Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

RIGORÓZNÍ PRÁCE

Reedukace formálních poznatků v matematice v prostředí individuálního doučování

Reeducation of mechanical knowledge in mathematics during private supplementary tutoring

Mgr. Gabriela Novotná

Vedoucí práce: **Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.**

Studijní program: **Učitelství pro střední školy**

Studijní obor: **Učitelství VVP pro ZŠ a SŠ,**
anglický jazyk – matematika

2018

Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Reedukace formálních poznatků v matematice

v prostředí individuálního doučování

Reeducation of mechanical knowledge in mathematics

during private supplementary tutoring

Bc. Gabriela Novotná

Vedoucí práce:	**Doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.**
Studijní program:	**Učitelství pro střední školy**
Studijní obor:	**Učitelství VVP pro ZŠ a SŠ,**
	anglický jazyk – matematika

2015

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Reedukace formálních poznatků v prostředí individuálního doučování vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 10. července 2015

Gabriela Novotná

Chtěla bych poděkovat vedoucí své diplomové práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za její odborné vedení, pomoc a rady při zpracování této práce. Děkuji také za její trpělivost, se kterou mou práci četla. Dále děkuji Adamovi, Báře a Cilce, bez nichž by nemohla vzniknout praktická část práce, a všem, kteří se svou ochotou zasloužili o to, aby práce v této podobě vznikla.

ABSTRAKT

Práce je zaměřena na reedukaci formálních poznatků v oblasti zlomků. Jelikož každý žák má v poznávacím procesu jiné potřeby a tempo, je proces reedukace zasazen do prostředí soukromého individuálního doučování. V teoretické části jsou nejprve na základě české i zahraniční literatury vymezeny základní pojmy (jak je v práci chápáno individuální doučování, o jakých žácích je pojednáváno a co to je formální poznání), následně je popsán konstruktivistický styl výuky, který je pro reedukaci formálních poznatků vhodný.

Druhou částí práce je praktická implementace teoretických poznatků do tří případových studií. U tří žáků byly diagnostikovány formální poznatky v oblasti zlomků a následně byla v rámci jejich hodin soukromého doučování prováděna jejich reedukace. Je popsán proces, jak reedukace u každého z daných žáků probíhala. Součástí práce je i jakýsi manuál, čemu bychom se neměli vyhnout, budeme-li se o reedukaci zlomků u žáků pokoušet.

KLÍČOVÁ SLOVA

formální poznání, reedukace, individuální doučování, zlomky

ABSTRACT

The diploma thesis is aimed at reeducation of mechanical knowledge in the area of fractions. Since every student has different needs and pace in his/her process of gaining knowledge, the reeducation is set into their private supplementary tutoring lessons. In the theoretical part, the basic concepts (how is the private supplementary tutoring understood in this thesis, which students are taken into consideration, and what is mechanical knowledge) are explained based on Czech and foreign literary sources, subsequently, the constructivist way of teaching, which is suitable for the reeducation of mechanical knowledge, is described.

The second part of this thesis is constituted by the practical implementation of the theoretical findings into three case studies. Three students were diagnosed with mechanical knowledge in the area of fractions. Subsequently, their knowledge was being reeducated during their private supplementary tutoring lessons. The process of reeducation of each student is described in detail, moreover, a kind of manual describing what should not be avoided when dealing with this topic is included.

KEY WORDS

mechanical knowledge, reeducation, private supplementary tutoring, fractions

OBSAH

1. Úvod

Soukromému doučování se věnuji už téměř deset let. Za tu dobu jsem poznala, že každému žákovi vyhovuje jiné tempo, jiné úlohy, je pro něj vhodný jiný způsob vysvětlování a jiný typ pomoci při odstraňování chyby. Proto jsem se rozhodla zasadit svou diplomovou práci do tohoto prostředí. V České republice není doučování pravděpodobně tolik rozšířené, jako například v Asii, pomalu si ale získává své místo, a je tedy potřeba začít se jím zabývat.

Nemoc formalizmu je často označována za jeden z nejvážnějších problémů současného školství, především, co se týče matematiky. S tímto názorem se ztotožňuji, rozhodla jsem se tedy zaměřit na jednu oblast matematiky základní školy, otestovat v ní žáky, kteří ke mně dochází na doučování, a u těch, u kterých budou formální poznatky v této oblasti diagnostikovány, se je pokusit takzvaně zživotnit. Zbývalo jen vybrat oblast, na kterou se zaměřím. Shodou okolností jsem díky vedoucí své práce měla možnost účastnit se projektu GA ČR *Kritická místa matematiky na základní škole*, kde mi byla přidělena oblast zlomků. Práce se zlomky se mi zalíbila, takže jsem se rozhodla u nich zůstat. Otestovala jsem několik svých žáků a u čtyř z nich jsem v této oblasti objevila nedostatky. Bohužel jeden z nich přestal v průběhu roku na doučování docházet, vznikly tak tři případové studie, v nichž popisuji pokus o reedukaci formálních poznatků v prostředí zlomků. S Adamem, Bárou a Cilkou jsem se zlomkům snažila soustavně věnovat a jejich poznatky v této oblasti zživotnit. Celý proces reedukace, včetně vstupní diagnózy a závěrečného testu je popsán v praktické části práce. Oba testy jsou k dispozici v příloze práce.

Před samotnou reedukací s jednotlivými žáky bylo potřeba nastudovat relevantní literaturu a na jejím základě vytvořit jakýsi manuál, čemu všemu bychom se během reedukace měli s žáky věnovat. Je samozřejmé, že každý žák bude potřebovat více času a úloh v nějaké jiné oblasti, může se lišit i jejich pořadí, celkově bychom ale měli obsáhnout zlomky z různých perspektiv.

Součástí práce je i část teoretická, ta se zaměřuje především na popis pojmů, které jsou pro její četbu nezbytné. Věnuje se tak především individuálnímu doučování, zlomkům a formálnímu poznání, nezbytné je zmínit i konstruktivistické pojetí výuky, které je vhodné pro popis reedukace a prevenci vzniku formálního poznání. Všechny tyto pojmy jsou jednak vysvětleny a rozebrány, jednak je popsán i výzkum, který se jimi zabývá.

V závěru práce jsou shrnuty výsledky případových studií a popsána omezení práce a její možné pokračování.

Teoretická část

2. Základní pojmy

V práci používám určitá slovní spojení, která by mohla působit nejasně či dokonce dvojznačně. Jde jednak o slovní spojení a fráze, které vznikly přímo pro účely této práce, jednak o sjednocení nejednotné či neexistující české terminologie, ale jde také o překlady pojmů ze zahraniční literatury či zkrátka pojmy, které je na místě vysvětlit.

2.1. Individuální doučování

Doučování, individuální doučování, soukromé doučování, soukromé hodiny, příprava do školy, kondice, doplňující vyučování, tutoring, tutorium, mentoring, ... To všechno jsou synonyma označující tutéž situaci: žákovi z nějakého důvodu nestačí učební čas strávený ve škole a vyhledá pomoc. Může se jednat o situaci, kdy žák učivo ve škole dokonale zvládl a má zájem pouze o jeho rozšíření – zde se pravděpodobně často jedná o cizí jazyky, může to být ale i matematický, přírodovědný, literární či jiný kroužek nebo doučování, které má určitou ucelenou strukturu. Nastává ale i situace, kdy žák učivo ve škole nezvládá a stává se školsky neúspěšným (dále viz oddíl 2.2). Takoví žáci často vyhledávají pomoc právě formou doučování. To může mít různé podoby, podle velikosti skupin žáků od individuálního až po velké skupiny, podle časové náročnosti, strukturovanosti kurzu, podle osoby lektora a dalších faktorů. Zvláštním typem doučování je potom příprava na přijímací zkoušky na jinou školu, ať už je to gymnázium, střední či vysoká škola. Tyto *přípravné kurzy* bývají často strukturované ne podle individuálních potřeb žáka, ale podle požadavků konkrétní školy.

Vymezení

Kalhous a Obst uvádějí, že individuální vyučování je považováno za vůbec nejstarší organizační formu výuky, a připisují mu následující charakteristiky:

> Žáci jsou zpravidla shromážděni v jedné místnosti, jsou různého věku, různé úrovně vědomostí, jejich počet je různý.
>
> Jeden učitel vyučuje, resp. řídí činnost vždy jednotlivých žáků. Každý pracuje individuálně, navzájem nijak nespolupracují.
>
> Učivo je stanoveno pro každého žáka zvlášť, nejsou žádné společné učebnice ani jiné prostředky sdělování učiva.
>
> Doba vyučování je volná, není přesně určena v časových jednotkách v průběhu dne ani v průběhu roku.
>
> Rozmístění žáků a věcných prostředků je libovolné a není nijak přesně určeno.
>
> (Kalhoust, Obst, 2009, s. 294)

V současnosti bývá prý forma částečně modifikovaná a v tom smyslu autoři hovoří spíše o „trvalejším kontaktu jednoho učitele a jednoho žáka“ (Kalhoust, Obst, 2009, s. 294).

Votrubová a Kasíková používají termín *doplňující vyučování* jako jeden z typů individualizace ve školním prostředí. Jde podle nich o „vyučování, kdy se poskytuje určité základní učivo všem a v „nadstavbě“ jde o doplnění, které může být specifické pro žáky se zájmem (tj. něco navíc – rozšiřující učivo či hlouběji – prohlubující učivo), nebo se naopak u žáků, kteří prozatím nezvládli základní požadavky, doplnění týká jiných strategií, jež by je dovedly k zvládnutí těchto požadavků“ (Vališová, Kasíková, 2011, s. 159).

Pro účely této práce nejvýstižněji charakterizuje doučování Bray:

> Soukromé doučování je definováno jako doučování školního (akademického) předmětu (např. matematiky, dějepisu nebo angličtiny), které je doplňkové k výuce v běžné škole a je za účelem finančního zisku. […] To zahrnuje soukromé doučování (nabízené jednotlivcem) a přípravné kurzy (nabízené institucemi).
>
> (Bray, Silova, 2006, s. 29; překlad autorka)

Čas a aktéři

Bray dodává, že doučování nejčastěji probíhá v době blížících se závěrečných zkoušek, kdy je tlak na žáky největší, není ale výjimkou, že žáci docházejí pravidelně na doučování během celého školního roku v různých fázích své školní docházky (Bray, 2010, s. 61). Nezřídka ale navštěvují individuální doučování i během letních prázdnin, především z důvodu opravných zkoušek.

Osob doučujících, nazývejme je *lektoři*, může být celá škála – Bray uvádí, že to často bývají již žáci druhého stupně základní školy, kteří si přivydělávají doučováním žáků prvostupňových, stejně tak univerzitní studenti doučováním žáků druhého stupně. Dále učitelé běžného školství, s různým vztahem k doučovaným žákům, a dokonce i bývalí učitelé v důchodu (Bray, 2010, s. 63).

Osobou doučovanou může být taktéž jakýkoliv žák. Mohlo by se zdát, že na doučování dochází pouze školsky neúspěšní žáci, ale jak mnozí autoři uvádějí, opak je skutečností. Alespoň v zahraničí se mnohými výzkumy (např. Bray, 1999, s. 42; Dindyal, Besoondyal, 2007, s. 8) ukázalo, že především nadaní a dobře prospívající žáci navštěvují doučování častěji než žáci s problémy. To by ovšem mohlo být způsobeno tím, že velká část těchto výzkumů byla prováděna v Asii, kde má sice doučování dlouhou tradici, ale přístup žáků a jejich rodičů ke vzdělávání je poměrně odlišný od toho v České republice (Černík, Kocourek, Pechová, 2006, s. 117). Lee (2007, findings) tvrdí, že v Koreji je doučování určeno především pro úspěšné žáky, zatímco ve

Spojených státech amerických spíše pro ty méně úspěšné. U nás žádný podobný výzkum proveden nebyl (viz oddíl 3.1), můžeme zatím tedy jen spekulovat o důvodech, které převládají u českých žáků. Nemůžeme ale vyvrátit, že soukromé doučování zcela jistě navštěvují jak žáci nadaní, žáci školsky neúspěšní, tak i žáci běžní (viz oddíl 2.2).

Stínové vzdělávání

V zahraniční literatuře se o doučování běžně dočteme jako o tzv. stínovém vzdělávání neboli *shadow education*. Bray vysvětluje, že metaforu stínu lze vysvětlit několika způsoby. Zaprvé, soukromé doučování existuje pouze proto, že existuje běžné školní vzdělávání. Zadruhé, podle toho, jak se mění rozsah a forma školního vzdělávání, mění se i rozsah a forma soukromého doučování. Zatřetí, v naprosté většině společností je hlavní důraz kladen na vzdělávání školní, ne na doučování. Začtvrté, prvky doučování jsou mnohem méně zřetelné a jasné než prvky běžného školství (Bray, 1999, s. 17). Záhy však dodává, že na rozdíl od většiny stínů není soukromé doučování pouze pasivní subjekt, ale může výrazně ovlivnit i objekt, který je jeho vzorem, tedy školní vzdělávání.

Výhody a nevýhody

Metafora stínu mívá pro spoustu lidí negativní konotace, které mohou postupně implikovat negativní důsledky a nevýhody soukromého doučování, které důkladně popisuje (Bray, 2003). Uvádí i různé strategie, jak je řešit, a ve svých pozdějších publikacích nevýhody opakovaně rozebírá. Jde především o zásahy do školního kurikula a učebních podmínek ve školním vzdělávání, tlak na mladé žáky a jejich rodiče, zvyšování sociálních nerovností a o manipulační triky lektorů[1].

O tom, že doučování může mít negativní dopad na výuku v běžné škole, není pochyb. Pokud na doučování chodí velká část žáků ze třídy, jako je tomu například v asijských zemích, leckdy mají látku probranou dříve, než se probírá v běžné škole, a učitel potom nemusí vynakládat takové úsilí, jako kdyby látku žáky učil poprvé. Bray uvádí (1999, s. 52), že někteří žáci s doučováním nechtějí do školy chodit, protože se tam nedozvídají nic nového. Pokud všechna témata již probrali se svým lektorem individuálně, o školní docházku mohou ztratit zájem. Na druhou stranu ti, kteří na doučování nechodí, jsou vlečeni tempem, které reflektuje požadavky

---

1 O doučování žáků, jež učitel učí i v běžném školním vzdělávání, je pojednáno níže. Ačkoliv je v některých zemích zakázáno, aby učitelé doučovali žáky, které učí i v běžném školním vzdělávání, zákaz se často obchází uzavíráním nepsaných dohod mezi učiteli na různých školách, kteří si žáky posílají navzájem (viz níže).

většiny třídy, na ně je však leckdy příliš rychlé. Prohlubují se tak rozdíly mezi žáky v jedné třídě, což učiteli samozřejmě komplikuje práci, rychlejší žáky to brzdí a ty pomalejší často demotivuje.

Na ty žáky, kteří doučování nenavštěvují, stejně tak na jejich rodiče, je v takto heterogenní třídě vyvíjen velký tlak, aby si doučování našli. Žáci se mohou cítit znevýhodnění, demotivovaní či se stát kvůli vyššímu tempu probírané látky školsky neúspěšnými, díky čemuž musejí trávit učením více času, než by bylo přiměřené jejich věku. „Four hours' sleep for success, but five hours' sleep for failure" (Bray, 1999, s. 57) bylo v devadesátých letech minulého století známé přísloví v Japonsku. V České republice situace pravděpodobně tak vyhrocená není, nicméně pravdou je, že doučování probíhá většinou odpoledne, ve volném čase žáků. Společně s běžnou školní docházkou může navíc zabrat velkou část dne, kdy žákům nezbude čas na zájmové činnosti a na odpočinek. Tlak může být působen i na jejich rodiče. Pokud vidí, že jejich dítě patří ve třídě k těm horším a má problémy, budou se to pravděpodobně snažit řešit a začnou o doučování také uvažovat.

Nutnost, aby žák docházel pravidelně na soukromé doučování, se samozřejmě může prodražit, což ekonomicky zatěžuje celou rodinu. Bray (1999, s. 45) uvádí, že v některých společnostech může být prestiž dokonce spojována s tím, že žák chodí k vyhlášenému lektorovi, který nezřídka patří k těm nejdražším v oblasti.

Podle mnohých autorů (Bray, Lee, Silova, atd.) bývá doučování často používáno k manipulaci žáků a jejich rodičů. Pokud je žákův lektor zároveň i jeho učitel v běžné škole, stává se, že učitel ve škole neprobere všechnu látku, kterou by podle kurikula měl. Žáci jsou potom nuceni k němu docházet na placené doučování, aby si chybějící látku doplnili. V mnohých zemích, jako například v Austrálii, Německu a Singapuru, je nezákonné, aby učitelé doučovali své vlastní žáky. Bray a Silova ale upozorňují na techniky učitelů, kterým nelze zabránit:

> Všichni o tom vědí, ale nikdo s tím nic nedělá. Naši učitelé nabízejí doučování tím nejhorším možným způsobem. [...] Když budu na škole učit matematiku a nebudu moci doučovat své vlastní žáky, pak budu doučovat žáky jiných škol. Svým žákům řeknu, koho by si měli najmout jako lektora, a zároveň budu vědět, kdo na oplátku pošle žáky mně. […]
>
> Učitel na druhém stupni v Sarajevu, Bosna a Hercegovina
> (Silova, Bray, 2006b, s. 96; překlad autorka)

Nic ale není jednostranné. Soukromé doučování poskytuje vedle možných nevýhod i celou řadu výhod. Hlavním účelem doučování je a mělo by vždy být, aby žákům pomohlo s učením. Ať už jde o rozšíření jejich stávajících znalostí, dobudování znalostí chybějících, opravu chybných hypotéz a modelů či reedukaci znalostí formálních, na prvním místě by vždy měly být nejlepší zájmy žáka. Stejně jako školní vzdělávání i doučování by dále mělo formovat žákův lidský kapitál a vychovávat ho a lektor by pro něj měl být dobrým vzorem nejen, co se týče profesních znalostí.

Nespornou výhodou je, že doučování poskytuje další pracovní příležitosti, a to buď pro nezaměstnané, nebo často přímo pro učitele, kteří si k učitelskému platu přivydělávají. Obdobně může poskytovat praxi pro studenty učitelství či pro žáky samotné.

Jako další výhoda doučování je často uváděno, že vytváří prostředí pro konstruktivní aktivity, jimiž mohou mladí lidé trávit svůj volný čas mimo domov. Nezbývá jim potom tolik času a energie na jiné aktivity, které by mohly působit negativně. Pokud jde o doučování skupinové, dochází navíc k pozitivní socializaci žáků v bezpečném prostředí, často dokonce v heterogenních skupinách.

Předchozí odstavce mohou vyvolat otázku, jestli je doučování vůbec užitečné a jestli zlepšuje školní výsledky žáků. Stejnou otázku si položil i Bray, který uvádí, že pouze podle účasti či neúčasti žáka na doučování nemůžeme podobné závěry udělat. Podle něj zlepšení, stagnace či zhoršení žákovských výsledků závisí spíše na způsobu a obsahu doučování, na motivaci lektora a žáka, na četnosti, délce trvání a načasování doučování a obecně na individuálních rysech žáka, který doučování navštěvuje (Bray, 1999, s. 50). Fontana (1997, s. 151–155) dodává, že vlastnosti učícího se se skládají ze tří složek: kognitivní činitelé, jako je žákova inteligence, způsob, kterým zpracovává informace, či jeho tvořivost; afektivní činitelé, žákova úzkost, jeho sebepojetí, a zda je spíše extravert nebo introvert; a další faktory, jako je jeho věk, zrání, pohlaví, sociální prostředí, motivace apod. To vše tedy může ovlivnit to, zda se žákovy studijní výsledky pomocí docházení na doučování opravdu zlepší, či nikoliv.

Stírání hranic ve vzdělávání

V České republice, stejně jako ve většině zemí bývalého Sovětského bloku, došlo na počátku 90. let 20. století k rozsáhlé privatizaci, která se nevyhnula ani vzdělávání. Proběhlo množství změn, vznikly nové druhy školy a přibyly i školy nestátní. Jak už bylo zmíněno dříve, v současnosti pracují učitelé veřejného školství často zároveň i jako lektoři v rámci doučování. Praxe podle Braye tedy „už není otázkou buď veřejného, nebo soukromého vzdělávání, ale veřejného i soukromého vzdělávání zároveň“ (Bray, 2010, s. 61; překlad autorka). Hranice mezi veřejným a soukromým vzděláváním se tedy stávají neostrými a stírají se.

Stejně tak se pomalu stírají i hranice geografické. Bray (2010, s. 61) uvádí, že nejdelší tradici má doučování ve východní Asii, ale v současnosti se s ním setkáme i v západní a centrální Asii, v Evropě, v Severní Americe a v Africe. V době moderních technologií a internetu ale není problém doučovat žáka, který je ať už více či méně vzdálen od lektora. Fenoménu soukromého doučování přes internet se věnují Ventura a Jang. Již na konci 20. století prý existovaly společnosti, které používaly specifické nástroje jako elektronické tabule, videokamery a internet pro doučování, kde lektoři byli v Indii a žáci v USA, Austrálii, na Novém Zélandu, v Anglii, Malajsii nebo Singapuru (Ventura, Jang, 2010, s. 62–63). V současné době je doučování přes internet rozšířené téměř po celém světě. Autoři uvádí množství výhod, jaké internetové doučování nabízí oproti doučování běžnému, jako například nižší náklady, bezpečnost, časovou flexibilitu, komfort, „hravý charakter" moderních technologií, který nadchne současnou mládež, a mnoho dalších (Ventura, Jang, 2010, s. 64–66).

Doučování v matematice

Dalo by se očekávat, že předměty pro doučování nejžádanější budou právě ty, které jsou nezbytné pro zlepšování se a školní postup, což, jak uvádí např. (Bray, 2011, s. 31), většinou zahrnuje matematiku a národní jazyky. Toto tvrzení ilustruje výzkumem, který byl proveden v Anglii na části populace žáků šestého, jedenáctého a třináctého ročníku[2]. Průměrně navštěvovalo doučování z matematiky 18 % těchto žáků a v každém ze zkoumaných ročníků byla nejžádanějším předmětem matematika. Silova, Bray (2006b, s. 76) a další autoři provedli výzkum v devíti zemích bývalého Sovětského bloku, kde se mezi nejžádanějšími předměty objevily národní a cizí jazyky, dějepis a právě matematika, která se v průměrném pořadí umístila s náskokem více než 10 % na prvním místě (47,4 %). Bray (1999, s. 36) dokonce uvádí průzkum na Srí Lance, kde údajně celých 100 % žáků ve 13. ročníku se zaměřením na vědu navštěvuje soukromé doučování.

Dindyal a Besoondyal provedli zajímavý kvalitativní průzkum doučování matematiky na Mauriciu, kterého se zúčastnilo 20 učitelů, 28 žáků a 5 rodičů. Všichni učitelé se shodli na tom, že jim jde především o to, aby žáci učivu porozuměli. Kromě toho se zde řešilo množství témat, jako jak často doučování probíhá, zda funguje na základě nějaké učebnice, kdo na doučování dochází a mnoho dalších. Žáci zdůrazňovali, že doučování nejčastěji vybírají podle doporučení svých spolužáků nebo rodičů a jeho největší výhodu vidí v tom, že mají s kým probrat své obtíže v matematice (Dindyal, Besoondyal, 2007, s. 12).

Hrabal a Pavelková zmiňují, že matematika je neoblíbená, velmi obtížná (hodnocena jako druhý nejobtížnější předmět), žáci i učitele ji vidí jako velmi významnou. Prospěch v matematice je velmi špatný, ve vyšších ročnících se navíc zhoršuje, její obliba klesá, zatímco subjektivní dojem obtížnosti stoupá (Hrabal, Pavelková, 2010, s. 33). To poskytuje pro doučování matematiky velmi

2 tj. žáci průměrně ve věku 11, 16 a 19 let

plodné prostředí. Konkrétní výsledky výzkumu a všechny zkoumané předměty s pořadím a ohledem na jejich oblibu, obtížnost, význam a prospěch je dostupný v příloze 1.

V této práci se zaměříme pouze na jeden konkrétní typ doučování. Jak už název práce napovídá, jedná se o individuální doučování matematiky „jeden na jednoho“[3], to znamená, že lektor má v daný čas na starost pouze jednoho žáka, a může mu tedy věnovat absolutní pozornost a péči. Zároveň jde o doučování „ad hoc“, hodiny tedy nejsou formou přípravného kurzu, kde by se každý týden probíralo určité téma, ale žák buď předem, nebo přímo na začátku hodiny sdělí lektorovi, co zrovna ve škole probírají a s čím má problémy. Tato forma doučování vyžaduje vysokou míru improvizace, i když lze samozřejmě do určité míry připravit předem.

2.2. Běžný žák

Zkoumaná a cílová skupina této diplomové práce jsou běžní žáci druhého stupně základní školy a jim odpovídajících ročníků víceletého gymnázia a středních škol. Běžní žáci jsou v této práci ti, kteří nejsou ve svém věku nijak výjimečně nadaní či nadprůměrní (co se týče matematiky), ale zároveň ani ti silně podprůměrní, nebo mající zdravotní postižení či znevýhodnění. Jinými slovy se netýká žáků s mentální retardací, žáků se zdravotním postižením nebo znevýhodněním, především ne žáků se specifickými poruchami učení a chování (SPUCH), a žáků mimořádně nadaných. Jde tedy o průměrné žáky, kteří mají v hodinách matematiky menší či větší obtíže. Ty mohou být způsobeny například žákovou nemotivovaností a nepozorností a jsou často provázány s jeho školní neúspěšností (viz oddíl 2.2). Obtíže mohou být způsobeny i ze strany učitele, například špatným výkladem, nedostatkem času k procvičení apod. Příčiny jsou navíc často multifaktoriální, bývá tedy obtížné je odstranit.

Školská úspěšnost a neúspěšnost

Vyvstává zde otázka, jaký žák je ve škole neúspěšný. (Vágnerová, 2010, s. 117) uvádí, že úspěšnost či neúspěšnost v různých oblastech lidského života závisí na typické kombinaci dílčích osobních vlastností. Ty zahrnují neurotizmus, extraverzi, vstřícnost, svědomitost a otevřenost ke zkušenosti. Studijní úspěšnost a dobrý prospěch se podle ní projevuje svědomitostí a emoční stabilitou, respektive nízkým neurotizmem. Ashton a Paunonen (2001, s. 524) a mnozí další zahraniční autoři mluví o těchto pěti vlastnostech jako o velké pětce (Big Five) a každou z pěti dimenzí dále rozdělují na dílčí složky. Svědomitost, která má podle jejich výzkumu univerzitních

3 Překlad z anglického *one-to-one*. Zde je uvedeno pro upřesnění, jelikož v cizojazyčné literatuře popisuje termín private supplementary tutoring nejen doučování „jeden na jednoho“, ale i doučování skupinové.

studentů největší vliv na studijní úspěšnost, rozdělují dále na aspekty snaha o výkon (Achievement Striving), sebekázeň (Self-Discipline), systematičnost (Organization), smysl pro pořádek (Order), schopnosti (Competence), smysl pro povinnost (Dutifulness) a uvažování (Deliberation). Školsky neúspěšný žák tedy tyto vlastnosti postrádá, nebo u něj převažují složky jiné. Někteří autoři za úspěšnost ve škole považují dobrou známku, pochvalu či jiný způsob hodnocení, v praxi se však většinou setkáváme s laickým pohledem na věc, a to, že neúspěšnost = špatné známky/neprospěch. Hrabal a Pavelková (2010, s. 70–71) rozlišují pojmy školní úspěšnost a školní výkonnost. Školní úspěšnost chápou jako „hodnocení toho, jak žákova činnost odpovídá požadavkům školy“, výkonnost potom chápou jako užší pojem, který je více či méně objektivně měřitelný a hodnotitelný. Výkonnost žáků podle autorů potom závisí na žákově píli, nadání a na rozvoji jeho kognitivních procesů. Podle toho, na kterou složku klade konkrétní učitel důraz, se odvíjí žákovo hodnocení. Autoři uvádí také nejčastější příčiny školního výkonu (Tabulka 1). Učitel či lektor může ovlivnit často pouze svou zaujatost. Obtížnost látky je většinou dána žákovým učitelem ve škole či látkou samotnou, vnitřní příčiny může ovlivnit pouze žák sám a nestabilní vnější příčiny ovlivnit nelze vůbec. Můžeme se pouze snažit žáka štědře motivovat, zvýšit tak jeho úsilí a ideálně i jeho náladu.

příčiny	vnitřní		vnější	
	stabilní	nestabilní	stabilní	nestabilní
nekontrolovatelné	*žákovy schopnosti*	*žákova nálada*	*obtížnost*	*náhoda*
kontrolovatelné	*úsilí pro žáka typické*	*žákovo momentální úsilí*	*zaujatost učitele*	*neobvyklý zásah ostatních lidí*

Tabulka 1: Nejčastější příčiny připisované školnímu výkonu (Hrabal, Pavelková, 2010, s. 119)

Ať už je žákova školní neúspěšnost definována jakkoliv a způsobena čímkoliv, žáci, kteří ve škole buď horší známky už mají, nebo jim potenciálně hrozí, především ve spojení s přechodem na jinou školu, tvoří nesporně velkou část doučovací klientely. Důvodů, proč žáci navštěvují soukromé doučování, je jistě spousta. Některé uvádí Lee ve své studii z Hong Kongu:

moje školní výsledky nejsou moc dobré	71 %
nerozumím tomu, co se učíme ve škole	14 %
připravuji se na zkoušku	8 %
rodiče chtějí, abych na doučování chodil/a	2 %
nikdo z rodiny mi neumí pomoct s domácími úkoly	1 %

někdo z mých spolužáků chodí na doučování	1 %
jiné důvody (nespecifikováno)	2 %
nevím, neumím říct	2 %

(Lee, 1996, s. 15; překlad autorka)

V České republice by s velkou pravděpodobností měly jednotlivé důvody jiné procentuální ohodnocení, ale tyto spekulace ponecháme budoucímu výzkumu.

2.3. Formální poznání

Mnoho autorů se zabývá formálním poznáním. Pro tuto práci bude stěžejní pojetí založené na teorii generických modelů, která se zmiňuje často v souvislosti s konstruktivistickou výukou (Hejný, Stehlíková, 1999; Hejný, Novotná, Stehlíková, eds., 2004; Hejný, Kuřina, 2009; Hejný, 2014). Aby bylo možné popsat formální poznatky a především jejich vznik, neobejdeme se tedy bez teorie generických modelů.

Teorie generických modelů

Autorem této dobře známé teorie poznávání v matematice je Milan Hejný, který, jak sám přiznává, se nechal silně inspirovat svým otcem, dále jeho styl výuky rozvinul a popsal. Základem teorie je pět etap, ve kterých poznávání probíhá: motivace, izolované modely, generické modely, abstraktní poznatky a krystalizace. Jednotlivé etapy probereme detailněji.

Hladina motivace

Motivace hraje v celém procesu poznávání klíčovou roli. Hejný s oblibou uvádí, že motivace pramení z rozporu mezi „nevím“ a „chci vědět“ (Hejný, 2004a, s. 27; aj.). Žák, který je vnitřně motivovaný, poznává s větším nadšením, a tedy intenzivněji, naopak žáka, který není motivován vůbec, jen těžko přinutíme něco dělat. Takový žák je k poznávání více či méně nucen, v takovém případě nemluvíme o motivaci, ale o stimulaci.

Ve školním prostředí může jít o motivaci[4] různorodou. Pro učební proces je význačná především motivace poznávací (tedy touha poznávat, dozvídat se nové věci), která bohužel nebývá vždy přítomna. Velmi častá je i motivace výkonová (podat dobrý výkon, především tedy dostat dobrou známku), motivace sociální (snaha zalíbit se ostatním) a další. Ať už je žákova motivace jakákoliv, bude se s ním pracovat lépe, než pokud jakoukoliv motivaci postrádá.

4 Motivace je zde chápána v pojetí (Hrabal, Pavelková, 2010).

Učitel by se měl tedy snažit žáky náležitě motivovat. Jak uvádí Hejný (2014, s. 44–45), může jít třeba o zařazení soutěže do hodiny matematiky, vložení matematické úlohy do zajímavého kontextu nebo individualizaci úlohy. Pokud ale bude žák v úlohách neustále selhávat, pravděpodobně ho to odradí od další snahy. Je tedy nezbytné, aby každý žák občas zažil úspěch, učitel by měl tedy volit úlohy přiměřené svou obtížností, což může být (především u heterogenních tříd) velice obtížné.

Hladina izolovaných modelů

Izolované modely[5] jsou jednotliví zástupci, reprezentanti pojmu, se kterými se žák setkává. Čím více těchto modelů pozná, tím lepší bude jeho následné porozumění. Například v oblasti zlomků se žáci pravděpodobně setkávají nejdříve s izolovanými modely, jako je polovina, čtvrtina, třetina, následně i tři čtvrtiny a podobně. Důležitou roli hrají i modely zdánlivé, překvapivé a ne-modely. Model zdánlivý může zdánlivě působit jako izolovaný model dané oblasti, ale není tomu tak. Příkladem může být třeba zlomek $\frac{4}{6}$, který se může jevit jako číslo sudé, tedy se jedná o zdánlivý model sudého čísla. Překvapivým modelem je třeba zlomek $\frac{95}{19}$, který je ve skutečnosti číslo 5 a ne-modelem rozumíme doplněk dané oblasti. Můžeme tedy ukázat třeba číslo π nebo jiné iracionální číslo (pokud jej už žáci znají) či alespoň upozornit na to, že ne všechna čísla se dají zlomkem zapsat.

Tato etapa však není jenom prostým sběrem konkrétních zástupců a příkladů z dané oblasti, může se zde i třeba vyjasňovat terminologie. Jednotlivé izolované modely na sebe začnou postupem času poukazovat a žák začne objevovat, že určité skupiny jsou si nějakým způsobem podobné. Žák získá do daného tématu hlubší vhled a dochází k prvnímu abstrakčnímu zdvihu – zobecnění. Do této fáze mohou žáci dojít sami, těm pomalejším je občas potřeba pomoci, například další vhodnou úlohou. Získávají tak jakési skupiny reprezentantů, jako například celé číslo zapsané zlomkem, zlomky, které jdou dále krátit, zlomky se stejným jmenovatelem, kmenové zlomky atd.

Hladina generických modelů

„Generický model[6] je prototypem buď všech, nebo jisté skupiny separovaných modelů. Může zastupovat kterýkoli ze separovaných modelů této skupiny a působí ve skupině jako její organizační agent“ (Hejný, 2004a, s. 28). Generických modelů jedné oblasti může být i víc, pro

5 Izolované modely mohou být podle starší terminologie nazývány také *separované modely*.
6 Generické modely mohou být podle starší terminologie nazývány také *univerzální modely*.

oblast zlomků se typicky používají modely počet (diskrétní model), úsečka (tyč), respektive číselná osa, dále kruh (koláč, pizza, dort), respektive ciferník a čokoláda (blíže viz oddíl 3.3). Čím více modelů žák zná a aktivně je umí použít, tím lepší by jeho vhled měl být. Postupem času by měl žák získat v dané oblasti dostatečný nadhled (i když ještě v rovině konkrétní, často za použití přirozeného jazyka), získané izolované a generické modely být schopen restrukturovat, čímž jeho poznání získá abstraktnější charakter. Dochází ke druhému abstrakčnímu zdvihu – abstrakci a žákovo poznání se posouvá do následující etapy. Pokud jsou fáze předcházející abstrakci podceněny a žákovi jsou abstraktní poznatky představeny příliš brzy, často vzniká formální poznání (viz níže).

Hladina abstraktních poznatků

Abstraktní poznatky žákovi dávají další nadhled nad celou situací. Pojmy nejsou už popisovány jazykem přirozeným, ale objevuje se i symbolický zápis, který žáci do té doby nepoužívali. Důležité je, aby abstrakce a forma zápisu nebyla žákům předčasně dána učitelem, ale aby vznikla z jejich přirozené potřeby i za cenu, že jejich symbolické zápisy budou zpočátku nepřesné, budou obsahovat obrázky apod. Konečná forma už se bez větších obtíží může zpřesnit a sjednotit.

Krystalizace

V této fázi se nově získané poznání propojuje se znalostmi, které žák získal dříve (a následně i s těmi, které získá později), a vytváří se mezi nimi vazby. Čím více takových vazeb žák ve své kognitivní struktuře má, tím přesnější a lepší jeho poznání je. Podíváme-li se na oblast zlomků a desetinných čísel, nejprve může jít o izolované modely typu $\frac{1}{2} = 0{,}5$ a $\frac{1}{4} = 0{,}25$, později se žák naučí vydělit čitatele jmenovatelem, seznámí se s periodickými čísly jako $0,\bar{3}$ nebo desetinným zápisem čísla $\frac{1}{7}$. Jde o dlouhodobý proces, který provází celé poznávání ve všech jeho dříve popsaných etapách.

Nově získané poznání je nutné trénovat a cvičit. Tato etapa se nazývá automatizace, nepatří však do poznávacího procesu, i když je nezbytnou součástí učení se.

Teorie generických modelů je pro popis formálního poznání neopomenutelná. Dává nám nástroj, jak porozumět příčinám vzniku formálního poznání, jak diagnostikovat formální poznatky, jak je reedukovat a jak předcházet jejich tvorbě (Hejný, 2004a, s. 39). Více následující oddíly.

Vymezení formálního poznání a důvody jeho vzniku

Jako formální označíme takovou žákovu znalost, která postrádá dostatečnou oporu o izolované a generické modely, a je tedy uchovávána jenom pamětně.

> Jestliže se ve vyučování etapám modelu nevěnuje dostatečný čas, jestliže je abstraktní znalost předkládána žákovi příliš brzy, nemůže žák včlenit novou vědomost do sítě již připravených konkrétních poznatků a je nucen uchopit ji pouze memorováním jako víceméně izolovaně stojící paměťový údaj, tak dochází k formálnímu poznání.
>
> (Hejný, Kuřina, 2009, s. 154)

V praxi to tedy většinou znamená jisté podcenění jednotlivých etap ve vyučování. Nejčastěji se žákům příliš brzy sdělí pravidla pro zacházení s daným pojmem, aniž by o něm měli vytvořené konkrétní a pevné představy. Hejný a Kuřina (2009, s. 154) uvádějí jako příklad předčasné sdělení pravidel o sčítání zlomků, kdy žáci začnou ve výuce trénovat pouze nácvik pravidel a jejich aplikaci, chybějící představy o zlomcích ale už nemají čas dobudovat. V tomto období znají žáci navíc pravidel málo, nedělá jim tedy většinou problém pamětně je uchovat. Pokud je jejich znalost ale pouze formální, často se stává, že pravidlo zapomenou a nejsou schopni ho rekonstruovat.

Nabízí se otázka, proč tedy k podhodnocování jednotlivých etap dochází a proč žáci nedostávají na porozumění (nejen pojmu zlomek) dostatečné množství času. Většina autorů se shoduje na stejné odpovědi – není na to čas. Učitelé musejí dodržovat učební osnovy a tematické plány, které jsou často nabité učivem tak, že prostě není čas zdržet se u zlomků déle. Stejné je to prý i u dalších oblastí, jako jsou záporná čísla, procenta, měření rovinných útvarů, kombinatoriky atp. Konkrétní představy jsou však nejen východiskem, ale i nutným předpokladem pro konstrukci abstraktní znalosti (Hejný, Kuřina, 2009, s. 154–155).

Na tomto místě je však nezbytné upozornit na několik věcí. Za prvé, slova *formální* a *neformální* vystihují dva extrémy. Realita se většinou pohybuje na škále mezi nimi, autoři tedy většinou mluví spíše o míře formálnosti či neformálnosti dané znalosti (Hejný, Kuřina, 2009, s. 149). Pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme pro zjednodušení nadále používat termínu *formální poznání*, mějme však na paměti, že míra formalizmu se u jednotlivých žáků může lišit. Za druhé, formálnost či neformálnost poznání vůbec nesouvisí s tím, zda je úloha vyřešena správně, či chybně. Například žák, který pojmu zlomek dobře rozumí, může udělat početní chybu a výsledek vypočítat špatně, na druhou stranu žák, který vůbec nerozumí algoritmu pro součet dvou zlomků, může pouhou aplikací naučeného postupu dojít k výsledku správnému. Proto je nutná učitelova hlubší diagnostika, aby formální poznání odhalil. Za třetí, při odhalování formálního poznání musíme brát v úvahu i to, zda se žák s daným tématem teprve neseznamuje a jeho poznání se teprve nevytváří. Jak říkají Hejný a Kuřina, je chyba prohlásit za formalizmus každou žákovu znalost, která není dostatečně podložena izolovanými modely. Taková je i v počátečním stádiu. Rozhodující by mělo být i „to, zda žák chce o věci mluvit, zda si chce znalost opravit, nebo zda to odmítá“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 160).

Nemoc kognitivního organizmu

Formalizmus je viděn jako nemoc kognitivního organizmu – nemá být důvodem k trestání, ale mají se hledat příčiny této nemoci, má se léčit a především je nezbytné zajišťovat prevenci. Podle autorů nemoc zpomaluje či úplně zastavuje vývoj matematických schopností žáka, ale i dalších intelektuálních schopností, „jakými jsou schopnost analyzovat problémovou situaci, schopnost třídit soubor jevů, hierarchizovat poznatky z hlediska jejich důležitosti, formulovat složitější myšlenky, tvořit hypotézy, argumentovat apod. (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 28). Nemoc má navíc tendenci se šířit. Zasáhne-li jednu oblast žákových znalostí, snadno se bude v budoucnu šířit i do oblastí dalších.

Kromě již výše popsaného má nemoc formalizmu i další projevy. Vede totiž žáka k povrchnímu pohledu na matematiku (a kromě matematiky i na další sféry života), ke ztrátě citlivosti vůči podstatám a naopak k nadhodnocování určitých méně důležitých jevů (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 28).

Diagnostika formálního poznání

Jak už bylo zmíněno výše, odhalení formálního poznání často vyžaduje vyvinutí jistého úsilí. Někdy se může projevit samo, např. při žákově odpovědi učiteli nebo při zkoušení u tabule, důležité ale je, aby to učitel zaznamenal. Hejný (2014, s. 55–57) uvádí indikátory, které často na formalizmus v žákově poznání poukazují. Patří mezi ně mimo jiné následující:

- formální poznatek není propojen na životní zkušenosti,
- formální poznatek není propojen na jiné poznatky,
- když žák formální poznatek zapomene, neumí se k němu dobrat bez vnější pomoci,
- formální poznatek není aplikovatelný v nestandardních situacích,
- není možné formální poznatek dále rozvíjet,
- žák není schopen chybný formální poznatek samostatně opravit,
- někdy žák ani není schopen poznat, že je jeho poznatek chybný.

Jindy se učitel záměrně snaží odhalit, zda žák (či žáci) určitou mírou formálního poznání trpí. Často tomu tak bývá, když se setká s novým žákem, dostane novou třídu, nebo pokud dostane podezření, že konkrétní žák může být formalizmem nakažen. Podle Hejného (2014, s. 54) to znamená, že hledá, které pojmy, vztahy, procesy a argumenty jsou formalizmem zatíženy, hledá příčiny a navrhuje způsoby reedukace. Autoři navrhují různé strategie a postupy, které je vhodné v této fázi použít, patří mezi ně běžné třídní diskuze, písemné projevy žáka, domácí úkoly a písemky (Hejný, Kuřina, 2009, s. 157), ale i různé speciální úlohy, které jsou žákům předkládány. Tyto úlohy by měly být pestré na izolované modely daného poznatku a neměly by to být standardní, typové úlohy, se kterými se žáci setkávají dennodenně, tedy např. úlohy jako objasnění paradoxu, nalezení jiného řešení, když standardní řešení selže, přenesení známí argumentace do nového kontextu, rozhodnutí o platnosti neznámé věty, vytvoření objektu požadovaných vlastností (Hejný, 2004a, s. 40–41), dále úlohy s antisignálem, vytvoření vlastní úlohy, tiskařský šotek[7], číselné hádanky[8] atp. (Hejný, Kuřina, 2009, s. 161–162).

Autoři se shodují, že choroba formalizmu má tři stádia. V prvním stádiu bývá nakažena pouze část žákových poznatků (např. pouze oblast zlomků), žák si uvědomuje, že jeho znalosti nejsou dostatečné a pokud je mu nabídnuta pomoc, uvítá ji. V tomto stádiu se pravděpodobně nachází Adam (viz Praktická část této práce). Druhé stádium bývá zlomové. Je už postižena větší část kognitivní struktury a žák se rozhoduje, zda bude s formalizmem bojovat, nebo zda se vzdá a bude se matematiku učit pouze pamětně, tedy často formálně. Hejný a Stehlíková (1999, s. 30) píší, že toto stádium bývá často spojeno právě s oblastí zlomků. V tomto stádiu se bezesporně nachází Bára. Ve třetím a konečném stádiu už žák rezignoval na chápání podstaty věcí. Učení se nazpaměť vidí jako jedinou možnost a učitelovu pomoc většinou odmítá. Vyžaduje pouze algoritmy, vzorečky a poučky, které se učí aplikovat. Tento nezájem bývá většinou způsoben žákovým pocitem, že není dostatečně dobrý, aby to zvládl jinak. V tomto stádiu se pravděpodobně nachází Cilka. Z výše popsaného jasně plyne, že formalizmus je snadnější léčit v jeho počátečních stádiích, ve stádiu třetím je to už téměř nemožné.

Jak uvádí Hejný (2014, s. 58), abychom mohli říci, že žákův poznatek je formální, musí být velmi jasně popsán proces diagnostiky. „Nestačí říct, že k diagnostice byl použit ten nebo onen indikátor, neboť dva různé testy vztahující se k témuž indikátoru mohou vest k různým diagnostickým závěrům“ (Hejný, 2014, s. 58). Jak už bylo zmíněno výše, i žák s formálním

7 tj. úloha, kde při tisku vypadl určitý znak (např. číslice, znamínko) a je třeba ho doplnit
8 např. nalézt číslice, pro které platí AA + AB = BB apod.

poznáním může úlohu vyřešit správně nebo použít danou poučku ve správnou chvíli, čímž může učitele zmást a jeho poznání může být nesprávně označeno za neformální.

V závěru je nutné zmínit, že výsledkem učitelovy diagnostiky může být i zjištění opačné, a sice že žák danému pojmu rozumí velmi dobře. V tomto případě by se měl samozřejmě snažit jeho rozvoj neutlumit a snažit se mu pomoci dále rozvíjet.

2.4. Reedukace formálního poznání

„Protože hlavní příčinou formalizmu je podle našeho názoru absence izolovaných modelů a univerzálních modelů, bude léčení nemoci spočívat především v dobudování těchto chybějících prvků poznání. Formální znalost se pak postupně stává neformální“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 167). Tento jev autoři nazývají oživením nebo také *zživotněním*. Ke zživotnění může dojít i spontánně, například při opakovaném zabývání se jedním tématem, jeho zkoumáním v jiném kontextu nebo jednoduše časem. Není tomu tak bohužel vždy, nezřídka musí do procesu zživotnění zasáhnout učitel. V praxi to většinou znamená vrátit se k základům daného tématu, případně se pohroužit až tak hluboko, abychom se mohli opřít o látku, do které má žák vhled. Žák dostává návodné otázky a gradované úlohy, aby si poznatky sám (znovu) zkonstruoval, propojil, a své formální poznání tak zživotnil. Tato cesta bývá leckdy velmi pomalá a obsahuje množství žákových chyb, kterými se nesmí nechat odradit. Pokud si žák své nedostatky uvědomuje a chce je napravit, bývá náprava téměř vždy úspěšná. Pokud si ale formalizmus ve svých poznatcích neuvědomuje nebo nepřipouští, bývá náprava obtížná, ne-li nemožná. To je konec konců velmi dobře vidět na případu Cilky (viz kapitola 5). Proč žák reedukaci odmítá, ví nejlépe on sám, často tomu však bývá na základě pocitu, že by to stejně nepochopil, nebo (jako v případě Cilky), že není potřeba tomu rozumět, když úlohy ve škole dokáže bez problému vyřešit i bez toho. To poukazuje hned na dvě jednoduchá tvrzení, sice že „formalizmus lze účinně odstraňovat jedině systematickou školní praxí; bohužel se to naší škole příliš nedaří“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 172) a že „probuzení zájmu žáků je nutnou, ne však postačující podmínkou k nastartování vzdělávacího procesu“ (Hejný, Kuřina, 2009, s. 208). Bez zájmu dítěte a motivace z jeho strany se může lektor během doučování snažit, jak jen umí, ale žákovi nepomůže.

Nejefektivnější ochrana je prevence

Autoři se shodují na tom, že prevence formalizmu je velmi jednoduchá – je nutné dát žákům čas na seznámení se s jednotlivými izolovanými modely, aby si mohli zkonstruovat modely generické a postupně se dostat až k abstraktnímu poznání. V oblasti zlomků by se žáci měli seznamovat se všemi typy modelů, jako je počet, úsečka, kruh, čokoláda apod. (blíže viz oddíl 3.3), a vracet se k nim i v dalších fázích výuky. Jednotlivé fáze poznávacího procesu se nesmí uspěchat. Žákům by se tedy neměly předkládat hotové myšlenky (algoritmy, tvrzení, definice atd.), ale měli bychom jim poskytnout dostatek času a vhodných úloh, aby k nim sami došli. (Hejný, 2004a, s. 41–42) upozorňují, že není nutné popsaný postup provádět důsledně u každého tématu, ukazuje se ale jako vhodné aplikovat jej alespoň na některé oblasti. Žáci se tak naučí se svým poznáváním pracovat i trochu samostatně a u těch oblastí, které pro ně budou problematické, si mohou další informace vyhledat sami. Je zřejmé, že konstruktivistický styl vyučování tedy vytváří vhodné prostředí pro prevenci vzniku formálních poznatků.

3. Současný stav řešené problematiky

Následující stránky jsou věnovány shrnujícímu popisu toho, co již bylo vyzkoumáno a napsáno o dané problematice. Pro větší přehlednost je kapitola rozdělená na jednotlivé oddíly, věnující se třem oblastem: doučování, formálnímu poznání a jeho reedukaci a zlomkům, které v mé práci slouží jako ukázka implementace teorie do praxe a je jim věnována praktická část.

3.1. Soukromé doučování

Již dříve jsme vymezili soukromé doučování třemi nutnými podmínkami (viz oddíl 2.1), a to:

1. jde o doučování předmětu, který je vyučován v běžné škole,
2. jde o doplněk k vyučování v běžné škole, nenahrazuje ho,
3. je poskytováno za účelem finančního zisku.

Jak se o doučování v tomto smyslu zmiňují různí autoři?

V České republice

V současné době v české literatuře pravděpodobně neexistuje žádné pojednání o individuálním doučování matematiky běžných žáků. Objevuje se nepřeberné množství článků a závěrečných prací o doučování žáků se SPU(CH) a nápravě, případně kompenzaci jejich potřeb, dále se autoři zaměřují na žáky se sociálním znevýhodněním, především na žáky Romy, žáky cizince a žáky ze sociálně slabého prostředí. Žáci se SPU(CH), stejně tak jako žáci se sociálním znevýhodněním jsou ale naprosto odlišná cílová skupina, která vyžaduje i odlišný přístup, proto se jim nebudeme věnovat. Pro doučování žáků s SPU se lze obrátit na knihy Pokorné[9] či Zelinkové[10], učení žáků Romů popisuje přehledně mimo jiné Janebová[11], případně je na místě zmínit i různé neziskové organizace, jako Step by Step ČR, Nová škola, Centrum podpory inkluzivního vzdělávání a mnoho dalších.

Korpasová (2009) provedla v rámci své bakalářské práce výzkum s devadesáti náhodně vybranými dětmi ve věku 10, 13 a 15 let. Zkoumala, jak často žáci dochází na doučování angličtiny a jaké jsou jejich důvody. Vzhledem k tomu, že jde o výuku cizího jazyka, nejčastějším důvodem je uváděno zlepšení porozumění. Naprostá většina žáků byla doučována maximálně hodinu až dvě týdně.

---

9 Např. Pokorná, V. *Teorie a náprava vývojových poruch učení a chování.* Praha: Portál, 2010.
10 Např. Zelinková, O. *Poruchy učení*. Praha: Portál, 1994.
11 Např. Janebová, E. *Vzdělávání Romů v České republice*.

Zmínit bychom měli i mezinárodní studii PISA. Nedotazuje se sice přímo na soukromé individuální doučování, nicméně určité souvislosti najít lze. Všichni testovaní žáci vyplňují dotazník, kde poskytují informace mimo jiné o svých postojích k matematice a dalšímu vzdělávání. V roce 2012 se tam vyskytly následující otázky[12]:

* Mimo školu se věnuji matematice více než dvě hodiny. (ANO/ NE)

* Kolik hodin týdně obvykle strávíš při mimoškolní výuce následujících předmětů (ČJ, M, přírodní vědy)? Jedná se pouze o předměty, které máte normálně ve škole, ale kterým mimo školní rozvrh věnuješ ještě nějaký čas navíc. Tato výuka může probíhat ve škole, doma nebo někde jinde.

* Kolik hodin týdně věnuješ práci se soukromým učitelem?

* Kolik hodin týdně věnuješ hodinám mimoškolní výuky pořádané nějakou soukromou společností a placené tvými rodiči?

Žádná z otázek výzkumu PISA se ale neptá přímo na účast žáka na individuálním doučování. Odpovědi tedy mohou zahrnovat činnosti jako například matematický kroužek či plnění domácích úkolů a nemusí se také jednat o činnosti individuální. Z výsledků studie PISA (OECD, 2013b) je patrné, že přibližně čtvrtina dotazovaných žáků občas tráví dalším studiem matematiky alespoň dvě hodiny denně. V České republice údajně 63,2 % žáků doučování matematiky v době výzkumu nenavštěvovalo, 31 % navštěvovalo 1–4 hodiny týdně (OECD, 2013a, s. 355).

Jak už bylo zmíněno, doučováním běžného, průměrného žáka se v České republice hlouběji nezabývá žádný výzkum. O reedukaci formálního poznání či přímo jeho prevenci se hovoří v pracích pouze v rámci školní výuky. Zde je nutné zmínit především teorii konstruktivizmu, které bude věnován prostor dále (viz kapitola 4).

Doučování v zahraničí

V zahraniční literatuře je situace doučování o trochu lepší. Běžně je pro popis soukromého doučování používán termín *private supplementary tutoring*, nicméně setkáme se i s jinými názvy. Bray (2013, s. 5–6) uvádí, že v zemích jako Malta, Mauricius, Pákistán a další je běžnější pojem *private tuition*, v severní Americe se zase používá *supplemental education*. V Egyptě, Itálii a na Maltě se běžně mluví o *private lessons*, v Řecku o *parallel education*. Ve Francii se prý rozlišují tři typy doučování, a to *private lessons (cours privés)*, které se zaměřují výhradně na akademické

12 čerpáno z dotazníku pro žáky, dostupný online na http://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/PISA/Datove-soubory-PISA-2012

předměty, *after-school support (soutien scolaire)*, kde se především plní dodatečné úkoly ze školy, jako domácí úkoly, a *coaching* pomáhá rozvíjet studijní styly žáků a strategie, jak se učit.

Neopomenutelnou postavou, která se již od konce minulého století oblasti individuálního doučování věnuje i teoreticky, je Mark Bray. První významná mezinárodní studie *The shadow education system: Private tutoring and its implications for planners* (Bray, 1999) byla pod záštitou UNESCO vydána právě Brayem. Kromě základního popisu informací je zde prezentováno množství výzkumů rozšířenosti doučování a důvodů, proč se ho žáci účastní. V roce 2003 vydalo UNESCO další knihu (Bray, 2003), založenou na výzkumném projektu IIEP[13] o etice a korupci v letech 2002–2007, zaměřenou tedy na negativní stránku doučování, což mělo ve světě takovou odezvu, že se výzkumu doučování začala věnovat větší pozornost. Bray uvádí, že se tématem především právě díky korupci začali zabývat nejen další autoři, ale i organizace jako World Bank, OECD[14], UNICEF, Open Society Institute a další (Bray, 2009, s. 11). Začalo se řešit, zda by pro doučování neměla platit určitá omezení. V některých zemích, například v Německu, bylo prosazeno, že učitel nesmí doučovat žáka, kterého učí v běžné škole, nebo na Slovensku jsou stanoveny podmínky pro doučování na živnostenský list, nicméně pouze pro cizí jazyky a výtvarnou výchovu. Pro všechny ostatní předměty není omezení žádné[15].

V roce 2007 pořádalo IEEP fórum *Confronting the shadow education system: What goverment policies for what private tutoring?*, z jehož příspěvků vznikla stejnojmenná publikace (Bray, 2009), obsahující především různé strategie, jak se země staví k doučování, či jak by se stavět měly. Země jsou v ní rozděleny do pěti geografických skupin, podle tradičního přístupu k doučování (Bray, 2009, s. 24):

1. Východní Asie, země jako Japonsko, Hong Kong, Korea, Tchaiwan: Doučování zde má dlouhou a silnou tradici, především díky Konfuciánství, kde je hodně ceněné vzdělání. Doučování je zde především pro školsky úspěšné žáky.
2. Země bývalého Sovětského bloku (nevyjímaje Českou republiku):
   Po rozpadnutí Sovětského svazu se zde doučování hodně rozšířilo. Bray uvádí, že pravděpodobně i proto, že učitelé jsou nuceni hledat vedlejší příjmy. Účastní se ho žáci nejrůznějších vloh a schopností.

13 IEEP – Institute for European Environmental Policy
14 OECD – Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj
15 V České republice se jedná o živnost volnou, tedy doučování lze provádět na živnostenský list bez jakéhokoliv dalšího omezení – viz IV. příloha živnostenského zákona, položka č. 72.

3. Západní Evropa, Severní Amerika a Australasie:
   Ačkoliv se fenomén doučování rozmáhá, stále je jeho výskyt nevelký. Často dochází k soutěžení mezi školami a mezi rodiči a hodně jsou podporováni neúspěšní žáci.

4. Afrika a jižní Asie:
   Doučování se objevuje v městských oblastech, často jako vedlejší příjmy pro učitele.

5. Latinská Amerika:
   Doučování je zde poměrně málo časté, s výjimkou druhého stupně, kde jej žáci navštěvují téměř pravidelně.

Tyto skupiny vyžadují podle autora různé přístupy a strategie státní správy. Vyskytují se podle něj čtyři, které je možné aplikovat na různých místech (Bray, 2003, s. 15):

1. ignorovat fenomén doučování – vláda jej nijak nereguluje
2. zakázat soukromé doučování, jako například KLDR
3. regulovat soukromé doučování – otázkou však zůstává jak, např. Mauricius a Hong Kong provedly určitá opatření na zmírnění negativních jevů doučování
4. podporovat soukromé doučování, jako například Singapur

Zajímavým počinem je projekt *No Child Left Behind* („Žádné dítě nezůstane pozadu") ve Spojených státech amerických z roku 2001. Vláda se tehdy rozhodla vyhradit nemalou částku na zaplacení doučování žákům, kteří jsou školsky neúspěšní. Bray uvádí příklad ze škol v Chicagu, kde se průměrné výsledky žáků sice mírně zlepšily, ale rozdíl nebyl takový, jaký se očekával. Problém vidí autor (Bray, 2009, s. 40–41) v některých bodech projektu, především v tom, že předměty doučování vybírali žákům rodiče, ne vždy však vybrali ty nejpotřebnější. Doučování bylo dále žákům zprostředkováno za cenu školního oběda, což i tak znemožnilo některým žákům účastnit se doučování. Lektoři prý byli různí – aprobovaní i laici, stejně tak velikosti skupin doučovaných žáků se lišily. Dále vidí problém v nejednotné evaluaci projektu, nejsou k dispozici žádné jednotné výsledky. Celý takto koncipovaný projekt tedy vidí hlavně jako reklamu pro doučovací společnosti, i když přiznává, že počáteční nápad byl více než dobrý.

Roku 2013 byl pod Brayovou záštitou vydán sborník o individuálním doučování *Private Tutoring Across Mediterranean*: *Power Dynamics and Implications for Learning and Equity* (Bray, Mazawi, Sultana, eds., 2013), kde se Bray a 24 dalších autorů vyjadřuje k problematice doučování ve 22 zemích, jako například Bosna a Hercegovina, Chorvatsko, Kypr, Egypt, Francie, Řecko, Itálie a další. Shromažďuje tak autory, kteří se do té doby věnovali doučování pouze na lokální úrovni, a jejich poznatky dává do souvislostí. Mimo editorů se na sborníku podíleli například Alexandre Ventura nebo Christina Fox.

Autorkou, která se věnuje doučování v zemích bývalého Sovětského bloku, je Iveta Silova. Neopomenutelné jsou její studie v rámci publikace *Education in a hidden marketplace* (Silova, Būdienė, Bray, 2006), kde zkoumá data mj. z Chorvatska, Polska a Slovenska, které by se svou mentalitou či geografickou polohou mohly podobat České republice. Popisuje zde, jak otevření volného pracovního trhu otevřelo prostor pro soukromé doučování, a tím ovlivnilo vzdělávání. Zahrnula i výzkumy dalších autorů, provedené mezi univerzitnímu studenty, kteří se vyjadřovali ke svému poslednímu roku studia na střední škole v souvislosti s doučováním. Autoři uznávají, že ačkoliv jsou země v lecčem odlišné, sdílí určité tradice a zvyky z bývalého socialistického režimu, které doteď ovlivňují doučování a vzdělávání obecně. Z těch pozitivních je to třeba vzdělání zdarma pro všechny děti, vysoká míra gramotnosti nebo dobrá administrativa ve vzdělávání (Silova, Bray, 2006a, s. 42), z těch negativních především přetrvávající, i když v současnosti už lehce otřásaná socialistická podoba školy jako ideální a bezchybné instituce, snížení platů učitelů a upadající status a autorita učitele (Silova, Bray, 2006a, s. 44). Poukazují také na fakt, že žáci z těchto zemí obvykle poráží ostatní žáky ve znalostech faktů, nicméně jsou slabší v aplikaci svých znalostí a mají-li sami vybrat strategii řešení, často pohoří úplně. Tato zjištění potvrzují i mezinárodní studie PISA a TIMSS prováděné v České republice, a podle Silové a Braye tak ukazují na to, že školní kurikula jsou přeplněná zbytečnými encyklopedickými informacemi, které žáci v reálném životě nevyužijí (Silova, Bray, 2006a, s. 50).

Všichni autoři, zabývající se doučováním, se shodují na jednom – doučování má všude ve světě dlouhou historii, ale je často opomíjeno, především co se týče dalšího výzkumu. Několik málo mezinárodních výzkumů provedeno bylo (Bray, 2009, s. 98), zmíněna už byla PISA, mimo Českou republiku je to ještě například SACMEQ[16], který obsahuje otázky ohledně doučování, včetně dotazu, zda je doučování placeno. Open Society Institute již dvakrát pořádal obdobný výzkum, jako provedla Silova, tedy zaměřený na vysokoškoláky v prvním roce studia na univerzitě, aby reflektovali svůj poslední ročník střední školy.

Obecně lze ale říci, že fenomén doučování je prozkoumaný málo. Proč je tomu tak? Bray vysvětluje, že je především obtížné získat spolehlivá data, protože velká část doučování je prováděna na neformální bázi, což znamená, že lektoři často nejsou registrovaní, tím pádem neplatí daně, čímž se většinou raději vyhýbají pozornosti (Bray, 2010, s. 63). Spekuluje tedy, že doučování

16 SACMEQ – Southern and Eastern Africa Consortium for Monitoring Educational Quality

je nejspíš mnohem rozšířenější, než dosavadní výzkumy ukazují. Žáci, stejně tak i jejich rodiče, se také můžou za doučování stydět, protože mohou buď působit hloupě, nebo se jim může zdát „nefér“ vůči ostatním žákům, že mají hodiny vzdělávání navíc. Pokud už navíc nějaký výzkum proveden je, může být zavádějící, jelikož otázky spojené s doučováním často záleží na paměti rodičů, nebo dokonce samotného žáka, což může výsledky zkreslit. Tomuto se jde částečně vyhnout, budeme-li údaje pro výzkum čerpat z databáze doučovacích společností, které si vedou záznamy o svých klientech (Bray, 2009, s. 94). Tak jako tak, další výzkum je zcela jistě vítaný.

3.2. Formální poznání a jeho reedukace

Formální poznání je velmi úzce spjato s teorií konstruktivistického vyučování, kterou jako první začali v České republice rozvíjet Hejný a Kuřina. Vyučování založené na konstruktivizmu (blíže viz kapitola 4) je údajně výbornou prevencí formalizmu, jelikož správným dodržováním jednotlivých etap poznávání nepřipouští vznik formálních poznatků (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 33). Při formulování tzv. konstruktivistického desatera autoři dokonce formální poznání zahrnuli a formulovali na jeho základě bod číslo deset:

> Vyučování, které má charakter předávání informací (vyučování transmisivní), nebo vyučování, které dává pouze návody, jak postupovat (vyučování instruktivní). Vede především k ukládání informací do paměti. To umožňuje v lepším případě jejich reprodukci (např. U zkoušky), obvykle však dochází k jejich rychlému zapomínání a zřídkakdy k jejich netriviálnímu využití. Takové poznání je pseudopoznáním, je poznáním formálním. (Hejný, Kuřina, 2009, s. 195).

Už v roce 1999 napsali Hejný a Stehlíková následující: „nemoc formalizmu je, podle našeho přesvědčení, nejvážnější didaktický problém současného vyučování matematice. Úlohou výzkumu je odhalovat příčiny této nemoci a hledat prevenci i reedukační postupy“ (Hejný, Stehlíková, 1999, s. 29). Od té doby vznikla celá řada publikací, které se formálním poznatkům a především jejich prevenci alespoň částečně věnují. Jako příklad můžeme uvést publikace (Hejný, Novotná, Stehlíková, eds., 2004; Hejný, Kuřina, 2009; Vondrová, 2014; Hejný, 2014) a mnoho dalších.

Jak již bylo řečeno, neopomenutelnou roli v tematice formálního poznání hraje Hejného teorie generických modelů (viz oddíl 2.3, s. 18). Tato teorie slouží jako nástroj pro porozumění příčinám vzniku formálního poznání, pro diagnostiku a reedukaci formálních poznatků a pro prevenci jejich tvorby. Problematika formálních poznatků je tedy zmiňována téměř v každé publikaci zabývající se touto teorií. Autoři se většinou věnují více či méně do hloubky tématům, jako proč ke vzniku formálních poznatků dochází, jak je lze diagnostikovat, jak by se měly reedukovat a zživotnit a především jak jim předcházet. Na druhou stranu, autoři se málokdy uchylují ke konkrétním návodům, jak by se formální poznání v nějaké dané oblasti dalo reedukovat. (Hejný, 2004b, s. 61) uvádějí, že „mluvit o návodu na konstruktivistické vyučování je vnitřně sporné, protože podstatou tohoto přístupu k procesu učení a učení se je autentičnost, hledání, bohaté využívání vlastních zkušeností. Jakákoli z vnějšku převzatá instrukce ruší klima konstruktivizmu. Z vnějšku lze přijímat pouze impulzy". Pokud se ale jedná o reedukaci formálních poznatků a ne o vyučování samotné, situace by mohla být jiná. Je zřejmé, že reedukace musí probíhat jinak v každé oblasti matematiky a specificky u každého konkrétního žáka, nicméně určitá série typů a konkrétních úloh by usnadnila práci lecjakému učiteli či lektorovi. I to je jeden z důvodů, proč jsem o podobný návod, i když zacílený pouze na tři konkrétní žáky, pokusila.

V nejnovější publikaci Hejného (2014) byla teorie generických modelů mírně upravena a propracována. Do této doby bylo na krystalizaci nahlíženo jako na poslední etapu modelu, následující po hladině abstraktního poznání, nicméně zde autor uvádí, že vhodnější je vidět krystalizaci jako fázi prostupující všemi etapami modelu, probíhající permanentně od samého začátku poznávání. Tato úprava se zdá být smysluplná a vhodná, proto je v této práci teorie generických modelů od počátku představována a používána s touto změnou. V Hejného monografii došlo také k upřesnění terminologie, a to následujícím způsobem:

> *Poznatek* je každý prvek nebo klastr prvků (tj. shluk prvků, které mohou být různě propojeny) v dlouhodobé paměti člověka.
>
> *Informace* je poznatek, který do paměti vstoupil zvenčí a oporu v již existujících izolovaných modelech a generických modelech si teprve musí hledat; mnohdy ale k tomuto hledání ani nedochází.
>
> *Znalost* je poznatek, který si člověk zkonstruoval sám vlastní intelektuální činností pomocí existujících izolovaných a generických modelů.
>
> *Formální poznatek* je informace, která mohla být znalostí.
>
> (Hejný, 2014, s. 54)

Všichni výše zmiňovaní autoři se shodují na tom, že nezbytným prvkem reedukace formálního poznání je žákova motivace. Mé případové studie to jen potvrdily. Již dříve byly zmíněny určité návody a rady, jak žáky v hodinách matematiky motivovat, přesto je ale oblast motivace záležitostí velmi subjektivní a závisí na konkrétním žákovi. Této tematice se v České republice hlouběji věnuje Pavelková, která provedla i množství výzkumů žákovské motivace (část z nich je dostupná v (Hrabal, Pavelková, 2010)) a přiznává, že učitelé často pracují pouze s krátkodobou žákovskou motivací, což podle ní není ideální. Motivace krátkodobá by se měla kombinovat s dlouhodobou, což je bohužel úkol nelehký (Hrabal, Pavelková, 2010, s. 148–149).

V souvislosti s formálním poznáním bychom neměli opomenout zmínit i pojetí psychologické. Uvedeme Marešovo pojetí přístupu k učení, který dělí na povrchový a hloubkový. Povrchový styl „se opírá především o pamětní učení, memorování, o rozšiřování poznatků bez větší snahy dobrat se jejich smyslu“, a staví často na mechanickém biflování (Mareš, 2013, s. 108). Hejný a Kuřina (2009, s. 145) dodávají, že takto získané poznatky jsou formální, žáci neumí rozlišit, co je podstatné a co není, uvádí málo nebo hodně detailů a učivo brzy zapomínají. Hloubkový, neboli rozumějící styl „vychází ze snahy postihnout smysl učiva, porozumět mu, rozumět jevům i světu kolem sebe“ (Mareš, 2013, s. 108). Analogicky ke stylu povrchovému můžeme dodat, že žáci jsou takto k poznávání více motivováni, chtějí učivu rozumět, zabývají se jím do hloubky a jejich poznatky jsou spíše neformální.

3.3. Zlomky

V České republice

Tématem zlomky se žáci v České republice zabývají zpravidla až v sedmém ročníku. Nicméně s jednotlivými izolovanými modely, jako je polovina, třetina apod., i když třeba ne s jejich formálním zápisem, se setkávají mnohem dříve. V roce 2013 bylo nově zařazeno základní seznámení se zlomky už do 2. období 1. stupně, tedy do 4. a 5. ročníku. Podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV) žák po ukončení tohoto období „modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku“ a „porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel“ (RVP ZV, s. 28). Autoři se nicméně většinou shodují na tom, že propedeutika pojmu zlomek je v českém školství podceněná (Hejný, 2014, s. 149; Hejný, 2004c, s. 350; Tichá, Macháčková, 2006, s. 10; a další). Podle Hejného by už žáci v prvním ročníku mohli získat dobrou představu o zlomcích pomocí spravedlivého dělení celku na části, především pomocí manipulace a dramatizace (krájení, stříhání, rozdělování). Žáci tak přirozeně získají představu o základních vztazích, jako je polovina + polovina = celek (Hejný, 2014, a. 149).

V českém školství tomu tak bohužel není, i proto jsou zlomky často zařazovány do vůbec nejobtížnějších oblastí matematiky základní školy. Rendl a Vondrová o nich hovoří jako o jednom z kritických míst matematiky[17] základní školy, dokonce se jedná o oblast aritmetiky, kterou při rozhovorech o krizových místech učitelé zmiňovali nejčastěji (Rendl, Vondrová, 2013, s. 7–8).

---

17 Kritické místo je oblast matematiky, „kde žáci často opakovaně selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě“ (Rendl, Vondrová, 2013, s. 7–8).

Tichá a Macháčková (2006, s. 3) dokonce zmiňují, že se občas objeví názory, zda by se zlomky neměly z matematiky základní školy pro jejich obtížnost vypustit úplně. Jako argumenty uvádějí následující důvody:

- obtížnost a přílišná náročnost tematického celku na čas i energii, kterou potřebují žáci k osvojení tohoto učiva,
- nízká úroveň dosažených výsledků, která neodpovídá vynaloženému úsilí,
- využívání desetinných čísel (a nikoli zlomků) v nejrůznějších oblastech lidské činnosti a dostupnost kalkulaček pro všechny žáky, čímž roste význam desetinných čísel a zvládnutí technik operování s nimi a zlomky ustupují do pozadí.

Proč tedy zlomky i nadále zůstávají součástí školního kurikula? Tichá a Macháčková (2006, s. 3) uvádějí, že zlomky mají nesporný význam pro propedeutiku algebry a pro rozvíjení funkčního myšlení a některé zlomky jsou navíc hojně využívány v praxi. Podotýkají, že výše zmíněné důvody jsou tak zásadní, že zlomky ze školního kurikula pravděpodobně odstraněny nebudou.

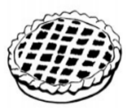
Otázkou zůstává, proč jsou zlomky pro žáky tak obtížné. Hejný zmiňuje, že příčinou je zanedbávání samotné představy pojmu zlomek. Místo toho se čas tráví nacvičováním algoritmů pro operace se zlomky, kterým ale žáci nemají dostatek času porozumět, učí se je pamětně a rychle je zapomínají (Hejný, 2014, s. 205). Učitelé vidí jako problematické především osvojování si základních početních operací, respektive každou zvlášť žáci většinou zvládnou, problémy ale způsobuje jejich kombinace a také operace využívající ekvivalence zlomků, jako je krácení a převod mezi zlomkem a smíšeným číslem (Rendl, Vondrová, 2013, s. 74). To jen podtrhuje argument, že žáci se algoritmy pro zlomky často učí nazpaměť, čímž vzniká formální poznání, které rychleji zapomenou. Žáci nejsou schopni algoritmy a pravidla znovu odvodit. Rendl a Vondrová dodávají, že pro žáky bývá také velikou překážkou formální zápis zlomku (2013, s. 74). Podle mnohých autorů (Hejný, 2014, s. 205; Hejný, 2004c, s. 345) jsou zlomky v pamětích žáků uloženy ve dvou různých a vzájemně nepropojených kontextech. První z nich je představa zlomku jako část běžného života – zde se vyskytují zlomky jako polovina, třetina, tři čtvrtiny apod., které si žáci spojují s reálným předmětem nebo s jeho generickým modelem. S těmito zlomky dokáží jednoduše manipulovat, jako například rozdělit třetinu koláče napůl. Zlomky „nehezké" bývají ale uloženy v kontextu školním. Pod zlomkem, jako je sedm devítin, si žáci často nic nepředstaví a nedokáží jej vztáhnout k reálné situaci, umí na něj pouze aplikovat pravidla, která jsou jim ve škole předkládána. Zlomek je pro ně pouze jakási dvojice čísel, čitatel a jmenovatel. Je proto nezbytné tyto dva kontexty u žáků propojovat a především zjistit, proč se žáci často nesnaží o to, aby zlomky sami pochopili.

Jako další důvody obtížnosti zlomků bývá zmiňována i neznalost předchozí látky (jako je dělitelnost a násobilka), dále nedostatky z prvního stupně, kde se zlomek zavádí jako část celku, nedostatečná práce se zlomky většími než jedna a mizivá reprezentace zlomků na číselné ose (Rendl, Vondrová, 2013 s. 76–84). Problematický pro žáky bývá i složitý celek. Pokud není (diskrétní nebo spojitý) celek prostý, „jako dort, tyč, čokoláda, chléb, sáček bonbónů, […] jakmile […] je celkem něco, co není jasná jednotka, tak se pojem „celek“ stává náročným. […] Například otázka „kolik je třetina z poloviny?“ je náročná tím, že třetina se nebere z prostého celku, ale ze složitého celku, kterým je polovina (nějakého prostého celku)“ (Hejný, 2013, s. 208).

Zlomky v zahraničí

Jak zmiňují například (Tichá, Macháčková, 2006, s. 4), v zahraničí je oblasti zlomků a jejich didaktice věnována mnohem větší pozornost než v České republice. Vhodné je zmínit například Lamonovou a její publikaci *Teaching Fractions and Ratios for Understanding* (Lamon, 2006), která podává opravdu shrnující pohled na celou problematiku zlomků, včetně analýz žákovského myšlení před, během i po seznamování se se zlomky, dále typů, jak lze vyučování realizovat, a zajímavých, atypických úloh, které lze ve vyučování použít. Mimo jiné rozlišuje Lamon důkladněji různé druhy prostého a složitého celku (Lamon, 2006, s. 68–69), konkrétně následující:

- jedna spojitá jednotka, jako jeden koláč

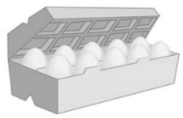


- více než jedna spojitá jednotka

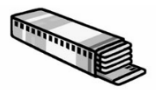
- jeden nebo více spojitých objektů, které jsou děravé nebo předrozdělené, jako tabulka čokolády

- diskrétní objekty (oddělené věci, odlišitelné části), jako bonbóny

- diskrétní objekty, obvykle uspořádané určitým způsobem, jako bonboniéra nebo krabička vajec

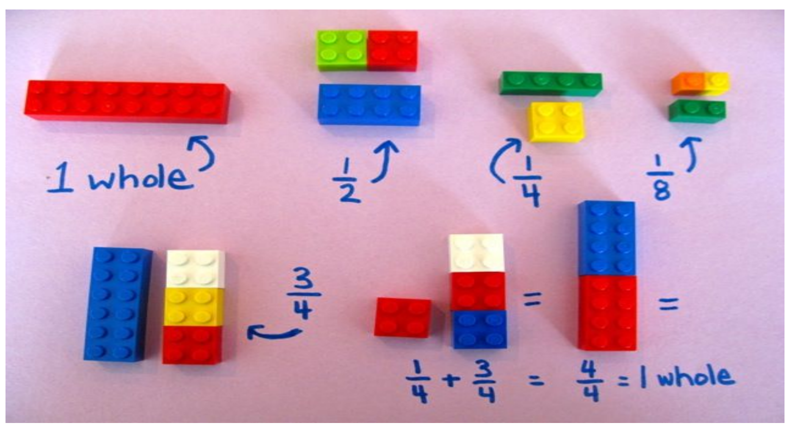


- složené jednotky, což jsou jednotky složené z balení, které v sobě mají více objektů, jako balíček tří dortíků nebo balíček žvýkaček



(Lamon, 2006, s. 68–69, překlad autorka)

Zdůrazňuje také různé interpretace zlomků, jako vztah část-celek, veličina, operátor, poměr apod., což, jak zmiňují Tichá a Macháčková (2006, s. 4), patří mezi nejčastější neporozumění zlomkům. Rozdíl mezi zlomkem jako částí jednoho a částí více celků není v našich učebnicích příliš známý a používaný, například v Německu je ale používán běžně.



Obr. 1 (Zimmerman, 2013)

Ze zahraničních zdrojů lze také čerpat inspiraci pro alternativní a doplňkové aktivity k tematice zlomků, které se v českém prostředí příliš nevyskytují. Velmi atraktivní by se žákům mohlo zdát použití kostiček LEGO (Zimmerman, 2013). Autorka zde navrhuje používání kostiček různých tvarů pro manipulaci s celkem a jeho částmi, ale i se smíšenými čísly a pro ukázku ekvivalence dvou zlomků (viz obr. 1).

Jako další zajímavý zdroj uvedu online applet Fraction Matcher[18]. Jde o aplikaci jak k procvičení zlomků, tak smíšených čísel. Každá část je rozdělená do osmi úrovní podle obtížnosti.

18 Dostupný online z: http://phet.colorado.edu/sims/html/fraction-matcher/latest/fraction-matcher_en.html.

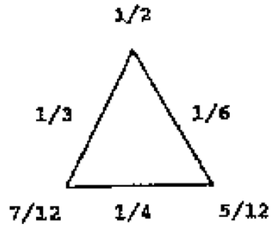
Žáci mají vždy za úkol utvořit pět dvojic ekvivalentních zlomků. Tyto zlomky jsou zapsány jednak čísly, jednak zakresleny různými modely obrázkem. Applet se mi zdá vhodný v tom, že ukazuje různé modely zlomku a zábavnou formou vede žáky k pochopení podstaty ekvivalence dvou zlomků. Obdobných appletů je k dispozici beze sporu spousta, na Fraction Matcher je ale cenné, že reprezentuje zlomky různými modely, jako je kruhový, čtvercový, čokoláda, úsečka i různé složitější obrazce.

Jakým způsobem by se tedy měly zlomky učit?

Již dříve jsme ukázali, proč je vhodné držet se metod konstruktivistické výuky. V praxi to znamená, že bychom žákům neměli sdělovat nebo jinak předávat ideu toho, co to zlomek je, ale měli bychom začít činnostmi (řezáním, dělením, krájením, ...), které k tomuto pojmu vedou, především tedy spravedlivým dělením celku na části (Tichá, Macháčková, 2006, s. 8). Mnozí autoři (Hejný, 2014, s. 208; Tichá, Macháčková, 2006, s. 20) doporučují začínat s výukou zlomků co nejdříve a především budovat představu kmenového zlomku. *Kmenový zlomek* je pojem zakotvený ve starém Egyptě, kde se používaly pouze zlomky s čitatelem rovným jedné (některé zdroje hovoří ještě o zlomku $\frac{2}{3}$).Výzkum ukazuje jako vhodné začínat budování pojmu zlomek právě pomocí kmenových zlomků. Často jsou používány úlohy o spravedlivém dělení chleba. Úkolem je rozdělit určitý počet chlebů co nejmenším počtem řezů, aby každý dostal stejný počet částí stejného tvaru[19]. Hejný (2014, s. 208) dodává, že v těchto úlohách se navíc pracuje se složitým celkem, který si žáci tímto způsobem velice snadno osvojí. V současnosti se pojem kmenový zlomek často používá jen jako předstupeň pojmu zlomek. Než se ale žáci s tímto pojmem dostatečně seznámí, jsou jim předkládány izolované modely zlomků s jinými čitateli, což u mnohých žáků způsobuje tápání a nejasnosti, které mohou vyústit v pamětní učení pravidel, a tedy vznik formalizmu (Hejný, 2004c, s. 348–350). Je tedy vhodné nepodcenit etapu kmenových zlomků a nechat žákům dostatek času na seznámení se s tímto důležitým vývojovým mezníkem. V návaznosti na kmenové zlomky lze žákům předkládat množství atraktivních úloh a hádanek, jako jsou již zmiňované egyptské úlohy o dělení chleba (viz výše), nebo egyptské trojúhelníky a čtverce (Tichá, Macháčková, 2006, s. 18):

> Ke stranám trojúhelníku (čtverce) jsou napsány navzájem různé kmenové zlomky. Zlomky napsané u dvou (sousedních) stran sečteme. Výsledek napíšeme k vrcholu, ve kterém se tyto dvě strany protínají.

19 Tedy úlohy typu: Jak spravedlivě rozdělit 2 chleby mezi 3 lidi? Každý potom dostane polovinu a třetinu poloviny, tedy šestinu chleba. Některé úlohy mohou mít i různá řešení.



Pokud u všech vrcholů dostaneme kmenové zlomky, budeme mluvit o „egyptském"

trojúhelníku (čtverci).

(Tichá, Macháčková, 2006, s. 18)

Tyto úlohy mohou sloužit jako výborná motivace a přenesení matematiky do jiného kontextu. Další zajímavé úlohy procvičující různé typy celků jsou k dispozici v příloze 2.

Další nezbytnou dovedností, kterou je třeba u žáků rozvíjet, je používání různých generických modelů zlomků. Různí autoři rozlišují různé modely, pro účely této práce bude nezbytné rozlišovat tyto:

a) <u>diskrétní modely</u>:

počet uspořádaný – diskrétní jednotky uspořádané podle určitého schématu

počet neuspořádaný – diskrétní jednotky volně „rozsypané" vedle sebe

b) <u>spojité modely</u>:

úsečka (tyč) – určitou modifikací tohoto modelu je *číselná osa*, na rozdíl od úsečky obsahuje jednotku

kruh (koláč, pizza, dort) – model dělíme spojnicemi středu a bodů na obvodu kruhu, určitou modifikací je *ciferník*, který obsahuje po obvodu 60 dílků (minut), je tedy vhodný pro zlomky se jmenovatelem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30 a 60

obdélník – model dělíme spojnicemi bodů na obvodu

čokoláda – na rozdíl od obdélníku má předrozdělené dílky, podle kterých se dá dělit svisle a/nebo vodorovně

Je nezbytné používat všechny základní modely zlomků, čímž se zamezí jednostranné představě. Ze zkušeností se ukazuje jako nejobtížnější zobrazení zlomku na číselné ose, bylo by tedy vhodné vždy kombinovat zobrazení jednotlivých modelů i se zobrazením na číselné ose (Vondrová, Žalská, 2013, s. 84).

Jako vhodné se ukazuje i grafické zobrazování operací se zlomky, které bývá ve školách zanedbáváno (Rendl, Vondrová, 2013, s. 130). Autoři dále podotýkají, že pokud už ke grafickému zobrazování operací dochází, pak jde většinou pouze o sčítání nebo odčítání zlomků menších než jedna, a to převážně na koláčovém modelu. Zde se opět dostáváme k doporučení používat více číselnou osu. Samotnému zavádění číselných operací se zlomky není v této části diplomové práce věnován prostor. Určitá doporučení lze najít v oddílu 5.2 v rámci oblastí 3 a 4.

Už dříve bylo zmíněno, že u žáků můžou působit jisté zmatení i různé možnosti interpretace zlomku. Svobodová ve své diplomové práci (2014, s. 32–46) věnuje těmto způsobům interpretace celou kapitolu a zmiňuje, jak by bylo vhodné na tyto rozdíly upozorňovat. Pojednává o vztahu celek-část (využitelné např. pro sčítání), zlomek jako podíl (dělení kuliček mezi děti), jako operátor (využitelné např. pro násobení zlomků), zlomek jako kvantitativní údaj u veličin (údaje typu půl kilometru, využitelné třeba pro práci s číselnou osou) a zlomek jako poměr (dvě části, které tvoří celek). Na závěr klade otázku, zda je opravdu nutné, ba přímo vhodné seznamovat žáky se všemi těmito interpretacemi.

V neposlední řadě upozorňují mnozí autoři na to, že práci se zlomky je nutné založit na činnostním základě, tedy na manipulaci se skutečnými předměty. Tak si žáci dokáží pod tímto pojmem opravdu představit něco konkrétního. Pokud budeme výše zmíněné zásady a doporučení při výuce zlomků dodržovat, mělo by se porozumění žáků v této oblasti zlepšit a měli bychom se vyvarovat vzniku formálních poznatků.

4. Konstruktivistické přístupy k výuce

V průběhu celé práce zmiňujeme konstruktivistické pojetí výuky a mlčky předpokládáme, že čtenář rozumí. Nyní je ale na čase zařadit i nějaké informace o konstruktivizmu. Jde o teorii rozsáhlou a za několik desetiletí své existence do detailů popsanou, proto je důkladněji zahrnut jenom popis jednoho jejího typu a jeho nejdůležitějších myšlenek s důrazem na výuku matematiky.

Stehlíková (2004, s. 13) uvádí, že počátky konstruktivizmu jsou ve světě spojeny se jmény, jako je Davis, Mahler, Noddings, Glasserfeld, Bertrand, Ernest a další, v České republice jsou to pak především jména Kuřina a Hejný. Tím, že byla (a stále je) tato teorie rozvíjena velkým množstvím lidí, vydělilo se v rámci konstruktivizmu několik proudů, jako například sociální a kognitivní konstruktivizmus, ale také konstruktivizmus radikální nebo didaktický. Kalhoust a Obst (2009, s. 56–57) upozorňují, že konstruktivizmus sám o sobě není teorií vzdělávání, ale umožňuje pro vzdělávání formulovat významné závěry. Hejný a Kuřina si právě tyto závěry plynoucí z teorie konstruktivizmu vzali za své a vytvořili teorii *didaktického konstruktivizmu*. Formulovali tzv. *desatero didaktického konstruktivizmu* neboli zásady, které popisují přístup k vyučování matematiky:

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Poznání založené na reprodukci informací vede k pseudopoznání, k formálnímu poznání.

(Hejný, Kuřina, 2009, s. 194–195, cit. podle Stehlíková, 2004, s. 13)

Z výše uvedeného je zřejmé, že didaktický konstruktivizmus (dále zmiňován jen jako „konstruktivizmus“) je v souladu s genetických způsobem narůstání kognitivní struktury (Hejný, 2004a, s. 27). Ten předpokládá, „že jednotlivé poznatky se tvoří postupně a v průběhu svého formování se navzájem propojují vazbami funkčnosti, časové následnosti, logické závislosti, důležitosti, … a vytvářejí strukturu. Ta se neustále variuje, dotváří a upravuje. Neúspěšné cesty za poznáním jsou stejně důležité jako ty úspěšné, protože bez poznání, které přináší analýza chyby, nelze dojít k poznání pravdy. Zvláště důležité jsou situace, kdy v důsledku zásadně nového pohledu na určitou oblast poznatků v ní dochází k restrukturaci“ (Hejný, 2004a, s. 27). Žák je v konstruktivistickém pojetí výuky často připodobňován k postavě vědce. Reaguje na situace, které jsou před něj předkládány, utváří si o nich hypotézy, které buď potvrzuje, nebo vyvrací, a vytváří tak nové poznatky (Hejný, Kuřina, 2009, s. 23). Organizační forma výuky probíhá často formou skupinové práce, běžná je i metoda kooperativního vyučování. Důležitou roli zde hraje učitel, který žákovi předkládá problémové situace, případně mu je pomáhá vyřešit. Žákova chyba je viděna jako krok, který je nezbytný k dosažení úspěchu. Zde je obzvláště důležité žáka za jeho chybu nekárat, naopak ho přivézt k pochopení, kde se chyba stala. Školní prostředí by tedy mělo u žáků probouzet především zvídavost, aby je chyba neodradila, ale naopak je podnítila k dalšímu objevování.

Kritika konstruktivizmu

Jako každá teorie, i konstruktivizmus má svou kritiku. Nejčastější argumenty zmiňují Kalhous a Obst (2004, s. 56–57):

- konstruktivizmus není teorií vzdělávání, pouze umožňuje formulovat nějaké závěry pro vzdělávání vhodné
- jelikož jde o teorii, postupy se v praxi mohou ukázat jako málo efektivní
- je nutné ověřit, zda změnou osvědčených vyučovacích metod nedojde ke zhoršení studijních výsledků žáků
- ne všichni žáci musí být schopni formálních logických operací v plné míře

Je zřejmé, že až čas ukáže, zda jsou tyto obavy opodstatněné. Do té doby bychom se měli snažit rozvíjet logické myšlení žáků a jejich motivaci v matematice, jak jen je v našich silách.

Konstrukce vs. transmise

Kalhoust a Obst (2009, s. 49) vymezují konstruktivizmus jako snahu o překonání transmisivního vyučování. Toto vymezení si žádá bližší komentář.

Pojmy konstrukce a transmise nejsou viděny jako dva oddělené způsoby výuky, ale častěji jako dva extrémy. Málokteré vyučování je čistě konstruktivistické, naopak málokdy je vyučování čistě transmisivní, běžně se pohybujeme na škále mezi těmito dvěma póly. Pro zjednodušení často mluvíme o konstruktivistickém, respektive o transmisivním vyučování, i v případě, že se pouze blížíme k jednomu z těchto dvou extrémů.

Na rozdíl od konstruktivizmu, transmise razí zásadu, že žáci by měli přijít do styku pouze s hotovými a pravdivými poznatky, které přejmou od učitele. Učitel je viděn jako autorita, expert ve své oblasti, který matematické poznatky didakticky transformuje a předá je žákům takovým způsobem, aby je byli schopni přijmout. Hejný a Stehlíková (1999, s. 33) ukazují zjednodušený model rozdílů mezi konstruktivistickým a transmisivním vyučováním, který snad nepotřebuje další komentář:

polaritní dipól	**konstruktivistické vyučování**	**transmisivní vyučování**
hodnota poznání	*kvalita*	*kvantita*
motivace	*vnitřní*	*vnější*
trvanlivost poznání	*dlouhodobá*	*krátkodobá*
vztah učitel-žák	*partnerský*	*submisivní*
klima nositel aktivity	*důvěry* *žák*	*strachu* *učitel*
činnost žáka	*tvořivá*	*imitativní*
poznatek žáka	*produktivní*	*reproduktivní*
nosná otázka	*co? a proč?*	*jak?*

Podle Hejného (2004a, s. 27) se nemálo učitelů ztotožňuje se zásadami transmisivního stylu výuky, mezi něž patří:

- žák musí přijmout co nejvíce konkrétních poznatků,
- žák musí být chráněn před nehotovými a chybnými představami,
- vše, co si žák zapamatuje, musí být bezchybné a přesné,
- žák nesmí pracovat s poznatky, které jsou výsledkem jeho spekulací, vše mu musí být jasné,
- matematika musí být prezentována jako dokonalá.

Kuřina mluví o realistickém konstruktivizmu, který se může zdát pro reálné podmínky ve školách vhodnější. Připouští, že určité části učiva nejdou předat jinak než transmisí, mluví třeba o získávání informací z učebnic, z jiné literatury a případně i z internetu, což by žákům nemělo být cizí. Vyzdvihuje jak formativní aspekty vzdělávacího procesu, tak úroveň a kvalitu žákovských poznatků (Hejný, Kuřina, 2009, s. 209).

Z výše uvedeného jasně vyplývá, že transmisivní výuka bývá zdrojem nechtěného formálního poznání, je proto doporučeno se jí vyhýbat. Jádrem vyučování by neměla být učitelova prezentace, ale série gradovaných úloh, které žáky vhodně navedou ke kýženému poznání. Je však nutno zmínit, že žádná metoda nevyhovuje všem žákům. Vždy se najdou tací, kteří budou vyžadovat poučky, černobílá pravidla a algoritmy, které budou chtít aplikovat, aniž by jim bylo nutné rozumět. Naším úkolem by však mělo být redukovat počet těchto žáků a snažit se je motivovat k poznávání a objevování krás matematiky.

4.1. Podnětná výuka

Konstruktivistický přístup k vyučování, kde je důraz kladen především na žákovo pochopení a porozumění dané oblasti matematiky, se běžně nazývá *podnětná výuka*. Tento termín navrhla jako překlad anglického *investigative teaching* J. Cachová (Stehlíková, 2004, s. 13). Vondrová (2014, s. 11–15) shrnuje své pojetí podnětné výuky z hlediska učitele a jeho činnosti ve výuce následovně:

Učitel probouzí žákův zájem o matematiku a její poznávání, bez zájmu a motivace totiž proces poznávání nefunguje. Nejúčinnější je motivace z radosti z úspěchu, ať už se nám v našich očích zdá jako mizivý. Každý žák by tedy měl občas zažít v hodinách matematiky úspěch.

Učitel žákům předkládá podnětná prostředí a úlohy, kterými žáci rozvíjí své matematické myšlení, a ze známých poznatků a zkušeností tak konstruují poznatky nové.

Učitel podporuje žáky v jejich aktivním přístupu k učení se. Žák by měl opravdu přemýšlet, vytvářet a ověřovat hypotézy a vyvinout úsilí, aby se dopátral podstaty problému. To je spojeno s rozvíjením kritického myšlení u žáků.

Chyba je viděna jako přirozené vývojové stádium, ve kterém se zrcadlí aktuální stav žákova chápání a poznání. Pro učitele i pro žáka by tedy měla být impulzem k další práci, pro učitele k volbě dalších úloh, pro žáka k objevení chyby a poučení se z ní.

Učitel by měl u žáků diagnostikovat jejich porozumění danému tématu. Pro to jsou většinou nezbytné nestandardní úlohy, které odhalí nejen neporozumění, ale i formální poznatky (viz oddíl 2.3).

Podle RVP by měl učitel rozvíjet u žáků komunikativní kompetenci, i v matematice je tedy nezbytné, aby žáci uměli diskutovat, podepřít své názory argumenty a vyvracet argumenty ostatních. Učitel by měl tyto diskuse iniciovat (pokud se toho neujme samotný žák) a moderovat.

Pro realizaci podnětné výuky je samozřejmě nezbytné brát v úvahu i samotného žáka a konkrétní třídu, jejich vztahy a celkové klima ve třídě, momentální náladu a rozpoložení, únavu, vyučovací styl učitele a mnoho dalších faktorů.

Praktická část

5. Tři případové studie – Adam, Bára a Cilka

Praktická část mé práce je založena na případových studiích tří žáků – Adama, Báry a Cilky. U všech těchto žáků jsem diagnostikovala formální poznání v oblasti zlomků. Se všemi třemi bylo tedy soustavně pracováno během hodin soukromého individuálního doučování, na které docházejí jednou týdně. V průběhu jednoho pololetí u Báry a Cilky a jednoho školního roku u Adama jsme se pokusili jejich formální poznatky v této oblasti zživotnit a celkově zlepšit jejich vztah k matematice. U dvou z těchto žáků (u Adama a Cilky) proběhl vstupní diagnostický test a na konci školního roku si všichni tři napsali závěrečný test, který měl za cíl odhalit zbylé formální poznání.

Důležité je zmínit, že pouze Adam věděl o tom, že jeho hodiny jsou nahrávány kvůli výzkumu právě v oblasti zlomků. Děvčata věděla, že jde o výzkum do diplomové práce, ale nebylo jim známé, ze které oblasti matematiky. Všichni rodiče byli taktéž informováni pouze o účasti svých dětí ve výzkumu, ale ne o konkrétním zaměření. Vzhledem k tomu, že všichni tři žáci na doučování docházejí primárně kvůli obtížím, které mají v běžné škole a výzkum k mé diplomové práci byl jen aktivitou navíc po splnění všech ostatních povinností, práci se zlomky a reedukaci formálního poznání jsme se bohužel nemohli věnovat každou hodinu. Převážně jsme každý týden našli alespoň 10–15 minut, kdy jsme mohli pracovat na reedukaci, v ostatních případech jsem se snažila do jiných úloh alespoň zařadit práci se zlomky. Ačkoliv šlo tedy o práci dlouhodobou, většinou nebyla příliš intenzivní.

Ze všech doučovacích hodin byly pořizovány videozáznamy a poznámky o jejich průběhu. Ze čtyř hodin (2x Adam, 1x Bára a 1x Cilka) nebyl vinou technických obtíží pořízen videozáznam, pouze poznámky. Po každé hodině byly znovu zhlédnuty její části relevantní pro reedukaci formálních poznatků a na jejich základě bylo rozhodnuto o postupu v následujících hodinách. Nezřídka se ale stalo, že během následující hodiny zbylo na práci se zlomky méně času, než by bylo třeba, práce musela být tedy rozložena do několika hodin následujících po sobě. Pokud se během hodiny vyskytl problém v jiné oblasti zlomků, než která byla pro reedukaci aktuálně naplánovaná, někdy musel být plán reedukace taktéž pozměněn. I přes tyto obtíže byla snaha věnovat se práci na jednotlivých oblastech zlomků systematicky. Popis procesu reedukace, závěrečné testování i závěry učiněné z případových studií jsou stavěny na analýze jednotlivých nahrávek (s ohledem především na výkony, vyjadřování a komentáře žáků) a na rozhovorech s žáky o jejich problémech a pocitech spojených s poznávacím procesem.

Se všemi třemi žáky byly v září (u Adama) nebo v únoru (u děvčat) a v červnu (se všemi) vedeny rozhovory. V následujících odstavcích jsou žáci představeni, pro autentičnost jsou používány jejich výroky z prvního rozhovoru. V následujících oddílech bude vždy popsán úvod společný všem žákům a poté zvlášť rozebrán případ každého z nich.

Bára

Bára navštěvuje třetím rokem jedno soukromé pražské osmileté gymnázium, je tedy v tercii. Matematika patří spíše k jejím méně oblíbeným předmětům, ale necítí k ní zcela odpor, její postoj se často odvíjí od toho, „jaké dostává ve škole známky a jak tomu rozumí". Na vysvědčení mívá většinou dvojku nebo trojku, protože prý „není na matematiku moc chytrá a často tomu nerozumí". Je ale velmi motivovaná se zlepšovat, silná je u ní především sociální motivace – pokud může být lepší než ostatní spolužáci (především než Cilka, která je její dobrou kamarádkou), dokáže na sobě velmi intenzivně pracovat. Podle mých zkušeností a subjektivního názoru ale patří spíš k těm méně nadaným žákům (alespoň co se matematiky týče), pomalu chápe a dlouho jí trvá, než si daný postup zautomatizuje. Za toto pololetí jsem u ní ale zaznamenala výrazné zlepšení, a to jak v oblasti známek (od pololetního vysvědčení zlepšení o dva stupně), tak celkových výkonů a postojů k matematice.

Cilka

Cilka navštěvuje stejné gymnázium jako Bára, chodí spolu dokonce do stejné třídy a sedí spolu v lavici. Tři roky chodily na doučování společně, v lednu ale přestoupily ke mně a velmi rychle jsem zjistila, že každá z nic potřebuje pracovat na něčem jiném, a rozdělila jsem je. Celé pololetí tedy chodila na doučování každá zvlášť. Matematika nikdy nepatřila k jejím nejoblíbenějším, ale ani nejméně oblíbeným předmětům, podle svých slov „k ní má celkem neutrální postoj". Je hodně pracovitá v tom smyslu, že vždy dělá všechny domácí úkoly, včetně těch dobrovolných, ale nikdy se nesnaží přemýšlet víc, než je nutné. Pokud jí na doučování položím nějakou otázku, na niž nemá napsanou v sešitě odpověď, většinou mi odvětí, „že to si ve škole neříkali, a že to tedy umět nemusí". U Cilky funguje výkonová motivace v tom smyslu, že chce dostávat dobré známky a být nejlepší. Pokud podá špatný výkon, dostane trojku, ale přitom nikdo nedostane známku lepší, bude spokojená. V tomto smyslu se u ní projevuje sociální motivace – chce být nejlepší. Na prvním stupni patřila k nejlepším žákům ve třídě, na gymnáziu se její pozice postupně podlamuje, jelikož je učiva víc a nelze ho už pojmout pouze pamětně. Podle mého subjektivního názoru je Cilka na matematiku poměrně chytrá, rozhodně by mohla mít na víc, pokud by se snažila věci i pochopit, ne se jen učit nazpaměť jak použít algoritmus. Jako největší problém u ní vidím motivaci. Když se ve škole něco naučí, nehodlá se „zdržovat tím, že by se hnala po tom, proč to tak je".

Adam

Adam také navštěvuje soukromé pražské gymnázium, ale jiné než děvčata. Je v kvartě a na doučování ke mně chodí už třetím rokem. Matematika je jeden z jeho oblíbených předmětů, ale „existují tam lepší a horší témata; zlomky zrovna patří k těm lepším". Má velmi silně rozvinutou poznávací motivaci – baví ho dozvídat se nové věci, především nad rámec běžné školy a často spolu diskutujeme o vysokoškolské matematice, o které si něco přečetl v knihovně. Pro mě překvapivě se ne vždy chce dopátrat toho, proč něco funguje tak, jak to funguje, tedy podstaty problému. Zdá se, jakoby ho občas nezajímala témata, co se učí ve škole, ale pouze ta „nadstavbová". Hodně se spolu tedy snažíme pracovat na zvýšení jeho motivace k tématům, kterými se zrovna zabývají ve škole,[20] a zdá se, že se to poměrně daří. Zda to Adamovi vydrží i nadále, to ukáže čas. Pokud ho ale nějaké téma vysloveně nezajímá, spokojí se s tím, že se naučí nazpaměť základní myšlenku a žádné další pokusy jeho postoj změnit nepomáhají. Co se týče jeho nadání pro matematiku, Adam podle mého názoru patří k průměrným žákům. Jeho poznávací motivace je pro něj velkým plus, na druhou stranu jeho občasný nezájem mu dokáže situaci ve škole ztížit.

5.1. Vstupní diagnóza

Adam a Cilka prošli v září 2013 vstupním diagnostickým testem, který byl vytvořen (a jeho řešení žáky následně nahráváno) pro projekt GA ČR N. Vondrové *Kritická místa matematiky na základní škole*. Test je kompletně převzatý z tohoto projektu a obsahuje čtyři typy úloh. Jako první jsou obrázky určitého množství předmětů s otázkou typu „Když tohle je $\frac{1}{5}$, jak vypadá celek?", tedy podstatou je zlomek jako graficky znázorněná část neznámého počtu. Tyto úlohy ani jednomu z žáků nepůsobily větší obtíže. Druhá série úloh je tvořena dvěma slovními úlohami podobného typu, kdy známe cenu části a chceme vypočítat cenu celku. Třetí série úloh byla pro oba žáky jak subjektivně, tak z mého pohledu jednoznačně nejobtížnější. V každé úloze měl žák na číselné ose zakreslený bod G, jehož hodnotu měl z osy vyčíst. Následně dostal číselně zadaný bod Q, který měl na osu zakreslit. S těmito dvěma body měl provést zadanou početní operaci (součet nebo součin), nejprve graficky na číselné ose, pak i početně. Jelikož tyto úlohy byly pro žáky opravdu

20 Dávám mu třeba číst články o goniometrických funkcích, nestandardní úlohy, úlohy z Matematické olympiády, apod.

obtížné, z celkových sedmi jsme stihli s oběma pouze čtyři. Čtvrtá série je opět tvořena slovní úlohou, respektive jejími dvěma částmi. Vzhledem k tomu, že oba žáci byli už po celém testu značně vyčerpaní a došel nám čas, stihli jsme jen první část úlohy. Součástí zadání byl recept na koláč a k němu následující zadání:

Recept na koláč obsahuje: $\frac{3}{8}$ kg mouky,

$\frac{1}{2}$ čtvrtkilogramového balení másla,

$\frac{1}{4}$ kilogramového balení cukru,

3 vejce

[…]

Rodina má 5 členů, aby koláč vystačil, musí se upéct z dvojnásobného množství surovin než obsahuje recept. Otec a matka snědí po 3 dílech, děti o $\frac{1}{3}$ více než rodiče, babička naopak o $\frac{1}{3}$ méně než každý z rodičů. Kolik surovin je potřeba? Na kolik dílů se koláč nakrájí?

Pro lepší představu je originální verze testu (včetně úloh, na které nezbyl čas) k dispozici v příloze 3. Každý z žáků měl trochu jiné obtíže, podíváme se nyní trochu podrobněji na každého z nich.

Cilka

Cilka psala test 16. 9. 2013, v té době ke mně ještě na doučování nechodila, takže je možné, že se trochu styděla. Byla v sekundě, ale zlomky už měli ve škole probrané.

První sérii úloh zvládla bez problémů.

V druhé sérii úloh se jen mírně zarazila nad tím, že sleva o $\frac{1}{3}$ znamená, že zbyly $\frac{2}{3}$ původní ceny, a bylo třeba jí maličko pomoci. Odehrála se následující situace:[21]

S: *(počítá třetinu jako výsledek)*

T: Kolik třetin je celá cena?

S: Tři třetiny

T: Tak když o jednu třetinu zlevníš…

S: … tak ta částka jsou dvě třetiny.

21 Podle mezinárodní konvence je v celé práci dodržováno označení T – lektor (teacher), S – žák (student).

Potom už ale dopočítala bez problémů, včetně druhé úlohy, která je analogická.

Třetí série úloh byla zlomová – Cilce se přestalo dařit, začala dělat množství chyb a bylo vidět, že chvílemi neměla nejmenší tušení, o co jde, a snažila se zachytit jakékoliv návodné otázky, na kterou by uměla odpovědět. U první úlohy tohoto bloku chtěla kreslit $\frac{4}{5}$ mezi čísla 4 a 5. O chybu z nepozornosti se nejspíš nejednalo, protože obdobnou chybu poté udělala ještě několikrát. U druhé úlohy správně určila, že bod G má hodnotu 7. Když byla požádána, aby číslo zapsala ve formě zlomku, odpověděla $\frac{7}{7}$. Po nasměrování, že zlomková čára znamená dělení, jsme se postupně dostaly k tomu, že sedmičku musí vydělit jedničkou, aby dostala zase sedm. Při násobení zlomků Cilka automaticky nasadila algoritmus pro jejich sčítání pouze s tou změnou, že do čitatele napsala znaménko krát (možná proto, že v minulé úloze zlomky sčítala). Až po upozornění, že tahle se zlomky nenásobí, se vzpamatovala a vynásobila je správně. Ve čtvrté úloze ji zarazilo, že měla dělit zlomek zlomkem $\frac{1}{2}$. Vzhledem k tomu, že Cilka dříve několikrát odříkávala poučky algoritmů, rozhodla jsem se ji navézt přes další poučku a zeptat se, co se děje s číslem, když ho vynásobíme jednou polovinou, čím ho tedy vydělíme. Pomohlo to, Cilka správně odpověděla, že musí dělit dvěma a uvědomila si paralelu se zadanou úlohou, kterou dořešila správně. Obecně jí také dělalo problém odhadnout velikost jednoho dílku v intervalu o velikosti jedna, tedy zda se jedná např. o třetiny, čtvrtiny, nebo pětiny. S tím je spojený i o to větší problém v zakreslování těchto dílků, které v jejím podání příliš neodpovídají pravidelnému rozdělení. Další problém vidím v tom, že se Cilka vždy snažila výsledek nejdříve počítat. Když jsem jí to zakázala, provedla operaci alespoň zhruba v hlavě a od toho odhadovala výsledek, jak i sama následně přiznala.

Čtvrtá série úloh už probíhala ke konci hodiny, takže byla Cilka znatelně vyčerpaná. Zdvojnásobit množství surovin zvládla, obtíž jí činilo pouze čtvrtkilogramové balení másla, kde správně vynásobila $\frac{1}{2}$ dvěma, ale nebyla schopná odpovědět, co dopočítala. S množstvím cukru už analogicky pracovala velmi dobře. U počtu dílků se zarazila nad tím, že $\frac{1}{3}$ ze tří dílků je 1 dílek, poté už dopočítala správně. Jak už bylo zmíněno dříve, úlohu b) jsme bohužel nestihly.

Celkově jsem u Cilky odhalila následující komplikace. Podle mého názoru zcela nerozumí podstatě zlomku, znamená pro ni často jen dvě čísla spojená zlomkovou čarou. Jinak by netvrdila, že 7 může napsat jako $\frac{7}{7}$. Stejná chyba se objevovala i následně během celého pololetí. Zakreslení zlomku na číselnou osu jí často dělá problém, viz například její snaha zakreslit $\frac{4}{5}$ mezi čísla 4 a 5. Obdobně někdy zkouší čísla větší než jedna zakreslit do intervalu (0, 1). Navíc nemá zkušenosti s dělením intervalu na stejné části, její dílky tedy nemají stejnou velikost. Neblahá je i její snaha použít algoritmus pro sčítání dvou zlomků i pro jejich vynásobení. Vzhledem k tomu že se tato chyba objevila během testu pouze jednou, můžeme spekulovat, zda se nejedná pouze o chybu z nervozity. Během tohoto pololetí se Cilka dopustila stejné chyby vícekrát, vždy ale mohlo jít o chybu z nepozornosti. Na otázku, proč tomu tak je, obvykle odpovídá, že to popletla. To jen ukazuje na to, že její znalost algoritmu je čistě formální. Jako největší problém ale vidím Cilčinu snahu držet se co nejvíc naučených algoritmů a za žádnou cenu se nesnažit vymyslet jiný postup, než který zná ze školy. Může to být třeba její odpor k tomu nejdříve kreslit, až poté počítat, v průběhu roku se navíc objevily ještě další, pravděpodobně závažnější problémy. Vše výše popsané a ještě mnohé další zmíněné dále poukazuje na to, že Cilčina znalost zlomků je silně poznamenána formalizmem.

Adam

Adam psal test 17. 11. 2013, v tu dobu ke mně na doučování už chodil dlouho a přede mnou ani před kamerou se nestyděl. S první sérií úloh neměl Adam problémy, vše v pořádku vysvětlil, pouze v první úloze nejspíš z nepozornosti dokreslil o jednu pětinu čtverečků méně, tedy pouze 12 místo 15. Po upozornění, aby si je přepočítal, se ale sám opravil, proto není tato chyba považována za zásadní. Možná i kvůli této chybě si v následujících dvou úlohách dokresloval pomocné čáry, které mu rozdělovaly celek na části. Kromě několika terminologických chyb (prohození pojmů čitatel a jmenovatel) už dokončil tuto sérii bez obtíží.

V první slovní úloze Adam okamžitě začal převádět $\frac{2}{3}$ na procenta a zaokrouhlil na 66 %. Následoval tento rozhovor:

T: Jak jsi vzal těch 66 %?

S: 66 % jako jsou ty dvě třetiny, co stála ta mikina po slevě.

T: A vážně je 66 % dvě třetiny?

S: No, s trochou nepřesnosti jo.

T: A nešlo by to vypočítat úplně přesně?

S: No, jako ono by to šlo, ale nevím, jestli by to nebylo takový trošku problémový.

T: Zkus to, jak bys to dělal.

S: V tom případě by ten zápis vypadal následovně… *(Píše zápis se zlomky, který je následován diskusí o výhodách tohoto zápisu.)*

Dále uvedl, že se jedná o přímou úměrnost, a zapsal rovnici ve tvaru $a : b = c : d$. Na otázku, jak věděl, že má údaje ze zápisu srovnat do tohoto pořadí, odpověděl: „Takhle nás to učili ve škole, protože šipčičky…“. Obdobná situace se projevila i ve druhé úloze v rovnici $1 : \frac{5}{8} = x \cdot 2860$, jež Adam okomentoval: „spojíme si vnitřní a vnější členy a vyjde nám $\frac{5}{8} \cdot x = 1 \cdot 2860$. Úlohu vyřešil správně, ale výše uvedené výroky ukazují na jistý formalizmus v jeho poznatcích.

Třetí série úloh byla i pro Adama nejobtížnější. Na rozdíl od Cilky rychleji a přesněji odhadoval hodnotu zadaného zlomku *G*, zakreslit bod *Q* už mu ale někdy dělalo potíže. Při zakreslování zlomku $\frac{19}{6}$ postupně dělil každý interval mezi dvěma přirozenými čísly na šestiny, až jich napočítal 19. Při otázce, jestli by to nešlo jednodušeji, aniž by musel zakreslit všech devatenáct šestin, se po chvíli přemýšlení rozhodl zakreslit poloviny mezi nulou a čtyřkou, s čímž chtěl pracovat dál. Když jsem podotkla, že to jde ještě jednodušeji, postupně se dostal k myšlence smíšeného čísla, které jen neuměl nazvat. I nadále měl ale tendenci alespoň první interval rozdělit na části a až poté zlomek převádět na smíšené číslo. Bez převodu na smíšené číslo některé zlomky neuměl zakreslit vůbec. Při zakreslování zlomku $\frac{8}{11}$ rozdělil interval na desetiny, že je to prý podobné, v poslední úloze zase rozdělil interval na desetiny místo devítin. Pravděpodobně šlo ale o chybu z nepozornosti, protože se vyskytla pouze jednou a sám ji opravil. Ve druhé úloze se zalekl pokynu k násobení, ale záhy odrecitoval poučku, že „jelikož násobíme ten bod číslem menším než jedna, tak bude [součin posunutý] doleva“.

Poslední slovní úlohu vyřešil téměř bez komplikací, objevily se jen menší nepřesnosti v terminologii a v zápisu. Zajímavé je jeho automatické doplnění zlomkové čáry a jednin u dílů koláče, což je pravděpodobně způsobeno zaměřením celého testu na zlomky, po několika krocích ale jedniny škrtl a vrátil se k přirozeným číslům. Menší problém se vyskytl u výpočtu dílů snědených babičkou, ten byl ale způsoben špatným rozborem zadání úlohy.

Pokud shrneme Adamovy obtíže spojené s oblastí zlomků, největší problém pravděpodobně tkví v jeho přístup k poučkám (např. „jelikož násobíme ten bod číslem menším než jedna“ nebo „spojíme si vnitřní a vnější členy“), které recituje, ale nikdy se nezamýšlel nad tím, proč zrovna takhle fungují. Můžeme tedy říct, že jim rozumí pouze formálně, nepátrá po jejich podstatě, na druhou stranu je málokdy zapomene a při návodné otázce se nad jejich podstatou ochotně zamyslí. Leckdy se snaží si práci usnadnit použitím univerzálního postupu, který nemusí být nejvýhodnější, jako třeba určení společného jmenovatele pro čísla 4 a 6 jako jejich násobek, tedy 24. Další obtíž vidím v tom, že Adam neumí zakreslovat zlomky na číselnou osu. Mohlo by se zdát, že správně nerozumí podstatě smíšeného čísla, jelikož i po převodu (který zvládá bez obtíží) občas váhá, kam na číselnou osu zlomek umístit. Má také menší problémy s terminologií, jako je interval nebo čitatel a jmenovatel, ale ty pro tuto práci nejsou podstatné.

Bára

Bára vstupním testem neprošla ze dvou důvodů. Zaprvé, natáčení s žáky pro zmiňovaný projekt probíhalo ještě před zadáním této práce. Zadruhé, původní záměr byl provést případové studie na čtyřech žácích. Dva žáci (Adam a Cilka) měli projít vstupním testem a dva žáci (Bára a Daniel) ne. Výzkum by tedy byl jakousi mini verzí klasického experimentu, včetně kontrolní skupiny. Daniel ale bohužel v březnu musel kvůli dlouhodobé nemoci přestat na doučování docházet. V tu dobu už bylo pozdě dávat Báře vstupní test a naopak bylo moc brzy na to prohlásit Daniela za regulérní součást výzkumu. Tak se stalo, že Bára jako jediná ze tří žáků neprošla tímto vstupním testem. Domnívám se však, že jelikož mezi vstupním testem a začátkem reedukace uplynul více než rok, kdy jsme se k němu nevraceli, výsledky závěrečného testu by tímto neměly být ovlivněny.

S Bárou byla diagnostika prováděna soustavně v jejích počátečních hodinách doučování, využívány byly především úlohy obdobného typu, jako první tři série úloh z testu GA ČR. Zjistila jsem, že má velmi obdobné problémy jako Cilka. Jednou z příčin může být to, že od prvního ročníku spolu chodily do stejné třídy a měly stejné učitele. Bára má výhodu v tom, že používá čtverečkovaný sešit a dobře se jí tedy zachovává měřítko. Nedělá jí problém rozdělit interval na stejně dlouhé části, zároveň i odečítá z osy lépe než Cilka (i v provedení bez čtverečkovaného papíru). Při zakreslování zlomků na osu ale dělá obdobné chyby, jaké byly popsané u Cilky.

T: Mezi jakýma dvěma číslama je pět třetin. … Je to menší než jedna?

S: Pět třetin, ne. Je to větší než jedna

T: Je to větší než dva?

S: Je to větší než dva, je to větší než tři, je to tři a půl.

T: Ehm[22], a kolik třetin je teda tři, tři celky?

[…] (*nerozumí pojmu celek, objasňujeme tedy otázku*)

S: Devět?

T: Ano, ale my jich máme jenom pět.

S: Kde je chyba? (*ticho*)

T: Když tři je devět třetin, tak pak pět třetin je větší, nebo menší než tři?

22 Výraz „eh“ značí zaváhání.

S: Jooo, menší! (*ticho*)

T: Kolik se tam vejde těch celků?

S: Jedna a jakoby ... jedna a dva.

T: A dva čeho, ale?

S: Dvě jedniny, ne dvě třetiny.

U Báry se navíc objevují obrovské výkyvy ve výkonech. Jednu hodinu se zdá, že podstatě zlomku výborně rozumí, druhou hodinu je schopná zakreslit na osu $\frac{5}{2}$ jako $\frac{2}{5}$. Určení celku z daného počtu Báře nedělá problémy, kostrbatá je jen její formulace[23]. V následující úloze byl zadán kruh (dort), který tvoří $\frac{2}{5}$ celku. Úkolem bylo zakreslit celek. Bára bez komentáře výsledek správně zakreslila:

T: Jak jsi na to přišla teda?

S: No přišla jsem na to vlastně, že tohle […] že to jsou dvě (pětiny) a já jsem si řekla, že dva plus dva, to jsou vlastně dvě celý (dorty) a potom jakoby jedna (pětina) a to je ta polovina (dortu).

Největší rozdíl mezi Bárou a Cilkou ale vidím v tom, že Bára se občas snaží pochopit podstatu toho, čemu se věnujeme, dokonce se i sama zeptá. Na druhou stranu někdy také prohlásí, že tomu nerozumí, asi to ani nepochopí a já se nemusím snažit.

5.2. Proces reedukace

Ačkoliv bude reedukace u každého z žáků probíhat individuálně, před vlastní reedukací jsem si připravila určité oblasti, které jsem plánovala projít s každým z nich. Pokud žák ukáže, že s danou oblastí problém nemá a že jeho poznatky v ní nejsou formální, nebudeme se jí dále zabývat a přejdeme k oblasti další. Pořadí těchto oblastí taktéž není fixní, záleží na problémech daného žáka a je pravděpodobné, že se k některým oblastem budeme opakovaně vracet. Slouží tedy spíše jako doporučení, čeho by bylo vhodné se dotknout.

Oblast 1 – podstata zlomku

Zde je nutné ověřit, zda žák rozumí, co to zlomek vlastně je. Je nezbytné opakovaně zmiňovat i terminologii, jako čitatel a jmenovatel, kterou si všichni tři žáci pletou.

---

23 Pro srozumitelnost jsou v kulatých závorkách doplněna vysvětlení toho, co měla Bára v daném kontextu pravděpodobně na mysli.

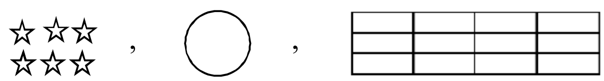
Oblast 2 – dobudování izolovaných modelů

Již dříve byly zmíněny modely, se kterými budeme pracovat (viz oddíl 3.3). Jsou to počet (uspořádaný a neuspořádaný), úsečka (číselná osa), kruh (ciferník), obdélník a čokoláda. Je nutné procvičit jak reprezentaci na jednotlivých modelech, tak přechody mezi nimi. Očekávala jsem, že nejobtížnější bude pro žáky model číselná osa, který bývá ve škole podceňovaný a působí na žáky jako „strašák“, reprezentaci zlomků na číselné ose je tedy věnována celá oblast 3. Řešit budeme následující typy úloh:

a) jaká **část celku** je znázorněna,

např. 

b) **označit** část z celku/celků,

např. Vyznač $\frac{2}{3}$: 

c) **najít celek**, pokud znám část,

např. Toto jsou $\frac{4}{3}$, nakresli celek.  , ...

to vše pro různé typy modelů a postupně pro zlomky kmenové, menší než jedna i větší než jedna.

Oblast 3 – pohyby na číselné ose

Ve chvíli, kdy žáci umí zlomek zakreslit na osu i z ní přečíst jeho hodnotu, měli by umět zobrazit i základní početní operace, především sčítání a odčítání, ale i jednodušší úlohy na násobení a dělení. Měli bychom vždy začínat s jednoduššími úlohami, jako třeba sečíst zlomek a přirozené číslo, a nechat žáky odvodit, co se s čísly stane. Jako velice vhodný se ukazuje čtverečkový papír, kde mohou žáci respektovat čtverečky jako části celku, zařazeny by měly být ale i úlohy, kde tomu tak není a čtverečky neodpovídají zlomkům, se kterými pracujeme. Jako gradované sekvence úloh můžou být použity následující:

a) sčítání: $2 + \frac{2}{3}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$

b) odčítání menšího čísla od většího: 2 a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{5}$

c) násobení: $2 \cdot 2$, $3 \cdot \frac{1}{2}$, $3 \cdot \frac{2}{3}$, $3 \cdot \frac{5}{4}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}$

U všech těchto úloh je vhodné diskutovat, co se se zlomkem děje při jeho zvětšení, zmenšení nebo vynásobení a hlavně proč. Grafické dělení jsme s žáky řešili pouze převodem na grafické násobení.

Oblast 4 – číselné operace se zlomky

Předpokládáme, že tato oblast bude na reedukaci jedna z nejobtížnějších. Žáci už jsou totiž vyzbrojeni algoritmy, kterých se pravděpodobně budou chtít držet. Pokud to bude možné, měli bychom se tedy snažit nezmiňovat konkrétní jméno operace, ale nechat žáky přijít na to, k čemu by se dala například tato známá, motivační úloha[24] využít:

Maminka upekla pro večerní návštěvu buchtu v obdélníkovém pekáči. Ještě stále ale neví, jestli přijdou na návštěvu tři nebo čtyři lidé. Jak má bublaninu nakrájet, aby mohla dílky spravedlivě rozdělit, ať už přijdou hosti tři, nebo čtyři?

Tím, že buchtu nakrájíme například svisle na tři díly a vodorovně na čtyři, získáme dvanáct dílů. Jedna třetiny celé buchty potom budou čtyři díly, čtvrtina budou díly tři. Důležité je, že takto můžeme pracovat jak s třetinami, tak s čtvrtinami zároveň. Tento model by měl žákům připomenout tabulku čokolády, která je vhodná jak pro sčítání a odčítání, tak pro násobení zlomků.

V následujících odstavcích ukážeme některé způsoby zavádění početních operací na zlomcích. U každé z nich se předpokládá, že žák dostane konkrétní úlohu (např. sečíst dva zlomky), kterou má vyřešit graficky. Pokud již umí řešit obdobné úlohy na číselné ose, měli bychom je samozřejmě zopakovat. Pokud žák nepřijde s žádným konkrétním modelem, můžeme mu nabídnout následující[25]:

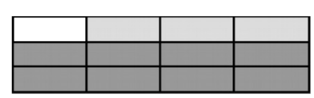
<u>Sčítání zlomků</u>:

Zadání: graficky sečíst zlomky $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$.

a) **čokoláda** (navazuje na motivační úlohu)

   Třetina čokolády jsou čtyři dílky, $\frac{2}{3}$ tedy dílků osm (tmavá barva).

   Čtvrtina čokolády jsou dílky tři (světlá barva).



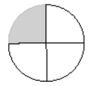
Dohromady získáváme vybarvených 11 dílků ze 12, tedy $\frac{11}{12}$ celé tabulky čokolády.

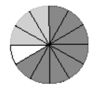
24 Tato úloha původně pochází z učebnice M. Koman a kol. *Matematika pro 7. ročník.* MÚ AV ČR, Praha.

25 Některé principy jsou použity jako inspirace z hodiny Didaktiky matematiky na PedF UK, jiné jsou převzaty od několika praktikujících učitelů, kteří byli ochotni se o ně se mnou podělit. Je tedy možné a pravděpodobné, že obdobné zavedení se vyskytuje i v některé učebnici matematiky.

b) **kruhový model**

Nejprve si znázorníme každý zlomek zvlášť.

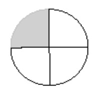
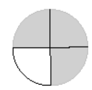
$\frac{2}{3}$  $\frac{1}{4}$ 

Oba zlomky teď přeneseme do jednoho kruhu a doplníme všechny dělicí čáry. Odtud už opět vidíme výsledek $\frac{11}{12}$. 

Odčítání ukážeme analogicky ke sčítání. Na těchto modelech odečítáme vždy pouze menší číslo od většího.

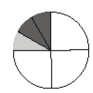
<u>Násobení zlomků</u>:

a) **násobení jako opakované sčítání**

Tento postup lze použít pouze pro násobení přirozeným číslem, např. tedy chceme-li graficky vynásobit $\frac{1}{4} \cdot 3$. $\frac{1}{4}$  → $\frac{3}{4}$ 

b) část z části

Zadání: graficky vypočítej $\frac{2}{3}\ z\ \frac{1}{4}$.

Z vyznačené čtvrtiny (světle) vyznačíme dvě třetiny (tmavě). 

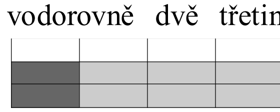
Výsledek jsou $\frac{2}{12}$, respektive $\frac{1}{6}$. Ptáme se, jakou operaci jsme se zlomky vlastně provedli.

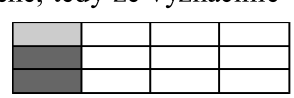
Tuto úlohu lze obdobně řešit i modelem čokoláda (viz níže).

c) obsah čokolády

Zadání: graficky vypočítej $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

Řešení je obdobné jako u „části z části“, pro dobré porozumění je vhodné oba přístupy kombinovat, respektive začít přístupem předešlým.

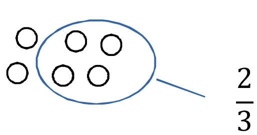
Najdeme tabulku čokolády, kde bude možné pracovat jak s třetinami, tak se čtvrtinami (čokoláda 3×4). V tabulce vyznačíme vodorovně dvě třetiny (světle) a ty poté vynásobíme čtvrtinou (tmavě). 

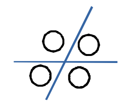
Pro ukázku komutativity násobení je možné ukázat i řešení obrácené, tedy že vyznačíme svisle čtvrtinu (světle) a z ní potom vyznačíme dvě třetiny (tmavě). 

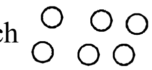
Dělení zlomků:

a) **dělení zlomku přirozeným číslem**

Zadání: vydělit $\frac{2}{3}$: 4.

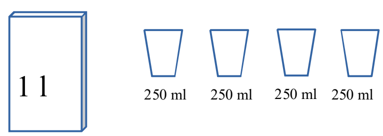




vydělíme čtyřmi a získáme tak  z celkových  , tedy $\frac{1}{6}$.

b) rozlévání

Zadání: rozdělit litr mléka do čtvrtlitrových skleniček.



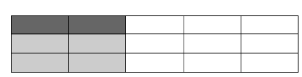
Mléko rozlijeme do čtyř sklenic, tedy $1 : \frac{1}{4} = 4$.

Gradovanými úlohami tohoto typu postupně dospějeme k tomu, že dělení je inverzní operace k násobení.

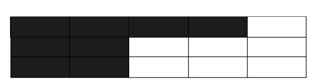
c) dělení zlomku zlomkem na čokoládě

Zadání: vydělit $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$.

Tuto úlohu rozdělíme na více kroků. V tabulce čokolády vyznačíme $\frac{2}{5}$ (světle), které nejdříve vydělíme třemi (tmavě).



Tuto část poté vydělíme $\frac{1}{4}$, což, jak jsme zjistili z rozlévání, znamená vynásobit ji čtyřmi (černá).



Jak už bylo zmíněno dříve, není třeba žákům ukazovat všechny modely a zároveň je po nich všechny vyžadovat. Měli bychom ale pracovat alespoň s těmi, které žákovi vyhovují nejvíc a díky kterým pochopí, proč operace se zlomky fungují podle algoritmu, který se naučil a který potom dokáže znovu objevit, pokud jej zapomene.

Oblast 5 – slovní úlohy s preferencí určitého modelu

Pro další procvičení a odhalení zbylých nedostatků zařazujeme několik kratších slovních úloh[26]. Pro každou úlohu se může zdát vhodnější jeden nebo více izolovaných modelů zlomků, řešení a výběr modelu ale ponecháme na žákovi. Stejně jako u ostatních oblastí lze pořadí úloh libovolně měnit dle potřeb daného žáka, stejně jako vymýšlet úlohy obdobné. V záhlaví každé úlohy je vždy uvedeno, na co se daná úloha zaměřuje, tedy co víme, jaký model je doporučený a co chceme vypočítat.

a) *Část počtu → celek?*

   Čtvrtina třídy jsou dívky, chlapců je 21. Kolik je žáků ve třídě?

b) *Kruhy → rozklad na kmenové zlomky (Egyptské úlohy o dělení chleba)*

   Jak spravedlivě rozdělit 2 chleby mezi 3 lidi?

   Jak spravedlivě rozdělit 3 chleby mezi 4 lidi?

   Jak spravedlivě rozdělit 4 chleby mezi 5 lidí?

c) *Část úsečky → délka části a celek?*

   Třetina pendreku je červená, zbytek modrý. Jak dlouhý je pendrek a jak dlouhá je modrá část, když ta červená je dlouhá 20 cm? Co by se změnilo, kdyby modrá část byla 20 cm a ne ta červená?

d) *Čokoláda → porovnání čísel*

   Jsou větší $\frac{4}{7}$ tabulky čokolády, nebo jejích $\frac{5}{9}$?

e) *Část počtu → část celku?*

   Zbývá nám 60 korun. Jakou část jsme utratili, pokud jsme původně měli 96 Kč?

f) *Ciferník→ část celku*?

   V kině jsem strávila 105 minut, ale $\frac{2}{15}$ tohoto času běžely reklamy. Jak dlouho běžel film?

g) *Kruhy → rozklad na kmenové zlomky (2. část) (Egyptské úlohy o dělení chleba)*

   3 chleby mezi 5 lidí

   4 chleby mezi 6 lidí

   4 chleby mezi 7 lidí

---

26 Tato konkrétní zadání egyptských úloh o dělení chleba (*b* a *g*) jsou převzata z (Hejný, 2014, s. 207), ostatní úlohy (kromě *d* a *i*) jsou inspirovány úlohami zmíněnými v (Hejný, 2014, s. 209–211).

h) *Číselná osa → celek a část ze tří částí?*

Vyrábíme barevné pravítko. Malujeme od 2,5 cm do 4,1 cm modře, což jsou $\frac{2}{15}$ celého pravítka, a od 5,2 cm do 7 cm červeně. Zbytek zůstane bílý. Jak dlouhá část zůstala nenabarvená (bílá) a jak dlouhé je celé pravítko?

i) *Abstrakce, zobecnění:*

Pokud platí, že $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, co můžeme říci o velikostech *a* a *b*? Zkoumáme zvlášť pro přirozená čísla, pro celá záporná čísla a pro zlomky.

j) *Úloha o cihle (obtížnější)*

Cihla váží 1 kg a půl cihly k tomu. Kolik váží cihla?

Na tomto místě je nutno uvést několik poznámek. Zaprvé, ani s jedním ze tří žáků jsme nestihli projít všechny tyto úlohy. Úlohy o kině, pravítku a cihle (*f*, *h* a *j*) nebyly vyzkoušeny s žádným z nich, byly tedy později použity v závěrečném testu. Zadruhé, jelikož čas, který jsme do konce školního roku měli, se neúprosně krátil a jelikož všichni tři žáci už nějakou představu o zlomcích měli, rozhodla jsem se zařadit egyptské úlohy o dělení chleba pouze jako formu motivace a zpestření. Egyptské trojúhelníky, které byly součástí plánu popsaného v oddíle 5.2, ze stejného důvodu nebyly zařazeny vůbec, proto je zde neuvádím.

Pro představu je zde k dispozici tabulka, která uvádí počet doučovacích hodin, kdy jsme se reedukaci věnovali, a orientační dobu trvání reedukace s každým z žáků během těchto hodin (viz tabulka 2). Tabulka s přesnými daty a orientačním počtem minut reedukace v rámci každé této hodiny je k dispozici v příloze 4. Nejsou zde započítány jednotlivé kratší pokusy o reedukaci v oblasti zlomků (v řádech několika minut), které probíhaly ad hoc během řešení jiných úloh. Tyto pokusy byly poměrně časté, někdy i vícekrát za hodinu, přesto ale nejsou započítány pro jejich nesystematičnost, krátkou dobu trvání a zaměření úlohy na jinou oblast matematiky.

	kolikrát	**jak dlouho [min]**
Adam	10	235
Bára	11	220
Cilka	4	115

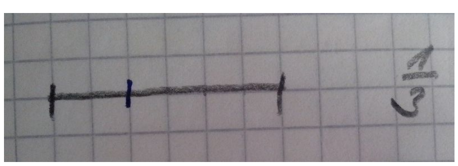
Tabulka 2: Orientační doba reedukace

Jelikož měl každý ze tří žáků odlišné potíže, probíhala reedukace s každým z nich trochu jinak. V následujících odstavcích je popsán proces reedukace u každého žáka detailněji.

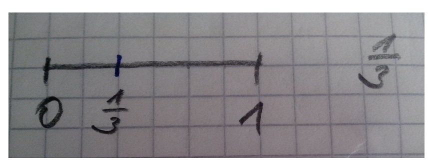
Bára

Kvůli výkyvům v Bářině výkonu jsem se rozhodla začít raději od samotné podstaty zlomku. Bavily jsme se o tom, k čemu zlomky používáme, proč se ve škole učí a jaké jsou jejich výhody a nevýhody. Bára dokázala překvapivě dobře na tyto otázky odpovídat, jen málo toho bylo potřeba doplnit (např. kdy je lepší využít zlomek a kdy desetinné číslo). S tím, co to ale zlomek je, měla Bára potíž. Dostala tedy za domácí úkol zjistit, co to zlomek je, a vysvětlit mi to tak, jako by to říkala její mladší sestře (ta chodí do páté třídy). Přišla s následující poučkou: čitatel zlomku udává, z kolika stejných částí se zlomek skládá. Jmenovatel zlomku udává, na kolik stejných částí je celek rozdělen. Jedním dechem mi ale sdělila, že tomu vlastně moc nerozumí, ale nenašla nic lepšího. Nakreslila jsem tedy kruh, rozdělila jej na osminy a tři z nich vybarvila. S nadšeným „aha“ správně odpověděla, že vybarvená část tvoří 3/8 celého kruhu – osminy proto, že je rozdělený na osm částí, a tři proto, že jsou vybarvené právě tři. Následně jsme se věnovaly dalším modelům pojmu zlomek, konkrétně dělení obdélníku, počtu, čokolády a úsečky (číselná osa byla zatím úmyslně vynechána). S dělením jednoho celku neměla Bára žádné problémy. Když zjistila, že zadané úlohy zvládá, začala si i mnohem více věřit. Kromě samotného dělení celku byly zařazovány i úlohy typu „jaká část celku je znázorněna“ a „je zadána část, najdi celek“.

Následující hodinu jsme několik úloh zopakovaly, žádné problémy se neobjevily. Zeptala jsem se, v čem se od úsečky liší zobrazení na číselné ose. Už při zmínce číselné osy Bára značně znervózněla, takže byla nejspíš chyba tento pojem vůbec zmiňovat předem. Na předcházejícím příkladu, kde byla dělena úsečka (viz obr. 2) jsme si ukázaly, že je to vlastně skoro stejný princip (viz obr. 3), což Báru sice povzbudilo, ale i v průběhu dalších úloh se tvářila nedůvěřivě.



Obr. 2



Obr. 3

V dalších hodinách jsme přistoupily i k reprezentacím zlomků větších než jedna, nejdříve na modelu kruhu (dort), který Bára označila jako svůj nejoblíbenější. Měla za úkol nakreslit $\frac{3}{2}$ dortu, což k mému překvapení zvládla bez obtíží. Obdobné úlohy jsme opět vyzkoušely na různých modelech zlomku (nejprve bez číselné osy) a začaly je propojovat i s příklady zlomků menších než jedna. V průběhu hodiny, kdy jsme se dosud zabývaly pouze zlomky, dostala Bára za úkol zobrazit několik zlomků na číselné ose, což se jí výborně povedlo:

T: (*na čtverečkovaný papír kreslí část číselné osy, vyznačuje nulu a jedničku, mezi nimi je sedm čtverečků*) Tak, nula, jednička. Kde budou dvě sedminy?

S: Dvě sedminy… budou… tady

T: Ehm[27], výborně! Kde bude osm sedmin?

S: Osm sedmin, ty budou tady.

T: Ehm, výborně! Kde bude padesát jedna sedmin?

S: Někde tedy… (*ukazuje za hranici papíru*)

T: Ehm, tak uděláme pár teček… (*kreslí pár teček za konec osy a prodlužuje rovnou čáru dál, na její kraj vyznačí bod*) a jaký bude tady celý číslo?

S: Eh, to bude … sedm a potom … tady (*kreslí zlomek*)

T: A jak si na to přišla?

S: No že jsem vydělila jako padesát jedna děleno sedmi, to vyšlo sedm a zbyde… čtyřicet devět, takže dva.

Troufám si tvrdit, že od té doby se Bára tolik nebála zlomků. Bylo vidět, že ji úspěch velmi motivoval, i když se jí ne všechny další úlohy vždy podařily. K této vydařené úloze jsme se několikrát vracely, porovnávaly ji s úlohou vyřešenou špatně a hledaly jsme chybu. Kromě zakreslování zlomků na osu a dělení celku/celků, ke kterým jsme se při každém problému vracely, jsme se zabývaly i úlohami jako „jaká část celku/celků je vyznačena“ a „najdi celek, pokud znáš část“ ve spojení se všemi různými modely zlomků, diskrétními i spojitými. V těchto úlohách se Bára poprvé setkala s pojmem *kmenový zlomek*, který jsme následně využily i v egyptských úlohách o dělení chleba. S těmito úlohami se Bára vůbec nedokázala ztotožnit a nebavily ji (což se ukázalo i v závěrečném testu, viz oddíl 5.3). U první úlohy Bára nedostala žádné instrukce ani informace kromě toho, že má používat kmenové zlomky. Zadání znělo: rozděl spravedlivě dva chleby mezi tři lidi:

S: Takže nakreslíme takhle kulatej chleba. A když bych měla tři lidi, tak bych … takhlenc bych to rozdělila (*dělí kruh na třetiny*).

T: Ehm, takže kolik by dostal každej?

S: Každej by dostal jednu… jeden by dostal jednu třetinu.

T: … ale my máme dva chleby.

S: Jo, dva chleby, potom, to jsem špatně, dva chleby, to bych … jo to bych rozdělila tahle […] (*dělí i druhý kruh na třetiny*).

27 Výraz „ehm“ značí přitakání.

T: Takže kolik by dostal každej?

S: Každej by dostal dvě třetiny.

Báru jsem za vyřešení úlohy pochválila a společně jsme vyřešily úlohu tak, jak by ji řešili staří Egypťané. U další úlohy byla požádána, jestli by to zkusila také tak. Měla spravedlivě rozdělit tři chleby mezi čtyři lidi, aby do chlebů řezala co nejméně. Nakreslila řešení, kdy z každého ze tří chlebů byla vyříznutá jedna čtvrtina. Tři lidé potom dostanou tři čtvrtiny chleba a čtvrtý člověk tři vyříznuté čtvrtiny. Po námitce, že to by nebylo „fér“, protože mají jiné kusy chleba, Bára vyřešila úlohu „správně“, stejně tak i následující úlohu. Jelikož ji egyptské úlohy očividně nebavily, ale ukázala u nich dobré porozumění zlomkům, vyřešily jsme tyto úlohy pouze tři.

Protože Bára (asi i z únavy) během řešení domácího úkolu několikrát zaměnila algoritmus pro sčítání a násobení zlomků, v dalších hodinách jsme se věnovaly číselným operacím. Nejprve jsme se dostaly k násobení, které jsme odvozovaly jako část z části a jako obsah čokolády. Při odvozování se zdálo, že Bára chápe a spolupracuje, s návrhem pro opakované sčítání u násobení celým číslem dokonce přišla sama. Motivační úlohu ke sčítání zlomků zvládla Bára hravě, o to víc bylo překvapující, když si na ni při závěrečném testu ani nevzpomněla. Kromě modelu čokolády jsme si ukázaly ještě sčítání na kruhovém modelu. Dělení zlomkem jsme odvozovaly jako operaci inverzní k násobení pomocí rozlévání. Ukazovaly jsme si i grafické zobrazení na modelu čokolády, ale zdálo se, že Bára moc nechápe a ani se nesnaží, prý „je moc unavená ze školy a tohle stejně asi nikdy nepochopí“. V jedné z dalších hodin jsme se dostaly ke složenému zlomku a převodu dělení na násobení:

T: A proč se to takhle otáčí?

S: No, protože, ono to tak jakoby vyjde.

Následovalo opětovné vysvětlování vztahu mezi dělením a násobením, ani tak si ale nejsem jistá, že tomu Bára porozuměla na vyšší úrovni než jako jeden izolovaný model.

V dalších hodinách jsme se věnovaly střídavě oblastem 3 (pohyby na číselné ose), 4 (operace se zlomky) a 5 (slovní úlohy s preferencí určitého modelu), někdy bylo nutné se vracet i k oblasti 2 (izolované modely). S blížícím se koncem školního roku bylo vidět, že je Bára unavená a ztrácí zájem o pochopení něčeho, čemu ne úplně rozumí, reedukace šla tedy velmi pomalu. I přesto jsme se ale shodly na tom, že za jedno pololetí udělala kus práce a její přístup ke zlomkům se mírně zlepšil. Co se bohužel moc nezlepšilo, jsou její formulace (např. „A to nahoře v tom zlomku musím vydělit tím dole…“), na kterých budeme muset ještě pracovat.

Cilka

Práce se Cilkou probíhala obzvlášť náročně. Podle diagnostického testu a především podle jejího chování během hodin se pravděpodobně nachází ve třetím stádiu nemoci formalizmu. Nesnaží se pochopit podstatu věcí, především pokud jde o algoritmy, které už zná, a učí se vše pouze pamětně. Mou snahu jí pomoci většinou odmítá a tvrdí, že všemu výborně rozumí a umí to používat. Když dostane zadanou úlohu, se kterou si neví rady nebo ji vyřeší špatně, chybu nepřizná, maximálně řekne, „že to pomotala, protože je unavená". Jen málokdy řekne, že něco neví. Tento nezájem je ještě umocněn jejím věkem a obdobím puberty, ve které se aktuálně bezesporu nachází.

Jak už bylo zmíněno dříve, Cilka s oblibou dělá všechny domácí úkoly, včetně těch dobrovolných, aby byla ze svých spolužáků nejlepší. Problém je, že tyto úkoly, které jsou z velké většiny jen prostým dosazováním do vzorečků nebo mechanickým počítáním číselných a algebraických výrazů, si často nosí do hodin doučování. V rozhovoru s maminkou Cilky jsme se shodly na tom, že k tomu mě a doučování nepotřebuje, obdobné úlohy může řešit doma a během doučování se můžeme věnovat oblastem, ve kterých jí mohu pomoci víc. Naneštěstí má Cilka tolik mimoškolních aktivit, že nemá čas dělat domácí úkoly jindy, což ve výsledku znamená to, že z celkových 16 hodin doučování, které jsme spolu za toto pololetí měly, jsme se jen na čtyřech z nich reedukaci věnovaly soustavně. Bohužel ani tyto čtyři hodiny nebyly reedukaci věnovány celé, v součtu jsme nemechanickou prací se zlomky strávily ani ne dvě hodiny. Toto číslo je alarmující a pro reedukaci formálních poznatků v případě Cilky naprosto nedostačující, bohužel se nedalo jinak. Co je horší, celou tuto dobu projevovala Cilka obrovský nezájem zabývat se čímkoliv, co nedělali v běžné škole a v čem neviděla okamžitý užitek. Než se s ní neustále hádat a hodiny jí znepříjemnit, rozhodla jsem se chytit každé příležitosti, co mi dala, abych se alespoň některé její znalosti pokusila zživotnit. Snažila jsem se tedy každou možnou chvíli na oblast zlomků navázat. Snad pokaždé, když se někde v jejím domácím úkolu objevil zlomek, zakreslovaly jsme ho na číselnou osu, kreslily kruhový model, bavily se o tom, co znamená apod. Zpočátku si se zakreslování na číselnou osu nevěděla vůbec rady, ačkoliv s modelem kruh (koláč) problém neměla:

(*nakreslená je číselná osa, interval mezi nulou a jednou je rozdělený na osm dílů*)

T: A kde bude teda jedna osmina?

S: (*smích a následné ticho*)

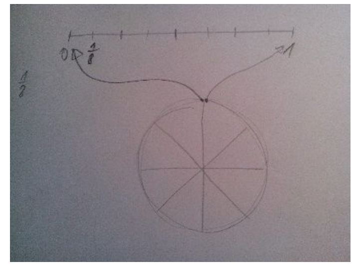
T: Tak kolik máme dílků? (*ticho, následně ukazuje na jmenovatele*)

S: Osm.

T: A my chceme jenom...? (*ukazuje na čitatele*)

S: Jednu osminu, ta je tedy (*kreslí správně na osu*)

T: No vida! A to je úplně to samý, jako s tím koláčem“ […] máš koláč a tady máš osminu. [...] ten koláč jenom vezmeš, tohle dáš sem (*kreslí šipku k nule*), tohle dáš sem (*kreslí šipku k jedničce*), takhle to (*gesto rukama „roztažení“*) roztáhneš … (viz obr. 4)



Obrázek 4

Zdá se, že toto přirovnání Cilce pomohlo, protože ještě několikrát v průběhu hodiny stejné gesto „roztažení“ použila a zlomek zakreslila správně. Problémy má ale s rozdělováním kruhu a úsečky na jiné části, než na poloviny, třetiny, čtvrtiny nebo osminy. Opakovaně se stalo, že model rozdělila na o jednu část více, než potřebovala, tedy že např. pro rozdělení na pětiny nakreslila pět dělicích čar, a získala tak šestiny. Ačkoliv vždy recitovala, že všechny dílky musí být stejně velké, ještě při závěrečném testu jí nedělalo problém jednu dělicí čáru škrtnout a spojit tak dva dílky do jednoho.

Jakákoliv snaha odvodit s Cilkou algoritmy pro početní operace se zlomky a jejich grafické řešení troskotala na jejím nezájmu. Zabývaly jsme se jimi tedy pouze, pokud to bylo nezbytné v rámci aktuální úlohy. Trochu zájmu bylo možné zaregistrovat až u egyptských úloh o dělení chleba, kterým jsme se věnovaly dokonce dvakrát. Tak jako Bára, ani Cilka nedostala k první úloze jiné instrukce, než že má spravedlivě rozdělit dva chleby mezi tři lidi a použít u toho kmenové zlomky. Podle očekávání Cilka rozdělila každý chleba na třetiny s tím, že každý dostane třetinu a třetinu, tedy dvě třetiny. Když jsem jí začala upřesňovat instrukce a vysvětlovat, jak bychom chleby dělily egyptským způsobem, Cilka mě razantně zarazila, abych jí neukazovala žádný příklad, že to vymyslí sama. To bylo poprvé, co jsem u ní zaznamenala podobné nadšení. Bohužel jí nevydrželo ani do dalšího týdne. Při řešení hned první úlohy prokázala dobrou práci se složitým celkem:

T: Takže, každej dostane jednu polovinu a tahle část?

S: A jednu třetinu.

T: No ale pozor, to je jedna třetina z poloviny.

S: Tak jednu pětinu, jednu šestinu.

T: Tak co?

S: Jedna třetina z jedný poloviny, tak to je jedna šestina.

I v následujících úlohách Cilce formulace násobení jako „část z části“ pomáhala a řešila ji správně. Tu samou hodinu jsme řešily i některé slovní úlohy z oblasti 5 (viz oddíl 5.2) a motivační úlohu pro operace se zlomky o hranatém koláči (oblast 4), které byly pro Cilku trochu zábavnější, než pouhé počítání a zakreslování zlomků. Úlohy a a c vyřešila správně, problém ale nastal s úlohou d, kde měla porovnat velikost zlomků $\frac{4}{7}$ a $\frac{5}{9}$. Hned zkraje převedla $\frac{4}{7}$ na $1\frac{1}{3}$ a $\frac{5}{9}$ na $1\frac{1}{4}$. Obdobná chyba se objevovala opakovaně v průběhu celého pololetí, včetně závěrečného testu. Vysvětlení je jednoduché – Cilka si pamatuje, že smíšené číslo dostane, když čitatele zlomku vydělí jeho jmenovatelem. Jelikož zná ale algoritmus formálně, občas zamění čitatele a jmenovatele a dělí obráceně. Sama má potom problémy objevit svou chybu, když je na ni upozorněna:

> T: Počkej, jak jedna a jedna třetina? (*ticho*) Čtyři sedminy tabulky čokolády, je to víc než tabulka, nebo míň než tabulka?
>
> S: Míň.
>
> T: A jedna a jedna třetina?
>
> S: No, ale jakože se to tam vejde, chápeš. Do tý sedmičky, tadyto smíšený číslo.
>
> T: Ale ty si mi teď řekla, že čtyři sedminy jsou menší než jedna. (*ticho*) A teď jsi mi napsala smíšený číslo, že je to jedna a něco.
>
> S: Nejsou menší! (*ticho*) Počkat počkat, takhle se to nepočítá, ono se to vlastně nemůže dělat, to musí bejt opačně!

Ačkoliv jsme s Cilkou vždy diskutovaly o tom, jaké zlomky jsou menší než jedna, jaké jsou větší něž jedna a jaké zlomky můžeme převádět na smíšené číslo, dokonce jsme si i ukazovaly zápis ve tvaru např. $\frac{3}{4} = 0\frac{3}{4}$, pokud Cilka trvala na tvaru smíšeného čísla, obdobná chyba se ale opakovala téměř každou hodinu. Podle mého názoru se v použití algoritmu cítí zkrátka jistěji a nechce se ho vzdávat ani za cenu, že ho občas použije špatně. Podobná situace probíhala i se složenými zlomky. Cilka si z běžné školy odnesla poučku, že když spojí vnější a vnitřní členy, dá mezi ně násobení a převede je na jeden zlomek, zbaví se složeného zlomku, například následovně: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{3}} = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 5}$.

I zde ale občas zapomene, jestli má do čitatele napsat čísla spojená vnějšími čarami, nebo vnitřními. V tomto případě je zarážející především to, že Cilka umí bez problému použít i algoritmus, kdy hlavní zlomkovou čáru přepíše na děleno a to následně převede na násobení převrácenou hodnotou zlomku, i když i zde se z velké části jedná o pamětně uložený algoritmus. Rozluštit princip tohoto algoritmu jsme se snažily mnohokrát, Cilka však nejevila zájem o to porozumět mu.

V neposlední řadě má Cilka stále problémy s podstatou zlomku. Na jednu stranu snad i dobře rozumí dělení celku na části, na stranu druhou pro ni některé zlomky zůstávají jenom dvojicí čísel. Zde se vracíme k úloze o čokoládě, kde měla Cilka porovnat zlomky $\frac{4}{7}$ a $\frac{5}{9}$. Okamžitě odpověděla, že větší je $\frac{5}{9}$. Na otázku, jak to zjistila, odpověděla toto:

> S: ...no protože tady máš pět a devět. A pět a devět jsou od sebe čtyři. A tady máš čtyři a sedm a to je od sebe tři.
>
> T: Eh, a když ti dám sto a sto tři (*píše jako zlomek)*, ty jsou od sebe taky tři. Budeš mít sto třetin a čtyři sedminy. Tak který si vybereš? Oboje jsou od sebe tři.
>
> S: To je jedno, to je to stejný.

Ukazujeme si tedy úlohu, kde má porovnat $\frac{1}{4}$ a $\frac{4}{7}$, jejichž čitatelé a jmenovatelé se taktéž liší o tři, a žádám ji, aby oba zlomky nakreslila na kruhovém modelu. Konečně dochází k závěru, že zlomky nejsou stejné. Po tomto objevu se rozhoduje nakreslit si oba původní zlomky na kruhovém modelu, ale nedaří se jí to. Ptám se, jestli by dokázala dát příklad dvou zlomků, o kterých dokáže jasně říci, který z nich je větší a který menší. V tu chvíli se rozzáří a vyhrkne, že je musí převést na společného jmenovatele. Kromě několika nepřesností v zápise už úlohu dořeší správně.

Jak už bylo zmíněno dříve, práce s Cilkou byla opravdu velice obtížná. Sice jsme na reedukaci formálních poznatků v oblasti zlomků měly velmi málo času, přesto jsem jí za celé pololetí nebyla schopná dokázat, že je třeba, aby na svých znalostech něco změnila. Proč by také měla, když ve škole dostává skoro samé jedničky a dvojky? Motivace tedy byla kritickou složkou celého procesu reedukace. Co se nám přeci jen povedlo trochu zlepšit, je Cilčina práce na číselné ose. I když jí kreslení dílků o stejné velikosti stále nejde, na čtverečkovaném papíře pracuje s osou poměrně dobře, dokonce většinou zvládá i některé početní operace, kterým jsme se věnovaly jen minimálně. Cilčin vztah k používání algoritmů se bohužel příliš nezměnil. Sice už si je vědoma toho, že ne vždy si algoritmus pamatuje správně, stejně ho ale nejdřív zkusí použít (viz závěrečný test). Cilka má velkou výhodu v tom, že je poměrně chytrá. Pokud by se u úloh, které zrovna řeší, snažila přemýšlet a neaplikovala pouze naučené algoritmy, mohla by dosahovat mnohem lepších výsledků. Nezbytnou podmínkou ale zůstává.

Adam

Práce s Adamem byla pravým opakem práce s Cilkou. Adam velmi rychle pochopil, že jeho znalosti nejsou dostatečné, často sám od sebe projevoval zájem pochopit podstatu věcí a bylo na něm vidět, že je rád, když mu někdo pomáhá. Jeho další výhodou je, že se s oblibou věnuje i úlohám, které nezná z běžné školy, veškeré grafické řešení početních operací se zlomky a netradiční úlohy tedy přijímal s nadšením.

S podstatou zlomku ani s různými izolovanými modely (kromě číselné osy) Adam neměl ani na začátku reedukace problémy. Ačkoliv ve vstupním testu se mohlo zdát, že bude třeba věnovat se i této oblasti, za dobu, která mezitím uplynula, pravděpodobně došlo ke zživotnění jeho formálních poznatků. Vyzkoušeli jsme tedy jen několik úloh z oblasti 2 (viz oddíl 5.2), které řešil správně a velmi záhy o nich prohlásil, že jsou jednoduché. Začali jsme se paralelně věnovat oblastem 4 a 5, kde jsme řešili jednotlivé slovní úlohy a ukazovali si jejich řešení i graficky. Motivační úlohu o hranaté buchtě dokonce už slyšel dříve, hned tedy začal mluvit o společném násobku a správně ji vyřešil, stejně jako další slovní úlohy z oblasti 2. Mírné zaváhání se objevilo až u úlohy *d* o čokoládě, kde měl Adam porovnat dva zlomky, nicméně i tu nakonec vyřešil správně:

S: … čtyři sedminy a pět devítin. A ta tabulka, je určeno, kolik má dílků, nebo něco takovýho?

T: No, to je na tobě.

S: No, tak nejdřív si asi najdeme společnej násobek […]

T: A jak bude ta tabulka vypadat?

S: No, (*ticho*) … 7 dílků (*ukazuje vodorovně*) krát devět dílků (*ukazuje svisle*).

Následně převádí zlomky na společného jmenovatele a určuje výsledek.

Po vyřešení této úlohy začíná Adamovi jít i zakreslování zlomků na číselnou osu. Začínáme zlomky menšími než jedna, postupně se ale dostáváme i ke zlomkům větším než jedna, včetně několika záporných. Následující hodinu se pouštíme do grafického sčítání. Adam má graficky sečíst $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$. Každý zlomek si zakreslí na osu zvlášť a pak je sečte posunutím jedné třetiny za polovinu.

S: ...a vememe si tuhle jednu třetinu (*ukazuje*), přeneseme ji sem (*ukazuje na polovinu*) a vyskytne se nám třeba tady (*kreslí*), takže tady to bude … (*ticho*) … dohromady je to šest, takže tři, pět šestin.

T: No, tos to počítal! Jak jsi přišel na to, že dohromady je to šest?

S: No, to jsem spočítal…. Ale, joo, ano, eee, můžu si to rozdělit tím, že si udělám společnýho násobka.

T: … jmenovatele

S: jmenovatele… přes společný násobek… a rozdělím to na šestiny (*dělí*). A z toho už je to vidět, že je to pět šestin.

Dále Adam grafickým způsobem správně počítá i několik dalších úloh na sčítání a odčítání dvou zlomků. V jedné úloze se svým nepřesným dělením číselné osy na patnáctiny ztrácí v řešení a podotýká, že by měl kreslit přesněji. Ani grafické násobení na číselné ose Adamovi v posledních hodinách nedělalo problémy. Nenašli jsme bohužel čas věnovat se přímo operacím násobení a dělení mimo jejich reprezentaci na číselné ose, Adam na ni ale sám přišel s použitím „části z části“ pro násobení. Násobení jinými zlomky než kmenovými jsme do hodin zařadit nestihli.

Co se dalo měnit jen obtížně, je Adamovo recitování pouček, například pro porovnání velikosti dvou zlomků. Při prvním výskytu nějaké poučky jsme se vždy snažili objevit, proč a jak daný princip funguje, například pomocí vysvětlování pravidla mladšímu bratrovi:

> S: Tak bych mu to vysvětlil tak, že čím menší je to číslo tady (*ukazuje na jmenovatele*), tím je jakoby větší. A i když je tam ta jednička, tak to bude obráceně.
>
> […]
>
> T: No a proč to tak platí? (*ticho*) ...(nesrozumitelné) prý to znáš z fyziky, tak proč to tak je?
>
> S: (*ticho*) […] Protože třeba polovina bude vždycky víc než jedna čtvrtina, ale já to neumím moc vysvětlit.

Následně se dostáváme ke zlomku jako dělení celku na části, čímž Adam tuto poučku odůvodňuje. Bohužel, o několik hodin později mi v podobné situaci opět recituje poučku o velikosti dvou čísel a jejich převrácené hodnoty.

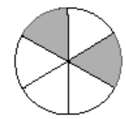
Celkově vzato si troufám tvrdit, že Adam udělal od vstupního testu v oblasti zlomků velký pokrok. Velice se zlepšila jeho práce na číselné ose, kde už neváhá, kam má zlomek zakreslit, a poradí si i s velkou částí početních operací. Ještě stále se nedokázal úplně zbavit odkazů na poučky, které se v běžné škole naučil, doufám ale, že pod velkou částí z nich už si dokáže představit něco konkrétnějšího a snad je i vysvětlit. Největší pokrok ale vidím v tom, že se Adam naučil během řešení úloh přemýšlet, jestli jeho postup dává smysl, to je vidět i několikrát během závěrečného testu. S Adamem se díky jeho vysoce rozvinuté poznávací motivaci pracovalo velmi dobře. Je možné, že nějaké zbytky formálních poznatků v oblasti zlomků v jeho kognitivní struktuře ještě přetrvaly, věřím ale, že na sobě bude pracovat sám a své formální poznatky bude chtít zživotnit.

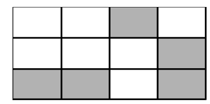
5.3. Závěrečný test

Na konci školního roku prošli všichni tři žáci diagnostickým testem, který by měl ukázat, zda a do jaké míry se podařilo jejich formální poznatky v oblasti zlomků reedukovat. Test je navržen tak, aby obsahoval několik úloh, s jejichž obdobou se žáci setkali během doučování nebo v běžné škole, zároveň ale i úlohy takové, které jsou pro ně nové, ale s nimiž by si měli by být schopni poradit. Důležité je zmínit, že test byl sestaven až po ukončení reedukace se všemi žáky, nebylo tedy možné je na něj cíleně připravovat. Test byl navržený na jednu doučovací hodinu, tedy 60 minut, a obsahuje deset úloh. Formát testu tak, jak ho dostali žáci, je k dispozici v příloze 4.

Úloha 1: Jaká část celku je vybarvena?

V této úloze měli žáci určit vybarvenou část ze tří různých modelů.

a) kruh – jednoduchá úloha, kde žáci neměli zapomenout na zkrácení zlomku 

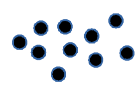
b) čokoláda – úloha, která dává za výsledek ne příliš hezký zlomek 

c) džbán – vyznačena je asi polovina vody, problematické je to, že to nevíme jistě. Na džbánu není žádná ryska ani popis, množství vody můžeme tedy jenom odhadovat. S obdobnou úlohou se žáci během doučování nesetkali. 

Úloha 2

a) Toto je $\frac{1}{3}$. Kolik je celek? 

Jedná se o diskrétní uspořádaný model, který by pro žáky mohl být jednodušší. Zároveň není třeba hledat počet kuliček pro kmenový zlomek.

b) Toto je $\frac{5}{2}$. Kolik je celek? 

Jedná se o model diskrétní neuspořádaný, zároveň máme zadán zlomek větší než jedna, tudíž hledáme celek, který je menší než daný počet.

c) Toto je $\frac{5}{3}$. Kolik je $\frac{2}{3}$?

S obdobnou úlohou se žáci během doučování nesetkali. Cílem totiž není nalézt celek, ale jeho část.

Úloha 3 – Sečti $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{4}$.

a) graficky na čokoládě – žáci by měli přijít s tabulkou 3×4 a správně na ní vyznačit součet požadovaných zlomků

b) graficky na číselné ose – žáci by si měli uvědomit, že potřebují stejný počet dílků, jako v části *a*

c) početně – použití algoritmu, které by nemělo dělat nikomu problém

Úloha 4 – Zjednoduš $\dfrac{2 \cdot 1{,}25 - \frac{8}{3} : \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}25}$.

Tato úloha by měla být o používání známých algoritmů. Žáci by neměli zapomínat na krácení zlomků. Použití kombinace desetinných čísel a zlomků umožňuje zjistit žákovské preference v oblasti těchto čísel.

Úloha 5 – V kině jsem strávila celkem 105 minut, ale $\frac{2}{15}$ z tohoto času běžely reklamy. Jak dlouhý byl film?

Jednoduchá slovní úloha z oblasti 2 (viz oddíl 5.2), kterou jsme s žáky nestihli řešit. Ptá se na doplněk části z celku.

Úloha 6 – Vyrábíme barevné pravítko. Malujeme od 2,5 cm do 4,1 cm modře, což jsou dvě patnáctiny. Od 5,2 cm do 7 cm malujeme červeně. Zbytek pravítka zůstal bílý. Jak dlouhá část není nabarvená a jak dlouhé je pravítko?

Tato slovní úloha opět kombinuje desetinná čísla a zlomky, nicméně zde se práce s desetinnými čísly může (alespoň v některých částech úlohy) jevit jako výhodnější. Žáci by si měli uvědomit, že na druhou otázku mohou odpovědět pouze s využitím první části zadání. Po nalezení délky nenabarvené části bude kladena doplňující otázka, jaká část pravítka to je. I tato úloha je součást oblasti 2 (viz oddíl 5.2).

Úloha 7 – grafické řešení operací se zlomky na číselné ose

V této úloze je zahrnuto osm gradovaných podúloh. Nejprve jde o pouhý grafický součet dvou čísel na číselné ose, později musí žáci nejprve z číselné osy odečíst hodnotu čísla X. S tímto číslem jsou dále prováděny operace sčítání, odčítání a násobení. Každá operace probíhá nejprve s celým číslem a se zlomkem, později se dvěma zlomky. Žáci mají k dispozici na čtverečkovaném papíře předkreslené číselné osy s vyznačenou nulou a jedničkou (kromě prvních dvou úloh, kde je vyznačená pouze nula – jedničku mají umístit, kam budou chtít). Výjimku tvoří část *e*, kde kromě nuly není vyznačená jednička, ale zlomek $\frac{2}{3}$. S podobnou úlohou se žáci během doučování nesetkali. V poslední části *h* mají žáci vynásobit dva nekmenové zlomky, s čímž se během doučování nesetkali. Očekávám, že s touto částí budou mít problémy a bude potřeba je upozornit, že si nekmenový zlomek můžou rozložit na součin přirozeného čísla a zlomku kmenového a provést operace postupně.

Úloha 8 – Vymysli slovní úlohu, která by se počítala výpočtem $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$.

Zde by žáci měli prokázat, že jsou si vědomi toho, že nemohou sčítat dva zlomky z různých celků. S podobnou úlohou ani s vymýšlením vlastního zadání se žáci během doučování nesetkali.

Úloha 9 – Cihla váží 1 kg a půl cihly k tomu. Kolik váží cihla?

U této úlohy jsou očekávány komplikace především díky jejímu komplikovanému zadání. Žáci by ze zadání měli pravděpodobně sestavit rovnici a správně ji vyřešit.

Úloha 10 – Rozděl 3 chleby mezi 7 lidí.

Známá úloha o dělení chleba s obměněnými čísly. Žáci nemají v zadání, že musí používat egyptský způsob řešení této úlohy, mohou ji vyřešit jakkoliv. Předpokládám ale, že se všichni o egyptský způsob pokusí.

Adam

Závěrečný test psal Adam o týden dřív než děvčata, 8. 6. 2015. Tento týden jim ve škole uzavírali známky, byl tedy poměrně unavený, ale během práce na testu to na něm téměř nebylo znát.

Když pomineme nerovnoměrné dělení úsečky v úloze 2*c* na pětiny, první dvě úlohy zvládá bez nejmenšího zaváhání, včetně okomentování nejistého obsahu džbánu.

Ve třetí úloze se na chvíli zarazil u tabulky čokolády, kde správně nakreslil tabulku 4×3 s tím, že tak se nám bude počítat dobře…

S: … protože dvě třetiny z dvanácti... (*ticho*) bohužel nevím, kolik je...

T: Tak koukni na to čokoládu… Třetiny, kde máš třetiny?

S: Čtyři, takže to bude [….] (*ukazuje v tabulce*)

T: Klidně si to tam vybarvi.

S: Jo, už vím. (*křížkuje čtyři dílky*) Tohlecto je jedna třetina, (*křížkuje další čtyři*) tohlecto bude ta druhá … a jedna čtvrtina jsou ty tři dílky (*kroužkuje tři dílky*), takže takhle a zbude mi jenom jeden dílek.

T: Takže kolik to bude?

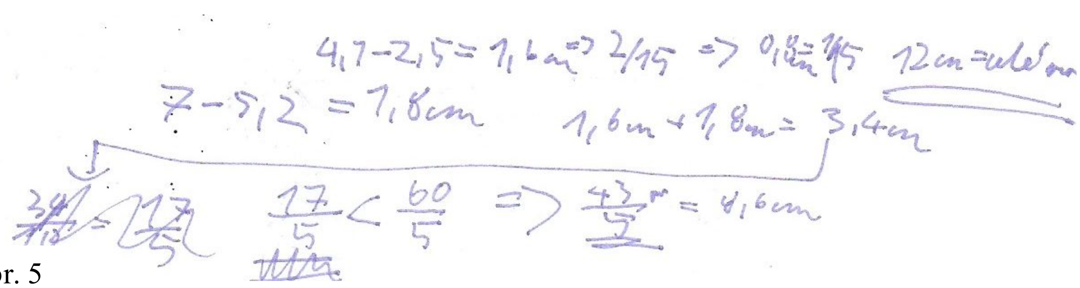
S: Takže to bude $\frac{11}{12}$.

Otázkou zůstává, proč se Adam zarazil u výpočtu $\frac{2}{3}$ ze 12. Možná začal automaticky přemýšlet o početním algoritmu, kterým to okamžitě nezvládl vyřešit. Horší variantou by bylo, že i práci s tabulkou čokolády má naučenou jako algoritmus, který v tu chvíli zapomněl, což se ale s ohledem na předchozí hodiny nejeví jako pravděpodobné vysvětlení. U části *b* rovnou oznámil, že osu musíme rozdělit na dvanáct částí, stejně jako v předchozí části. Celou druhou úlohu už dořešil bez zaváhání.

V následující úloze převedl všechna desetinná čísla automaticky na zlomky a zkrátil je. Ve třetím kroku úprav začal Adam krátit zlomky křížem v odčítání, což jsem v tu chvíli nepochopila. Opravila jsem ho, že se přepsal, na což mi sdělil, že nepřepsal. Pak se zhrozil a pronesl „že to je vlastně odčítání a to nejde“. Vzhledem k tomu, že Adam do výpočtu opravdu napsal nejprve znaménko krát, které poté opravil na mínus, nejspíš se jednalo pouze o chybu z nepozornosti.

Kromě drobné nepřesnosti v komentování úlohy, kdy Adam výpočet 105 – 14 přečetl jako „105 odečtu od 14“, vyřešil pátou úlohu správně.

Úlohu šestou řešil bez komplikace až do té doby, kdy měl určit, jaká část pravítka zůstala nenabarvená. Pravděpodobně jsem nezadala instrukce jasně, protože Adam začal převádět tuto délku v centimetrech na zlomek, který pouze udával tutéž délku ve formě zlomku. Otázku jsem mu dovysvětlila s tím, že to můžeme tímto způsobem dopočítat a na konci to převést na zlomek vyjadřující část pravítka. Adama ale zarazilo, že mu vyšel zlomek větší než jedna a výpočet škrtl (viz obr. 5). Poté se rozhodl převést na zlomek i celkovou délku pravítka, a získat tak poměrně složitým postupem délku nenabarvené části v centimetrech. Už jenom ústně jsme dořešili, jak by se tato délka vyjádřila zlomkem jako část celého pravítka.



Obr. 5

S prvními sedmi částmi sedmé úlohy neměl Adam žádné obtíže. Na rozdíl od děvčat si poradil i s částí *e*, jejíž obdobu jsme v hodinách nedělali. Část *g* vyjádřil nejprve desetinným číslem, až poté zlomkem. V části *h*, která pro něj byla taktéž neznámá, se nejprve snažil hodnotu výsledku dopočítat. Když jsme si ukázali rozklad zlomku $\frac{6}{7}$ na součin dvou čísel, pokusil se nejprve opět násobit šesti a sedminu výsledku dopočítat. Když jsem ho poprosila, aby řešení nakreslil a začal tedy násobením sedminou, úlohu bez mé pomoci dořešil.

V osmé úloze nejprve vymyslel zadání špatně, chybu si ale ihned uvědomil a opravil se:

S: Tak dejme tomu, že jsem koupil jednu třetinu chleba a k tomu dvě pětiny … nějakýho jinýho pečiva, jidáše třeba. […] Kolik mám celkem pečiva?

T: A na to potřebujeme tenhle výpočet? (*ukazuje na zadání*)

S: No, spíš ne, protože potřebuju taky chleba nebo taky jidáše.

V rozhovoru po testu jsme se k této úloze vrátili, abych si ověřila, že Adam své chybě rozumí. Vymyslel alternativní zadání, a sice že maluje tyč, nejprve třetinu a poté dvě pětiny. Zajímala ho délka části tyče, jako už nabarvil.

Jako ostatní žáci, i Adam v deváté úloze nejdříve výsledek tipoval. Když jsem ho poprosila, aby udělal zkoušku, uvědomil se, že 1,5 kg není správné řešení. Následně sám sestavil rovnici a správně ji dopočítal, včetně zkoušky.

U poslední úlohy si Adam nepamatoval zadání egyptského způsobu dělení chleba a chtěl dělit každou část chleba pouze na poloviny, respektive na mocniny dvojky. Po chvíli jsme se dohodli, že řešení tímto způsobem by trvalo dlouho a nemuselo by ani vést k cíli, řešil tedy úlohu znovu a dostal se k výsledku $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84}$. Ptala jsem se, co dostane, když tyto zlomky sečte, ale až po sečtení všech tří sčítanců si uvědomil spojitost se zadáním.

Po testu mi Adam řekl, že test nebyl tak obtížný, jak se obával. Myslím si, že ho zvládl poměrně dobře. Chyby, kterých se dopustil, byly z velké části z nepozornosti (např. špatně opsané znaménko). Adam mívá v oblibě řešit některé úlohy složitěji, než by bylo třeba, viz poslední otázka v úloze 6. Důležité ale je, že k výsledku se dostal správně, i když by bylo samozřejmě lepší použít jiný výpočet. Tuto možnost si sám uvědomil, čehož si cením, příště už snad stejnou „chybu“ neudělá. Adam měl už na začátku nejlepší znalosti ze všech tří žáků (je koneckonců i o rok starší než děvčata) a i závěrečný test zvládl nejlépe. Neobjevily se v něm žádné závažné chyby, které by si jen díky malé nápovědě nedokázal uvědomit a opravit. Jak už bylo zmíněno výše, Adam se naučil během řešení úloh přemýšlet o tom, co dělá. To jsme mohli vidět například v úloze 6, kde se zarazil, když mu vyšel zlomek větší než jedna, nebo v úloze 9, kde mu nevyšla zkouška. To považuji asi za největší úspěch, kterého jsme za tento školní rok dosáhli. Netýká se totiž jenom jedné jediné oblasti matematiky, ale bude se mu hodit i nadále.

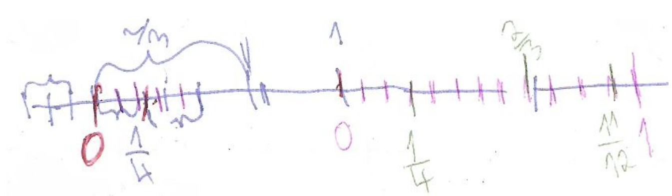
Bára

Závěrečný test psala Bára 16. 6. 2015. V té době už měli ve škole více než týden uzavřené známky, což na jednu stranu znamená, že nebyla unavená, na druhou stranu už se jí nechtělo nic dělat. Ze začátku se podle svých slov snažila, ke konci ale bylo vidět, že jí už dochází síly a odhodlání. Celý Bářin test je k dispozici v příloze 6.

První úlohu zvládla Bára bez problému včetně automatického krácení, zastavily jsme se jen u džbánu s vodou, o kterém rovnou prohlásila, že je v něm polovina vody. Po krátké diskuzi o tom, zda tomu tak skutečně je, přiznala, že to nemůže říct jistě, protože to neví.

Ani na počátku druhé úlohy neměla Bára problémy. Podle jejích slov jí připadal jednodušší uspořádaný model a, protože „se to líp počítalo“. Problém ale nastal s částí c, kdy Bára začala automaticky dělit úsečku na osm částí. Může to být způsobeno tím, že dvě předchozí hodiny jsme se věnovaly dělení úsečky v poměru, s čímž si to prý spletla. Po upozornění, že osminy úsečky jí asi nepomohou, se rozhodla dělit na pětiny, kde následně správně vyznačila $\frac{2}{3}$ i celek.

Třetí úloha dopadla asi nejhůř z celého testu. Bára se od začátku snažila součet nejdřív vypočítat, ani jedno grafické řešení nezvládla správně, dokonce ani s návodnými otázkami. V první části úlohy kreslila zpočátku tabulku čokolády 4×2 místo 4×3, vyznačovala v ní dílky o různé velikosti, navíc nepomohl ani odkaz na úlohu o buchtě (viz oddíl 5.2, oblast 4), kterou v hodině zvládla bez nejmenšího zaváhání. Nakonec nakreslila tabulku správně, ale špatně vyznačila požadované zlomky. S novou tabulkou a ohromnou pomocí nakonec vyřešila tuto část úlohy správně. Bohužel, grafické řešení na číselné ose probíhalo obdobně zmateně jako řešení s čokoládou. Třetiny i čtvrtiny sice Bára vyznačila dobře, zvolila ale tak malé měřítko, že z osy nešlo vyčíst vůbec nic (viz obr. 6). Nebyla schopná potom správně dokreslit dvanáctiny, aby mohla výsledek určit. Byla tedy požádána, aby osu nakreslila znovu a správně vyznačila všechny dílky. Poté už úlohu dořešila správně, včetně početního řešení.



Obr. 6

Tato úloha pro mě byla velkým zklamáním. Obdobná zadání Bára bez komplikací řešila v hodinách několik týdnů před testem a zde se stala nepřekonatelnou překážkou. Může to znamenat dvě věci. Buď byla opravdu tak nesoustředěná, jak tvrdila, a těšila se na prázdniny, nebo bylo reedukaci věnováno málo času a je nutné vrátit se zpět a začít znovu.

Čtvrtou úlohu vyřešila Bára dobře, několikrát jen zapomněla zkrátit zlomek, na což jsem ji z časových důvodů upozornila. Malou „náplastí na ránu“ z předchozí úlohy bylo to, že složený zlomek bez zaváhání převedla na násobení dvou jednoduchých zlomků a nekreslila si pomocné čáry jako dříve.

Kromě početní chyby v násobení vyřešila Bára pátou úlohu správně a svižně.

Následující úloha měla podle Báry obtížnější zadání, proto jej četla vícekrát a neustále se k němu vracela. Zadání si nakreslila na polopřímku, správně určila hodnotu patnáctiny, ze které vypočítala délku celého pravítka. Nenabarvenou část dopočítala rozdílem celého pravítka a součtu nabarvených částí, dokonce bez nejmenší pomoci správně určila, jaká část celého pravítka to je.

Na rozdíl od úlohy 3 s úlohou zaměřenou na grafické řešení operací na číselné ose neměla Bára tolik potíží. První čtyři úlohy zvládla velmi rychle a bezchybně, zarazila ji až část *e*:

S: … takže pět dílků je jedna … raz dva tři čtyři pět, tohle je jedna třetina

[…] šest něco … a teď je to ... (*nesměle*) šest dvanáctin?

T: V čem je to těžší oproti těm příkladům předtím?

S: Že tu nemáme jedničku

T: A nedokážeme ji spočítat?

S: To můžeme, ale to by bylo někde ... (*ukazuje za papír*)

T: No, my ji nenakreslíme. Ale můžeme vědět, kolik dílků tam bude, ne?

S: Jednička je, eh, patnáct třetin.

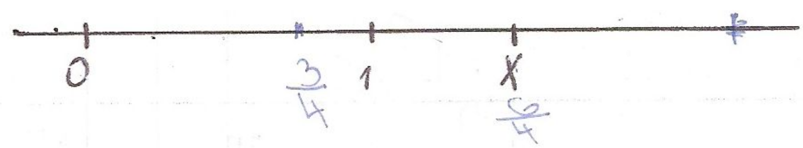
T: Patnáct třetin?

S: No, je, no, patnáct dílků prostě. To je šest (*ukazuje na X*).

T: Šest čeho?

S: No, já nevím (*smích*), šest patnáctin!

Následně už úlohu správně dořešila. V části *f* správně vyčetla hodnotu bodu $X = \frac{2}{6}$, který začala početně násobit dvěma. Byla požádána, aby úlohu vyřešila graficky, Bára se ale očividně držela početního algoritmu (který navíc použila špatně) a ohlásila výsledek $\frac{4}{12}$. Na otázku, kam se posune bod *X*, když se jeho umístění na ose vynásobí dvěma, tento bod správně zakreslila a následně napsala i výsledek. Obdobná chyba se projevila i u následující části *g*, kdy Bára výsledný bod zakreslila vpravo od bodu *X*. Podle zakresleného bodu je navíc možné, že si spletla zlomek $\frac{1}{2}$ a desetinné číslo 1,5 (viz obr. 7). Báry jsem se na její úvahu bohužel nezeptala, takže mohu jen spekulovat.



Obr. 7

Následovaly otázky, je-li zlomek $\frac{1}{2}$ menší, nebo větší než jedna a co se s číslem děje, když ho násobíme zlomkem menším než jedna. Na obě Bára správně odpověděla a úlohu dořešila. V poslední části sedmé úlohy jsem dostala okamžitě výsledek jedna. Když jsem ale chtěla zadání vyřešit graficky, ozvalo se „achjo". S velkým množstvím nápověd a návodných otázek jsme se dostaly k násobení $\frac{1}{6}$ šesti, načež Bára zajásala, že „to je těch šest šestin". Z výše popsaného je zřejmé, že sčítání a odčítání bylo u Báry reedukováno mnohem lépe než násobení a dělení. O těch má ještě poměrně nejasnou představu.

Zadání osmé úlohy vymyslela Bára následující: *on snědl* $\frac{1}{3}$ *dortu a ona* $\frac{2}{5}$*, kolik snědli dohromady?* Z následující diskuse se zdá, že problému snad rozumí správně:

T: Ehm, třeba. […] Musí jíst ten samej dort?

S: Ne.

T: Ne? Takže on může sníst třeba třetinu koláče a ona dvě pětiny dortu?

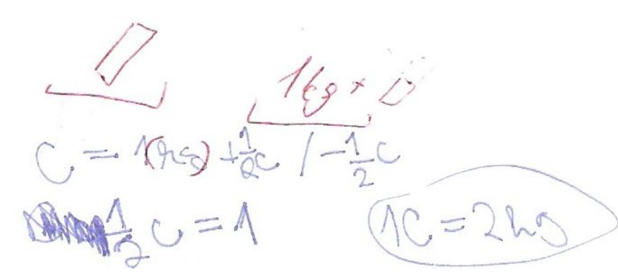
S: Ne, musí to být dort, ale nemusí to být ten samý dort.

T: Aha, takže když budeme mít třeba: on sní třetinu tohohle dortu (*kreslí malý kruh*) a ona sní dvě pětiny tohohle dortu (*kreslí velký kruh*)

S: (*skočí jí do řeči*) stejně velikého dortu.

Jelikož Bára hned v úvodu vymyslela správné zadání a těmito mými otázkami jen nabývala na dojmu, že bylo špatně, raději jsem ji za něj pochválila a s dalšími otázkami jsem skončila. Pro jistotu jsem shrnula, že nemůžeme brát v úvahu dva různé celky, což mi sebevědomě odsouhlasila.

Devátá úloha měla podle Bářiných slov náročné zadání. Svůj první pokus vydělit dvě čísla nedokázala vysvětlit a zdálo se, že zadání nerozumí. Nakreslila jsem jí tedy rovnoramenné váhy, z nichž byla schopna sestavit rovnici. Cihlu označíila *C*, půlku cihly označila *c*, ale po upozornění, že má dvě neznámé a neumí to vypočítat, automaticky připsala před malé *c* číslo $\frac{1}{2}$, že se tedy jedná o tu samou cihlu (viz obr. 8). Se sestavenou rovnicí si ale nevěděla rady, měla problémy s úpravami a jen s mou pomocí dopočítala výsledek.



Obr. 8

Ačkoliv byla u poslední úlohy upozorněna, že může chleby dělit, jak chce, tvářila se otráveně a nakreslila tři kruhy. Po chvíli to okomentovala, že nejraději by všechno rozdělila na sedm částí a každý by tak měl tři sedminy. Pokus navést ji po tomto správném řešení ještě na egyptský způsob byl marný a test jsme raději ukončily.

V rozhovoru po testu mi Bára řekla, že úlohy pro ni byly obtížné v tom, že jsme spoustu z nich necvičily. Uprostřed úloh s číselnými osami se prý velice vyčerpala a už neměla energii na přemýšlení. S tím se můžu pouze ztotožnit, tato hodina patřila rozhodně k jejím slabším výkonům. Katastrofální řešení, nebo spíše neřešení třetí úlohy mě opravdu překvapilo i vzhledem k tomu, že obdobné úlohy na číselné ose zvládla později v úloze 7 bez mrknutí oka. Obávám se, že Bára bude na reedukaci formálních poznatků v oblasti zlomku potřebovat mnohem více času než jedno školní pololetí. Podle vstupní diagnózy se na začátku vyskytovala pravděpodobně ve druhém stádiu nemoci kognitivní struktury, nejsem si ale jistá, zda se to podařilo výrazněji změnit. Co vidím jako pozitivum, je její přístup ke zlomkům. Je zřejmé, že už se jich nebojí tolik jako dříve, například dává přednost zlomkům před desetinnými čísly, pokud je to vhodné, a možná má i o něco větší představu, co to zlomek je. Rozhodně se zlepšila její práce s určováním celku z části na jakémkoliv modelu, včetně číselné osy, s níž si je také mnohem jistější. S grafickým sčítáním a odčítáním nemá, zdá se, problémy, nepochopené ale ještě stále zůstává násobení a dělení. Celkem vzato tedy Bára za toto pololetí odvedla kus práce. Pokud se svých formálních poznatků bude chtít zbavit úplně a nezískávat další, ještě větší kus práce ji čeká.

Cilka

Závěrečný test psala Cilka 15. 6. 2015. Stejně jako Bára už měla v tu dobu ve škole uzavřené známky a bylo na ní vidět, že se jí vysloveně nechce nic dělat. Celou hodinu se snažila jednotlivé úlohy co nejvíc urychlit a jít domů. Celý Cilčin test je k dispozici v příloze 7.

Hned v první úloze se objevila Cilčina obvyklá chyba – u tabulky čokolády správně určila, že výsledek je $\frac{5}{12}$, načež neváhala a zlomek převedla na smíšené číslo $2\frac{2}{12}$. Požádala jsem ji, aby smíšené číslo převedla zpět na zlomek, což odsouhlasila, že má správně. Když měla následně nakreslit pizzu o velikosti $2\frac{2}{12}$, podotkla, že to nevyjde. Na chvíli se odmlčela:

S: Ne, to nejde… ale jojo, je to dobře!

T: Jakto, že je to dobře a nevyjde to?

S: No nevyjde, protože to je dvanáctina a pět dvanáctin to nedá ani jednu pizzu.

T: Tak jakto, že to nevyjde, kde se stala chyba?

S: (*smích*) V počítání.

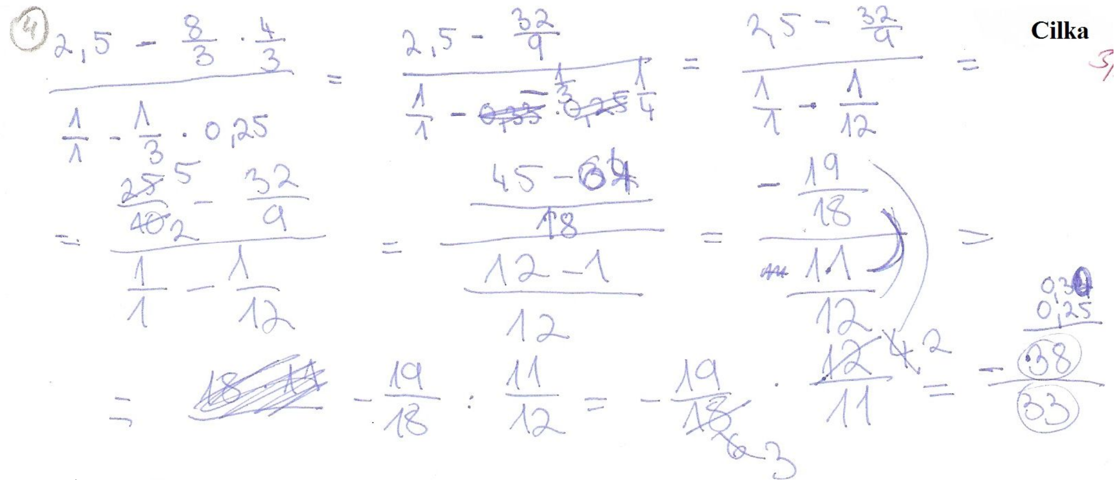
V tu chvíli si Cilka svou chybu uvědomila a smíšené číslo škrtla. U džbánu s vodou byla opět nutná diskuze, zda se jedná přesně o polovinu a podle čeho to můžeme poznat.

První dvě části druhé úlohy zvládá Cilka bez obtíží. U části *b* dokonce ihned oznámila, že to bude „nějaká část, protože teď je to $2\frac{1}{2}$ (*smích*)“. V části *c* se ale opět snažila převést oba zlomky na smíšené číslo. Když byla požádána o vysvětlení, druhé smíšené číslo škrtla a odrecitovala poučku. Nejprve bez použití redukčního úhlu rozdělila úsečku, místo pěti ale na šest částí. Když si chybu uvědomila, poslední dělicí čáru škrtla a na úsečce vyznačila první dva dílky. Stejná chyba se objevila i při následném použití redukčního úhlu.

Na začátku třetí úlohy vyznačila Cilka v tabulce čokolády dvě třetiny a ve zbylé třetině označila její čtvrtinu. Na otázku, jaký by byl tedy výsledek, napsala z těchto dvou zlomků zlomek složený a snažila se jej vypočítat. O něco později se snažila součet zlomků nakreslit na kruhovém modelu (pizza) a odhadnout, jaká část jí asi zbyla. Postupnými návodnými otázkami jsme se dostaly k tomu, že pro vyřešení potřebujeme rozdělení na 12 dílků. Byla požádána, aby se vrátila k tabulce čokolády s 12 dílky, načež Cilka nakreslila tabulku čokolády 1×12. Nepomohl ani odkaz na motivační úlohu o hranaté buchtě, ani další návodné otázky, takže nezbylo nic jiného, než jí tabulku čokolády nakreslit. Poté už úlohu dořešila. U části *b* si Cilka uvědomila, že bude potřebovat také dvanáctiny, úlohu tedy vyřešila správně, stejně tak jako část početní.

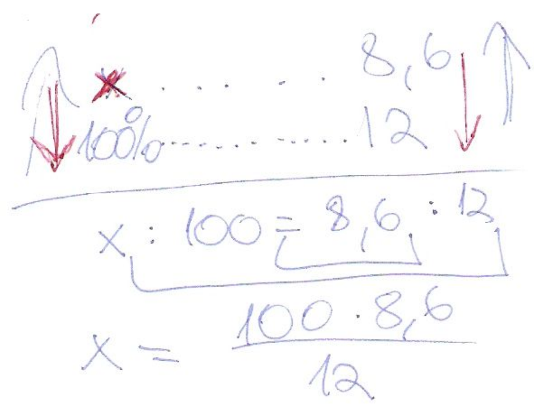
Ve čtvrté úloze nechala v čitateli zlomku desetinná čísla i zlomky, ve jmenovateli ale převedla $\frac{1}{3}$ na 0,33. Po námitce, že to není přesně, doplnila znaménko periodicity. Když jsme se zeptala, jak tedy bude násobit, aby výsledek nezaokrouhlovala, nevěděla. Po chvíli ticha jsem ji poprosila, aby se raději vrátila ke tvaru zlomků. V průběhu úlohy se vyskytlo ještě několik chyb způsobených pravděpodobně nepozorností. Když se Cilka dostala ke složenému zlomku, bez zaváhání doplnila čáry spojující vnitřní a vnější členy, výsledek ale napsala obráceně, prohodila totiž čitatele a jmenovatele složeného zlomku. Jelikož se této chyby dopouští snad každou doučovací hodinu, rázně jsem ji požádala, aby hlavní zlomovou čáru přepsala na dělení, což udělala a úlohu zdárně dořešila (viz obr. 9).

Stejně jako dva zbylí žáci ani Cilka neměla s pátou úlohou problémy a rychle ji vyřešila.



Obr. 9

Šestou úlohu vyřešila taktéž dobře, než jsme se ale dostaly k otázce, jaká část pravítka zůstala nenabarvená. Jelikož Cilka nedokázala odpovědět, dokonce i s velkou pomocí se zdálo, že řešení nerozumí, rozhodla se zkusit vyřešit tuto část úlohy ještě pomocí trojčlenky, které se nedávno věnovali ve škole. To ale odhalilo jen další formální poznatky mimo oblast zlomků. Cilka totiž automaticky nakreslila šipky, o kterých podle svých slov vůbec neví, co znamenají. Aniž by jim poté věnovala nejmenší pozornost, sestavila podle naučeného algoritmu rovnici, kterou neřešila, ale s pomocí spojovacích čar dosadila do vzorce pro výpočet hodnoty *x* (viz obr. 10).



Obr. 10

Stejně jako ostatní žáci, i Cilka zvládla první čtyři části sedmé úlohy dobře. U části *e* se ale zamyslela a po chvíli ticha pronesla, že „to je ňáký divný, ne?“. Postupně jsme se dostaly k tomu, že by měla zjistit počet kostiček ve třech třetinách, načež Cilka na osu správně zakreslila zlomek $\frac{1}{3}$. Po několika dalších špatných úvahách (např. že X má hodnotu $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, nebo dokonce $\frac{6}{3}$) jsme se konečně společně dostaly ke správné hodnotě bodu X a úlohu jsme dořešily. U částí *f* a *g* Cilka k mému nadšení nejdříve nakreslila výsledek a až poté určila hodnotu zlomku.

To bylo asi poprvé, kdy se zcela oprostila od početního algoritmu a úlohu řešila pouze graficky. U části *h* se ale opět dostáváme do začarovaného kruhu jejího nezájmu o porozumění a touhy držet se početního algoritmu, což mělo za následek, že si s úlohou nevěděla rady.

Ještě, než jsem Cilce dala komentář k jejímu řešení poslední části sedmé úlohy, vychrlila na mě řešení úlohy další:

S: Mám jednu třetinu lízátek, připočtu k tomu dvě pětiny lízátek, kolik mám lízátek?

T: A co znamená lízátek?

S: No, lízátko.

T: Jo lízátka jednoho, nebo nechápu?

S: No, no mám jednu třetinu lízátka a chci k tomu a připočtu k tomu dvě pětiny lízátka.

T: A co znamená „připočtu dvě pětiny lízátka“? (*smích*)

S: Mám jednu třetinu pizzy a připočtu k tomu dvě pětiny pizzy, kolik mám pizzy?

S ohledem na blížící se konec hodiny a Cilčin otrávený výraz jsme se raději přesunuly k následující úloze. Vzhledem k tomu, že Cilka mluvila v souvislosti s oběma zlomky vždy o stejném celku, můžeme odhadovat, že podstatě úlohy porozuměla.

O deváté úloze Cilka hned v úvodu řekla, že nedává smysl. Následně bez přemýšlení vychrlila, že cihla má hmotnost 1,5 kg, a nenechala se odbýt, dokud jsem neřekla, že tak to nevyjde. Aby pochopila zadání, nakreslila jsem jí rovnoramenné váhy. Cilka chtěla úlohu řešit opět trojčlenkou, nicméně nedokázala vysvětlit proč, ani ji správně sestavit, přesunuly se tedy k rovnici, kterou napůl s pomocí, napůl sama sestavila a správně dořešila. Vůbec nejevila zájem o nějaké vysvětlení nebo o zkoušku a vrhla se na poslední úlohu.

I Cilka se snažila řešit poslední úlohu egyptským stylem. Chleby správně rozdělila na třetiny, se zbylými dvěma třetinami si ale neuměla poradit. Nakonec se rozhodla dělit je na sedm částí, neuměla ale určit, jaký zlomek tak dostane. Překvapivě nepomohla ani formulace „části z části“, se kterou neměla dříve problémy, naopak jí šla velice dobře a pomáhala jí. Zkusily jsme i rozlévat vodu do sklenic. Tyto úlohy jsme s Cilkou během reedukace sice nestihly, ale napadlo mě, že by jí mohly pomoct. To se však nestalo. Po obtížích se čtením zlomku $\frac{1}{7}$ jako 1,7 jsme se nakonec dostaly k výsledku, že každý dostane $\frac{1}{3} + \frac{2}{21}$, což sice není egyptský způsob dělení chleba, ale na nic víc už neměla Cilka náladu. Donutila jsem ji alespoň zlomky sečíst, čímž si uvědomila spojitost se zadáním.

V následném rozhovoru se mi Cilka svěřila, že při psaní testu je vždy nervózní, některé chyby tedy mohly být způsobeny i tím. Podle mého názoru se zkrátka moc nesnažila, protože věděla, že jí už nic nehrozí. Za celé pololetí jsme toho z reedukace stihly málo, většina chyb, které Cilka dělala, se tedy shodovala s těmi, které udělala i ve vstupním testu. Opravdu se snad zlepšila jen její práce se zlomky na číselné ose, především její čistě grafické řešení úloh *f* a *g* bylo překvapivé, i když i na využití číselné osy bychom měly ještě zapracovat. Veliké množství chyb bylo způsobeno použitím algoritmu, který si Cilka nepamatovala přesně, šlo především o převod zlomku na smíšené číslo, práci se složeným zlomkem a trojčlenku. Energeticky nejnamáhavější byl ale Cilčin negativní přístup a nezájem v průběhu celého testu. Ať už je způsoben únavou, pubertou nebo čímkoliv jiným, pokud ho Cilka nedokáže změnit, bude odsouzená učit se matematiku pamětně a formálně, což jí dříve nebo později začne její studium komplikovat.

6. Závěr

Závěry učiněné z případových studií

V průběhu práce s žáky jsem si uvědomila, jak nezbytnou složkou úspěchu je žákův zájem spolupracovat a něco změnit. S Adamem, který o svých nedostatcích věděl a chtěl je odstranit, se pracovalo skvěle. Nebylo třeba ho do práce nutit, naopak sám občas přišel s tím, že něčemu (často i mimo oblast zlomků) nerozumí a chtěl by to napravit. Naopak s Cilkou, která každou svou neznalost a neporozumění zapírala, se nepodařilo udělat téměř nic.

Další klíčovou složkou pro správnou reedukaci formálních poznatků je dostatek času. Žáci i lektor se musí smířit s tím, že zázrak se nestane z minuty na minutu. Změnit zaběhlou rutinu a styl přemýšlení o zlomcích trvá delší dobu a žáci musí počítat s tím, že budou přicházet i úlohy, které nebudou umět vyřešit. Důležité je nevzdat se.

Ačkoliv je proces reedukace záležitostí závislou na každém žákovi a jeho potřebách, lze mezi žáky najít množství paralel. Když se podíváme například na závěrečný test a jeho sedmou úlohu, žádný z žáků neuměl vyřešit část *h*, všichni začali výsledek počítat. Případ Báry a Cilky je navíc ojedinělý tím, že do běžné školy i na doučování chodily po celou dobu společně, chybovaly tedy z velké části v naprosto stejných věcech. Čím více zkušeností tedy lektor s reedukací formálních poznatků získá, tím spíše bude umět odhadovat, kterých chyb se žáci dopustí, a bude jim umět lépe pomoci.

Vždy bývá výhodné snažit se úlohy žákovi přizpůsobit. Třeba Adamovi bylo úplně jedno, jestli budeme řezat dort, pizzu nebo kolo od auta, naopak Bára si pod kruhovým model vždycky představila dort. Při obtížích v řešení úlohy už stačilo jen zmínit, jak by to řešila na dortu, Bára se v tu chvíli rozzářila a většinou úlohu dořešila správně. Naopak Cilka, která je alergická na laktózu, si pod kruhovým modelem vždy představovala pizzu a při slově „dort“ se tvářila znechuceně. Obecně lze říci, že pro dělení celku na části se žáci nejčastěji obraceli právě ke kruhovému modelu, Adam používal přibližně stejně často model čokoláda. Je tedy vhodné zjistil, který model daný žák upřednostňuje, a snažit se s ním pracovat hlouběji. Další zajímavý rozdíl mezi jednotlivými žáky se projevil v tom, co považují za „hezký a představitelný“ zlomek. Rendl (2015, s. 142) mluví o tzv. *familiárních zlomcích* a podotýká, že podle zkušeností se mezi ně dají řadit zlomky se jmenovatelem polovina, třetina a čtvrtina, někdy i pětina. U děvčat mezi ně nepochybně můžeme řadit ještě osminu, kterou umí bez obtíží nakreslit i si ji dobře představit. Adam označil jako tyto zlomky ještě šestiny, protože vznikají jako třetiny z poloviny. Naopak všichni tři žáci mají problém s kreslením pětin a sedmin. I když tyto zlomky mají alespoň určitou oporu v představě žáků, jejich zakreslování, především v kruhovém modelu, si jistě žádá další práci.

Právě díky individuálnímu zaměření každého žáka je třeba, aby měl lektor v zásobě velké množství úloh a doplňujících aktivit. V prostředí individuálního doučování nemůžeme mluvit o skupinové práci, která bývá pro žáky často atraktivní, je tedy nutné zajistit dostatečné množství pestrých úloh, aby se žák nezačal v průběhu jejich řešení nudit. Kromě toho je nezbytná i určitá míra improvizace, koneckonců jako i v běžném školství. V průběhu hodiny se může objevit téměř jakákoliv žákovská chyba. Na rozdíl od běžného školství má lektor možnost se u této chyby zastavit a poskytnout žákovi vhodnou úlohu, aby si přítomnost chyby uvědomil. Je tedy žádoucí mít v zásobě více úloh z dané oblasti, které je možné žákům zadat, pokud to bude třeba.

Co by mohlo být uděláno lépe

S postupem času a s možností nahlédnout do výsledků závěrečných testů je zřejmé, že některé věci šly v průběhu celého procesu reedukace udělat jinak. V první řadě je to časový plán. Je zřejmé, že jedno školní pololetí na reedukaci celé oblasti zlomků rozhodně nestačí. Tím spíše ne, pokud se tomuto tématu nejde věnovat pravidelně. Asi by bylo vhodné se s žáky domluvit, zda mají o reedukaci zájem, a případně se jí věnovat alespoň dvacet minut každou hodinu. V této práci bychom ale přišli o to, že žáci nevědí, proč jsou nahráváni, a pravděpodobně by také nebylo možné pracovat s Cilkou, která o reedukaci zájem očividně nemá. Vzhledem ke znalostem žáků by byl tento postup asi efektivnější.

Co jsem si uvědomila během sledování natočených videí z hodin, je, jak málo času dávám žákům na přemýšlení. Je samozřejmé, že během hodiny toho chceme stihnout co nejvíc, nemělo by to ale být na úkor času, který mají na přemýšlení. Tato zkušenost pro mě tedy znamená poučení, na co si dávat pozor. Do očí bijící je také míra nespisovnosti, s jakou v hodinách s žáky mluvíme. Jelikož jsem ale opakovaně zjistila, že mi žáci při používání obecné češtiny rozumí lépe (především, pokud jde o používání nespisovných koncovek, které je „neruší"), neumím se nespisovnosti vyhýbat dlouho. Nejspíš by ale stálo za zkoušku pokusit se alespoň o hovorovou češtinu.

O motivaci Cilky toho už bylo napsáno mnoho. V každém případě by bylo vhodné a pro úspěšnou reedukaci přímo nezbytné podnítit její zájem a motivovat ji. Bohužel mě ani v tuto chvíli nenapadá jak.

Kdybychom měli na reedukaci více času, určitě by bylo vhodné věnovat se více rozvíjení pojmu kmenového zlomku. Z časových důvodů bylo zařazeno jen několik málo egyptských úloh o dělení chleba. Ze stejného důvodu nebylo možné věnovat se důsledně zavádění a modelování všech početních operací. Především s násobením a dělením mají všichni tři žáci stále problémy, určitě by bylo vhodné ponořit se hlouběji do jejich podstaty a pracovat důkladněji s úlohami z oblasti 4 (viz oddíl 5.2).

Bylo by vhodné věnovat se také více záporným zlomkům, které se nám sice mohou zdát samozřejmé, žákům ale často působí problémy. To by však mohlo odkrýt formální poznatky v oblasti záporných čísel, které by také bylo nutno reedukovat. Několik málo úloh se zápornými zlomky jsme s žáky řešili, rozhodně to ale nebyl počet dostačující.

S tímto problémem se podotýkají badatelé neustále – jak jen otestovat v závěrečném testu všechno. Ráda bych do něj zahrnula množství teoretických otázek a dalších úloh, ale vzhledem k tomu, že Adam, Bára i Cilka jsou ještě poměrně mladí a nedokáží se soustředit dlouho, test byl omezen na časový limit šedesáti minut. Nabízela se ještě možnost rozložit ho do dvou po sobě následujících hodin, ale vzhledem k tomu, že jsme se reedukaci snažili věnovat co nejvíce času, nezbyla bohužel jiná možnost, než stihnout závěrečný test během jedné hodiny.

Přes všechny zmíněné nedostatky věřím, že tento pokus (u někoho více, u někoho méně) pozitivně ovlivnil vztah žáků k matematice a jejímu chápání.

Shrnutí

Práce byla věnována formálním poznatkům v oblasti zlomků a především možnostem jejich reedukace. Aby mohla být každému žákovi věnována dostatečná péče, byla reedukace umístěna do prostředí individuálního doučování. O formálním poznání toho bylo už napsáno mnoho, tato práce je tedy jen malou kapkou v moři. O individuálním doučování naopak v české literatuře zatím příliš zmínek není, tato práce by tedy mohla čtenáři posloužit jako základní vodítko, kam se může v případě zájmu obrátit.

Přínosem práce je praktická implementace teoretických poznatků do tří případových studií. U tří žáků byly diagnostikovány formální poznatky v oblasti zlomků a následně byla v rámci jejich hodin soukromého doučování prováděna reedukace poznatků z této oblasti. Pro proces reedukace byla vytvořena série oblastí a úloh z nich vycházejících, které by se při procesu reedukace neměly opomenout.

Celý projekt ve mně zanechal smíšené dojmy. Na jednu stranu jsem ráda, že Adamovi a Báře se podařilo alespoň část svých formálních poznatků zživotnit, přístup Cilky ve mně ale probudil nechuť snažit se pomoci někomu, kdo o to nemá zájem. Během přehrávání videí pořízených při hodinách doučování jsem velice kriticky hodnotila nejen žáky, ale i své pedagogické dovednosti. Doufám, že jsem se ze svých chyb poučila a příští projekty budou o to úspěšnější.

7. Seznam použitých informačních zdrojů

Ashton, M. C. & Paunonen, S. V. (2001). Big Five Factors and Facets and the Prediction of Behavior. *Journal of Personality and Social Psychology*, 81(3), 524-539. Dostupné z http://www.subjectpool.com/ed_teach/y4person/2_facets/refs/Ashton_2001_why_use_facets.pdf.

Bray, M. (1999). *The shadow education system: Private tutoring and its implications for planners*. Paris: UNESCO International Institute for Educational Planning (IIEP).

Bray, M. (2003). *Adverse effects of private supplementary tutoring: Dimensions, implications and government responses*. Paris: UNESCO International Institute for Educational Planning (IIEP).

Bray, M. (2009). *Confronting the shadow education system: What government policies for what private tutoring?* Paris: UNESCO International Institute for Educational Planning (IIEP).

Bray, M. (2010). Blurring Boundaries: The Growing Visibility, Evolving Forms and Complex Implications of Private Supplementary Tutoring. *Orbis scholae*, 4(2), 61–73.

Bray, M. (2011). *The challenge of shadow education: Private tutoring and its implications for policy makers in the European Union*. Brussels: European Commission.

Bray, M., Mazawi, E. A. & Sultana, R. G. (Eds.). (2013). *Private tutoring across the Mediterranean: power dynamics and implications for learning and equity*. Rotterdam: Sense. Dostupné z https://www.sensepublishers.com/media/1634-private-tutoring-across-the-mediterranean.pdf.

Bray, M. & Silova, I. (2006). The Private Tutoring Phenomenon: International Patterns and Perspectives. In Silova, I., Būdienė, V., & Bray, M. (Eds.). *Education in a hidden marketplace: Monitoring of private tutoring. Overview and country reports* (27–40). New York: Open Society Institute.

Černík, J., Kocourek, J. & Pechová, E. (2006). *S vietnamskými dětmi na českých školách*. Jinočany: H & H.

Dindyal, J. & Besoondyal, H. (2007). Private tutoring in mathematics: the Mauritian experience. In *Proceedings of the Redesigning Pedagogy: Culture, Knowledge and Understanding.* Singapore. Dostupné z http://conference.crpp.nie.edu.sg/2007/paper/papers/CUL394.pdf.

Fontana, D. (1997). *Psychologie ve školní praxi*. Praha: Portál.

Fraction Matcher [online]. Přístup dne 13. 6. 2015, z http://phet.colorado.edu/sims/html/fraction-matcher/latest/fraction-matcher_en.html.

Hejný, M. (2004a). Mechanizmus poznávacího procesu. In Hejný, M., Novotná, J. & Stehlíková, N. (Eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (23–42). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2004b). Komunikační a interakční strategie učitele v hodinách matematiky. In Hejný, M., Novotná, J. & Stehlíková, N. (Eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (43–61). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2004c). Zlomky. In Hejný, M., Novotná, J. & Stehlíková, N. (Eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (343–355). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

Hejný, M., Novotná, J. & Stehlíková, N. (Eds.). (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. & Stehlíková, N. (1999). *Číselné představy dětí*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hrabal, V. & Pavelková, I. (2010). *Jaký jsem učitel*. Praha: Portál.

Kalhous, Z. & Obst, O. (2009). *Školní didaktika*. Praha: Portál.

Korpasová, P. (2009). *Private Supplementary Tutoring in English Language* [Bakalářská práce]. Masarykova Univerzita, Brno.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Dostupné z http://ir.nmu.org.ua/bitstream/handle/123456789/134513/912cb8b302a3fb39ccce653d445e3292.pdf?sequence=1.

Lee, J. (2007). *Two worlds of private tutoring: the prevalence and causes of after-school mathematics tutoring in Korea and the United States*. Dostupné z https://tcrecord.org/library/abstract.asp?contentid=12893.

Mareš, J. (2013). *Pedagogická psychologie*. Praha: Portál.

Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). (2013a). *Database – PISA 2012: Interactive Data Selection – Results.* OECD [online]. Přístup dne 2. 6. 2015, z http://pisa2012.acer.edu.au/interactive_results.php.

Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). (2013b). *PISA 2012 Results: What Makes Schools Successful? Resources, Policies and Practices* (Volume IV), Pisa, OECD Publishing [online]. Přístup dne 2. 6. 2015, z http://dx.doi.org/10.1787/9789264201156-en.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. (2013). MŠMT: Praha. Dostupné z http://www.nuv.cz/file/318/.

Rendl, M. (2015). Zlomky – obtíže žáků 2. stupně. In Vondrová, N., Rendl, M. a kol. *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků* (131–185). V recenzním řízení.

Rendl, M. & Pachova, A. (2013). Procesy učeni v diskurzu učitelů matematiky na 2. stupni zakladni školy. In Rendl, M. & Vondrova, N. a kol. *Kriticka mista matematiky na zakladni škole očima učitelů* (127–179). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogicka fakulta.

Rendl, M. & Vondrova, N. (2013). Kriticka mista matematiky – zkoumani diskurzu učitelů. In Rendl, M. & Vondrova, N. a kol. *Kriticka mista matematiky na zakladni škole očima učitelů* (7–16). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogicka fakulta.

Silova, I., Būdienė, V. & Bray, M. (Eds.). (2006). *Education in a hidden marketplace: Monitoring of private tutoring. Overview and country reports*. New York: Open Society Institute.

Silova, I. & Bray, M. (2006a). The Context: Societies and Education in the Post-Socialist Transformation. In Silova, I., Būdienė, V. & Bray, M. (Eds.). *Education in a hidden marketplace: Monitoring of private tutoring. Overview and country reports* (41–60). New York: Open Society Institute.

Silova, I. & Bray, M. (2006b). The Hidden Marketplace: Private Tutoring in Former Socialist Countries. In Silova, I., Būdienė, V., & Bray, M. (Eds.). *Education in a hidden marketplace: Monitoring of private tutoring. Overview and country reports* (71–98). New York: Open Society Institute.

Stehlíková, N. (2004). Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. In Hejný, M., Novotná, J. & Stehlíková, N. (Eds.). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (11–21). Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Tichá, M. & Macháčková, J. (2006). Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu.* Praha: JČMF. Dostupné z www.suma.jcmf.cz, sekce Ke stažení.

Vágnerová, M. (2010). *Psychologie osobnosti*. Praha: Karolinum.

Vališová, A. & Kasíková, H. (2011). *Pedagogika pro učitele*. Praha: Grada.

Ventura, A. & Jang, S. (2010). Private Tutoring through the Internet: Globalization and Off shoring. *Asia Pacific Education Review*, 11(1), 59–68. Dostupné z http://www.eduventura.com/resources/Ventura-e-Jang.pdf.

Vondrová, N. (2014). *Úvod do didaktiky matematiky: studium: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů 2. stupně ZŠ a SŠ; kurz: Oborová didaktika – matematika*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Zimmerman, A. (2013). *Using LEGO to Build Math Concepts* [online]. Přístup 3. 6. 2015 z http://www.scholastic.com/teachers/top-teaching/2013/12/using-lego-build-math-concepts.

8. Seznam příloh

Příloha 1 – postoje žáků v matematice

Příloha 2 – úlohy o celku

Příloha 3 – vstupní diagnostický test

Příloha 4 – orientační přehled doučovacích hodin a minut z nich věnovaných reedukaci

Příloha 5 – závěrečný test

Příloha 6 – závěrečný test (Adam)

Příloha 7 – závěrečný test (Bára)

Příloha 8 – závěrečný test (Cilka)

9. Přílohy

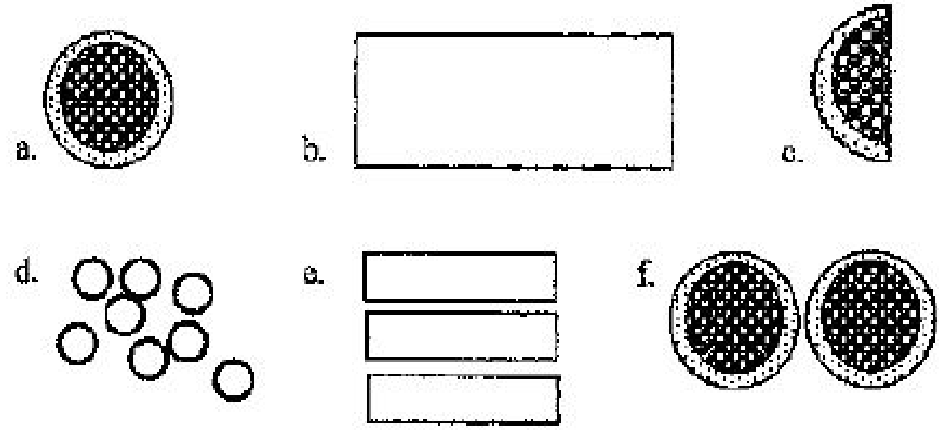
Příloha 1 – postoje žáků v matematice

pořadí	obliba	obtížnost	význam	prospěch
1	*informatika*	*český jazyk*	*angličtina*	*pracovní výchova*
2	*tělesná výchova*	***matematika***	*český jazyk*	*tělesná výchova*
3	*pracovní výchova*	*chemie*	***matematika***	*výtvarná výchova*
4	*rodinná výchova*	*němčina*	*informatika*	*rodinná výchova*
5	*výtvarná výchova*	*fyzika*	*němčina*	*hudební výchova*
6	*hudební výchova*	*angličtina*	*zeměpis*	*informatika*
7	*občanská výchova*	*dějepis*	*dějepis*	*občanská výchova*
8	*přírodopis*	*přírodopis*	*fyzika*	*přírodopis*
9	*dějepis*	*zeměpis*	*přírodopis*	*dějepis*
10	*angličtina*	*občanská výchova*	*tělesná výchova*	*zeměpis*
11	*zeměpis*	*informatika*	*chemie*	*chemie*
12	*chemie*	*hudební výchova*	*občanská výchova*	*angličtina*
13	***matematika***	*pracovní výchova*	*rodinná výchova*	*němčina*
14	*němčina*	*tělesná výchova*	*pracovní výchova*	*fyzika*
15	*fyzika*	*výtvarná výchova*	*výtvarná výchova*	***matematika***
16	*český jazyk*	*rodinná výchova*	*hudební výchova*	*český jazyk*

zdroj: Hrabal, Pavelková, 2010, s. 32

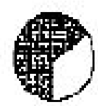
Příloha 2 – úlohy o celku

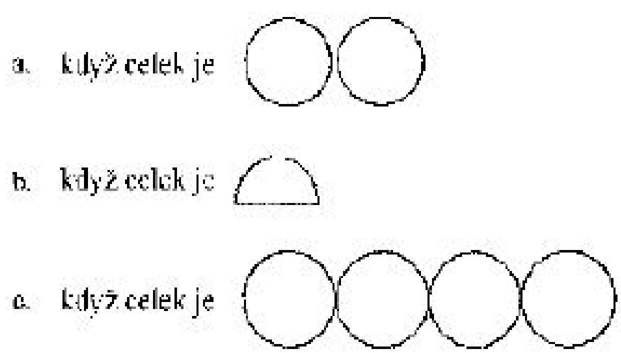
Který z obrázků může při řešení úloh se zlomky znázorňovat celek?



Pojmenujte vybarvenou část obrázku.

Pojmenuj vybarvenou část obrázku.

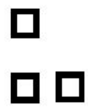
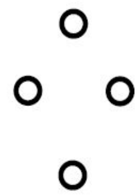




zdroj: Lamon, 2006, převzato z Tichá, 2006, s. 37

Příloha 3 – vstupní diagnostický test

Úloha 1

Když tohle je $\frac{1}{5}$, jak vypadá celek? 	Když tohle jsou $\frac{2}{7}$, jak vypadá celek? 	Když tohle je $\frac{5}{6}$, jak vypadá celek? 

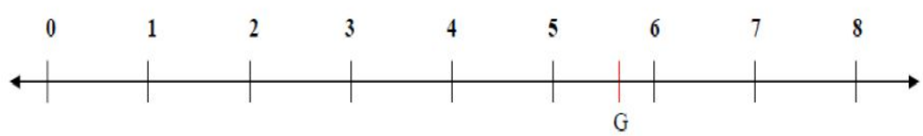
Úloha 2a
Po slevě o jednu třetinu stála mikina 756 Kč. Kolik stála původně?

Úloha 2b

Kuchyňský robot stojí v základní verzi 2 860 Kč. To je $\frac{5}{8}$ toho, co bychom zaplatili za verzi s úplným příslušenstvím. Kolik stojí úplná verze?

Úloha 3

Obrázek osy k úlohám



Úloha	**Bod G**	**Bod Q**	**Operace**
1	17/4	19/6	sčítání
2	7	7/11	násobení
3	17/3	8/11	násobení
4	7/9	6/12	násobení
5	51/12	15/9	odčítání
6	4	25/9	násobení
7	28/13	45/7	násobení

Úloha 4a

Matka Šetřílková peče často na víkend koláč. Dělá ho tak, aby se snědl čerstvý a nic nezbylo.
Recept koláče obsahuje:

$\frac{3}{8}$ kg mouky

$\frac{1}{2}$ čtvrtkilogramového balení másla

$\frac{1}{4}$ kilogramového balení cukru

3 vejce

Kromě toho samozřejmě trochu mléka ke smísení těsta a ovoce podle potřeby.
Rodina má 5 členů: matka, otec, jejich dvě děti (syn a dcera) a babička. Aby koláč vystačil pro celou rodinu, musí ho matka upéct z dvojnásobného množství surovin, než obsahuje recept.
Když se koláč nakrájí, snědí otec a matka po třech dílech, děti o $\frac{1}{3}$ více než rodiče, babička naopak o $\frac{1}{3}$ méně (než každý z rodičů).
Kolik surovin (mouky, másla, cukru a vajec) je na koláč potřeba?
Na kolik dílů se koláč krájí?

Úloha 4b

Minulý víkend se u Šetřílků zastavili na nečekanou návštěvu Nešetřilovi: teta, strýc, bratranec a malá sestřenice. Matka chce narychlo upéct ještě jeden koláč. Ví, že dospělí (teta a strýc) snědí stejně jako ona a otec, bratranec sní určitě stejně jako každé z jejích dětí (jsou zhruba stejně staří). Naopak malá sestřenice sní jen tolik jako babička.
Problém je v tom, že matka má už jen 5 vajec. Kolik bude matka potřebovat ostatních surovin?

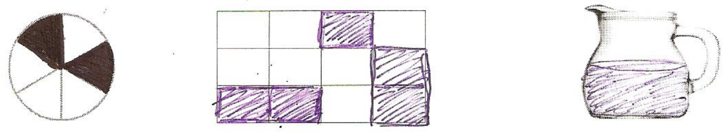
Zdroj: Rendl, 2015, s. 143–157.

Příloha 4 – orientační přehled doučovacích hodin a minut z nich věnovaných reedukaci zlomků

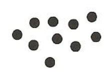
Datum	Žák	Reedukace [min]
17.10.2014	Adam	10
23.10.2014	Adam	20
13.11.2014	Adam	25
04.12.2014	Adam	5
17.02.2015	Adam	15
24.02.2015	Adam	30
17.03.2015	Adam	45
31.4.2015	Adam	30
14.04.2015	Adam	15
02.06.2015	Adam	40
09.06.2015	Adam	test
24.03.2015	Bára	50
31.03.2015	Bára	30
07.04.2015	Bára	35
21.04.2015	Bára	15
28.04.2015	Bára	15
05.05.2015	Bára	10
12.05.2015	Bára	15
19.05.2015	Bára	10
26.05.2015	Bára	5
02.06.2015	Bára	15
08.06.2015	Bára	20
16.06.2015	Bára	test
16.03.2015	Cilka	20
23.03.2015	Cilka	45
13.04.2015	Cilka	40
20.04.2015	Cilka	10
15.06.2015	Cilka	test

Příloha 5 – závěrečný test

1. Jaká část celku je vybarvena?



2. a) Toto je 1/3. Kolik je celek? 

b) Toto je 5/2. Kolik je celek? 

c) Toto je 5/3. Kolik je 2/3? 

3. Sečti 2/3 ¼
   a) graficky na čokoládě

   b) graficky na číselné ose

   c) početně

4. Zjednoduš $\dfrac{2 \quad 1{,}25 \quad \frac{8}{3}:\frac{3}{4}}{1 \quad \frac{1}{3} \quad 0{,}25}$

5. V kině jsem strávila celkem 105 minut, ale 2/15 z tohoto času běžely reklamy. Jak dlouhý byl film?

6. Vyrábíme barevné pravítko. Malujeme od 2,5 cm do 4,1 cm modře, což jsou 2/15. Od 5,2 cm do 7 cm malujeme červeně. Zbytek pravítka zůstal bílý. Jak dlouhá část není nabarvená a jak dlouhé je pravítko?

7. Graficky řeš

a) $2 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{4}$

c) $x - 2$

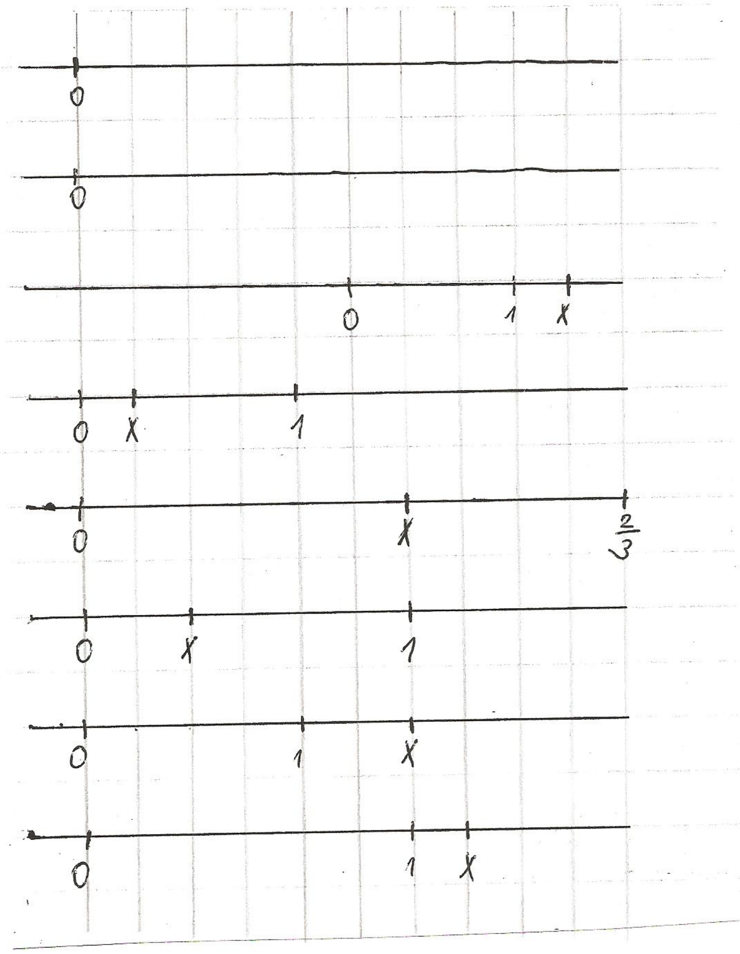
d) $x + \frac{1}{8}$

e) $x - \frac{1}{3}$

f) $x \cdot 2$

g) $x \cdot \frac{1}{2}$

h) $x \cdot \frac{6}{7}$



8. Vymysli slovní úlohu, která by se počítala výpočtem 1/3 + 2/5.

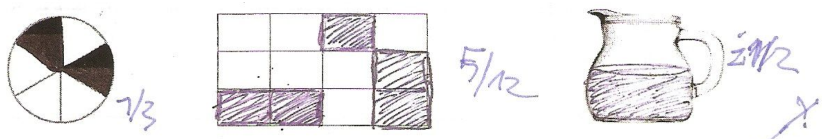
9. Cihla váží 1 kg a půl cihly k tomu. Kolik váží cihla?

10. Rozděl 3 chleby mezi 7 lidí.

Příloha 6 – závěrečný test (Adam)

Adam 1/2
10.6.2015

1. Jaká část celku je vybarvena?

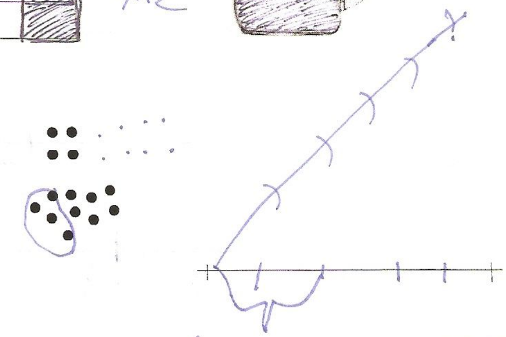


1/3   5/12   ≈ 1/2

2. a) Toto je 1/3. Kolik je celek?

b) Toto je 5/2. Kolik je celek?

c) Toto je 5/3. Kolik je 2/3?

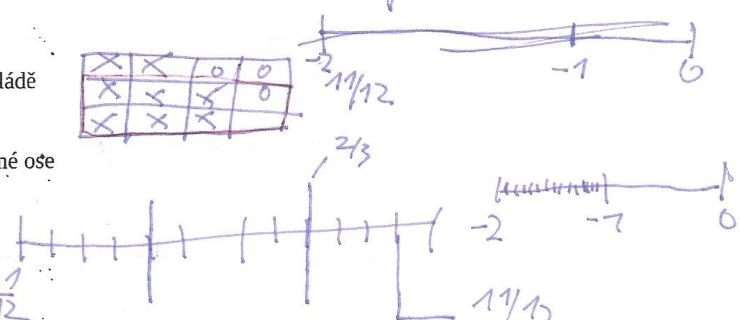


3. Sečti 2/3 + ¼

a) graficky na čokoládě

b) graficky na číselné ose

c) početně



11/12

$$\frac{8+3}{12} = \frac{11}{12}$$

4. Zjednoduš $\dfrac{2\cdot 1{,}25 - \frac{8}{3} : \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}25}$ $= \dfrac{\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{5}{2} - \frac{32}{9}}{\frac{3}{3} - \frac{1}{12}} =$

$$= \frac{\frac{5}{2} - \frac{32}{9}}{\frac{11}{12}} = \frac{\frac{45-64}{18}}{\frac{11}{12}} = \frac{-\frac{19}{18}}{\frac{11}{12}} = -\frac{19}{18}\cdot\frac{12}{11} = -\frac{38}{33}$$

5. V kině jsem strávila celkem 105 minut, ale 2/15 z tohoto času běžely reklamy. Jak dlouhý byl film?

105 : 15 = 7
7 · 2 = 14
105 − 14 = 91 min

6. Vyrábíme barevné pravítko. Malujeme od 2,5 cm do 4,1 cm modře, což jsou 2/15. Od 5,2 cm do 7 cm malujeme červeně. Zbytek pravítka zůstal bílý. Jak dlouhá část není nabarvená a jak dlouhé je pravítko?

4,1 − 2,5 = 1,6 cm ⇒ 2/15 ⇒ 0,8 cm = 1/15   12 cm = celé pravítko
7 − 5,2 = 1,8 cm   1,6 cm + 1,8 cm = 3,4 cm
34/10 = 17/5   17/5 < 60/5 ⇒ 43/5 = 8,6 cm

Adam 2/2
10.6.2015

7. Graficky řeš

a) $2 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{4}$

c) $x - 2$

d) $x + \frac{1}{8}$

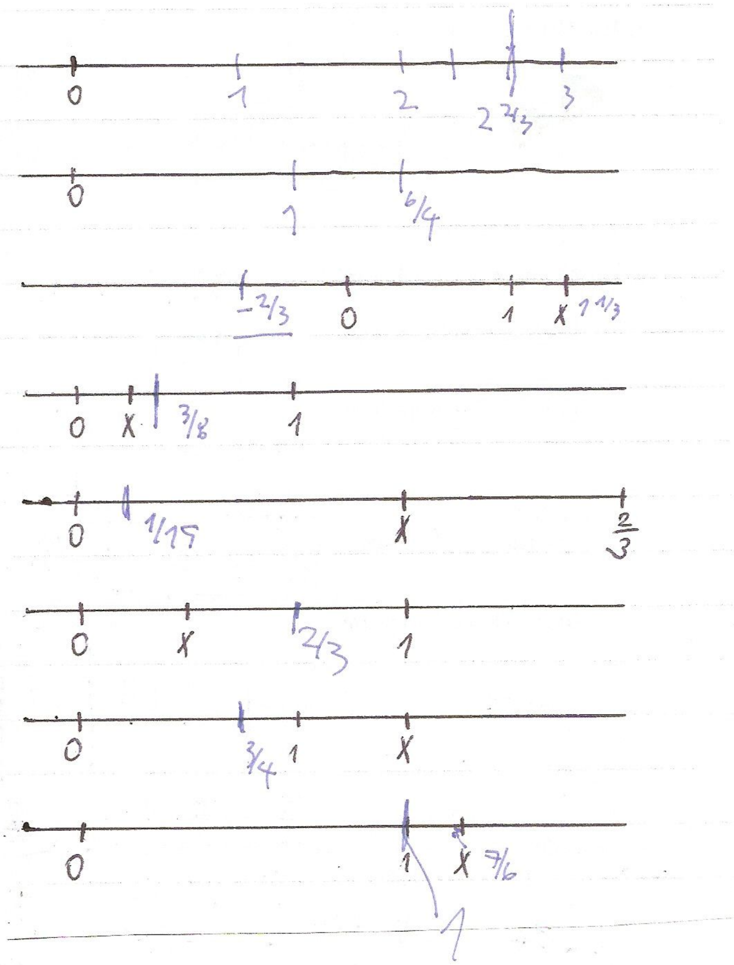
e) $x - \frac{1}{3}$

f) $x \cdot 2$

g) $x \cdot \frac{1}{2}$

h) $x \cdot \frac{6}{7}$

$x \cdot 6 = \frac{1}{7}$



8. Vymysli slovní úlohu, která by se počítala výpočtem 1/3 + 2/5.

1/3 chleba
2/5 ~~jiného~~ chleba
kolik chleba snědl?

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} =$

9. Cihla váží 1 kg a půl cihly k tomu. Kolik váží cihla?

$c = 1 + \frac{1}{2}c$

$c - \frac{1}{2}c = 1$

$\frac{1}{2}c = 1$

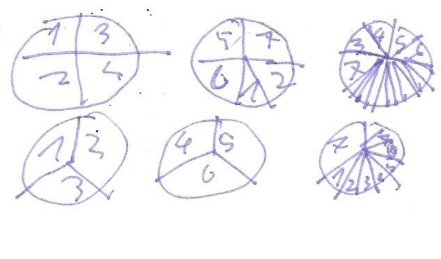
$c = 2\ kg$

$L = 2\ kg$

$P = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 + 1 = 2\ kg$

$L = P$

10. Rozděl 3 chleby mezi 7 lidí.



$\frac{1}{7}\ \frac{1}{12}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

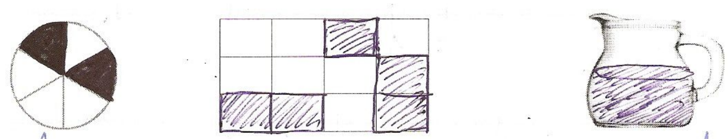
$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84}$

$\frac{28 + 7 + 1}{84} = \frac{36}{84}\ \frac{3}{7}$ chleba

Příloha 7 – závěrečný test (Bára)

Bára 1/2
16.6.2015

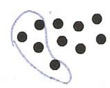
1. Jaká část celku je vybarvena?



$\frac{1}{3}$ $\frac{5}{12}$ asi $\frac{1}{2}$

2. a) Toto je 1/3. Kolik je celek?

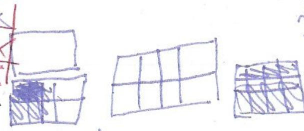
b) Toto je 5/2. Kolik je celek?



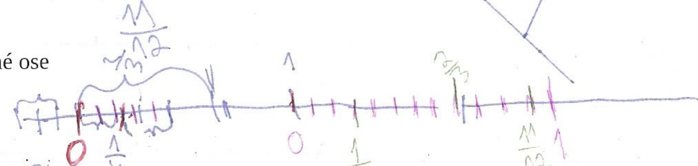
c) Toto je 5/3. Kolik je 2/3?

3. Sečti 2/3 a ¼

a) graficky na čokoládě



b) graficky na číselné ose



c) početně

$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$

4. Zjednoduš $\dfrac{2\cdot 1{,}25-\frac{8}{3}:\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}\cdot 0{,}25}$ $=\dfrac{2{,}50-\frac{32}{9}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{25}{100}}=\dfrac{\frac{25}{10}-\frac{32}{9}}{\frac{1}{1}-\frac{1}{12}}=\dfrac{\frac{45-32}{18}}{\frac{12-1}{12}}=$

$=\dfrac{\frac{13}{18}}{\frac{11}{12}}=\frac{13}{18}\cdot\frac{12}{11}=\frac{26}{33}$

5. V kině jsem strávila celkem 105 minut, ale 2/15 z tohoto času běžely reklamy. Jak dlouhý byl film?

105:15=7

13
·7
91

91 min

6. Vyrábíme barevné pravítko. Malujeme od 2,5 cm do 4,1 cm modře, což jsou 2/15. Od 5,2 cm do 7 cm malujeme červeně. Zbytek pravítka zůstal bílý. Jak dlouhá část není nabarvená a jak dlouhé je pravítko?

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Pravítko = 12 cm
nenabarvená = 8,6 cm

0,8 = 1/15
1,6 cm = 2/15
1,6 : 2 = 0,8
1,6 : 2 = 8

15
·0,8
120
00
120

1,6
+1,8
3,4

8,6
120

7. Graficky řeš

a) $2 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{4}$

c) $x - 2$

d) $x + \frac{1}{8}$

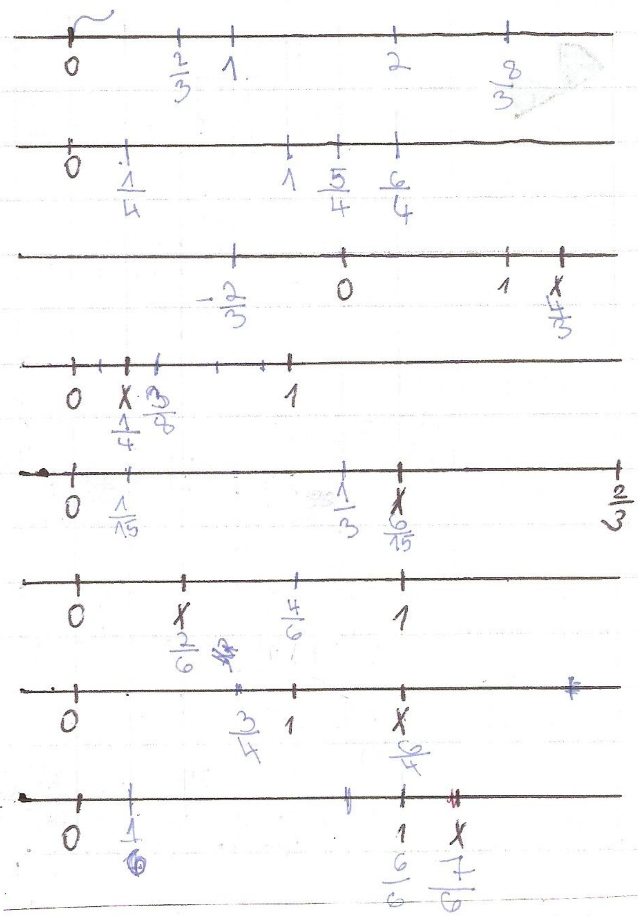
e) $x - \frac{1}{3}$

f) $x \cdot 2$

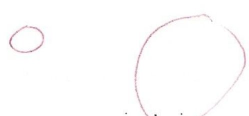
g) $x \cdot \frac{1}{2}$

h) $x \cdot \frac{6}{7}$

$1 : 6 \cdot \frac{1}{7}$



8. Vymysli slovní úlohu, která by se počítala výpočtem 1/3 + 2/5.



9. Cihla váží 1 kg a půl cihly k tomu. Kolik váží cihla?

$1 : 1{,}5 =$

$10 : 15 = 0{,}66$

100 100

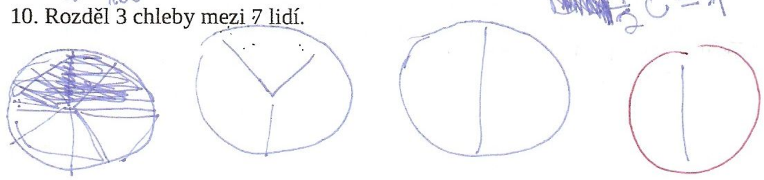
1kg +

$c = 1(kg) + \frac{1}{2}c \; / -\frac{1}{2}c$

$\frac{1}{2}c = 1$

$1c = 2kg$

10. Rozděl 3 chleby mezi 7 lidí.



Příloha 8 – závěrečný test (Cilka)

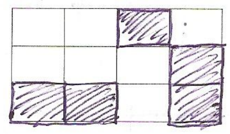
Cilka

15.6.2015

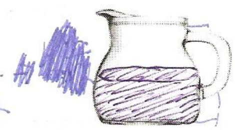
1/3

1. Jaká část celku je vybarvena?

$\frac{1}{3}$



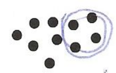
$\frac{5}{12}$



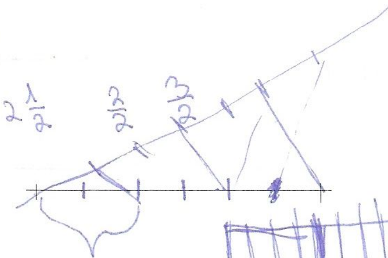
$\frac{1}{2}$

2. a) Toto je 1/3. Kolik je celek?

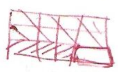
b) toto je 5/2. Kolik je celek?



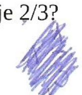
$2\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$



c) Toto je 5/3. Kolik je 2/3?



$1\frac{2}{3}$

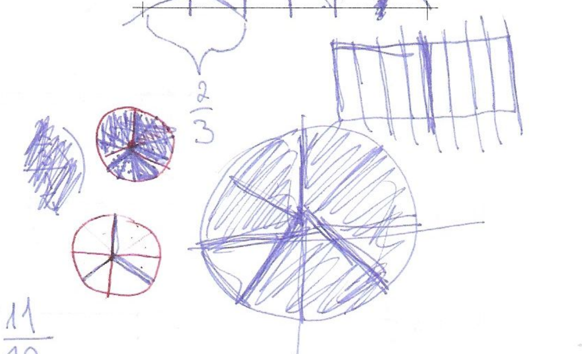


$\frac{2}{3}$

3. Sečti 2/3 a ¼

a) graficky na čokoládě

b) graficky na číselné ose



c) početně

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$$

4. Zjednoduš $\dfrac{2\cdot 1{,}25-\frac{8}{3}:\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}\cdot 0{,}25}$

5. V kině jsem strávila celkem 105 minut, ale 2/15 z tohoto času běžely reklamy. Jak dlouhý byl film?

$105 : 15 = 7$

14 min

$105 - 14 = 91$ min

6. Vyrábíme barevné pravítko. Malujeme od 2,5 cm do 4,1 cm modře, což jsou 2/15. Od 5,2 cm do 7 cm malujeme červeně. Zbytek pravítka zůstal bílý. Jak dlouhá část není nabarvená a jak dlouhé je pravítko?

$4{,}1 - 2{,}5 = 1{,}6 = \frac{2}{15}$

$1{,}6 : 2 = 0{,}8$

$0{,}8 \cdot 15 = 12{,}0$

12cm

$\frac{2}{15}+$

$12{,}00 - 1{,}6 = 1{,}8$

$12{,}00 - 3{,}4 = 8{,}60$

8,6

7. Graficky řeš

a) $2 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{4}$ $1\frac{2}{4}$

c) $X - 2$

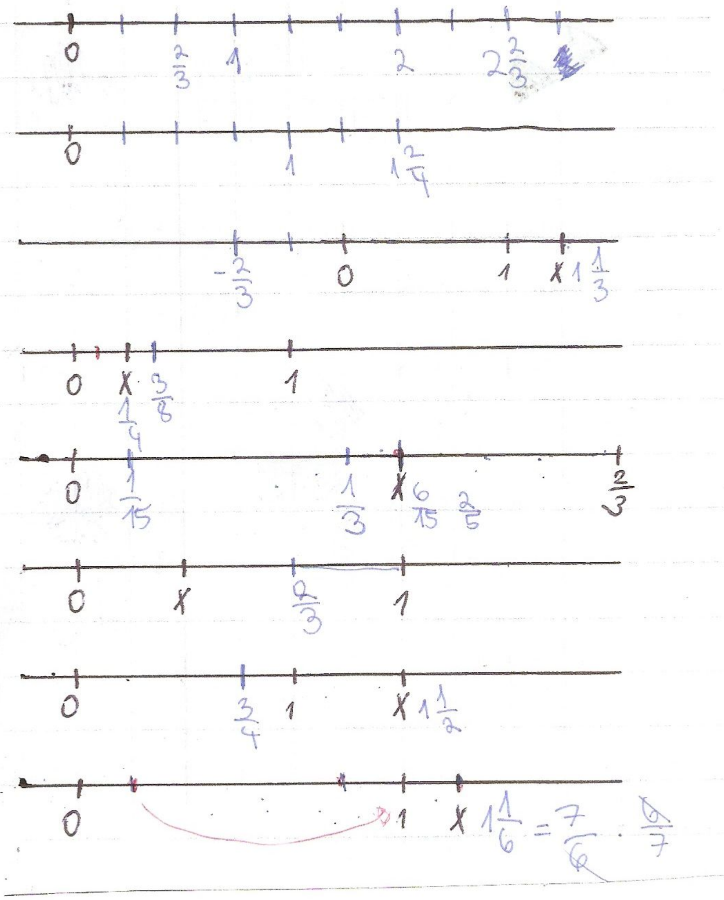
d) $X + \frac{1}{8}$

e) $X - \frac{1}{3}$

f) $X \cdot 2$

g) $X \cdot \frac{1}{2}$

h) $X \cdot \frac{6}{7} = 1 : 6 \cdot \frac{7}{x}$



8. Vymysli slovní úlohu, která by se počítala výpočtem 1/3 + 2/5.

0

9. Cihla váží 1 kg a půl cihly k tomu. Kolik váží cihla?

$\boxed{} = \boxed{} + 1$

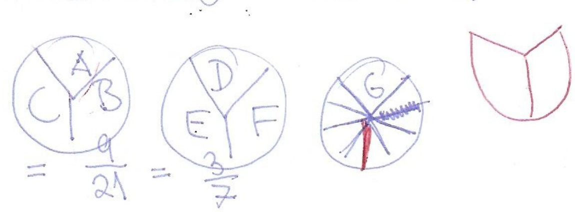
cihla = 0,5 cihly + 1

$x = 0{,}5x + 1$
$0{,}5x = 1$
$x = 2$

x 1
1 0,5

10. Rozděl 3 chleby mezi 7 lidí.

3x



$\frac{1}{3} + \frac{2}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

$\frac{2}{3} : \frac{1}{7} =$

$\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$

Cilka

3/3

(4)

$$\frac{2{,}5 - \frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\cdot 0{,}25} = \frac{2{,}5 - \frac{32}{9}}{\frac{1}{1} - \cancel{0{,}33}\cdot\cancel{0{,}25}} = \frac{2{,}5 - \frac{32}{9}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{12}} =$$

$$= \frac{\frac{5}{2} - \frac{32}{9}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{12}} = \frac{\frac{45-64}{18}}{\frac{12-1}{12}} = \frac{-\frac{19}{18}}{\frac{11}{12}} =$$

$$= -\frac{19}{18} : \frac{11}{12} = -\frac{19}{18}\cdot\frac{12}{11} = -\frac{38}{33}$$

$$\frac{0{,}33}{0{,}25}$$

(6) 8,6 cm - bílý!

12 cm - pravítko

$$\frac{"8{,}6"}{12} = \frac{86}{120}$$

$12 : 8{,}6 > 1$

$8{,}6 : 12 < 1$

x 8,6

100% 12

$x : 100 = 8{,}6 : 12$

$$x = \frac{100\cdot 8{,}6}{12}$$

(10) 1 l vody

$\frac{1}{2}$ z 1 l ... 1:2

$1\cdot\frac{1}{2}$

y = 5

y = ax + b   <0   >0   =0

$-1\cdot 1 + 1$

$-1 + 1 = 0$