Univerzita Karlova v Praze

Přírodovědecká fakulta

katedra fyzické geografie a geoekologie

Studijní program: Geografie

Studijní obor: Učitelství geografie a matematiky pro střední školy

Bc. Kateřina Hrubá

Úroveň základních matematických dovedností aspirantů studia geografie bakalářského stupně

The level of basic mathematical skills of aspirants studying geography of the bachelor degree

Diplomová práce

Praha, 2018

Vedoucí práce: RNDr. Marek Křížek, Ph. D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité informační zdroje a literaturu. Tato práce ani její podstatná část nebyla předložena k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

V Praze, 27. 11. 2017

Kateřina Hrubá

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu mé diplomové práce panu RNDr. Marku Křížkovi, Ph.D. za odborné vedení práce, náměty, cenné připomínky, ochotu a věnovaný čas, kterými přispěl ke konečné podobě této diplomové práce. Dále bych chtěla poděkovat paní doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc. za odpornou konzultaci. V neposlední řadě patří velký dík mojí rodině a přátelům za jejich podporu v průběhu celého mého studia.

Abstrakt

Předkládaná diplomová práce se zabývá problematikou matematických dovedností. Na rozdíl od dosavadních šetření, která byla realizována v českém školství, se zaměřuje na vysokoškolské studenty. Konkrétně je pozornost zaměřena na aspiranty studia geografie bakalářského stupně Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Hlavním cílem této práce je stanovit, jaké matematické dovednosti dělají daným studentům největší problémy, jestli se mění v čase a zda dělají problémy nezávisle na skupině studentů, nebo má každá skupina studentů problémy s jinými matematickými dovednostmi.

Pro naplnění cílů byly použity zápočtové testy z předmětu Matematická geografie. Vzhledem k tomu, že tento typ testů není běžně využíván ke zjišťování úrovně matematických dovedností, bylo nutné vytvořit vlastní metodiku hodnocení. Celkem bylo analyzováno 1920 zápočtových testů z šesti akademických let 2011/2012 až 2016/2017.

Z výsledků vyplývá, že největší problém dělaly všem sledovaným skupinám studentů „převody jednotek“, „použití vhodného vzorce ve správné podobě“ a „počítání s úhly“. Studentům oborů GeKa + FGG a UZ dělá problémy také „formulace slovní odpovědi či zdůvodnění“. Nejmenší podíl chyb udělali všechny sledované skupiny dohromady při „vyjadřování neznámé ze vzorce“, „dosazování do vzorce“, „správném používání jednotek“ a „znalosti průběhu goniometrických funkcí“. Celkově je velice obtížné vysledovat určitý trend ve změně chybovosti v matematických úkonech. V řadě případů však po neúspěšném roce následoval rok mnohem úspěšnější. Největší rozdíl v chybovosti mezi jednotlivými obory byl zjištěn u formulace slovní odpovědi a zdůvodnění. Jinak se hodnoty chybovosti u sledovaných úkonů mezi jednotlivými obory příliš nelišily. Celkově nejmenší podíl chyb udělali studenti oborů GeKa a FGG.

Výsledky této práce mohou posloužit učitelům matematiky k tomu, aby se ve svých hodinách více zaměřili na rozvoj a procvičování těchto problémových dovedností.

Klíčová slova: matematická gramotnost, Matematická geografie, mezipředmětové vztahy, matematické dovednosti, didaktický test

Abstract

This diploma thesis deals with problems of mathematical skills. Unlike previous research carried out in Czech education, this diploma thesis focuses on university students. Specifically, the focus is on aspirants of the bachelor degree studying geography at the Faculty of Science of Charles University in Prague. The main aim of this work is to determine the mathematical skills, with which students have the greatest problems, if these problematical skills change over time, whether they are problematic independently of the group of the students or each student group has problems with other mathematical skills.

In order to meet the goals the credit tests of mathematical geography were used. Because this type of test is not commonly used to determine the level of mathematical skills, it was necessary to develop an own assessment methodology. In total, 1920 credit tests were analyzed from the six academic years 2011/2012 to 2016/2017.

The results show that the most problematic mathematical skills are „unit transfers", „using the appropriate formula in the correct form" and „calculating the angles". GeKa + FGG and UZ students also have problems with „formulating a verbal answer or reasoning". All studied study fields did together the smallest proportion of mistakes in mathematical skill „expression the unknown from the formula", „fitting into the formula", „correct use of units" and „knowledge of graph of goniometric function". Overall, it is very difficult to trace a certain trend in changing the error rate in mathematical operations. However, in many cases after a failed academic year, the year was much more successful. The greatest difference in the error rates between the different study fields was found in the mathematical skill „formulating a verbal answer or reasoning". Otherwise, the error rates for the studied mathematical skills between different study fields did not differ much. Overall, the smallest proportion of mistakes in mathematical skills was made by GeKa + FGG study fields.

The results of this diploma thesis can help mathematics teachers to focus more on developing and practicing the most problematic mathematical skills in their lessons.

Keywords: mathematical literacy, mathematical geography, cross-curricular links, mathematical skills, didactic test

Obsah

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK 8

SEZNAM OBRÁZKŮ 9

SEZNAM TABULEK 11

1. ÚVOD 13

2. ŘEŠERŠE 15

2.1. Matematická gramotnost 15

2.1.1. Hodnocení úrovně matematické gramotnosti na českých školách 17

2.1.2. Výsledky českých žáků v mezinárodních srovnávacích testech 23

2.2. Provázanost vzdělávacího programu matematiky s geografií 29

2.2.1. Vzdělávací program matematiky v Rámcových vzdělávacích programech 29

2.2.2. Příklady geografických úloh vyžadujících aplikaci matematických znalostí a dovedností 34

2.3. Didaktický test 38

2.3.1. Vzdělávací proces a zpětná vazba 38

2.3.2. Co je to didaktický test? 39

2.3.3. Klasifikace didaktických testů 39

2.3.4. Vlastnosti didaktického testu 41

2.4. Slovní úlohy 45

3. MATERIÁL A METODY 49

3.1. Materiál 49

3.2. Metodika hodnocení matematických dovedností 53

3.3. Metodika statistického vyhodnocování analýzy matematických dovedností 54

3.4. Metodika hodnocení kvality zápočtových testů z Matematické geografie 54

4. VÝSLEDKY 56

4.1. Matematické úkony vyskytující se v zápočtových testech 56

4.2. Výsledky zjišťování úrovně matematických dovedností 60

4.2.1. Studenti oborů GeKa a FGG 60

4.2.2. Studenti oborů UZ 62

4.2.3. Studenti oboru UZ+M 64
4.2.4. Srovnání výsledků studentů oborů GeKa a FGG, UZ a UZ+M 66
4.3. Výsledky hodnocení kvality didaktických testů 69
4.3.1. Reliabilita didaktických testů 69
4.3.2. Index obtížnosti jednotlivých úloh testů 69
5. DISKUZE VÝSLEDKŮ 74
5.1. Úroveň matematických dovedností 74
5.2. Kritika metodiky hodnocení zápočtových testů 77
6. SHRNUTÍ A ZÁVĚR 79
7. LITERATURA 81
8. PŘÍLOHY 85

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK

RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
RVP G	Rámcový vzdělávací program pro gymnázia
ŠVP	Školní vzdělávací program
GeKa	Studijní obor Geografie – kartografie
FGG	Studijní obor Fyzická geografie a geoinformatika
UZ	Studijní obor Geografie se zaměřením na vzdělávání (bez kombinace s matematikou)
UZ+M	Studijní obor Geografie se zaměřením na vzdělávání (v kombinaci s matematikou)

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Rozložení výsledků žáků 6. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií podle průměrné úspěšnosti v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti ve školním roce 2015/2016. 21
Obr. 2: Rozložení podílu žáků 6. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií podle průměrné úspěšnosti v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti a pohlaví ve školním roce 2015/2016. 21
Obr. 3: Rozložení výsledků žáků 1. ročníku středních škol podle průměrné úspěšnosti v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti ve školním roce 2015/2016. 22
Obr. 4: Rozložení podílu žáků 1. ročníku středních škol podle průměrné úspěšnosti v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti a pohlaví ve školním roce 2015/2016 22
Obr. 5: Porovnání zastoupení českých žáků 4. ročníků ZŠ ve vědomostních úrovních v matematice v letech 1995 až 2015...25
Obr. 6: Změny ve výsledcích českých žáků v gramotnostních oblastech od roku 2000 28
Obr. 7: Komunikace mezi učitelem a žákem ve vyučovacím procesu..38
Obr. 8: Proces řešení slovních úloh s nematematickým obsahem 46
Obr. 9: Postup při řešení slovní úlohy. 48
Obr. 10: Chybovost v jednotlivých úkonech u studentů oborů GeKa a FGG za celé období 2011/2012 – 2016/2017 60
Obr. 11: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou větší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů GeKa a FGG v jednotlivých letech 2011/2012 – 2016/2017 61
Obr. 12: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou menší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů GeKa a FGG v letech 2011/2012 – 2016/2017...62
Obr. 13: Chybovost v jednotlivých úkonech u studentů oborů UZ za celé období 2011/2012 – 2016/2017 62
Obr. 14: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou větší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů UZ v letech 2011/2012 – 2016/2017 63
Obr. 15: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou menší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů UZ v letech 2011/2012 – 2016/2017 64

Obr. 16: Chybovost v jednotlivých úkonech u studentů oborů UZ+M za celé období 2011/2012 – 2016/2017 64
Obr. 17: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou větší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů UZ+M v letech 2011/2012 – 2016/2017 65
Obr. 18: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou menší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů UZ+M v letech 2011/2012 – 2016/2017 66
Obr. 19: Porovnání chybovosti u studentů oborů GeKa a FGG, UZ a UZ+M v úkonech, které se vyskytly v písemkách všech těchto oborů. 67
Obr. 20: Vývoj celkové chybovosti u studentů oborů GeKa a FGG, UZ a UZ+M a všech studentů dohromady v letech 2011/2012 až 2016/2017........ 68
Obr. 21: Průměrná úspěšnost absolventů předmětu Repetitorium středoškolské matematiky v zimním a letním semestru v letech 2011/2012 až 2016/2017........ 76

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Relativní úspěšnost žáků 5. a 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií (z 1928 sledovaných ZŠ a 68 sledovaných víceletých gymnázií) v matematických úlohách určených k měření daných matematických dovedností po třech letech vyjádřená v procentech 18

Tabulka 2: Zastoupení počtu hodin matematiky na SŠ ve školních letech 2009/2010 a 2012/2013 obsahujících aktivity zaměřené na rozvoj samostatného aktivního učení a kompetence k řešení problémů. 19

Tabulka 3: Zastoupení počtu hodin matematiky na SŠ ve školních letech 2009/2010 a 2012/2013, ve kterých žáci prokázali dané vědomosti a dovednosti 20

Tabulka 4: Průměrný výsledek zemí (TIMSS 2015 – matematika, 4. ročník) 24

Tabulka 5: Porovnání výsledků zemí v šetřeních TIMSS (matematika, 4. ročník) v letech 1995 až 2015 24

Tabulka 6: Porovnání výsledků zemí podle okruhů matematických dovedností u žáků 4. ročníků ZŠ v letech 2015, 2011 a 2007 26

Tabulka 7: Porovnání bodových výsledků žáků jednotlivých zemí na dílčích škálách (tj. formulování, používání, interpretování) matematických postupů s jejich celkovým výsledkem v testu matematické gramotnosti v roce 2012. 28

Tabulka 8: Výběr očekávaných výstupů studentů 9. ročníku RVP ZV vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace a jejich indikátorů 30

Tabulka 9: Výběr očekávaných výstupů RVP G vzdělávacího obsahu vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace potřebných v geografii 32

Tabulka 10: Matematické dovednosti aplikované v geografické kartografii 36

Tabulka 11: Geografické úlohy vyžadující matematické znalosti a dovednosti a jejich zařazení 37

Tabulka 12: Druhy didaktických testů 39

Tabulka 13: Druhy didaktických testů a jejich základní charakteristika 40

Tabulka 14: Hranice reliability pro posouzení kvality testu v individuální pedagogické diagnostice 43

Tabulka 15: Počet úloh v jednotlivých zápočtových testech z Matematické geografie pro obory GeKa, FGG, UZ a UZ+M v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017. 50

Tabulka 16: Počet analyzovaných zápočtových prací oborů GeKa, FGG, UZ a UZ+M z předmětu Matematická geografie v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017. 50

Tabulka 17: Relativní zastoupení početních úloh v zápočtových testech z Matematické geografie určených pro studenty oborů GeKa a FGG v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017 (uvedeno v %). 51

Tabulka 18: Relativní zastoupení početních úloh v zápočtových testech z Matematické geografie určených pro studenty oborů UZ a UZ+M v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017 (uvedeno v %). 52
Tabulka 19: Hodnocené úkony vyskytující se v zápočtových testech, jejich definice, chyby při provádění těchto úkonů a jejich formulace ve Standardech RVP ZV, RVP G nebo ŠVP analyzovaných gymnázií 59
Tabulka 21: Průměrné hodnoty Cronbachova alfa celých testů a testů bez úloh nevyžadujících výpočet určených pro studenty oborů GeKa, FGG a UZ, UZ+M v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017 69
Tabulka 22: Průměrný index obtížnosti jednotlivých úloh vyžadujících výpočet určených pro studenty oborů GeKa a FGG v období 2011/2012 až 2016/2017 71
Tabulka 23: Průměrný index obtížnosti jednotlivých úloh vyžadujících výpočet určených pro studenty oborů UZ a UZ+M v období 2011/2012 až 2016/2017 72
Tabulka 24: Průměrný index obtížnosti úlohy na sluneční čas v jednotlivých pokusech v období 2011/2012 až 2016/2017 73

1. ÚVOD

Od 90. let 20. století se ve vzdělávání objevuje snaha o četnější a rozsáhlejší propojování znalostí, dovedností a dalších kompetencí, které si žáci osvojují v jednotlivých vyučovacích předmětech (Venville a kol., 1998). Vytváření těchto mezipředmětových vazeb má žáky lépe připravit na jejich budoucí osobní a profesní život a podporovat myšlenku celoživotního učení (Havelková, 2014). Mezi vědy s širokými mezioborovými vazbami se řadí mj. i geografie. Jedná se o vědu stojící na pomezí přírodních, technických a společenských věd (Ridelová, Demek, Pech, 1980), která využívá poznatků z fyziky, chemie, biologie, ekonomie, občanské výchovy, historie, informačních technologií, mediální výchovy, cizích jazyků a v neposlední řadě také z matematiky. Podle Hampla (1998) je předmětem geografie zkoumání organizace prostorových celků neboli vnějších vztahů mezi částmi těchto celků v území. Chtějí-li proto geografové úspěšně zkoumat vztahy v prostoru, nevyhnou se ani vztahům matematickým.

Provázaností geografie a matematiky ve výuce se zabývaly např. Matýsková (2011), Leipertová (2010) a Ondráčková (2013). Z těchto prací vyplývá, že matematická aplikace je potřeba například při:

- práci s mapou (měření na mapách, měřítko mapy a globu, kartogramy, kartodiagramy, stupnice, …),
- výpočtech na kouli (délka rovnoběžek, plocha zeměpisné sítě, dohlednost, vzdálenost, zeměpisné souřadnice, …),
- čtení a interpretaci tabulek, grafů, sloupcových diagramů,
- popisu základní fyzikálních dějů (Coriolisova síla, tíhová síla, soumrakové jevy, gravitace, slapové jevy, atd.).

Funkční používání matematických znalostí v různých situacích a kontextech se odborně označuje pojmem matematická gramotnost (ÚIV, 2004). Její úroveň se projevuje způsobem, jakým žák používá své matematické znalosti a dovednosti k vymezování, formulování a řešení problémů z různých oblastí a kontextů, a také k interpretaci jejich řešení s využitím matematiky. Jedná se tedy o schopnost používat matematiku v celé řadě situací, od každodenních a jednoduchých až po situace neobvyklé a složité. Jak ukazují výzkumy mezinárodních studií PISA a TIMSS, které jsou v pravidelných časových intervalech prováděny na českých základních školách už více jak 16 let, závažným nedostatkem českého školství je klesající úroveň matematické gramotnosti českých žáků (Česká školní inspekce, 2013a; Česká školní inspekce 2016c). Přestože Česká školní inspekce provádí testování matematické gramotnosti na základních školách (TIMSS) a následně pak testuje popřípadě patnáctileté studenty (PISA), studie zaměřené na testování matematické gramotnosti absolventů středních škol stále chybí. Úroveň matematické gramotnosti těchto žáků proto není známá.

Matematické znalosti a dovednosti potřebují přirozeně také studenti vysokoškolských geografických oborů. Jedním z vysokoškolských předmětů vyžadujících aplikaci matematiky je předmět nejčastěji pojmenovaný jako Planetární geografie, popř. Matematická geografie. Tento předmět se zabývá základy matematické geografie a jejím vztahem k vědám o Zemi a vesmíru. Vysvětluje důkazy kulatosti Země a způsoby měření jejích rozměrů. Definuje geoid a elipsoid. Dále se zabývá výpočty na referenční kouli, základy geofyziky, fyzikálního času a kalendáře. Také se věnuje geografickým aspektům pohybů Země, Měsíce a Slunce, základům gravimetrie, seizmiky, geomagnetismu a studia tepelného a elektrického pole Země (Brázdil, 1988). Tento předmět je součástí povinných předmětů studijního oboru Geografie na Přírodovědeckých fakultách například na Univerzitě Karlově v Praze, Masarykově Univerzitě, Univerzitě Palackého v Olomouci a Ostravské Univerzitě. Jednou z podmínek pro splnění tohoto předmětu je úspěšné napsání zápočtového testu, který je založen na řešení slovních úloh vyžadujících matematizaci reálných situací. Úspěch v této písemce proto závisí nejenom na znalostech získaných v rámci výuky daného předmětu, ale z části také na matematické gramotnosti jednotlivých studentů. Pomocí uvedených testů proto lze do určité míry určit matematickou gramotnost čerstvých absolventů středních škol. Hlavní cíle této práce proto byly stanoveny takto:

- Určit jaké matematické dovednosti dělají studentům předmětu Planetární geografie největší problémy.

- Posoudit, zda se tyto problémy ve sledovaném čase mění.

- Stanovit, zda jsou tyto problémy nezávislé na skupině studentů, nebo má každá skupina studentů problémy s jinými matematickými dovednostmi.

2. ŘEŠERŠE

2.1. Matematická gramotnost

Vážným nedostatkem, kterým trpí české školství, je nízká kvalita matematických znalostí a schopností žáků. Tento fakt potvrzují výsledky mezinárodních studií PISA a TIMSS, které jsou v pravidelných časových intervalech prováděny na českých školách už více jak 16 let (Česká školní inspekce, 2016a). Jak uvádí prof. Hejný (2004) vyučování je ve velké míře zaměřeno na nácvik řešení standardních úloh a na paměťové učení se faktům, algoritmům, vzorcům, definicím, tvrzením a důkazům. Žáci převážně imitují a reprodukují místo toho, aby diskutovali a tvořili. Výsledkem takto vedeného vyučování jsou tak víceméně izolovaná matematická fakta, která nejsou dostatečně strukturována a jejichž aplikační síla je nízká (Hejný, 2004). Spolu se zhoršujícími se výsledky v mezinárodních výzkumech se stále častěji mluví o tzv. matematické gramotnosti. Každý vyučující matematiky by měl vědět, co se pod tímto pojmem skrývá a na základě tohoto pochopení volit vhodnou vyučovací metodu a vhodné úlohy, které bude během vyučování využívat. Termín matematická gramotnost naznačuje, že důraz je kladen na funkční používání matematických znalostí v různých situacích a kontextech (ÚIV, 2004). Výzkumný ústav pedagogický ve své publikaci Gramotnosti ve vzdělávání definuje matematickou gramotnost jako „schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana“ (MŠMT, 2010, s. 22). Úroveň matematické gramotnosti se projevuje způsobem, jakým žák používá své matematické znalosti a dovednosti k vymezování, formulování a řešení problémů z různých oblastí a kontextů, a také k interpretaci jejich řešení s využitím matematiky. Jedná se tedy o schopnost používat matematiku v celé řadě situací, od každodenních a jednoduchých až po situace neobvyklé a složité.

Rozlišují se tři složky matematické gramotnosti (MŠMT, 2010):

1. **situace a kontexty**, které mají žáci řešit a aplikovat tak svoje získané matematické dovednosti a vědomosti,

2. **kompetence**, které žáci uplatňují při řešení problémů:

   Matematické uvažování

   Do matematického uvažování řadíme především schopnost klást otázky charakteristické pro matematiku jako například „Existuje….?“, „Pokud existuje, tak kolik…?“, „Jak najdeme…?“. Dále sem patří schopnost znát možné odpovědi na tyto otázky, chápat rozsah a omezení konkrétních matematických pojmů a umět s nimi zacházet a v neposlední řadě rozlišovat příčinu a důsledek.

Matematická argumentace

Matematickou argumentací rozumíme především schopnost vytvářet a posuzovat matematické argumenty, rozlišovat předpoklady a závěry, sledovat a hodnotit řetězce matematických argumentů různého druhu a v neposlední řadě také cit pro heuristiku, tj. schopnost předpovídat, co se může nebo nemůže stát.

Matematická komunikace

Zahrnuje především schopnost rozumět písemným a ústním matematickým sdělením a také schopnost vyjadřovat se písemně i ústně k různým matematickým otázkám a to dostatečně jasně a srozumitelně pro své okolí.

Modelování

Do modelování se zahrnuje schopnost porozumět matematickým modelům reálných situací, umět je používat, vytvářet a kriticky hodnotit. Dále sem patří schopnost se získanými výsledky pracovat, tj. umět je interpretovat a ověřovat jejich platnost v reálných situacích.

Vymezování problémů a jejich řešení

Sem patří schopnost identifikovat a formulovat matematické problémy a hledat různé způsoby jejich řešení.

Užívání matematického jazyka

Správné užívání matematického jazyka v sobě zahrnuje znalost symbolického a formálního matematického jazyka, včetně chápání jeho vztahu k přirozenému jazyku, schopnost pracovat s výrazy obsahující symboly, používat proměnné a provádět výpočty. Dále se ke správnému užívání matematického jazyka řadí také schopnost rozlišovat různé formy reprezentace matematických objektů a situací.

Užívání pomůcek a nástrojů

Nedílnou součástí matematiky je také práce s různými pomůckami a nástroji usnadňující práci při matematické činnosti. Proto do kompetencí patří také jejich znalost a dovednost používat je s vědomím hranic jejich možností.

3. **matematický obsah**, který je tvořen strukturami a pojmy nezbytnými k formulaci matematické podstaty problémů:

Kvantita

Do kvantity patří především chápání významu čísel a jejich různé reprezentaci, vytvoření představy jejich velikosti, provádění operací s čísly, počítání zpaměti a provádění odhadů.

Prostor a tvar

Jedná se o schopnost orientace v prostoru, znalosti rovinných a prostorových útvarů, jejich metrických a polohových vlastností, geometrických zobrazení a dovednost geometrické konstrukce a zobrazování geometrických útvarů.

Změna a vztahy

Mezi nezbytné matematické schopnosti patří práce se závislostí, proměnnou, základními typy funkcí, rovnic a nerovnic, ekvivalencí a dělitelností. Dále také schopnost vyjádření vztahů ze vzorce, práce s tabulkou a grafy.

Neurčitost

Patří sem práce s daty, jejich sběr, analýza, prezentace a znázorňování. Dále také vyvozování závěrů a znalosti z pravděpodobnosti a kombinatoriky.

Hejný (2004) místo pojmu matematická gramotnost používá termín matematické poznání, které dělí na dvě rozsáhlé oblasti: obsah a schopnosti. Mezi schopnosti řadí například experimentování, analyzování situace, objevování, argumentace, hledání řešitelské strategie a formulování myšlenky. Specifičtější dělení schopností však neuvádí z důvodu jejich nedostatečného poznání. Oblast obsahu matematického poznání člení na:

1. ***objekty*** neboli základní stavební kameny poznatkové struktury jako jsou například kružnice, trojúhelník, kolmost, posunutí, číslo 5, celé číslo, zlomek, součet, dělitelnost, pořadí, rovnice, funkce, a implikace;
2. ***vztahy***, které dále dělí na tvrzení (např.: $2 + 3 = 5$) a vzorce (např. Pythagorova věta);
3. ***postupy***, mezi které řadí algoritmy a návody, řešitelské strategie a argumentaci;
4. ***schémata*** neboli ucelené představy, které se vytvářejí ve vědomí člověka na základě mnohonásobně opakované zkušenosti.

2.1.1. Hodnocení úrovně matematické gramotnosti na českých školách

Úroveň matematické gramotnosti se projeví v případě, kdy je třeba použít matematické znalosti a dovednosti k vymezení, formulování a řešení problémů z různých oblastí a k následné interpretaci těchto řešení. Může jít o problémy čistě matematické, ale i o problémy, u kterých není matematický obsah zpočátku zřejmý a je na řešiteli, aby ho v úloze poznal (Národní ústav pro vzdělávání, 2011). Česká školní inspekce provádí testování matematické gramotnosti u žáků základních a středních škol v tříletém cyklu. Ve školním roce 2009/2010 zahrnovalo šetření rozhovory s řediteli škol, rozhovory s učiteli, hospitační záznamy ze sledovaných hodin a sledování podmínek ve škole v oblasti rozvoje matematické gramotnosti (Česká školní inspekce, 2011). Česká školní inspekce mezi sledované matematické dovednosti zařadila schopnost matematizovat reálné situace, používání správné terminologie a symboliky, řešení problémových úloh, praktické využití poznatků z matematiky, formování občanského kritického myšlení, práci s chybou a odhad výsledků (Tabulka 1). Z šetření vyplývá, že se oproti výsledkům ve školním roce 2006/2007 „výrazně zhoršily dovednosti žáků při řešení problémových úloh. V řadě případů byl neúspěch žáků v matematice spojený s problémem porozumění matematickému textu (slovní úlohy), žáci v nižších třídách často nezvládají množství různých čtenářských technik nezbytných pro porozumění matematickým textům. Velké potíže měli žáci s úlohami, které obsahovaly nadbytečné informace, většina žáků se domnívala, že všechny zadané údaje je nutné pro řešení využít“ (Česká školní inspekce, 2011, s. 19).

Tabulka 1: Relativní úspěšnost žáků 5. a 9. tříd ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií (z 1928 sledovaných ZŠ a 68 sledovaných víceletých gymnázií) v matematických úlohách určených k měření daných matematických dovedností po třech letech vyjádřená v procentech (dle České školní inspekce, 2011, s. 19). Pozn.: ↑ – *statisticky významný nárůst úspěšnosti v matematických úlohách určených k měření daných matematických dovedností ve školním roce 2009/2010 ve srovnání s rokem 2006/2007*; ↓ – *statisticky významný pokles úspěšnosti v matematických úlohách určených k měření daných matematických dovedností ve školním roce 2009/2010 ve srovnání s rokem 2006/2007*; 0 – *statisticky nevýznamná změna v úspěšnosti v matematických úlohách určených k měření daných matematických dovedností ve školním roce 2009/2010 ve srovnání s rokem 2006/2007*.

Sledované matematické dovednosti	**Úspěšnost (%) pro školní rok 2006/2007**	**Úspěšnost (%) pro školní rok 2009/2010**	**Trendy**
Schopnost matematizovat reálné situace	76,0	69,4	↓
Používání správné terminologie a symboliky	80,0	82,3	↑
Řešení problémových úloh	85,0	79,6	↓
Praktické využití poznatků z matematiky	87,0	83,3	↓
Formování občanského kritického myšlení	51,3	56,3	↑
Práce s chybou	79,0	79,6	0
Odhad výsledků	15,0	17,3	↑

Při šetření ve školním roce 2012/2013 byla pozornost věnována především tomu, jak je matematická gramotnost žáků rozvíjena samotnými učiteli. Středem zájmu tak byl především průběh, kvalita a efektivita pedagogického procesu, včetně pedagogické interakce, projevů a dovedností žáků v oblasti matematické gramotnosti a jejich postojů ve výuce (Česká školní inspekce, 2013b).

Jednou z oblastí sledovaných dovedností žáků na středních školách byla kompetence k řešení problémů a rozvoj samostatného a aktivního učení. Zjištěné výsledky vycházejí z hospitací provedených v rámci šetření ve školních letech 2009/2010 a 2012/2013. Ve školním roce 2012/2013 bylo v rámci šetření navštíveno 143 vyučovacích hodin a v předešlém šetření v roce 2009/2010 bylo navštíveno 707 vyučovacích hodin. Celkem bylo navštíveno 484 hodin ve středních školách s obory gymnázium a 362 hodin v ostatních středních školách. Ve středních školách s obory gymnázium bylo mnohem častěji evidováno nalézání různých způsobů řešení úloh ve srovnání s ostatními středními školami (Tabulka 2). Stejné to bylo i v případě odhadování výsledků úloh, jejich interpretaci a ověřování správnosti odhadu. Samostatné nacházení řešení úloh žáky bylo poměrně časté na všech typech středních škol. Mírně častěji byl tento jev sledován v hodinách ve středních školách s obory gymnázium, stejně jako následné zdůvodňování odpovědí.

Tabulka 2: Zastoupení počtu hodin matematiky na SŠ ve školních letech 2009/2010 a 2012/2013 obsahujících aktivity zaměřené na rozvoj samostatného aktivního učení a kompetence k řešení problémů (dle České školní inspekce, 2013b, s. 19).

	počet hodin, ve kterých se jev vyskytl		**podíl hodin, ve kterých se jev vyskytl**	
	hodiny v SŠ s obory gymnázium	**hodiny v ostatních SŠ**	**hodiny v SŠ s obory gymnázium**	**hodiny v ostatních SŠ**
Žáci nalézají různé způsoby řešení úloh	338	132	71,2 %	41,0 %
Žáci odhadují výsledky úloh, interpretují a ověřují správnost odhadu	229	86	47,4 %	23,8 %
Žáci docházejí k řešením a závěrům úloh sami	417	280	86,2 %	77,3 %
Žáci vysvětlují (zdůvodňují) své odpovědi	369	219	76,4 %	60,8 %

Další skupinou jevů, které byly během šetření na středních školách (SŠ) ve školním roce 2012/2013 sledovány, bylo užívání matematické terminologie a symboliky, porozumění matematickému textu a práce s informacemi kvantitativní povahy, mezi které patří například graf nebo tabulka. Nejčastěji byly v hospitovaných hodinách při užívání matematické terminologie zaznamenány občasné nepřesnosti, v 59 % hospitovaných hodinách ve středních školách s obory gymnázium a v 64 % sledovaných hodinách v ostatních středních školách. Ve středních školách s obory gymnázium se vyskytovaly výraznější nepřesnosti jen ojediněle (3 %), v ostatních středních školách pak ve 12 % sledovaných hodin.

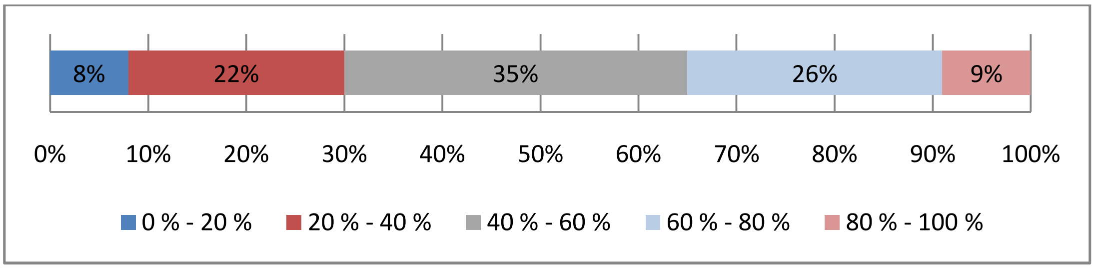
Během hospitovaných hodin byla sledována také úroveň vědomosti a dovedností žáků středních škol. V téměř polovině sledovaných hodin ve středních školách s obory gymnázium měli téměř všichni žáci očekávané vědomosti a dovednosti (Tabulka 3). Odlišná situace byla na ostatních středních školách, kde měli téměř všichni žáci očekávané vědomosti a dovednosti jen ve 14 % hospitovaných hodin.

Tabulka 3: Zastoupení počtu hodin matematiky na SŠ ve školních letech 2009/2010 a 2012/2013, ve kterých žáci prokázali dané vědomosti a dovednosti (dle České školní inspekce, 2013b, s. 20).

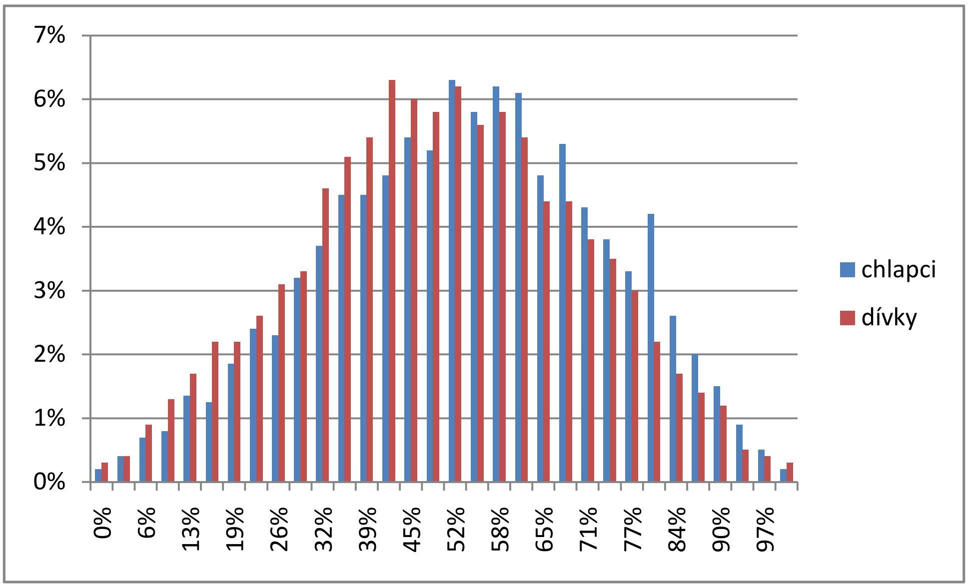
		počet hodin, ve kterých se jev vyskytl		**podíl hodin, ve kterých se jev vyskytl**	
		hodiny v SŠ s obory gymnázium	**hodiny v ostatních SŠ**	**hodiny v SŠ s obory gymnázium**	**hodiny v ostatních SŠ**
Podíl žáků, kteří mají očekávané vědomosti a dovednosti	**téměř všichni**	227	49	46,9 %	14,0 %
	alespoň polovina	209	202	43,2 %	57,9 %
	méně než polovina	48	98	9,9 %	28,1 %
Žáci učivo úspěšně použili v aplikačních úlohách		297	166	88,1 %	78,3 %
Žáci úspěšně aplikovali znalosti o rovinných a prostorových útvarech (s ohledem na ročník)		158	66	90,3 %	71,7 %
Žáci úspěšně pracují s proměnnými		316	233	93,8 %	81,8 %
Žáci ovládají jednoduché numerické výpočty zpaměti		381	227	95,3 %	80,2 %
Žáci ovládají početní úkony se zlomky		273	163	97,5 %	87,6 %

Zatím poslední šetření dosažené úrovně matematické gramotnosti proběhlo ve školním roce 2015/2016. Testováni byli žáci 6. tříd vybraných základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií (dále jen „6. ročníky ZŠ“) a žáci prvních ročníků vybraných oborů středních škol. Hodnocení bylo založeno na testu, který se pro 6. ročník ZŠ skládal z 15 úloh s 5 zavřenými a 26 částečně otevřenými otázkami a pro 1. ročník SŠ se skládal z 15 úloh s 6 uzavřenými a 18 částečně otevřenými otázkami. Žáci měli ve všech případech na vypracování testu 60 minut. Tři úlohy s 11 otázkami byly navíc společné. Vyskytovaly se tedy v obou testech.

Celková úspěšnost žáků 6. ročníku ZŠ byla jen 51 %. Ve srovnání s expertně stanovenou očekávanou úspěšností 67 % můžeme konstatovat, že se jedná o neúspěch. Z rozložení výsledků je zřejmé, že téměř třetina žáků nedokázala správně odpovědět ani na dvě pětiny otázek (Obr. 1). Na více než čtyři pětiny otázek dokázalo navíc správně odpovědět jenom 9 % žáků. Navíc ve skupinách méně úspěšných žáků 6. ročníku ZŠ převažují dívky, zatímco ve skupinách více úspěšných žáků odpovídajících ročníků převažují chlapci (Obr. 2).

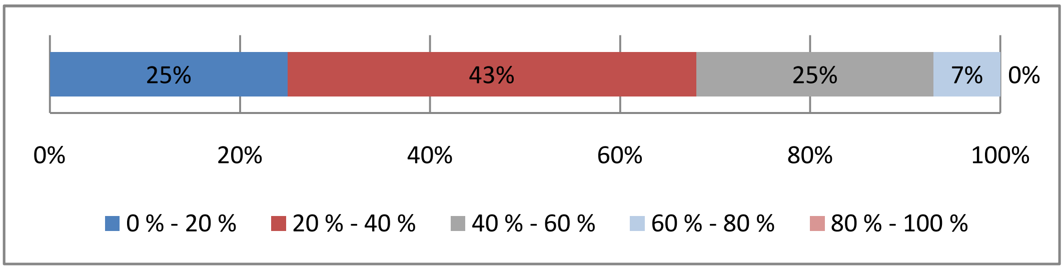


Obr. 1: Rozložení výsledků žáků 6. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií podle průměrné úspěšnosti v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti ve školním roce 2015/2016 (dle České školní inspekce, 2016b, s. 47).

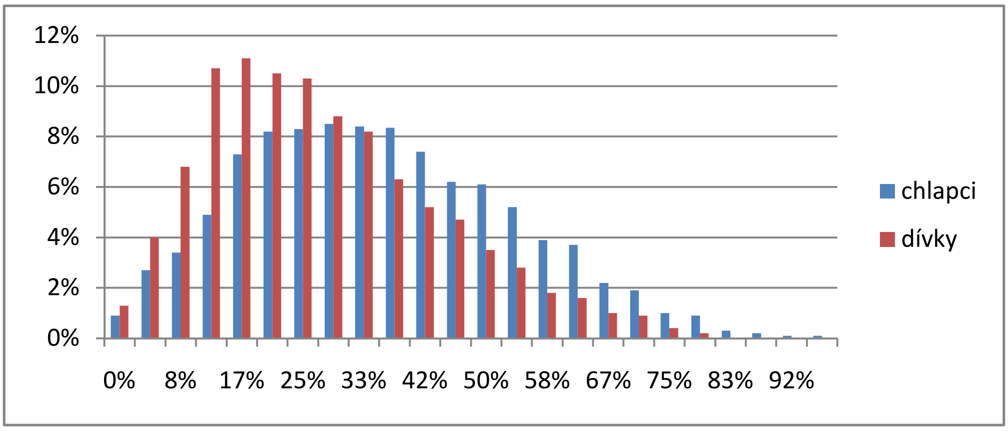


Obr. 2: Rozložení podílu žáků 6. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií podle průměrné úspěšnosti v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti a pohlaví ve školním roce 2015/2016 (dle České školní inspekce, 2016b, s. 47).

V případě žáků 1. ročníku SŠ byla celková úspěšnost v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti ve školním roce 2015/2016 jen 32 %, což je méně než polovina z minimální očekávané experty stanovené úspěšnosti. Z rozložení výsledků žáků je patrné, že více než 90 % žáků nebylo schopno správně vyřešit alespoň tři pětiny otázek. Navíc téměř čtvrtina žáků dokázala vyřešit méně než jednu pětinu úloh (Obr. 3), což lze považovat za individuálně velmi slabý výsledek. Jelikož obsah úloh vycházel z požadavků obsažených v RVP ZV, je nutné konstatovat, že čtvrtina testovaných žáků 1. ročníku střední školy prokázala nezvládnutí očekávaných výstupů RVP ZV v matematice, a to ani po téměř roce dalšího studia na střední škole. Rozložení podílu žáků podle průměrné úspěšnosti a podle pohlaví v tomto případě ukazuje výraznější rozdíly v úspěšnosti dívek a chlapců, než je tomu u žáků 6. třídy ZŠ. Mezi neúspěšnými žáky převažují dívky, zatímco mezi úspěšnými žáky výrazně převažují chlapci (Obr. 4).



Obr. 3: Rozložení výsledků žáků 1. ročníku středních škol podle průměrné úspěšnosti v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti ve školním roce 2015/2016 (dle České školní inspekce, 2016b, s. 48).



Obr. 4: Rozložení podílu žáků 1. ročníku středních škol podle průměrné úspěšnosti v testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti a pohlaví ve školním roce 2015/2016 (dle České školní inspekce, 2016b, s. 48).

V testu České školní inspekce zaměřeném na zjišťování úrovně matematické gramotnosti ve školním roce 2015/2016 byly celkem tři úlohy (z celkového počtu 15 úloh) společné pro žáky 6. třídy ZŠ a žáky 1. ročníku SŠ. Úspěšnost žáků 6. třídy ZŠ v těchto úlohách byla 37,7 %., úspěšnost žáků 1. ročníků SŠ v těchto úlohách byla 38,5 %. Z porovnání těchto úspěšností vyplývá, že se úspěšnost žáků 6. třídy ZŠ a žáků 1. ročníku SŠ nijak výrazně nelišila. To je i s přihlédnutím k jinak strukturovaným vzorkům žáků poměrně zarážející především z důvodu věkového rozdílu 4 let těchto studentů. Ve společných úlohách navíc převažovaly otázky, při jejichž řešení byli žáci 6. třídy ZŠ úspěšnější, než žáci 1. ročníku SŠ.

2.1.2. Výsledky českých žáků v mezinárodních srovnávacích testech

Na základě rozhodnutí České školní inspekce se v současné době české školy účastní dvou mezinárodních šetření zjišťující úroveň matematické gramotnosti, TIMSS a PISA. Mezinárodní šetření TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) zjišťuje každé čtyři roky úroveň znalostí a dovedností žáků 4. a/nebo 8. ročníků základní školy v matematice a v přírodovědných oborech, stejně jako jejich změnu. Dále sleduje, jak se liší obsah, metody a podmínky výuky v zemích, které se testování účastní a co nejvíce ovlivňuje rozdíly ve výsledcích různých skupin žáků. TIMSS probíhá od roku 1995 v mnoha zemích celého světa. Česká republika se do něj zapojila celkem pětkrát – v roce 1995, 1999, 2007, 2011 a 2015. Toto šetření je na mezinárodní úrovni koordinováno Mezinárodní asociací pro hodnocení výsledků vzdělávání (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement – IEA), v České republice spadá do kompetence České školní inspekce.

Z poslední zprávy, kterou vydala Česká školní inspekce v listopadu 2016, vyplývá, že výsledek českých žáků 4. ročníku v matematice byl v šetření TIMSS 2015 ve srovnání se všemi zeměmi, které se šetření zúčastnily, nadprůměrný. Ve srovnání s ostatními členskými zeměmi EU, které se šetření zúčastnily, mělo devět z nich lepší výsledek než ČR a čtyři z nich výsledek srovnatelný (Tabulka 4). Výrazně nejlépe si vedli žáci asijských zemí, dále pak žáci ze Severního Irska a Ruska.

Výsledky žáků 4. ročníku ZŠ lze v rámci projektu TIMSS porovnávat za uplynulých 20 let, během kterých se uskutečnilo celkem pět šetření. Česká republika se zapojila do čtyř z nich. Šetření v roce 2003 se nezúčastnila. Většina zemí, které se zapojily do šetření TIMSS 1995 a TIMSS 2015, dosáhla za uplynulých dvacet let významného zlepšení průměrného výsledku žáků 4. ročníků v matematice (Tabulka 5). Výjimkou jsou tři země, mezi kterými je i Česká republika. Její žáci se od roku 1995 do roku 2007 zhoršili v matematice nejvíce ze všech zemí, které se zúčastnily obou šetření. Ačkoliv v porovnání s rokem 2007 došlo u výsledků českých žáků k výraznému zlepšení, zůstává Česká republika zemí s druhým největším propadem oproti roku 1995.

Tabulka 4: Průměrný výsledek zemí (TIMSS 2015 – matematika, 4. ročník), (dle České školní inspekce, 2016c, s. 9). Poznámka: ▲ značí statisticky signifikantní lepší průměrný výsledek pro danou zemi než pro ČR; ▼značí statisticky signifikantní horší výsledek pro danou zemi než pro ČR; - značí statisticky signifikantní lepší průměrný výsledek pro danou zemi je než průměr škály TIMSS; - značí statisticky signifikantní horší průměrný výsledek pro danou zemi je než průměr škály TIMSS.

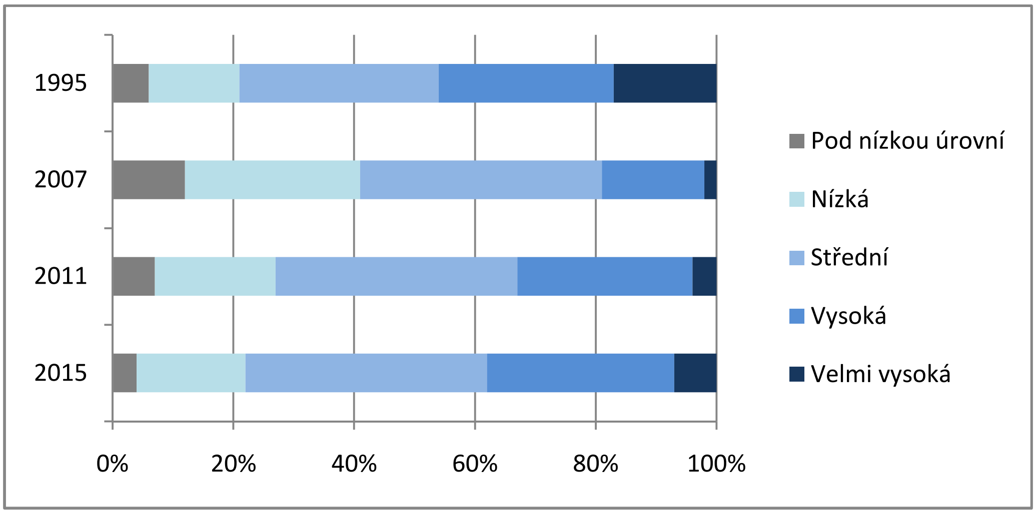
Pořadí	**Země**	**Průměr**		**Pořadí**	**Země**	**Průměr**	
1.	Singapur	618	▲	18.	Česká republika	528	
2.	Korejská republika	608	▲	19.	Bulharsko	524	
3.	Japonsko	593	▲	20.	Kypr	523	
4.	Severní Irsko	570	▲	21.	Německo	522	▼
5.	Rusko	564	▲	22.	Slovinsko	520	▼
6.	Norsko	549	▲	23.	Švédsko	519	▼
7.	Irsko	547	▲	24.	Austrálie	517	▼
8.	Anglie	546	▲	25.	Kanada	511	▼
9.	Belgie (vlámská)	546	▲	26.	Itálie	507	▼
10.	Portugalsko	541	▲	27.	Španělsko	505	▼
11.	USA	539	▲	28.	Chorvatsko	502	▼
12.	Dánsko	539	▲	29.	Slovensko	498	▼
13.	Litva	535	▲	30.	Nový Zéland	491	▼
14.	Finsko	535	▲	31.	Francie	488	▼
15.	Polsko	535	▲	32.	Turecko	483	▼
16.	Nizozemsko	530		33.	Chile	459	▼
17.	Maďarsko	529					

Tabulka 5: Porovnání výsledků zemí v šetřeních TIMSS (matematika, 4. ročník) v letech 1995 až 2015 (dle České školní inspekce, 2016c, s. 10). Země jsou řazeny sestupně podle rozdílu ve výsledcích v letech 1995 a 2015. V závorce jsou uvedeny změny v dosaženém počtu bodů v daném roce oproti roku 1995.

Země	**Rozdíl 1995 - 2015**	**Průměrný výsledek v matematice**				
		2015	**2011**	**2007**	**2003**	**1995**
Portugalsko	99	541 *(+ 22,4 %)*	532 *(+ 20,4 %)*			442
Anglie	62	546 *(+ 12,8 %)*	542 *(+ 12 %)*	541 *(+ 11,8 %)*	531 *(+ 9,7 %)*	484
Slovinsko	58	520 *(+ 12,6 %)*	513 *(+ 11 %)*	502 *(+ 8,7 %)*	479 *(+ 3,7 %)*	462
Kypr	48	523 *(+ 10,1 %)*	...	...	510 *(+ 7,4 %)*	475
Singapur	28	618 *(+ 4,7 %)*	606 *(+ 2,7 %)*	599 *(+ 1,5 %)*	594 *(+ 0,7 %)*	590
Korejská republika	27	608 *(+ 4,6 %)*	605 *(+ 4,1 %)*	...	...	581
Japonsko	26	593 *(+ 4,6 %)*	585 *(+ 3,2 %)*	568 *(+ 0,2 %)*	565 (- 0,4 %)	567
Irsko	24	547 *(+ 4,6 %)*	527 *(+ 0,8 %)*	...	...	523
Austrálie	22	517 *(+ 4,4 %)*	516 *(+ 4,2 %)*	516 *(+ 4,2 %)*	499 *(+ 0,8 %)*	495
Nový Zéland	22	491 *(+ 4,7 %)*	486 *(+ 3,6 %)*	492 *(+ 4,9 %)*	493 *(+ 5,1 %)*	469
USA	21	539 *(+ 4,1 %)*	541 *(+ 4,4 %)*	529 *(+ 2,1 %)*	518 *(+ 0 %)*	518
Norsko	17	493 *(+ 3,6 %)*	495 *(+ 4 %)*	473 *(- 0,6 %)*	451 *(- 5,3 %)*	476

Země	Rozdíl 1995 - 2015	Průměrný výsledek v matematice				
		2015	2011	2007	2003	1995
Maďarsko	8	529 *(+ 1,5 %)*	515 *(- 1,2 %)*	510 *(- 2,2 %)*	529 *(+ 1,5 %)*	521
Česká Republika	-13	528 *(- 2,5 %)*	511 *(- 5,9 %)*	486 *(- 11,3 %)*	...	541
Nizozemsko	-19	530 *(- 3,5 %)*	540 *(- 1,7 %)*	535 *(- 2,6 %)*	540 *(- 1,7 %)*	549

Projekt TIMSS rozlišuje u žáků v matematice čtyři vědomostní úrovně: nízkou, střední, vysokou a velmi vysokou. Každá úroveň je vymezena na základě minimálního počtu bodů, kterého musí žáci na škále výsledků TIMSS dosáhnout. V České republice je 8 % žáků schopno uplatňovat své schopnosti v nejrůznějších složitých situacích a následně své uvažování zdůvodňovat (Obr. 5). Tento podíl je přibližně srovnatelný s průměrem ostatních členských zemí EU. Naproti tomu 4 % českých žáků (průměr EU je 5 %) neprokázala dostatečné základní znalosti v matematice a nedosáhla ani nejnižší vědomostní úrovně. Od roku 2007 do roku 2015 lze sledovat snižování podílu žáků v nízké vědomostní úrovni a pod nízkou vědomostní úrovní. Od roku 2007 se také zvyšuje podíl žáků nejvyšších vědomostních kategorií. Přesto je však podíl žáků na velmi vysoké úrovni oproti roku 1995 poloviční.



Obr. 5: Porovnání zastoupení českých žáků 4. ročníků ZŠ ve vědomostních úrovních v matematice v letech 1995 až 2015 (dle České školní inspekce, 2016c, s. 16).

Žáci z České republiky se v období 2007 až 2015 statisticky zlepšili ve všech škálách matematických dovedností (Tabulka 6). V porovnání s ostatními bylo zlepšení dokonce největší. Největší bodový nárůst byl zaznamenán v kategorii uvažování. Výsledky ve sledovaných oblastech učiva (čísla, geometrie práce s daty) byly v roce 2007 vzhledem k ostatním sledovaným zemím podprůměrné. Ve sledovaných oblastech dovedností (prokazování znalostí, používání znalostí, uvažování) byly ve srovnání s výsledky ostatních testovaných zemí průměrné. V reakci na tento výsledek Česká školní inspekce podnikla opatření vedoucí ke zlepšení výsledků českých žáků v tomto typu testů. Zaměřila svojí inspekční činnost na rozvoj matematické gramotnosti. Národní ústav pro vzdělávání vytvořil sérii brožur vysvětlující důležité pojmy související s matematickou gramotností. K dispozici je také učitelům sada příruček s úlohami pro její rozvoj (Dvořák, 2013).

Tabulka 6: Porovnání výsledků zemí podle okruhů matematických dovedností u žáků 4. ročníků ZŠ v letech 2015, 2011 a 2007 (dle České školní inspekce, 2016c, s. 24). Země jsou řazeny sestupně podle rozdílu v celkovém výsledku z matematiky v letech 2007 a 2015. V závorce jsou uvedeny změny v dosaženém počtu bodů v daném roce oproti roku 2007. Pozn: *Prokazování znalostí – žák si dokáže vybavit definice, terminologii, číselné vlastnosti, jednotky míry a geometrické vlastnosti; rozlišuje čísla, množství a tvary; třídí čísla, množství a tvary podle společných vlastností; sčítá, odčítá, násobí a dělí; vyhledává informace z grafů, tabulek, textu nebo dalších zdrojů; používá rýsovací pomůcky. Používání znalostí – žák stanovuje vhodný postup, strategii a nástroje pro řešení problému; znázorňuje data s využitím tabulky nebo grafu; modeluje problémové situace pomocí geometrických útvarů, diagramů, rovnic a nerovnic, uskutečňuje operace a strategie za účelem vyřešení problému týkající se matematických procesů. Uvažování – určuje, popisuje nebo používá vztahy mezi čísly, množstvím a tvary, spojuje různé znalosti související zobrazení a postupy k řešení problémů, hodnotí různé postupy a strategie řešení problémů, činí opodstatněné závěry na základě informací a důkazů, využívá atematickou argumentaci k podložení strategie nebo řešení.*

Země	**Průměrný výsledek země v dovednostním okruhu**								
	Prokazování znalostí			**Používání znalostí**			**Uvažování**		
	2015	**2011**	**2007**	**2015**	**2011**	**2007**	**2015**	**2011**	**2007**
Česká Republika	519 (+ 10 %)	502 (+ 6,4 %)	472	528 (+ 7,1 %)	512 (+ 3,9 %)	493	544 (+ 10,8 %)	523 (+ 6,5 %)	491
Japonsko	601 (+ 6 %)	590 (+ 4,1 %)	567	589 (+ 3,3 %)	579 (+ 1,6 %)	570	595 (+ 4,6 %)	592 (+ 4 %)	569
Rusko	556 (+ 3,2 %)	541 (+ 0,4 %)	539	566 (+ 3,1 %)	539 (- 1,8 %)	549	570 (+ 4,8 %)	548 (+ 0,7 %)	544
Maďarsko	532 (+ 4,1 %)	519 (+ 1,6 %)	511	526 (+ 4 %)	513 (+ 1,4 %)	506	529 (+ 3,7 %)	514 (+ 0,8 %)	510
Norsko	479 (+ 4,4 %)	487 (+ 6,1 %)	459	495 (+ 4,2 %)	499 (+ 5,1 %)	475	506 (+ 4,1 %)	501 (+ 3,1 %)	486
Singapur	631 (+ 1 %)	629 (+ 0,6 %)	625	619 (+ 3,7 %)	602 (+ 0,8 %)	597	603 (+ 3,6 %)	588 (+ 0,7 %)	584
Slovinsko	517 (+ 4,8 %)	510 (+ 2,4 %)	498	521 (+ 3,8 %)	514 (+ 2,4 %)	502	524 (+ 4 %)	516 (+ 2,4 %)	504
Dánsko	536 (+ 4,3 %)	531 (+ 3,3 %)	514	538 (+ 2,1 %)	539 (+ 2,3 %)	527	548 (+ 4,4 %)	543 (+ 3,4 %)	525
Švédsko	501 (+ 3,7 %)	489 (+ 1,3 %)	483	521 (+ 3 %)	507 (+ 0,2 %)	506	542 (+ 4,4 %)	520 (+ 0,2 %)	519
USA	547 (+ 1,1 %)	556 (+ 2,8 %)	541	537 (+ 2,5 %)	539 (+ 2,9 %)	524	531 (+ 1,1 %)	525 (+ 0 %)	525
Litva	534 (+ 2,7 %)	525 (+ 1 %)	520	538 (- 0,4 %)	540 (+ 0 %)	540	536 (+ 1,3 %)	536 (+ 1,3 %)	529

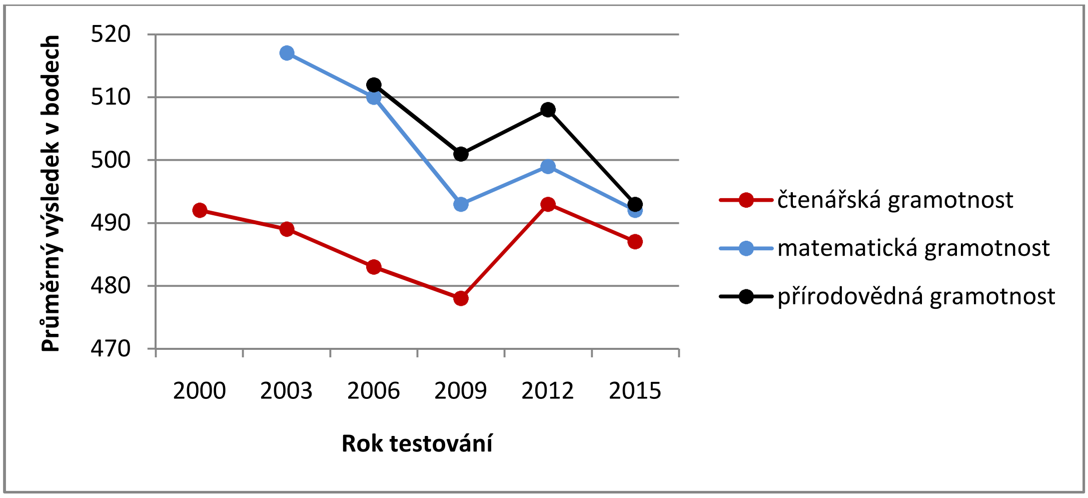
Země	Průměrný výsledek země v dovednostním okruhu								
	Prokazování znalostí			Používání znalostí			Uvažování		
	2015	2011	2007	2015	2011	2007	2015	2011	2007
Anglie	554 (+ 1,5 %)	552 (+ 1,1 %)	546	545 (+ 0,6 %)	542 (+ 0 %)	542	540 (+ 0,2 %)	531 (- 1,5 %)	539
Slovensko	491 (+ 0 %)	506 (+ 3 %)	491	497 (+ 0,2 %)	505 (+ 1,8 %)	496	515 (+ 3,2 %)	511 (+ 2,4 %)	499
Austrálie	509 (- 0,4 %)	516 (+ 1 %)	511	521 (- 0,2 %)	519 (- 0,6 %)	522	523 (+ 1,4 %)	513 (- 0,6 %)	516
Itálie	511 (- 0,2 %)	510 (- 0,4 %)	512	504 (+ 1 %)	506 (+ 1,4 %)	499	503 (- 1,6 %)	505 (- 1,2 %)	511
Nový Zéland	476 (- 1,7 %)	476 (- 1,7 %)	484	497 (+ 0,8 %)	490 (+ 0,6 %)	493	504 (+ 0,4 %)	490 (- 2,4 %)	502
Německo	524 (+ 1,7 %)	524 (+ 1,7 %)	515	515 (- 2,8 %)	528 (- 0,4 %)	530	535 (+ 0,9 %)	532 (+ 0,4 %)	530
Nizozemsko	521 (- 1,3 %)	537 (+ 1,7 %)	528	531 (- 1,7 %)	540 (+ 0 %)	540	543 (+ 1,1 %)	543 (+ 1,1 %)	537

Mezinárodní šetření PISA (Programme for International Student Assesment) je v současné době považováno za jedno z nejvýznamnějších a největších šetření v oblasti měření výsledků vzdělávání. Jeho cílem je zjišťování úrovně čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti patnáctiletých žáků, kteří se ve většině případů nacházejí v posledních ročnících povinné školní docházky. Testování probíhá každé tři roky, přičemž v každém tříletém cyklu je důraz kladen střídavě vždy na jednu ze tří gramotnostních oblastí, tj. matematická gramotnost bývá zjišťována každých 9 let. Výzkum PISA klade větší důraz na dovednosti, které mají velký význam pro uplatnění mladých lidí v jejich dalším životě. Výsledky testů poskytují tvůrcům školské politiky zpětnou vazbu o fungování jejich vzdělávacích systémů. Na mezinárodní úrovni je výzkum zajišťován Organizací pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (OECD). V České republice zajišťuje toto šetření Česká školní inspekce. Česká republika se projektu účastní již od roku 2000, kdy se tento průzkum uskutečnil poprvé.

Z výsledků výzkumu PISA vyplývá, že úroveň matematické gramotnosti patnáctiletých žáků v České republice od roku 2000 konstantně klesá (Obr. 6). Výjimkou byl pouze rok 2012, kdy žáci oproti předchozímu testování dosáhli lepších výsledků. V roce 2016 dosáhli žáci v matematické gramotnosti průměrného výsledku členů OECD, srovnatelného například s výsledky žáků z Nového Zélandu, Austrálie, Francie a Velké Británie.

V roce 2012 byla během šetření větší pozornost věnována matematické gramotnosti. Žáci z různých zemí, které se testování zúčastnily, dosahovali při řešení úloh různých úspěšností v různých matematických dovednostech. PISA rozlišuje tři dílčí škály pro matematické postupy:

- formulování (žák matematicky formuluje situace),
- používání (žák používá matematické pojmy, fakta, postupy a uvažování),
- interpretování (žák interpretuje, aplikuje a hodnotí matematické výsledky).



Obr. 6: Změny ve výsledcích českých žáků v gramotnostních oblastech od roku 2000 (dle České školní inspekce, 2016a, s. 9).

Čeští žáci dosáhli v roce 2012 nejlepších výsledků v matematické dovednosti používání, avšak na dílčí škále formulování a interpretování měli horší výsledky než na celkové škále (Tabulka 7).

Tabulka 7: Porovnání bodových výsledků žáků jednotlivých zemí na dílčích škálách (tj. formulování, používání, interpretování) matematických postupů s jejich celkovým výsledkem v testu matematické gramotnosti v roce 2012 (dle České školní inspekce, 2013a, s. 20). Pozn.: - výsledek na dílčí škále je o méně než 3 body vyšší než na celkové škále; - výsledek na dílčí škále je o 3 až 10 bodů vyšší než na celkové škále; - výsledek na dílčí škále je o méně než 3 body nižší než na celkové škále; - výsledek na dílčí škále je o 3 až 10 bodů nižší než na celkové škále; - výsledek na dílčí škále je o 10 a více bodů nižší než na celkové škále.

Země	**Celkový výsledek**	**Rozdíl mezi výsledkem na dílčí a celkové škále**		
		Formulování	**Používání**	**Interpretování**
Estonsko	521	-3	4	-8
Polsko	518	-2	1	-3
Belgie	515	-2	1	-2
Slovinsko	501	-9	4	-3
Česká republika	499	-4	5	-5
Lotyšsko	491	-3	5	-4
Rusko	482	-1	5	-11
Slovensko	482	-1	4	-8
Litva	479	-1	3	-8
Srbsko	449	-2	2	-3
Kypr	440	-3	3	-4

2.2. Provázanost vzdělávacího programu matematiky s geografií

2.2.1. Vzdělávací program matematiky v Rámcových vzdělávacích programech

Výuka matematiky na českých školách se řídí Rámcovými vzdělávacími programy (RVP), což jsou závazné kurikulární dokumenty vydané Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy pro různé úrovně vzdělání. Výuka na základních školách je podřízena Rámcovému vzdělávacímu programu pro základní vzdělávání (RVP ZV). Pro výuku na středních odborných školách byl vytvořen Rámcový vzdělávací program pro střední odborné vzdělávání (RVP SOV). Výuka na gymnáziích se řídí Rámcovým vzdělávacím programem pro gymnázia (RVP G), popřípadě Rámcový vzdělávací program pro gymnázia se sportovní přípravou (RVP GSP), ve kterém se však obsah výuky matematiky od RVP G nijak neliší. Každý z těchto dokumentů mimo jiné obsahuje klíčové kompetence, tj. soubor vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot, které jsou důležité pro osobní rozvoj jedince, jeho aktivní zapojení do společnosti a budoucí uplatnění v životě. Dále jsou v RVP uvedeny vzdělávací oblasti, přičemž jednotlivé vzdělávací oblasti jsou tvořeny jedním vzdělávacím oborem nebo více obsahově blízkými vzdělávacími obory. Další část RVP pak tvoří průřezová témata, která procházejí jako důležitý formativní prvek celým vzděláváním. Jejich funkcí je především ovlivňovat postoje, hodnotový systém a jednání žáků. V RVP ZV, RVP SOV, RVP G a RVP GSP je také uvedena minimální časová dotace dané vzdělávací oblasti za devět let popř. čtyři roky studia. Vzhledem k tomu, že nejkomplexnější je výuka na gymnáziích, jejímž cílem je připravit studenty na studium na vysoké škole, budu se dále věnovat výuce matematiky pouze podle RVP ZV a RVP G.

Matematika v RVP ZV i v RVP G je zařazena do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace (MŠMT, 2016; MŠMT, 2007). „Matematické vzdělávání napomáhá rozvoji abstraktního a analytického myšlení, rozvíjí logické usuzování, učí srozumitelné a věcné argumentaci s cílem najít spíše objektivní pravdu než uhájit vlastní názor. Těžiště výuky spočívá v osvojení schopnosti formulace problému a strategie jeho řešení, v aktivním ovládnutí matematických nástrojů a dovedností, v pěstování schopnosti aplikace. Matematika přispívá k tomu, aby žáci byli schopni hodnotit správnost postupu při odvozování tvrzení a odhalovat klamné závěry.“ (MŠMT, 2007, s. 21). Během studia žáci poznávají uplatnění matematiky v mnoha dalších oborech lidské činnosti (např. v ekonomii, technice, společenských vědách a přírodních vědách). Vzhledem k tomu, že geografie je věda pracující s kvantitativními znaky, patří nepochybně také mezi obory, které využívají matematických znalostí a dovedností. Jejich zvládnutí na úrovni základní a střední školy je pro geografa nezbytným předpokladem jeho úspěšné a kvalitní práce. Důkazem jsou příklady geografických úloh vyžadujících aplikaci matematických znalostí a dovedností, které jsou uvedeny v kapitole 2.2.2. Ze všech oddílů vzdělávacího obsahu Matematika a její aplikace lze vybrat řadu očekávaných výstupů, na které navazuje geograf při své odborné práci.

V důsledku snahy konkretizovat RVP vydal v roce 2015 Národní ústav pro vzdělávání Standardy RVP ZV, které vycházejí z očekávaných výstupů vzdělávacích oborů stanovených v RVP ZV. Specifikace těchto výstupů pomocí tzv. indikátorů je doplněna o ukázky ilustrativních úloh. Stejně jako RVP ZV vymezují Standardy RVP ZV očekávané výstupy, které mají žáci ovládat na konci 5. a 9. ročníku. Práce každého kartografa předpokládá zvládnutí řady z těchto očekávaných výstupů a jejich indikátorů (Tabulka 8).

Tabulka 8: Výběr očekávaných výstupů studentů 9. ročníku RVP ZV vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace a jejich indikátorů (dle Dvořákové a kol., 2015, s. 20 – 48).

Tematický okruh: **Číslo a početní operace**
Žák provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu - žák provádí základní početní operace se zlomky a desetinnými čísly - žák dodržuje pravidla pro pořadí početních operací v oboru celých a racionálních čísel, využívá vlastnosti operací sčítání a násobení (komutativnost, asociativnost, distributivnost) při úpravě výrazů - žák zná zpaměti druhé mocniny celých čísel od 1 do 10 a využívá je při výpočtech (i ke stanovení odpovídajících druhých odmocnin) - žák provádí základní úpravy zlomků (rozšiřuje a krátí zlomek, vyjádří zlomek v základním tvaru, převádí zlomek na smíšené číslo a naopak) - žák určí absolutní hodnotu celého čísla ***Žák zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor*** - žák zaokrouhluje čísla s danou přesností - žák využívá pro kontrolu výsledku odhad - žák účelně a efektivně využívá kalkulátor ***Žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)*** - žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část: přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem ***Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním*** - žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných - žák vybere odpovídající výraz, který popisuje jednoduchou reálnou situaci ***Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav*** - žák vyřeší rovnici a soustavu dvou jednoduchých lineárních rovnic pomocí ekvivalentních úprav - žák ověří správnost řešení slovní úlohy ***Žák analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel*** - žák řeší jednoduché úlohy v oboru celých čísel - žák popíše konkrétní situace s využitím racionálních čísel

Tematický okruh: **Závislosti, vztahy a práce s daty**

Žák vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data

- žák vyhledá potřebné údaje v tabulce, diagramu a grafu
- žák vyhledá a vyjádří vztahy mezi uvedenými údaji v tabulce, diagramu a grafu (četnost, aritmetický průměr, nejmenší a největší hodnota)
- žák převádí údaje z textu do tabulky, diagramu a grafu a naopak
- žák samostatně vyhledává data v literatuře, denním tisku a na internetu

Žák porovnává soubory dat

- žák porovná kvantitativní vztahy, které jsou uvedeny v různých tabulkách nebo v tabulce a diagramu

Žák vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem

- žák pozná funkční závislost z textu úlohy, z tabulky, z grafu a z rovnice
- žák přiřadí funkční vztah vyjádřený tabulkou k příslušnému grafu a naopak
- žák vyčte z grafu podstatné informace (např. nejmenší a největší hodnota, růst, pokles)

Žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů

- žák vybere odpovídající funkční vztah, který popisuje jednoduchou reálnou situaci

Tematický okruh: **Geometrie v rovině a prostoru**

Žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku

- žák využívá při analýze praktické úlohy náčrtky, schémata, modely
- žák využívá polohové a metrické vlastnosti (Pythagorova věta, trojúhelníková nerovnost, vzájemná poloha bodů a přímek v rovině, vzdálenost bodu od přímky) k řešení geometrických úloh
- žák řeší geometrické úlohy početně
- žák využívá matematickou symboliku

Žák určuje velikost úhlu měřením a výpočtem

- žák sčítá a odčítá úhly, určí násobek úhlu (bez převodu stupňů a minut)

Žák odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

- žák určí výpočtem obsah (v jednodušších případech) trojúhelníku, čtverce, obdélníku, rovnoběžníku, lichoběžníku, kruhu
- žák určí výpočtem obvod trojúhelníku, čtverce, obdélníku, rovnoběžníku, lichoběžníku, kruhu
- žák používá a převádí jednotky délky
- žák používá a převádí jednotky obsahu

Žák určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti

- žák rozpozná mnohostěny (krychle, kvádr, kolmý hranol, jehlan) a rotační tělesa (válec, kužel, koule)

Žák odhaduje a vypočítá objem a povrch těles

- žák odhaduje a vypočítá objem krychle, kvádru a válce
- žák používá a převádí jednotky objemu

Žák načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině

- žák rozpozná, z jakých základních těles je zobrazené těleso složeno

Žák analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu

- žák vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy
- žák řeší jednoduchou úlohu
- žák ověří výsledek úlohy

Tematický okruh: **Nestandardní aplikační úlohy a problémy**
Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů, nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací - žák vyhledá v textu úlohy potřebné údaje a vztahy - žák řeší jednoduchou úlohu - žák ověří výsledek úlohy ***Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí*** - žák využívá představu o podobě trojrozměrného útvaru při řešení jednoduchých úloh z běžného života

Také z oddílů vzdělávacího obsahu Matematika a její aplikace RVP G lze vybrat řadu očekávaných výstupů, na které navazuje geograf při své odborné práci. V oddíle Argumentace a ověřování jsou to dovednosti logického uvažování, tvorby a testování hypotéz, zdůvodňování a kontrola správného řešení problému, které jsou využívány především při vědecké práci a při řešení problémových úloh (Tabulka 9).

Tabulka 9: Výběr očekávaných výstupů RVP G vzdělávacího obsahu vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace potřebných v geografii (dle MŠMT, 2007, s. 23 - 25).

Oddíl: **Argumentace a ověřování**
Žák - ***rozliší správný a nesprávný úsudek*** - ***vytváří hypotézy, zdůvodňuje jejich pravdivost a nepravdivost, vyvrací nesprávná tvrzení*** - ***zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému***
Oddíl: **Číslo a proměnná**
Žák - ***užívá vlastnosti dělitelnosti přirozených čísel*** - ***operuje s intervaly*** - ***provádí operace s mocninami a odmocninami, upravuje číselné výrazy*** - ***odhaduje výsledky numerických výpočtů a efektivně je provádí, účelně využívá kalkulátoru*** - ***upravuje efektivně výrazy s proměnnými, určuje definiční obor výrazu*** - ***rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic*** - ***řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení*** - ***rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy*** - ***geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav*** - ***analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav***

Oddíl: **Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost**
Žák - ***diskutuje a kriticky zhodnotí statistické informace a daná statistická sdělení*** - ***volí a užívá vhodné statistické metody k analýze a zpracování dat (využívá výpočetní techniku)*** - ***reprezentuje graficky soubory dat, čte a interpretuje tabulky, diagramy a grafy, rozlišuje rozdíly v zobrazení obdobných souborů vzhledem k jejich odlišným charakteristikám***
Oddíl: **Závislosti a funkční vztahy**
Žák - ***načrtne grafy požadovaných funkcí (zadaných jednoduchým funkčním předpisem) a určí jejich vlastnosti*** - ***formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí a posloupností*** - ***využívá poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic, při určování kvantitativních vztahů*** - ***aplikuje vztahy mezi hodnotami exponenciálních, logaritmických a goniometrických funkcí a vztahy mezi těmito funkcemi*** - ***modeluje závislosti reálných dějů pomocí známých funkcí*** - ***řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích a posloupnostech***
Oddíl: **Geometrie**
Žák - ***používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary*** - ***určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky*** - ***využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému*** - ***v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly*** - ***řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí*** - ***řeší analyticky polohové a metrické úlohy o lineárních útvarech v rovině***

Z oddílu „Číslo a proměnná“ lze vybrat celou řadu očekávaných výstupů, se kterými se při své práci setkává také geograf. Jedná se především o provádění operací s mocninami a odmocninami, úpravu číselných výrazů a výrazů s proměnnými, řešení rovnic a nerovnic a jejich využití při řešení problémů.

Mezi jednu z nejdůležitějších dovedností geografa patří nepochybně dovednost práce se statistickými daty. Na jedné straně by měl být schopný kriticky zhodnotit a interpretovat konkrétní statistické informace, tabulky, diagramy a grafy. Měl by také dokázat se získanými informacemi dále pracovat a vhodně je využívat ke své práci. Na druhou stranu by však geograf měl mít také základní znalosti o statistických metodách a způsobu jejich využití při zpracování dat.

Další nedílnou součástí práce geografa jsou dovednosti uvedené v oddíle „Závislosti a funkční vztahy“. Geografové vytvářejí řadů grafů, pomocí nichž formulují a zdůvodňují vlastnosti sledovaných jevů. Dokážou také na základě těchto grafů předpovídat budoucí vývoj sledovaného jevu. Dále využívají známé funkce k modelaci reálných dějů. V geografii nejen fyzické je také třeba umět operovat s exponenciálními, logaritmickými a goniometrickými funkcemi.

V posledním oddílu vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“, jsou uvedeny očekávané výstupy týkající se geometrie. Při své práci využívají tyto dovednosti například kartografové, klimatologové, geomorfologové nebo hydrologové. Mezi tyto dovednosti patří například práce s měřítkem, využití podobnosti a shodnosti dvou geometrických útvarů, určování vzájemné polohy lineárních útvarů a jejich vzdálenosti, nebo určování odchylky dvou přímek.

Z důvodu velké obecnosti RVP G byla provedena analýza 25 náhodně vybraných Školních vzdělávacích programů (ŠVP) gymnázií z celé České republiky. Z celkového počtu 25 je 5 škol ze Středočeského kraje a 10 škol z Prahy. Seznam gymnázií, jejichž ŠVP byl analyzován je uveden v Příloha 1. V rámci analýzy byla zaměřena pozornost na očekávané výstupy z oddílů „Číslo a proměnná“, „Závislosti a funkční vztahy“ a oddílu „Geometrie“. “. Z výzkumu vyplývá, že očekávané výstupy ve ŠVP jednotlivých gymnázií v podstatě odpovídají RVP. Jen v ojedinělých případech se objevují jiné očekávané výstupy, než ty, které jsou uvedené v RVP (viz Příloha 1).

2.2.2. Příklady geografických úloh vyžadujících aplikaci matematických znalostí a dovedností

Jak již bylo uvedeno výše (kap. 2.1), řada činností týkajících se geografické práce vyžaduje matematické schopnosti a dovednosti. Matýsková (2011) uvádí následující příklady úloh vyžadujících matematické dovednosti ve výuce geografie:

1. **Výpočet na kouli**

Země není pravidelným tělesem. Za účelem zjednodušení výpočtů předpokládáme, že Země má tvar koule a její poloměr je 6371,1 km. Při výpočtech tohoto typu studenti aplikují znalostí, které mají ze stereometrie neboli geometrie v prostoru.

- ***délka rovníku, délka rovnoběžky***

Na povrchu koule lze najít hlavní kružnice o stejném poloměru, jako je poloměr koule, a vedlejší kružnice, jejichž poloměr je menší než poloměr koule (Čapek, 2001). Pro výpočet délky rovníku se používá vzorec pro obvod kruhu:

$$o = 2 . \pi . r = \pi . d$$

R - poloměr Země $\quad$ d - průměr Země $\quad$ π - Ludolfovo číslo

Pro určení délky rovnoběžky se používá vzorec pro výpočet délky kruhového oblouku:

$$l(o) = 2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, cos\varphi$$

φ - zeměpisná šířka dané rovnoběžky

- ***plocha zeměpisné sítě, objem koule***

Studenti mohou počítat objem koule, její povrch nebo část jejího povrchu, tzv. kulový vrchlík. Dalším typem příkladů je určování dohlednosti, resp. vzdálenosti, v níž je vidět obzor z dané výšky. Odvození tohoto vztahu vychází ze znalosti Pythagorovy věty. V úlohách těchto typů musí studenti ovládat nejen vzorce, ale také převody jednotek.

povrch koule: $S = 4 \,.\, \pi \,.\, R^2$

objem koule: $V = \frac{4}{3} \,.\, \pi \,.\, R^3$

kulový vrchlík: $Q = 2 \,.\, \pi \,.\, R \,.\, h,$ h - výška pozorovatele

dohlednost: $(R + h)^2 = R^2 + d^2,\;\; d = \sqrt{2Rh}$

2. **Určení vzdálenosti na sféře a určení zeměpisné šířky**

Základní úlohou sférické trigonometrie je výpočet nejkratší vzdálenosti dvou bodů na Zemi. V takovém případě se jedná o oblouk hlavní kružnice, který je omezený středovým úhlem (Čapek, 2001). Správný výpočet vyžaduje mj. znalost goniometrických funkcí a zvládnutí počítání s úhly. Vzorec pro výpočet délky ortodromy je následující:

$$d = R \,.\, c \,.\, \frac{\pi}{180°}$$

$$\cos c = \cos(90° - \varphi_A) \,.\, \cos(90° - \varphi_B) + \sin(90° - \varphi_A) \,.\, \sin(90° - \varphi_B) \,.\, \cos \Delta\lambda$$

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$$

R - poloměr Země	φ_A - zeměpisná šířka místa A	λ_A - zeměpisná délka místa A
π - Ludolfovo číslo	φ_B - zeměpisná šířka místa B	λ_B - zeměpisná délka místa B

3. **Čas a určení zeměpisné délky**

Nejčastějším typem příkladů je výpočet místního času na určitém místě na Zemi, pokud známe jeho polohu a místo ležící na stejné rovnoběžce. Studenti v takovém případě pracují s logickou úvahou. Pro dosažení správného výsledku je třeba bezpečně ovládat počítání se stupni a s časem.

Také Leipertová (2010) se ve své práci zabývá aplikací matematických dovedností v geografii, konkrétně ve výuce kartografie. Uvádí následující tabulku ukazující, které matematické dovednosti se využívají v geografické kartografii (Tabulka 10). Podrobněji se věnuje kapitolám „Měřítko mapy a globu“, „Měření na mapách“ a „Souřadnicové systémy“. Je to především z toho důvodu, že se v nich často aplikují matematické dovednosti (Leipertová, 2010).

Tabulka 10: Matematické dovednosti aplikované v geografické kartografii (dle Leipertové, 2010, s. 27).

Vybrané kapitoly z geografické kartografie	**Aplikované matematické dovednosti**
Měřítko mapy a globu	*zaokrouhlování* *převody jednotek* *práce s poměrem* *výpočet neznámé pomocí trojčlenky* *výpočet obsahu rovinných obrazců*
Měření na mapách	*zaokrouhlování* *převody jednotek* *práce s poměrem* *výpočet neznámé pomocí trojčlenky* *výpočet obsahu rovinných útvarů* *určení velikosti úhlu měřením a výpočtem*
Souřadnicové systémy	*zakreslování do a čtení z pravoúhlé soustavy souřadnic*

Další autorkou, zabývající se touto tematikou, je Ondráčková (2013). Ve své práci navrhuje konkrétní geografické úlohy vyžadující matematické znalosti a dovednosti. Oproti výše uvedeným autorkám se nesoustředí na dílčí část geografie, ale vybírá aktivity napříč celým oborem (Tabulka 11).

Tabulka 11: Geografické úlohy vyžadující matematické znalosti a dovednosti a jejich zařazení (dle Ondráčkové, 2013, s. 94 – 101).

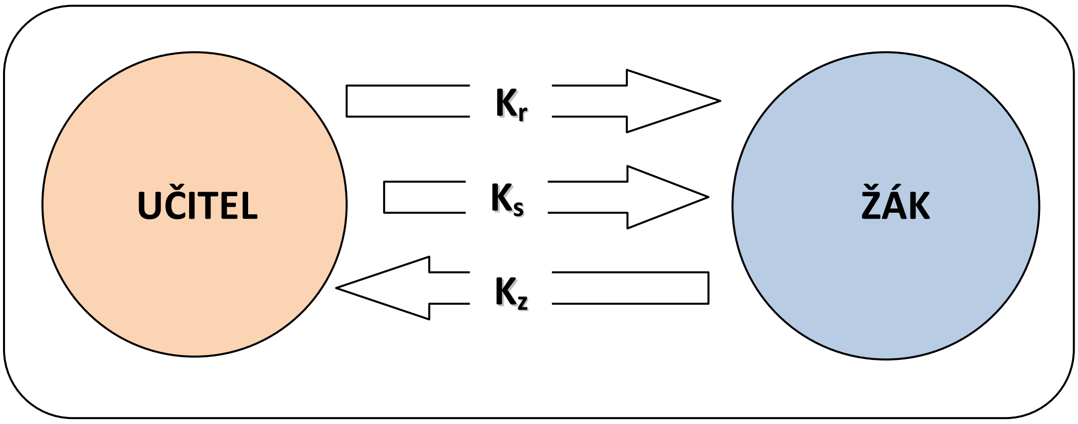
Činnost	Téma
tvorba klimadiagramu	Atmosféra.
interpretace sloupcového diagramu	Porovnání plochy oceánů.
tvorba sloupcového diagramu	Průměrný přirozený přírůstek daných zemí.
čtení a interpretace tabulky	Demografické ukazatele. Vesmír.
čtení a interpretace grafu	Přirozený přírůstek a úbytek. Výškový profil. Věková pyramida.
určování světových stran pomocí ručiček na hodinkách	Terénní praxe.
vzdálenost dvou objektů	Terénní praxe.
porovnání rozlohy více území	Afrika.
čtení mapy	Výškopis. Měřítko.
zeměpisné souřadnice	Zeměpisná poloha.
vzdálenosti na sféře	Zeměpisná poloha.
počítání s procenty	Dýchání člověka. Ovzduší.

Uvedené příklady úloh rozhodně nepokrývají všechny úlohy v geografii vyžadující matematické znalosti a dovednosti. Jsou pouze důkazem toho, že geografie je věda úzce spojená s matematikou, a kvalitní práce geografa vyžaduje zvládnutí určité úrovně matematické gramotnosti.

2.3. Didaktický test

2.3.1. Vzdělávací proces a zpětná vazba

Vzdělávací proces je procesem značně komplikovaným a složitým. Člověk v něm získává nové dovednosti, vědomosti, postoje ale i nové vazby mezi informacemi. Obecně lze říct, že se jedná o řízený proces, ve kterém figurují dvě základní složky: složka řídící a složka řízená (Chráska, 1999). Řídící složka je reprezentovaná učitelem a použitými vyučovacími prostředky, složkou řízenou je žák. Komunikace mezi učitelem a žákem probíhá ve třech informačních kanálech (Obr. 7). Učitel vysílá směrem k žákovi informace o učivu a informace řídící jeho činnost tzv. sdělovacím kanálem (K_s). Tzv. zpětnovazebním kanálem (K_z) se přenášejí k vyučujícímu informace, které ho informují o změnách stavů řízené složky způsobené jeho činností. Také vyučující poskytuje žákům zpětnou vazbu o jejich výkonech (K_r) prostřednictvím hodnocení, korekce, odstraňování chyb, atd.



Obr. 7: Komunikace mezi učitelem a žákem ve vyučovacím procesu (dle Chrásky, 1999, s. 10).

Vyučovací proces tedy lze zjednodušeně chápat jako řízený proces, ve kterém jsou rozlišovány dvě základní funkce (Chráska, 1999):

a) sdělování nových poznatků
b) kontrola množství a kvality osvojených vědomostí a dovedností.

V současném českém školství je daleko větší pozornost věnována sdělování nových poznatků. Je však třeba si uvědomit, že bez zajištění zpětné vazby a následné reakce na získané informace, může být toto sdělování nových poznatků zcela neúčinné. Zpětná vazba ve formě zkoušky je proto nedílnou součástí vyučovacího procesu. Zkouška navíc plní funkci motivační a výchovnou. Slouží také jako prostředek k získání podkladů pro klasifikaci žáků. Vzhledem k tomu, že učitelovo hodnocení může ovlivnit životní zaměření žáka, má zkouška dokonce celospolečenský význam (Chráska, 1999).

2.3.2. Co je to didaktický test?

Výsledky výuky lze hodnotit mnoha způsoby – ústním zkoušením, zadáváním písemných prací, ověřováním schopnosti aplikace vědomostí v praxi apod. (Schindler, 2006; Pelikán, 2007). Didaktický test, na rozdíl od těchto přístupů při zachování určitých pravidel, zajišťuje vyšší validitu a reliabilitu zjištěných poznatků (Pelikán, 2007). Pojem didaktický test je u odlišných autorů definován různě. Hniličková a kol. (1972, s. 11) uvádí: „Didaktické testy lze definovat jako soustavu úkolů, které jsou pro určité skupiny žáků shodné. Úkoly jsou vybírány, uspořádány, zadávány a vyhodnoceny tak, aby se rozpoznalo, jakých výsledků se při vyučování dosahuje a jaké jsou tedy vědomosti a dovednosti žáků. Chráska (1999, s. 12) vymezuje didaktický test jako „zkoušku, která se orientuje na objektivní zjišťování úrovně zvládnutí učiva u určité skupiny osob." Stručnou a výstižnou definici uvádí Byčkovský (1982), podle něhož je didaktický test: „nástroj systematického zjišťování (měření) výsledků výuky". Obecně se didaktickým testem rozumí způsob, jímž se zjišťuje, do jaké míry si žák osvojil školní učivo. Konstrukce a použití testu jsou přitom ovlivněny systémem vyučování. To znamená použitými učebními metodami, stanovenými cíli vyučování atd. Výběr zkušebních úkolů by měl vždy být výsledkem pečlivé analýzy učiva a cílů vyučování. Metody a normy hodnocení by měly být předem ověřeny na dostatečném počtu jiných žáků (Chráska, 1999).

V praxi často dochází k zúženému chápání pojmu didaktický test. Stává se, že učitelé považují za didaktický test jen krátkou písemnou zkoušku, někdy jen zkoušku sestavenou pouze z úloh s výběrem odpovědí. Didaktický test však zdaleka ne vždy obsahuje jen úlohy s výběrem odpovědí. V některých testech může být požadováno řešení určitého problému, pojednání na určité téma aj. Je třeba také zmínit, že didaktický test nemusí mít vždy písemnou podobu (Chráska, 1999).

2.3.3. Klasifikace didaktických testů

V pedagogické praxi se lze setkat s různými druhy didaktických testů, jež se rozlišují na základě informací, které se díky nim získají, popř. na základě jeho kvality. Pelikán (2007) ve své práci rozlišuje didaktické testy podle čtyř kritérií – měřené charakteristiky výkonu, dokonalosti testu a jeho vybavení, interpretace výkonu a tematického rozsahu (Tabulka 12).

Tabulka 12: Druhy didaktických testů (dle Pelikána, 2007, s. 172 - 175).

<table>
<tr><th>KLASIFIKAČNÍ HLEDISKO</th><th colspan="4">DRUHY TESTŮ</th></tr>
<tr><td>měřená charakteristika výkonu</td><td colspan="2">Rychlosti</td><td colspan="2">úrovně</td></tr>
<tr><td>dokonalost testu a jeho vybavení</td><td>standardizované</td><td colspan="2">kvazi-standardizované</td><td>nestandardizované</td></tr>
<tr><td>interpretace výkonu</td><td>NR testy (rozlišující)</td><td colspan="3">CR testy (ověřující)</td></tr>
<tr><td>tematický rozsah</td><td colspan="2">Monotematické</td><td colspan="2">polytematické (souhrnné)</td></tr>
</table>

Chráska (1999) ve své práci uvádí ještě podrobnější dělení didaktických testů (Tabulka 13). Oproti Pelikánovi (2007) rozlišuje didaktické testy ještě na základě povahy činnosti testovaného, míry specifičnosti učení zjišťované testem, časového zařazení do výuky a míry objektivity skórování.

Tabulka 13: Druhy didaktických testů a jejich základní charakteristika (dle Chrásky, 1999, s. 13).

Klasifikační hledisko	Druh testu	Základní charakteristiky
Měřená charakteristika výkonu	**Testy rychlosti**	- zjišťuje, jakou rychlostí je žák schopen řešit určitý typ testových úloh - pevně stanoven časový limit - žáci řeší velmi snadné úlohy - předpokladem je bezpečné zvládnutí řešených úloh všemi žáky např.: test rychlosti čtení, test přepisu textu na psacím stroji dle počtu úhozů v daném čase
	Testy úrovně	- absence časového limitu - testování úrovní vědomostí nebo dovedností zkoušeného - pokud je použitý časový limit, pak je zvolen tak, aby znamenal přerušení práce jen pro ty nejpomalejší žáky - úlohy v testu zpravidla řazeny podle obtížnosti od nejjednodušších po nejtěžší
Dokonalost přípravy testu a jeho příslušenství	**Standardizované didaktické testy**	- sestavovány profesionálně podle závazně stanovených a přísně dodržovaných konstrukčních principů - většinou připravovány specializovanými institucemi - jejich vlastnosti důkladně ověřeny a známy
	Nestandardizované didaktické testy	- připravovány vyučujícími pro jejich vlastní potřeby ve výuce nebyly ověřeny na větším vzorku žáků - nelze určit vlastnosti testů
	Kvazi-standardizované didaktické testy	- připravované dokonaleji než testy učitelské - standardizace není úplná - některé jejich vlastnosti jsou známy - např.: didaktický test zjišťující úroveň vědomostí žáků v daném předmětu na určité škole (několik paralelních tříd) nebo na více školách
Povaha činnosti testovaného	**Testy kognitivní a testy psychomotorické**	- dělení vychází z dělení lidského učení do tří oblastí – učení kognitivní, afektivní a psychomotorické. - testy kognitivní měří u žáků úroveň jejich poznání - např.: testy, ve kterých žák řeší úlohu z matematiky, překládá text z cizího jazyka, atd. - testy zjišťující výsledky psychomotorického učení se nazývají psychomotorické - např.: test psaní na stroji
Míra specifičnosti učení zjišťovaného testem	**Testy výsledků výuky a testy studijních předpokladů**	- testy výsledků výuky měří to, co se žáci v dané oblasti naučili - testy studijních předpokladů měří úroveň obecnějších charakteristik jedince potřebné k dalšímu studiu

Klasifikační hledisko	Druh testu	Základní charakteristiky
Interpretace výkonu	**Testy relativního výkonu (rozlišující)**	- určují výkon žáka vzhledem k populaci testovaných - snaha dosáhnout maximální možné objektivity a diferencovanosti hodnocení testových výkonů - výkon žáka porovnávám s výkony ostatních žáků, v případě standardizovaných testů s výkony žáků celé populace
	Testy absolutního výkonu (ověřující)	- cílem prověřit úroveň vědomostí a dovedností žáka v přesně vymezené části učiva - výkon žáka není srovnáván s výkonem ostatních, je vyjádřen vůči všem úlohám, které vybrané učivo reprezentují - kritériem úspěchu je zvládnutí učiva na určitém předem stanoveném stupni
Časové zařazení do výuky	**Testy vstupní**	- vyučujícími zadávány na začátku výuky určitého celku učební látky - cílem je zjistit úroveň již získaných znalostí a dovedností, které jsou potřebné pro úspěšné zvládnutí nové látky - např.: testy na začátku školního roku, před zahájením nové kapitoly, nebo třeba na začátku vyučovací hodiny
	Testy průběžné	- zadávány v průběhu výuky - poskytují vyučujícímu zpětnou vazbu o průběhu vzdělávání - zkoušená je jen malá část učiva za cílem zjistit, jak žáci danou látku přijímají, chápou a jak si ji osvojují
	Testy výstupní	- zadávány na konci určitého celku - např.: na konci školního roku, po probrání určitého tematického celku - vyučující jejich prostřednictvím získává informace, které jsou potřebné pro hodnocení žáků
Tematický rozsah	**Testy monotematické a polytematické**	- monotematické testy zkouší jen jediné téma učební látky - polytematické testy zkouší učivo více tematických celků
Míra objektivity skórování	**Testy objektivně skórovatelné**	- složeny z úloh, u nichž lze objektivně rozhodnout, zda byly nebo nebyly řešeny správně - vyhodnocování těchto testů může provádět jakákoliv osoba a čím dál častěji i stroj - např.: úlohy, v nichž žák vybírá správnou odpověď, úlohy, kde žák formuluje vlastní, ale velice stručné odpovědi
	Testy subjektivně skórovatelné	- tvořeny úlohami, u nichž není možné určit jednoznačná pravidla pro skórování - např.: otevřené široké úlohy, ve kterých žáci na danou otázku odpovídají mnohem rozsáhleji než v případě objektivně skórovatelných testů - umožňují vyučujícím testovat u žáků daleko komplexnější vědomosti a dovednosti

2.3.4. Vlastnosti didaktického testu

Jestliže má být didaktický test dobrým prostředkem měření výsledků výuky, je třeba, aby byl objektivní, validní a reliabilní. Pouze v takovém případě plní svoji funkci. Kvalita tohoto testu je také závislá na jeho obtížnosti, která může výrazně ovlivnit výsledky, kterých testovaní v testu dosáhnou.

Objektivita je jednou z klíčových vlastností didaktického testu, avšak je dosažitelná jen z části. V kontextu testování ji chápe jako nepřítomnost výrazných subjektivních vlivů v průběhu testování, které mohou mít původ jak v samotné tvorbě testu, tak při jeho řešení nebo následném vyhodnocování. Objektivita didaktického testu může být například snížena nejednoznačnou formulací testové úlohy, v důsledku čehož každý žák rozumí zadání jiným způsobem. Příklad takové úlohy uvádí Schindler (2006) a její zadání zní: *„Které zvíře v ČR je největší?“*. Úloha je nejednoznačná, jelikož umožňuje zahrnout i zvířata chovaná v zajetí (např. v ZOO) – i tato žijí v ČR. Další problém představuje slovo „největší“. Žák si může pod tímto pojmem představit zvíře nejhmotnější, nejvyšší, nejvyšší ve stoje na zadních apod. Aby se zajistila objektivita didaktického testu, tak je třeba jednoznačně formulovat zadání úloh testu, zajistit shodné podmínky při jeho zadávání a stanovit pro všechny stejná kritéria hodnocení. Vzhledem k tomu že testování je živá situace, které se účastní velký počet lidí, a z toho důvodu se může objevit řada rušivých, nestandardních či „neobjektivních“ prvků, nelze nikdy dosáhnout stoprocentní objektivity. Příkladem může být situace, kdy někomu dopíše pero, kolem školy jede hlučný kamion, učitel umožnil opisování nebo žák potřebuje na záchod.

Validní didaktický test zkouší to, co má být skutečně zkoušeno. Posouzení, zda se jedná o validní test, se většinou nechává na příslušném odborníkovi, popřípadě jsou výsledky vytvořeného testu porovnány s výsledky testu, jehož validita je nesporná. V případě, že je určována validita testů, tak se zkoumá především tzv. obsahová validita. To znamená, že se zjišťuje, jak dalece se shoduje obsah testu s cílem a obsahem vyučování (Chráska, 1999). Příkladem úlohy s nízkou obsahovou validitou může být matematická úloha, jejíž zadání zní: *„Obec Kovač má 250 obyvatel. Každý rok se v obci narodí nebo se do ní přistěhují 3 obyvatelé. Každý rok 2 obyvatelé zemřou nebo se odstěhují. Vypočítej, za kolik let se obec Kovač stane městem.*“ (Schindler, 2006). Cílem této úlohy je ověřit základní matematické operace. Při řešení úlohy mají žáci uvést postup výpočtu a závěr, který obsahuje počet let, za něž se daná obec stane městem. V zadání úlohy však není uvedena definice města. Předpokládá se, že žáci vědí, jaké podmínky musí být splněny, aby se obec změnila ve město. Hranice počtu obyvatel, která je nutná k tomu, aby obec byla počítána jako město, navíc není objektivně stanovitelná, ale jde o úzus, který se mění v čase, ale i stát od státu. Tato znalost však jistě nepatří do matematiky. Úspěšnost žáků při řešení úlohy tedy nezávisí pouze na matematických znalostech a dovednostech. Oproti tomu při posuzování validity testů studijních předpokladů je pozornost soustředěna na tzv. predikční validitu, což je schopnost předpovídat budoucí úspěšnost v učení. V takovém případě se zvažují vědomosti a dovednosti, ze kterých je možné usuzovat budoucí studijní úspěšnost (Schindler, 2006).

Výsledek didaktického testu u určitého žáka je výsledkem dvou faktorů: pevné složky (tj. skutečných vědomostí nebo dovedností) a náhodné složky (např.: okamžitá kondice, vnější podmínky, atd.). Náhodná složka způsobuje, že při relativně stejných podmínkách mohou být výsledky testování odlišné (Chráska, 1999). Dobrý didaktický test je takový, který zredukuje vliv této složky na minimum. V takovém případě se hovoří o reliabilním testu (Chráska, 1999). Mezi základní vlastnosti reliabilního testu se počítá jeho spolehlivost a přesnost. Spolehlivý test je takový test, který za stejných podmínek poskytuje stejné nebo velmi podobné výsledky. O přesném didaktickém testu lze hovořit v případě, pokud při jeho používání nedochází k velkým chybám v měření. Reliabilita testu je důležitý ukazatel jeho technické kvality. S klesající reliabilitou je tedy třeba přistupovat k výsledkům testování skeptičtěji. Vysoká reliabilita testu přitom není zárukou jeho validity. Je proto třeba zajistit obě vlastnosti testu (Chráska, 1999).

K výpočtu reliability didaktického testu je využívána řada matematických metod. Nejčastěji používanými metodami jsou Cronbachovo alfa (Řehák, 1998) a výpočet Kuderova-Richardsonova vzorce (Chráska, 1999). Cronbachovo alfa je dáno následujícím vzorcem:

Cronbachovo alfa: $\propto = \frac{k}{k-1} \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} s_i^2}{s_x^2}\right)$,

kde k je počet úloh daného testu, s_i^2 je rozptyl skóre i-té úlohy, s_x^2 je celkový rozptyl skóre dosažených v testu. Štěpánek (2009) k rozhodnutí o reliabilitě testu ve své práci doporučuje hodnotu Cronbachova alfa alespoň 0,85 (Tabulka 14). Podle Čížkové, Čurdové a Kubiatko (2013) lze za reliabilní testy považovat ty, jejichž hodnota Cronbachova alfa je okolo 0,8 a skládají se z více než deseti úloh.

Tabulka 14: Hranice reliability pro posouzení kvality testu v individuální pedagogické diagnostice (dle Štepánek, 2009, s. 17)

α > 0,95	vynikající
α > 0,85	dostatečná k tomu, aby na základě jedné zkoušky bylo možné činit rozhodnutí
α > 0,65	zkoušku lze použít jako jeden z podkladů pro rozhodnutí
α < 0,65	zkoušku nelze pokládat za spolehlivý podklad pro rozhodnutí

Na kvalitu didaktického testu má také výrazný vliv jeho obtížnost, resp. obtížnost jeho úloh. Jedná se o podíl žáků, kteří danou úlohu vyřešili správně vzhledem k celkovému počtu řešitelů (Chráska, 1999). Schindler (2006) pro měření obtížnosti didaktického testu rozlišuje index obtížnosti a hodnotu obtížnosti. Index obtížnosti je vyjádřen vztahem:

$P = 100 \cdot \frac{n_s}{n}$,

kde n je celkový počet řešitelů a n_s je celkový počet úspěšných řešitelů. Jedná se tedy o podíl studentů, kteří vyřešili danou úlohu správně. Index obtížnosti nabývá hodnot v intervalu $\langle 0; 100 \rangle$. Čím je jeho hodnota vyšší, tím je obtížnost úlohy nižší (Schindler, 2006). Štěpánek (2009) považuje úlohy s indexem obtížnosti (P) vyšším než 80 za velmi snadné a úlohy s indexem obtížnosti nižším než 20 za velmi obtížné. Opakem je hodnota obtížnosti (Q), kterou udává vzorec:

$$Q = 100 \,.\, \frac{n_{ch}}{n},$$

kde n je opět celkový počet řešitelů a n_{ch} je celkový počet řešitelů, kteří danou úlohu nevyřešili správně. Štěpánek (2009) považuje úlohy s hodnotou obtížnosti Q vyšší než 80 za velmi obtížné. Naopak úlohy s hodnotou obtížnosti Q nižší než 20 za velmi snadné.

2.4. Slovní úlohy

Řešení slovních úloh je nedílnou součástí výuky matematiky. Novotná (2000, s. 10) uvádí definici slovní úlohy dle Odvárka (1990), podle nějž „slovními úlohami rozumíme ve středoškolské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace (se svými rozmanitými situacemi a vztahy) z nejrůznějších mimomatematických oblastí. Mechanizmus jejich řešení vyžaduje matematizaci slovně zadaných situací a zpětnou transformaci získaného matematického řešení do kontextu úlohy, čímž pomáhá rozvíjet matematické myšlení (Kubínová, 1998). Hejný (1990, s. 193) dodává, že slovní úlohy jsou také významné z hlediska motivace žáků a rozvíjení schopností modelovat reálné situace. Jejich řešení jsou však žáky často vnímána jako velmi obtížná (Novotná, 2000). Na mnoha školách je možné se setkat s tím, že žáci vcelku rádi a pohotově řeší numerické příklady různé obtížnosti, ale zjevně neradi řeší slovní úlohy (Rakušanová, 1957). Problémů, s nimiž se žák potýká při řešení slovních úloh, je více. Novotná (2000, s. 15) ve své práci uvádí čtyři základní obtíže:

- Žák má nedostatečné předchozí zkušenosti a znalosti související s kontextem nebo potřebným matematickým zázemí úlohy.
- Žák nečte zadání pozorně, s porozuměním.
- Žák nesprávně interpretuje jeden nebo více termínů použitých v zadání úlohy.
- Žák není schopen spojit oddělené informace a vztahy do jednoho komplexnějšího celku.

Tyto problémy ovšem nejsou neřešitelné. Vhodnými metodami je možné, je buď odstranit, nebo alespoň zmírnit.

Slovní úlohy lze rozlišovat na základě mnoha faktorů. Odvárko (1990) dělí slovní úlohy podle oblasti matematiky na slovní matematické úlohy a slovní úlohy s nematematickým obsahem:

- ***Slovní matematické úlohy*** jsou matematické úlohy, které jsou zadány slovně, nikoliv v matematickém formálním jazyce. Hovoří se v nich o číslech, rovnicích, apod., ale řešitel musí nejprve přeložit slovní zadání úlohy do příslušného kalkulu.

- ***Slovní nematematické úlohy*** jsou takové úlohy, které jsou zadány slovně, a vyskytuje se v nich alespoň jeden termín, který nepatří do žádné matematické teorie.

Slovní úlohy se také dělí podle množství početních operací potřebných k jejich řešení na slovní úlohy jednoduché a složené (Blažková, 2011):

- ***Jednoduché slovní úlohy*** jsou takové úlohy, k jejichž správnému vyřešení je potřeba pouze jedna početní operace.

- ***Složené slovní úlohy*** jsou úlohy, k jejichž řešení je potřeba vytvářet a řešit dílčí jednoduché úlohy, z nichž každá vede k jedné početní operaci.

Řada autorů se snaží analyzovat a popsat proces řešení slovních úloh. Prvním krokem tohoto procesu je vždy rozhodnutí řešitele, zda bude či nebude danou úlohu řešit. V případě, že se rozhodne pro řešení úlohy, rozděluje Novotná (2000) proces řešení úlohy do tří etap:

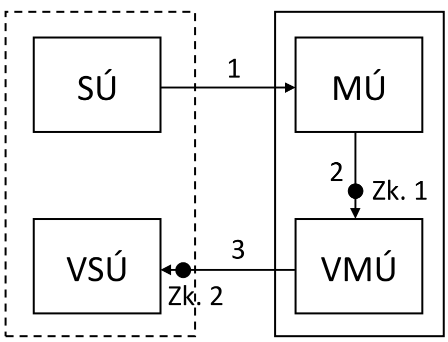
1. ***Etapa uchopování***, která obsahuje
   - uchopování všech objektů a vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc“,
   - hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu,
   - hledání a nalezení sjednocujícího pohledu,
   - získání celkového vhledu do struktury problému.
2. ***Etapa transformace*** odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému.
3. ***Etapa návratu do kontextu zadání úlohy***.

Uvedené postupy jsou jakýmsi „ideálem“. V praxi se mohou vyskytovat odchylky. Řešitel může například některou etapu vynechat, může se k některé etapě vrátit, nebo mohou probíhat všechny tři etapy najednou. V takovém případě je na učiteli, aby daného žáka usměrnil (Novotná, 2000).

Odvárko (1990) se zaměřuje na proces řešení slovních úloh s nematematickým obsahem. V nejobecnějším případě rozděluje tento proces na tři fáze:

1. matematizaci situace,
2. řešení matematické úlohy,
3. návrat do kontextu zadání.

V procesu zdůrazňuje význam dvojí zkoušky. První zkouška následuje po řešení matematické úlohy za účelem kontroly správnosti jejího řešení. Cílem druhé zkoušky je kontrola kontextové správnosti (Obr. 8).



Vysvětlivky:

SÚ	. . .	slovní úloha
MÚ	. . .	matematická úloha
VSÚ	. . .	výsledek slovní úlohy
VMÚ	. . .	výsledek matematické úlohy
Zk.	. . .	zkouška

Obr. 8: Proces řešení slovních úloh s nematematickým obsahem (dle Odvárka, 1990, s. 228).

Při řešení slovních úloh používají žáci různé strategie. Novotná (2000) uvádí čtyři základní strategie:

- řešení bylo získáno náhodně na základě strategie pokus – omyl,
- řešení je založeno na identifikaci slov nebo slovních spojení v zadání, která jsou pro řešitele signálem pro použití vzorce nebo určitého postupu, nebo naopak porozumění struktuře dané úlohy do té míry, že je řešitel schopen přenést tuto úlohu na jednu jednodušší úlohu nebo jejich sled,
- řešitel použil aritmetický (tj. nepoužil pro výpočet výsledku úlohy rovnice) nebo algebraický (při řešení úlohy je použita jedno nebo více rovnic) aparát,
- při stejném zadání může řešitel různými způsoby zpracovat zadané vztahy.

Porozumění schopnostem, které žákům usnadňují úspěšné vyřešení slovní úlohy, může významně pomoci učiteli při práci se žáky. Na základě toho může poznat, které znalosti či dovednosti žák má nebo nemá. Jeho úkolem je diagnostikovat hloubku žákových znalostí/dovedností, rozvíjet ty, které, žák má a snažit se doplnit ty, které žák nemá ještě dostatečně rozvinuté. Novotná (2000) uvádí tři základní schopnosti podporující úspěšnost při řešení slovních úloh – čtení s porozuměním, uchování dat a přechod od procesu ke stavu a zpět.

Jednou z nejčastějších překážek, se kterou se žáci při řešení slovních úloh potýkají, jsou potíže s používáním mluveného a psaného jazyka. Nedostatečná jazyková zdatnost může výrazně ovlivnit porozumění zadání slovní úlohy a tím i způsob jejího řešení (Navarra, 1995). Jednou z metod, umožňující odhalit, že žák zadání úlohy nerozumí, je požádat ho, aby zadání úlohy zopakoval svými vlastními slovy.

Při řešení slovních úloh s větším množstvím údajů nebo komplikovanější strukturou se může projevit žákova neschopnost uchovat informace. K rozvoji této schopnosti Novotná (2000) navrhuje

- opakovaně číst zadání slovní úlohy s důrazem na části úlohy, které jsou podstatné pro její vyřešení,
- přehledný zkrácený zápis důležitých údajů,
- řešení úloh s jednodušší strukturou,
- řešení vhodně uspořádané série gradovaných úloh.

Při řešení slovní úlohy je podle Novotné (2000) také důležité, aby byl žák schopen přecházet mezi stavem a procesem, které se průběžně střídají. Etapa kódování, tj. fáze uchopování zadání (UZA) je proces, na jehož konci žák vytvoří schéma (SCH) umožňující mu získat vhled do dané situace, tj. stav (Obr. 9). Na základě toho, provede matematizaci úlohy (MA), jejímž výsledkem je matematický popis (MP), což je opět stav (Obr. 9). Řešeni matematické úlohy (MR), stejně jako návrat do kontextu slovní úlohy (NK), jsou opět procesy (Obr. 9). Závěrečná odpověď (ZO) je stav (Obr. 9).

$$\underline{\text{UZA}} \longrightarrow \text{SCH} \longrightarrow \underline{\text{MA}} \longrightarrow \text{MP} \longrightarrow \underline{\text{MR, NK}} \longrightarrow \text{ZO}$$

Obr. 9: Postup při řešení slovní úlohy (dle Novotné, 2000, s. 62). Podtržené etapy představují procesy, nepodtržené etapy jsou stavy.

3. MATERIÁL A METODY

3.1. Materiál

Ke zjištění úrovně matematických znalostí a dovedností studentů geografie bakalářského stupně byly použity zápočtové písemky z předmětu Matematická geografie. Tento předmět studenti absolvují zpravidla v prvním ročníku bakalářského studia. Jedná se o povinný předmět pro studenty oborů Geografie – kartografie (GeKa), Geografie se zaměřením na vzdělávání a od akademického roku 2012/2013 pro studenty nového oboru Fyzická geografie a geoinformatika (FGG). Zápočtový test je založen na řešení slovních úloh vyžadujících matematizaci reálných situací. Úspěch v této písemce proto nestojí jenom na znalostech získaných v rámci výuky daného předmětu, ale také na matematické gramotnosti jednotlivých studentů. Ačkoliv tento test není sestavován za účelem zjištění matematických znalostí a dovedností studentů, lze jej využít k určení problémů, které žáci mají při řešení daných úloh v oblasti matematiky. Z hlediska výše uvedené klasifikace didaktických testů (viz kapitola 2.3.3) se jedná o:

- test úrovně,
- nestandardizovaný test,
- kognitivní test,
- test výsledků výuky,
- test absolutního výkonu,
- výstupní test,
- polytematický test,
- subjektivně skórovatelný test.

Obecně jsou písemky sestavovány zvlášť pro studenty odborných oborů (GeKa a FGG) a pro studenty oborů se zaměřením na vzdělávání. Testy pro studenty učitelského studia jsou tvořeny jednoduššími úlohami, přičemž počet úloh je v porovnání s těmi pro studenty odborných oborů většinou stejný nebo menší (Tabulka 15). Pro daný pokus je ve většině případů vytvořeno více variant testu, a to jak pro studenty odborných oborů, tak učitelského studia. Ačkoliv žádné dvě varianty testu nejsou stejné, jsou sestavovány podle určitých pravidel. Jednotlivé typy úloh se tak v písemkách opakují.

Tabulka 15: Počet úloh v jednotlivých zápočtových testech z Matematické geografie pro obory GeKa, FGG, UZ a UZ+M v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017.

Obor	Počet úloh v daném akademickém roce											
	2011/2012		2012/2013		2013/2014		2014/2015		2015/2016		2016/2017	
	GeKa	UZ, UZ+M	GeKa, FGG	UZ, UZ+M	GeKa, FGG	UZ, UZ+M	GeKa, FGG	UZ, UZ+M	GeKa, FGG	UZ, UZ+M	GeKa, FGG	UZ, UZ+M
1. pokus	11	11	10	11	11	11	11	10	11	10	11	11
2. pokus	11	11	10	10	11	11	12	11	11	10	11	11
3. pokus	11	11	11	10	11	11	12	11	11	10	11	9

Dohromady byla provedena analýza písemek z šesti po sobě jdoucích akademických let 2011/2012 až 2016/2017. Vyhodnocovány byly písemky z prvních, druhých i třetích pokusů. Dohromady bylo analyzováno 1 920 písemek (Tabulka 16).

Tabulka 16: Počet analyzovaných zápočtových prací oborů GeKa, FGG, UZ a UZ+M z předmětu Matematická geografie v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017.

akademický rok	počet analyzovaných písemek			
	GeKa + FGG	UZ	UZ+M	celkem v daném roce
2011/2012	319	66	11	396
2012/2013	219	67	13	299
2013/2014	254	73	15	342
2014/2015	212	58	14	284
2015/2016	168	85	6	259
2016/2017	216	118	6	340
celkem za celé sledované období	1388	467	65	**1920**

Celkem se v daných zápočtových testech vyskytuje 28 typových úloh vyžadujících výpočet (Tabulka 17, Tabulka 18). Jedná se o složené slovní nematematické úlohy. Zbývající úlohy v testech jsou čistě vědomostní, tj. není pro jejich úspěšné vyřešení potřeba výpočet. V písemkách určených jak pro studenty odborných oborů GeKa a FGG, tak pro studenty učitelských oborů UZ a UZ+M se ve více jak 80 % případů vyskytují úlohy na využití Newtonova gravitačního zákona, výpočet délky a azimutů ortodromy a slunečního času (Tabulka 17, Tabulka 18). V případě oborů UZ a UZ+M se ještě ve více než 90 % zápočtových testů vyskytují úlohy na výpočet zeměpisné délky.

Tabulka 17: Relativní zastoupení početních úloh v zápočtových testech z Matematické geografie určených pro studenty oborů GeKa a FGG v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017 (uvedeno v %).

úloha	akademický rok						průměr
	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016	2016/2017	
Newtonův gravitační zákon	70,0	60,0	80,0	80,0	100,0	100,0	81,7
Délka a azimuty ortodromy	80,0	100,0	90,0	90,0	85,7	71,4	84,5
3. Keplerův zákon	70,0	40,0	40,0	30,0	14,3	57,1	41,9
2. Keplerův zákon	20,0	40,0	40,0	30,0	14,3	14,3	26,4
Sluneční čas	80,0	90,0	90,0	100,0	100,0	85,7	91,0
Mez výskytu polárního dne	50,0	40,0	50,0	60,0	0,0	0,0	33,3
Erathostenův vztah	10,0	10,0	50,0	40,0	42,9	57,1	35,0
Azimut východu	40,0	60,0	50,0	50,0	57,1	28,6	47,6
Délka výstupného uzlu	20,0	10,0	10,0	10,0	0,0	14,3	10,7
Průměrná hustota	20,0	20,0	50,0	30,0	57,1	42,9	36,7
Absolutní magnitudo	50,0	40,0	20,0	10,0	28,6	14,3	27,1
Archimédův zákon	20,0	20,0	10,0	30,0	14,3	0,0	15,7
Zeměpisná šířka	40,0	50,0	20,0	30,0	100,0	71,4	51,9
Šíření seismické vlny	30,0	30,0	40,0	70,0	42,9	0,0	35,5
Délka denního/nočního oblouku tělesa na obloze	30,0	40,0	50,0	40,0	28,6	28,6	36,2
Pólová vzdálenost dvou těles	20,0	0,0	0,0	0,0	42,9	14,3	12,9
Tíhové zrychlení	20,0	20,0	40,0	40,0	28,6	42,9	31,9
Výška hvězdy nad obzorem	10,0	10,0	30,0	10,0	14,3	28,6	17,1
Dohlednost	10,0	10,0	20,0	0,0	14,3	0,0	9,0
Kulminace hvězdy	20,0	40,0	30,0	50,0	0,0	42,9	30,5
Délka rovnoběžky a délkového stupně	10,0	10,0	0,0	0,0	0,0	14,3	5,7
Zeměpisná délka	40,0	40,0	40,0	40,0	85,7	85,7	55,2
Dopplerův jev	0,0	0,0	10,0	0,0	0,0	0,0	1,7
Deklinace hvězdy	0,0	0,0	30,0	30,0	0,0	14,3	12,4
Plocha zeměpisného pásu	0,0	0,0	10,0	10,0	14,3	28,6	10,5
Maximální hodnota posuvu spektrální čáry	0,0	0,0	0,0	10,0	0,0	0,0	1,7
Radiální rychlost	0,0	0,0	0,0	0,0	28,6	0,0	4,8
Délka a azimut loxodromy	0,0	0,0	20,0	0,0	14,3	28,6	10,5

Tabulka 18: Relativní zastoupení početních úloh v zápočtových testech z Matematické geografie určených pro studenty oborů UZ a UZ+M v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017 (uvedeno v %).

úloha	akademický rok						
	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016	2016/2017	průměr
Newtonův gravitační zákon	100,0	100,0	100,0	100,0	80,0	100,0	96,7
Délka a azimuty ortodromy	100,0	100,0	100,0	100,0	80,0	50,0	84,17
3. Keplerův zákon	25,0	75,0	50,0	25,0	20,0	50,0	40,8
2. Keplerův zákon	75,0	25,0	50,0	75,0	80,0	50,0	59,2
Sluneční čas	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
Mez výskytu polárního dne	50,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	8,3
Erathostenův vztah	50,0	25,0	25,0	75,0	40,0	25,0	40,0
Azimut východu	25,0	50,0	25,0	25,0	20,0	0,0	24,2
Délka výstupného uzlu	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Průměrná hustota	25,0	25,0	25,0	0,0	0,0	25,0	16,7
Absolutní magnitudo	0,0	0,0	0,0	0,0	20,0	0,0	3,3
Archimédův zákon	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	**0,0**
Zeměpisná šířka	25,0	25,0	0,0	25,0	80,0	0,0	25,8
Šíření seismické vlny	0,0	50,0	25,0	25,0	80,0	0,0	30,0
Délka denního/nočního oblouku tělesa na obloze	25,0	25,0	75,0	75,0	80,0	50,0	55,0
Pólová vzdálenost dvou těles	0,0	0,0	0,	0,0	0,0	25,0	4,2
Tíhové zrychlení	0,0	0,0	50,00	0,0	80,0	25,0	25,8
Výška hvězdy nad obzorem	25,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	4,2
Dohlednost	25,0	25,0	25,0	25,0	0,0	25,0	20,8
Kulminace hvězdy	0,0	0,0	0,0	0,0	20,0	50,0	11,7
Délka rovnoběžky a délkového stupně	25,0	25,0	50,0	50,0	0,0	25,0	29,2
Zeměpisná délka	50,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	91,7
Dopplerův jev	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Deklinace	0,0	0,0	25,0	0,0	0,0	75,0	16,7
Plocha zeměpisného pásu	0,0	0,0	0,0	0,0	40,0	0,0	6,7
Maximální hodnota posuvu spektrální čáry	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Radiální rychlost	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Délka a azimut loxodromy	0,0	0,0	25,0	0,0	40,0	50,0	19,2

3.2. Metodika hodnocení matematických dovedností

Dané zápočtové písemky jsou velmi specifické svým obsahem a konstrukcí. Nejsou sestavovány za účelem zjištění matematických znalostí a dovedností a až na výjimky jsou tvořeny slovními úlohami. Takový typ testů není k analýze matematické gramotnosti využíván. Bylo proto nutné vytvořit vlastní metodiku hodnocení, která se opírá o indikátory uvedené ve Standardech RVP ZV, očekávané výstupy RVP G a vybrané výstupy vytvořené na základě analýzy Školních vzdělávacích programů náhodně vybraných Gymnázií v České republice. Jednotlivé varianty analyzovaných testů byly rozděleny na dílčí úlohy. Tyto úlohy byly roztříděny podle toho, zda vyžadují určité matematické znalosti a dovednosti, nebo jejich řešení nijak se neopírá o matematické znalosti a dovednosti. Matematické úlohy jsou v testech zastoupeny z 83 %, zbytek tvoří úlohy založené čistě na jiné odborné znalosti či dovednosti.

Každá matematická úloha byla rozdělena na jednotlivé matematické úkony. Tyto úkony byly hodnoceny binárním způsobem – splnil správně/nesplnil správně. Dále byly definovány chyby vedoucí k závěru, že student daný úkon nezvládl správně (Tabulka 19). V situaci, kdy student daný úkon vůbec nedělal nebo ho dělal jiným způsobem, bylo zaznamenáno, že nelze určit, zda student úkon splnil nebo nesplnil. Hodnocení tedy bylo prováděno následujícím způsobem:

1 – student úkon zvládl správně,

0 – student úkon nezvládl správně,

N – nelze určit.

V případě, že se student dopustil chyby v průběhu řešení dané úlohy, ale následující úkony prováděl správně, byla chyba zaznamenána pouze u chybně provedeného úkonu. Ostatní úkony byly vyhodnoceny, jako správně zvládnuté. Také v případě, že při řešení úlohy udělal více chyb, byly úkony, které provedl správně, hodnoceny jako úspěšně zvládnuté. Pokud nebyl postup úlohy podrobněji rozepsán a student uvedl správný výsledek, byly všechny úkony, vedoucí ke správnému řešení, hodnoceny jako správně zvládnuté. Pokud naopak student uvedl špatný výsledek a neuvedl postup, bylo u všech úkonů vedoucích ke správnému řešení zaznamenáno, že nelze určit, zda student daný úkon zvládl správně, nebo nezvládl správně.

Při hodnocení byli studenti rozděleni do tří skupin:

- studenti odborných oborů (GeKa, FGG),
- studenti oborů se zaměřením na vzdělávání bez kombinace s matematikou (UZ),
- studenti oboru Učitelství geografie a matematiky se zaměřením na vzdělávání (UZ+M).

Výsledky za tyto skupiny byly vyhodnocovány zvlášť.

3.3. Metodika statistického vyhodnocování analýzy matematických dovedností

Všechna data byla zpracována v programu Microsoft Excel (Microsoft, 2007). U jednotlivých úkonů byla určena chybovost, tj. procentuální podíl chyb vzhledem k celkovému množství testů, u nichž se tento úkon vyskytl, a bylo možné určit, zda student úkon splnil správně nebo špatně. Situace, kdy nebylo možné určit, jestli student úkon zvládl, se do celkové statistiky nezapočítávaly. Chybovost při provádění daného úkonu se určovala zvlášť pro každý akademický rok a pro každou ze tří skupin studentů. Při hodnocení nebylo bráno v potaz, zda se jedná o úlohy z prvního, druhého nebo třetího pokusu. Chybovost v daném úkonu měla pro jednotlivé pokusy stejnou váhu. Průměrný podíl chyb v rámci jednotlivých skupin v jednotlivých akademických letech byl určen podílem všech chyb a všech úkonů, u kterých bylo možné určit, zda student úkon splnil nebo nesplnil. Odlišným způsobem byla počítána chybovost u úkonu „znalost průběhu goniometrických funkcí“. Chybovost u daného úkonu byla počítána z celkového počtu studentů ve třech jednotlivých kategoriích v jednotlivých letech. Důvodem odlišnosti hodnocení chybovosti bylo, že pokud studentům při výpočtu nevyšla hodnota nepatřící do oboru hodnot goniometrických funkcí, nebylo možné určit, zda rozumí tomu, jakých hodnot mohou goniometrické funkce nabývat. Nešlo tedy rozhodnout, jestli student úkon zvládl či nikoliv. Při hodnocení celkové chybovosti daného úkonu byl vypočítán aritmetický průměr chybovosti v daném úkonu z jednotlivých let 2011/2012 až 2016/2017,

3.4. Metodika hodnocení kvality zápočtových testů z Matematické geografie

Kvalita zápočtových testů z Matematické geografie byla zkoumána pomocí reliability a obtížnosti jednotlivých úloh. Hodnocení bylo provedeno v prostředí počítačového programu Microsoft Excel (Microsoft, 2007). Reliabilita zápočtových testů byla hodnocena prostřednictvím Cronbachova alfa (viz kapitola 2.3.4). Vypočítán byl aritmetický průměr reliability všech testů v daném akademickém roce, které byly vytvořeny pro studenty oborů GeKa a FGG. Zvlášť pak byl hodnocen aritmetický průměr reliability všech testů v jednotlivých akademických letech určených pro studenty oborů UZ a UZ+M. Bylo také zjišťováno, jak se změní tyto hodnoty, nejsou-li brány v potaz úlohy, které jsou čistě vědomostní a nevyžadují žádný výpočet. Reliabilita testů na základě Cronbachova alfa (α) byla hodnocena na základě Šěpánka (2009). Testy, u nichž vyšla hodnota α > 0,85, byly považovány jako dostatečné k tomu, aby na základě jedné zkoušky bylo možné činit rozhodnutí. Testy s naměřenou reliabilitou α > 0,65 byly chápány jako testy, které lze použít jako jeden z podkladů pro rozhodnutí.

Obtížnost jednotlivých úloh byla určena pomocí indexu obtížnosti (viz kapitola 2.3.4). V každém sledovaném akademickém roce byl určen aritmetický průměr indexu obtížnosti dané úlohy v jednotlivých variantách testu. Rozlišeny byly úlohy, které byly součástí testů určených pro studenty oborů GeKa a FGG a které byly vytvořeny pro studenty učitelských oborů UZ a UZ+M. S vyšší hodnotou indexu obtížnosti byla úloha považována za snadnější. Dle Štěpánka (2009) byly úlohy s indexem obtížnosti nižší než 20 chápány jako velmi složité, naopak úlohy s indexem obtížnosti vyšší než 80 za velmi snadné.

4. VÝSLEDKY

4.1. Matematické úkony vyskytující se v zápočtových testech

Při analýze zápočtových testů byla pozornost zaměřena na úlohy, k jejichž vyřešení jsou třeba matematické dovednosti a znalosti. U každé takové úlohy byly stanoveny matematické úkony (Tabulka 19), které studenti musí úspěšně provést, aby se dobrali správného výsledku. Všechny úkony byly formulovány v souladu se Standardy RVP ZV a očekávanými výstupy RVP G a ŠVP analyzovaných gymnázií. Úkony „počítání s procenty“ a „práce s intervalem“ se vyskytovaly pouze v testech pro studenty odborných oborů. Ostatní úkony se vyskytly v alespoň jedné variantě testů určených jak pro studenty oborů GeKa a FGG, tak i pro studenty oborů UZ a UZ+M.

Tabulka 19: Hodnocené úkony vyskytující se v zápočtových testech, jejich definice, chyby při provádění těchto úkonů a jejich formulace ve Standardech RVP ZV, RVP G nebo ŠVP analyzovaných gymnázií. Poznámka: *1 – Newtonův gravitační zákon; 2 – Délka a azimuty ortodromy; 3 – 3. Keplerův zákon; 4 – 2. Keplerův zákon; 5 – Sluneční čas; 6 – Mez výskytu polárního dne; 7 - Erathostenův vztah; 8 – Azimut východu; 9 – Délka výstupného uzlu; 10 – Průměrná hustota; 11 – Absolutní magnitudo; 12 – Archimédův zákon; 13 – Zeměpisná šířka; 14 – Šíření seismické vlny; 15 – Délka denního/ nočního oblouku tělesa na obloze; 16 – Pólová vzdálenost dvou těles; 17 – Tíhové zrychlení; 18 – Výška hvězdy nad obzorem; 19 – Dohlednost; 20 – Kulminace hvězdy; 21 – Délka rovnoběžky a délkového stupně; 22 – Zeměpisná délka; 23 – Dopplerův jev; 24 – Deklinace hvězdy; 25 – Plocha zeměpisného pásu; 26 – Maximální hodnota posuvu spektrální čáry; 27 – Radiální rychlost; 28 – Délka a azimut loxodromy*

Úkon	Definice	Chyba v provedení	Formulace ve Standardech RVP ZV, RVP G nebo ŠVP analyzovaných gymnázií	Úlohy obsahující tento úkon
použití vhodného vzorce ve správné podobě	- *student provede matematizaci dané situace* - *student použije odpovídající vzorec ve správné podobě*	- *student nezná správné znění odborného vzorce*	- *žák používá vzorce (ŠVP G)* - *žák zná a umí použít vzorce pro výpočet objemů a povrchů základních geometrických těles (ŠVP G)* - *žák určí obvody a obsahy rovinných útvarů (ŠVP G)*	*1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28*
vyjádření neznámé ze vzorce	- *student pomocí ekvivalentních úprav vyjádří neznámou z rovnice*	- *student špatně vyjádří neznámou z rovnice, tj. nenajde rovnici s ní ekvivalentní* - *student použije neekvivalentní úpravy, bez provedení zkoušky*	- *žák vyjadřuje neznámou ze vzorce (RVP G)*	*1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 18, 23, 24, 26, 27,*

Úkon	Definice	Chyba v provedení	Formulace ve Standardech RVP ZV, RVP G nebo ŠVP analyzovaných gymnázií	Úlohy obsahující tento úkony
dosazení do vzorce	- *student dosadí za všechny proměnné ve vzorci jejich správné hodnoty*	- *student dosadí za alespoň jednu proměnou její nesprávnou hodnotu*	- *žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných (Standardy RVP ZV)*	*1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28*
výpočet	- *student správně sčítá, odčítá, násobí, dělí, umocňuje a odmocňuje dané hodnoty ve správném pořadí* - *student správně počítá funkční hodnoty goniometrických a logaritmických funkcí* - *student provede správný výpočet s použitím kalkulátoru nebo bez něj*	- *student provede chybu ve výpočtu* - *student nerespektuje pořadí daných operací (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování, odmocňování)* - *student špatně manipuluje s kalkulátorem*	- *žák účelně a efektivně využívá kalkulátor (Standardy RVP ZV)* - *odhaduje výsledky numerických výpočtů, efektivně je provádí, provádí aritmetické operace v číselných oborech (RVP G)* - *žák počítá s velkými a malými čísly (ŠVP G)*	*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28*
počítání s úhly	- *student správně sčítá a odčítá velikost dvou úhlů* - *student správně násobí velikost úhlu*	- *student špatně sečte nebo odečte velikost dvou úhlů* - *student špatně vynásobí velikost úhlu*	- *žák sčítá a odčítá úhly (Standardy RVP ZV)* - *žák určí násobek úhlu (Standardy RVP ZV)*	*2, 7, 8, 22, 24, 28*
počítání s procenty	- *student určí hodnotu relativní části celku*	- *student určí špatnou hodnotu relativní části celku*	- *žák užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část: přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem (Standardy RVP ZV)*	*10*
slovní odpověď, zdůvodnění	- *student dokáže vyvodit správný závěr na základě výsledku*	- *student na základě výsledku vyvodí nesprávný závěr*	- *zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení problému (RVP G)*	*3, 24, 27*
práce s intervalem	- *student zapisuje množinu bodů do intervalu* - *student rozlišuje otevřený a uzavřený interval a chápe jejich význam*	- *student nerozlišuje otevřený a uzavřený interval*	- *žák operuje s intervaly (ŠVP G)*	*24*

Úkon	Definice	Chyba v provedení	Formulace ve Standardech RVP ZV, RVP G nebo ŠVP analyzovaných gymnázií	Úlohy obsahující tento úkony
převody jednotek	- *student převádí jednotky hmotnosti, délky, obsahu, objemu a času*	- *student špatně převádí jednotky* - *student neprovede převody jednotek v případě, kdy by měl*	- *žák používá a převádí jednotky délky (Standardy RVP ZV)* - *žák používá a převádí jednotky obsahu (Standardy RVP ZV)*	*1, 3, 17, 18, 19, 20, 23*
správné použití jednotek	- *student používá k daným veličinám správné jednotky*	- *student používá k daným veličinám nesprávné jednotky*	- *žák používá a převádí jednotky délky (Standardy RVP ZV)* - *žák používá a převádí jednotky obsahu (Standardy RVP ZV)*	*1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28*
znalost a správné použití konstanty	- *student dokáže použít správnou konstantu* - *student zná správnou hodnotu dané konstanty* - *student zná jednotky dané konstanty*	- *student nezná hodnotu konstanty* - *student nezná jednotky dané konstanty* - *student nedokáže použít správnou konstantu*	- *žák používá jednotky délky, obsahu a objemu (Standardy RVP ZV)* - *žák vypočte hodnotu výrazu pro dané hodnoty proměnných (Standardy RVP ZV)*	*1, 2, 3, 7, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 25, 26, 27, 28*
znalost průběhu goniometri-ckých funkcí	- *student zná vlastnosti goniometrických funkcí* - *student zná funkční hodnoty goniometrických funkcí* - *student zná průběhy grafů goniometrických funkcí*	- *student zná vlastnosti goniometrických funkcí* - *student nezná funkční hodnoty goniometrických funkcí* - *student nezná průběhy grafů goniometrických funkcí*	- *využívá poznatky o funkcích při řešení rovnic a nerovnic, při určování kvantitativních vztahů (RVP G)* - *řeší aplikační úlohy s využitím poznatků o funkcích (RVP G)* - *aplikuje poznatky o exponenciálních, logaritmických i goniometrických funkcích v praktických úlohách (ŠVP G)*	*2*

Některé z hodnocených úkonů byly vyžadovány téměř v každé úloze, jiné byly velmi specifické a při řešení písemné práce se s nimi studenti setkali nejvýše jednou (Tabulka 20). Ne všechny hodnocené úkony se vyskytovaly v každé verzi zápočtového testu.

Úkony, které se v testu vyskytovaly vícekrát, jsou:

- použití vhodného vzorce ve správné podobě,
- vyjádření neznámé ze vzorce,
- dosazení do vzorce,
- výpočet,
- počítání s úhly,
- převody jednotek,

- správné použití jednotek,
- znalost a správné použití konstanty,
- znalost průběhu goniometrických funkcí.

Úkony, které se vyskytovaly v celé písemce nejvýše jednou, jsou:

- počítání s procenty,
- slovní odpověď, zdůvodnění,
- práce s intervalem.

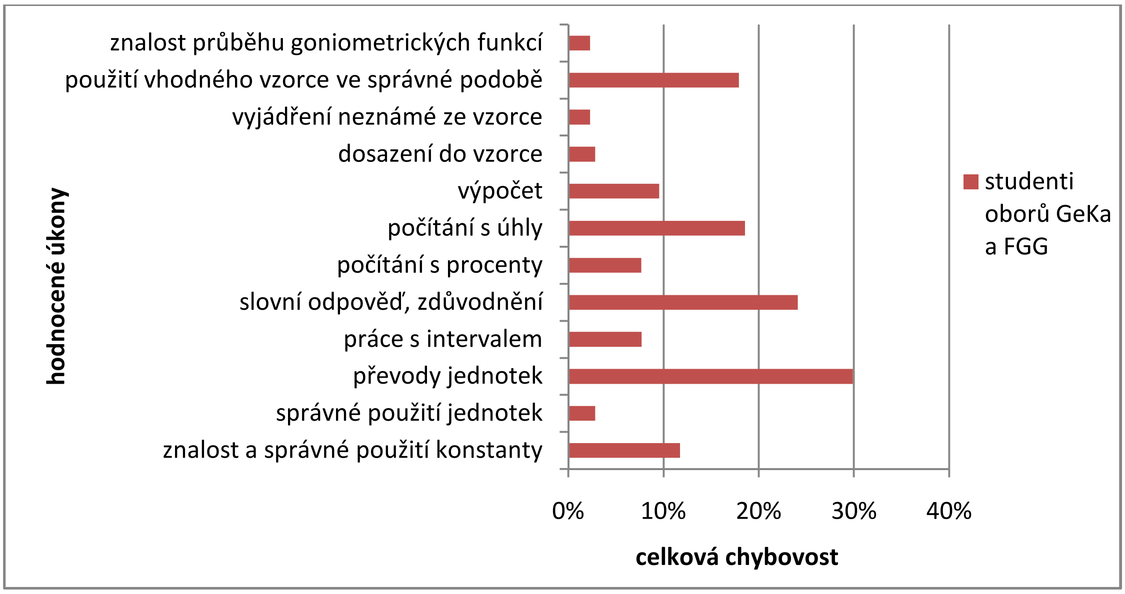
Tabulka 20: Podíl jednotlivých úkonů z celkového počtu úkonů v zápočtové písemce v jednotlivých akademických letech pro daný obor v letech 2011/2012 až 2016/2017. Poznámka: *1 - použití vhodného vzorce ve správné podobě; 2 - vyjádření neznámé ze vzorce; 3 - dosazení do vzorce; 4 – výpočet; 5 – převody jednotek; 6 - správné použití jednotek; 7 - počítání s úhly; 8 - znalost a správné použití konstanty; 9 - znalost průběhu goniometrických funkcí; 10 - počítání s procenty; 11 – formulace slovní odpovědi, zdůvodnění; 12 - práce s intervalem.*

akademický rok	obor	úkon											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2011/2012	GeKa + FGG	20,11	6,32	16,11	19,39	1,96	14,06	16,09	4,48	1,10	0,15	0,23	0,00
	UZ	20,44	5,13	16,33	16,03	3,73	15,22	16,20	5,77	1,15	0,00	0,00	0,00
	UZ + M	19,28	4,93	15,02	14,57	2,47	14,80	21,75	6,05	1,12	0,00	0,00	0,00
2012/2013	GeKa + FGG	19,43	6,50	16,55	17,92	3,47	14,11	16,57	4,23	1,03	0,21	0,00	0,00
	UZ	19,31	6,03	15,74	15,69	2,32	14,08	18,42	7,24	1,16	0,00	0,00	0,00
	UZ + M	19,52	5,02	16,17	16,17	2,42	15,43	18,59	5,39	1,30	0,00	0,00	0,00
2013/2014	GeKa + FGG	20,26	4,91	16,34	17,83	2,82	15,48	15,80	5,18	0,84	0,42	0,08	0,04
	UZ	19,33	5,87	16,46	17,64	2,09	16,94	16,65	3,85	0,95	0,00	0,22	0,00
	UZ + M	20,49	5,55	15,87	17,72	2,62	16,33	14,33	5,70	1,08	0,00	0,31	0,00
2014/2015	GeKa + FGG	20,02	5,60	17,04	18,82	2,34	14,65	15,77	4,58	0,93	0,21	0,00	0,05
	UZ	20,69	5,23	17,23	16,95	1,49	16,34	16,55	4,59	0,93	0,00	0,00	0,00
	UZ + M	20,00	5,23	16,46	16,77	1,08	15,69	19,85	4,15	0,77	0,00	0,00	0,00
2015/2016	GeKa + FGG	21,51	6,47	15,37	17,23	1,52	13,86	17,81	4,85	0,85	0,51	0,00	0,02
	UZ	18,70	5,79	15,83	15,60	2,95	15,75	19,01	5,06	1,30	0,00	0,00	0,00
	UZ + M	14,42	4,49	11,86	36,22	2,24	11,54	15,06	3,21	0,96	0,00	0,00	0,00
2016/2017	GeKa + FGG	20,47	5,56	15,64	17,01	2,14	14,79	16,36	6,43	0,93	0,39	0,26	0,01
	UZ	18,88	4,65	15,91	15,63	4,25	16,76	17,39	5,18	0,96	0,00	0,38	0,00
	UZ + M	20,28	4,15	9,68	18,89	4,61	18,89	15,67	6,45	0,92	0,00	0,46	0,00

4.2. Výsledky zjišťování úrovně matematických dovedností

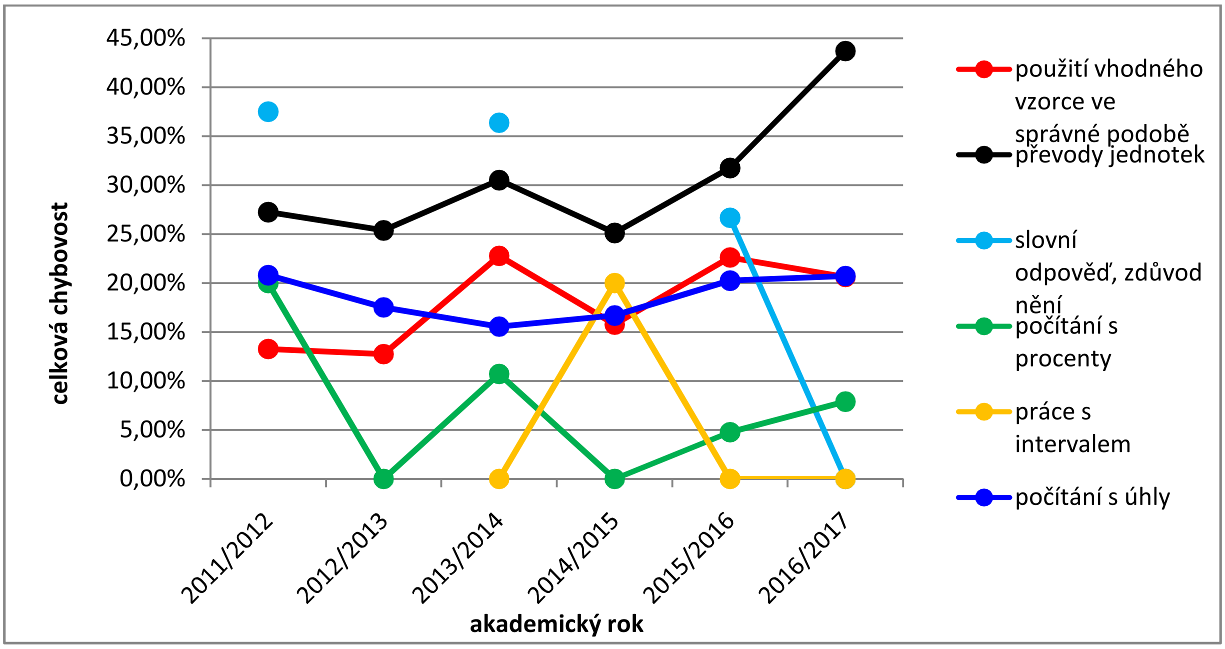
4.2.1. Studenti oborů GeKa a FGG

Z výsledků vyplývá (Obr. 10), že nejmenší podíl chyb udělali studenti oborů GeKa a FGG v průběhu let 2011/2012 až 2016/2017 při provádění úkonů „znalost průběhu goniometrických funkcí“ (2,29 %)„vyjádření neznámé ze vzorce“ (2,29 %), „správné použití jednotek“ (2,81 %) a „dosazení do vzorce“ (2,82 %). Naopak největší podíl chyb ve stejném období u těchto studentů byl zaznamenán při provádění úkonů „převody jednotek“ (29,89 %), „slovní odpověď, zdůvodnění“ (24,10 %) a „počítání s úhly“ (18,55 %).

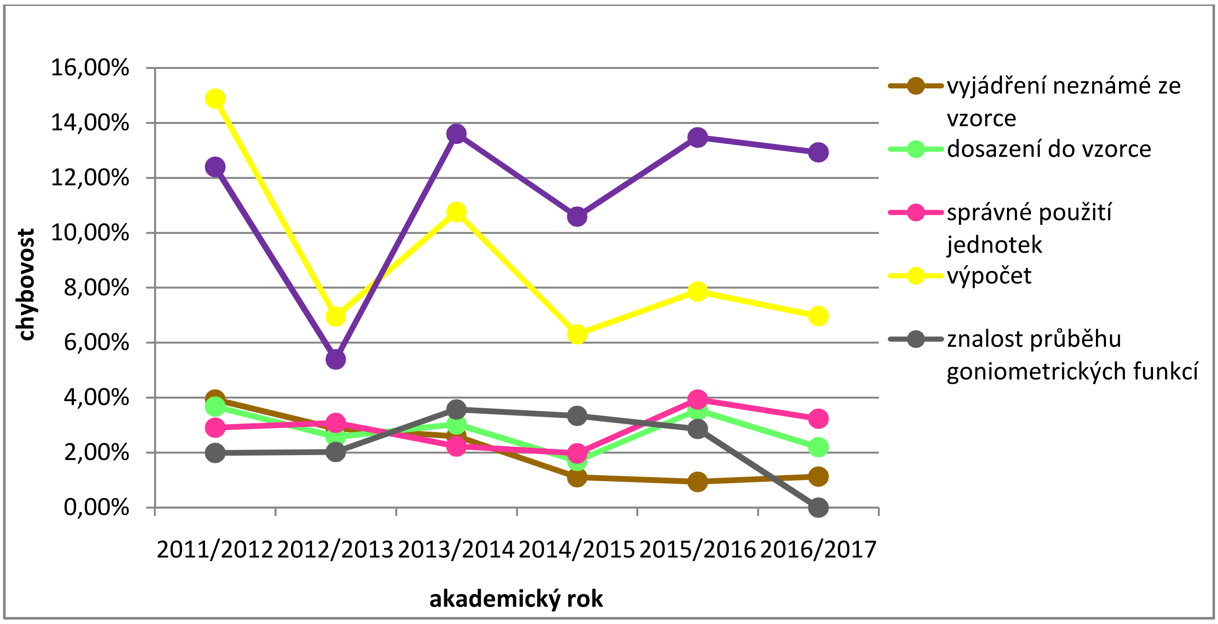


Obr. 10: Chybovost v jednotlivých úkonech u studentů oborů GeKa a FGG za celé období 2011/2012 – 2016/2017.

Dále byla sledována chybovost u hodnocených úkonů v případě jednotlivých akademických let 2011/2012 až 2016/2017 a jejich proměnlivost v čase. Z důvodu lepší prezentace dat, byly úkony rozděleny do dvou skupin podle maximální zjištěné hodnoty chybovosti (více/méně než 15 %). Největšího podílu chyb se studenti oborů GeKa a FGG dopustili při „převádění jednotek“ (43,69 %) v akademickém roce 2016/2017. Druhý největší podíl chyb udělali při „formulaci slovní odpovědi, zdůvodnění“ v akademickém roce 2011/2012 (37,50 %). Z hlediska proměnlivosti chybovosti v jednotlivých akademických letech byl vysledován pokles chybovosti u této skupiny studentů při „provádění výpočtů“ (z 14,88 % v roce 2011/2012 na 6,96 % v roce 2016/2017), „počítání s procenty“ (z 20 % v roce 2011/2012 na 7,89 % v roce 2016/2017) a „vyjádření neznámé ze vzorce“ (z 3,93 % v roce 2011/2012 na 1,12 % v roce 2016/2017). Naopak u těchto studentů vzrostla chybovost při „převádění jednotek“ (z 27,24 % v roce 2011/2012 na 43,69 % v roce 2016/2017) a „použití vhodného vzorce ve správné podobě“ (z 13,26 % v roce 2011/2012 na 20,62 % v roce 2016/2017). Poměrně stálá chybovost byla v úkonech „dosazení do vzorce“ (rozdíl v chybovosti mezi dvěma po sobě jdoucími roky maximálně 1,85 %) a „správné použití jednotek“ (rozdíl v chybovosti mezi dvěma po sobě jdoucími roky maximálně 1,96 %), (Obr. 11, Obr. 12). Nejvýraznější rozdíl mezi maximální a minimální chybovostí v jednotlivých letech byl zaznamenán u úkonu „slovní odpověď, zdůvodnění“ (37,5 %). V úkonech „počítání s procenty“ a „práce s intervalem“ byl rozdíl mezi maximální a minimální chybovostí v jednotlivých letech 20 %, v úkonu „převody jednotek“ 18,58 %. V ostatních úkonech tento rozdíl nepřesahoval hodnotu 8,6 %.



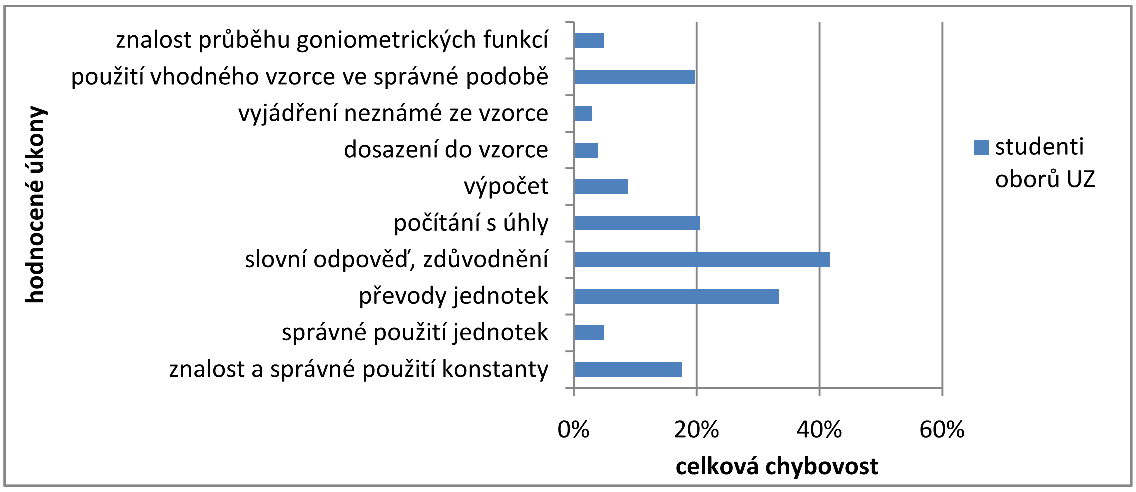
Obr. 11: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou větší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů GeKa a FGG v jednotlivých letech 2011/2012 – 2016/2017.



Obr. 12: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou menší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů GeKa a FGG v letech 2011/2012 – 2016/2017.

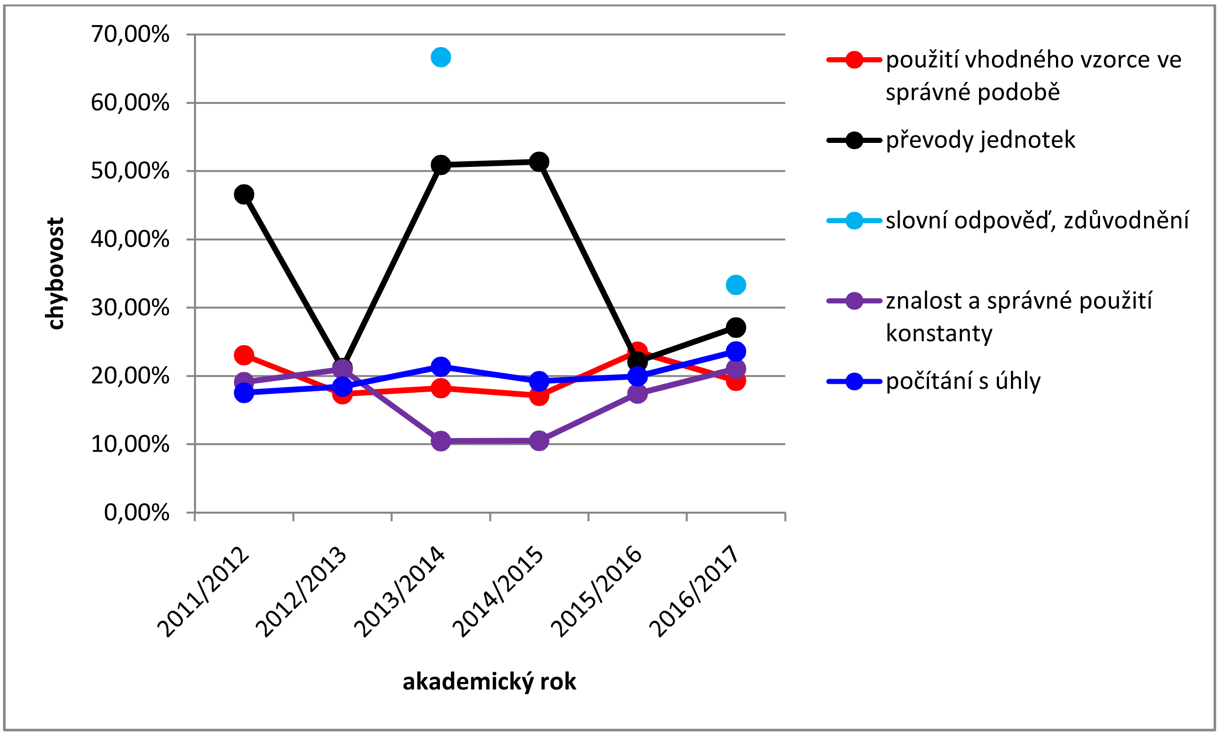
4.2.2. Studenti oborů UZ

Studenti oborů UZ udělali v letech 2011/2012 až 2016/2017 nejmenší celkový podíl chyb u úkonů „vyjádření neznámé ze vzorce" (2,94 %), „dosazení do vzorce" (3,88 %), „správné použití jednotek" (4,90 %) a „znalost průběhu goniometrických funkcí" (4,95 %), (Obr. 13). Největší chybovost v celém tomto období byla zaznamenána při provádění úkonů „slovní odpověď, zdůvodnění" (41,67 %), „převody jednotek" (33,46 %) a „počítání s úhly" (20,57 %).

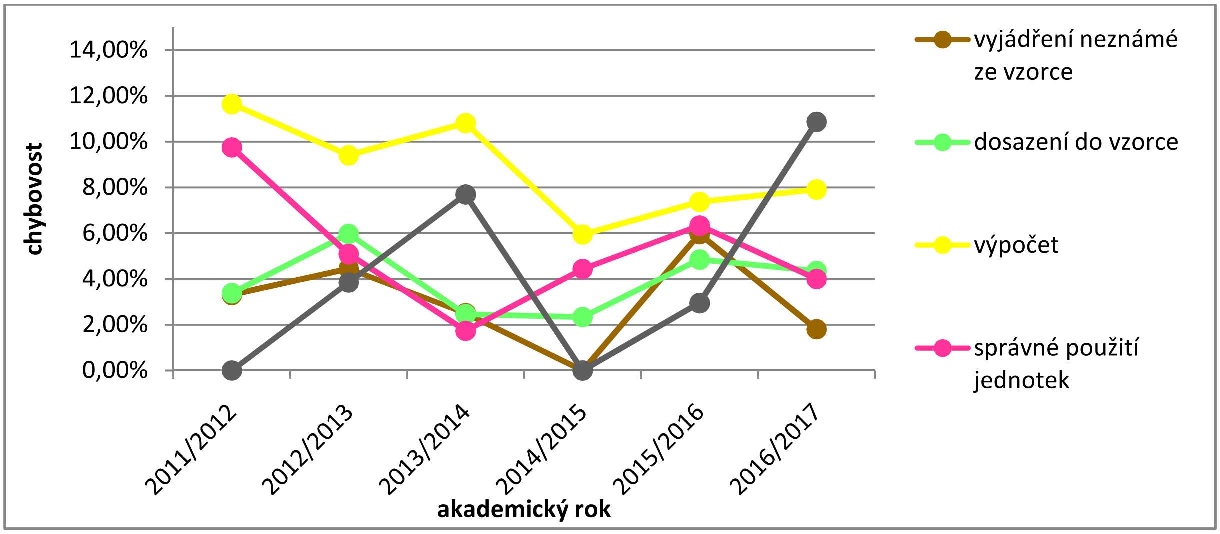


Obr. 13: Chybovost v jednotlivých úkonech u studentů oborů UZ za celé období 2011/2012 – 2016/2017.

V případě studentů oborů UZ byla zaznamenána maximální hodnota chybovosti v akademickém roce 2014/2015 při „převádění jednotek“ (51,35 %), (Obr. 14). Také v letech 2011/2012, 2012/2013 a 2013/2014 udělali studenti v porovnání s ostatními úkony největší podíl chyb v „převádění jednotek“ s výjimkou roku 2013/2014, kdy byla nevyšší chybovost zaznamenána u „slovní odpovědi a zdůvodnění“. V roce 2015/2016 byla největší chybovost zaznamenána u úkonu „použití vhodného vzorce ve správné podobě“ (23,57 %) a v roce 2016/2017 při „formulaci slovní odpovědi, zdůvodnění“ (33,33 %). V průběhu let 2011/2012 až 2016/2017 se tito studenti zlepšili ve „výpočtu“ (z 11,64 % v roce 2011/2012 na 7,91 % v roce 2016/2017) a „správném použití jednotek“ (z 9,75 % v roce 2011/2012 na 4,00 % v roce 2016/2017). Zvýšení chybovosti lze sledovat u úkonů „počítání s úhly“ (z 17,54 % v roce 2011/2012 na 23,61 % v roce 2016/2017) a „znalost průběhu goniometrických funkcí“ (z 0 % v roce 2011/2012 na 10,87 % v roce 2016/2017), (Obr. 15). Největší rozdíl mezi maximální a minimální chybovostí v jednotlivých letech byl zaznamenán u úkonu „převody jednotek“ (30,2 %). Nejmenší rozdíl mezi maximální a minimální chybovostí v jednotlivých letech byl u úkonu „dosazení do vzorce“ (3,63 %).



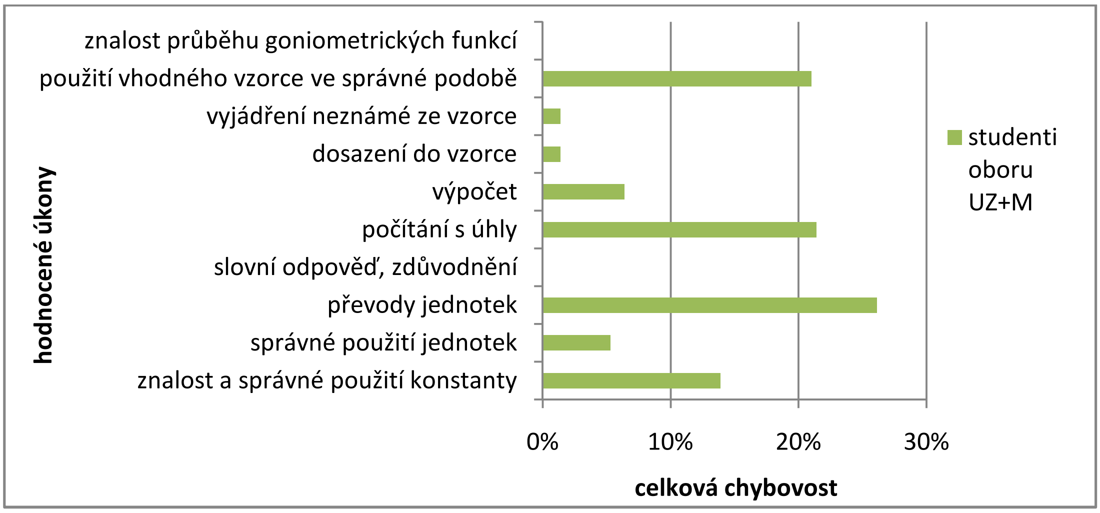
Obr. 14: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou větší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů UZ v letech 2011/2012 – 2016/2017.



Obr. 15: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou menší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů UZ v letech 2011/2012 – 2016/2017.

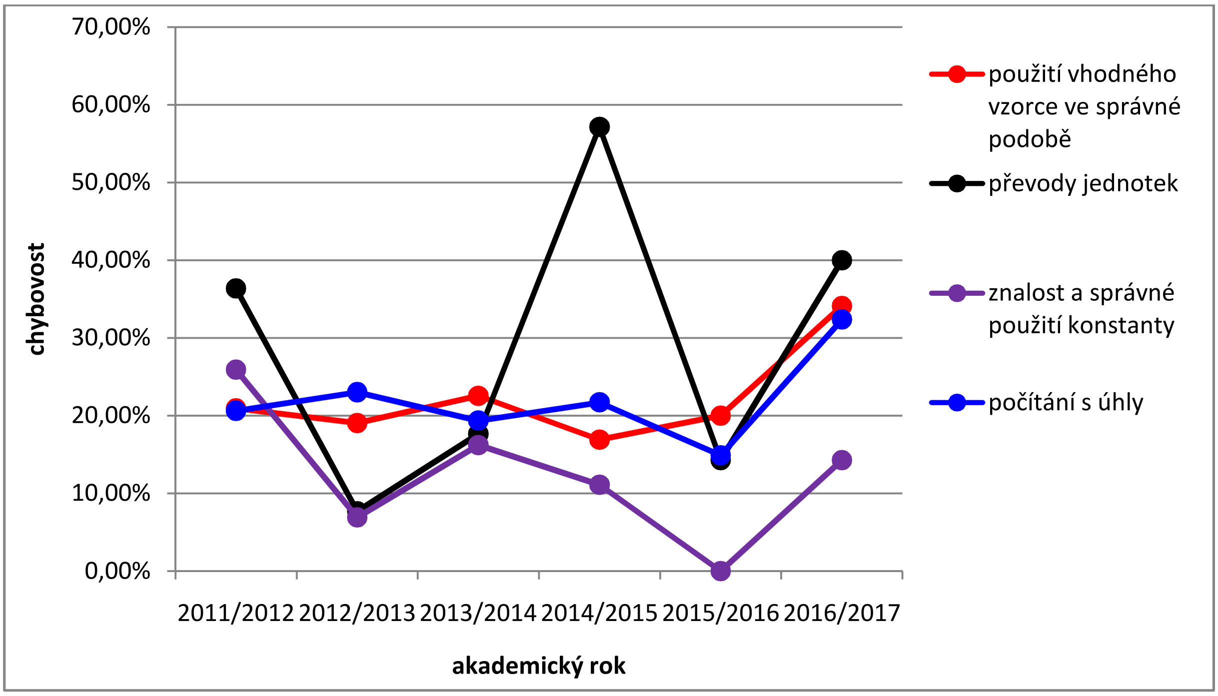
4.2.3. Studenti oboru UZ+M

Studenti oboru UZ+M udělali ve všech letech mezi roky 2011/2012 až 2016/2017 nejmenší podíl chyb při provádění úkonů „slovní odpověď, zdůvodnění" (0 %), „znalost průběhu goniometrických funkcí" (0 %), „vyjádření neznámé ze vzorce" (0,71 %) a „dosazení do vzorce" (1,19 %), (Obr. 16). Celkově největší chybovosti ve všech letech mezi roky 2011/2012 až 2016/2017 se tito studenti dopustili u úkonů „převody jednotek" (26,15 %), „počítání s úhly" (21,40 %) a „použití vhodného vzorce ve správné podobě" (20,99 %).

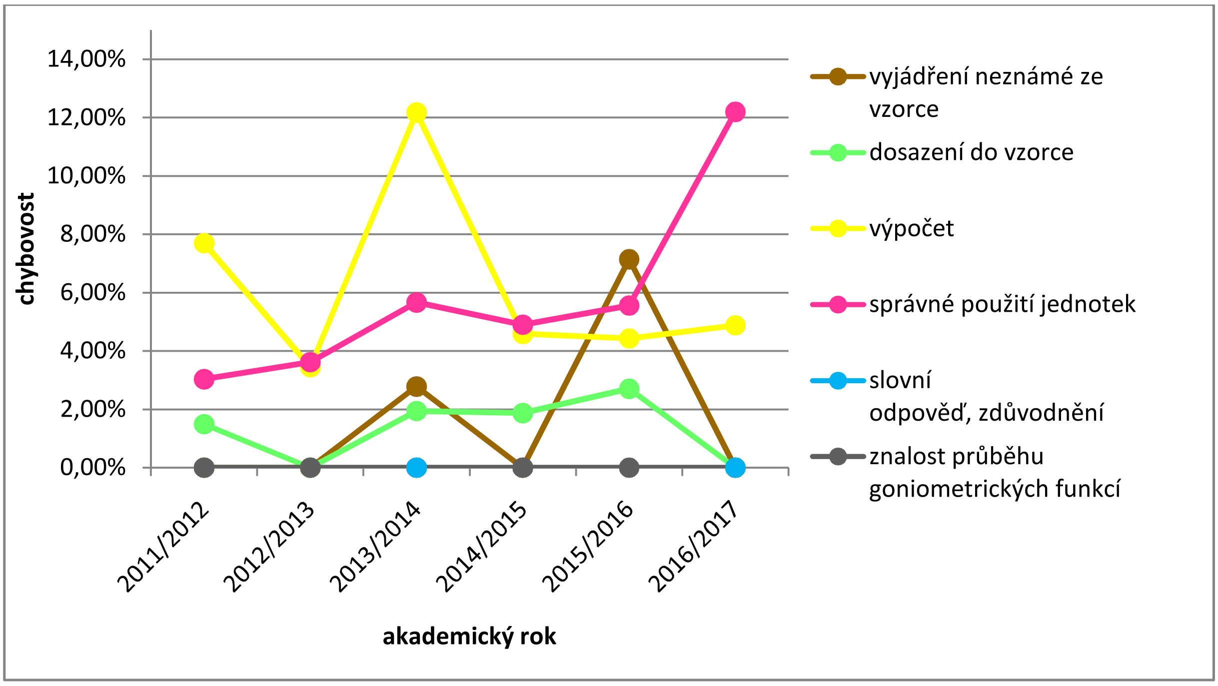


Obr. 16: Chybovost v jednotlivých úkonech u studentů oborů UZ+M za celé období 2011/2012 – 2016/2017.

U studentů oboru UZ+M byla zaznamenána největší hodnota chybovosti v akademickém roce 2014/2015 (57,14 %). Stejně jako u předchozích dvou skupin, se jednalo o úkon „převody jednotek“ (Obr. 17). Nejmenší chybovost (0 %) byla zjištěna u úkonu „znalost průběhu goniometrických funkcí“ (Obr. 18). Stoprocentně úspěšní v tomto úkonu byli studenti oboru UZ+M v každém akademickém roce v období mezi lety 2011/2012 až 2016/2017. Nulová chybovost byla zaznamenána také u úkonů „znalost a správné použití konstanty“ (v roce 2015/2016), „dosazení do vzorce“ (v letech 2012/2013 a 2016/2017), „vyjádření neznámé ze vzorce“ (v letech 2012/2013, 2014/2015 a 2016/2017) a „slovní odpověď, zdůvodnění“ (v letech 2013/2014 a 2016/2017). Z hlediska proměnlivosti chybovosti v jednotlivých akademických letech byl vysledován pokles chybovosti u této skupiny studentů u úkonu „znalost a správné použití konstanty“ (z 25,93 % v roce 2011/2012 na 14,29 % v roce 2016/2017). Oproti tomu je patrný nárůst chybovosti u úkonů „použití vhodného vzorce ve správné podobě“ (z 20,93 % v roce 2011/2012 na 34,09 % v roce 2016/2017) a „správné použití jednotek“ (z 3,03 % v roce 2011/2012 na 12,20 % v roce 2016/2017).



Obr. 17: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou větší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů UZ+M v letech 2011/2012 – 2016/2017.



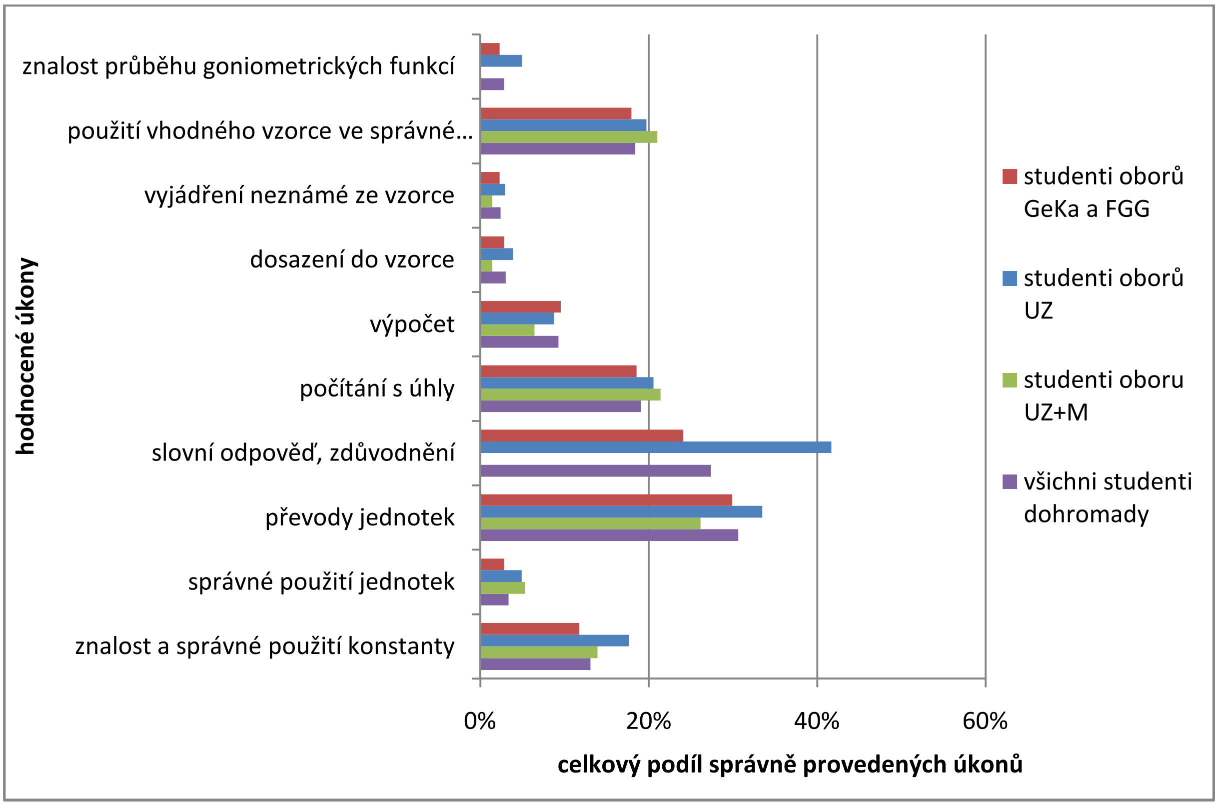
Obr. 18: Vývoj chybovosti v jednotlivých úkonech (s maximální hodnotou menší než 15 % v alespoň jednom akademickém roce mezi lety 2011/2012 až 2016/2017) u studentů oborů UZ+M v letech 2011/2012 – 2016/2017.

4.2.4. Srovnání výsledků studentů oborů GeKa a FGG, UZ a UZ+M

Pokud se hodnotí pouze úkony, které se vyskytovaly v písemkách určených, jak pro studenty oborů GeKa a FGG, tak i pro studenty oborů UZ a UZ+M (viz. kapitola 4.1), udělali všichni studenti dohromady největší podíl chyb v celém období mezi roky 2011/2012 a 2016/2017 v úkonu „převody jednotek“ (30,64 %), (Obr. 19). Dále udělali všichni studenti dohromady v tomto období více než 15 % chyb při provádění úkonů „slovní odpověď, zdůvodnění“ (27,37 %), „počítání s úhly“ (19,08 %) a „použití vhodného vzorce ve správné podobě“ (18,38 %). Naopak nejmenší podíl chyb v úkonech, které se vyskytovaly v písemkách určených jak pro studenty oborů GeKa a FGG, tak i pro studenty oborů UZ a UZ+M, udělali tito studenti v úkonu „vyjádření neznámé ze vzorce“ (2,38 %), (Obr. 19). Menší než 5 % podíl chyb udělali studenti oborů GeKa, FGG, UZ a UZ+M také při provádění úkonů „znalost průběhu goniometrických funkcí“ (2,80 %), „dosazení do vzorce“ (3,00 %) a „správné použití jednotek“ (3,36 %).

Z porovnání celkové chybovosti v jednotlivých úkonech mezi studenty odborných oborů, oborů UZ a oboru UZ+M v letech 2011/2012 až 2016/2017 vyplývá (Obr. 19), že celkově nejvyšší hodnota chybovosti byla zjištěna u úkonu „slovní odpověď, zdůvodnění“ (41,67 %). Tento podíl chyb udělali studenti oborů UZ. V tomto samém úkonu však byli studenti oboru UZ+M bezchybní. Jedná se tak o úkon, ve kterém se nejvíce liší hodnoty celkové chybovosti (tj. o 41,67 %) mezi odbornými obory,

obory UZ a oborem UZ+M. Druhý největší rozdíl v celkové chybovosti při porovnání oborů GeKa + FGG, UZ a UZ+M byl zjištěn u úkonu „převody jednotek“. Rozdíl hodnot celkové chybovosti studentů oboru UZ a UZ+M v tomto úkonu činil 7,31 %. Úkon, ve kterém byl zaznamenán rozdíl chybovosti mezi studenty dvou oborů více než 5 %, je také „znalost a správné použití konstanty“ (5,89 %). V ostatních úkonech nebyl rozdíl chybovosti mezi studenty dvou oborů více než 5 %. Nejmenší rozdíl celkové chybovosti mezi studenty dvou oborů byl zjištěn u úkonu „vyjádření neznámé ze vzorce“ (1,53 %). Ve zbývajících úkonech nepřesáhla variabilita celkové chybovosti 5 % (Obr. 19).

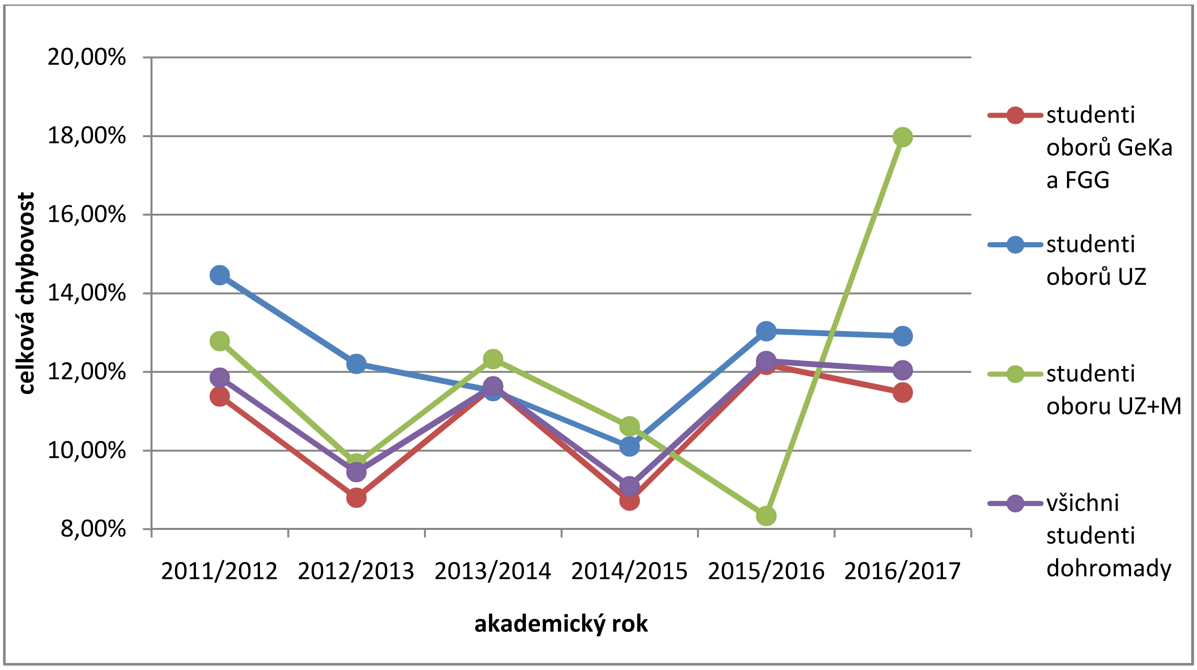


Obr. 19: Porovnání chybovosti u studentů oborů GeKa a FGG, UZ a UZ+M v úkonech, které se vyskytly v písemkách všech těchto oborů.

Průměrná chybovost u studentů všech tří kategorií dohromady činila 11,12 %. Největší průměrná chybovost za celé sledované období, tj. roky mezi lety 2011/2012 až 2016/2017, se vyskytuje u studentů oborů UZ (12,42 %). Studenti oboru UZ+M udělali v tomto období průměrně 11,49 % chyb ve sledovaných úkonech. Hodnota průměrné chybovosti v tomto období poslední sledované skupiny (GeKa + FGG) byla ze všech skupin nejmenší – 10,76 %. Celkově nejúspěšnějším rokem byl rok 2014/2015 (Obr. 20). V tomto akademickém roce byla hodnota chybovosti všech studentů dohromady nejmenší (9,09 %). Největší podíl chyb udělali všichni studenti dohromady v akademickém roce 2015/2016 (12,27 %).

Ze srovnání chybovosti v letech 2011/2012 až 2016/2017 mezi všemi sledovanými skupinami vyplývá, že ve čtyřech letech ze šesti udělali nejmenší podíl chyb ve sledovaných úkonech studenti oborů GeKa a FGG. Jsou to roky 2011/2012 (11,38 %), 2012/2013 (8,80 %), 2014/2015 (8,72 %) a 2016/2017 (11,47 %). V roce 2013/2014 udělali celkově nejmenší podíl chyb studenti oborů UZ (11,51 %). V roce 2015/2016 byli při řešení matematických úkonů nejúspěšnější studenti oboru UZ+M (8,33 %). Oproti tomu celkem ve třech letech v období mezi roky 2011/2012 a 2016/2017 byla zjištěna největší chybovost u studentů oborů UZ. Jedná se o roky 2011/2012 (14,46 %), 2012/2013 (12,20 %) a 2015/2016 (13,03 %). Ve zbývajících třech letech udělali největší podíl chyb studenti oboru UZ+M, tj. v letech 2013/2014 (12,33 %), 2014/2015 (10,62 %) a 2016/2017 (17,97 %).

Ačkoliv se studenti oboru UZ+M částečně zaměřují na studium matematiky, neplatí, že jejich podíl chyb v daném úkonu nebo v daném roce je vždy v porovnání s ostatními obory nejmenší. Z celkových výsledků a také z výsledků za jednotlivé roky (Obr. 20) vyplývá, že vyjma roku 2015/2016 udělali v období mezi lety 2011/2012 a 2016/2017 větší podíl chyb než studenti oborů GeKa a FGG. V letech 2011/2012, 2014/2015 a 2016/2017 chybovali ve větším podílu případů, než studenti oborů UZ.



Obr. 20: Vývoj celkové chybovosti u studentů oborů GeKa a FGG, UZ a UZ+M a všech studentů dohromady v letech 2011/2012 až 2016/2017.

4.3. Výsledky hodnocení kvality didaktických testů

4.3.1. Reliabilita didaktických testů

Průměrná reliabilita celých testů a testů, u nichž se nezapočítávají úlohy nevyžadující výpočet, se téměř nemění (Tabulka 21). Největší rozdíl byl zjištěn u testů určených pro studenty oborů GeKa a FGG z akademického roku 2012/2013 (0,032). Bereme-li v úvahu testy bez úloh nevyžadujících výpočet, je průměrná hodnota Cronbachova alfa u těchto testů ve většině případů větší než 0,65. Podle Štepánka (2009) je možné tyto testy považovat za jeden z podkladů pro hodnocení. Pouze u testů pro studenty oborů GeKa a FGG z akademického roku 2015/2016 vyšla nedostatečná hodnota Cronbachova alfa (0,537), tj. menší než 0,65. Dle Štěpánka (2009) lze za testy, dostatečné k tomu, aby na základě jedné zkoušky bylo možné činit rozhodnutí, považovat pouze testy z akademického roku 2011/2012 určené pro studenty učitelských oborů UZ a UZ+M (α =0,878).

Tabulka 21: Průměrné hodnoty Cronbachova alfa celých testů a testů bez úloh nevyžadujících výpočet určených pro studenty oborů GeKa, FGG a UZ, UZ+M v akademických letech 2011/2012 až 2016/2017. Poznámka: – značí hodnotu Cronbachova alfa nižší než 0,65; – značí hodnotu Cronbachova alfa vyšší než 0,85.

obor	Cronbachovo alfa											
	akademický rok											
	2011/2012		2012/2013		2013/2014		2014/2015		2015/2016		2016/2017	
	celý test	pouze početní úlohy	celý test	pouze početní úlohy	celý test	pouze početní úlohy	celý test	pouze početní úlohy	celý test	pouze početní úlohy	celý test	pouze početní úlohy
GeKa a FGG	0,713	0,709	0,740	0,708	0,807	0,793	0,700	0,696	0,522	0,537	0,819	0,810
UZ a UZ+M	0,889	0,878	0,765	0,754	0,796	0,801	0,725	0,697	0,765	0,741	0,728	0,711

4.3.2. Index obtížnosti jednotlivých úloh testů

Štepánek (2009) považuje za velmi obtížné úlohy s indexem obtížnosti P nižším než 20. Úloha, která byla pro studenty oborů GeKa a FGG velmi obtížná ve všech sledovaných akademických letech, je úloha na výpočet absolutního magnituda (Tabulka 22). Úloha na výpočet pólové vzdálenosti dvou těles byla také velmi obtížná ve všech třech akademických letech, ve kterých se v zápočtových písemkách objevila. Úlohami, jejichž obtížnost v průběhu sledovaných akademických let stále rostla, jsou úlohy na použití 3. Keplerova zákona a výpočet meze výskytu polárního dne. Naopak úlohy, jejichž obtížnost se ve sledovaném období stále snižovala, jsou úlohy na výpočet délky rovnoběžky a rovnoběžkového stupně a deklinace hvězdy. Obě tyto úlohy se však objevily v celém sledovaném období jen třikrát. V případě ostatních úloh obtížnost v průběhu sledovaného období kolísá.

Úloh, které byly velmi obtížné pro studenty oborů UZ a UZ+M ve všech akademických letech, ve kterých se objevily v zápočtových písemkách, bylo v porovnání s úlohami pro studenty oborů GeKa a FGG mnohem více. Jedná se o úlohy na výpočet meze výskytu polárního dne, absolutního magnituda, pólové vzdálenosti dvou těles, kulminace hvězdy, deklinace hvězdy a plochy zeměpisného pásu (Tabulka 23), Ani jedna z těchto úloh se však nevyskytla ve všech sledovaných akademických letech. Jediná úloha, jejíž obtížnost v průběhu sledovaného období postupně klesala, byla úloha na výpočet délky a azimutu loxodromy. U ostatních příkladů obtížnost mezi roky 2011/2012 a 2016/2017 fluktuovala.

Tabulka 22: Průměrný index obtížnosti jednotlivých úloh vyžadujících výpočet určených pro studenty oborů GeKa a FGG v období 2011/2012 až 2016/2017. Poznámka: – značí průměrnou hodnotu indexu obtížnosti P za celé sledované období nižší než 20, – značí průměrnou hodnotu indexu obtížnosti P v daném akademickém roce nižší než 20, x – značí, že daná úloha se v daném akademickém roce nevyskytla v žádné variantě písemek.

úloha	Průměrný index obtížnosti P v daném akademickém roce						
	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016	2016/2017	průměr
Newtonův gravitační zákon	24,82	42,40	29,50	21,90	33,15	10,82	27,10
Délka a azimuty ortodromy	33,45	41,85	41,00	38,53	32,28	38,96	37,68
3. Keplerův zákon	65,85	61,19	52,34	39,62	33,33	30,20	47,09
2. Keplerův zákon	74,66	57,81	62,84	76,75	70,83	73,91	69,47
Sluneční čas	39,62	33,05	28,79	28,84	22,94	30,09	30,55
Mez výskytu polárního dne	33,73	31,56	26,25	15,47	X	X	26,75
Erathostenův vztah	38,89	0,00	30,52	35,25	41,93	37,21	30,63
Azimut východu	50,57	50,78	58,75	46,53	72,89	53,31	55,47
Délka výstupného uzlu	67,54	68,18	36,36	75,00	X	56,52	60,72
Průměrná hustota	20,64	17,08	32,35	15,06	33,12	17,01	22,54
Absolutní magnitudo	12,30	19,20	7,32	7,69	10,42	13,04	11,66
Archimédův zákon	42,59	24,22	6,67	7,87	25,00	X	21,27
Zeměpisná šířka	48,29	31,55	31,67	17,47	29,46	20,92	29,89
Šíření seismické vlny	48,32	63,35	64,59	61,42	63,06	X	60,15
Délka denního/nočního oblouku tělesa na obloze	50,54	51,83	46,61	47,36	38,82	45,12	46,71
Pólová vzdálenost dvou těles	9,76	x	x	X	4,56	7,14	7,16
Tíhové zrychlení	13,33	20,47	13,42	5,88	2,78	6,47	10,39
Výška Sluce nad obzorem	61,11	11,43	32,92	58,82	38,89	21,06	37,37
Dohlednost	79,63	77,14	42,42	X	61,54	X	65,18
Kulminace hvězdy	32,00	36,90	21,87	24,78	x	38,92	30,89
Délka rovnoběžky a délkového stupně	50,00	54,55	x	X	x	82,35	62,30
Zeměpisná délka	39,53	27,22	40,39	29,74	38,58	32,16	34,60
Dopplerův jev	x	x	56,52	X	x	X	56,52
Deklinace hvězdy	x	x	15,58	24,94	x	35,71	25,41
Plocha zeměpisného pásu	x	x	12,90	62,50	91,23	41,13	51,94
Maximální hodnota posuvu spektrální čáry	x	x	x	76,47	x	X	76,47
Radiální rychlost	x	x	x	X	38,93	X	38,93
Délka a azimut loxodromy	x	x	8,97	X	36,84	31,99	25,93

Tabulka 23: Průměrný index obtížnosti jednotlivých úloh vyžadujících výpočet určených pro studenty oborů UZ a UZ+M v období 2011/2012 až 2016/2017. Poznámka: – značí průměrnou hodnotu indexu obtížnosti P za celé sledované období nižší než 20, – značí průměrnou hodnotu indexu obtížnosti P v daném akademickém roce nižší než 20, x – značí, že daná úloha se v daném akademickém roce nevyskytla v žádné variantě písemek.

úloha	Průměrný index obtížnosti P v daném akademickém roce						
	2011/2012	2012/2013	2013/2014	2014/2015	2015/2016	2016/2017	průměr
Newtonův gravitační zákon	23,59	37,39	24,76	23,22	28,42	15,96	25,55
Délka a azimuty ortodromy	36,08	43,92	14,63	21,85	31,90	24,87	28,88
3. Keplerův zákon	47,06	50,56	58,53	52,17	19,05	36,50	43,98
2. Keplerův zákon	64,35	47,62	71,30	66,77	67,42	69,50	64,49
Sluneční čas	21,11	20,94	25,23	26,15	18,21	23,06	22,45
Mez výskytu polárního dne	18,82	x	x	X	x	x	18,82
Erathostenův vztah	6,67	4,55	25,93	26,11	18,22	12,00	15,58
Azimut východu	33,33	55,63	81,48	66,67	69,23	x	61,27
Délka výstupného uzlu	x	x	x	X	x	x	x
Průměrná hustota	15,79	9,52	33,33	X	x	12,50	17,79
Absolutní magnitudo	x	x	x	X	13,33	x	13,33
Archimédův zákon	x	x	x	X	x	x	x
Zeměpisná šířka	50,00	8,00	x	13,04	30,83	x	25,47
Šíření seismické vlny	0,00	26,33	15,00	50,00	49,26	x	28,12
Délka denního/nočního oblouku tělesa na obloze	34,62	36,36	41,66	37,25	30,45	33,25	35,60
Pólová vzdálenost dvou těles	0,00	x	x	X	0,00	0,00	0,00
Tíhové zrychlení	0,00	x	30,00	X	x	0,00	10,00
Výška Sluce nad obzorem	23,53	x	x	X	x	x	23,53
Dohlednost	65,38	77,27	58,33	41,67	x	70,00	62,53
Kulminace hvězdy	0,00	x	x	X	14,29	14,70	9,66
Délka rovnoběžky a délkového stupně	63,16	60,00	47,76	51,34	x	55,56	55,56
Zeměpisná délka	21,36	17,42	32,55	25,96	19,38	29,87	24,42
Dopplerův jev	x	x	x	X	x	x	x
Deklinace hvězdy	x	x	10,00	X	x	17,06	13,53
Plocha zeměpisného pásu	x	x	x	X	10,24	x	10,24
Maximální hodnota posuvu spektrální čáry	x	x	x	X	x	x	x
Radiální rychlost	x	x	x	X	x	x	x
Délka a azimut loxodromy	x	x	0,00	X	20,71	22,36	14,36

Jediná úloha, která se vyskytla ve všech verzích zápočtové písemky určené jak pro studenty oborů GeKa a FGG, tak pro studenty oborů UZ a UZ+M, je úloha na výpočet Slunečního času. Z porovnání průměrné obtížnosti této úlohy v rámci jednotlivých pokusů vyplývá, že pouze v jediném případě byl zaznamenán stálý pokles obtížnosti v 1., 2. a 3. pokusu (Tabulka 24). Neplatí tedy, že obtížnost úlohy se s opakováním snižuje. V osmi ze dvanácti sledovaných případů je však obtížnost úlohy při 3. pokusu nižší, než obtížnosti této úlohy při 1. pokusu.

Tabulka 24: Průměrný index obtížnosti úlohy na sluneční čas v jednotlivých pokusech v období 2011/2012 až 2016/2017. Poznámka: - značí stálý pokles obtížnosti úlohy na sluneční čas pro dané obory v jednom akademickém roce, - značí pokles obtížnosti úlohy na sluneční čas při 3. pokusu ve srovnání s obtížností této úlohy při 1. pokusu pro dané obory v jednom akademickém roce.

akademický rok	obor	1. pokus	2. pokus	3. pokus
2011/2012	GeKa + FGG	38,03	40,44	40,00
	UZ, UZ + M	21,37	15,38	26,32
2012/2013	GeKa + FGG	34,10	29,52	29,76
	UZ, UZ + M	20,24	16,00	27,27
2013/2014	GeKa + FGG	28,35	26,30	35,92
	UZ, UZ + M	20,00	27,59	46,33
2014/2015	GeKa + FGG	25,42	39,71	28,22
	UZ, UZ + M	19,79	17,39	47,62
2015/2016	GeKa + FGG	18,92	26,32	12,44
	UZ, UZ + M	15,24	24,52	11,54
2016/2017	GeKa + FGG	28,68	29,04	28,30
	UZ, UZ + M	24,87	17,50	25,00

5. DISKUZE VÝSLEDKŮ

5.1. Úroveň matematických dovedností

Fakt, že studenti na českých školách mají problémy s interpretací výsledků, naznačují výsledky šetření České školní inspekce prováděné v roce 2012 v rámci výzkumu PISA (Česká školní inspekce, 2013b). Tuto dovednost by však studenti měli na základě RVP G ovládat. Jistý vliv na chybovost v tomto úkonu může mít míra zastoupení daných úkonů ve výuce. Data České školní inspekce (2013b) ukazují, že se ve sledovaných hodinách matematiky na středních školách s obory gymnázium ze 76,4 % vyskytly aktivity zaměřené na vysvětlování a zdůvodňování odpovědí studenty. Tento procentuální podíl výskytu aktivity zaměřené na vysvětlování a zdůvodňování odpovědí zhruba odpovídá zjištěné úspěšnosti studentů v analyzovaných zápočtových písemkách z Matematické geografie - 72,63 %. Úspěšnost v úkonu formulace slovní odpovědí a zdůvodnění proto může souviset s podílem hodin na základní škole, ve kterých byla tato dovednost rozvíjena. Příčinou vysoké chybovosti při slovní odpovědi a zdůvodnění může být také velká obtížnost úloh, ve kterých se tento úkon vyskytuje. Existují velmi obtížné úlohy s úkonem „slovní odpověď, zdůvodnění“, které se vyskytují v zadání zápočtových testů v akademickém roce, v němž byla zaznamenána průměrná hodnota chybovosti tohoto úkonu pro daný obor vyšší než 30 %. V případě studentů oborů GeKa + FGG se jedná o akademický rok 2013/2014, kdy byly zaznamenány velmi obtížné úlohy na výpočet deklinace hvězdy. U studentů oborů UZ a UZ + M byly v akademických letech 2013/2014 a 2016/2017 také zaznamenány velmi obtížné úlohy zaměřené na výpočet deklinace hvězdy. Na druhou stranu jsou úlohy obsahující úkon formulace slovní odpovědi a zdůvodnění, pro které vyšla průměrná hodnota α v jednom akademickém roce vyšší než 20, přestože byla v tomto akademickém roce zaznamenána hodnota chybovosti tohoto úkonu pro daný obor vyšší než 30 %. U studentů oborů UZ a UZ + M se jedná o úlohy na 3. Keplerův zákon v akademickém roce 2015/2016. Nelze proto říct, že chybovost v úkonu „slovní odpověď, zdůvodnění“ vždy souvisí s obtížností úlohy.

Mohlo by se zdát, že pokud studenti správně používají jednotky a tudíž ví, v jakých jednotkách má daný příklad vyjít, budou v takovém případě i správně jednotky převádět. Opak je pravdou. U každé ze tří sledovaných skupin studentů v celém hodnoceném období byla v každém akademickém roce zaznamenána vyšší hodnota průměrné chybovosti v případě úkonu převody jednotek, než u úkonu správné použití jednotek. Průměrně druhá nejvyšší hodnota v chybovosti u úkonu „převody jednotek“ naznačuje, že žáci mají poměrně výrazné problémy s touto matematickou dovedností, přestože na základě Standardů pro základní vzdělávání (Dvořáková, 2015) by měli žáci 9. třídy umět jednotky bezpečně převádět.

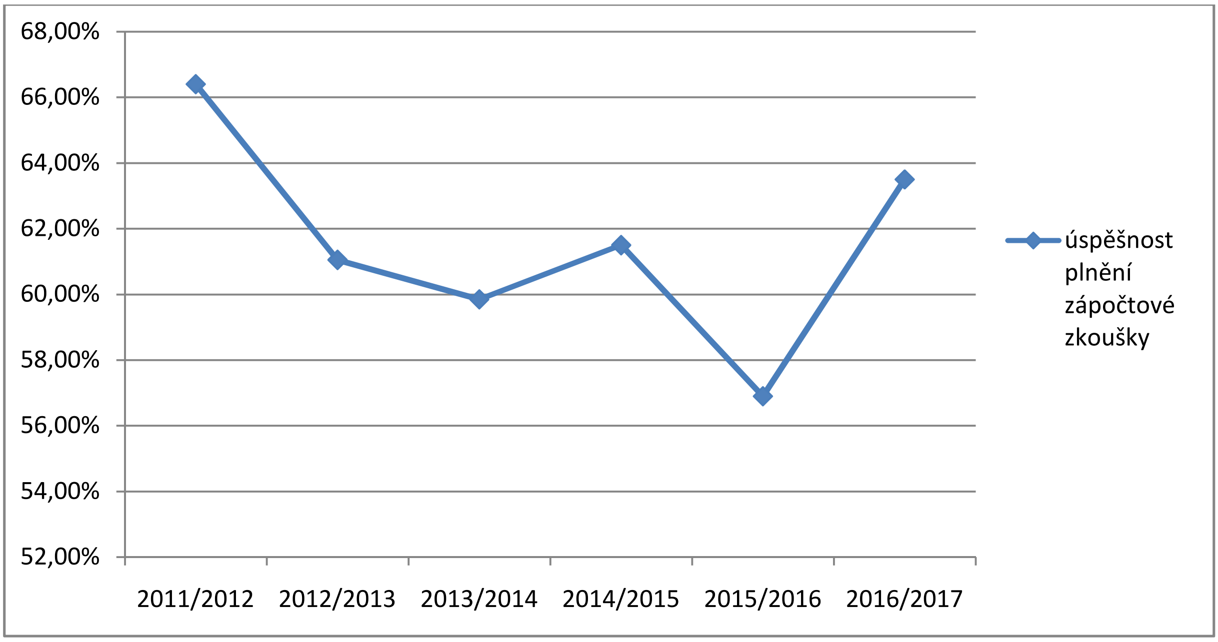
Úspěšnost při provádění úkonu „použití vhodného vzorce ve správné podobě“v podstatě koresponduje s podílem sledovaných hodin matematiky na středních školách s obory gymnázium, ve kterých studenti úspěšně použili učivo v aplikačních úlohách (Česká školní inspekce, 2013b). Vysoká hodnota chybovosti v tomto případě může také souviset s tím, že ve většině případů, se jedná o vzorce pro studenty zcela nové. Některé ze vzorců by však měli žáci bezpečně znát, jako například Newtonův gravitační zákon, Keplerovi zákony (dle RVP G) a vzorce pro výpočet obejmu a obvodu koule (dle RVP G).

Také úspěšnost při provádění úkonů vyjádření neznámé ze vzorce, dosazení do vzorce a správné používání jednotek, která dosahuje hodnoty vyšší než 95 %, může být do jisté míry zapříčiněna zastoupením daných úkonů ve výuce. Dle výsledků České školní inspekce (2013b) studenti úspěšně aplikovali znalosti o rovinných a prostorových útvarech v 90,3 % sledovaných hodinách na SŠ, úspěšně pracovali s proměnnými v 93,8 % sledovaných hodinách a ovládali jednoduché početní výpočty zpaměti v 93,8 % sledovaných hodinách. Ani v těchto případech nelze vysledovat souvislost mezi obtížností jednotlivých úloh a chybovostí v daných úkonech.

Zjištění, že průměrná chybovost v matematických úkonech za celé sledované období není nejnižší u studentů oboru UZ+M, se může zdát překvapivé. Jedním z možných vysvětlení je, že na učitelské obory chodí méně úspěšní studenti, popřípadě ti, kteří nebyli přijati na žádný odborný obor. Přesto jsou ve srovnání se studenty oborů UZ úspěšnější, což je pravděpodobně důsledek jejich specializace na matematiku.

Celkově je velice obtížné vysledovat určitý trend ve změně chybovosti v matematických úkonech. Lze konstatovat, že v průběhu sledovaných let se míra úspěšnosti nijak výrazně neměnila. Nejméně úspěšné byly roky 2011/2012 a 2016/2017, tedy první a poslední sledovaný rok. Je ovšem patrné, že v řadě případů po neúspěšném roce následoval rok mnohem úspěšnější. Tento jev lze nejspíš připsat faktu, že výrazný podíl matematických chyb v testových úlohách pravděpodobně zapříčinil celkový neúspěch v zápočtové písemce. Větší počet studentů proto musel předmět v příštím roce opakovat. Jejich zkušenosti z předchozího roku a větší míra připravenosti pak zvýšily úspěšnost v matematických úkonech v tomto roce. Dále je třeba také poznamenat, že v posledním sledovaném akademickém roce psali zápočtovou písemku z Matematické geografie také studenti bakalářského oboru Geografie se zaměřením na vzdělávání v kombinaci s dějepisem. Tento obor byl otevřen pouze v akademickém roce 2016/2017. Matematické dovednosti těchto studentů proto mohly částečně ovlivnit celkovou úspěšnost všech testovaných studentů v posledním sledovaném akademickém roce.

Na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze je pravidelně vyučován předmět Repetitorium středoškolské matematiky. Jedná se o doporučený volitelný předmět pro studenty bakalářského oboru Geografie a kartografie, Chemie v přírodních vědách, Biochemie a magisterský obor Geologie se zaměřením na vzdělávání (jednooborová), který je vyučován v zimním i letním semestru. Pro splnění tohoto předmětu je třeba úspěšně zvládnout zápočtovou písemku, jejímž obsahem je středoškolská matematika. Úspěšnost plnění předmětu Repetitorium středoškolské matematiky v letech 2011/2012 až 2016/2017 vyjma roku 2014/2015 a 2016/2017 stále klesá (Obr. **21**). Do statistiky jsou započítáváni i studenti, kteří nakonec vůbec zápočtovou písemku z tohoto předmětu nepsali. Dá se však předpokládat, že jejich podíl se v průběhu let příliš nemění. Trend změny v úspěšnosti proto odpovídá úspěšnosti v zápočtové zkoušce. Z výsledků vyplývá, že úspěšnost studentů v zápočtové písemce z Repetitoria středoškolské matematiky v posledních 5 letech klesla. Důvodem odlišnosti těchto výsledků od výsledků získaných analýzou zápočtových testů z Matematické geografie může být obtížnost matematických úloh a úkonů. Obsahem zápočtové písemky předmětu Repetitorium středoškolské matematiky jsou mimo jiné komplexní čísla, analytická geometrie v rovině i v prostoru a základní křivky a plochy. Analyzované úkony v zápočtových písemkách z Matematické geografie se z části týkají látky základní školy a obtížnost úkonů ze středoškolské matematiky tak není příliš velká. Dalším důvodem odlišností v úspěšnosti při zápočtové zkoušce z Matematické geografie a Repetitoria středoškolské matematiky také může být také složení studentů, kteří daný test píší. Zatímco zápočtový test z Matematické geografie píší studenti geografických oborů, test v rámci předmětu Repetitoriu středoškolské matematiky píší pouze studenti oboru GeKa a zároveň i studenti z oborů Chemie v přírodních vědách, Biochemie a Geologie se zaměřením na vzdělávání (jednooborová).



Obr. 21: Průměrná úspěšnost absolventů předmětu Repetitorium středoškolské matematiky v zimním a letním semestru v letech 2011/2012 až 2016/2017.

5.2. Kritika metodiky hodnocení zápočtových testů

Vzhledem k tomu, že analyzované písemky jsou velmi specifické svým obsahem a nejsou sestavovány za účelem zjištění matematických znalostí a dovedností, bylo proto nutné vytvořit vlastní metodiku hodnocení. Tato metodika má však řadu úskalí. Některá mohou mít vliv na konečné výsledky, jiná by měla být zohledněna při jejich interpretaci. Při interpretaci dat je třeba vzít v potaz, že zatímco některé úkony jsou vyžadovány téměř v každé úloze, jiné jsou velmi specifické a při řešení písemné práce se s nimi studenti setkají například pouze jednou (počítání s procenty, formulace slovní odpovědi a zdůvodnění, práce s intervalem). Vzhledem k tomu, že v řadě případů není možné rozhodnout o správném či nesprávném splnění úkonu, může být počet výskytů, z nichž je vyvozeno hodnocení chybovosti, u těchto úkonů velice nízký. Taková situace nastala v případě testování studentů odborných oborů v akademickém roce 2015/2016. Úkon práce s intervalem se objevil pouze v jediné písemce. Řada studentů si navíc nevěděla s úlohou rady. Ohodnotit daný úkon tak bylo možné pouze ve dvou případech. V obou případech studenti provedli úkon správně, celková chybovost proto byla nulová. Váha této chybovosti ovšem není tak veliká, jako v případě úkonů, které bylo možné ohodnotit mnohem častěji.

Daná metodika také nezahrnuje další aspekty, které se podílejí na úspěšném vyřešení testových úloh, v tomto případě slovních úloh. Příkladem je pozorné čtení textu, porozumění textu a správná interpretace jednoho nebo více termínů použitých v zadání. Tyto dovednosti zásadním způsobem ovlivňují úspěšnost vyřešení slovní úlohy. Pokud tedy student neuvedl správný vzorec, nemusela být chyba pouze na straně jeho neznalosti, ale ve špatném porozumění zadání nebo nepozorném čtení. Stejné je to i v případě dosazování do vzorce. V tomto případě může být problém také v nesprávné interpretaci termínů a hodnot v zadání. Uvedené dovednosti jsou ovšem v takto konstruovaných testech těžko rozlišitelné. Určitý vliv na správnost řešení má jistě také časová náročnost testu a další vnější a vnitřní vlivy, které také nejsou v této metodice zohledněny. Problém s hodnocením nastal také v případě, kdy student neuvedl postup řešení úlohy, ale pouze výsledek. Významnou roli v hodnocení testů hraje nepochybně také subjektivita.

Metodika hodnocení kvality didaktických testů má také jisté nedostatky. V případě indexu obtížnosti i Cronbachova alfa se jedná pouze o empirické vzorce, ve kterých se nebere v potaz velikost zkoumaného souboru. Nelze proto určit, nakolik jsou dané výsledky relevantní. Stejně tak jsou diskutabilní hranice, od kterých jsou dané úlohy či úkony považovány za reliabilní, nebo velmi obtížné. Zatímco Štěpánek (2009) k rozhodnutí o reliabilitě testu ve své práci doporučuje hodnotu Cronbachova alfa alespoň 0,85, Čížková, Čurdová a Kubiatko (2013) považují za reliabilní ty test, jejichž hodnota Cronbachova alfa je okolo 0,8. George a Mallery (2003) považují z hlediska reliability testy s hodnotou $\alpha > 0{,}9$ za excelentní, $\alpha > 0{,}8$ za dobré, $\alpha > 0{,}7$ za akceptovatelné, $\alpha > 0{,}6$ za sporné a $\alpha > 0{,}5$ za nedostatečné. Stanovení hranice pro reliabilitu test tedy hraje roli při interpretaci výsledků. Stejně tak i v případě indexu obtížnosti.

6. SHRNUTÍ A ZÁVĚR

S poslední provedenou kurikulární reformou v českém školství je stále více kladen důraz na mezipředmětové vazby a jejich rozvoj. Jedním z oborů s výraznými mezipředmětovými vazbami je právě geografie, která stojí na pomezí přírodních, technických a společenských věd (Ridelová, Demek, Pech, 1980). Právě tématům na pomezí tradičních disciplín je v současné době věnována velká pozornost a jedná se o nejrychleji se rozvíjející oblasti vědy. Práce geografa vyžaduje celou řadu znalostí a dovedností, které nejsou založeny čistě na jeho odbornosti. Jednou z nich je tzv. matematická gramotnost, neboli schopnost využívat své matematické znalosti a dovednosti k vymezování, formulování a řešení problémů z různých oblastí a kontextů včetně interpretace jejich řešení. Úroveň matematické gramotnosti je Českou školní inspekcí pravidelně testována u žáků 4. a 8. ročníků základní školy a u patnáctiletých žáků. Z jejích výsledků však vyplývá, že úroveň matematické gramotnosti těchto žáků v posledních 16 letech klesá (Česká školní inspekce, 2013a; Česká školní inspekce 2016c). Vzhledem k tomu, že k poslednímu testování dochází u žáků v jejich 15-ti letech, neexistují žádné oficiální studie, zkoumající úroveň matematické gramotnosti absolventů střední školy.

Na Přírodovědeckých fakultách českých univerzit (např. Univerzita Karlova v Praze, Masarykova Univerzita, Univerzita Palackého v Olomouci, Ostravská Univerzita) je pro studenty oboru Geografie vyučován předmět často pojmenovaný jako Planetární geografie. Jedním z podmínek jeho splnění je úspěšné napsání zápočtového testu. Jedná se o didaktický test, který vyžaduje matematizaci dané situace a jisté matematické dovednosti k jejich správnému vyřešení. Jsou to tedy testy, které mohou sloužit jako ukazatel matematické gramotnosti čerstvých absolventů střední školy. Cílem této práce proto bylo stanovit, jaké matematické dovednosti dělaly studentům, kteří psali tento zápočtový test, největší problémy. Zda se tyto problémy týkaly pouze studentů určitého oboru, nebo se vyskytovaly napříč celým ročníkem a jestli se měnily v čase, nebo zůstávaly po celé sledované období stejné. Vzhledem k tomu že výsledky testu vždy výrazně ovlivňují jeho vlastnosti, byla pozornost věnována také obtížnosti jednotlivých úloh a reliabilitě celého testu.

Pro naplnění cílů byly využity zápočtové písemky z předmětu Matematická geografie, který psali studenti Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Využity byly písemky z šesti po sobě jdoucích akademických let 2011/2012 až 2016/2017. Vzhledem k tomu, že se jedná o typ testů, které nejsou běžně využívány k testování matematické gramotnosti, bylo nutné vytvořit vlastní metodiku hodnocení. Ta se opírá o indikátory uvedené ve Standardech RVP ZV, očekávané výstupy RVP G a vybrané výstupy vytvořené na základě analýzy Školních vzdělávacích programů náhodně vybraných Gymnázií v České republice. Každá početní úloha byla rozdělena na jednotlivé matematické úkony, které je třeba provést při jejím řešení. Následně pak byla hodnocena chybovost při provádění těchto úkonů. Reliabilita testů byla testována prostřednictví Cronbachova alfa a obtížnost jednotlivých úloh pomocí indexu obtížnosti.

Z výsledků vyplývá, že největší problémy dělaly studentům ve sledovaném období převody jednotek. Dále měli výrazné problémy se zdůvodňováním a slovní odpovědí, při počítání s úhly a použití vhodné vzorce ve správné podobě. Naopak nejmenší chybovost byla zaznamenána při vyjadřování neznámé ze vzorce, dosazování do vzorce, správném používání jednotek a znalosti průběhu goniometrických funkcí.

Celkově je velice obtížné vysledovat určitý trend ve změně chybovosti v matematických úkonech. V řadě případů však po neúspěšném roce následoval rok mnohem úspěšnější. To lze nejspíš připsat faktu, že větší počet neúspěšných studentů, který musel předmět opakovat, zvýšil úspěšnost v následujícím roce. Výjimkou je poslední sledovaný rok, kdy se průměrná hodnota chybovosti téměř nelišila od chybovosti v předchozím roce.

Největší rozdíl v chybovosti mezi jednotlivými obory byl zjištěn u formulace slovní odpovědi a zdůvodnění. Jinak se hodnoty chybovosti u sledovaných úkonů mezi jednotlivými obory příliš nelišily. Ačkoliv by se dalo, předpokládat že studenti oborů UZ+M budou vzhledem ke své specializaci při provádění matematických úkonů nejúspěšnější, udělali celkově nejmenší podíl chyb studenti oborů GeKa a FGG. Obecně nejhůře dopadli studenti oboru UZ.

Jediná typová úloha, která se vyskytovala ve všech variantách testů, je úloha na výpočet slunečního času Při porovnání indexu obtížnosti této úlohy v jednotlivých pokusech v každém sledovaném akademickém roce pro obory GeKa + FGG a UZ a UZ + M se ukázalo, že obtížnost této úlohy nezávisí na tom, o jaký pokus se jedná. Nelze tedy říct, že by se studenti při druhém a třetím pokusu vždy zlepšovali.

Vytvořená metodika však nezahrnuje další aspekty související s řešením slovní úlohy jako je pozorné čtení textu, porozumění textu a správná interpretace jednoho nebo více termínů použitých v zadání. Tyto dovednosti zásadní způsobem ovlivňují úspěšnost vyřešení dané slovní úlohy. Jistý vliv na chybovost má jistě také časová náročnost testu a další vnější a vnitřní vlivy, které také nejsou v dané metodice zohledněny. Také metodika hodnocení reliability testu a obtížnosti úloh má své slabiny. V obou případech se jedná pouze o empirické vzorce, které nezohledňují velikost testovaného souboru. Nelze proto určit, nakolik jsou dané výsledky relevantní.

Ze zjištěných výsledků proto vyplývá, že vyučující matematiky by měli v hodinách věnovat větší prostor převádění jednotek. Ideálně ve slovních úlohách, ve kterých není explicitně dáno, že žáci mají uvedené jednotky převádět. Dále by měla být větší pozornost věnována samostatné formulaci závěrů a slovních odpovědí.

7. LITERATURA

BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇOUROVÁ, M. (2011): Kapitoly z didaktiky matematiky, slovní úlohy, projekty. Pedagogická fakulta MU, Brno, 84 s.

BRÁZDIL, R. (1988): Úvod do studia planety Země. SPN, Praha, 365s.

BYČKOVSKÝ, P. (1982): Základy měření výsledků výuky. Tvorba didaktického testu. ČVUT, Praha, 149 s.

ČAPEK, R. (2001): Matematická geografie. Karolinum, Praha, 86 s.

Česká školní inspekce (2016a): Mezinárodní šetření PISA 2015. Národní zpráva. MŠMT, Praha, 52 s. Dostupné online z: http://www.csicr.cz/html/PISA2015/flipviewerxpress.html [7. 12. 2016].

Česká školní inspekce (2016b): Tematická zpráva. Rozvoj čtenářské, matematické a sociální gramotnosti na základních a středních školách ve školním roce 2015/2016. MŠMT, Praha, 55 s. Dostupné online z: http://www.csicr.cz/html/TZ_Gramotnosti/flipviewerxpress.html [26. 11. 2016].

Česká školní inspekce (2016c): Mezinárodní šetření TIMSS 2015. Národní zpráva. MŠMT, Praha, 57 s. Dostupné online z: http://www.csicr.cz/html/timss/flipviewerxpress.html [4. 12. 2016].

Česká školní inspekce (2013a): Hlavní zjištění PISA 2012. Matematická gramotnost patnáctiletých žáků. MŠMT, Praha, 51 s. Dostupné online z: http://www.csicr.cz/html/PISA2012-HZ/flipviewerxpress.html [7. 12. 2016].

Česká školní inspekce (2013b): Tematická zpráva. Podpora rozvoje matematické, finanční a čtenářské gramotnosti. MŠMT, Praha, 39 s. Dostupné online z: http://www.csicr.cz/html/TZ2013_Podpora_rozvoje_gram/flipviewerxpress.html [8. 4. 2017].

ČÍŽKOVÁ, V., ČURDOVÁ, R., KUBIATKO, M. (2013): Biologie. In: Řezníčková, D. a kol.: Dovednosti žáků ve výuce biologie, geografie a chemie. Nakladelství P3K, 288 s.

DVOŘÁK, D. (2013): Vycházejí nové publikace pro rozvoj čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti na základě zjištění šetření PISA 2009. Týdeník školství, č. 19. Dostupné online z: http://www.tydenik-skolstvi.cz/archiv-cisel/2013/19/vychazeji-nove-publikace-pro-rozvoj-ctenarske-matematicke-a-prirodovedne-gramotnosti-na-zaklade-zjisteni-setreni-pisa-2009/ [21. 06. 2017].

DVOŘÁKOVÁ, J. a kol. (2015): Standarty pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace. Národní ústav pro vzdělávání, 48 s. Dostupné online z: http://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=67490&view=9832 [5. 6. 2017].

GEORGE, D., MALLERY, P. (2003): SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference, fourth edition (11. update). Dostupné online z: http://wps.ablongman.com/wps/media/objects/385/394732/george4answers.pdf [23. 11. 2017].

HAMPL, M. (1998): Realita, společnost a geografická organizace: hledání integrálního řádu. Karolinum, Praha, 110 s.

HAVELKOVÁ, L. (2014): Rozvoj mapových dovedností v dějepisu, matematice a biologii. Bakalářská práce. Katedra sociální geografie a regionálního rozvoje, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 86 s.

HEJNÝ, M. a kol. (1990): Teória vyučovania matematiky. SPN, Bratislava, 554 s.

HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N. (2004): Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha, 455 s. Dostupné online z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_59.pdf [18. 11. 2016].

HNILIČKOVÁ, J. (1972): Diagnostické metody ve vyučování fyzice na základní škole. SPN, Praha, 59 s.

CHRÁSKA, M. (1999): Didaktické testy; Příručka pro učitele a studenty učitelství. Paido, Brno, 91 s.

KUBÍNOVÁ, M. (1998): Slovní úlohy v učebnicích matematiky pro druhý stupeň základní školy. Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, ZČU, Plzeň, 199 s. Dostupné online z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_55.pdf [1. 6. 2017].

KUČEROVÁ, S., KOPP, J., ČECHUROVÁ, M., KULHÁNEK, M. (2017): Mezipředmětové vazby geografie/zeměpisu. Geografické rozhledy, 22, č. 4, s. 18 – 19.

LEIPERTOVÁ, G. (2010): Matematické dovednosti aplikované ve výuce kartografie. Bakalářská práce. Katedra sociální geografie a regionálního rozvoje, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 85 s.

MATÝSKOVÁ, P. (2011): Matematické dovednosti aplikované ve výuce geografie na SŠ. Diplomová práce. Katedra sociální geografie a regionálního rozvoje, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 100 s.

MŠMT (2016): Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělání. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 164 s. Dostupné online z: http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf [29. 10. 2017].

MŠMT (2010): Gramotnosti ve vzdělávání. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 64 s. Dostupné online z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2011/03/Gramotnosti-ve-vzdelavani11.pdf [18. 11. 2016].

MŠMT (2007): Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 100 s. Dostupné online z: http://stary.rvp.cz/soubor/RVP_G.pdf [15. 10. 2016].

Národní ústav pro vzdělávání (2011): Matematická gramotnost ve výuce. Metodická příručka. VÚP, Praha, 71 s. Dostupné online z: http://docplayer.cz/2865066-Matematicka-gramotnost-ve-vyuce-metodicka-prirucka.html [8. 4. 2017].

NAVARRA, G. (1995): On the interpretative difficulties of texts of standard problems some aspects of a experimental research with children 10 years old. University of Modena, Modena, 3 s. Dostupné online z:
http://www.progettoaral.it/wp-content/uploads/2016/07/1995_SEMT_StandardPro_eng.pdf
[3. 6. 2017].

NOVOTNÁ, J. (2000): Analýza řešení slovních úloh. Kapitoly z didaktiky matematiky. Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, Praha, 119 s.

ODVÁRKO, O. a kol. (1990): Metody řešení matematických úloh. SPN, Praha, 264 s.

ONDRÁČKOVÁ, Z. (2013): Využití matematických znalostí a dovedností ve výuce geografie na příkladech vybraných tematických celků. Diplomová práce. Katedra geografie, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci, Liberec, 101 s. Dostupné online z: https://dspace.tul.cz/bitstream/handle/15240/14389/DP_Ondrackova.pdf?sequence=1 [8. 6. 2017].

PELIKÁN, J. (2007): Základy empirického výzkumu pedagogických jevů. Nakladatelství Karolinum, Praha, 270 s.

RAKUŠANOVÁ, A. (1957): K řešení složených slovních úloh. Matematika ve škole: časopis pro metodiku matematiky, VII, č. 5, s. 274 – 291.

RIEDLOVÁ, M., DEMEK, J., PECH, J. (1980): Úvod do studia geografie a dějiny geografie. Učebnice pro vysoké školy. SPN, Praha, 158 s.

ŘEHÁK, J. (1998): Kvalita dat I. Klasický model měření reliability a jeho praktický aplikační význam. Sociologický časopis, 34, č. 1, s. 51 – 60.

ŠTĚPÁNEK, P. (2009): Tvorba databáze otázek pro testování znalostí středoškolské biochemie. Diplomová práce. Přírodovědecká fakulta, Masarykova Univerzita v Brně, Brno, 131 s.

SCHINDLER, R. a kol. (2006): Rukověť autora testových úloh. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, Praha, 88 s. Dostupné online z: http://www.cermat.cz/rukovet-autora-testovych-uloh-1404034186.html [30. 10. 2016].

ÚIV (2004): Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003. Oddělení mezinárodních výzkumů. Praha, 51 s. Dostupné online z: http://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/PISA/PISA-2003/Koncepce-matem-gramotnosti-publikace.pdf [18. 11. 2016].

VENVILLE, G. a kol. (1998): The Integration of Science, Mathematics, and Technology in a Discipline-Based Culture. School Science and Mathematics, 98, č. 6, s. 294 – 302.

8. PŘÍLOHY

Příloha 1: Vybrané očekávané výstupy z oddílů Číslo a proměnná, Závislosti a funkční vztahy a oddílu Geometrie formulované v náhodně vybraných ŠVP G a počet jejich výskytů.

Očekávané výstupy	Počet výskytů
aplikuje geometrický význam absolutní hodnoty	22
provádí operace s mocninami a odmocninami, upravuje čís. výrazy	22
řeší lineární rovnice a nerovnice	21
rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy	19
aplikuje řešení rovnic ve slovních úlohách	19
upravuje efektivně výrazy s proměnnými	16
operuje s intervaly	15
účelně využívá kalkulátor	15
využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině	15
používá vzorce pro výpočet objemů a povrchů zákl. geometrických těles	15
odhaduje výsledky numerických výpočtů, efektivně je provádí	13
řeší exponenciální rovnice a jednoduché nerovnice	13
využívá vlastností logaritmů při řešení logaritmických (ne)rovnic	13
řeší stereometrické problémy motivované praxí	13
modeluje reálné děje pomocí známých funkcí, řeší aplikační úlohy	12
řeší jednoduché goniometrické (ne)rovnice	12
řeší planimetrické problémy motivované praxí	10
vyjadřuje neznámou ze vzorce	9
využívá poznatky o funkcích při řešení (ne)rovnic a určování kvantitativních vztahů	9
určuje vzdálenosti a odchylky	9
řeší (ne)rovnice s absolutní hodnotou, v podílovém tvaru, s odmocninou	8
využívá náčrt při řešení rovinného problému	8
určí obvody a obsahy rovinných útvarů	7
provádí aritmetické operace v číselných oborech	6
ovládá početní operace s lomenými výrazy	6
popíše a zdůvodní vlastnosti daných funkcí	5
aplikuje vztahy mezi goniometrickými funkcemi	5
aplikuje poznatky o exp., log. i goniometrických funkcích v praktických úlohách	5
využívá náčrt při řešení prostorového problému	5
využívá poznatků o tělesech v praktických úlohách	5
v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly	6
využívá vlastnosti geometrických útvarů prostoru	5
zdůvodňuje svůj postup a ověřuje správnost řešení	3
provádí operace s desetinnými čísly včetně zaokrouhlování	2
určuje hodnotu algebraického výrazu	1
aplikuje vztahy mezi exp. a log. funkcemi	1
pracuje s výrazy pod odmocninou	1
rozumí pojmům vzdálenost a skutečná velikost	1
rozlišuje pojmy těleso a plocha	1

Očekávané výstupy	Počet výskytů
definuje kořen a dovede ho ověřit pro danou úlohu	1
upravuje výrazy s absolutní hodnotou	1
pojmenuje dvojice úhlů a zná jejich vlastnosti	1
počítá s velkými a malými čísly	1
používá semilogaritmický tvar čísla	1
používá vzorce	1

Příloha 2: CD

Příloha 3: CD