{\odot}	Hmotnost Slunce	$1.9818 \cdot 10^{30}$	kg
G	Gravitační konstanta	$6.67384 \cdot 10^{-11}$	$\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
e	Základ přirozeného logaritmu	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	—

Tabulka 7.2: Tabulka konstant

Seznam označení

Znak	Význam	Jednotky
a	velká poloosa elipsy	au
e	excentricita elipsy	—
I	sklon dráhy od referenční roviny	deg
Ω	délka výstupního uzlu	deg
l	střední anomálie	deg
f	pravá anomálie	deg
q, p	nesingulární elementy	—
η	$\sqrt{1 - e^2}$	—
ε	obliquita	deg
\mathcal{X}	$\cos \varepsilon$	—
λ	ekliptikální délka	deg
β	ekliptikální šířka	deg
e	jednotkový vektor kolmý na rovinu ekliptiky	—
s	jednotkový vektor ve směru rotační osy	—
c	jednotkový vektor kolmý na rovinu dráhy	—
M, m	hmotnost	kg
f	síla	$\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
T	moment síly	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$
L	moment hybnosti	$\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$
\mathbb{I}	tenzor setrvačnosti	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
$A, B, C (A \leq B \leq C)$	hlavní momenty tenzoru setrvačnosti	$\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Δ	elipticita	—
α	precesní konstanta	"/rok
ψ	precesní úhel	deg
\mathcal{A}	amplituda	—
φ	fáze	deg
ν	frekvence	"/rok

Tabulka 7.3: Tabulka označení – první část.

Znak	Význam	Jednotky
s	vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu	"/rok
s_j	nucená frekvence stáčení výstupného uzlu	"/rok
g	vlastní frekvence stáčení pericentra	"/rok
g_j	nucená frekvence stáčení pericentra	"/rok
\mathcal{C}	Colombův integrál	"/rok
t	čas	rok
P	siderická rotační perioda ³⁶	h
ω	úhlová frekvence	rad / s
i	imaginární jednotka	—
\boldsymbol{v}	obecný vektor v trojrozměrném prostoru	—
v	velikost vektoru \boldsymbol{v}	—
v_i	i-tá složka vektoru \boldsymbol{v}	—
\mathbb{M}	obecná matice 3×3	—
M_{ij}	složky matice \mathbb{M}	—
$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$	skalární součin	—
$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$	vektorový součin	—
\boldsymbol{vw}	tenzorový součin $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$	—
$\mathbb{A}\mathbb{B}, \mathbb{M}\boldsymbol{v}$	maticové násobení	—
$\dot{\boldsymbol{v}}$	derivace vektoru podle času	—
\dot{a}	derivace skaláru podle času	—

Tabulka 7.4: Tabulka označení – druhá část.

³⁶Siderická perioda je doba potřebná k otočení asteroidu o 2π vzhledem k vzdáleným hvězdám.

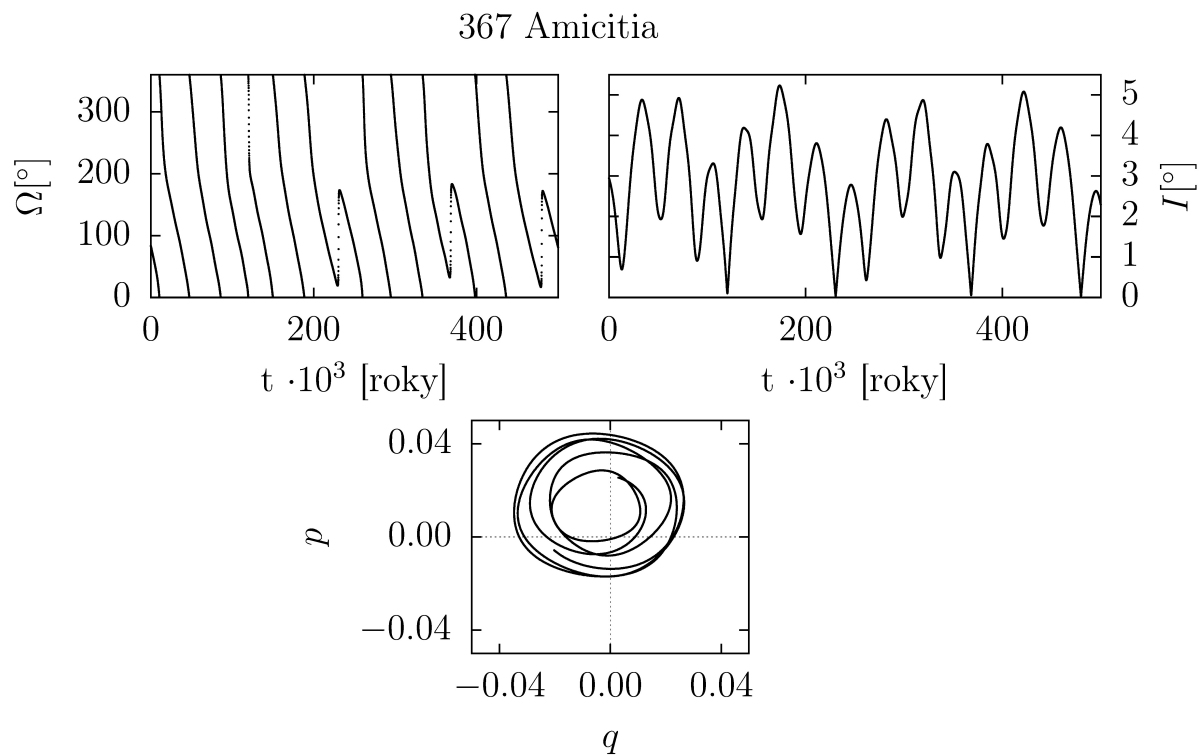
Přílohy

K hlavní práci jsou přiloženy přílohy v podobě dalších obrázků a grafů a také zdrojové kódy se stručným popisem ovládání programu a tvaru vstupních souborů.

A. Obrazová příloha

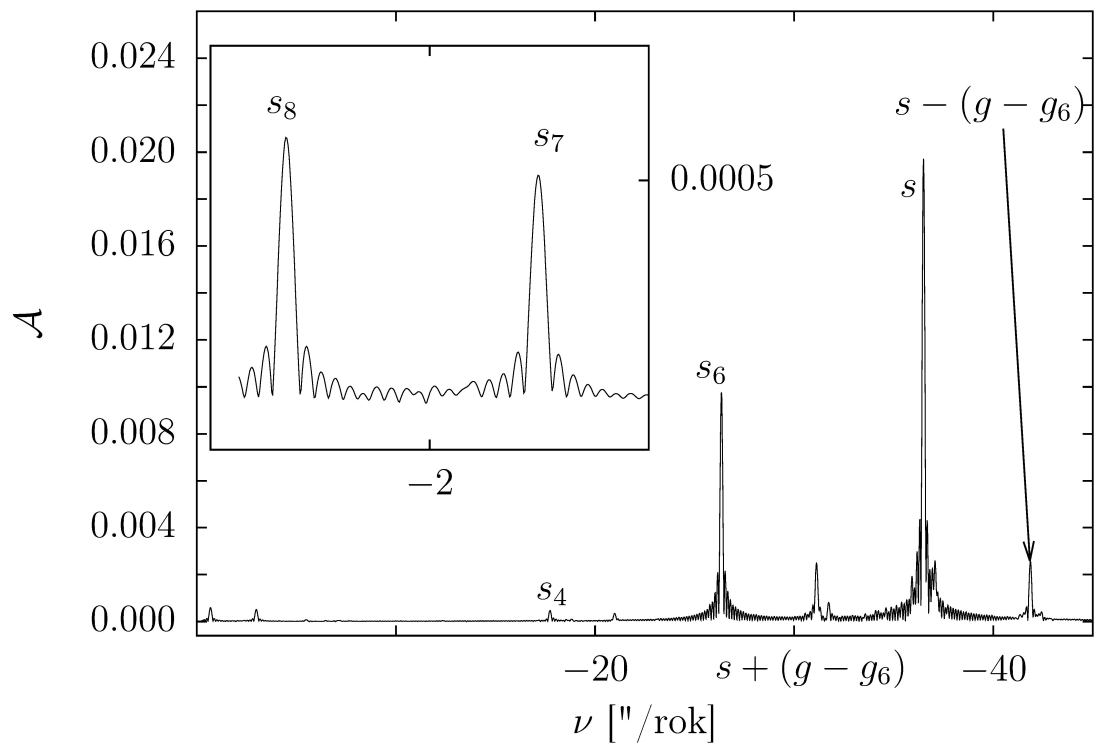
Na následujících stránkách lze najít vývoj orbitálních elementů, spektrální analýzu, popřípadě dalších asteroidů, které pozorovala A. Kryszyńska, a které se nevešly do hlavní části této práce, nebo na které nezbylo dostatek času k podrobnější diskusi.

A.1 367 Amicitia



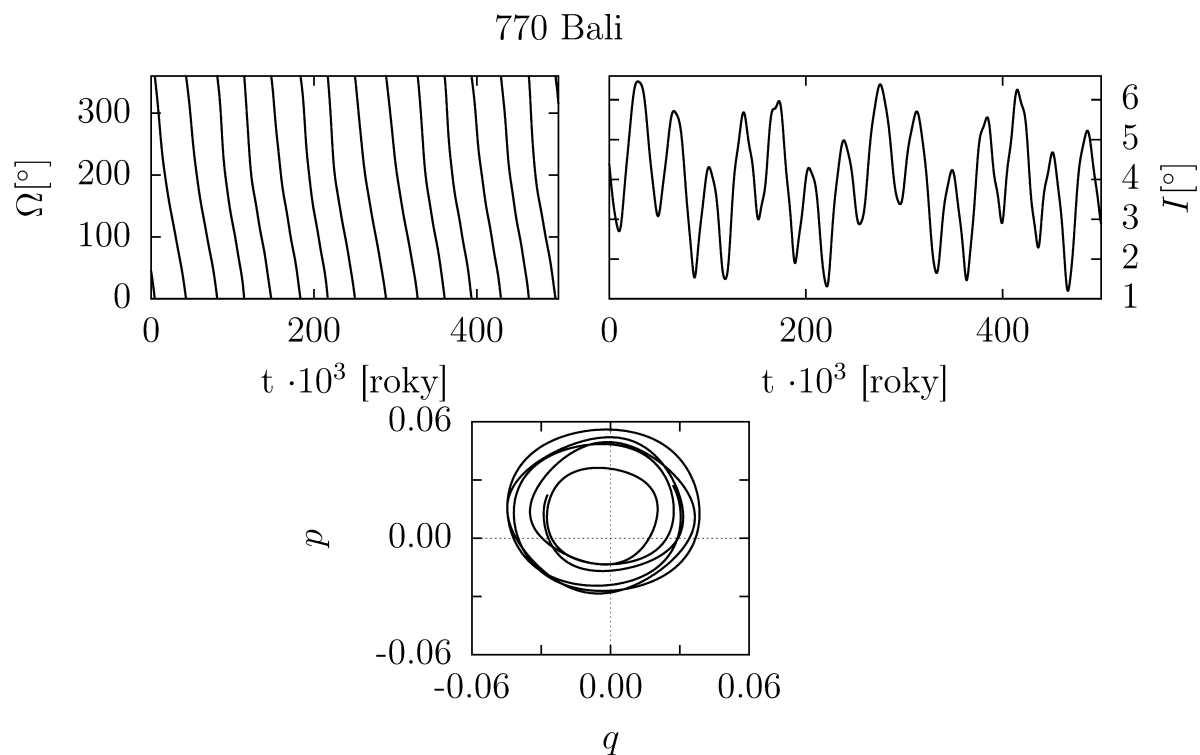
Obrázek A.1: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 367 Amicitia za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

367 Amicitia

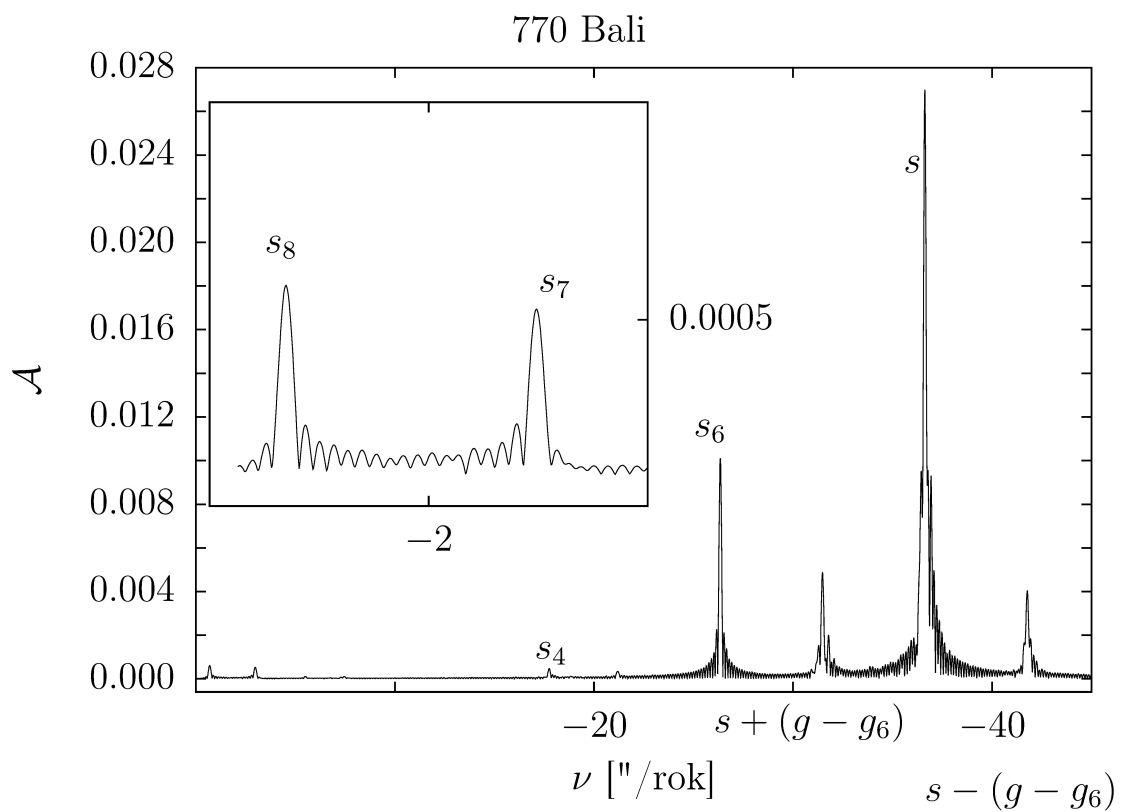


Obrázek A.2: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + ip$ pro asteroid 367 Amicitia. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -36.519$ "/rok a $g = 33.6166$ "/rok.

A.2 770 Bali

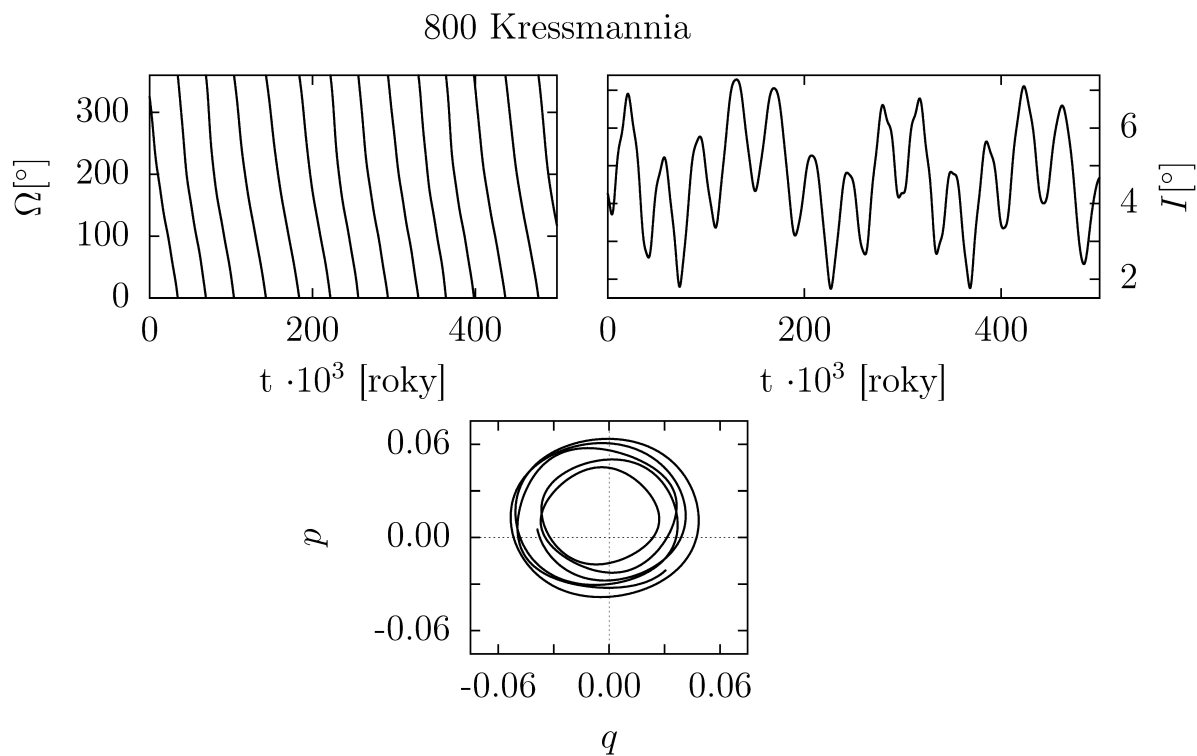


Obrázek A.3: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 770 Bali za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

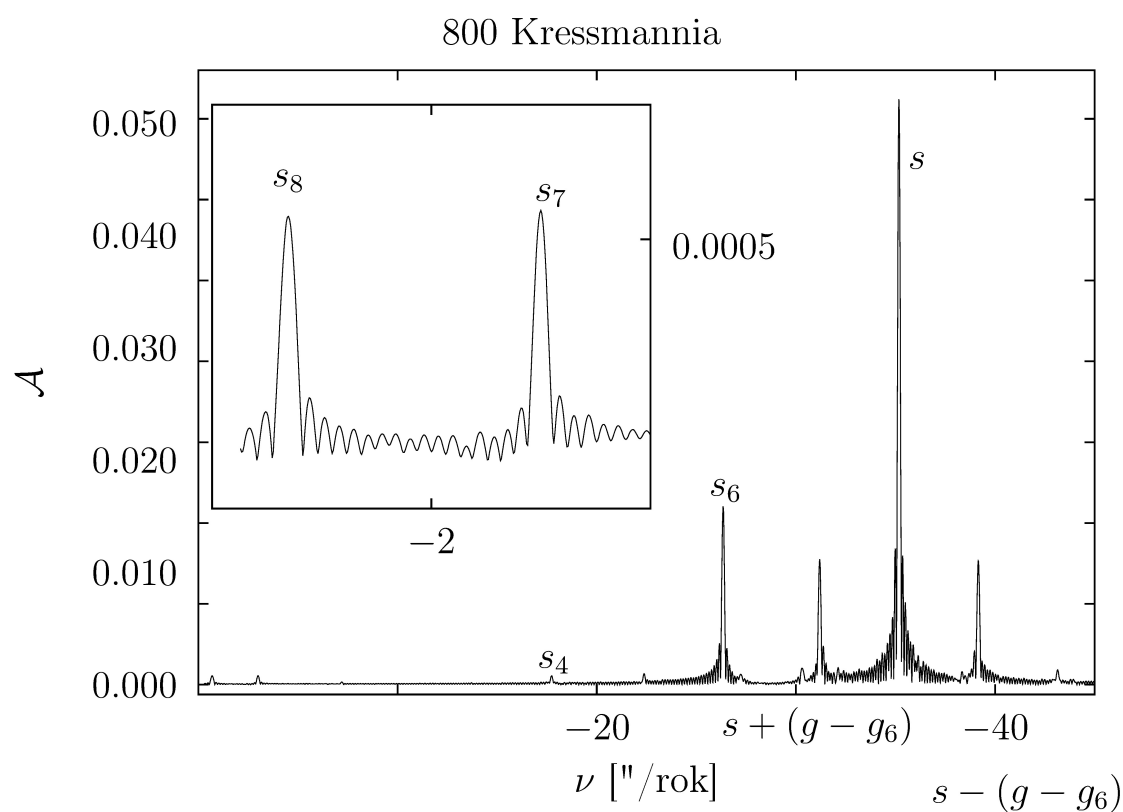


Obrázek A.4: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q+ip$ pro asteroid 770 Bali. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -36.849$ "/rok a $g = 33.3911$ "/rok.

A.3 800 Kressmannia

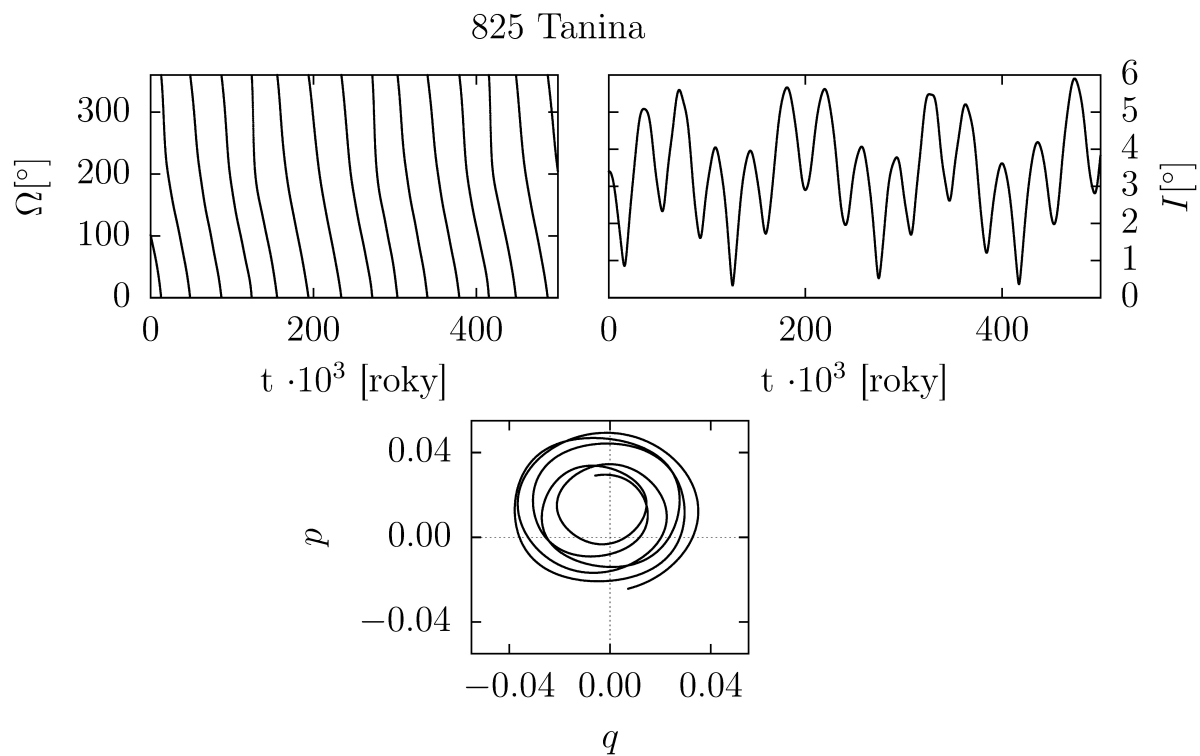


Obrázek A.5: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 800 Kressmannia za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.



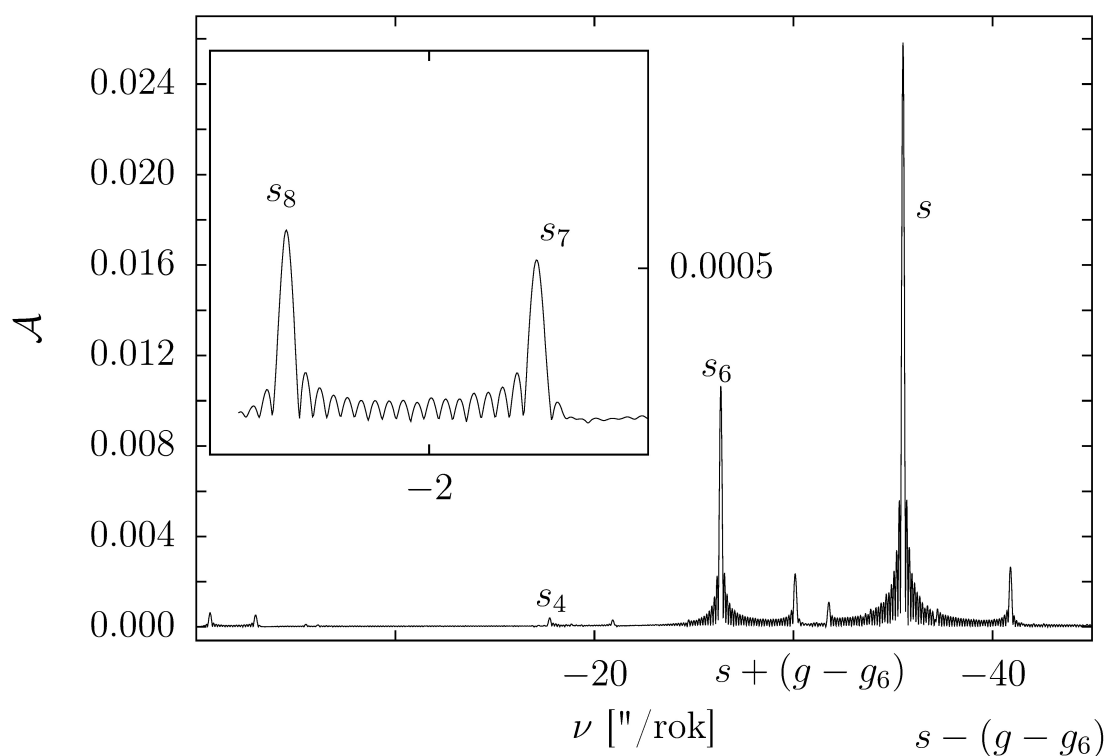
Obrázek A.6: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q+vp$ pro asteroid 800 Kressmannia. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -35.1772$ "/rok a $g = 32.2418$ "/rok.

A.4 825 Tanina



Obrázek A.7: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 825 Tanina za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaheny, byla rovina ekliptiky.

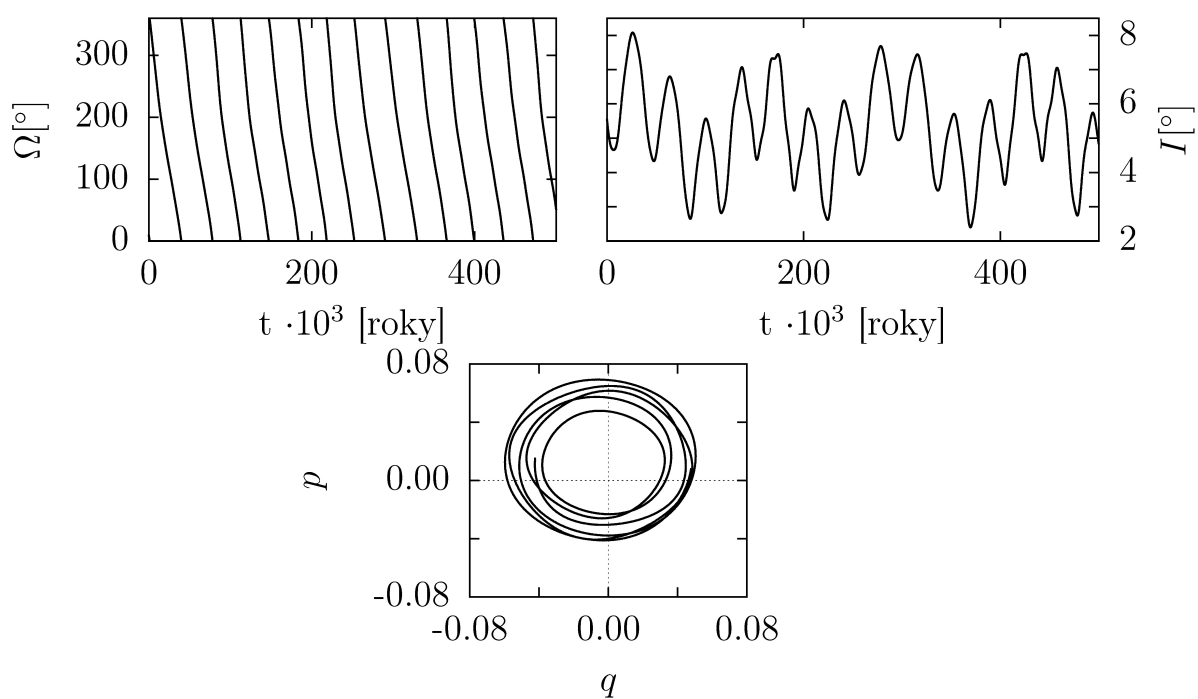
825 Tanina



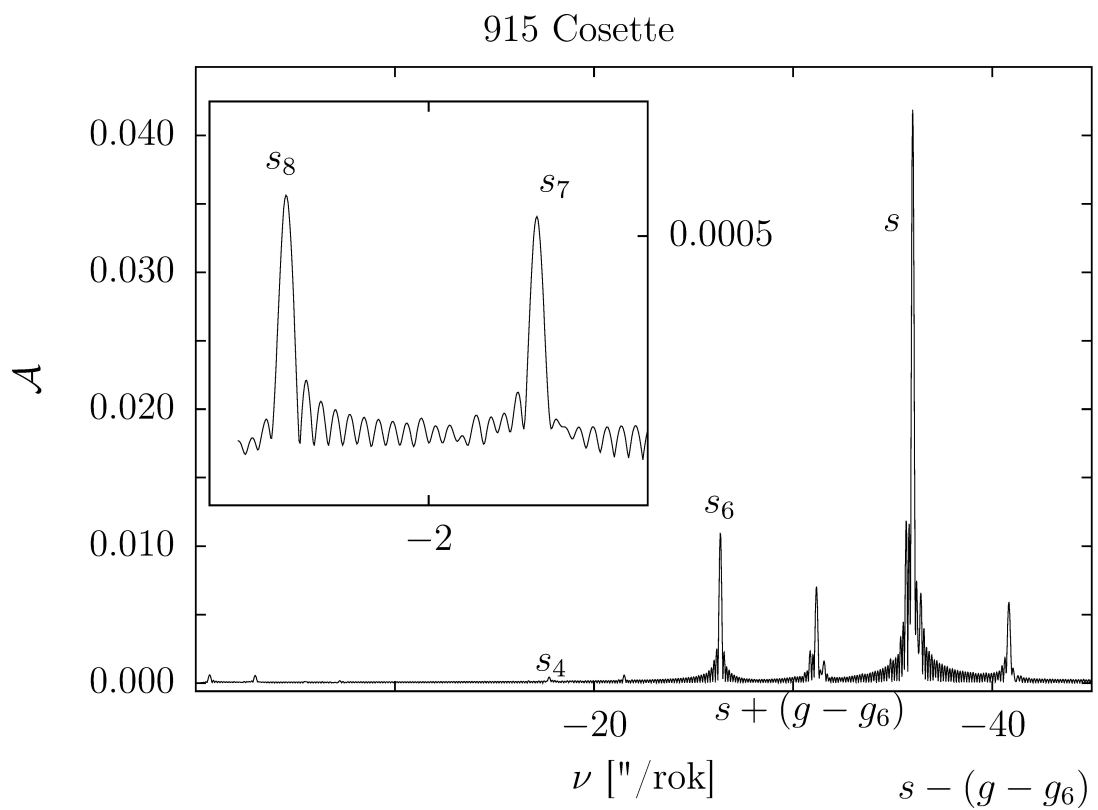
Obrázek A.8: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + ip$ pro asteroid 825 Tanina. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -35.5136$ "/rok a $g = 33.6396$ "/rok.

A.5 915 Cosette

915 Cosette

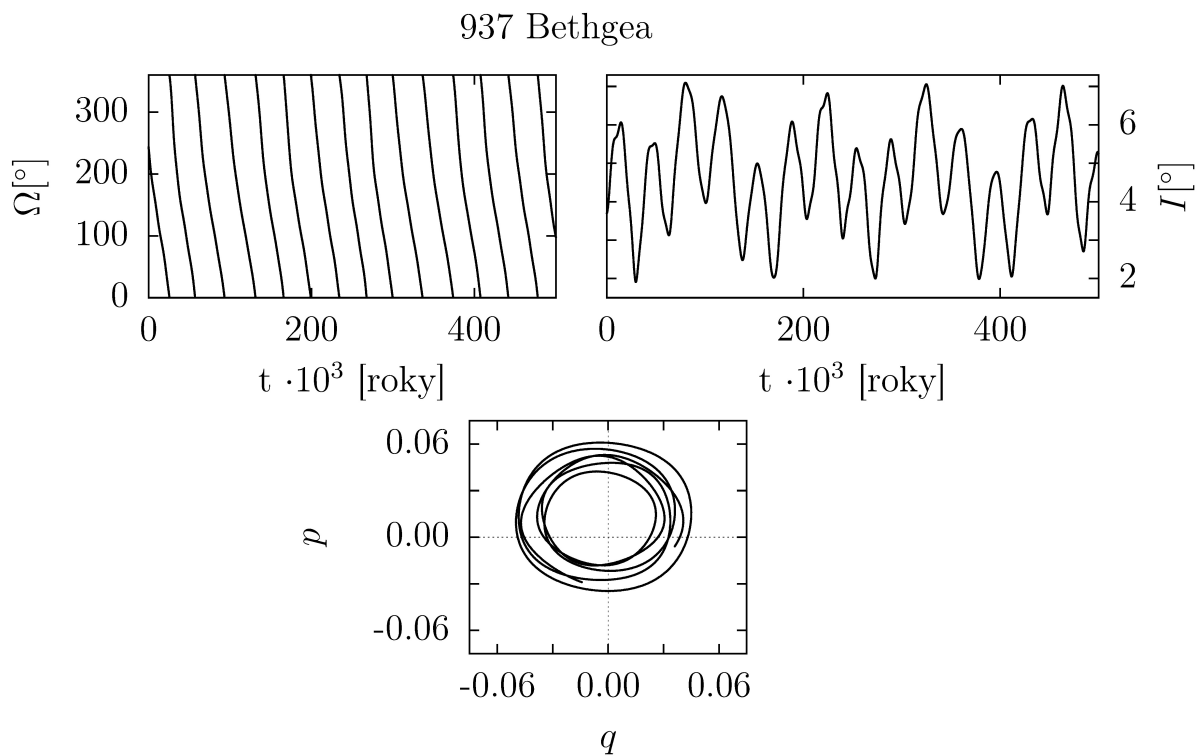


Obrázek A.9: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 915 Cosette za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

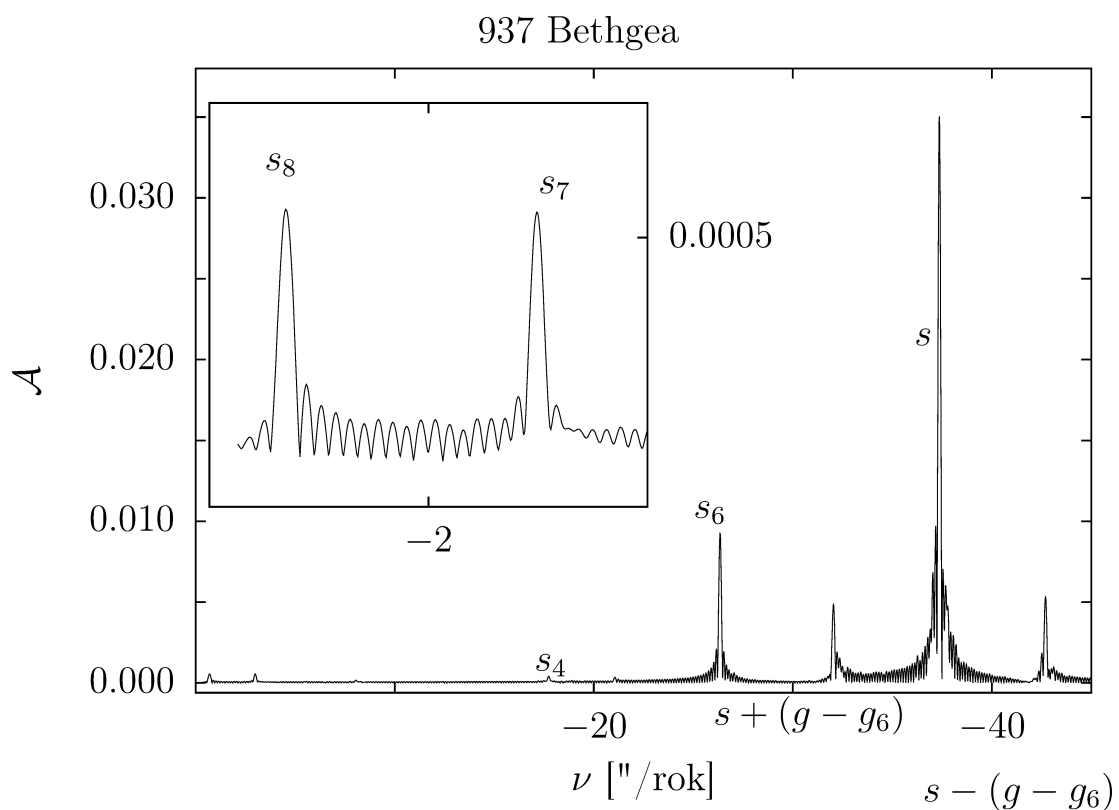


Obrázek A.10: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + ip$ pro asteroid 915 Cosette. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -36.0205''/\text{rok}$ a $g = 33.0661''/\text{rok}$.

A.6 937 Bethgea

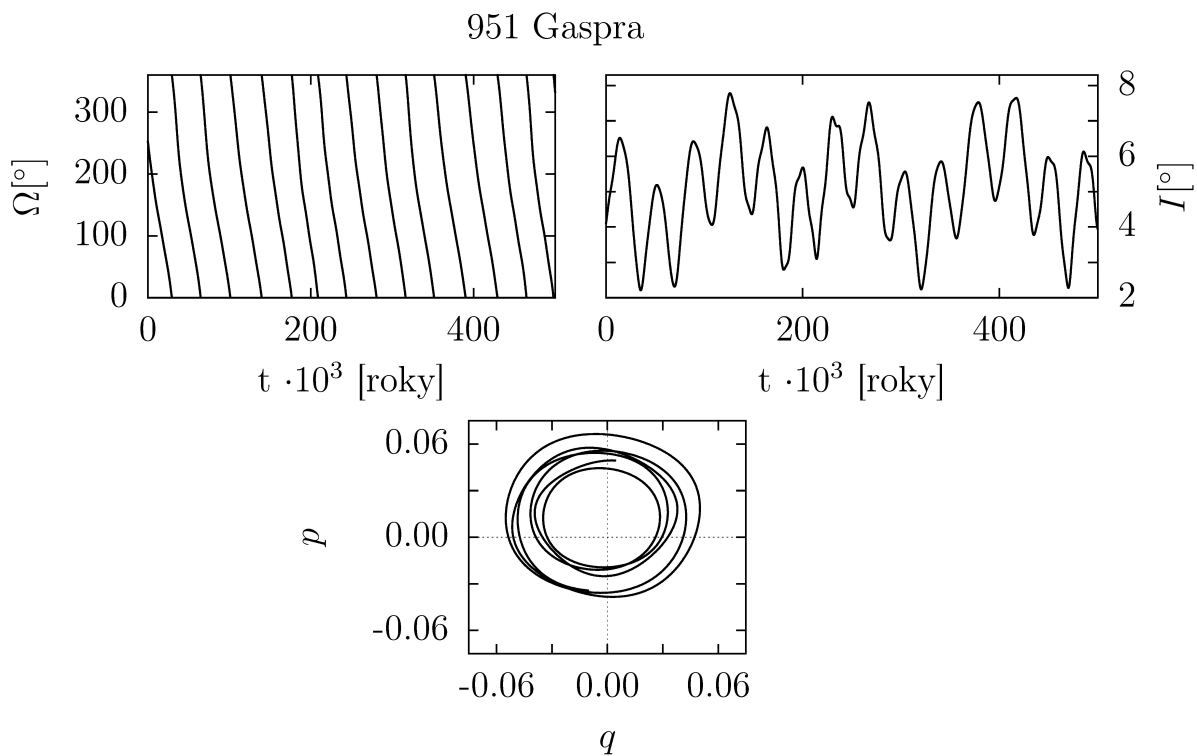


Obrázek A.11: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 937 Bethgea za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.



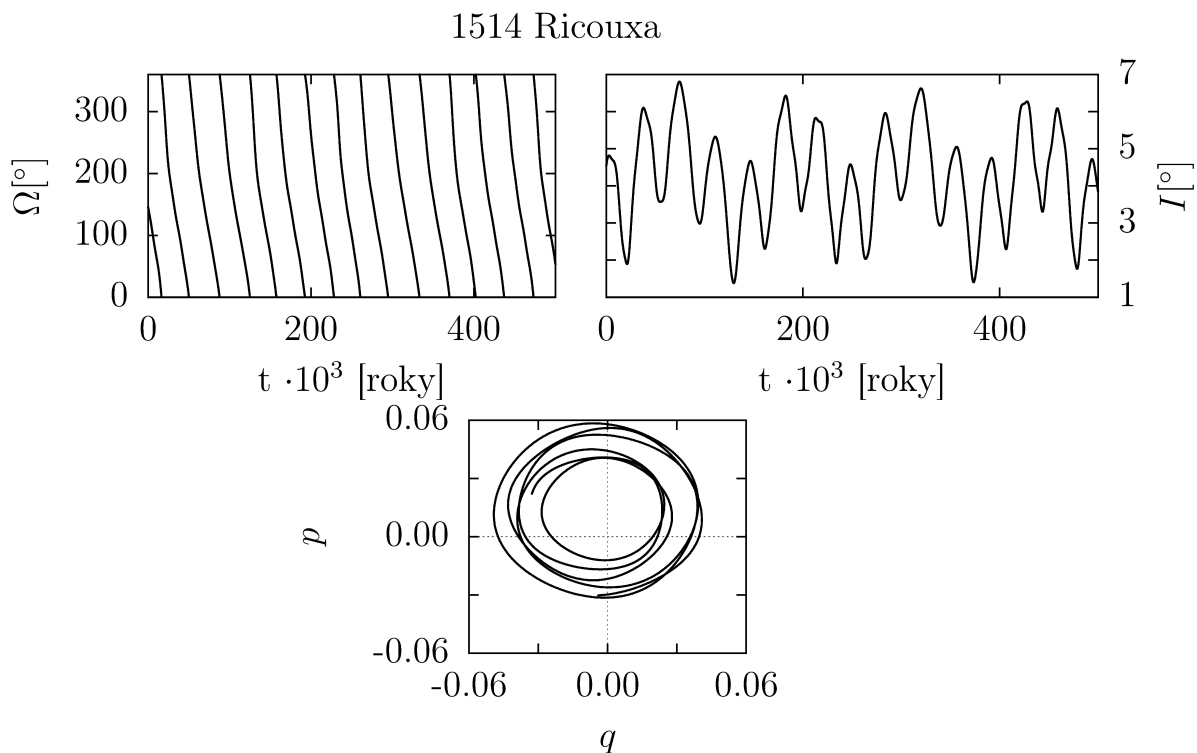
Obrázek A.12: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + \nu p$ pro asteroid 937 Bethgea. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -37.3934''/\text{rok}$ a $g = 33.4798''/\text{rok}$.

A.7 951 Gaspra



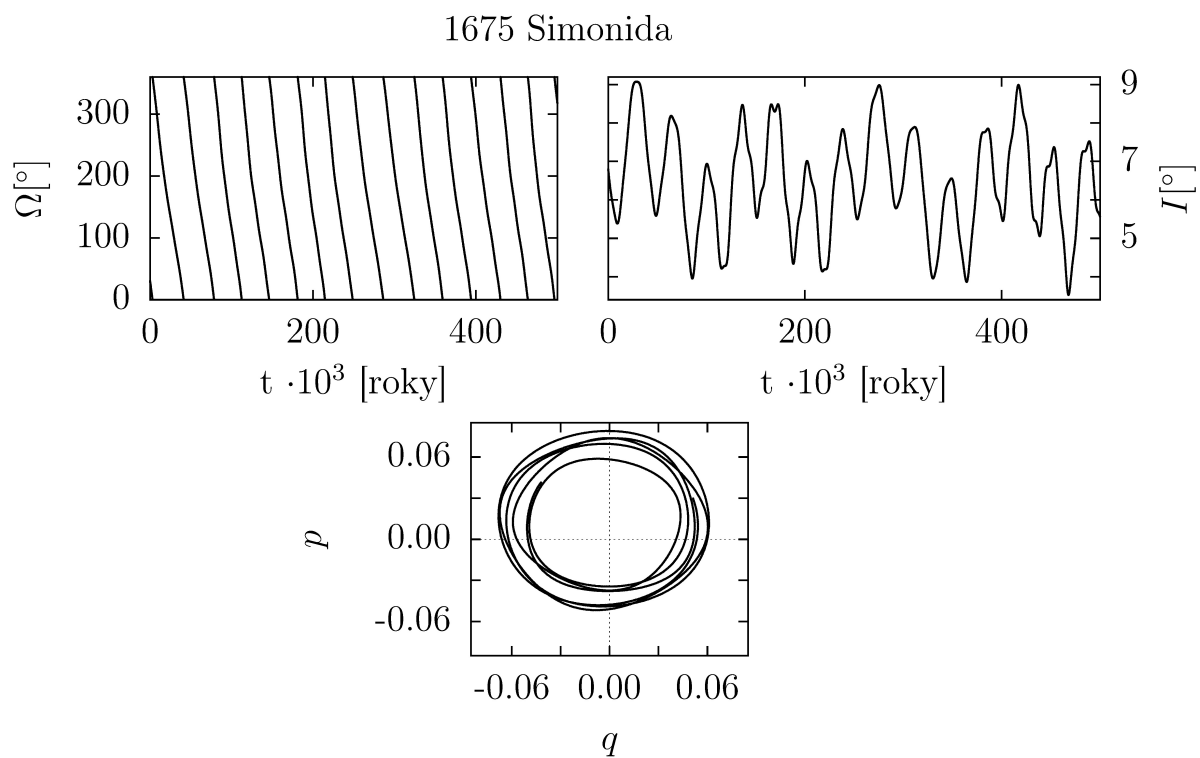
Obrázek A.13: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 951 Gaspra za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

A.8 1514 Ricouxa

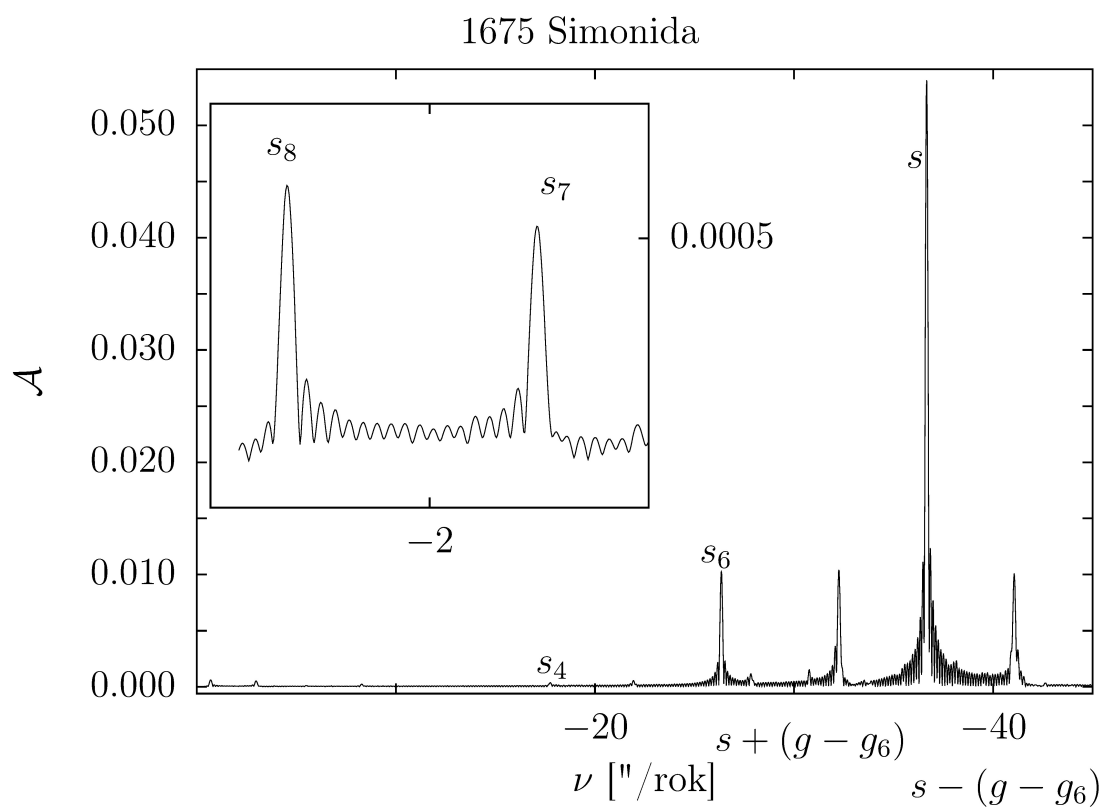


Obrázek A.14: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 1514 Ricouxa za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

A.9 1675 Simonida

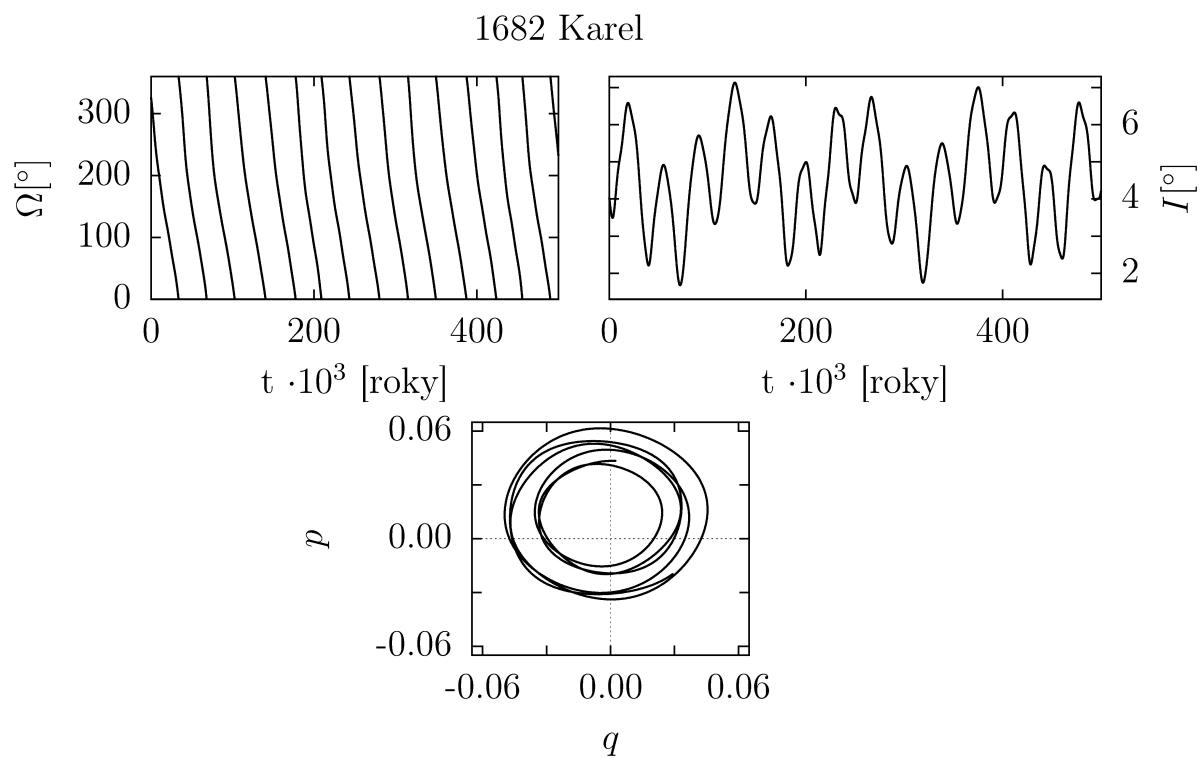


Obrázek A.15: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 1615 Simonida za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

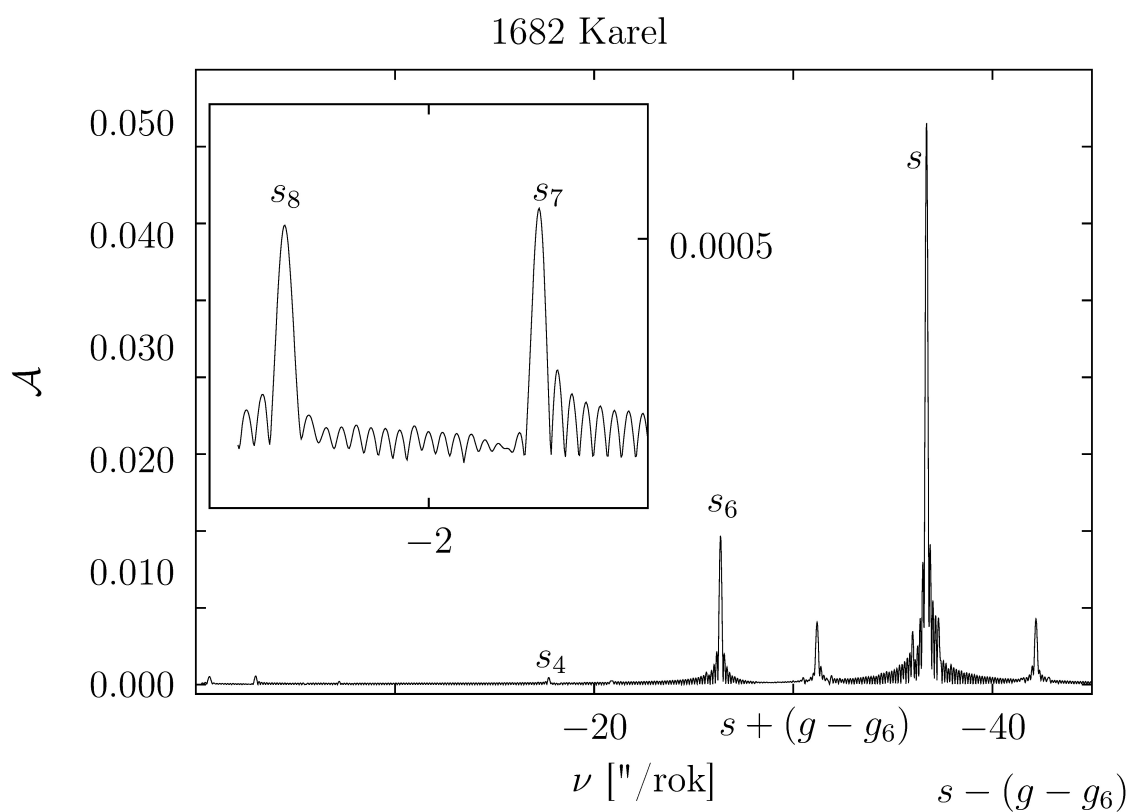


Obrázek A.16: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + \nu p$ pro asteroid 1675 Simonida. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -36.6877$ "/rok a $g = 32.7962$ "/rok.

A.10 1682 Karel

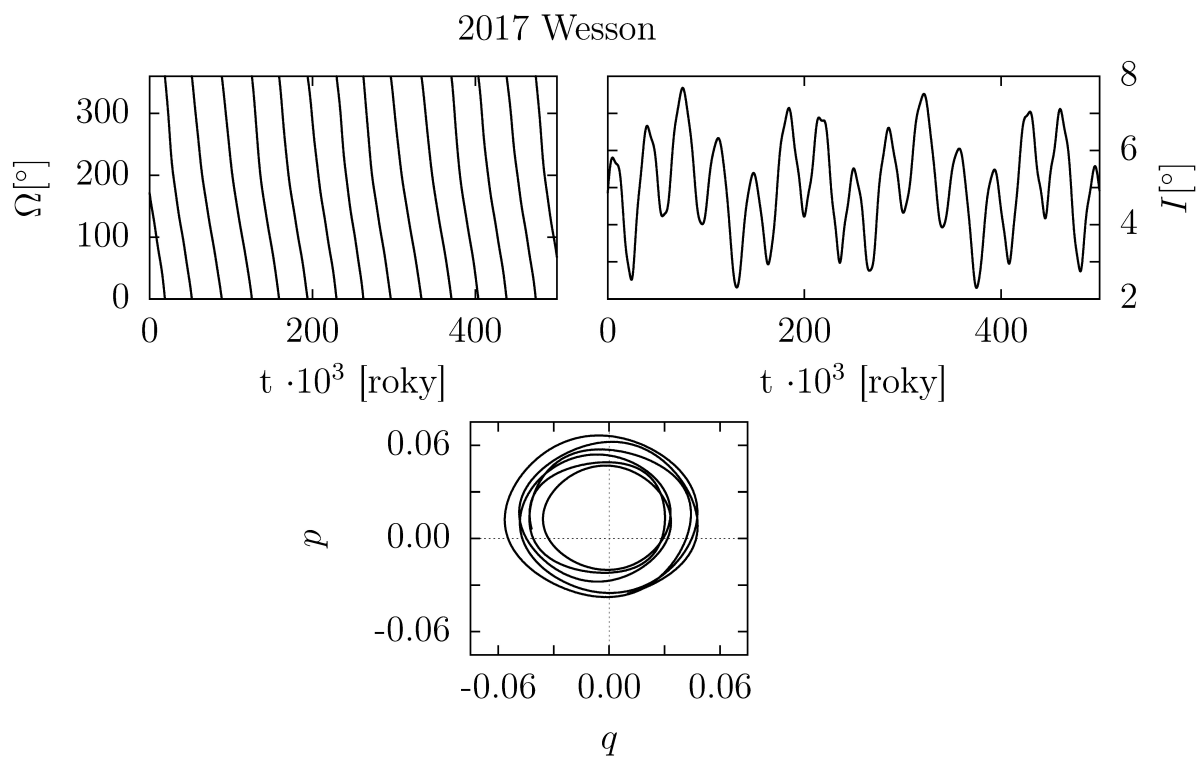


Obrázek A.17: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 1682 Karel za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.

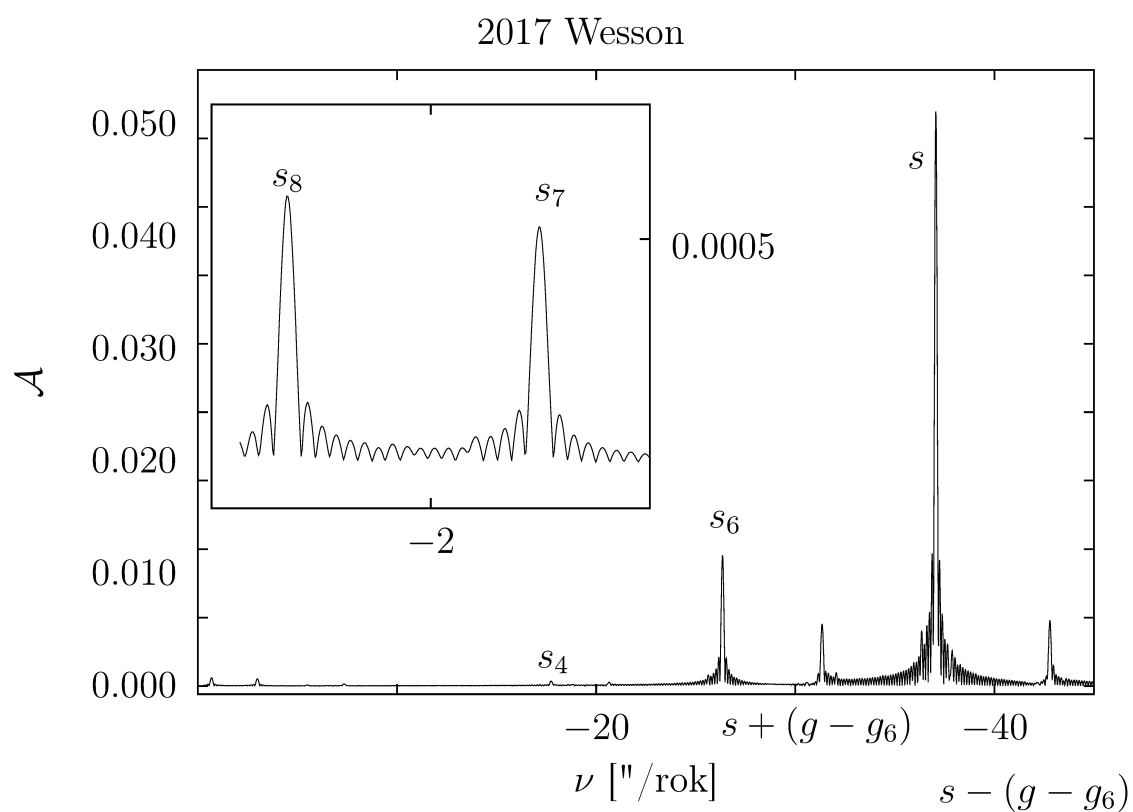


Obrázek A.18: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + \nu p$ pro asteroid 1682 Karel. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -36.7185$ "/rok a $g = 33.7387$ "/rok.

A.11 2017 Wesson



Obrázek A.19: Vývoj orbitálních elementů sklonu I a délky výstupného uzlu Ω asteroidu 2017 Wesson za prvních 500 tisíc let integrace programem SWIFT – časový rozdíl mezi dvěma sousedními body je 50 let. Nesingulární elementy jsou vykresleny pro prvních 200 tisíc let. Referenční rovina, vůči které byly Keplerovy elementy vztaženy, byla rovina ekliptiky.



Obrázek A.20: Spektrální rozklad nesingulárních elementů $q + \nu p$ pro asteroid 2017 Wesson. Hodnoty planetárních frekvencí s_i a g_i jsou uvedeny v tabulce 4.7. Vlastní frekvence stáčení výstupného uzlu a pericentra jsou: $s = -37.0904$ "/rok a $g = 33.9659$ "/rok.

B. Tenzor setrvačnosti

Níže je výpis kódu programu v jazyce *C++*, který slouží především k výpočtu parametru Δ . V kódu jsou jednotlivé výpočty označeny stejným číslem, které by příslušelo odpovídající rovnici v článku [10].

Vstupní soubor musí být ve tvaru:

```
N      M
1.X      1.Y      1.Z
2.X      2.Y      2.Z
.
.
.
N.X      N.Y      N.Z
1         2         3
1         3         4
.
.
.
N         N-5      N-1
```

kde na prvním řádku *N* je počet bodů a *M* počet trojúhelníků, *N.X* označuje *X*-tou souřadnici *N*-tého bodu. V druhé části každé trojčísli identifikuje vrcholy trojúhelníka.

```
1 #include "stdafx.h"
2 #include <iostream>
3 #include <fstream>
4 #include <string>
5 #include <sstream>
6 #include <vector>
7 #include <complex>
8 #include <cmath>
9 #define _USE_MATH_DEFINES
10
11 const double PI = 3.14159;
12 // asi vsechno vyse nepotrebuji, ale co kdyby
13 using namespace std;
14
15 typedef struct {double x,y,z;} point3D_t;
16 typedef struct {int i,j,k;} triang_t;
17 typedef struct {double x,y,z;} vektor;
18 double matice [3][3];
19 double tenzorSetrvacnostiVuciPocatku [3][3];
20
21
22 int faktorial (int x)
23 {
24     double y=1;
25     for(int i= 1; i<=x;i++)
26     {
27         y = y * i;
28     }
29     return y;
30 }
31
32 double power(double x, int n)
33 {
34     double y=1;
35     for(int i= 1; i<=n;i++)
36     {
37         y = y * x;
38     }
39     if (n ==0) y = 1;
40     return y;
41 }
42 }
```

```

43
44
45 double determinant3x3(double matice [3][3])
46 {
47     double D;
48     D = matice [0][0] * matice [1][1] * matice [2][2]
49         + matice [0][1] * matice [1][2] * matice [2][0]
50         + matice [0][2] * matice [1][0] * matice [2][1]
51         - matice [2][0] * matice [1][1] * matice [0][2]
52         - matice [2][2] * matice [1][0] * matice [0][1]
53         - matice [0][0] * matice [2][1] * matice [1][2];
54     return D;
55 }
56
57
58 double slozkaVektoru(int i, vektor A)
59 {
60     if(i==1) return A.x;
61     if(i==2) return A.y;
62     if(i==3) return A.z;
63 }
64
65
66
67 vektor vektorovySoucin(vektor A, vektor B)
68 {
69     vektor C;
70     C.x = A.y * B.z - B.y * A.z;
71     C.y = A.z * B.x - A.x * B.z;
72     C.z = A.x * B.y - B.x * A.y;
73     return C;
74 }
75
76 double velikostVektoru(vektor A)
77 {
78     double c = sqrt(A.x * A.x + A.y * A.y + A.z * A.z);
79     return c;
80 }
81 double skalarniSoucin(vektor A, vektor B)
82 {
83     double C;
84     C = A.x*B.x + A.y*B.y + A.z*B.z;
85     return C;
86 }
87
88
89 int exc = 1;
90 const int N = 25000; // maximalni pocet radku
91 double rho = 2.9; // hustota
92
93 int main() {
94     while(exc < 2) // vyjimky
95     {
96         double S = 0; // plocha asteroidu
97         double V = 0; // objem asteroidu
98         double tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [3][3];
99         double pomocnaMaticeM[3][3];
100         try{
101             string jmenoSouboru;
102             cout << "Enter the shape file name:" << endl;
103             cin >> jmenoSouboru; // nacteni datoveho souboru
104             cout << endl;
105             char * buffer;
106             long size;
107
108             ifstream infile (jmenoSouboru,ifstream::in);
109             if(!jmenoSouboru.data()) throw 1;
110             if (!infile) {throw 3;}
111             if(infile.peek() == std::ifstream::traits_type::eof()) throw 2;
112             // Soubor existuje a je otevreny
113             ofstream outfile ("temporary file.txt",ofstream::out);
114             // vytvoreni pomocneho souboru
115

```

```

116     infile.seekg(0,ifstream::end);
117     size = infile.tellg();
118     infile.seekg(0);
119     // allocate memory for file content
120     buffer = new char [size];
121     // read content of infile
122     infile.read (buffer,size);
123     // write to outfile
124     outfile.write (buffer,size);
125     // release dynamically-allocated memory
126     delete[] buffer;
127     outfile.close();
128     infile.close();
129
130     ifstream shape_file;
131     shape_file.open("temporary file.txt",ios::in);
132     if (shape_file.is_open())
133     {
134         cout << "The file was found. Loading data...\n \r";
135     }
136     if (!shape_file.is_open())
137     {
138         cout << "Can't open shape file.\n";
139         return 666;
140     }
141
142     int nPts = 0 , nTrig = 0;
143     // pocet bodu, trojuhelniku
144
145
146     shape_file >> nPts >> nTrig;
147     // nacteni poctu bodu a trojuhelniku
148     vector<point3D_t> points;
149     vector<triang_t> triangles;
150     point3D_t array_of_points[N];
151     triang_t array_of_triangles[N];
152
153     point3D_t X = {0,0,0};
154     points.push_back(X);
155     //body jsou cislovany od 1, tak jako 0 bod vlozim nesmysl
156
157     for (int i=1; i<=nPts; i++)
158     {
159         shape_file >> X.x >> X.y >> X.z;
160         array_of_points[i].x = X.x;
161         array_of_points[i].y = X.y;
162         array_of_points[i].z = X.z;
163         // postupne nactani bodu do pole
164         points.push_back(X);
165     }
166
167     triang_t T = {0,0,0}; // pole trojuhelniku
168
169
170     for (int i=0; i<nTrig; i++)
171     {
172         T.i =0;
173         T.j=0;
174         T.k=0;
175         shape_file >> T.i >> T.j >> T.k;
176         array_of_triangles[i].i = T.i;
177         array_of_triangles[i].j = T.j;
178         array_of_triangles[i].k = T.k;
179         vektor G;
180         vektor H;
181         // oznaceni vektoru jako v clanku A. Dobrovolskise
182
183         vektor D, E , F;
184         D.x = array_of_points[T.i].x;
185         D.y = array_of_points[T.i].y;
186         D.z = array_of_points[T.i].z;
187         E.x = array_of_points[T.j].x;
188         E.y = array_of_points[T.j].y;

```

```

189     E.z = array_of_points[T.j].z;
190     F.x = array_of_points[T.k].x;
191     F.y = array_of_points[T.k].y;
192     F.z = array_of_points[T.k].z;
193
194     G.x = E.x - D.x;
195     G.y = E.y - D.y;
196     G.z = E.z - D.z;
197
198     H.x = F.x - D.x;
199     H.y = F.y - D.y;
200     H.z = F.z - D.z;
201
202     vektor N = vektorovySoucin(G,H);
203
204     S = S + velikostVektoru(N)/2;
205     // vypocet plochy - rce. (3)
206     V = V + (skalarniSoucin(D,N)/6);
207     //vypocet objemu - (4)
208
209     triangles.push_back(T);
210 }
211 vektor R={0,0,0};
212 R.x =0;
213 R.y=0;
214 R.z=0;
215 T.i =0;
216 T.j=0;
217 T.k=0;
218 // vynulovani pomocnych vektoru
219
220 // vypocet teziste:
221 for (int ii=0; ii<nTrig; ii++)
222 {
223     vektor deltaR = {0,0,0};
224     deltaR.x=0;
225     deltaR.y=0;
226     deltaR.z=0;
227     double deltaV =0;
228     T.i =0;
229     T.j=0;
230     T.k=0;
231     //      D      E      F
232     //shape_file >> T.i >> T.j >> T.k;
233     T.i = array_of_triangles[ii].i;
234     T.j = array_of_triangles[ii].j;
235     T.k = array_of_triangles[ii].k;
236
237     vektor G;
238     vektor H;
239     vektor D, E , F;
240     D.x = array_of_points[T.i].x;
241     D.y = array_of_points[T.i].y;
242     D.z = array_of_points[T.i].z;
243     E.x = array_of_points[T.j].x;
244     E.y = array_of_points[T.j].y;
245     E.z = array_of_points[T.j].z;
246     F.x = array_of_points[T.k].x;
247     F.y = array_of_points[T.k].y;
248     F.z = array_of_points[T.k].z;
249
250     G.x = E.x - D.x;
251     G.y = E.y - D.y;
252     G.z = E.z - D.z;
253
254
255     H.x = F.x - D.x;
256     H.y = F.y - D.y;
257     H.z = F.z - D.z;
258
259     vektor N = vektorovySoucin(G,H);
260     deltaV = skalarniSoucin(D,N);
261     deltaV = deltaV / 6;

```

```

262
263     deltaR.x = (D.x + E.x + F.x) / 4;
264     deltaR.y = (D.y + E.y + F.y) / 4;
265     deltaR.z = (D.z + E.z + F.z) / 4;
266     // vypocet dle (6)
267
268     R.x = R.x + deltaV * deltaR.x / V;
269     R.y = R.y + deltaV * deltaR.y / V;
270     R.z = R.z + deltaV * deltaR.z / V;
271     // rovnice (7)
272
273
274     for(int jj=1;jj<=3;jj++)
275     {
276         for(int kk=1;kk<=3;kk++)
277         {
278             // vypocet dle rovnice (19):
279             matice [jj][kk] =
280             matice [jj][kk] + rho * deltaV/20 *
281             (2*slozkaVektoru(jj,D) * slozkaVektoru(kk,D)
282             + 2*slozkaVektoru(jj,E)* slozkaVektoru(kk,E)
283             + 2*slozkaVektoru(jj,F)* slozkaVektoru(kk,F)
284             + slozkaVektoru(jj,D) * slozkaVektoru(kk,E) +
285             slozkaVektoru(kk,D) * slozkaVektoru(jj,E) +
286             slozkaVektoru(jj,D) * slozkaVektoru(kk,F) +
287             slozkaVektoru(kk,D) * slozkaVektoru(jj,F)+
288             slozkaVektoru(jj,E) * slozkaVektoru(kk,F) +
289             slozkaVektoru(kk,E) * slozkaVektoru(jj,F));
290         }
291     }
292
293 }
294     // rovnice (9)
295     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[0][0] = matice[2][2] + matice[3][3];
296
297     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[1][1] = matice[1][1] + matice[3][3];
298
299     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[2][2] = matice[1][1] + matice[2][2];
300
301     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[1][2] = matice[2][3] * (-1);
302
303     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[0][2] = matice[1][3] * (-1);
304
305     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[0][1] = matice[1][2] * (-1);
306
307     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[2][1] = matice[2][3] * (-1);
308
309     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[2][0] = matice[1][3] * (-1);
310
311     tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[1][0] = matice[1][2] * (-1);
312
313     shape_file.close(); // close the file
314
315     // Vypis plochy, objemu a polohy teziste:
316
317     cout << "S = " << S << " u^2" << " (area)" << endl;
318     cout << "V = " << V << " u^3" << " (volume)" << endl;
319     cout << "R = (" << R.x << " , " << R.y << " , " << R.z << ")" << " (center of mass)"
320         << endl;
321
322     cout << endl;
323
324     // matice v rovnici (20)
325     pomocnaMaticeM[0][0]= R.y * R.y + R.z * R.z;
326     pomocnaMaticeM[1][1]= R.x * R.x + R.z * R.z;
327     pomocnaMaticeM[2][2]= R.x * R.x + R.y * R.y;
328     pomocnaMaticeM[0][1]= R.x * R.y * (-1);
329     pomocnaMaticeM[1][0]=pomocnaMaticeM[0][1];
330     pomocnaMaticeM[0][2]= R.x * R.z * (-1);
331     pomocnaMaticeM[2][0]=pomocnaMaticeM[0][2];
332     pomocnaMaticeM[1][2]= R.z * R.y * (-1);
333     pomocnaMaticeM[2][1]=pomocnaMaticeM[1][2];

```

```

334     for(int i = 0;i<=2;i++)
335     {
336     for(int j =0;j<=2;j++)
337     {
338         tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [i][j] =
            tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[i][j] - rho * V *
            pomocnaMaticeM[i][j] ;
339         // rovnice (20)
340     }
341     }
342
343
344 // diagonalizace matice, rovnice (22)
345 double II =
346     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][0] *
347     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][1] +
348     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][0] *
349     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [2][2] +
350     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][1] *
351     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [2][2] -
352     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][1] *
353     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][1] -
354     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][2] *
355     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][2] -
356     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][2] *
357     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][2];
358
359 // priprava pomocnych promennych na operace s T:
360 double TT =
361     (tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][0] +
362     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][1] +
363     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [2][2]);
364 // T
365
366 double T2 =
367     (tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][0] +
368     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][1] +
369     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [2][2]) *
370     (tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][0] +
371     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][1] +
372     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [2][2]);
373 // T^2
374
375 double T3 =
376     T2 * (tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][0] +
377     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][1] +
378     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [2][2]);
379 // T^3
380
381 double Tm9 =
382     (tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][0] +
383     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][1] +
384     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [2][2]) * 9;
385 // 9 * T
386
387 double Td3 =
388     (tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [0][0] +
389     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [1][1] +
390     tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti [2][2]) / 3;
391 // T / 3
392
393 double U = sqrt(T2 - 3 * II)/3; // rce (24)
394
395
396 // pomocne promenne do rovnice (25)
397 double citatel = (-2*T3 + Tm9 *II - 27 *
            determinant3x3(tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti));
398 double jmenovatel = (54 * U * U * U);
399
400 double theta = acos(citatel/jmenovatel); // (25)
401
402
403 // rovnice (23)

```

```

404 double A = Td3 - 2*U * cos(theta / 3);
405 double B = Td3 - 2*U * cos(theta / 3 - (PI * 2/3));
406 double C = Td3 - 2*U * cos(theta / 3 + (PI * 2/3));
407
408 ////////////////////////////////////////////////////
409 // vypis vysledku
410
411 cout << "Inertia tensor relative to the origin:" << endl <<endl;
412
413 cout << "      |" << tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[0][0] << ", " <<
      tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[0][1] << ", " <<
      tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[0][2] << "|"<< endl;
414 cout << " I = |" << tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[1][0] << ", " <<
      tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[1][1] << ", " <<
      tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[1][2] << "|"<< endl;
415 cout << "      |" << tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[2][0] << ", " <<
      tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[2][1] << ", " <<
      tenzorSetrvacnostiVuciPocatku[2][2] << "|"<< endl;
416 cout << endl;
417 cout << "Inertia tensor relative to the center of mass:" << endl <<endl;
418 cout << "      |" << tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[0][0] << ", " <<
      tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[0][1] << ", " <<
      tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[0][2] << "|"<< endl;
419 cout << " I' = |" << tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[1][0] << ", " <<
      tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[1][1] << ", " <<
      tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[1][2] << "|"<< endl;
420 cout << "      |" << tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[2][0] << ", " <<
      tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[2][1] << ", " <<
      tenzorSetrvacnosti_vzhledem_k_tezisti[2][2] << "|"<< endl;
421 cout << endl;
422 cout << "Principal moments of inertia:" << endl <<endl;
423 cout << " A = " << A <<endl;
424 cout << " B = " << B <<endl;
425 cout << " C = " << C <<endl;
426
427 // potrebuji toto:
428 double delta = (C - 0.5*(A+B))/C;
429 cout << endl;
430 cout << endl;
431 cout << "-----" << endl;
432 cout << "delta = " << delta <<endl;
433 cout << "-----" << endl;
434 exc = 3;
435
436 cout << endl;
437 system("pause");
438 remove("temporary file.txt");
439
440 }
441 catch (int i) {
442 // v pripade vyjimek:
443 switch (i)
444 {
445     case 1: cout << "This is not data file." << endl;
446             break;
447     case 2 : cout << "The file is empty." << endl;
448             break;
449     case 3 : cout << "The file does not exist." << endl;
450             break;
451     default : cout << "An error occured." << endl;
452
453 }
454 remove("temporary file.txt"); // vymazani pomocneho souboru
455 if(exc == 2) system("pause");
456
457
458 }
459 }
460 }

```

C. Integrátor rotace

Program je napsaný v jazyce Fortran podle článku [5]. Soubor se vstupními údaji má jméno spin.in. Například může vypadat takto:

```
1 massalia.out      ! input data file
2 lines.out        ! spectrum_file
3 4                ! num_of_lines
4 360.0d0          ! lambda
5 40.0d0           ! beta
6 0. 5.d6 50. 5    ! t_ini, t_fin, h, xsi_out
7 8.1              ! rotper
8 0.35 0.35 0.01   ! delta_ini, delta_fin, delta_step
```

Soubor massalia.out je ve tvaru t , a , e , i , Ω . V souboru lines.out je spektrální analýza pohybu asteroidu ve tvaru A , φ a ν , což je tvar výstupního souboru programu DCDFIT - více viz dodatek D. Obsah souboru spin.inc s definicí číla π a převodu mezi stupni a radiány:

```
1      real*8, parameter :: PI = 3.1415926535d0
2      ! PI number
3      real*8, parameter :: degrad = pi / 180.d0

1
2      program Spin_dynamics_integrator
3 c made by Jan Vrstil, 2012
4 c An integrator based on Breiter, Nesvorny and Vokrouhlicky paper
5 c in astronomical journal 130
6 c Using the two-term splitting(leapfrog) method (LP2)
7 c compile with '-ffixed-line-length-132'
8      implicit none
9      include 'spin.inc'
10
11 c ----- Program input data & variables -----
12      real*8, parameter :: year = 24.d0*365.25d0
13      ! h --> y
14      real*8, parameter :: mu = (4 * PI * PI)
15      ! Total mass times gravity constant
16      integer, parameter :: nm = 500000
17      ! max. number of lines in input asteroid data file
18      real*8, dimension(nm) :: a, e, inc, capom, q, p
19      ! Keplerian elements
20      real*8, dimension(3) :: v, vector_n, vtemp
21      real*8 :: eta, alpha, delta, rotper, omega_rot
22      real*8 :: t, t_ini, t_fin, h, h2
23      ! Initial and final times for integration in years
24      real*8 :: psi, bid, amean, emean
25      integer :: xsi, xsiout, i, ii, j, id, k
26      integer :: num_of_lines, iv, iii, kkk
27      real*8 :: lambda, beta
28      ! initial spin vector, ecliptic coordinates
29      real*8 :: delta_ini, delta_fin, delta_step, phi6
30      real*8, dimension(50) :: sini26, i6, phi60
31      real*8, dimension(50) :: fre6, phi, ceps
32      real*8, dimension(50, nm) :: temp_ceps, temp_phi, temp_time
33      character (len=40) :: input_file, spectrum_file
34
35
36 c ***** Input files/data *****
37 c ***** BEGINNING *****
38 c Parameter file:
39      open(1, file='spin.in', status='old')
40      read(1,*) input_file
41      read(1,*) spectrum_file
42      read(1,*) num_of_lines
43      read(1,*) lambda
44      read(1,*) beta
```

```

45     read(1,*)t_ini,t_fin,h,xsiout
46     read(1,*)rotper
47     read(1,*)delta_ini, delta_fin, delta_step
48     close(1)
49     omega_rot = 2 * PI * year / rotper
50     h2 = 0.5d0*h
51 c Transform s to the osculating-orbit frame
52     call ecliptical_coordinates_to_vector(lambda, beta, vector_n) ! IN -
        degrees
53     call R_z(capom(1), vector_n)
54     call R_x(inc(1), vector_n)
55     call R_z(-capom(1), vector_n)
56 c Read integrated orbit:
57     open(1,file=input_file,status='old')
58     i=1
59     open (unit=000,file='qp.out',action='write',status='replace')
60 2     continue
61     read(1,*,end=4)bid,a(i),e(i),inc(i),capom(i)
62     inc(i)=inc(i)*degrad
63     capom(i)=capom(i)*degrad
64     q(i)=sin(0.5d0*inc(i)) * cos(capom(i))
65     p(i)=sin(0.5d0*inc(i)) * sin(capom(i))
66     write(000,*)bid,q(i),p(i)
67     i=i+1
68     goto 2
69 4     continue
70     ii=i-1
71     close(1)
72     close(000)
73
74
75 c ----- Spectrum -----
76     open(11,file=spectrum_file,status='old')
77 c \nu6 data
78     do i=1,num_of_lines
79         read(11,*)sini26(i), phi60(i), fre6(i)
80         i6(i) = 2.d0 * dasin( sini26(i) )
81         phi60(i) = phi60(i) * degrad
82         fre6(i) = fre6(i) * degrad / 3600.d0
83     enddo
84     close(11)
85 c ***** Input files/data *****
86 c     ***** END *****
87
88
89
90
91
92 c ----- Space mapping -----
93     open (unit=456,file='spin.out',action='write',status='replace')
94
95     id=int((delta_fin-delta_ini)/delta_step)+1
96     do j=1,id
97
98         delta=delta_ini+dfloat(j-1)*delta_step
99         write(*,*)' Delta = ',delta
100
101 c ----- Integration -----
102 c LP2 leapfrog:
103     t=t_ini
104     v=vector_n
105
106 c Write the initial data
107     do k=1,num_of_lines
108         vtemp=v
109 c a) to the inertial frame
110         call R_z(capom(1),vtemp)
111         call R_x(-inc(1),vtemp)
112         call R_z(-capom(1),vtemp)
113 c b) to the \nu6 frame
114         phi6=phi60(k)+fre6(k)*t
115         call R_z(phi6,vtemp)
116         call R_x(i6(k),vtemp)

```

```

117     call R_z(-phi6,vtemp)
118 c   now the resonance variables
119     psi = datan2(vtemp(1),vtemp(2))
120     phi(k) = -(psi+phi6)/degrad
121     ceps(k) = vtemp(3)
122     call get_angle_m180_180(phi(k)) ! IN degrees
123
124     temp_ceps(k,1) = ceps(k)
125     temp_phi(k,1) = phi(k)
126     temp_time(k,1) = t_ini
127     enddo
128
129 8848 format(f5.3,1x,f8.4,50(1x,f6.4,1x,f8.3))
130
131
132
133     xsi = 0
134     i=0
135     kkk = 2
136 10  continue
137
138     i=i+1
139     if (i+1.gt.ii) goto 1000
140     amean=0.5d0*(a(i)+a(i+1))
141     emean=0.5d0*(e(i)+e(i+1))
142     eta=sqrt(1.d0-emean*emean)
143     alpha = (1.5d0*mu*delta)/(omega_rot*((amean*eta)**3))
144
145     call psi_1(h2, t, v, alpha)
146     call psi_20(h, t, v, q(i), p(i), q(i+1), p(i+1))
147     call psi_1(h2, t, v, alpha)
148
149 C   Write values to the file
150     if (xsi.eq.xsiout) then
151         do k=1,num_of_lines
152             vtemp=v
153 c a) to the inertial frame
154             call R_z(capom(i+1),vtemp)
155             call R_x(-inc(i+1),vtemp)
156             call R_z(-capom(i+1),vtemp)
157 c b) to the \nu6 frame
158             phi6=phi60(k)+fre6(k)*t
159             call R_z(phi6,vtemp)
160             call R_x(i6(k),vtemp)
161             call R_z(-phi6,vtemp)
162 c   now the resonance variables
163             psi = datan2(vtemp(1),vtemp(2))
164             phi(k) = -(psi+phi6)/degrad
165             ceps(k) = vtemp(3)
166             call get_angle_m180_180(phi(k)) ! IN degrees
167             enddo
168 c   write(123,8848)delta,(t/1.d6),(ceps(k),phi(k),k=1,num_of_lines)
169     xsi = 0
170     do iv=1,num_of_lines
171         temp_ceps(iv,kkk) = ceps(iv)
172         temp_phi(iv,kkk) = phi(iv)
173         temp_time(iv,kkk) = t
174     end do
175     kkk = kkk +1
176     endif
177     xsi = xsi + 1
178     if (t < t_fin) goto 10
179
180 1000 continue
181 c ----- end of cycle-----
182
183     do iv = 1,num_of_lines
184         do iii = 1,kkk-1
185             write(456,888) delta,(temp_time(iv,iii)/1.d6),
186             temp_ceps(iv,iii),temp_phi(iv,iii)
186 888 format(f5.3,1x,f8.4,1x,f6.4,1x,f8.3,1x,f8.3)
187         end do
188     write(456,*)''

```

```

189         write(456,*)''
190     end do
191
192 c     write(123,*)('')
193     enddo
194 c     close(123)
195     close(456)
196     stop
197
198
199
200 c -----
201
202     end program Spin_dynamics_integrator
203
204
205 c ----- Program subrutines and functions -----
206
207     subroutine psi_1(h, u, v, alpha)
208     implicit none
209 c Input:
210     real*8 :: h ! time step
211     real*8 :: u ! time
212     real*8 :: alpha
213 c Input / Output:
214     real*8, dimension(3) :: v
215 c Internals:
216     real*8, dimension(3,3) :: matrix_A
217     real*8 :: phi1
218
219     phi1 = alpha * v(3) * h
220
221     matrix_A(1,1) = cos(phi1)
222     matrix_A(1,2) = sin(phi1)
223     matrix_A(1,3) = 0.d0
224     matrix_A(2,1) = -sin(phi1)
225     matrix_A(2,2) = cos(phi1)
226     matrix_A(2,3) = 0.d0
227     matrix_A(3,1) = 0.d0
228     matrix_A(3,2) = 0.d0
229     matrix_A(3,3) = 1.d0
230
231     u = u
232     call matrix_times_vector(matrix_A, v)
233     return
234     end subroutine psi_1
235 c -----
236
237     subroutine psi_20(h, u, v, q0, p0, q1, p1)
238     implicit none
239 c Inputs:
240     real*8 :: h, u, q0, p0, q1, p1
241 c Inputs / Output:
242     real*8, dimension(3) :: v
243 c Internals:
244     real*8 :: nu
245     real*8, dimension(3,3) :: matrix_A
246     real*8, dimension(3,3) :: matrix_B
247     real*8, dimension(3,3) :: matrix_C
248
249     nu = sqrt(1 - q1*q1 - p1*p1)
250     matrix_A(1,1) = 1 - 2*p1*p1
251     matrix_A(1,2) = 2*p1*q1
252     matrix_A(1,3) = 2*p1*nu
253     matrix_A(2,1) = 2*q1*p1
254     matrix_A(2,2) = 1 - 2 * q1 *q1
255     matrix_A(2,3) = - 2 * q1 * nu
256     matrix_A(3,1) = -2 * p1 *nu
257     matrix_A(3,2) = 2 * q1 * nu
258     matrix_A(3,3) = 2 * nu * nu - 1
259     call transpose_matrix(matrix_A, matrix_B)
260     nu = sqrt(1 - q0*q0 - p0*p0)
261     matrix_A(1,1) = 1 - 2*p0*p0

```

```

262     matrix_A(1,2) = 2*p0*q0
263     matrix_A(1,3) = 2*p0*nu
264     matrix_A(2,1) = 2*q0*p0
265     matrix_A(2,2) = 1 - 2 * q0 * q0
266     matrix_A(2,3) = - 2 * q0 * nu
267     matrix_A(3,1) = -2 * p0 * nu
268     matrix_A(3,2) = 2 * q0 * nu
269     matrix_A(3,3) = 2 * nu * nu - 1
270     call matrix_times_matrix(matrix_B, matrix_A, matrix_C)
271
272     u = u + h
273     call matrix_times_vector(matrix_C,v)
274     end subroutine psi_20
275 c -----
276
277     subroutine matrix_times_vector (A, v)
278 c Inputs:
279     real*8, dimension(3,3) :: A
280 c Inputs / Output:
281     real*8, dimension(3) :: v
282 c Internals:
283     real*8, dimension(3) :: v2
284     do i=1,3,1
285         v2(i)=0d0
286         do j=1,3,1
287             v2(i) = v2(i) + A(i,j) * v(j)
288         end do
289     end do
290     v = v2
291     end subroutine matrix_times_vector
292 c -----
293
294     subroutine transpose_matrix(matrix_A, matrix_B)
295     implicit none
296 c Inputs:
297     real*8, dimension(3,3) :: matrix_A
298 c Outputs:
299     real*8, dimension(3,3) :: matrix_B
300 c Internals:
301     integer :: i,j
302
303     do i=1,3
304         do j=1,3
305             matrix_B(j,i) = matrix_A(i,j)
306         end do
307     end do
308
309     return
310     end subroutine transpose_matrix
311 c -----
312
313     subroutine matrix_times_matrix(matrix_A, matrix_B, matrix_C)
314     implicit none
315 c Inputs:
316     real*8, dimension(3,3) :: matrix_A
317     real*8, dimension(3,3) :: matrix_B
318 c Outputs:
319     real*8, dimension(3,3) :: matrix_C
320 c Internals:
321     integer :: i,j,k
322
323     do i=1,3
324         do j=1,3
325             matrix_C(i,j) = 0d0
326             do k=1,3
327                 matrix_C(i,j) = matrix_C(i,j) + matrix_A(i,k) * matrix_B(k,j)
328             end do
329         end do
330     end do
331
332     return
333     end subroutine matrix_times_matrix
334 c -----

```

```

335
336     subroutine R_x(angle, vector)
337     implicit none
338 c Inputs:
339     real*8 angle
340 c Inputs / Output:
341     real*8, dimension(3) :: vector
342 c Internals:
343     real*8, dimension(3,3) :: matrix_Rx
344
345     matrix_Rx(1,1) = 1.d0
346     matrix_Rx(1,2) = 0.d0
347     matrix_Rx(1,3) = 0.d0
348     matrix_Rx(2,1) = 0.d0
349     matrix_Rx(2,2) = cos(angle)
350     matrix_Rx(2,3) = -sin(angle)
351     matrix_Rx(3,1) = 0.d0
352     matrix_Rx(3,2) = sin(angle)
353     matrix_Rx(3,3) = cos(angle)
354     call matrix_times_vector (matrix_Rx, vector)
355
356     return
357     end subroutine R_x
358 c -----
359
360     subroutine R_z(angle, vector)
361     implicit none
362 c Inputs:
363     real*8 :: angle
364 c Inputs / Output:
365     real*8, dimension(3) :: vector
366 c Internals:
367     real*8, dimension(3,3) :: matrix_Rz
368
369     matrix_Rz(1,1) = cos(angle)
370     matrix_Rz(1,2) = -sin(angle)
371     matrix_Rz(1,3) = 0.d0
372     matrix_Rz(2,1) = sin(angle)
373     matrix_Rz(2,2) = cos(angle)
374     matrix_Rz(2,3) = 0.d0
375     matrix_Rz(3,1) = 0.d0
376     matrix_Rz(3,2) = 0.d0
377     matrix_Rz(3,3) = 1.d0
378     call matrix_times_vector (matrix_Rz, vector)
379
380     return
381     end subroutine R_z
382 c -----
383
384     subroutine ecliptical_coordinates_to_vector(alpha, beta, vector)
385     implicit none
386     include 'spin.inc'
387 c Inputs:
388     real*8 :: alpha, beta ! in degrees
389 c Inputs / outputs:
390     real*8, dimension(3) :: vector
391 c Internals:
392     alpha = alpha *degrad
393     beta = beta * degrad
394     vector(1) = cos(alpha) * cos(beta)
395     vector(2) = sin(alpha) * cos(beta)
396     vector(3) = sin(beta)
397     return
398     end subroutine ecliptical_coordinates_to_vector
399 c -----
400
401
402     subroutine get_angle_m180_180(angle)
403     implicit none
404     include 'spin.inc'
405 c Inputs / outputs:
406     real*8 :: angle
407

```

```
408 5    if (angle.lt.-180.d0) then
409      angle=angle+360.d0
410      goto 5
411    endif
412 7    if (angle.gt.180.d0) then
413      angle=angle-360.d0
414      goto 7
415    endif
416
417      end subroutine  get_angle_m180_180
418 c -----
```

D. Diskrétní Fourierova transformace

Tento program slouží k analýze orbitálního pohybu asteroidu. Jako vstupní datový soubor se použije výstup z integrátoru SWIFT.

Možný tvar vstupního řídicího souboru input.in:

```
1      massalia.out  int    ! input file, data type(syn/int/err/lc)
2      10000        ! num_of_tested_freq
3      0 150        ! 0 <= fre_1 < fre_2
4      q            ! tested_function(for real data use q !!!)
5      450         ! precession of resonance line
6      10          ! number of outputs lines
7      Y N N N     ! Y = write output spectra, N = do not write
8      Y          ! fast extrem finding -> errors possible
```

V souboru massalia.out jsou orbitální elementy daného asteroidu, popřípadě jiná data, která chce uživatel analyzovat. V současné době je ozkoušena varianta int, ostatní nemusí dávat správné výsledky. Na dalším řádku je pak uveden počet testovaných frekvencí - na tolik částí se pak rozdělí interval, který se zadává na třetím řádku. Pro uživatele je pak asi nejdůležitější šestý řádek, na kterém je uveden požadovaný počet nalezených čar.

Obsah souboru spin.inc s definicí číla π a převodu mezi stupni a radiány:

```
1      integer, parameter :: nn = 500000          ! max. num of lines
2      real*8, parameter  :: PI = 3.1415926535d0  ! PI number
3      real*8, parameter  :: degrad = pi / 180.d0
4      real*8, parameter  :: twoPI = PI * 2.0d0   ! two PI

1 c Data Compensated Discrete Fourier Transform
2 c
3 c Compile with: "-ffixed-line-length-132"
4
5      program DCDFT
6      implicit none
7
8      include 'spin.inc'
9
10
11 c ----- Program input data & variables -----
12      real*8, parameter :: year = 24.d0*365.25d0
13      ! h --> y
14      real*8, dimension(nn) :: a, e, inc, capom, q, p, qp
15      ! Keplerian elements and non-singular elements
16      real*8, dimension(nn) :: t
17      ! time in years
18      real*8, dimension(nn) :: w
19      ! weight function
20      real*8 :: n_of_tested_freq
21      ! input information in four.in
22      real*8 :: fre_min, fre_max, fre_step, fre
23      integer :: i, n_data, iii, j, k, m
24      real*8 :: a_0, a_1, a_2, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2
25      real*8 :: dd_0, dd_1, dd_2, aa_0, aa_1, aa_2
26      real*8 :: cc_1, cc_2, ss_1, sc_1, ssc_1
27      real*8 :: d, dd, temp, temp_2, fre_1, fre_2
28      character :: tested_function
29      real*8 :: sc, ss
30      ! sum of w_i * cos(x_i) and w_i*sin(x_i)
31      real*8 :: ssc
32      ! sum of w_i * sin(x_i) * cos(x_i)
33      real*8 :: rf, ra, rf2, ra2
```



```

243      ! massalia, synteticka, d_nesvorny.in
244  else if(tested_function == 'p') then
245      temp_phi = datan2(d_1, d_2 * (1.0d0)) / degrad
246      ! massalia, d_nesvorny.in
247  end if
248
249
250  if((pom1 > -1.1).and.(pom1 < -0.9)) then
251      rf = 0.0d0 - rf
252      temp_phi = 360.0d0 - temp_phi
253      write(*,*)'*****'
254  end if
255
256
257  call get_angle_0_360(temp_phi)
258
259  if(data_type == 'lc') then
260
261      temp_rf = (rf*twoPI*3600 / degrad)
262      ! to arc seconds per time unit
263      temp_rf = temp_rf / 3600.0d0
264      ! to arc degree per time unit
265      temp_rf = 1.0d0 / temp_rf
266      ! freq to period
267      temp_rf = temp_rf * 360.0d0
268      write(333,*)ra,temp_phi,temp_rf
269      write(*,*)temp_rf
270
271  else if(data_type == 'err') then
272
273      temp_rf = (rf*twoPI*3600 / degrad)
274      ! to arc seconds per time unit
275      temp_rf = temp_rf / 3600.0d0
276      ! to arc degree per time unit
277      temp_rf = 1.0d0 / temp_rf
278      ! freq to period
279      temp_rf = temp_rf * 360.0d0
280      write(333,0001)ra,temp_phi,temp_rf
281 0001  format(F14.8,F14.8,F14.8)
282      write(*,*)temp_rf
283
284  else
285      write(333,444)ra,temp_phi,rf * twoPI * 3600 / degrad
286  end if
287
288
289 444  format(F14.8,1X,F15.6,1X,1X,F14.8)
290
291
292  if (iii < k) then
293      goto 555
294  end if
295
296  close(333)
297  goto 669
298  c ----- loop - end -----
299  c ----- ERROR MSG -----
300
301 666  write(*,*)'No input file.'
302      go to 669
303 667  write(*,*)'Cannot find data file - ',input_file
304      goto 669
305 668  write(*,*)'Wrong data format'
306      goto 669
307
308
309 669  continue
310      end program DCDFT
311
312  c =====
313  c Subroutines:
314  c =====
315

```

```

316
317     subroutine Loop(n_data,w,t,qp,num_of_freq,a_0,a_1,a_2,c_1,
          c_2,d_0,d_1,d_2,ss,sc,ssc,f1,f2,ar,fr, output_file,j,k,l,YN,f)
318     implicit none
319     include 'spin.inc'
320 c Inputs:
321     real*8, dimension(nn) :: w, t, qp
322
323     real*8 :: ss, sc, ssc
324     real*8 :: f1, f2
325     real*8 :: ar, fr, num_of_freq
326     integer :: n_data
327     character (len=20) :: output_file
328     character (len=1) :: YN
329     ! write / do not write temporary spectra in output file
330     character (len=1) :: f
331     integer :: j, k
332     real*8 :: l
333     real*8 :: num_of_tested_freq
334
335 c Internals / Outputs:
336     real*8 :: a_0, a_1, a_2, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2
337     real*8 :: fre
338     real*8 :: sum_s, sum_c, sum_sc
339     real*8 :: fre_min, fre_max
340     real*8 :: fre_1, fre_2, fre_step
341     real*8 :: temp_ii, temp2_ii, temp, temp_output_write
342
343
344
345     num_of_tested_freq = num_of_freq
346     temp_output_write = 0
347     sum_s = ss
348     sum_sc = ssc
349     fre_1 = f1
350     fre_2 = f2
351     temp_ii = 0
352
353     a_0 = 0
354     a_1 = 0
355     a_2 = 0
356     c_1 = 0
357     c_2 = 0
358     d_0 = 0
359     d_1 = 0
360     d_2 = 0
361     sum_s = 0
362     sum_sc = 0
363
364
365
366     fre_1 = fre_1 / (twoPI * 3600 / degrad)
367     fre_2 = fre_2 / (twoPI * 3600 / degrad)
368     if(fre_1 > fre_2) then
369         fre_min = fre_1
370         fre = fre_2
371         fre_step = (fre_1 - fre_2) / num_of_tested_freq
372     else if(fre_1 < fre_2) then
373         fre_min = fre_2
374         fre = fre_1
375         fre_step = (fre_2 - fre_1) / num_of_tested_freq
376     end if
377     temp2_ii = sqrt((fre_1 - fre_2)**2) / fre_step
378
379
380
381
382
383     fr = 0
384     ar = 0
385
386     if(YN == 'Y') then
387         open(unit=123,file=output_file,action='write', status='replace')

```

```

388     end if
389
390
391
392 111  continue
393     temp_output_write = temp_output_write + 1
394     if( fre <= fre_min) then
395
396
397         if(mod(temp_output_write,15.0d0) == 0.0d0) then
398             if(temp_output_write > 5000)then
399                 temp_output_write = temp_output_write - 5000
400             end if
401             write(*,999) '[' ,j,' / ',k,' ]. - ',1/4 * 100,' % ',temp_ii/temp2_ii
402 999   * 100,' %'
403         format(A,I2,A,I2,A,F6.2,A,F6.2,A)
404     end if
405
406
407     call a0(n_data, w, a_0)
408     ! a_0(N, w, output)
409     call a1(n_data, w, t, a_0, fre, sum_c, a_1)
410     ! a1(N, w, t, a_0, omega, sum_c, output)
411     call a2(n_data, w, t, a_0, a_1, fre, sum_c, sum_sc, sum_s, a_2)
412     ! a2(N,w,t, a_0, a_1, omega, sum_c,sum_sc, sum_s,output)
413     call c1(n_data, w, t, qp, a_1, fre, c_1)
414     ! c_1 (N, w, t, f, a_1, omega, output)
415     call c2(n_data,w,t,qp,a_0,a_1,a_2,c_1,sum_s, sum_c,sum_sc,fre,c_2)
416     ! c2(N,w,t,f,a_0,a_1,a_2,c_1,sum_s,sum_sc, sum_sc,omega,output)
417     call d2(a_2, c_2, d_2)
418     ! d_2 (a_2, c_2, output)
419     call d1(n_data, w,t,a_0,a_1,c_1,d_2,fre,sum_s, sum_c,sum_sc,d_1)
420     ! d1(N,w,t,a_0,a_1,c_1,d_2,omega,sum_s,sum_c, sum_sc,output)
421     call d0(n_data, w, t, a_0, d_1, d_2, fre, sum_c, sum_s, d_0)
422     ! d0 (N, w, t, a_0, d_1,d_2,omega,sum_c, sum_s,output)
423
424
425
426     temp = sqrt(d_1**2 + d_2**2)
427
428     if(YN == 'Y') then
429         write(123,456)d_1,d_2,(fre * twoPI * 3600 / degrad), temp
430 456   format(F20.14,1X,F20.14,1X,F16.7,1X,F14.11)
431     end if
432
433
434     if(temp > ar) then
435         fr = fre
436         ar = temp
437     else if(temp == ar) then
438         fr = (fr + fre) / 2.0d0
439
440     else if ((temp_ii/temp2_ii >= 0.6).and.(temp < ar).and.(f == 'Y').and.(1
441 == 2.0d0)) then
442         write(*,999) '[' ,j,' / ',k,' ]. - ',1/4 * 100,' % ',temp_ii/temp2_ii
443         * 100,' %'
444         goto 258
445
446     else if((temp_ii/temp2_ii >= 0.3).and.(temp < ar).and.(f == 'Y').and.(1
447 >= 3.0d0)) then
448         write(*,999) '[' ,j,' / ',k,' ]. - ',1/4 * 100,' % ',temp_ii/temp2_ii
449         * 100,' %'
450         goto 258
451
452     end if
453
454 1000  continue
455     fre = fre + fre_step
456     temp_ii = temp_ii + 1
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500

```

```

456         goto 111
457     end if
458
459 258     continue
460         close(123)
461         return
462     end subroutine Loop
463 c -----
464
465
466
467
468     subroutine a0(N, w, output)
469     implicit none
470     include 'spin.inc'
471
472 c Inputs:
473     integer :: N
474     real*8, dimension(N) :: w
475
476 c Output:
477     real*8 :: output
478
479 c Internals:
480     integer :: i
481
482     output = 0.0d0
483
484     do i = 1, N
485         output = output + w(i)
486     end do
487     output = sqrt(1 / output)
488     return
489 end subroutine a0
490 c -----
491
492     subroutine a1(N, w, t, a_0, omega, sum_c, output)
493     implicit none
494     include 'spin.inc'
495
496 c Inputs:
497     integer :: N
498     real*8, dimension(nn) :: w, t
499     real*8 :: a_0
500     real*8 :: omega
501 c Output:
502     real*8 :: output
503     real*8 :: sum_c
504 c Internals:
505     integer :: i
506     real*8 :: temp_1, temp_2
507     real*8 :: x_i
508     temp_1 = 0
509     temp_2 = 0
510
511     do i = 1,N
512         x_i = twoPI * omega * t(i)
513         temp_1 = temp_1 + w(i) * cos(x_i) * cos(x_i)
514         temp_2 = temp_2 + w(i) * cos( x_i )
515     end do
516     sum_c = temp_2
517     temp_2 = temp_2 * temp_2 * a_0 * a_0
518     output = temp_1 - temp_2
519     output = sqrt(1 / output)
520     return
521 end subroutine a1
522
523 c -----
524     subroutine a2(N,w,t, a_0, a_1, omega, sum_c,sum_sc, sum_s,output)
525     implicit none
526     include 'spin.inc'
527
528 c Inputs:

```

```

529     integer :: N
530     real*8, dimension(nn) :: w, t
531     real*8 :: a_0, a_1
532     real*8 :: omega
533     real*8 :: sum_c
534 c Output:
535     real*8 :: output
536     real*8 :: sum_s, sum_sc
537 c Internals:
538     integer :: i
539     real*8 :: temp_1, temp_2, temp_3, temp_4, temp_5
540     real*8 :: x_i
541     temp_1 = 0
542     temp_2 = 0
543     temp_3 = 0
544     temp_4 = 0
545     temp_5 = 0
546
547     do i = 1,N
548         x_i = twoPI * omega * t(i)
549         temp_1 = temp_1 + w(i) * sin( x_i ) * sin( x_i )
550         temp_2 = temp_2 + w(i) * sin( x_i )
551         temp_3 = temp_3 + w(i) * sin( x_i ) * cos( x_i )
552
553     end do
554     temp_5 = sum_c
555     temp_4 = temp_2
556     sum_s = temp_2
557     sum_sc = temp_3
558     temp_4 = temp_4 * temp_5 * a_0 * a_0
559     temp_3 = temp_3 - temp_4
560     temp_3 = temp_3 * temp_3 * a_1 * a_1
561     temp_2 = temp_2 * temp_2 * a_0 * a_0
562
563     output = temp_1 - temp_2 - temp_3
564     output = sqrt(1 / output)
565     return
566 end subroutine a2
567
568 c -----
569
570     subroutine c1 (N, w, t, f, a_1, omega, output)
571     implicit none
572     include 'spin.inc'
573
574 c Inputs:
575     integer :: N
576     real*8, dimension(nn) :: w, t, f
577     real*8 :: omega, a_1
578 c Output:
579     real*8 :: output
580
581 c Internals:
582     integer :: i
583     real*8 :: temp_1
584     real*8 :: x_i
585     temp_1 = 0
586
587     do i = 1,N
588         x_i = twoPI * omega * t(i)
589         temp_1 = temp_1 + w(i) * cos( x_i ) * f(i)
590     end do
591     output = temp_1 * a_1
592     return
593 end subroutine c1
594
595 c -----
596     subroutine c2(N,w,t,f,a_0,a_1,a_2,c_1,sum_s,sum_c,sum_sc,omeg,out)
597     implicit none
598     include 'spin.inc'
599
600 c Inputs:
601     integer :: N

```

```

602     real*8, dimension(nn) :: w, t, f
603     real*8 :: omeg, a_0, a_1, a_2, c_1
604     real*8 :: sum_c, sum_s, sum_sc
605 c Output:
606     real*8 :: out
607
608 c Internals:
609     integer :: i
610     real*8 :: temp_1, temp_2, temp_3, temp_4
611     real*8 :: x_i
612     temp_1 = 0
613
614     do i = 1,N
615         x_i = twoPI * omeg * t(i)
616         temp_1 = temp_1 + w(i) * sin( x_i ) * f(i)
617
618     end do
619     temp_2 = sum_sc
620     temp_3 = sum_s
621     temp_4 = sum_c
622     temp_4 = temp_4 * temp_3 * a_0 * a_0
623     temp_2 = (temp_2 - temp_4) * a_1 * a_2 * c_1
624
625     out = temp_1 * a_2 - temp_2
626     return
627 end subroutine c2
628
629 c -----
630
631     subroutine d2 (a_2, c_2, output)
632     implicit none
633
634 c Inputs:
635     real*8 :: a_2, c_2
636 c Output:
637     real*8 :: output
638
639     output = a_2 * c_2
640     return
641 end subroutine d2
642
643 c -----
644
645     subroutine d1(N,w,t,a_0,a_1,c_1,d_2,omega,sum_s,sum_c,sum_sc,out)
646     implicit none
647     include 'spin.inc'
648
649 c Inputs:
650     integer :: N
651     real*8, dimension(nn) :: w, t
652     real*8 :: omega, a_0, a_1, c_1, d_2
653     real*8 :: sum_s, sum_c, sum_sc
654 c Output:
655     real*8 :: out
656
657 c Internals:
658     integer :: j
659     real*8 :: temp_1, temp_2, temp_3, temp_4
660     real*8 :: x_j
661     temp_1 = a_1 * c_1
662     temp_2 = 0
663     temp_3 = 0
664     temp_4 = 0
665
666
667     temp_2 = sum_c
668     temp_3 = sum_s
669     temp_4 = sum_sc
670     temp_2 = temp_2 * temp_3 * a_0 * a_0
671     temp_2 = temp_2 - temp_4
672     temp_2 = temp_2 * d_2 * a_1 * a_1
673
674     out = temp_1 + temp_2

```

```

675     return
676     end subroutine d1
677
678 c -----
679
680
681     subroutine d0 (N, w, t, a_0, d_1,d_2,omega,sum_c,sum_s,output)
682     implicit none
683     include 'spin.inc'
684
685 c Inputs:
686     integer :: N
687     real*8, dimension(nn) :: w, t
688     real*8 :: omega, a_0, d_1, d_2
689     real*8 :: sum_s, sum_c
690 c Output:
691     real*8 :: output
692
693 c Internals:
694     integer :: j
695     real*8 :: temp_1, temp_2
696     real*8 :: x_j
697     temp_1 = 0
698     temp_2 = 0
699
700     temp_1 = sum_c
701     temp_2 = sum_s
702     temp_2 = temp_2 * d_2
703     temp_1 = temp_1 * d_1
704
705
706     output = (temp_1 + temp_2) * (-1.0d0) * a_0 * a_0
707     return
708     end subroutine d0
709
710 c -----
711
712     subroutine df(d_0, d_1, d_2, t_j, omega, output)
713     implicit none
714     include 'spin.inc'
715
716 c Inputs:
717     real*8 :: d_0, d_1, d_2, t_j, omega
718
719 c Outputs:
720     real*8 :: output
721
722 c Internals:
723     real*8 :: x_j
724
725     x_j = twoPI * omega * t_j
726     output = d_0 + d_1 * cos( x_j ) + d_2 * sin( x_j )
727     return
728     end subroutine df
729
730 c -----
731
732     subroutine Q (N, w, f, output)
733     implicit none
734     include 'spin.inc'
735
736 c Inputs:
737     integer :: N
738     real*8, dimension(nn) :: w, f
739 c Output:
740     real*8 :: output
741
742 c Internals:
743     integer :: i
744     real*8 :: temp_1
745     temp_1 = 0
746
747     do i = 1,N

```

```

748     temp_1 = temp_1 + w(i) * f(i) * f(i)
749   end do
750   output = temp_1
751   return
752   end subroutine Q
753
754 c -----
755     subroutine get_angle_m180_180(phi)
756     implicit none
757     include 'spin.inc'
758 c Inputs / outputs:
759     real*8 :: phi
760
761 5     if(phi < -180.0d0) then
762         phi=phi+360.d0
763         goto 5
764     endif
765
766 7     if(phi > 180) then
767         phi=phi-360.d0
768         goto 7
769     end if
770
771     return
772     end subroutine get_angle_m180_180
773
774 c -----
775
776     subroutine get_angle_0_360(phi)
777     implicit none
778     include 'spin.inc'
779 c Inputs / outputs:
780     real*8 :: phi
781
782 5     if(phi < 0.0d0) then
783         phi=phi+360.d0
784         goto 5
785     endif
786
787 7     if(phi > 360.0d0) then
788         phi=phi-360.d0
789         goto 7
790     end if
791
792     return
793     end subroutine get_angle_0_360
794
795 c -----

```

E. Pomocné výpočty

Označme

$$\frac{d\mathbb{B}}{dt} = \mathbb{Q}, \quad (\text{E.1})$$

pak lze zapsat složky matice \mathbb{Q} :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -\sin \Omega \left(4 \cos \Omega \sin^2 I/2 \dot{\Omega} + \sin I \sin \Omega \dot{I} \right), \\ Q_{12} &= 2 \cos (2\Omega) \sin^2 I/2 \dot{\Omega} + \cos \Omega \sin I \sin \Omega \dot{I}, \\ Q_{13} &= -\cos \Omega \sin I \dot{\Omega} - \cos I \sin \Omega \dot{I}, \\ Q_{21} &= 2 \cos (2\Omega) \sin^2 I/2 \dot{\Omega} + \cos \Omega \sin I \sin \Omega \dot{I}, \\ Q_{22} &= -\cos \Omega \left(\cos \Omega \sin I \dot{I} + 2(\cos I - 1) \sin \Omega \dot{\Omega} \right), \\ Q_{23} &= \cos I \cos \Omega \dot{I} - \sin I \sin \Omega \dot{\Omega}, \\ Q_{31} &= \cos \Omega \sin I \dot{\Omega} + \cos I \sin \Omega \dot{I}, \\ Q_{32} &= \sin I \sin \Omega \dot{\Omega} - \cos I \cos \Omega \dot{I}, \\ Q_{33} &= -\sin I \dot{I}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$