

UNIVERZITA KARLOVA
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Metody tvorby úloh na vyšetřování průběhu funkce

Problem posing in function analysis

Nela Bubelová

vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

studijní program: Specializace v pedagogice

studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha, 2017

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma Metody tvorby úloh na vyšetřování průběhu funkce vypracovala pod vedením Mgr. Derka Pilouse, Ph.D. samostatně a že nesloužila k získání stejného nebo jiného titulu. Veškeré v práci použité informační zdroje a prameny jsou řádně citovány a uvedeny na konci práce v seznamu literatury.

V Praze dne 14. července 2017

Nela Bubelová

Děkuji Mgr. Derkovi Pilousovi, Ph. D. za všechnen čas, který věnoval vedení a komentování mé práce, za jeho ochotu, smysl pro detail a za svobodu, se kterou jsem mohla psát; lepšího vedoucího si nedovedu představit. Díky i za pomoc s výběrem tématu, bylo nanejvýš poučné v nejednom směru a stejně si myslím, že jsme vybrali skvěle.

Další dík patří mým kolegům v práci; kluci, vaše trpělivost a účast nemá hranic a cením si všech minut, kdy jste museli poslouchat, jak mluvím o něčem, co se vás vůbec netýká a speciálně děkuji za to, že jste se dokonce tvářili zaujatě.

Nejhlubší dík patří Míšovi; za Tvou svéráznou podporu, která mě znovu a znovu nutí zvažovat mé priority a docenit možnosti, které mi dáváš. Bez Tebe by nebylo nic.

Anotace

Tato práce se zabývá problematikou navrhování didakticky účelných úloh na vyšetřování průběhu s přihlédnutím k algebraické složitosti jejich řešení. Cílem je zhodnotit klíčové parametry tohoto typu úlohy, jejich vzájemné závislosti, jakož i navrhnout metody, podle kterých lze na základě hodnot těchto parametrů konkrétní úlohy vytvářet. Součástí práce je i upozornění na nejednotný přístup různých autorů k problematice.

Klíčová slova: reálná funkce, průběh funkce, tvorba úlohy

Annotation

This thesis deals with problem of designing problems in function analysis from educational point of view and with a regard to algebraic complexity of solving process. The aim is to evaluate the key parameters of this type of problem, their interdependence and to propose methods according to which the values of these parameters can be created. Part of the thesis is to give notice about different approach of various authors to the problem.

Keywords: real function, function analysis, problem posing

Obsah

Použité značení	7
Úvod	8
1 Pojetí úlohy na průběh funkce	10
1.1 Obsah úlohy	12
1.2 Variabilita výsledků v závislosti na teorii	17
1.2.1 Intervaly monotonie, konvexnosti a konkávnosti	18
1.2.2 Spojitost a body nespojitosti	24
1.3 Doporučení k zadávání a vyhodnocování	28
2 Parametry úlohy na průběh funkce a jejich konstrukce	38
2.1 Definiční obor funkce	39
2.2 Parita funkce	43
2.2.1 Konstrukce sudé a liché funkce	44
2.2.2 Vliv parity na ostatní vlastnosti funkce	46
2.3 Periodicita funkce	48
2.3.1 Konstrukce periodické funkce	49
2.3.2 Vliv periodicity na ostatní vlastnosti funkce	50
2.4 Poloha grafu funkce vzhledem k ose x	51
2.4.1 Problém zjistitelnosti	52

2.4.2	Konstrukce průsečíků s osou x	53
2.5	Spojitosť funkce	54
2.5.1	Problematika definic	55
2.5.2	Význam spojitosti v úloze na průběh funkce	56
2.5.3	Konstrukce bodů nespojitosti	57
2.5.4	Vliv (ne)spojitosti na ostatní vlastnosti	70
2.6	Chování funkce v krajních bodech $D(f)$	72
2.6.1	Konstrukce chování v reálných krajních bodech	73
2.6.2	Konstrukce chování v nevlastních bodech $\pm\infty$	76
2.6.3	Vliv na ostatní vlastnosti funkce	86
2.7	Diferencovatelnost funkce	87
2.7.1	Konstrukce bodů nediferencovatelnosti	90
2.7.2	Vliv diferencovatelnosti na ostatní vlastnosti	96
2.8	Asymptoty	97
2.8.1	Konstrukce asymptot	99
2.8.2	Vliv asymptot na ostatní vlastnosti	104
Závěr		106
Literatura		109

Použité značení

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	množina rozšířených reálných čísel, tj. $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\overline{M}$	uzávěr množiny M
$D(f)$	definiční obor (libovolné) funkce f
$H(f)$	obor hodnot (libovolné) funkce f
$f \circ g$	složení vnější funkce f a vnitřní funkce g
$U(a)$	okolí bodu a
$P(a)$	prstencové (redukované) okolí bodu a
$P^-(a), P^+(a)$	levé, pravé prstencové okolí bodu a
$f'(a)$	derivace f v bodě a
$f'(a^-), f'(a^+)$	derivace f v bodě a zleva, zprava

V citovaných částech je užito původního značení autora.

Úvod

Ve své profesní praxi se setkávám se studenty z různých vysokých škol, připravuji je k zápočtům z předmětů zabývajících se matematickou analýzou. Protože všechny kurzy analýzy v bakalářském studiu se do určité míry zabývají diferenciálním počtem a protože úloha na průběh funkce je jistým početním a interpretačním vrcholem těchto kurzů, pokládám tuto úlohu za podstatnou.

Z hlediska výuky a testování ji navíc považuji za velmi užitečnou. Oceňuji, že z řešení této úlohy mohu posoudit vše od praktického zvládnutí početních nástrojů diferenciálního počtu, přes porozumění významu a důsledkům vypočtených hodnot až po schopnosti logicky uspořádávat jednotlivé kroky postupu a vhodně je zaznamenávat. Aby úloha mohla takto sloužit, je třeba k vyšetřování zadávat dobře zvolené funkce, s čímž souvisí potřeba tvorby takovýchto úloh.

Další věcí, která pro mě dělá úlohu na průběh funkce zajímavou, je to, jak rozdílně je pojmána. Různorodost požadavků, hloubka vyšetřování, prioritizace vlastností jakož i rozdíly v zápisech a struktuře řešení a i ve výsledném hodnocení a bodování; to vše z této úlohy dělá ideální příklad pro demonstraci unikátnosti přístupů učitelů, cvičících, přednášejících, autorů skript apod.

Toto je další záležitost, která se mě velmi dotýká, protože po testech

často se studenty diskutuji, proč jejich řešení bylo případně vyhodnoceno jako chybné a jestli oprávněně. Přání poskytnout jim validní argumenty pro obhajobu jejich přístupu, byl-li korektní, osobní zájem, který ve mě tyto rozpory vzbudily, a možnost ukázat některým hodnotitelům, že vyhodnocování úlohy na průběh funkce není zdaleka tak přímočaré jako u některých jiných úloh, mě dovedlo k sepsání první kapitoly této práce.

Tato bakalářská práce je tedy rozdělena na dvě části. První část se zaměřuje na samotné pojetí úlohy a na rozdíly přístupů k jeho řešení a výsledkům. Druhá část se zabývá problematikou tvorby úlohy. S ohledem na složitost celé věci není postup zcela algoritmizován a možné uvažování nad tvorbou úlohy je zachyceno v příkladech aplikace uváděných vět. Vzhledem k členění 2. kapitoly lze navržené metody navíc využívat i při konstrukci zadání jiných, pro úlohu na vyšetření průběh funkce dílčích, úloh.

Protože však rozbor jednotlivých vlastností funkce zvoleným stylem významně přesáhl předpokládaný rozsah, práce bohužel není dokončena do plánované podoby. Nejzásadněji se tento fakt projevil na chybějícím rozboru vlastností monotonie a konvexnosti a konkávnosti. Přesto se však domnívám, že stanovené cíle byly splněny do té míry, že práce je smysluplná i v tomto menším rozsahu.

Doufám, že všem případným čtenářům přijde má práce alespoň z části tak přínosná, jako bylo pro mě přínosné její sepsání.

Kapitola 1

Pojetí úlohy na průběh funkce

Úlohy na vyšetřování průběhu funkce jsou napříč kurzy a literaturou zabývající se diferenciálním počtem funkcí jedné reálné proměnné rozšířené.¹ Jejich přínosem výuce je nejen motivace k ovládnutí základy diferenciálního počtu, což splní i na specifitější dílčí úlohy, ale zejména jejich komplexnost. Ideálně na nich navíc řešitel prokazuje další dovednosti, jako například schopnost plánovat řešení úlohy, volit vhodný matematický aparát pro daný problém, interpretovat dílčí výsledky a zhodnotit význam získaných informací pro funkci jako celek.

Zatímco na zařazení tohoto typu úlohy do výuky se shodne většina porovnávaných autorů, v chápání toho, co je vlastně obsahem úlohy, už taková jednota není.² Samotné znění úkolu: „Vyšetřete průběh funkce.“ není jednoznačné. Žádný z porovnávaných autorů nedefinuje sousloví *průběh funkce* jako matematický termín – jeho interpretace je tedy pouze kontextuální nebo závislá na dohodě.

Většina zkoumaných autorů předepisuje, co přesně oni pod vyšetřením

¹viz tabulka 1.2 na straně 17

²viz tabulka 1.3 na straně 17

průběhu rozumí, tj. které vlastnosti má podle nich student vyšetřovat, liší se ale nejenom v míře, ve které stejné vlastnosti vyšetřují, ale i v tom, které vlastnosti zasluhují pozornost a zda vždy, nebo jen někdy. Nejednotnost je dokonce i v tom, co je považováno za výsledek úlohy. Určení *průběhu funkce* se tedy zvláště ve srovnání různých autorů projevuje jako zadání nematematicky podléhající preferencím, zkušenosti a vkusu zadavatele.

Cílem první části této kapitoly je proto poukázat na rozdíly v tom, co mohou konkrétní zadavatelé úlohy po studentech vyžadovat a co přesně považují za výsledek úlohy.

Dalším problémem úlohy nejednotnost v dílčích podúlohách úlohy na průběh funkce, tj. ve vyšetřování jednotlivých vlastností. Rozdílnost přístupů je zčásti daná vágností celé úlohy, zčásti má vliv užití v detailech se lišící související teorie a míra rigorozity, se kterou je vyšetřování vlastností pojato.

Nejvýrazněji se tento problém projevuje v nejednotném úzu při zahrnování lokálních extrémů do intervalů monotonie a inflexních bodů do intervalů konvexnosti a konkávnosti, protože přímo ovlivňuje podobu výsledků úlohy. Rozdílné přístupy můžeme dobře pozorovat i při určování spojitosti.

Cílem druhé části této kapitoly je rozbor toho, co tuto nejednotnost způsobuje, a co vše může odlišná, anebo vynechaná definice či věta změnit na výsledku úlohy na průběh funkce.

Při vzájemném porovnávání definic se v některých částech práce hovoří o „standardních“ či „obvyklých“ podobách různých definic a vět. Vzhledem k tomu, že neexistuje žádná oficiální norma kodifikující pojmy a tvrzení, tyto slova odkazují čistě na četnost výskytu ve zkoumané literatuře. Učínme tedy úmluvu: za standardní podobu definice nebo věty označíme ten tvar, který užívá výrazná většina (více jak 80 %) autorů. Za obvyklou budeme považovat formulace vyskytující se alespoň u třetiny autorů. Tvar definice či

věty užívaný pouze jedním či dvěma autory budeme pokládat za anomální.

Cílem poslední části této kapitoly je formulování doporučení ohledně korektního zadávání a vyhodnocování úlohy na vyšetřování průběhu funkce, protože k všeobecné nejednoznačnosti zadání, vlivu preferencí jednotlivých zadavatelů na hloubku vyšetřování jednotlivých vlastností a variabilitě výsledků v závislosti na uváděné teorii je konkrétní vyřešení úlohy na vyšetření průběhu funkce obzvláště náročné na objektivní zhodnocení.

1.1 Obsah úlohy

Typické zadání úlohy ve zkoumané literatuře vypadá třeba takto:

Příklad. Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{1}{x^2} + x$.

Jak bylo předesláno v úvodu této kapitoly, pod takto formulovaným problémem mohou zadavatelé očekávat poměrně rozdílné výstupy. Porovnejme několik představ různých autorů o výsledcích úlohy.

„Zjišťování vlastností funkce vedoucí k jejich sestavení do vhodné tabulky, případně načrtnutí grafu funkce, nazýváme vyšetřování průběhu funkce.“

(Bubeník & Zindulka, 2005, p. 153)

„Hlavním úkolem při vyšetřování průběhu funkce je kromě sestrojení grafu určení základních vlastností funkce“

(Hrubý & Kubát, 2002, p. 127)

„Pod úlohou najít průběh funkce rozumíme sestrojení přibližného grafu této funkce, který by dal jistou představu o jejím chování.“

(Kopáček, 2004, p. 121)

„Lze říci, že výsledkem vyšetření průběhu funkce je její graf.“

(Klíč, Turzík, Dubcová, & Kubíček, 2007, p. 104)

Vidíme, že představa o výsledku úlohy není nijak ustálená a pohybuje se mezi dvěma extrémy; od sepsání výsledku vyšetřovaných vlastností k sestrojení grafu funkce.

Dalším rozdílem v chápání úlohy je nutnost užití konkrétních nástrojů pro její řešení.

„Vyšetřování průběhu analyticky zadané funkce rozumíme určení jejích charakteristických vlastností užitím diferenciálního počtu. . . “

(Polák, 1999, p. 173)

Takto explicitně formulovaný požadavek na užití metod diferenciálního počtu je v opozici například vůči následujícímu.

„Například grafem lineární funkce. . . je přímka a stačí nám znát dva její body, které spojíme, a nemusíme více vyšetřovat. . . “

(Dvořáková, Mošna, & Němec, 2011, p. 58)

I přes rozdílná pojetí toho, co znamená vyšetřit průběh funkce, lze úlohu shrnout stejně výstižně jako vágně:

„Tato úloha žádá nalézt odpovědi na zvykově určené otázky, které souvisejí se znázorněním grafu funkce. . . Schématický náčrtek je pak podstatnou částí výsledku, neboť se velmi lehce kontroluje.“

(Veselý, 2004, p. 192)

Jak měli naznačit citace různých autorů, představa o výstupu úlohy na průběh funkce tedy není zcela jednotná. Rozdíly v přístupu jsou ale očekávatelné a logické, protože podléhají důvodům stojícím mimo rámec úlohy – zejména pak motivaci zařazení úlohy do výuky, která se v různých studijních oborech může lišit. Pro příklad uveďme ne zcela neobvyklé vynechání úlohy na průběh funkce při výuce na ekonomických oborech,³ zato ale velký důraz na vyšetřování globálních extrémů tamtéž.

Pojďme se nyní podívat na to, co přesně jsou ty „zvykově určené otázky“, o kterých mluví Veselý (2004, p. 192). To je o něco snazší úkol, protože v tom, co se má při průběhu funkce zkoumat, se autoři liší jen v míře, ve které konkrétní vlastnosti funkce zkoumají. Veselý (2004, p. 192) sám píše, že sice nelze přesně určit, co vše by mělo k vyšetřování funkce patřit, ale že v základních otázkách panuje obecná shoda.

Lze říci, že při úloze na průběh funkce se obecně očekává vyšetření

- definičního oboru a chování funkce v jeho krajních bodech
- symetrie a periodičnosti
- intervalů, na kterých je funkce kladná, resp. záporná
- intervalů spojitosti, resp. bodů nespojitosti
- monotonie funkce a jejích lokálních extrémů
- konvexnosti a konkávnosti funkce a jejích inflexních bodů
- asymptot

Dalšími méně často uváděnými vlastnostmi pro vyšetření jsou:

- omezenost a prostota

³viz tabulka 1.3 na str. 16, sloupec *průběh funkce*

- limity v bodech nespojitosti
- průsečíky s osami
- body, ve kterých neexistuje první či druhá derivace
- funkční hodnoty v lokálních extrémech a inflexních bodech
- určení rovnic tečen grafu v inflexních bodech
- obor hodnot funkce

Mimo tyto vlastnosti Nagy s Navrátilem (2001) jako jediní ze zkoumaných autorů výslovně uvádí určení všech stacionárních bodů funkce, tedy kromě lokálních extrémů také sedel. Veselý (2004) zase vyšetřované vlastnosti doplňuje o určení globálních extrémů, případně určení suprema a minima funkce.

Pro úplnost ještě uvedme, že ne všichni autoři sepisují vlastnosti, které se mají vyšetřovat. Ti, kteří tak činí, zpravidla vyšetřované vlastnosti sdružují do souvisejících celků a řadí je v posloupnost kroků, čímž vlastně formulují schéma řešení úlohy. Nezřídka takový výčet končí požadavkem na vykreslení grafu. Většina autorů také dodává, že uvedený seznam je třeba přizpůsobit konkrétní vyšetřované funkci a že jej nelze chápat doslovně, ačkoliv najdeme i autory vyznávající striktně algoritmický přístup (např. Kaňka a Malec (2012)).

Lepší představu o četnosti jednotlivých pojetí cíle úlohy a frekvence zařazení úlohy na průběh funkce získáme z tabulek 1.2 a 1.3. Tabulka 1.1, která slouží jako poklad pro tabulky 1.2 a 1.3, obsahuje plný výčet porovnávaných autorů; domnívám se, že jde o vzorek dostačující, vzhledem k tomu, že má pouze ilustrovat nejednotnost představ o tom, co úloha na průběh funkce řeší.

Kritériem pro zařazení knihy do seznamu bylo obsažení kapitol z diferenciálního počtu. Sloupec označený *průběh funkce* zobrazuje, zda je v knize

autor	průběh fce	popis	strana	cíl úlohy
Batíková et al. (2009)	ano	ano	84	graf
Bubeník & Zindulka (2005)	ano	ano	153	popis
Coufal & Línek (2010)	ne	–	–	–
Děmidovič (2003)	ano	ano	135	graf
Dvořáková et al. (2011)	ano	ano	58	graf
Hrubý & Kubát (2002)	ano	ano	127	obojí
Jankovský & Průcha (2000)	ano	ano	125	obojí
Jarník (1974)	ne	–	247	graf
Jirásek & Benda (2006)	ano	ano	269	popis
Kaňka & Malec (2012)	ano	ano	61	nespec.
Klíč et al. (2007)	ano	ano	104	graf
Klůfa & Sýkorová (2010)	ne	–	–	–
Kopáček (2004)	ano	ano	121	graf
Kopáček et al. (2005)	ano	ne	88	nespec.
Musilová & Musilová (2009)	ano	ne	123	graf
Nagy & Navrátil (2001)	ano	ano	73	nespec.
Neustupa (2008)	ano	ano	83	nespec.
Petáková (2006)	ano	–	159	graf
Polák (1999)	ano	ano	173, 189	graf
Rektorys et al. (2004)	ano	ne	379	obojí
Tkadlec (2011)	ano	ano	98	popis
Trch & Dvořáková (2010)	ne	–	–	–
Veselý (2004)	ano	ano	192	obojí
Vlasov (1958)	ano	ne	134	obojí

Tabulka 1.1: Srovnání přístupů k úloze na průběh funkce

alespoň jeden příklad na průběh funkce. *Popis* pak jestli kniha obsahuje vysvětlení, co přesně se průběhem myslí, jaké vlastnosti se mají určovat. Pokud autor neurčil – buď v textu, anebo svými výsledky – co je podle něj cílem úlohy, je uvedeno *nespec.* jako nespecifikováno; *obojí* je použito v případě, že se z formulace textu dá vyvodit, že autor považuje shrnutí vlastností i graf za stejně důležité.

Na závěr uvedme důležitou myšlenkou částečně vyplývající z diskrepance

Zařazení úlohy		
autorů	ano	ne
24	83 %	17 %

Tabulka 1.2: Četnosti zařazení úlohy na průběh funkce

Cíl úlohy				
autorů	graf	popis	obojí	nespec.
20	40 %	15 %	25 %	20 %

Tabulka 1.3: Četnosti cílů úlohy u porovnávaných autorů

přístupů autorů: jestliže není jednotná představa zadavatelů úlohy, nelze také u řešitelů automaticky předpokládat stejnou interpretaci zadání. Nesoulad mezi zadavatelem úlohy má pro nás proto praktický důsledek v tom, že zadání „Vyšetřete průběh funkce.“ je bez bližší specifikace nebo dohody nevhodné, neboť nelze s všeobecnou platností prohlásit, co je výsledek úlohy a zda tedy bylo zadání splněno či ne. K této záležitosti se znovu vrátíme v části 1.3.

1.2 Variabilita výsledků v závislosti na teorii

Zadání: „Vyšetřete vlastnost funkce,“ je obdobně neurčité jako zadání úlohy na průběh funkce. Zatímco u průběhu funkce není ustálený obsah a cíl úlohy a z toho pramení nejednotnost v pojetí a řešení úlohy, u jednotlivých vlastností rozdílnost způsobuje spíše užití odlišně formulovaných vět či definic, různá míra důkladnosti obhajoby učiněných závěrů a formální rozdíly v zápisech a vyjádřeních odpovědí.

Velké jsou také rozdíly v stylizaci zápisu průběhu vyšetřování jednotlivých vlastností; typicky narážíme buď na slovní popis výsledku nebo na uspořádání dílčích závěrů (třeba o znaménku derivací) do tabulek. Vzhledem

k předmětu této se zaměříme pouze na odlišnosti mající vliv na výsledek úlohy o průběhu funkce.

1.2.1 Intervaly monotonie, konvexnosti a konkávnosti

Porovnejme řešení úlohy na vyšetření monotonie funkce $f(x) = x \ln x$ podle tří různých autorů.

Příklad. Nalezněme maximální intervaly, ve kterých je funkce $f(x) = x \cdot \ln x$ monotónní.

Řešení. Funkce je definována intervalu $(0, \infty)$ a je na něm spojitá. ... Derivace $f'(x)$ je rovna 0 v bodě $x = e^{-1}$, je záporná na intervalu $(0, e^{-1})$ a je kladná na intervalu (e^{-1}, ∞) . Funkce $f(x) = x \cdot \ln x$ je proto klesající na intervalu $(0, e^{-1})$ a rostoucí na intervalu (e^{-1}, ∞) .

(Dvořáková, et al., 2011, p. 45)

Příklad. Určete, kde je daná funkce rostoucí a kde klesající: $f(x) = x \ln x$.

Řešení. Je $D(f) = (0, \infty)$ a $f'(x) = \ln x + 1$. Potom je $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x \in (e^{-1}, \infty)$ a $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \Leftrightarrow x \in (0, e^{-1})$. Funkce f je rostoucí v intervalu (e^{-1}, ∞) a klesající v intervalu $(0, e^{-1})$. V bodě $x = e^{-1}$ má funkce lokální minimum.

(Jankovský & Průcha, 2000, p. 106)⁴

Příklad. Máme určit intervaly monotonie dané funkce $f(x) = x \ln x$, $x \in (0, \infty)$.

⁴K učinění závěru, že v $x = e^{-1}$ je lokální minimum, chybí konstatování spojitosti v tomto bodě. Jankovský s Průchou (2000, p.72) nicméně operují s větou, která tvrdí, že má-li f v x_0 vlastní derivaci, je také v x_0 spojitá.

Řešení. Funkce $f(x) = x \ln x$ má definiční obor $D_f = (0, \infty)$. Derivaci $f'(x) = \ln x + 1$ má v každém bodě svého definičního oboru. . . . Je $f'(x) = 0$ právě tehdy, když $\ln x = -1$, tj. $x = e^{-1}$. V intervalu $(0, e^{-1})$ je $f'(x) > 0$, a tedy funkce je zde klesající. V intervalu (e^{-1}, ∞) je $f'(x) > 0$, a tedy funkce je zde rostoucí.

(Nagy & Navrátil, 2001, p. 65)

Z porovnání závěrů, zjišťujeme, že řešení úloh se liší ve způsobu, jak různí autoři ve svých výsledcích zachází se stacionárním bodem, v tomto případě s lokálním extrémem v $x = e^{-1}$. Pokud prozkoumáme, jak je v těchto konkrétních knihách vystavěná teorie, podle které se monotonie určuje, zjistíme, že problematice zahrnutí stacionárních bodů funkce do intervalů monotonie se nikdo z nich explicitně nevěnuje. Jejich zahrnutí či vynechání je důsledkem odlišné formulace věty spojující monotonii na intervalu se znaménkem derivace.

V prvním případě je zahrnutí bodu $x = e^{-1}$ možné podle věty:

Věta. Nechť je funkce $y = f(x)$ spojitá na intervalu I a má v každém jeho vnitřním bodě derivaci. Potom platí:

1. je-li $f'(x) > 0$ ve všech vnitřních bodech intervalu I , je funkce $f(x)$ rostoucí na celém intervalu I ;

...

(Dvořáková, et al., 2011, p. 45)

Vidíme, že tato věta je formulována pro jakýkoliv interval I , tedy jak pro otevřený, tak pro uzavřený. Pod touto větou autoři uvádí poznámku: „... vlastnost být rostoucí na intervalu není ekvivalentní s podmínkou mít kladnou derivaci ve vnitřních bodech intervalu.“ (Dvořáková, et al., 2011, p. 45). Tato poznámka je nutná (ale ne postačující) k přímému a nezdůvod-

ňovanému zahrnování stacionárních bodů, ve kterých nejsou lokální extrémy, tzv. sedla, a také případných vnitřních bodů intervalu, ve kterých je funkce spojitá a nemá tam derivaci, do intervalů monotonie, ačkoliv nutnost této poznámky pro toto zahrnutí není explicitně zdůrazněno a není nijak dále vysvětlováno.

V knize od Jankovského a Průchy (2000), kde při řešení není bod $x = e^{-1}$ zahrnut do intervalů monotonie, ale je řešen zvlášť jako lokální extrém, najdeme obdobnou větu i s náznakem důkazu.

Věta. Nechť funkce $f : (a, b) \rightarrow R$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) . Je-li $f'(x) > 0$, resp. $f'(x) < 0$, pro $x \in (a, b)$, je funkce f rostoucí, resp. klesající, v intervalu (a, b) .

(Jankovský & Průcha, 2000, p. 106)

Tentokrát vidíme obvyklejší podobu, věta je formulovaná pouze pro otevřené intervaly. Jelikož takto vyslovená věta neumožňuje zahrnutí stacionárních bodů do intervalů monotonie, je při její aplikaci možné užít pouze otevřených intervalů a lokální extrém $x = e^{-1}$ vynechat. Autor pak v dalších úlohách u funkcí, která mají sedla, v důsledku užití této věty užívá výhradně otevřených intervalů. Další věty, které by zahrnutí stacionárních bodů umožňovaly, uvedeny nejsou.

Nagy a Navrátil (2001), kteří zvolili psát intervaly monotonie vždy otevřené a o stacionárních bodech se nezmiňovat, považují souvislost znaménka derivace s monotonií za „pouhý“ důsledek Lagrangeovy věty. Lagrangeova věta hovoří jen o vnitřních bodech intervalu, proto zahrnutí lokálního extrému do intervalu monotonie není možné pouze na jejím základě. Lokální extrém není zmíněn zřejmě proto, že teorie pro něj je v knize uvedená až posléze, u úloh na průběh funkce již zmíněn je.

Přístupy v ostatní porovnávané literatuře jsou analogické, nejčastější je

formulovat větu o souvislosti monotonie a derivace pro otevřené intervaly a nijak nezmiňovat, proč (ne)zahrnovat krajní body těchto intervalů.

Obvyklý požadavek při tomto typu úlohy je, aby byl vzhledem k monotonii vyšetřen celý definiční obor funkce a výsledné intervaly byly maximální. Z tohoto hlediska je nezmínění bodu $x = e^{-1}$, tak, jak je to udělali Nagy a Navrátil (2001), chybou, protože nebylo u každého bodu $D(f)$ prozkoumáno, zda nepatří do intervalu monotonie. Přístup použitý Jankovským a Průchou (2000) je z tohoto hlediska korektní, protože jsou zmíněny všechny body $D(f)$. Nicméně výsledné intervaly monotonie nejsou maximální ani v jednom z těchto případů, protože do obou z nich podle definice rostoucí a klesající funkce mohl být zahrnut bod $x = e^{-1}$.

Kromě stacionárních bodů funkce, které lze do intervalů monotonie zahrnout vždy, můžeme v některých případech narazit na body funkce, ve kterých derivace neexistuje. K rozhodování, kdy a zda je lze do intervalů zahrnovat, by v případě, že souvislost znaménka derivace s monotonií funkce uvádíme obdobně jako Jankovský s Průchou (2000, p. 106) nebo jako Nagy s Navrátilem (2001), by bylo nutné teorii monotonie obohatit o další větu a důkaz.

Řešením (jiným než změně zavedení faktu způsobem ekvivalentním s výše citovanou větou Dvořákové (2011, p.45)) by například bylo formulovat a dokázat větu, že krajní bod lze do intervalu monotonie zahrnout, je-li z příslušné strany funkce spojitá.⁵ Toto tvrzení bude pro většinu kurzů nebo knih postačující, protože nejčastěji vyšetřované funkce jsou funkce elementární, které jsou vždy spojité na každém intervalu jejich definičního oboru. Pro funkce, které mají ve svém definičním oboru nějaký bod nespojitosti, by stačilo konstatovat, že stačí porovnat limitu z příslušné strany a funkční hodnotu. Tohoto konstatování můžeme ostatně využít v každém případě, třeba pokud

⁵Tuto větu lze v literatuře (výjimečně) najít – ve formě nedokázané poznámky ji konstatuje například Batíková et al. (2009, p. 79) nebo Hrubý a Kubát (2002, p. 108)).

v kurzu nebo knize teorii do takové míry nezkoumáme.

autor	monotonie	konvexnost, konkávnost
Batíková et al. (2009)	včetně	včetně
Bubeník & Zindulka (2005)	bez	včetně
Děmidovič (2003)	bez	bez
Dvořáková et al. (2011)	včetně	včetně
Hrubý & Kubát (2002)	včetně	bez
Jankovský & Průcha (2000)	bez	bez
Jarník (1974)	včetně	včetně
Jirásek & Benda (2006)	bez	–
Kaňka & Malec (2012)	včetně	včetně
Klíč et al. (2007)	bez	bez
Kopáček (2004)	včetně	bez
Kopáček et al. (2005)	včetně	včetně
Musilová & Musilová (2009)	bez	bez
Nagy & Navrátil (2001)	bez	bez
Neustupa (2008)	včetně	včetně
Petáková (2006)	včetně	–
Polák (1999)	včetně	bez
Rektorys et al. (2004)	bez	?
Tkadlec (2011)	včetně	včetně
Veselý (2004)	?	?
Vlasov (1958)	bez	bez

Tabulka 1.4: Srovnání přístupů ke krajním bodům intervalů monotonie, konvexnosti a konkávnosti

V tabulce 1.4 je vidět, že nezahrnování krajních bodů do intervalů monotonie rozhodně není neobvyklé. Nezahrnutí těchto bodů, i když by to bylo možné, není podle požadavku na maximální intervaly korektní, nicméně vyžaduje náročnější teoretický rozbor. Pro autory, kteří považují za výsledek úlohy načrtnutý graf, je navíc podobné rozhodování irelevantní, protože se neprojeví na výsledku úlohy. Tyto důvody mohou mít vliv na fakt, že je určování monotonie pouze na otevřených intervalech tolik rozšířené.

Podobným problémem jako monotonie trpí i intervaly konvexnosti a konkávnosti. Jestliže chceme krajní body do těchto intervalů zahrnovat, pak je třeba pozorně formulovat definice a věty, aby nám to umožnily.

Problém je ale pouze podobný, protože zatímco s vlastnostmi monotonie v intervalu se student setkává již na střední škole a jejich definice je ustálená, konvexnost a konkávnost se v definicích jednotlivých autorů liší. A to právě tím, jestli se tyto vlastnosti definují pouze pro otevřené, nebo pro všechny intervaly. Tudíž nelze s univerzální platností rozhodnout, zda bod podle definice do intervalu patří nebo ne, protože definice se napříč autory neshoduje.⁶

Pokud se rozhodneme konvexnost a konkávnost určovat na uzavřených intervalech, musíme v konkrétních úlohách rozhodovat o krajních bodech jednotlivě podle definice, nebo větu o souvislosti znaménka druhé derivace a konvexnosti a konkávnosti formulovat i pro uzavřené intervaly. Pro spojitě funkce (anebo alespoň spojitě z příslušných stran) to lze vždy. Situace je zde analogická té u monotonie.

V tabulce 1.4 je také ukázáno, jak se autoři jednotlivých materiálů chovají ke krajním bodům intervalů monotonie a konvexnosti, konkávnosti.

Zatímco u monotonie je zjištění autorova pohledu na věc záležitost vcelku přímočará, u intervalů konvexnosti a konkávnosti je to komplikovanější. Například v učebnici pro gymnázia (Hrubý & Kubát, 2002) se v teoretické části uvádí intervaly konvexnosti včetně krajních bodů, ale výsledky úloh pro studenty jsou vždy již bez těchto bodů. U některých autorů, např. u Veselého (2004), dokonce nelze zjistit, jestli by výsledné intervaly uvedli uzavřené nebo

⁶Veselý (2004, p. 190) k tomuto uvádí: „Vzhledem k této možné nespojitosti funkce f konvexní na uzavřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ se velmi často pracuje s konvexními funkcemi pouze na *otevřených intervalech*“. S ohledem na charakter úlohy na vyšetření průběhu funkce, kdy vyšetřujeme diferencovatelné a tedy spojitě funkce (až na případné izolované body nespojitosti), není tento důvod příliš relevantní. Může být ale důležitý pro jiné části knihy, které autor nezahrnující krajní body do intervalů konvexnosti a konkávnosti řeší.

otevřené, protože ve zvolené vzorové úloze diskutovaná situace nenastává. V takovém případě je v tabulce uveden otazník.

Pro tabulku byl vždy rozhodující tvar výsledků konkrétních úloh, neboť předpokládám, že takto by si autor představoval výsledky u svých studentů.

1.2.2 Spojitost a body nespojitosti

Pro ilustraci problému porovnejme opět různé autory, tentokrát pouze na obdobných úlohách.

Příklad (A). $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

Řešení. Daná funkce je elementární, a proto je spojitá na celém svém definičním oboru, kterým je množina $D(f) = (-\infty; 2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$

(Dvořáková, et al., 2011, p. 58)

Příklad (B). $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

Řešení. $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$... Funkce f je v $D(f)$ spojitá (jakožto podíl dvou spojitých funkcí, funkce ve jmenovateli je kromě toho v $D(f)$ různá od nuly. ...

(Neustupa, 2008, p. 83)

Příklad (C). $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-1}$

Řešení. ... $Df = \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \infty\right)$..., funkce f je lichá, ... omezíme se na část D^+f ... Funkce je spojitá na D^+f , nemá body nespojitosti, ($\frac{\sqrt{2}}{2}$ není bodem nespojitosti, neboť $\frac{\sqrt{2}}{2} \notin Df$). ...

(Bubeník & Zindulka, 2005, p. 153)

Příklad (D). $f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

Řešení. ... $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (...) Bod $x = -1$ je bodem nespojitosti... Na intervalech $(-\infty; -1)$, $(-1; \infty)$ je funkce spojitá.

(Nagy & Navrátil, 2001, p. 74)

Při zkoumání spojitosti funkce lze v zásadě odlišit dva přístupy. První, který je reprezentován úlohou A a B, se při zkoumání průběhu funkce zabývá pouze intervaly spojitosti. Tento způsob mezi zkoumanými autory mírně převládá a pro vyšetřování elementárních funkcí je plně postačující. Autoři se zde liší pouze v míře argumentace, kterou spojitost obhajují. Definice spojitosti na intervalu, dokázání spojitosti pro základní elementární funkce a věta o spojitosti součtu, rozdílu, násobení, dělení a složení spojitých funkcí jsou dostačujícím teoretickým podkladem k tomuto přístupu a v jejich aplikaci není žádný problém.

Druhý přístup kromě intervalů spojitosti řeší i body nespojitosti funkce. Zásadní rozpor, viditelný v řešeních úloh C a D, je označení resp. neoznačení bodu ležícího mimo $D(f)$ za bod nespojitosti funkce. Protože situace jsou stejné, musí alespoň jeden z autorů mýlit, nebo oba musí užívat odlišné definice.

Intuitivní chápání bodů nespojitosti, jak je vidět, studentům v rozhodování o tom, co je správně, nijak nepomůže. Je zřejmé, že v těchto bodech funkce spojitá zcela jednoznačně není, můžeme argumentovat buď tím, že funkce nemůže být spojitá v bodě, ve kterém není definovaná, nebo rozdílnými a nevlastními limitami zleva a zprava.

Problémem je nedostatečně jasná terminologie. Je bod nespojitosti funkce bod, ve kterém funkce není spojitá? Pak bychom tyto sporné body za bod nespojitosti označit mohli. Námitkou proti by mohlo být, že nemá smysl určovat spojitost funkce mimo její definiční obor. Pak bychom tyto body za body nespojitosti neoznačovali.

Rozhodující by byla jednoznačná definice,⁷ tu však uvádí pouze autoři, kteří druhy nespojitosti klasifikují.^{8 9} Z ní přímo vyplývá, že rozhodujícím kritériem o druhu nespojitosti jsou limity v daném bodě, což implikuje, že sporný bod nemusí být částí $D(f)$. Autoři, kteří mezi druhy nespojitosti nerozlišují, ale o tématu shodně mlčí.

Přímé upozornění na tento fakt ze zkoumaných autorů poskytují Nagy s Navrátilem: „... o nespojitosti funkce $f(x)$ mluvíme i v bodech, které sice nemusí patřit do definičního oboru $D(f)$, ale musí být alespoň jeho hromadnými body.“ (2001, str. 45). Hromadnými body $D(f)$ jsou i nevlastní krajní body $D(f)$, tudíž i tam má podle této definice smysl o spojitosti hovořit a tyto body označovat za body nespojitosti – což nám může a nemusí vyhovovat.

Určení bodů nespojitosti v úloze C je tedy podle definice bodů nespojitosti chybné,¹⁰ ale z vět a definic uvedených v příslušné knize to nelze zjistit.

Přehled přístupů k určování spojitosti nabízí tabulka 1.5. V ní je shrnuto, jak různí autoři přistupují ke spojitosti funkce a zda a v jaké míře jí považují za vlastnost k určování u průběhu funkce.

Ve sloupci *teorie* je uvedeno, zda autor spojitost určuje pomocí vět o skládání spojitých funkcí nebo jestli navíc zavádí i klasifikaci bodů nespojitosti. Ve sloupci *má se určovat* je vidět, zda autor považuje spojitost za vlastnost hodnou vyšetření a jakého údaje souvisejícího se spojitostí se dožaduje, zda intervalů spojitosti, bodů nespojitosti nebo obojího, což je určeno podle sou-

⁷viz str. 54

⁸Kromě Poláka (1999), ten body nespojitosti neklasifikuje, ale jejich definici uvádí.

⁹Na první pohled se klasifikace bodů nespojitosti jeví jako ustálená, ale při podrobnějším zkoumání nalzáme v definicích jednotlivých kategorií rozdíly nezanedbatelného charakteru. Protože tato práce se zabývá průběhem funkce a žádný z autorů při vyšetřování nespojitosti nevyžaduje a ani neurčuje kvalitu bodů nespojitosti, nejsou tyto odlišnosti pro nás nyní podstatné. K tématu se ještě jednou vrátíme v části 2.5.1.

¹⁰jejíž mutace se v tomto konkrétním případě jednoznačně shodují na bodu nespojitosti 2. druhu

autor	teorie	má se určovat	určuje se
Batíková et al. (2009)	věty	ne	ne
Bubeník & Zindulka (2005)	věty	obojí	obojí
Děmidovič (2003)	klasifikace	obojí	body
Dvořáková et al. (2011)	věty	ne	intervaly
Hrubý & Kubát (2002)	věty	intervaly	ne
Jankovský & Průcha (2000)	věty	obojí	intervaly
Jarník (1974)	věty	ne	ne
Jirásek & Benda (2006)	věty	body	ne
Kaňka & Malec (2012)	věty	intervaly	intervaly
Klíč et al. (2007)	věty	intervaly	intervaly
Kopáček (2004)	klasifikace	obojí	intervaly
Kopáček et al. (2005)	–	alespoň jedno	intervaly
Musilová & Musilová (2009)	–	?	ne
Nagy & Navrátil (2001)	klasifikace	body	obojí
Neustupa (2008)	věty	intervaly	intervaly
Polák (1999)	věty	obojí	obojí
Rektorys et al. (2004)	klasifikace	ne	ne
Tkadlec (2011)	klasifikace	intervaly	intervaly
Veselý (2004)	věty	ano	?
Vlasov (1958)	klasifikace	?	ne

Tabulka 1.5: Srovnání přístupů ke spojitosti

pisu vyšetřovaných funkcí, je-li v knize uveden; otazník znamená, že soupis uveden nebyl.

Ve sloupci *určuje se* je zaznamenáno, zda autor spojitost při určování průběhu funkce skutečně vyšetřuje a v jaké míře, podkladem jsou vzorové příklady uvedené v příslušné knize (otazník u Veselého (2004) znamená, že v této knize není uveden žádný vzorový příklad, ze kterého by bylo možno určit, zda by se spojitost skutečně vyšetřovala).

Při porovnání sloupců *má se určovat* a *určuje se* si lze povšimnout, že ne vždy autoři dodržují vlastní doporučení. Za zmínku také stojí, že i když je v knize zavedena klasifikace bodů nespojitosti a ve výsledcích u průběhu

funkce autoři tyto body uvádějí, nikdy nezkoumají jejich kvalitu.

Jak je vidět, téměř všechny knihy ve svém výčtu vyšetřovaných vlastností uvádějí vyšetření intervalů spojitosti, příp. bodů nespojitosti. Někteří autoři nevyžadují přímo určení bodů nespojitosti, ale *pouze* určení limit v těchto bodech. Slovo „pouze“ je zde namístě, neboť teoreticky sice určení limit v bodech nespojitosti vyžaduje určení bodů nespojitosti, prakticky to tak ale fungovat nemusí (a u některých autorů také nefunguje). U elementárních funkcí je požadavek určit body nespojitosti jaksi hlubší, než určení hodnot limit v těchto bodech, protože u těchto funkcí body nespojitosti splývají s krajními body definičního oboru, jejichž limity se určují také. Pro určení limit v bodech nespojitosti tedy u elementárních funkcí není potřeba vědět, že jde o body nespojitosti. Jejich limity jsou určeny v rámci jiné podúlohy, mezi čímž sice může být, ale v praxi nebývá, rozlišováno.

Vzhledem ke složitosti problematiky definic je vhodné termín *bod nespojitosti* používat pouze po řádném zavedení a jen tam, kde je to nutné.

1.3 Doporučení k zadávání a vyhodnocování

Pointou rozboru představ o cíli úlohy a o jisté variabilitě výsledků v závislosti na uváděné teorii je, že pokud chceme po studentech vyřešit úlohu na průběh funkce, měli bychom přesně formulovat naše představy o tom, co úloha znamená. Dále je potřeba zvážit, jakou míru porozumění konkrétním jevům vyžadujeme a podle toho volit, které vlastnosti chceme vyšetřit a v jaké míře. Také bychom měli mít jistotu, že k tomu studentům poskytujeme dostatečný teoretický aparát.

Volba cíle úlohy a míry vyšetřování jednotlivých vlastností by mohla záviset například na:

- didaktických cílech úlohy – zejména na motivaci zařazení úlohy do výuky. Měli bychom mít rozmyšleno, čeho chceme zařazením úlohy dosáhnout, resp. co přesně chceme testovat. Jestli nám například jde pouze o základní porozumění aplikacím diferenciálního počtu a schopnost interpretovat dílčí výsledky v komplexnější odpověď nebo spíše o hlubší porozumění teoretickým souvislostem, schopnost analýzy úskalí konkrétní úlohy a volby vhodného nástroje.
- širším kontextu výuky – tj. na faktu, zda se studenti s úlohou setkají v jiných předmětech, v jaké souvislosti a jaké části z ní proto budou nejvíce potřebovat.
- náročnosti výuky a zdatnosti řešitelů – hloubka vyšetřování by měla odpovídat hloubce, s jakou byla probrána související teorie. U obojího je vhodné mít na zřeteli ideální výstupní úroveň studentů.

Poté, co si rozmyslíme, jaký obsah a výsledek úlohy na vyšetření průběhu funkce nejlépe prospěje našim výukovým cílům, věnujme ještě pozornost tomu, aby i řešitelé měli jasno, co pro ně úloha obnáší. Počítejme s tím, že student či čtenář přišel do styku i s jiným přístupem k úloze než s naším vlastním.

Chceme-li se vyhnout nepochopení, snažme se na místech, kde na tom obzvláště záleží (například v testu), zadání úlohy formulovat přesně. Například:

- je-li cílem graf i soupis vlastností: Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{1}{x^2} + x$. Sestrojte graf a rozhodněte o: (*seznam vyžadovaných vlastností*).
- je-li cílem graf: Sestrojte graf funkce $y = \frac{1}{x^2} + x$ v závislosti na výsledcích vyšetření jejích vlastností.

- je-li cílem soupis vlastností: Určete (*seznam vyžadovaných vlastností*) funkce $y = \frac{1}{x^2} + x$.

V literatuře nebo v kurzech jsou obvyklé dohody o tom, co přesně pod kterým termínem budeme rozumět. Doporučuji tedy jasně uvést, co v našem konkrétním užití znamená sousloví *průběh funkce*, tj. které vlastnosti vyžadujeme vyšetřit, v jakém případě a do jaké míry.

Rozdílné chápání úlohy je třeba vést v patrnosti zejména při tvorbě podkladů pro výuku a při zadávání testových úloh. Pokud není v knize nebo kurzu učiněna dohoda, co přesně *průběh funkce* znamená, je volba vyšetřovaných vlastností a míra jejich zkoumání ponechána zcela na úsudku a zkušenosti konkrétního řešitele.

Z didaktického hlediska jde o velmi nevhodnou situaci. Řešení takto nejednoznačně zadané úlohy nelze objektivně posuzovat, protože představa řešitele a zadavatele o průběhu funkce se může zásadně lišit a bez explicitní formulace, co průběh funkce znamená, nelze rozhodnout, či představa je správná. Dále zde chybí nutné podklady pro vyhodnocení, kdy je úloha vyřešena částečně, zcela, nebo vůbec.

Vzhledem k nejednotnosti přístupu různých autorů se v tomto případě nelze odvolávat ani na nějakou obecně uznávanou představu o tom, co tato úloha znamená a co si pod ní měl řešitel představit. Pokud tedy například požadujeme vyšetření asymptot grafu funkce a toto studentům nesdělíme, je jejich neuvedení v konkrétním řešení chybou naší stejně jako jejich.

Zatímco jednoznačné zadání úlohy na průběh funkce (ve smyslu obecného popisu požadovaného výstupu) je v zásadě otázkou přesné formulace požadavků a jejich předání řešitelům, problematika vyhodnocování úlohy zdaleka tak přímočará není.

Hodnocení závažnosti chyby, ale i pojetí chyby obecně, je závislé na osobě

hodnotitele, zejména na jeho zkušenostech, vzhledu do problematiky a osobních preferencích, což de facto znemožňuje objektivní posuzování chyby.

Výhodou matematiky oproti jiným vědám je v tomto případě jednak možnost odvolání se na jednoznačné definice a věty, ale zejména možnost logické argumentace, jejíž správnost či chybnost je bezesporná. Pilous ve své definici (*vnější*) chyby píše: „... v matematice je správnost dána objektivně definovanou a nezávisle ověřitelnou logickou správností.“ (2014, p. 12).

Pokud toto přijmeme, stane se například nepřipustným hodnotit jako chybu zahrnutí stacionárních bodů spojitě funkce do intervalů monotonie, i když v kurzu zásadně vyšetřujeme monotonii pouze na otevřených intervalech. To proto, že podle obecně uznávané definice¹¹ zahrnutí těchto bodů možné je a definice má (nebo by měla mít) vyšší argumentační hodnotu než naše dohoda, zejména pokud sami definici neuvádíme a odvoláváme se na obecně známá fakta.

Opravnující výjimkou by mohlo být uvedení a důsledné užívání *odlišné* definice,¹² přičemž můžeme definovaný pojem rozšířit, zúžit, nebo redefinovat. Rozšíření definice zachovává množinu objektů, kterých se původní definice týkala, a přidává do ní objekty další, zúžení naopak množinu objektů zmenšuje. Může nastat ještě třetí situace – redefinice pojmu, která do množiny objektů definovaných původní definicí redefinice pojmu prvky jak přidává, tak odebírá.¹³

V pojmech týkající se vyšetření průběhu funkce můžeme u porovnávání

¹¹Říkáme, že funkce je rostoucí v intervalu I , právě když pro všechna $x_1, x_2 \in I$ platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$.

¹²odlišné ve významu důsledku, nikoliv formulace, tj. nemluvíme o odlišně artikulované ekvivalentní definici

¹³Je zřejmé, že takto popsané vztahy mezi různými definicemi jsou vzájemné a k určení změny je nutné prohlásit nějakou definici za *původní*, *standardní* či alespoň *obvyklejší*. Jak bylo konstatováno v úvodu této kapitoly, tato označení jsou problematická a jejich užití v této práci se řídí tam popsanou úmluvou.

autorů pozorovat rozšíření a zúžení některých definic, redefinice pojmu se ve zkoumané literatuře nevyskytuje.

Rozšíření definice můžeme pozorovat u pojmu *bod odstranitelné nespojitosti*. Obvyklé, či spíše jen obvyklejší, je definovat tento pojem ekvivalentně s Vlasovem (1958, p. 99): „*Bod odstranitelné nespojitosti* je charakterisován tím, že funkce v něm není definována, avšak existuje v něm konečná limita funkce zprava a konečná limita funkce zleva a obě tyto limity jsou si rovny.“ Kopáček (2004, p. 83) tento pojem rozšířil takto:

Definice (3.21). Necht' funkce f je definována na $P(a)$. Řekneme, že má v bodě a *odstranitelnou nespojitost*, jestliže existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Kopáček nevyžaduje nedefinovanost f v a a absencí tohoto požadavku rozšířil tento pojem i na body, ve kterých je funkce definovaná, ba dokonce i na ty, ve kterých je spojitá, což je vzhledem k užití termínu *bod nespojitosti* nešťastné, byť ne chybné.¹⁴

Za příklad zúžení můžeme uvést definici funkce konvexní na intervalu, srovnajme lehce převládající definici tohoto pojmu (zde konkrétně podle Hrubého & Kubáta, (2002, p. 119):

¹⁴Protože definice pojmů jsou arbitrární, nelze žádné jejich podoby označit za chybné. Lze ale posuzovat jejich vhodnost, resp. míru vhodnosti, vzhledem k sémantickému významu slov označujících pojem a vzhledem k ostatní související teorii. Z tohoto hlediska se Kopáčková definice bodu (odstranitelné) *nespojivosti* jeví jako nevhodná, neboť za bod nespojitosti označuje i body, ve kterých je funkce *spojitá*.

Dalším hodnotícím kritériem vhodnosti definice může být obvyklost, což lze pěkně pozorovat např. u pojmu stacionární bod. Standardně se tímto pojmem označují body, ve kterých je derivace nulová; činí tak všichni porovnávání autoři. Na Wikipedii jsou ale takto označeny i body, ve kterých derivace neexistuje, což je vzhledem k ustálenosti úzu nevhodné a může to vyvolávat dojem chybnosti.

I přes neexistenci rozhodovacích podkladů pro označování definic za správné či chybné, s tímto hodnocením v této souvislosti můžeme setkat. Za důležité kritérium takové „správnosti“ definice se pak užívá autorita osoby, která jí formulovala. To lze usuzovat z toho, že při hodnocení testů někteří hodnotitelé označují odlišně formulované definice za chybné. Obdobně k tomu přistupují i studenti, kteří se typicky při setkání s různými definicemi stejného pojmu snaží odhadnout, kterou by za správnou považoval jejich přednášející.

Definice. Funkce se nazývá **konvexní** v intervalu I , právě když pro libovolná čísla $x_1, x_2, x_3 \in I$, která splňují nerovnost $x_1 < x_2 < x_3$ platí, že bod $[x_2; f(x_2)]$ leží pod přímkou procházející body $[x_1; f(x_1)]$, $[x_3; f(x_3)]$ nebo na ní.

s touto definicí Jankovského a Průchy (2000, p. 119):

Definice. Nechť funkce $f : (a; b) \rightarrow \mathcal{R}$ má derivaci v intervalu (a, b) . Říkáme, že funkce f je *konvexní*, resp. *konkávní* v intervalu (a, b) , jestliže platí: Pro každý bod $x_0 \in (a, b)$ jsou všechny body $\{[x, f(x)]; x \in (a, b), x \neq x_0\}$ *nad tečnou*, resp. *pod tečnou* ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

První definice konvexnosti se týká i uzavřených intervalů, ta druhá nikoliv. Jde tedy o zúžení definice pojmu *funkce konvexní na intervalu*.¹⁵

Pokud se rozhodneme odlišnou definici užívat, je předem vhodné uvážit, zda její přínos výuce je natolik velký, aby takové zavedení obhájil, a také je vhodné upozornit na charakter odlišnosti.

Kromě situací, kdy z nějakého důvodu zavádíme odlišnou definici ustáleného pojmu, můžeme narazit na termíny, u kterých neexistuje široce užívaná jednotná definice. I zde můžeme rozlišit definice širší a užší, nelze již ale rozhodnout o tom, která z nich je obecně uznávaná a která se od standardní odchyluje.

V situacích, kdy se definice užívané zadavatelem liší od těch užívaných řešitelem, nebývá jiný výsledek vyplývající z užití těchto definic do všech jejich důsledků (jsou-li samozřejmě užity korektně) chybou vyplývající z neznalosti problematiky, ale následkem užití jiných standardů. Zde pak závisí na úsudku hodnotitele, zda tuto situaci rozpozná (pokud ji vůbec chce rozpoznat) a jak toto nedodržení dohodnutých konvencí vyhodnotí.

¹⁵Další zajímavostí druhé definice je podmínka existence derivace. To není obvyklé ani u jiných definic konvexnosti, které se také omezují na otevřené intervaly, a v popisovaném srovnání to ještě více zužuje množinu funkcí a intervalů, na které jde tuto definici aplikovat.

Z hlediska vyhodnocování úlohy na průběh funkce není velký rozdíl mezi tím, zda jsou naše definice rozšířením, zúžením, nebo redefinicí vůči těm použitým řešiteli. Použití jiné definice než naší může v obou případech vést (a zhusta také vede) k závěrům, které jako hodnotitelé můžeme vyhodnotit jako chybné – je-li naše definice rozšířením vůči definici užívané studentem, nebude jeho odpověď pro nás úplná; pokud jsme pojem z jeho pohledu zúžili, může řešitel pojem vztahovat i k jiným objektům a být tedy ve sporu s naší definicí, jestliže došlo k úplné změně pojmu, redefinici, bude to při aplikaci působit jako zcela chybné pochopení pojmu.

Protože hodnocení závažnosti chyby je závislé na interpretaci chyby hodnotitelem a závisí i na jiných než na externě objektivních faktorech, nelze s obecnou platností říct, která ze situací je závažnější.

V situacích, kdy student užívá odlišnou definici, která vede na jiné, z našeho pohledu chybné, řešení, existuje tendence rozlišovat, jestli toto jednání vede k redukci složitosti uvažované situace (např. jeden krajní bod intervalu konvexnosti zahrnout šel a druhý ne, přičemž student pro konvexnost a konkávnost užívá vždy pouze otevřených intervalů).

Takový důsledek užití jiných konvencí bývá hodnocen přísněji. Svou roli zde jistě hraje i fakt, že při malém vzorku úloh, na kterém můžeme pozorovat přístup konkrétního řešitele, nemusí být zřejmé, zda toto užití užších definic je nevědomé, tj. řešitel postupuje ve shodě s plně pochopenými definicemi, které jsou od těch našich odlišné, nebo jde o chybu z nepochopení našich definic, která se v konkrétních úlohách shodou okolností projevuje jako jiný standard. Další možností by bylo záměrné užití odlišných konvencí, kterými si řešitel vědomě situaci zjednodušil využívaje různých přístupů k problematice; lze ale předpokládat, že tento důvod chyby je velmi nepravděpodobný.

U některých vlastností navíc ani nelze ze zápisu řešení zjistit, zda byla

odlišná definice užita, neboť množina objektů, na kterou by se širší definice vztahovala splývá s množinami objektů s jinou vlastností (u průběhu funkce typicky body nespojitosti a krajní body definičního oboru a požadavek na určení limit ve všech těchto bodech). Pokud řešitel sám v řešení neoznačí, do které množiny konkrétní objekt spadá (ne každý zadavatel toto požaduje), hodnotitel nemůže zjistit, zda k nějakému porušení definice došlo. V takovém případě užití jiné definice ani nemůže být hodnoceno jako chybné, a studentovi toto porušení standardů „projde“.

Jako korektní řešení této problematiky se jeví upozornit na nejednotný diskurz, na naši definici nebo dohodu a na případné důsledky užití odlišného standardu. Pokud jde o užití konvencí, které problematiku řeší hlouběji než naše dohodnuté, doporučuji nehodnotit je jako chybné, nicméně trvat na jejich správné aplikaci, tj. brát za chybné jejich nedodržení resp. porušení, i kdyby při užití námi dohodnutých konvencí o chybu nešlo (např. opět nezahrnutí inflexního bodu spojitě funkce do intervalů konvexnosti a konkávnosti).

U určování intervalů spojitosti a bodů nespojitosti funkce doporučuji předem uvážit, jestli se studenti v našich případech vůbec setkají s nějakou nespojitou funkcí. Jestliže budeme vyšetřovat pouze elementární funkce, je zbytečné zavádět klasifikaci bodů nespojitosti a do vyšetřovaných vlastností u průběhů funkce zahrnovat určování bodů nespojitosti, resp. limit v bodech nespojitosti, resp. limit v bodech, ve kterých funkce není spojitá. Pro elementární funkce tyto body vždy splývají s okraji definičního oboru, který včetně limit na jeho okrajích zkoumají všichni autoři a není třeba studenty mást dalším, poměrně problematicky definovaným termínem, jakým je bod nespojitosti.

Pokud zkoumání bodů nespojitosti nepovažujete za přínosné a nezavádíte

klasifikaci bodů nespojitosti, vyhněte se hodnocení (ne)uvedení bodů odstranitelné nespojitosti a nespojitosti 2. druhu jako chyby, opět s odvoláním na příslušné definice a jejich (ne)uvádění.

Všechna doporučení ohledně zadávání a vyhodnocování úlohy lze shrnout do těchto tipů:

- Rozmyslete si, proč úlohu na průběh funkce do výuky zařazujete, čím je její řešení studentům a výuce prospěšné; v návaznosti na tyto úvahy si stanovte co chcete v kurzu nebo knize na ukazovat či ověřovat. Je například rozdíl mezi vhodnou úlohou zadanou studentům matematiky za účelem testování pochopení omezení užití některých vět a úlohou vybranou pro gymnazisty k demonstraci souvislosti výsledků diferenciálního počtu s tvarem grafu vyšetřované funkce. V prvním případě je vhodná funkce s mnoha problematickými body, např. body nespojitosti různých druhů, body neexistující nebo nevlastní derivace apod. V druhém případě je naopak vhodné vybírat funkci jednoduchou, s takovou první a druhou derivací, u kterých lze snadno určit jejich nulové body, a která má např. šikmou asymptotu.
- Zvažte ideální úroveň náročnosti výstupních úloh, do úvah zahrňte i úroveň řešitelů. Požadovaná náročnost by měla odpovídat šíři výkladu.
- Zohledněte hloubku probrání související teorie. Jestliže v teorii probíráte věty související s vlastnostmi funkce, hodí se, aby se tyto vlastnosti také vyšetřovaly. Pro vzorově řešené úlohy na průběh funkce je také vhodné vybrat takové funkce, u kterých je takové vyšetřování relevantní. Pro studenty bývá matoucí, pokud mají vyšetřovat průběh funkce včetně např. konvexnosti a konkávnosti a v knize nebo v kurzu

jsou jako vzorové vybrané jen ty funkce, které jsou např. konvexní na celém svém definičním oboru.

- Buďte konzistentní v užívání definic, vět, argumentaci a míře vyšetřování. Dodržujte vlastní definice a vybudovanou teorii – např. jestliže nějaký fakt není možno odvodit z uváděné teorie, nekonstatujte ho. Pokud uvádíte přesný výčet vyšetřovaných vlastností, držte se ho i ve vzorových příkladech. U vlastností, u kterých je pravděpodobné, že student může narazit na odlišný přístup, je vhodné upozornit na ne-jednotnost diskurzu.
- Úlohu zadávejte precizně, vyhněte se formulacím s nejasným významem – zejména tam, kde by odlišné porozumění zadání mělo vliv na hodnocení.
- Rozlišujte mezi chybou z neznalosti a užitím jiných standardů. Jestliže považujete své standardy za závazné, upozorněte na to. Studenti při probírání nové látky zpravidla nebývají schopni rozlišit mezi správným, dohodnutým a doporučeným. Není matematicky účelné a didakticky vhodné, aby takováto „chybnost“ užití jiných standardů při řešení úlohy byla deklarována post factum a obhajována pouze autoritou zadavatele.

Některá z doporučení se možná jeví banálně, nicméně z rozboru literatury a z osobní zkušenosti se vzorovými úlohami předváděnými různými cvičícími a s hodnocením testových úloh různými hodnotiteli je zřejmé, že lze ke každému bodu nalézt alespoň jednoho zadavatele úlohy, autora či hodnotitele, který se ho nedrží.

Kapitola 2

Parametry úlohy na průběh funkce a jejich konstrukce

V této kapitole projdeme všechny vyšetřované vlastnosti zvlášť a to zejména, ale ne výlučně, z konstrukčního hlediska. Každá část začíná nutnými definicemi pojmů týkajících se diskutované vlastnosti a definicemi termínů používaných při konstrukci funkce s touto vlastností.

Prvním cílem této kapitoly je navrhnout způsoby jak konstruovat jednotlivé stavy vlastností s ohledem na to, že chceme konstruovat funkci nejen jednoho stavu jedné vlastnosti, ale pokud možno funkci o kombinaci mnoha stavů různých vlastností a také na to, že sestrojujeme funkci, která slouží didaktickým cílům a tudíž by měla přiměřeně náročná na vyšetření. Součástí popisu možných konstrukcí jsou tedy i poznámky o praktické použitelnosti popisovaných konstrukčních metod.

Druhým cílem je zmapování vzájemných závislostí stavů jednotlivých vlastností. Protože mezi mnoha stavy různých vlastností není výjimkou příčinná souvislost jedním i oběma směry, nevyhneme se při popisu těchto souvislostí užívání termínů, které jsou v textu definovány až později. V místech,

kde by to mohlo způsobit nejasnost, je pak umístěna poznámka s odkazem na příslušnou definici.

Vzhledem k charakteru kapitoly (rozdělení podle jednotlivých vlastností) jsou zde také zmíněny některé postřehy nekonstrukčního charakteru, které se svou podstatou nehodily do první kapitoly, protože u nich mezi autory nedochází k rozporu.

2.1 Definiční obor funkce

Definice (Funkce, definiční obor funkce, obor hodnot funkce). Říkáme, že zobrazení f množiny A na množinu B je *reálná funkce jedné reálné proměnné* (dále jen *funkce*), jestliže platí, že $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Množinu A nazýváme *definičním oborem* funkce f a značíme ji $D(f)$; množinu B nazýváme *oborem hodnot* a značíme ji $H(f)$.

Pro účely této práce zadefinujeme ještě navíc pojmy:

Definice (Základní funkce). Funkci nazveme *základní*, je-li dána některým z těchto předpisů: x^n , $n \in \mathbb{Z}$; $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$; a^x , $a \in \mathbb{R}^+$, $\log_a x$, $a \in \mathbb{R}^+$; $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

Definice (Restrikce funkce, zúžený definiční obor). Říkáme, že funkce g je *restrikce funkce* f , platí-li $D(g) \subset D(f)$ a zároveň pro všechna $x \in D(g)$ platí $f(x) = g(x)$. Značíme také $f|_M$ a čteme: restrikce f na množinu $M \subset D(f)$. O změně z f na $f|_M$ hovoříme jako o *zúžení definičního oboru*.

Definice (Krajní bod definičního oboru¹). Říkáme, že bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$ je *krajním bodem definičního oboru* funkce f , je-li hraničním bodem množiny $D(f)$ vzhledem k $\mathbb{R}^*$.

¹Tato definice je pouhé přejmenování termínu hraniční bod pro efektivnější komunikaci a zdůraznění souvislosti s termínem *krajní bod intervalu*.

Definice (Vlastní a nevlastní krajní bod definičního oboru).² Říkáme, že krajní bod definičního oboru funkce f $x_0 \in \mathbb{R}$ je *vlastním krajním bodem* $D(f)$, pokud $x_0 \in D(f)$. Jestliže $x_0 \notin D(f)$, pak x_0 nazveme *nevlastním krajním bodem* $D(f)$. Případné krajní body definičního oboru $x_0 \in \{\pm\infty\}$ považujeme za nevlastní krajní body $D(f)$.

Definice (Definiční obor symetrický podle počátku). Říkáme, že definiční obor funkce f je *symetrický podle počátku*, pokud $\forall x_0 \in D(f) : -x_0 \in D(f)$.

Tyto definice zavádíme kvůli efektivnějšímu a názornějšímu popisu jiných vlastností a jejich konstrukcí; využijeme je zejména v dalších částech kapitoly.

Definiční obor funkce je nedílnou součástí jejího zadání a proto se u jeho určování může diskutovat, zda se jedná o *vyšetření vlastnosti* funkce, nebo o *doplnění jejího zadání*; zpravidla podle (v některých textech a kurzech možná nevyřčené) úmluvy podobné této: „Není-li v zadání funkce uveden definiční obor, pak za definiční obor považujeme všechna reálná čísla, pro která má příslušný funkční předpis smysl.“ (Dvořáková et al., 2011).

U úlohy na vyšetření průběhu funkce je ale v případě definičního oboru rozdíl mezi vyšetřením vlastnosti a doplněním zadání rozdílem pouze sémantickým, neboť k vyšetření dalších vlastností (třeba monotonie) je nutné definiční obor funkce znát, což vynucuje jeho určení, i kdybychom ho za vlastnost funkce nepovažovali.

Tento rozdíl ale způsobuje, že definiční obor jako jediná oblast vyšetřování může být uveden v zadání úlohy. Ve skriptech pro fakultu dopravní ČVUT můžeme doslova číst: „Určíme definiční obor funkce, není-li s analytickým předpisem pro funkci již zadán.“ (Nagy & Navrátil, 2001, p. 73). V této

²Zvolená terminologie může být matoucí vzhledem k termínu *nevlastní bod* pro označení bodů $\pm\infty$, vychází ale z označení pro bod, který je součástí množiny, tj. je množině vlastní, se kterým jsem se setkala v některých přednáškách.

knize jsou také všechny úlohy zadávané i s (maximálním) definičním oborem, což není obvyklé a kromě této knihy to ze zkoumaných autorů dělá pouze Kopáček (2004, p. 122).

Vhodnou formulací lze vyhovět požadavku plného zadání funkce i bez explicitního zadání jejího definičního oboru, což může být užitečné, chceme-li funkci zadat zcela korektně a zároveň chceme určení definičního oboru ponechat řešitelům; příkladem budiž například formulace: „Funkce f je dána předpisem $y = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která má pravá strana smysl.“³

Pokud je součástí zadání úlohy definiční obor vyšetřované funkce, nemusí se vždy jednat o maximální definiční obor. Některé úlohy může být z různých důvodů vhodné vyšetřovat na zúžených⁴ definičních oborech. S tímto se můžeme například setkat v učebnici diferenciálního počtu pro gymnázia (Hrubý & Kubát, 2002, p. 134) u úloh obsahujících goniometrické funkce. U Kaňky a Malce (2012, p. 65) zase ve vzorové úloze vyšetřují průběh funkce $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ v intervalu $\langle 0, 3 \rangle$. Zúžení definičního oboru ve stejných situacích lze nalézt i u úloh zadaných Petákovou (2006, p. 159).

Lze odhadovat, že důvodem k zúžení definičního oboru u funkcí obsahujících goniometrické funkce je snaha zjednodušit řešitelům vyšetřování periodických funkcí – definiční obor je v těchto případech zúžen právě na jednu periodu konkrétní funkce.

Poněkud umělejší zúžení u polynomických funkcí nejspíše souvisí se slovními úlohami na průběh funkce, resp. jejich podmnožinou – úlohami extrémními, které obě knihy obsahují a které lze považovat za aplikační úlohy průběhu funkce. Zúžením $D(f)$ do úlohy přidáváme (nebo z ní ubíráme) body podezřelé z globálního extrému. Zúžením také můžeme simulovat omezení vy-

³Tato formulace byla převzata ze zápočtového testu k předmětu Matematická analýza II (kód OB2310N004) v letním semestru 2016/2017 na PedF UK, autorství Mgr. Derek Pilous, Ph.D., získáno z <http://www.cynyc.net/PedF/MA%20II/Reseni/170627.pdf>

⁴viz definice na str. 39

plývající z podstaty slovní úlohy; například v typické extrémální úloze: „Jaký z rovnoramenných trojúhelníků má při daném obvodu největší obsah?“ je definiční obor funkce počítající obsah v závislosti na délce základny přirozeně omezen na $(0; \frac{\rho}{2})$.

Zúžení definičního oboru lze realizovat i bez explicitního určení $D(f)$, což může být vhodné, jestliže nechceme nebo nemůžeme (třeba z důvodů zachování skladby testovaných dovedností napříč testy nebo kvůli srovnatelnosti náročnosti úloh) řešitele ochudit o jeho určování. Jako příklad takového přístupu můžeme uvést zadání:

Příklad. Určete definiční obor D_f funkce f a vyšetřete průběh funkce na množině $D_f \cap \langle -\pi; \pi \rangle$ $f(x) = \operatorname{tg} x + 3 \cotg x$.⁵

Tento způsob zadávání zúžení $D(f)$ nicméně není nijak rozšířený, v žádné z porovnávaných knih se nevyskytuje. Jeho přínosem je přetrvávající nutnost stanovení definičního oboru při zachování výhod zúžení pro danou funkci.

U úloh na průběh funkce nebývá definiční obor v těžišti zájmu. Jeho podobu lze chápat jako důsledek použití funkcí, které jsme zvolili na základě jiných, z hlediska úlohy zajímavějších vlastností – zejména parity a periodicity (viz 2.2 a 2.3), existenci asymptot (viz 2.8) a spojitosti (viz 2.5). Vliv těchto vlastností na definiční obor je popsán v příslušných kapitolách. Protože definiční obor funkce vyplývá z jiných požadovaných vlastností konstruované úlohy, nebudeme se zde konstrukcí funkce o daném definičním oboru zabývat.⁶

⁵Pro tento konkrétní příklad nelze dohledat oficiální písemný nebo elektronický zdroj, jedná se o příklad ze zápočtového testu k předmětu Matematika I (kód 522M1) v zimním semestru 2016/2017 na FA ČVUT, který mi byl ukázán tamějšími studenty. Autorství formulace úlohy pravděpodobně připadá RNDr. Hájkové, rok 2016.

⁶Téma konstrukce (elementární) funkce o daném definičním oboru dobře zpracoval ve své práci Vitásek (2012).

2.2 Parita funkce

Definice (Sudá funkce). Říkáme, že funkce je *sudá*, pokud pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(-x)$.

Definice (Lichá funkce). Říkáme, že funkce je *lichá*, pokud pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) = -f(-x)$.

Zavedme ještě definice, které nám usnadní popis určitých konstrukcí.

Definice (Lineární transformace grafu funkce). Říkáme, že na grafu funkce f provádíme *lineární transformaci*, jestliže skládáme funkci f s lineární funkcí g . Skládáme-li $f \circ g$, hovoříme transformaci *argumentu*, v případě $g \circ f$ jde o transformaci *předpisu*.

Speciálně rozlišujeme tyto: lineární transformace: *překlopení* pro $g : y = -x$, *posunutí* pro $g : y = x + p$, $p \in \mathbb{R}$ a *kontrakci* či *dilataci* pro $g : y = ax$, $a \in (0; \infty)$.

Definice (Transformace zrcadlení). Říkáme, že na grafu funkce f provádíme transformaci *zrcadlení*, jestliže skládáme funkci f s funkcí $g : y = |x|$. Skládáme-li $f \circ g$, hovoříme zrcadlení *podle osy y*, v případě $g \circ f$ jde o zrcadlení *podle osy x*.

Definice (Transformace převrácená hodnota). Říkáme, že na grafu funkce f provádíme transformaci *převrácená hodnota*, jestliže skládáme funkci f s funkcí $g : y = \frac{1}{x}$. Skládáme-li $f \circ g$, hovoříme o převrácení *obrazů*, v případě $g \circ f$ jde o převrácení *vzorů*.

Zkoumání parity funkce bývá typicky⁷ jednou z prvních vlastností, kterou při řešení průběhu funkce řešitel určuje. Ve vzorových příkladech bývá

⁷na základě analýzy vzorových řešení porovnávaných autorů

obvyklé paritu nebo její absenci pouze konstatovat bez podání formálního důkazu nebo náznaku výpočtu. Lze narazit i přístup paritu nezmiňovat v případech, kdy vyšetřovaná funkce není sudá ani lichá; např. u Jankovského a Průchy (2000, pp. 125–133).

Z hlediska úlohy na průběh funkce je parita vlastností nejen popisnou, ale i přínosnou pro řešení úlohy; zásadní je zejména její geometrický důsledek, to jest symetrie grafu funkce podle osy y pro sudé a podle počátku pro liché funkce.

Parita funkce tedy umožňuje omezit vyšetřování jejího průběhu pouze na část definičního oboru, typicky na $D(f) \cup \langle 0; \infty \rangle$, což u některých funkcí může snížit časovou náročnost řešení úlohy, například v případě, že funkce má mnoho lokálních extrémů, u kterých je třeba stanovit funkční hodnoty, bodů nespojitosti, u kterých je nutno určit limity nebo máme-li například určovat rovnice tečen v inflexních bodech. Pracnost řešení se typicky snižuje použitím vztahů mezi paritou a ostatními vlastnostmi, viz část 2.2.2.

Další výhodou sudých a lichých funkcí je možnost částečně anticipovat nebo kontrolovat závěry učiněné pro jiné vlastnosti.

2.2.1 Konstrukce sudé a liché funkce

Sestrojení sudé nebo liché funkce není nijak komplikované a lze využít těchto tvrzení:

Věta. Necht' funkce f a g jsou sudé. Pak i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a $\frac{f}{g}$ jsou sudé. Necht' funkce f a g jsou liché. Pak funkce $f \pm g$ jsou liché a funkce $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ jsou funkce sudé.

Věta. Necht' f je sudá a g je lichá funkce. Pak funkce $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ jsou funkce liché.

Necht f je sudá a není lichá a g je lichá a není sudá. Pak funkce $f \pm g$ nemají paritu.

Tato tvrzení jsou dobře známá a jejich dokazování je běžně zadáváno studentům jako cvičení.

Kromě těchto vět lze využít i vztahů pro skládání.

Věta. Necht f je sudá funkce. Pak funkce $g \circ f$ je také sudá.

Věta. Necht f je lichá funkce. Pak parita funkce $g \circ f$ odpovídá paritě funkce g na $D(f) \cap D(g)$. Není-li g na této množině ani sudá ani lichá, pak funkce $g \circ f$ také nemá paritu.

V praxi je vytvoření sudé a liché funkce limitováno základními⁸ funkcemi s touto vlastností. Sudými jsou konstantní funkce, mocninné funkce se sudým celočíselným exponentem a funkce cosinus. Základními lichými funkcemi jsou všechny mocninné funkce s lichým celočíselným exponentem, funkce sinus, tangens, cotangens, arcus sinus a arcus tangens a z neelementárních funkcí využívaných v této práci také funkce signum.

U úlohy na průběh funkce je navíc dalším omezujícím požadavkem řešitelnost určení nulových bodů 1. a 2. derivace, který v důsledku ještě více snižuje možný počet užitých funkcí a funkčních operací.

Pokud máme na vytvářenou funkci více požadavků než jen paritu, musíme také hlídat, abychom nějakou konstrukcí tyto vlastnosti neznemožnili nebo nepoškodili. Z jednodušších konstrukcí, často souhrnně nazývaných transformace grafu funkce, nezmění sudost: kontrakce a dilatace, překlopení, zrcadlení, převrácená hodnota a posunutí předpisu. Transformací, která sudost nezachovává, je pak posunutí argumentu, vyjma speciálních případů jako je posunutí periodické funkce o půlku její libovolné periody. Lichost funkce

⁸viz definice na str. 39

je vždy invariantní vůči kontrakci a dilataci, překlopení, převrácené hodnotě; vlastnost není zachována při užití zrcadlení a posunutí, opět kromě speciálních případů. Transformace zrcadlení vzhledem k ose y je užitečným konstrukčním způsobem, jak vytvořit z libovolné funkce sudou.

Věta (Konstrukce sudé funkce pomocí zrcadlení). Nechť f je libovolná funkce daná předpisem $f : y = f(x)$. Pak funkce $g = f(|x|)$ je sudá.

Tato konstrukce není novým způsobem, jak funkci sudou vytvořit, ve skutečnosti jde o pouhý důsledek věty o složení s vnitřní sudou funkcí. Pro četnost užití a svou jednoduchost je vhodné tuto konstrukci diskutovat zvlášť.

Zásadní výhodou této konstrukce je zachování průběhu funkce na množině $D(f) \cup \langle 0; \infty \rangle$. Nevýhodou této konstrukce by mohlo být použití absolutní hodnoty, čemuž se někteří zadavatelé úlohy z rozumných důvodů vyhýbají. Hlavním důvodem, proč neužívat absolutní hodnotu, je nutnost zavést derivaci této funkce a z toho vyplývající potřeba zavedení funkce signum. Užití funkce absolutní hodnota se lze vyhnout ekvivalencí $|x| = \sqrt{x^2}$. Funkce $y = \sqrt{x^2}$ se derivuje podle pravidel derivace složené funkce, jde tedy o určité zjednodušení, byť pouze formální – problémem této náhrady jsou vyšší nároky na erudici řešitele v úpravě výrazů.

2.2.2 Vliv parity na ostatní vlastnosti funkce

Parita funkce má vliv i na další vlastnosti, resp. jejich rozložení v $D(f)$, a tento vliv není složité vysledovat ze souměrností grafů sudých a lichých funkcí.

Důležitým důsledkem, resp. spíše nutnou podmínkou parity funkce je symetrie definičního oboru podle počátku⁹ vyplývající z nutnosti existence

⁹viz definice na str. 40

prvku $-x \in D(f)$. Tento fakt je využíván jako vylučovací kritérium parity funkce, nicméně vzhledem k časté absenci argumentace, proč konkrétní funkce není ani sudá ani lichá, nemusí být aplikace této podmínky zřejmá a doporučuji na ni při výuce upozornit.

Další vlastností paritních funkcí je symetrie význačných bodů funkce vzhledem k nule. Tím je myšleno, že je-li $x = a$ průsečík s osou x , lokální extrém, inflexní bod, bod nespojitosti funkce libovolného typu,¹⁰ bod, ve kterém neexistuje derivace apod., pak je také $x = -a$ takovým význačným bodem¹¹ a funkce v něm má stejnou, resp. opačnou, funkční hodnotu, je-li definována, a limitu, existuje-li. Při posuzování jednostranných limit platí:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \lim_{x \rightarrow (-a)^-} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \lim_{x \rightarrow (-a)^+} f(x);$$

přičemž opačné hodnoty limit platí pro liché funkce.

Co se týče vlastností na intervalech, pro paritní funkce platí, že z $(a; b)$ se na $(-b; -a)$ vždy zachová spojitost a konstantnost. Sudé funkce se shodují v kladnosti, resp. zápornosti funkce,¹² liché mají znaménko na $(a; b)$ opačně znaménku $(-b; -a)$. Parita funkce ovlivňuje také derivaci a s ní související vlastnosti funkce. Platí tato věta:

Věta. Nechť je f sudá, resp. lichá, funkce. Pak f' je lichá, resp. sudá.

Toto tvrzení má triviální důsledky pro monotonii, konvexnost a konkávnost, směrnice tečen apod. Sudé funkce se tedy v $(a; b)$ a v $(-b; -a)$ shodují v konvexnosti/konkávnosti funkce; monotonii mají opačnou, tj. růst se změnil na klesání a naopak. U lichých funkcí platí, že se v intervalech $(a; b)$ a $(-b; -a)$ shodují v monotonii, a mají tam opačné chování v konvexnosti/konkávnosti.

¹⁰viz definice na str. 54

¹¹u extrémů je zachováno pouze extrémní hodnota, nikoliv typ extrému, sudá funkce zachovává i to, lichá minima a maxima převrací

¹²viz definice na str. 51

Co se týče směrnic tečen v bodech $x = a$ a $x = -a$, u sudých jsou opačné, u lichých stejné. Navíc není těžké ukázat vztah mezi průsečíky tečen s osou y . Pro tečny tedy dostáváme: je-li f sudá a má-li v bodě $x = x_0$ tečnu o rovnici $y = ax + b$, pak má v bodě $x = -x_0$ tečnu o rovnici $y = -ax + b$. Pro liché funkce má rovnice tečny v bodě $x = -x_0$ tvar $y = ax - b$. Stejným způsobem jsou ovlivněny i asymptoty se směrnicí.¹³

S ohledem na symetrii a vztahy pro monotonii dále můžeme prohlásit, že je-li sudá funkce v nule definována, má tam lokální extrém. Pro lichou funkci platí v $x = 0$ „slabší“ vztah, je-li tam lichá funkce definována, pak má v $x = 0$ průsečík s osou x .

Tyto vztahy mezi paritou a ostatními vlastnostmi jsou užitečné zejména pro řešení průběhu funkce, neboť šetří některé výpočty a umožňují sepsání vlastností pro celý definiční obor jen z jeho části. Z konstrukčního hlediska jsou podstatnější spory mezi jednotlivými vlastnostmi z těchto vztahů vyplývající, například fakt, že sudá funkce nemůže být monotónní (leďa by byla konstantní).

2.3 Periodicita funkce

Definice (Periodická funkce). Říkáme, že funkce je *periodická s periodou* p $p \geq 0$, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) = f(x + p) = f(x - p)$.

Společně s paritou se zkoumá i periodicita funkce. Protože zjištění a dokázání periodicity je náročnější než zjištění parity funkce, i u této vlastnosti se autoři ve vzorových řešeních úloh na průběh funkce vyšetřování omezují na konstatování, že funkce není, nebo je periodická. Toto konstatování je typicky pouze formální, neboť většina autorů nevyšetřuje a ani nezadává vy-

¹³viz definice na str. 98

šetřit žádnou periodickou funkci.¹⁴

Co se týče periodicity samotné, má smysl její vyšetření vyžadovat pouze u funkcí, které ve svém předpisu obsahují některou z goniometrických funkcí, které jako jediné ze základních elementárních funkcí periodické jsou. I poté může být pro obzvláště důsledné řešitele obtížné formálně dokázat, že například funkce $y = \sin x^2$ není periodická. Tento problém je nicméně pouze teoretický, neboť užití goniometrické funkce v předpisech složitějších neperiodických funkcí často vytváří úlohy příliš náročné z pohledu praktické zvládnutelnosti,¹⁵ pokud ne přímo úlohy neřešitelné jinak než numerickými metodami.

Jak bylo zmíněno v části 2.1, v některých případech periodicitu vytvořené funkce bývá potlačována zúžením definičního oboru; může jít o nežádoucí vlastnost například vzhledem k úrovni znalostí a dovedností předpokládaných řešitelů.

2.3.1 Konstrukce periodické funkce

Při konstrukci periodické funkce můžeme využít těchto skutečností:

Věta. Necht' f a g jsou periodické funkce a existuje jejich společná perioda. Pak jsou periodické i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Věta. Necht' f je periodická funkce. Pak i $g \circ f$ je periodická pro libovolnou funkci g .

¹⁴Výjimku tvoří Dvořáková (et al., 2011), kde je vyšetření průběhu periodické funkce zadáno v jedné ze vzorových úloh. Ostatní autory, kteří k vyšetření průběhu zadávají alespoň jednu periodickou funkci, můžeme jmenovat, jde o Děmidoviče (2003), Kopáčka et al. (2005) a Vlasova (1958). Absence vyšetřování periodických funkcí u některých autorů, např. u Veselého, může být dána také teoretickým zaměřením knihy a z toho vyplývajícím celkově mizivým počtem příkladů.

¹⁵Například funkce $y = \sin \ln x$ má řešitelnou 1. a 2. derivaci i všechny nutné limity, pro většinu studentů se bude ale jednat o velmi náročný příklad, zejména budeme-li požadovat nakreslení grafu.

Poznámka. Je-li f periodická funkce pak $f \circ g$ je periodická speciálně pro g lineární.

Poslední fakt lze také formulovat tak, že periodicitu funkce f je zachována na lineární transformaci grafu. Z tvrzení, že pro f periodické je $g \circ f$ periodické nezávisle na g , dostáváme, že periodicitu je zachována i na převrácení. Zrcadlení vzhledem k ose x periodicitu také zachovává, ale zrcadlení vzhledem k y periodicitu zachová pouze pro sudé f .

Jako u parity zde platí, že prakticky je konstrukce periodické funkce omezena množstvím základních funkcí s touto vlastností. Jestliže chceme konstruovat elementární periodickou funkci, musíme v předpisu vhodným způsobem použít buď sinus, cosinus, tangens nebo cotangens.

2.3.2 Vliv periodicity na ostatní vlastnosti funkce

Zřejmým a důležitým důsledkem periodicity funkce je neomezenost jejího definičního oboru, což vyplývá přímo z definice, konkrétně z požadavku existence prvku $x \pm p \in D(f)$ pro každé $x \in D(f)$.

Všechny vlastnosti periodické funkce v bodech $x_0 \in \overline{D(f)}$ a na intervalech $(a; b) \subset D(f)$ se přenáší do bodů $x_0 \pm kp$, $k \in \mathbb{Z}$ a na intervaly $(a \pm kp; b \pm kp)$.

Co se týče ostatních vlastností funkce, periodicitu nemá žádný vliv na paritu funkce a zcela vylučuje existenci šikmých asymptot a s výjimkou konstantní funkce $f : y = a$, $a \in \mathbb{R}$, která je podle definice periodická a která je sama sobě asymptotou, také vodorovných asymptot.¹⁶

¹⁶viz definice na str. 98

2.4 Poloha grafu funkce vzhledem k ose x

Definice (Funkce kladná (záporná) na intervalu). Říkáme, že funkce je *kladná*, resp. *záporná*, *na intervalu* I , platí-li pro všechna $x \in I : f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$.

Definice (Průsečík s osou x). Říkáme, že bod x_0 je *průsečík s osou* x , jestliže platí $f(x_0) = 0$.

Definice (Změna znaménka funkce). Říkáme, že funkce f *mění v x_0 znaménko*, je-li f nějakém $P^-(x_0)$ kladná, resp. záporná, a zároveň je na nějakém $P^+(x_0)$ záporná, resp. kladná. Říkáme, že funkce f *nemění v x_0 znaménko*, je-li f na nějakém $P(x_0)$ kladná, nebo záporná.

Určení intervalů, kde je daná funkce kladná a kde je záporná, je velmi často uváděnou součástí vyšetřování průběhu funkce. Méně častým je pak přímý požadavek určení průsečíků s osou x , i když tyto dvě věci spolu úzce souvisí. Tato souvislost může být důvodem, proč průsečíky nejsou některými autory explicitně vyžadovány, neboť u *spojitých* funkcí se tyto dvě úlohy překrývají a platí, že průsečíky s osou x musí být krajními body intervalů kladnosti a zápornosti funkce.

Jiná situace nastává, pokud průsečíky neexistují nebo funkce není spojitá. Pokud funkce spojitá na I nemá v I průsečík s osou x , můžeme říci, že je buď na I kladná, nebo záporná. Pokud funkce f na I spojitá není, pak změna znaménka hodnot funkce vynucuje v I existenci průsečíku s osou x nebo bodu nespojitosti¹⁷ a to v místě, kdy ke změně znaménka došlo.

¹⁷případně obojí, např. funkce signum v $x = 0$

2.4.1 Problém zjistitelnosti

Praktickým problémem určování průsečíků s osou x je možná neřešitelnost rovnice, která tyto body určuje, to jest $f(x) = 0$. Navíc platí: pokud není řešitelná rovnice $f(x) = 0$, není tam řešitelná ani nerovnice $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$. To znamená, že pokud nejsme schopni určit existenci a polohu průsečíků s osou x , pak nejsme schopni určit ani intervaly kladnosti a zápornosti funkce.

Obecná neřešitelnost rovnice $f(x) = 0$ je dána možnou transcendentností funkce f , nebo příliš vysokým stupněm algebraické funkce.

U algebraických funkcí do 4. řádu jsme teoreticky schopni určit průsečíky osou x vždy, prakticky jsou pro řešitele určitelné průsečíky pouze těch algebraických funkcí f , u kterých rovnice $f(x) = 0$ vede na kvadratickou rovnici, kubickou rovnici s nějakým malým celočíselným kořenem (metodou uhodnutí kořene a snížení řádu rovnice), nebo polynomickou rovnici ve speciálním tvaru, např. na: reciprokou rovnici, některé binomické rovnice vyšších stupňů, rovnice substitucí převeditelné na kvadratické, řídké polynomické rovnice řešitelné vytknutím a rozkladem a podobně. Další možností je zadání algebraické funkce vyššího stupně v součinném nebo podílovém tvaru.

U transcendentních funkcí je problematika nalezení průsečíků s osou x komplikovanější a nelze obecně říci, pro které transcendentní funkce f je rovnice $f(x) = 0$ řešitelná a pro která ne. Omezíme-li se na elementární transcendentní funkce, lze říci, že dobře vyšetřitelnou z hlediska průsečíků je funkce, která je složením vnějších funkcí a vnitřní funkce jejíž kořeny lze nalézt, např. $y = \arctg(x^2 - 1)$ nebo kde f vznikne pouze jako součin nebo podíl takovýchto funkcí, např. $y = e^x \cdot (x^2 + 1)$ a $y = \frac{\ln x^2}{x^2}$.

Transcendentní funkce vzniklé součtem jako třeba $y = x + \ln x$ jsou problematictější a vyjma situací, které lze převést na součin a podíl nebo slo-

žení funkcí s neznámou pouze v argumentu (například $y = x + x \cdot \sin x$, $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$, $y = \ln x + \ln(x - 1)$ a situací, kde se sčítají „kompatibilní“ sčítance (třeba $y = \sin x + \cos x$), je obecně nelze řešit jinak, než numerickými metodami, což je v úloze na vyšetření průběhu funkce spíše nežádoucí.¹⁸

2.4.2 Konstrukce průsečíků s osou x

Z konstrukčního hlediska je vytvoření průsečíku s osou x u funkcí spojitých na I snadné, stačí užít lineární transformace posunutí předpisu.¹⁹ Vedejší efektem této transformace je vytvoření i jiných průsečíků s osou x a zánik původních průsečíků s osou x , existovaly-li nějaké. Výhodou této konstrukce je zachování tvaru grafu funkce, změní se jen všechny funkční hodnoty a případné rovnice asymptot. Předností je také žádný vliv na složitost vyšetřování jiných vlastností funkce. U takto vytvořeného průsečíků je ale nutné ověřit jeho zjištělnost, neboť nový předpis může vést na neřešitelnou, nebo příliš složitou rovnici.

Dalším způsobem, jak průsečíky vytvořit, je vynásobení předpisu konstruované funkce výrazem s nulovými body v I , např. vynásobením funkce $y = e^x$ s výrazem $V(x) = (x - 1)$ dostáváme $y = (x - 1) \cdot e^x$. Tímto způsobem kromě přidání nových průsečíků zachováváme i všechny původní průsečíky s osou x , výsledná rovnice navíc bude vždy řešitelná.²⁰ Nevýhodou je pak velká změna tvaru grafu funkce a funkčního předpisu, což může vést až k znemožnění vyšetřitelnosti jiných vlastností.

¹⁸Ačkoliv ne zcela nelogické, určité numerické metody pro určování kořenů využívají metod diferenciálního počtu a jejich konkrétní užití závisí např. i na monotonii a konvexnosti a konkávnosti funkce na okolí kořene, jde tedy o úlohu příbuznou té na vyšetření průběhu funkce přinejmenším z hlediska použitých nástrojů.

¹⁹viz definice na str. 43

²⁰samozřejmě za předpokladu, že je řešitelná rovnice $V(x) = 0$

2.5 Spojitost funkce

Definice (Spojitost v bodě). Říkáme, že funkce f je *spojitá v bodě* x_0 , jestliže $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definice (Spojitost v bodě zprava, zleva). Říkáme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá zprava* (zleva), jestliže platí $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

Definice (Spojitost na intervalu). Říkáme, že funkce f je *spojitá na intervalu* I , pokud platí, že f je spojitá v každém vnitřním bodě $x_0 \in I$ a zároveň je f spojitá zevnitř v krajních bodech I , patří-li tyto body do I .

Definice (Spojitost na $D(f)$). Říkáme, že funkce f je *spojitá na svém definičním oboru*, je-li definiční obor sjednocení nedegenerovaných intervalů a f je spojitá na všech intervalech $I \subseteq D(f)$.

Definice (Body nespojitosti). Říkáme, že funkce $f(x)$ má v hromadném bodě x_0 svého definičního oboru:

1. *odstranitelnou nespojitost* právě tehdy, když existují vlastní limity $f(x)$ v bodě x_0 zprava i zleva a jsou stejné²¹ a zároveň f buď v x_0 není definována, nebo platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
2. *nespojité 1. druhu* právě tehdy, když existují vlastní jednostranné limity $f(x)$ v bodě x_0 zprava i zleva a jsou různé,
3. *nespojité 2. druhu* právě tehdy, když alespoň jedna jednostranná limita $f(x)$ v bodě x_0 neexistuje, nebo je nevlastní.

²¹Což je jen složitější vyjádření faktu, že f má v x_0 vlastní limitu. Odlišná formulace byla zvolena kvůli názornosti rozdílu mezi druhy bodů nespojitosti.

2.5.1 Problematika definic

Všechny zde uváděné definice týkající se *spojitosti* jsou užívané a lze je pokládat za standardní. Problematickým nadále zůstává pojem *bod nespojitosti*, jak bylo řečeno v kapitole 1.2.2. Pro řešení a vyhodnocování úlohy na průběh funkce není problematika klasifikace bodů nespojitosti nijak zásadní, protože žádný ze zkoumaných autorů nevyžaduje určení kvality těchto bodů. Z konstrukčního hlediska jde naopak o problematiku zajímavou a užitečnou, proto ji zde rozebereme hlouběji.

Definici bodů nespojitosti uvádí jen málo autorů a v zásadě se shodnou jen na počtu kategorií a na jednostranných limitech jako rozhodovacím kritériu. U bodů odstranitelné nespojitosti kolísá, zda kromě situace, že f není v x_0 definována, připouštíme i to, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x)$.²² U nespojitosti 2. druhu variuje zahrnutí situace s neexistencí limity, případné vypuštění této situace ale způsobí, že například funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ nemá bod nespojitosti, ačkoliv v nule zcela jistě spojitá není.

Pomineme-li neshodu o zahrnutí situace, kdy neexistuje jednostranná limita, má bod nespojitosti 2. druhu i jiný problém.²³ U funkce $y = \ln x$ v nule je alespoň jedna jednostranná limita nevlastní, čili jde jednoznačně o bod nespojitosti 2. druhu; Vlasov (1958, p. 100) toto dokonce nazývá *logaritmická nespojitost*. Označení tohoto bodu za bod nespojitosti se nám nemusí zamlouvat, protože funkce je definována pouze z jedné strany tohoto bodu. Pokud nechceme tyto body považovat za body nespojitosti – a z jistého hlediska by bylo vhodnější je za ně nepovažovat, k žádné nespojitosti tam nedochází,

²²Odstranitelnost pak spočívá v předdefinování funkční hodnoty v bodě, viz např. Tkadlec (2011, p. 58).

²³Který je ve skutečnosti problémem i u zbylých kategorií, neboť se dotýká problematiky jednostranné nespojitosti, tj. situace, kdy neexistuje buď levé nebo pravé redukované okolí předmětného bodu a na druhém redukováném okolí funkce není spojitá. To je situace, která v definicích (natož v příkladech) není dobře zohledněna a není diskutována u žádného autora. Její hlubší popis se ale této práci týká jen velmi okrajově a proto z ní byl vyjmut.

funkce se „nemá s čím spojit“ – stačí upravit definici a požadovat definovanost na celém redukovaném okolí zkoumaného bodu; takto to řeší například Kopáček (2004, p. 84).

Jakkoliv problematická a v jistých případech nevhodná se definice bodů nespojitosti jeví, není bezúčelná a usnadňuje popis chování funkce – pro účely této práce se řídíme zde formulovanou definicí, přičemž rozlišujeme zda limita neexistuje, nebo nemá smysl. Chování funkcí v nevlastních krajních bodech obdobné tomu v $x = 0$ u funkce $y = \ln x$ dále budeme považovat za (možná kontroverzní) body nespojitosti 2. druhu. Pro konstrukci jejich asymptotického chování, která se nijak neodlišuje od „normálních“ bodů nespojitosti 2. druhu, bude výhodné o nich takto uvažovat.

2.5.2 Význam spojitosti v úloze na průběh funkce

Z hlediska řešení úlohy na průběh funkce lze spojitost považovat za méně zásadní vlastnost při vyšetřování. Tomuto názoru nahrává volba vyšetřovaných funkcí – dominuje zadávání elementárních funkcí, které jsou vždy spojitě ve všech intervalech definičního oboru a u kterých v důsledku této vlastnosti chybí přirozená potřeba spojitost vyšetřit. Důsledné určování intervalů spojitosti může pak u některých řešitelů vyvolat dojem pouhého formalismu, zvláště pokud je v kurzu nebo knize vyšetřování průběhu omezeno pouze na jednodušší funkce, kde se intervaly spojitosti vždy shodují s definičním oborem.

Svůj vliv k vnímání spojitosti jako nepřiliš podstatné má jistě také poněkud vágní přístup některých autorů ve vzorových úlohách na vyšetření průběhu funkce, viz tabulka 1.5 na straně 27, sloupec *uvádí se*; popř. rozdílnost (a případná spornost) přístupů různých autorů k problematice nespojitosti, jak bylo vidět v části 1.2.2.

Z konstrukčního hlediska je spojitost, resp. spíše body nespojitosti, vlastností velmi podstatnou, neboť se přímo dotýká vyšetřitelnosti funkce. Nutnou podmínkou použitelnosti metod diferenciálního počtu k vyšetřování funkce je spojitost funkce na nějakém intervalu. Lze tedy vyšetřovat funkce, které jsou alespoň po částech spojitě. Považujeme-li navíc za výsledek úlohy náčrtků grafu funkce, jsme na tyto funkce omezeni i požadavkem nakreslitelnosti grafu.

Kromě vyšetřitelnosti a nakreslitelnosti spojitost také velmi úzce ovlivňuje i další vlastnosti funkce, které se týkají nejen zadavatelů úlohy; tj. vlastností, které řešitelé *musí* vyšetřovat²⁴ – zejména chování funkce v krajních bodech definičního oboru, existenci asymptot a definiční obor funkce, jak uvidíme v části 2.5.4.

2.5.3 Konstrukce bodů nespojitosti

Při konstrukci spojitých funkcí a bodů nespojitosti je zásadní věta o součtu, rozdílu, násobení a dělení funkcí spojitých (v bodě, zleva, zprava, na intervalu a pro nás konsekvantně na $D(f)$), která říká, že těmito operacemi z funkcí spojitých vždy opět vzniká funkce spojitá; pro dělení navíc za podmínky, že dělitel je nenulový, což je vždy splněno na definičním oboru výsledné funkce.²⁵

Vzhledem k tomu, že zpravidla vyšetřujeme elementární funkce, které jsou vždy spojitě na všech intervalech svého definičního oboru, je požadavek na bod nespojitosti velmi podstatný parametr při vytváření úloh. Z vět o aritmetice a skládání spojitých funkcí vyplývá, že při výlučném užití elementárních funkcí nelze nespojitost v bodech definičního oboru vytvořit žádnou z operací

²⁴na základě analýzy požadavků zkoumaných autorů, viz 1.1

²⁵Přesné formulace a důkazy těchto vět jsou obecně dobře známé, proto zde nejsou uvedeny.

sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

Zdůrazněme však, že elementární funkce jsou spojité „pouze“ na intervalech svého definičního oboru, tzn. jsou spojité v jeho vnitřních bodech a ve vlastních krajních bodech jsou spojité z příslušných stran. Pro bod nespojitosti žádného typu nevyžadujeme definovanost funkce v tomto bodě. I elementární funkce tedy mohou mít body nespojitosti všech druhů, a to v nevlastních krajních bodech $D(f)$,²⁶ které jsou zároveň izolovanými body doplňku $D(f)$ do $\mathbb{R}$; v ostatních nevlastních krajních bodech $D(f)$ pak mohou být pouze body nespojitosti 2. druhu.

Pro vytvoření nespojitosti **ve vnitřních bodech** $D(f)$ a ve vlastních krajních bodech $D(f)$ se proto v úlohách na vyšetřování občas využívá nějaké neelementární nespojitě funkce.²⁷ V případě tvorby nespojitosti je užitečná zejména funkce signum a operace násobení nebo sčítání. Signum je definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$, na $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$ je konstantní a nabývá tam hodnot -1 a 1 , takže vliv jeho vynásobení a sečtení s nějakou jinou funkcí je dobře představitelný. Především má ale v nule nespojitost 1. druhu.

Předpokládejme, že máme spojitou funkci f s definičním oborem $D(f)$, kterou chceme vyšetřovat a do které chceme přidat nějaký bod nespojitosti. Skládáním $\text{sgn} \circ g$ s vhodně zvolenou funkcí g , $D(g) \supseteq D(f)$ lze vytvořit libovolné spočetné (tedy i nekonečné) množství bodů odstranitelné nespojitosti nebo bodů nespojitosti 1. druhu – záleží zde pouze na počtu nulových bodů funkce g v případném zúžení $D(g)$ do $D(f)$ a na chování g v okolí těchto bodů.

Věta (Konstrukce bodu nespojitosti 1. druhu pomocí funkce signum). Nechť f, g jsou funkce spojité na svém definičním oboru a $D(f) \subseteq D(g)$. Dále nechť

²⁶viz definice na str. 40

²⁷Lze také využít zadání funkce po částech; jeho užití bude diskutováno později.

$\exists x_0 \in D(f) : g(x_0) = 0 \neq f(x_0)$ a zároveň platí, že g v x_0 mění znaménko. Pak v bodě x_0 mají funkce $y = \operatorname{sgn} g(x) \cdot f(x)$ a $y = \operatorname{sgn} g(x) + f(x)$ bod nespojitosti 1. druhu.

Důkaz. Součin: Dokazujeme, že limity funkce $(\operatorname{sgn} g(x) \cdot f(x))$ pro x jdoucí k 0 zleva a zprava jsou obě vlastní a nerovnájí se.

Díky spojitosti f a větě o aritmetice limit platí: $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} (\operatorname{sgn} g(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \operatorname{sgn} g(x) = f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \operatorname{sgn} g(x)$.

Z předpokladů víme, že g mění v x_0 znaménko. Z toho vyplývá, že buď $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{sgn} g(x) = 1$ a zároveň $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{sgn} g(x) = -1$, nebo opačně. To znamená, že $f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \operatorname{sgn} g(x) = f(x_0) \cdot (\pm 1)$. Limity jsou tedy vlastní a nerovnájí se, což jsme chtěli dokázat.

Součet: obdobně.

□

Věta (Konstrukce bodu odstranitelné nespojitosti pomocí funkce signum). Nechť f, g jsou funkce spojité na svém definičním oboru a $D(f) \subseteq D(g)$. Dále nechť $\exists x_0 \in D(f)$, $g(x_0) = 0 \neq f(x_0)$ a zároveň g nemění v x_0 znaménko.²⁸ Pak v bodě x_0 mají funkce $y = \operatorname{sgn} g(x) \cdot f(x)$ a $y = \operatorname{sgn} g(x) + f(x)$ bod odstranitelné nespojitosti.

Důkaz. Součin: Dokazujeme, že existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} (\operatorname{sgn} g(x) \cdot f(x))$ a nerovná se hodnotě $\operatorname{sgn} x_0 \cdot f(x_0)$.

Díky spojitosti f a větě o aritmetice limit platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} (\operatorname{sgn} g(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sgn} g(x) = f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sgn} g(x)$.

Z předpokladů víme, že g v x_0 nemění znaménko. Z toho vyplývá, že buď platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sgn} g(x) = 1$ nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{sgn} g(x) = -1$.

Dále z předpokladů víme, že $g(x_0) = 0$, což znamená, že $\operatorname{sgn} g(x_0) \cdot f(x_0) = \operatorname{sgn} 0 \cdot f(x_0) = 0 \cdot f(x_0) = 0 \neq \pm 1$. V bodě x_0 tedy existuje vlastní limita

²⁸viz definice na str. 51

a nerovná se funkční hodnotě, což jsme chtěli dokázat.

Součet: obdobně.

□

Jiným způsobem, jak v úloze s elementárními funkcemi vytvořit bod nespojitosti ve vnitřním bodě nebo ve vlastním krajním bodě $D(f)$, je využití definice funkce po částech. Bodem nespojitosti pak mohou být ty body, ve kterých funkce mění předpis. Takto lze velmi jednoduše v libovolných bodech vytvořit body nespojitosti kteréhokoliv typu, což je výhoda oproti předchozímu přístupu, kterým nelze vytvářet body nespojitosti 2. druhu. Navíc definice funkce po částech může funkci $\operatorname{sgn} g(x)$ zcela nahradit, například:

$$h : y = \operatorname{sgn}(x^2 - 1) \cdot \cos x \Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} \cos x & x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty), \\ -\cos x & x \in (-1; 1), \\ 0 & x \in \{-1; 1\}. \end{cases}$$

Výhodou přístupu užívajícího signum je jednoduchost zadání a nutnost samostatně určit body podezřelé z nespojitosti. Nevýhodou pak může být fakt, že popsaným způsobem nelze vytvořit bod nespojitosti 2. druhu a vůbec nutnost funkci signum zavádět.²⁹ Problémem také může být chování bodu nespojitosti 1. druhu, které signum vytváří – rozdílnost obou limit od funkční hodnoty.

Pokud potřebujeme, aby jedna z limit byla rovna funkční hodnotě, je možné namísto funkce signum stejným způsobem užít Heavisideovy funkce

²⁹Funkce signum bývá zpravidla zmíněna jako ideální reprezentant různých netypických vlastností, nicméně existují i autoři, kteří zavádějí termín spojitost, požadují její vyšetření u úlohy na průběh funkce a nezavádí žádnou nespojitou funkci, tedy ani signum. Ze zkoumaných např. Kaňka a Malec (2012).

s parametrem 1,

$$h : y = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

která má v nule také bod nespojitosti 1. druhu, ale limita zprava se rovná funkční hodnotě. Pro užití v násobení je nutné ji ještě upravit kvůli nulové hodnotě na značné části jejího definičního oboru, která by v násobení přepsala chování vyšetřované funkce f na konstantní nulovou funkci v průniku $D(f) \cap (-\infty; 0$, k čemuž postačí lineární transformace, např. posunutí předpisu o 1, nebo chceme-li užít bližší analogii k funkci signum, můžeme použít funkci $2H - 1$, kde H zastupuje původní Heavisideovu funkci.

Přínosem definice po částech je explicitnost zadání, nižší početní a znalostní náročnost, kterou zadání klade na řešitele a možnost libovolně měnit vyšetřovanou funkci a vytvářet body nespojitosti 2. druhu. Nevýhodou je pak nutnost takovou funkci vyšetřovat na každém intervalu odděleně (pokud nepřevedeme konkrétní úlohu na předpis využívající $\operatorname{sgn} g(x)$), což vede ke značnému zvýšení časové náročnosti úlohy – zejména kvůli nutnosti určení 1. a 2. derivace a jejich znamének na každé části předpisu zvlášť.

Kromě těchto dvou přístupů lze ke konstrukci bodů nespojitosti ve vnitřních bodech a ve vlastních krajních bodech $D(f)$ vytvářet i jinak, např. místo funkce signum a Heavisideovy funkce lze stejným způsobem užít i jiných nespojitých funkcí, třeba kromě Heavisideovy funkce lze užít jiné vhodné charakteristické funkce nebo ze známějších nespojitých funkcí třeba funkce celá část. Při užití složitějších nespojitých funkcí je ale třeba hlídat, aby vytvořená funkce byla stále „rozumně“ spojitá, tedy aby šla vyšetřovat metodami diferenciálního počtu, což z doporučených nespojitých funkcí obecně vyřazuje třeba Dirichletovu funkci.³⁰

³⁰Není třeba ji vyřadit zcela, i pomocí Dirichletovy funkce lze vytvořit rozumnou (tj.

Pro vytvoření nespojitosti v **nevlastních krajních bodech** $D(f)$, což je mnohem obvyklejší situace, si lze vystačit s elementárními funkcemi. Konstrukce, které jsme již popsali, zde také budou fungovat, ale lze se jim zcela vyhnout, což může být žádoucí třeba vzhledem k plánované složitosti vyšetřované funkce. Další text se tedy bude zabývat konstrukcí bodů nespojitosti v nevlastních krajních bodech definičního oboru elementárních funkcí.

Konstrukce bodů odstranitelné nespojitosti a bodů nespojitosti 2. druhu je u elementárních funkcí snazší než konstrukce bodů nespojitosti 1. druhu. Bod nespojitosti 2. druhu je širší pojem, který v sobě zahrnuje asymptotické chování, které je časté třeba u racionálních funkcí. Bod odstranitelné nespojitosti je zase bodem, kde existuje vlastní limita, což je podmínka, která je díky spojitosti elementární funkce velmi dobře splnitelná, a zároveň se nerovná funkční hodnotě – i třeba z důvodu nedefinovanosti v bodě, což není u elementárních funkcí problém vytvořit.³¹ Bod nespojitosti 1. druhu na druhou stranu vyžaduje existenci a různost vlastních limit v bodě zleva a zprava, a to je chování, které není pro elementární funkce příliš typické, nicméně, jak si ukážeme, není nemožné ho v nevlastních krajních bodech vytvořit.

Příkladem jednoduché konstrukce bodu odstranitelné nespojitosti je například rozšíření vyšetřované elementární funkce f zlomkem $\frac{g(x)}{g(x)}$, kde g může být prakticky libovolná funkce s nějakými nulovými body. Vyšetřovaná funkce f zůstane rozšířením nezměněna, z definičního oboru f se ale tímto vyloučí ty nulové body g , které jsou vnitřními body $D(f)$ a ve kterých pak funkce $f(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x)}$ bude mít body odstranitelné nespojitosti.

vyšetřitelnou) funkci, např. $y = D(\pi \operatorname{sgn} x)$. Rozumnost takto vytvořené funkce pak určuje (i)racionalita prvků z oboru hodnot vnitřní funkce.

³¹Nedefinovanost v bodě, ve kterém existuje vlastní limita je pro elementární funkce jediný možný způsob, jak mít bod odstranitelné nespojitosti. Neelementární funkce mohou mít funkční hodnotu definovanou a odlišnou, což definice *odstranitelné nespojitosti* nerozlišuje.

Věta (Konstrukce bodů odstranitelné nespojitosti rozšířením). Nechť f a g jsou elementární funkce. Dále nechť existuje alespoň jeden bod x_0 , který je vnitřním bodem $D(g)$ i $D(f)$ a pro který platí, že g je na $P(x_0)$ nenulová a zároveň $g(x_0) = 0$. Pak funkce $h : y = f(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x)}$ má v x_0 bod odstranitelné nespojitosti.

Důkaz. Funkce $h : y = f(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x)}$ má definiční obor $D(h) = D(f) \cap D(g) \setminus M$, kde $M = \{x, g(x) = 0\}$. Pro bod x_0 podle předpokladu platí: $g(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 \in M \Rightarrow x_0 \notin D(h)$.

Dále platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ má smysl, protože $g(P(x_0)) \neq 0 \Rightarrow P(x_0) \not\subseteq M$ a zároveň $P(x_0) \in D(g) \cap D(f)$, z čehož vyplývá, že $P(x_0) \subseteq D(h)$.

Také platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, neboť funkce $f(x) \cdot \frac{g(x)}{g(x)}$ a $f(x)$ jsou shodné na $P(x_0)$ a shodují se v existenci a případné hodnotě limity. Dále platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x)$, protože f je elementární a tedy spojitá na všech intervalech svého definičního oboru.

Funkce h má v x_0 vlastní limitu a zároveň v něm není definovaná $\Rightarrow h$ má v x_0 bod odstranitelné nespojitosti.

□

Výhodou této konstrukce je její jednoduchost a žádný nežádoucí vliv na vyšetřovanou funkci – kromě vytvoření bodů odstranitelné nespojitosti se f nijak nezmění. Nevýhodou je „očividnost“ konstrukce. Tu je možné odstranit tak, že v jednom případě g vyjádříme ekvivalentně jiným předpisem. Dalším možným rozšířením této konstrukce je nahradit čitatel, nebo jmenovatel zlomku $\frac{g(x)}{g(x)}$ funkcí asymptoticky ekvivalentní s g na okolí zamýšleného bodu nespojitosti.³² Tím se zcela odstraní triviálnost původní konstrukce, ovšem ztratí se výhoda zachování f a při volbě nevhodné ekvivalentní funkce se může zásadně změnit celková vyšetřitelnost funkce.

³²viz definice na str. 72

Bod nespojitosti 2. druhu lze snadno vytvořit podílem dvou funkcí, přičemž bod nespojitosti pak opět vzniká v izolovaných nulových bodech dělitele. Typicky vzniká bod nespojitosti 2. druhu, ve kterém existují obě jednostranné limity a jsou nevlastní.

Věta (Konstrukce bodu nespojitosti 2. druhu dělením). Nechť f a g jsou elementární funkce. Dále nechť existuje alespoň jeden bod x_0 , který je vnitřním bodem $D(g)$ i $D(f)$ a platí pro něj, že g je na nějakém $P(x_0)$ nenulová, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ a $f(x_0) \neq 0$. Pak funkce $h : y = \frac{f(x)}{g(x)}$ má v x_0 bod nespojitosti 2. druhu.

Platí-li navíc, že

1. g je na $P(x_0)$ kladná, resp. záporná, a $f(x_0) > 0$, pak limita h v x_0 je nevlastní a rovna $+\infty$, resp. $-\infty$ (pro $f(x_0) < 0$ opačně),
2. g je na $P^+(x_0)$ kladná a na $P^-(x_0)$ záporná, resp. opačně, a $f(x_0) > 0$, pak h má v x_0 nevlastní limitu zleva $-\infty$ a zprava $+\infty$, resp. naopak, (pro $f(x_0) < 0$ opačně).

Důkaz. Funkce $h : y = \frac{f(x)}{g(x)}$ má definiční obor $D(h) = D(f) \cap D(g) \setminus M$, kde $M = \{x, g(x) = 0\}$. Pro bod x_0 podle předpokladu platí, že g je elementární a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Buď tedy $g(x_0) = 0$ nebo $x_0 \notin D(g)$. Platí tedy, že $x_0 \notin D(h)$.

Dále platí, že $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ má smysl, protože $g(P(x_0)) \neq 0 \Rightarrow P(x_0) \not\subseteq M$ a zároveň $P(x_0) \in D(g) \cap D(f)$, z čehož vyplývá, že $P(x_0) \subseteq D(h)$.

Také platí, že existuje vlastní nenulová $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, protože x_0 je vnitřní bod $D(f)$ a f je elementární, tedy spojitá ve všech vnitřních bodech $D(f)$, a z předpokladů víme, že $f(x_0) \neq 0$.

Z toho vyplývá, že $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{a}{0}“$. Limita této funkce pro ne-

nulové a buď neexistuje, nebo je nevlastní, x_0 je tedy bodem nespojitosti 2. druhu.

1. Platí-li navíc, že g je na $P(x_0)$ kladná, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0^+$. To znamená, že $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{a}{0^+}“$; je-li $f(x_0) = a > 0$, pak tato limita je $+\infty$, je-li $f(x_0) = a < 0$, pak tato limita je $-\infty$.

Pro g na $P(x_0)$ zápornou analogicky.

2. obdobně

□

Obecným způsobem, jak vytvořit všechny druhy bodů nespojitosti, je například složení funkce $\frac{f}{g}$ s dalšími vhodnými elementárními funkcemi. Operací $\frac{f}{g}$, kde g je nějaká vhodná funkce, vytvoříme v nulových bodech g body nespojitosti 2. druhu, přesně podle předchozí věty. Dalším skládáním $h \circ \frac{f}{g}$ lze v těchto bodech vytvořit bod nespojitosti libovolného typu. O tom, kterého typu tato nespojitost bude, rozhodují limity h v nevlastních bodech a chování funkce g na okolí jejích nulových bodů.

Věta (Konstrukce bodů nespojitosti pomocí složení $h \circ \frac{f}{g}$). Nechť h je elementární funkce a nechť $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ existují. Dále nechť f a g jsou elementární funkce definované na nějakém okolí bodu x_0 a nechť platí, že $g(x_0) = 0 \neq f(x_0)$ a zároveň g v x_0 mění znaménko. Pak $h \circ \frac{f}{g}$ má v bodě x_0 :

1. odstranitelnou nespojitost, jestliže $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x)$ jsou obě vlastní a rovnají se,
2. bod nespojitosti 1. druhu, jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ jsou obě vlastní a liší se,

3. bod nespojitosti 2. druhu, jestliže alespoň jedna z $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x)$ je nevlastní nebo neexistuje.

Pokud je g na $P(x_0)$ pouze kladná resp. pouze záporná, pak $h \circ \frac{f}{g}$ má v bodě x_0 :

1. odstranitelnou nespojitost, jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ je vlastní, resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ je vlastní,
2. bod nespojitosti 2. druhu, jestliže $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ je nevlastní, nebo neexistuje, resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ je nevlastní, nebo neexistuje.

Důkaz. Důkaz využívá předchozí věty. Podle věty o limitě složené funkce (o substituci), jejíž předpoklad je splněn předpoklady dokazované věty (nenulovost g na okolí $g(x_0)$ a zároveň $g(x_0) = 0$ je dáno požadavkem změny znaménka g v bodě x_0), pak platí: $\lim_{x \rightarrow x_0} h\left(\frac{f}{g(x)}\right) = \lim_{x \rightarrow t_0} h(x)$, kde $t_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g(x)}$. Limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g(x)}$ je nevlastní, takže $\lim_{x \rightarrow t_0} h(x)$ je limitou h v některém z nevlastních bodů.

Pokud neexistuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g(x)}$, ale existují jednostranné $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} \frac{f}{g(x)}$, pak určíme obě jednostranné $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f\left(\frac{f}{g(x)}\right)$. Tvzení o výsledných typech bodů nespojitosti je důsledkem skládání funkcí $h \circ \frac{f}{g}$, kde zobrazování bodu x_0 můžeme symbolicky zaznamenat následovně:³³

$$x_0 \xrightarrow{\frac{f}{g}} +\infty \xrightarrow{h} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \quad \vee \quad x_0 \xrightarrow{\frac{f}{g}} -\infty \xrightarrow{h} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x).$$

□

Dalším způsobem, jak vytvořit body nespojitosti libovolného typu, je užít místo vnitřní funkce $\frac{f}{g}$ jiné funkce, která má bod nespojitosti 2. druhu, kde

³³Zápis $x_0 \xrightarrow{\frac{f}{g}} y_0$ byl zvolen pro lepší názornost postupného zobrazování vzoru ve složení více než dvou funkcí a značí fakt, že $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$

obě jednostranné limity existují, jsou nevlastní a nerovnajší se, např. $y = \operatorname{tg} x$.³⁴

Kombinací předvedených konstrukcí lze vytvořit funkce obsahující v podstatě libovolný spočetný počet bodů nespojitosti různých druhů, přičemž je vhodné poznamenat, že vytvořené body nespojitosti a jejich druh se zachovává na operaci sčítání, odčítání a násobení nezávisle na užití konstrukci, pokud sčítané (odčítané, násobené) funkce mají různé body nespojitosti.

Na závěr demonstrujme možnosti konstrukcí na příkladech:

Příklad. Vytvořme funkci, která má v $x = 1$ bod nespojitosti 2. druhu a v $x = 2$ bod odstranitelné nespojitosti.

Řešení. Body nespojitosti 2. druhu i body odstranitelné nespojitosti je možné vytvářet více zde popsányými způsoby, ukážeme několik možností.

1. *Odstranitelnou nespojitost rozšířením, nespojitost 2. druhu dělením:*

Nejprve bod nespojitosti 2. druhu – hledáme dvě elementární funkce f a g , přičemž $g(1) = 0 \neq f(1)$, zvolme třeba $f(x) = x$ a $g(x) = x - 1$, jejich podílem je funkce $y = \frac{x}{x-1}$. Bod odstranitelné nespojitosti vytvoříme rozšířením nějakou funkcí s nulovým bodem $x = 2$, třeba $y = x - 2$. Výsledná funkce s oběma požadovanými body tedy je
$$h(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2}.$$

2. *Odstranitelnou nespojitost rozšířením, nespojitost 2. druhu skládáním:*

Bod nespojitosti 2. druhu vyžaduje: jestliže g mění znaménko v nějakém okolí $x = 1$, tak alespoň jedna z $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ je nevlastní, nebo neexistuje; nebo jestliže g je kladná (záporná) v nějakém okolí $x = 1$, tak $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$) je nevlastní, nebo neexistuje. Zvolme třeba

³⁴Funkce tangens je speciální případ dělení, nejde tedy o novou konstrukci. Zde je tato funkce explicitně zmíněna, protože jde o jednoduchou a důvěrně známou funkci s požadovaným chováním, která vizuálně nevypadá jako dělení dvou funkcí.

$g(x) = x - 1$ a $f(x) = \sqrt[3]{x}$, složením $f \circ \frac{1}{g}$ dostaneme $h_1(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}$. Odstranitelnou nespojitost vytvoříme rozšířením, přičemž nezáleží na tom, zda rozšíříme vnitřní funkci nebo vnější. Dostaneme například $h(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}} = \sqrt[3]{\frac{x-2}{x^2-3x+2}}$.

3. *Odstranitelnou nespojitost skládáním, nespojitost 2. druhu dělením:*

Bod odstranitelné nespojitosti vyžaduje alespoň jednu limitu vnější funkce v nevlastním bodě vlastní. Pokud vybereme g tak, aby na nějakém okolí $x - 2$ měnilo znaménko, musíme mít vlastní a stejné obě limity v nevlastních bodech. Můžeme tedy zvolit třeba $f(x) = \arctg x$, (má alespoň jednu limitu v nevlastním bodě vlastní) a $g_1(x) = (x - 2)^2$ a vytvořit funkci $h_1(x) = \arctg \frac{1}{(x-2)^2}$. Bod nespojitosti 2. druhu chceme vytvořit dělením, musíme zkontrolovat, že dělená funkce nemá v plánovaném bodě nespojitosti hodnotu nula, což h_1 nemá. Hledáme tedy funkci g_2 tak, aby měla nulový bod $x = 1$, což je třeba $y = x - 1$. Výsledná funkce s oběma body nespojitosti je $h(x) = \frac{\arctg \frac{1}{(x-2)^2}}{x-1}$.

Problémem této funkce je její nevyšetřitelnost vzhledem k monotonii a konvexnosti a konkávnosti. V takovém případě může být řešením zvolit funkce s jednodušší derivací, zde např. $y = \arctg x$ nahradit funkcí $y = \frac{1}{x}$, která má taktéž alespoň jednu limitu v nevlastním bodě vlastní. Jestliže zbytek konstrukce ponecháme, dostaneme funkci $h_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{(x-2)^2(x-1)}$. Funkci dále neupravujeme na líbivější tvar $h_2(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$, přišli bychom o bod odstranitelné nespojitosti v $x = 2$.

4. *Skládáním $h \circ \frac{f}{g}$:* Musíme zvolit funkci h tak, aby jedna z limit byla vlastní a jedna nevlastní, nebo neexistovala. To z jednoduchých elementárních funkcí splňuje pouze exponenciální funkce, volím tedy například $h(x) = e^x$. Vnitřní funkce g musí mít dva nulové body odpovídající po-

žadovaným bodům nespojitosti, přičemž v nějakém okolí $x = 2$ musí být záporná. Můžeme zvolit $g(x) = -(x-1)(x-2)^2$. Funkce f má být elementární, definovaná na okolí $x = 2$ a $f(2) \neq 0$, stačí jednoduše zvolit $f(x) = 1$. Výsledná funkce je tedy $h(x) = e^{\frac{1}{-(x-1)(x-2)^2}}$. Tato funkce má „pěknou“ první derivaci, lze tedy lehce vyšetřit monotonii. Konvexnost a konkávnost nelze rozumně vyšetřit, neboť dostáváme v druhé derivaci rovnici pátého stupně v nespeciálním tvaru.

◇

Příklad. Vytvořme funkci h , která má v $x = 2$ bod nespojitosti 2. druhu, přičemž $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = +\infty$ a zároveň $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 3$ a dále má v $x = 4$ bod odstranitelné nespojitosti, $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 5$.

Řešení. Vnitřní funkce g musí mít nulový bod $x = 2$, na jehož okolí není pouze kladná nebo pouze záporná. Jednostranné limity v bodě $x = 2$ v konstruované funkci odpovídají hodnotám limit v nevlastních bodech funkce f . Hledáme tedy funkci f , která má $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ a zároveň $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. Zvolme $g : y = x - 2$ a $f : y = e^{-x} + 3$. Výsledná funkce splňující první část zadání je tedy například $h(x) = f \circ \frac{1}{g} = e^{\frac{-1}{x-2}} + 3$.

Funkce, která vytvoří druhý bod nespojitosti, nesmí změnit $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$, proto zvolme, že další bod nespojitosti vytvoříme rozšířením vnitřní funkce $\frac{-1}{x-2}$ funkcí s nulovým bodem v $x = 4$, tj. třeba $y = x - 4$. Naše funkce teď tedy vypadá takto: $h(x) = e^{\frac{-(x-4)}{(x-2)(x-4)}} + 3$.

Zbývá upravit funkci tak, aby limita v $x = 2$ zprava zůstala 3 a v bodě $x = 4$ se limita ze současných $\frac{1}{\sqrt{e}} + 3$ změnila na 5. Zachování hodnoty $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$ vylučuje užití lineárních transformací. Upravovat tedy musíme pouze první sčítanec, pro který limita zprava v $x = 2$ vychází nula. Pro celočíselné nenulové exponenty je e^x iracionální číslo, můžeme tedy změnit základ expo-

nenciály³⁵ nebo můžeme změnit exponent tak, aby pro $x = 4$ vyšel nulový. Měňme exponent – například tak, že čitatele exponentu vynásobíme výrazem $x - 4$. To nezmění limity v $x = 2$, protože jedna je nevlastní a druhá rovna nule. Tvořená funkce nyní vypadá $h : y = e^{\frac{-(x-4)^2}{(x-2)(x-4)}} + 3$ a v $x = 4$ má limitu $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = e^{-\frac{x-4}{x-2}} + 3 = e^0 + 3 = 1 + 3$. První sčítanec funkce tedy stačí vynásobit dvěma a limita $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 5$ je vyrobena.

Výsledná funkce má předpis $h : y = 2e^{\frac{-(x-4)^2}{(x-2)(x-4)}} + 3$. Řešitelům bychom tuto funkci zadali spíše ve tvaru $h(x) = 2e^{-\frac{x^2-8x+16}{x^2-6x+8}} + 3$, aby krácení v exponentu nebylo na první pohled zřejmé.

◇

2.5.4 Vliv (ne)spojitosti na ostatní vlastnosti

Body nespojitosti jsou nějakým způsobem ovlivněny téměř všechny vyšetřované vlastnosti u průběhu funkce. Z vět o vlastnostech chování funkcí spojitých na intervalech plyne také spousta známých důsledků. Zde se omezme na popis vlivu bodů nespojitosti.

Existence bodů nespojitosti se u elementárních funkcí ovlivňuje s definičním oborem. Vzhledem k tomu, že body nespojitosti u elementárních funkcí mohou být pouze nevlastní krajní body, lze říci, že nemá-li definiční obor elementární funkce nevlastní krajní body, nemá ani body nespojitosti. Lze také tvrdit, že body odstranitelné nespojitosti a body nespojitosti 1. druhu může elementární funkce mít pouze v izolovaných bodech doplnku definičního oboru do $\mathbb{R}$, to protože definice těchto bodů vyžaduje jednostranné limity z obou stran. Body nespojitosti 2. druhu pak funkce může mít ve všech

³⁵V tomto případě se jako dobrý jeví základ, který je druhou mocninou nějakého čísla, protože exponent pro $x = 4$ vychází $-\frac{1}{2}$. Vynásobením vytvořeného sčítance vhodným zlomkem vytvoříme žádanou hodnotu. Základ $\frac{1}{4}$, který by $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 5$ vytvořil rovnou, je naopak velmi nevhodný, protože funkce $y = (\frac{1}{4})^{-x} + 3$ má zcela jiné limity v nevlastních bodech, než původně zvolené $y = e^{-x} + 3$, takže jeho užití by celou konstrukci zkazilo.

nevlastních krajních bodech.

Co se týče parity a periodicity funkce, mají body nespojitosti mají zanedbatelný vliv. Funguje samozřejmě princip přenesení vlastností z bodu $x = a$ do bodu $x = -a$, resp. z $x = x_0$ do $x = x_0 \pm p$. Za zmínku stojí, že má-li funkce lichý počet bodů nespojitosti a má-li mít paritu, pak jedním z bodů nespojitosti musí být $x = 0$ a ostatní body nespojitosti musí být symetrické vzhledem k počátku. Co se týče typů bodů nespojitosti a hodnot v limit v nich, je třeba aby zachovávaly symetrii parity, resp. aby byly stejné v x_0 a v $x_0 \pm p$.

Vlastností, která naopak s body nespojitosti souvisí velmi úzce, je chování funkce v krajních bodech definičního oboru. U elementárních funkcí je typ bodu nespojitosti podřazeným pojmem a popisuje určité chování v krajním bodě definičního oboru.

Ve speciálních případech můžeme pozorovat také souvislost bodů nespojitosti se znaménkem funkce, neboť bod nespojitosti je kromě průsečíku s osou x jediným dalším možným způsobem, jak znaménko funkce změnit.

Další vlastností, která spojitostí ovlivněna, je diferencovatelnost funkce. V bodech, ve kterých není funkce spojitá, není ani diferencovatelná. Opačný vztah sice samozřejmě neplatí, dává nám ale souvislost s body neexistence derivace a s body, ve kterých je derivace nevlastní. Platí, že v bodech, kde funkce je spojitá a není diferencovatelná, má derivace této funkce bod nespojitosti 1. nebo 2. druhu.

Nespojitostí může být ovlivněna i monotonie a konvexnost/konkávnost, a to obdobně jako znaménko funkce. Bod nespojitosti 1. či 2. druhu je místem, kde se může změnit monotonie a konvexnost a konkávnost funkce.

Existence bodů nespojitosti 2. druhu se do jisté míry překrývá s existencí

svislých asymptot. Z definicí obou pojmů vyplývá,³⁶ že každý bod, ve kterém má funkce svislou asymptotu, je bodem nespojitosti 2. druhu; opačně to ale platit nemusí.

2.6 Chování funkce v krajních bodech $D(f)$

Definice (Funkce řádově větší, menší, stejné). Říkáme, že funkce f je *řádově větší* než funkce g na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ a *řádově menší* než g , je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ vlastní a nenulová, říkáme, že f a g jsou *řádově stejné* na okolí bodu x_0 , značíme $f \sim g$ u x_0 .

Definice (Ekvivalence funkcí v bodě). Říkáme, že funkce f a g jsou *ekvivalentní* v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$, je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, značíme $f \cong g$ u x_0 .

Po stanovení definičního oboru, prozkoumání parity a periodicity a následném případném zúžení množiny, na které funkci vyšetřujeme, a po vyšetření spojitosti typicky následuje určení chování funkce v krajních bodech $D(f)$ a určení limit v bodech nespojitosti funkce, je-li vyžadováno.

Jak bylo rozebráno v části 1.2.2, u elementárních funkcí jsou body nespojitosti, existují-li nějaké, vždy krajními body definičního oboru, což nahrává sloučení vyšetřování těchto dvou vlastností pod jednu souhrnnou – a to vyšetření chování funkce v krajních bodech $D(f)$. Z rozumných důvodů není obvyklé v záznamu řešení úlohy rozlišovat mezi těmi krajními body $D(f)$, které jsou body nespojitosti, a těmi, které jimi nejsou, což znamená, že řešitel vlastnost vyšetření chování v bodě nespojitosti může provést bez znalosti faktu, že dotčený bod je bodem nespojitosti.³⁷

³⁶viz definice bodu nespojitosti na str. 54 a asymptoty na str. 98

³⁷Hlavním důvodem proti rozlišování těchto bodů je zejména složitost problematiky definic bodů nespojitosti, která nebývá rozebírána do nutné šíře.

Vlastnost chování funkce v krajních bodech definičního oboru obvykle nebývá pro tvůrce úlohy natolik zásadní, aby přímo určovala výběr funkce. Pokud nám na specifickém typu chování záleží, je třeba ho vzít v úvahu již na samém začátku tvorby úlohy, neboť požadované chování je takřka nemožné vytvořit dodatečně bez zásadního vlivu na předpis funkce – dodatečná úprava může změnit a poškodit všechny předtím zkonstruované vlastnosti.

Co se týče chování v krajních bodech definičního oboru, rozlišujeme mezi vlastními krajními body definičního oboru, ve kterých lze určovat přímo hodnotu funkce, a nevlastními krajními body $D(f)$, kde můžeme určovat pouze existenci a hodnotu limity. Nevlastními krajními body definičního oboru jsou podle naší definice na str. 40 i nevlastní body $\pm\infty$.

2.6.1 Konstrukce chování v reálných krajních bodech

Máme-li preference týkající určování hodnot vs. určování limit v krajních bodech $D(f)$, je třeba kontrolovat, že definiční obor konstruované funkce obsahuje požadované typy krajních bodů, nebo funkci přímo konstruovat tak, aby body správného typu měla – např. podle postupů navržených Vitáskem (2012).

Co se týče konkrétních funkčních hodnot ve vlastních krajních bodech $D(f)$, obvykle bývají spíše důsledkem volby vyšetřované funkce, než aby tuto funkci nějak determinovaly. Jestliže jsou pro nás specifické hodnoty důležité, můžeme je v jednodušších případech vytvořit po zkonstruování funkce na základě jiných vlastností; ve složitějších případech je třeba je uvažovat už během konstrukce funkce.

V případě funkce s jedním vlastním krajním bodem lze funkční hodnotu upravit jednoduše pomocí lineárních transformací funkce, což jsou transfor-

mace, které nemají zásadní vliv na tvar grafu funkce.³⁸

Jestliže záleží na hodnotách u více vlastních krajních bodů, je třeba je vzít do úvahy již při konstrukci funkce. Dodatečná korekce hodnot je sice také možná, ale zpravidla ztíží nebo znemožní výpočty nutné k vyšetření jiných vlastností. Nevýhodou je také větší vliv těchto úprav na tvar grafu funkce.

Chování funkce v reálných nevlastních krajních bodech³⁹ $D(f)$ je spjato s typem bodů nespojitosti, kterými tyto krajní body mohou být. Jejich konstrukce byla popsána v kapitole 2.5.3, v posledním tam uvedeném příkladu i s ohledem na konkrétní hodnoty limit. V případě reálných nevlastních krajních bodů, které nejsou body nespojitosti, můžeme upravovat konkrétní hodnotu limity stejně jako funkční hodnotu u vlastních krajních bodů.⁴⁰ Ukažme na příkladu.

Příklad. Vytvořme funkci f s definičním oborem $D(f) = \langle -1, 2 \rangle$, pro kterou platí, že $f(-1) = 1$ a $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$.

Řešení. Nejdříve vytvořme funkci se zadaným definičním oborem. Vzhledem k tomu, že konstruovaná funkce má mít v $x = 2$ vlastní limitu, nesmíme v tomto bodě vytvořit bod nespojitosti 2. druhu.

Ze základních funkcí mají definiční obory užší než $\mathbb{R}$ sudé odmocniny, logaritmy, racionální funkce a funkce arcus sinus a arcus cosinus. Vlastní krajní body definičního oboru mohou vzniknout pouze z funkcí sudá odmocnina, arcus sinus a arcus cosinus. Logaritmické funkce mají v krajních bodech definičního oboru asymptotické chování, proto se v tomto případě nehodí. Racionální funkce vylučují izolované body, využijeme jich pro „znevlastnění“

³⁸Ve smyslu, že zůstane zachována existence význačných bodů funkce jako jsou lokální extrémy, body nespojitosti, body, ve kterých funkce není diferencovatelná apod., lineární transformací můžeme změnit např. průsečíky s osou x .

³⁹viz definice na str. 40

⁴⁰To proto, že u těchto bodů je díky definici bodu nespojitosti 2. druhu zaručena vlastní limita.

krajního bodu $x = 2$.

Volme tedy např. funkci $f_1 : y = \sqrt{-(x+1)(x-2)}$ s definičním oborem $D(f_1) = \langle -1; 2 \rangle$. Bod $x = 2$ vyloučíme vhodnou racionální funkcí. Protože ale nesmíme vytvořit bod nespojitosti 2. druhu, nemůžeme jakkoliv užít funkci $y = \frac{1}{x-2}$, viz věta o vytváření bodů nespojitosti 2. druhu dělením na str. 64. Proto namísto toho funkci f_1 nebo její argument rozšíříme funkcí $f_2 : y = \frac{x-2}{x-2}$, $D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Dostáváme např. funkci $f_3 : y = \sqrt{\frac{-(x+1)(x-2)^2}{x-2}}$, $D(f_3) = \langle -1; 2 \rangle$.

Pro hodnoty sestrojené funkce v krajních bodech definičního oboru nyní platí: $f_3(-1) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$. Pro dosažení požadovaných hodnot musíme tedy změnit každou z nich, a to o jinou hodnotu. Z toho vyplývá, že požadovaných hodnot nelze docílit složením s jinou funkcí, např. lineární transformací. Způsobem, jak požadované změny dosáhnout, je například přičtení vhodné funkce, v tomto konkrétním případě funkce procházející body $[-1; 1]$ a $[2; -3]$, tj. například $f_4 = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$.

Hledanou funkcí je součet $f_3 + f_4$, tedy funkce $y = \sqrt{\frac{-(x+1)(x-2)^2}{x-2}} - \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$.

◇

Přičtením vhodné funkce lze teoreticky změnit funkční hodnoty v libovolném počtu krajních bodů definičního oboru. Praktické užití u úlohy na průběh funkce je nicméně limitováno nejen počtem upravovaných krajních bodů a tedy složitostí opravující funkce, ale hlavně následnou řešitelností (ne)rovníc určujících průsečíky s osou x , monotonii nebo konvexnost a konkávnost takto vytvořené funkce.

V předchozím příkladě bylo pro úpravu dvou hodnot užito lineární funkce, jejíž derivace je dostatečně jednoduchá na to, aby vyšetřování funkce příliš nezkomplikovala. U některých funkcí je ale možné, že i přičtení pouhé lineární funkce povede například k znemožnění určení průsečíků s osou x nebo

lokálních extrémů, obojí můžeme pozorovat např. u funkce $y = \sqrt{\cos x}$.

2.6.2 Konstrukce chování v nevlastních bodech $\pm\infty$

Posledním možným krajním bodem definičního oboru jsou nevlastní body $\pm\infty$. Co se týče chování funkce v těchto bodech, můžeme v jednom nevlastním bodě rozlišit čtyři stavy:

- limita neexistuje,
- limita existuje a je vlastní,
- limita existuje, je nevlastní a neexistuje asymptota,
- limita existuje, je nevlastní a existuje asymptota.

V této části se omezíme pouze na konstrukci neexistující, vlastní a nevlastní limity bez ohledu na asymptotické chování, kterému je věnována zvláštní část 2.8.

Uvažujeme-li **neexistující** limitu funkce v nevlastním bodě, lze neexistence této limity dosáhnout několika způsoby.

Triviálním způsobem je užití funkce s omezeným definičním oborem, například funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ nemá limitu ani v jednom z nevlastních bodů. Takové chování sice obecně na mysli nemíváme, ale je užitečné si ho uvědomit. Narážíme zde opět na víceznačnost negativního vymezení, tj. na nejednoznačnost tvrzení „limita neexistuje“.⁴¹

Lze se sice setkat i s rozlišováním situací, kdy limita neexistuje a kdy limita nemá smysl, převážně se tak děje pouze ale slovně a u žádného z porovnávaných autorů není nesmyslnost limity přímo definována. U zmíněné funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ můžeme tedy hovořit o neexistenci limity v nevlastním

⁴¹Obdobný problém už byl řešen u bodů *nespojivosti* funkce, v části 1.2.2.

bodě, protože $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1-x^2}$ neexistuje fakticky – ve smyslu, že je vyloučena existence nějakého $a \in \mathbb{R}^*$, pro které by mohla být splněna definice limity.

Konstruuje-li funkci s neexistující limitou v nevlastním bodě, míváme spíš na mysli situaci, kdy je určování limity vzhledem k $D(f)$ smysluplné a kdy neexistence limity neodkazuje na nedefinovanost funkce, ale přímo na určitý typ jejího chování.

Chceme-li tedy sestavit funkci, u které má smysl limitu v nevlastním bodě určovat a u které tato limita neexistuje, musíme sestavit funkci, která má z příslušné strany neomezený definiční obor a která pro příslušný nevlastní bod nesplňuje definici limity.

V nevlastním bodě zcela jistě nemají limitu všechny nekonstantní periodické funkce, z elementárních funkcí tedy funkce goniometrické a všechny další zkonstruované třeba podle postupů navržených v části 2.3.1. Příkladem takové funkce, kterou lze vyšetřit a která nemá limitu v nevlastním bodě, je tedy například $y = \frac{1}{\sin x + 2}$.

Vlastnosti neexistence limity v nevlastních bodech u periodických funkcí lze dále užít při konstrukci složitějších funkcí, které už periodické být nemusí, a to podle následujících tvrzení:

Věta. Nechť f je funkce definovaná na nějakém okolí $+\infty$ a platí pro ni, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ neexistuje. Dále nechť g je funkce a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Pak platí, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \pm g)$ neexistuje. Je-li navíc $a \neq 0$, pak neexistují ani limity součinu a podílu funkcí f a g .

Věta. Nechť f je spojitá na nějakém okolí $U(+\infty)$ a platí pro ni, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ neexistuje. Dále nechť g není konstantní na $f(U)$. Pak $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x))$ neexistuje.

Věta. Nechť funkce f je definovaná na redukovaném okolí bodu a a platí,

že $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje a nechť pro funkci g platí, že $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a$. Pak $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x))$ neexistuje, jestliže pro každé okolí $P_1(+\infty)$ existuje okolí $P_2(a)$ takové, že $P_2 \subset g(P_1)$.

Ekvivalentní věty po příslušné úpravě samozřejmě platí i pro nevlastní bod $-\infty$.

Užití aritmetiky limit je z konstrukčního hlediska principiálně velmi jednoduché. Praktickým problémem snižujícím použitelnost této metody při tvorbě úloh je počet základních funkcí, které mají požadovaný typ limit. Další nevýhodou pro určení celého průběhu funkce je častá nevyšetřitelnost ostatních vlastností u funkcí obsahujících dvojici „nekompatibilních“ operandů; příkladem může být funkce $y = e^x + \sin x$, která má sice neexistující limitu v nevlastním bodě $x = -\infty$, pro úlohu na určení průběhu funkce jde ale o funkci nevhodnou, neboť rovnice určující průsečíky, stacionární a inflexní body jsou transcendentní a neřešitelné jinak než numerickými metodami. Z tohoto hlediska je na tom lépe přístup využívající skládání, alespoň co do řešitelnosti rovnice určující průsečíky s osou x .

Chceme-li vytvořit funkci s **vlastní** limitou v nevlastním bodě, můžeme využít několika způsobů, z nichž nejsnazší je využití aritmetických operací pro funkce, které již vlastní limitu mají.

Věta. Nechť f a g jsou funkce a platí $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$. Pak platí, že $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$. Je-li navíc $b \neq 0$, pak platí i $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Obdobně jednoduchý je i vztah pro skládání, který přímo vyplývá z věty o limitě složené funkce

Věta. Nechť f a g jsou funkce, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{y \rightarrow a} g(y) = b$, $b \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje okolí $U(+\infty)$ takové, že $f(x) \neq a$ pro $x \in U(+\infty)$, pak platí,

že $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = b$.

Nechť f a g jsou funkce, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ a g je spojitá v bodě a . Pak platí, že $\lim_{x \rightarrow \infty} g(f(x)) = g(a)$.

Obě tyto věty jsou běžně známy i ve své obecnější podobě a využívají se pro řešení limit. Stejně tak využitelné jsou ale i pro konstrukci příkladů. Předností této konstrukce je zejména její jednoduchost, stačí nalézt dvě funkce, resp. jednu, s vlastní limitou. Mezi základními funkcemi mají alespoň jednu vlastní limitu v nevlastním bodě funkce mocninné se záporným exponentem, funkce exponenciální a funkce arcus tangens a arcus cotangens.

Za výhodu i nevýhodu funkce zkonstruované podle popsaných vět lze považovat možnou trivialitu výpočtu příslušné limity. Například funkce daná předpisem $y = \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$ má vlastní limitu rovnou $\frac{\pi}{2}$, což lze zjistit pouhým dosazením. Jednoduchost výpočtu limit funkce v úloze na vyšetření průběhu funkce ale nemusí být nežádoucí, záleží na dovednostech, které chceme konkrétní úlohou procvičit nebo testovat.

Dalším způsobem, jak vytvořit vlastní limitu, je užití podílu řádově stejných funkcí v okolí nekonečna.⁴² Ze základních funkcí je u nekonečna ekvivalentní funkce arcus cotangens s funkcí $\frac{1}{x}$. Ekvivalentní na okolí nevlastních bodů jsou také funkce se svými asymptotami, mají-li je. Řádově stejné na okolí nevlastních bodů jsou vždy polynomy stejných stupňů a také stejné různě lineárně transformované základní funkce.

Kromě ekvivalencí na okolí nevlastních bodů můžeme při konstrukci vlastní limity využít i ekvivalencí u nuly, stačí použít na obě funkce transformaci převrácená hodnota vzorů.⁴³ Tato transformace převrátí chování funkcí z nuly do nevlastního bodu, konkrétně chování na levém okolí nuly do nevlastního

⁴²viz definice na str. 72

⁴³viz definice na str. 43

bodu $-\infty$ a pravého okolí nuly do $+\infty$. Podobně lze využít i funkce, které jsou ekvivalentní, resp. řádově stejné, jinde než na okolí nevlastního bodu nebo nuly, stačí tuto ekvivalenci přesunout do nuly, tj. využít transformace posunutí argumentu.

Věta. Necht' f a g jsou řádově stejné v bodě $x = 0$. Pak jsou řádově stejné i funkce $f \circ \frac{1}{x}$ a $g \circ \frac{1}{x}$ na okolí nevlastních bodů.

Výhodou této metody je rozmanitost funkcí s vlastní limitou, které lze takto vytvořit, a také fakt, že ke každé funkci diferencovatelné v bodě⁴⁴ x_0 lze nalézt funkci ekvivalentní v podobě tečny nebo Taylorova polynomu, je-li funkce v tomto bodě diferencovatelná do vyšších řádů. Nevýhodou je fakt, že vlastní limitu dostáváme vždy z podílu funkcí, což pro vyšetření průběhu funkce často znamená problém v podobě příliš složité první či druhé derivace. Tento způsob také obecně nezachovává jiné, již vytvořené vlastnosti.

Posledním cílem konstrukcí diskutovaných v této části je tvorba **nevlastní** limity funkce v nevlastním bodě. I zde se jako nejjednodušší jeví použití aritmetiky funkcí.

Věta. Necht' f a g jsou funkce, necht' $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ a g je na nějakém okolí $+\infty$ omezená. Pak existují limity $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm g(x))$ a jsou rovné $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Je-li navíc g na nějakém okolí $+\infty$ kladná, resp. záporná, pak existují i limity $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x))$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ a jsou rovné $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, resp. $-\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Věta. Necht' f a g jsou funkce a necht' mají nevlastní limity v nevlastním bodě. Pak existuje limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x))$ a je také nevlastní. Mají-li funkce f a g stejné nevlastní limity v nevlastním bodě, pak existuje limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))$ a je nevlastní, jsou-li limity f a g v nevlastním bodě také nevlastní, ale různé, pak existuje limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))$ a je nevlastní.

⁴⁴viz definice na str. 88

Důkazy obou těchto vět jsou dobře známé, jde o zúžení věty o aritmetice limit, druhá věta explicitně popisuje případy, kdy má výsledný výraz smysl.

Konstrukční použití těchto vztahů je triviální a výhody a nevýhody jsou stejné jako u obdoby těchto tvrzení pro konstrukci vlastních limit.

Po sestrojení funkce s nevlastní limitou v nevlastním bodě můžeme využít i funkcí, u kterých je známé řádové srovnání v nevlastních bodech.

Věta. Necht' f a g jsou funkce, f je na nějakém okolí $U(+\infty)$ řádově větší než g , g není na $U(+\infty)$ konstantní nulová a necht' obě funkce nějakém okolí nekonečna nemění znaménko. Pak existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ a je nevlastní.

Důkaz. Z definice řádově větší funkce a z předpokladu, že obě funkce nemění znaménko, lze konstatovat: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0^+$, nebo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0^-$. Požadovaný vztah dokážeme přímo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)}} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty.$$

□

I v tomto případě je možné transformací převrácení obrazů přenášet řádové srovnání z $x = 0$ do nevlastního bodu, jak už bylo popsáno v části věnující se konstrukci vlastní limity.

Výhodou této konstrukce je jednoduchost použití, stačí nalézt dvě řádově nesrovnatelné funkce, opět jsme ale omezení podílovým tvarem se všemi jeho možnými problémy.

Ukažme možnosti použití popisovaných konstrukcí všech typů chování na okolí bodů $\pm\infty$ na příkladech.

Příklad. Sestrojme elementární funkci, která nemá v $-\infty$ limitu a v $+\infty$ má vlastní limitu rovnou -1 .

Řešení. Požadavky vylučují, aby výsledná funkce byla periodická, což by byla první volba pro funkci s neexistující limitou v nevlastním bodě. Periodickou funkci nicméně použít musíme, zvolme například $f : y = \sin x$.

Chceme-li dosáhnout vlastní limity v jednom z nevlastních bodů, musíme funkci f na okolí tohoto bodu stále více a více omezovat, aby tam mohla splňovat definici limity. Jako nejsnazší se jeví využití aritmetických operací, konkrétně násobení nebo dělení. Hledejme funkci g , pro kterou platí $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Jiná hodnota limity by při násobení nedokázala „vyhladit“ oscilaci funkce f . V druhém nevlastním bodě naopak amplitudy nesmíme nekonečně zmenšovat, protože požadujeme, aby limita neexistovala. Pro funkci g tedy pouze požadujeme, aby $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ byla nenulová. V tomto případě limita může být i nevlastní, protože f mění na okolí $-\infty$ znaménko.

Ze základních funkcí můžeme přímo zvolit exponenciální funkci o libovolném základu menším než 1, nebo $\operatorname{arccotg} x$. Zvolme třeba $g : y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$. Funkce s neexistující limitou pro $x \rightarrow -\infty$ a vlastní limitou pro $x \rightarrow +\infty$ má tedy předpis $h_1 : y = e^{-x} \sin x$.

Zbývá upravit hodnotu vlastní limity. Protože je nulová, stačí z lineárních transformací zvolit posunutí o -1 . Požadované vlastnosti má tedy například funkce $h_2 : y = e^{-x} \sin x - 1$. ◇

Příklad. Sestrojme funkci, která má v jednom nevlastním bodě nevlastní limitu $-\infty$ a v druhém nevlastním bodě limitu rovnou 3.

Řešení. Ukažme několik různých přístupů:

1. Funkci s těmito vlastnostmi lze sestrojit jednoduše pomocí vhodné základní funkce a lineárních transformací. Vhodnou základní funkcí je v tomto případě libovolná funkce exponenciální, protože všechny tyto funkce mají v jednom nevlastním bodě vlastní limitu a v druhém nevlastní. Zvolme například $f : y = e^x$. Tato funkce má pro $-\infty$ vlastní

limitu rovnou nule, pro $+\infty$ má nevlastní limitu $+\infty$. Složením $g \circ f$ s funkcí $g : y = -x + 3$ tyto limity změním na požadované hodnoty. Funkce s danými vlastnostmi má například předpis $h : y = -e^x + 3$.

2. Také můžeme zkusit najít dvojici funkcí f a g , kde f je řádově větší než g v jednom nevlastním bodě a řádově stejná či menší než g v druhém. I zde se nabízí užití exponenciální funkce, která je výjimečná tím, že jako jediná ze základních funkcí má zcela odlišné chování v nevlastních bodech. Pro všechny ostatní základní funkce platí, že jsou-li v nevlastních bodech definovány, shodují se tam v neexistenci, konečnosti, nebo nekonečnosti limity.

Zvolme tedy $f : y = e^x$. Jako druhou funkci stačí zvolit např. $g : y = x$, neboť platí, že exponenciální funkce je v $+\infty$ řádově větší než lineární a zároveň v $-\infty$ je f řádově menší než x , protože $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Funkce $h_1 : y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{x}$ bude tedy mít v nevlastních bodech jednu limitu vlastní a druhou nevlastní.

Zajištění konkrétních hodnot je nyní pouze detail. Nevlastní limita pro $x \rightarrow +\infty$ vychází $+\infty$, pro požadovanou změnu stačí h_1 překlopit, dostáváme funkci $h_2 = -h_1 = -\frac{e^x}{x}$. Vlastní limita h_2 pro $x \rightarrow -\infty$ vychází nula, pro změnu hodnoty nelze použít dilataci, ale pouze posunutí. Hledaná funkce má tedy například předpis $h_3 : y = -\frac{e^x}{x} + 3$.

3. Trváme-li na tom, že exponenciální funkci užít nechceme, můžeme opět využít řádového srovnání funkcí. Pokud všechny neexponenciální základní funkce mají obdobné limity v obou nevlastních bodech a my požadujeme jeden výsledek vlastní, druhý nevlastní, je třeba, aby alespoň v jednom nevlastním bodě podíl funkcí vycházel jako neurčitý výraz a jednodušší bude, když v tom druhém nevlastním bodě vyjde

výraz určitý.

Zvolme $f : y = \operatorname{arccotg} x$. Tato funkce má v nevlastních bodech obě limity vlastní, jedna z nich je rovna nule, druhá je nenulová. Podílem funkcí chceme v jednom nevlastním bodě vytvořit neurčitý výraz, tvoříme tedy „ $\frac{0}{0}$ “. V druhém nevlastním bodě má $\operatorname{arccotg} x$ limitu π , dělení nulou by zde vytvořilo nevlastní limitu. Hledáme tedy funkci g , která má v obou nevlastních bodech limitu nula a která je v na okolí $+\infty$ řádově stejná, nebo menší než funkce $\operatorname{arccotg} x$. Takovou funkcí je například $g : y = \frac{1}{x}$. Funkce $h_1 : y = \frac{f}{g} = \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}}$ tedy splňuje požadavek jedné vlastní a druhé nevlastní limity v nevlastním bodě. Hodnota vlastní limity je nyní 1, nevlastní vychází $-\infty$. Potřebujeme tedy upravit pouze hodnotu vlastní limity a protože je nenulová, stačí vynásobit předpis hodnotou 3. Hledaná funkce tedy může mít předpis

$$h_2 : y = 3 \cdot \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = 3x \operatorname{arccotg} x$$

◇

Jak je vidět z řešení příkladů, metody tvorby funkce s daným chováním v nevlastním krajním bodě jsou poněkud omezené a nenabízí mnoho možností – zejména pokud požadujeme nestejné chování v obou nevlastních bodech. Zkusme u nějaké funkce změnit její chování v nevlastním bodě.

Příklad. Mějme funkci danou předpisem $f : y = x \cdot \ln x$. Upravme předpis tak, aby limita v nevlastním bodě $+\infty$ byla vlastní a nenulová.

Řešení. Zadaná funkce f má nyní pro $x \rightarrow +\infty$ nevlastní limitu rovnou $+\infty$. Abychom tuto hodnotu změnili na konečnou, máme několik možností. Můžeme najít funkci řádově stejnou na okolí nekonečna, podíl zadané f a této řádově stejné funkce bude mít nenulovou vlastní limitu. Dále můžeme najít k f funkci řádově větší, podíl by pak měl nulovou limitu, kterou bychom na

nenulovou změnil transformací posunutí. Další možností by třeba bylo využít konečné nulové limity f pro $x \rightarrow 0^+$ a transformací převrácená hodnota obrazu toto chování přenést na nevlastní bod a opět nulovou limitu změnit transformací posunutí. Vyzkoušejme:

- Hledáme funkci řádově stejnou jako je $y = x \cdot \ln x$ na okolí $+\infty$. Z faktu, že jde o součin lineární funkce a funkce logaritmické, která je řádově menší než lineární, můžeme odhadnout, že funkce f je řádově větší než $y = x$ a zároveň řádově menší než $y = x^2$. Můžeme se pokusit najít hodnotu exponentu funkce $y = x^n$ z definice řádově stejné funkce, tj. najít exponent $n \in (1; 2)$ takový, aby $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \ln x}{x^n}$ byla vlastní. Zjišťujeme, že takový exponent neexistuje. Funkce f tedy není řádově stejná jako nějaká mocninná a odmocninná funkce. Jako další volba se nabízí poněkud triviální fakt, každá funkce je ekvivalentní sama se sebou. Protože nám stačí řádově stejná funkce, můžeme f , resp. její činitele lineárně transformovat, protože tyto transformace na řád nemají vliv. Zadaná funkce f tedy bude řádově stejná jako například $g : y = (x - 1) \cdot \ln 2x$. Předpis hledané funkce tedy může například být $h : y = \frac{x \cdot \ln x}{(x-1) \cdot \ln 2x}$. Nicméně tato funkce není z hlediska průběhu funkce dobře vyšetřitelná.
- Najít k f řádově větší funkci není problém, jednu už jsme dokonce našli, je jí $y = x^2$. Dovedeme tedy z f vytvořit funkci s nulovou limitou, $h_1 : y = \frac{x \cdot \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x}$. Nenulovost zajistíme posunutím předpisu o libovolnou nenulovou konstantu, třeba o 1. Funkce vyhovující zadání může tedy být dána předpisem $y = \frac{\ln x}{x} + 1$.
- Využíváme faktu, že $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$. Transformací převrácená hodnota obrazu se rozumí složení transformované funkce s funkcí $y = \frac{1}{x}$ zevnitř,

tj. v tomto případě dostáváme funkci $y = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x}$. Limita této funkce v nevlastním bodě $+\infty$ je rovna 0, je tedy už vlastní. Nenulovost můžeme vytvořit stejně jako v předchozím případě. Výsledná funkce má předpis $h : y = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x} + 1$.

◇

Vidíme, že požadavek na změnu chování v nevlastním bodě není nijak triviální a této změny nelze dosáhnout bez zásadní změny celé funkce. Dalším problémem je, že vytvořené funkce sice splňují požadavek vlastní nenulové limity, z hlediska vyšetřitelnosti však nejsou až na jeden případ vhodné.

Závěrem lze konstatovat, že při tvorbě úlohy na vyšetření průběhu funkce je snazší neklást na tuto vlastnost funkce příliš velký důraz a výsledné chování spíše považovat za důsledek konstrukcí jiných vlastností. Uvedené konstrukce nicméně nejsou zcela neužitečné, mohou částečně sloužit při vytváření dílčích úloh na limity funkcí a v případech, že po funkci nebudeme požadovat příliš „extravagantní“ chování, mohou být užitečnými vodítky.

2.6.3 Vliv na ostatní vlastnosti funkce

Vliv chování funkce ve vlastních krajních bodech definičního oboru na ostatní vlastnosti funkce je velmi malý. Triviálně má chování v krajních bodech $D(f)$ souvislost s podobou definičního oboru. Má-li funkce mít funkční hodnoty v jeho krajních bodech, musí mít definiční obor alespoň vlastní krajní body, má-li mít funkce v některém z krajních bodů pouze limitu, definiční obor musí mít v tomto bodě nevlastní krajní bod. Podobně chceme-li zkonstruovat funkci s například vlastní limitou v nevlastním bodě, musí být definiční obor hledané funkce z příslušné strany neomezený.

Kromě zřejmé souvislosti s definičním oborem můžeme ještě konstatovat podobně zřejmou a velmi silnou souvislost s existencí a podobou asymptot.

Můžeme konstatovat, že existence asymptoty se směrnici je spjatá s konkrétním chováním funkce v nevlastním bodě $D(f)$ a to takto: vlastní limita v nevlastním bodě je nutnou a postačující podmínkou vodorovné asymptoty, nevlastní limita v nevlastním bodě je nutnou, ale už ne postačující, podmínkou pro šikmou asymptotu.⁴⁵ Neexistující limita v nevlastním bodě asymptotické chování v tomto bodě vylučuje.

Kromě definičního oboru a asymptot jsou chováním v krajních bodech $D(f)$ nepřímo ovlivněny i jiné vlastnosti, a to chováním takových krajních bodů, které jsou zároveň body nespojitosti funkce. Význam těchto bodů pro jiné vlastnosti byl již popsán v části 2.5.4.

2.7 Diferencovatelnost funkce

Definice (Derivace funkce v bodě). Označme

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *vlastní derivaci* rovnou $a \in \mathbb{R}$, je-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x, x_0) = a.$$

Je-li $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x, x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci* rovnou $\pm\infty$.

Derivací funkce f v bodě x_0 *zleva*, *zprava* označujeme hodnotu příslušné jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \varphi(x, x_0)$.

Derivaci funkce v bodě x_0 značíme $f'(x_0)$, derivaci zleva a zprava značíme $f'(x_0^-)$, $f'(x_0^+)$.

Definice (Stacionární bod funkce). Říkáme, že bod x_0 je *stacionární bod* funkce f , platí-li $f'(x_0) = 0$.

⁴⁵viz definice na str. 98

Definice (Diferencovatelnost funkce). Říkáme, že funkce f je *diferencovatelná v bodě* x_0 , má-li v tomto bodě vlastní derivaci. Říkáme, že funkce f je *diferencovatelná na intervalu* I , je-li diferencovatelná v každém vnitřním bodě tohoto intervalu a v levém, resp. pravém krajním bodě I má vlastní derivaci zprava, resp. zleva, je-li tento bod součástí I .

Definice (Derivace funkce). Nechť f je diferencovatelná na intervalu I . *Derivací funkce f na intervalu I* nazveme funkci $f' : x \rightarrow f'(x)$ pro všechna $x \in I$.

Abychom neopakovali problémy s negativním vymezením, jaké jsme řešili u bodu nespojitosti, zavedme pozitivně i termín bod nediferencovatelnosti funkce.

Definice (Bod nediferencovatelnosti funkce). Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ *bod nediferencovatelnosti*, je-li v tomto bodě definovaná a $f'(x_0)$ buď neexistuje, nebo je nevlastní.

Protože v této kapitole budeme formulovat tvrzení platné pro elementární funkce, budeme potřebovat i jejich formální definici. Využijeme tu, kterou ve své práci formuloval Vitásek (2012, p. 18).

Definice. Množinu funkcí $\langle F; O \rangle$ generovaných množinou funkcí F a množinou binárních operací O definujeme takto:

1. $F \subseteq \langle F; O \rangle$
2. $f, g \in \langle F; O \rangle \wedge \otimes \in O \Rightarrow f \otimes g \in \langle F; O \rangle$
3. každou funkci z $\langle F; O \rangle$ lze z F sestrojit konečným počtem kroků 2.

Definice (Elementární funkce). Funkci nazveme *elementární funkcí* právě tehdy, když je prvkem množiny $\langle F_E; O_E \rangle$, kde

1. $F_E = \{c, x, \sqrt[n]{x}, e^x, \log x, \sin x, \arcsin x\},$
2. $O_E = \{+, -, \cdot, \div, \circ\}.$

Vlastnost diferencovatelnosti funkce typicky nebývá přímo uvedena v seznamu požadovaných vlastností k vyšetření,⁴⁶ pro úlohu na vyšetření průběhu funkce jde ale o vlastnost velmi podstatnou. U některých autorů můžeme na požadavek vyšetření diferencovatelnosti nepřímo narazit v požadavku na určení bodů, kde neexistuje první či druhá derivace vyšetřovaných funkcí. Tento požadavek naznačuje, že diferencovatelnost, podobně jako spojitost, je pro průběh funkce vyšetřitelné metodami diferenciálního počtu důležitější v bodech, kde vyšetřovaná funkce tuto vlastnost nemá. To je zřejmé u elementárních funkcí, pro něž platí, že jsou diferencovatelné na svých definičních oborech až na případné izolované body.⁴⁷

Další podobností diferencovatelnosti a spojitosti, resp. bodů nespojitosti a bodů, kde funkce není diferencovatelná, je míra, ve kterých se tyto vlastnosti u úloh na vyšetření průběhu funkce vyskytují. V obou případech jde o „pokročilejší“ vlastnosti a vypořádání se s nimi patří k náročnějším dovednostem, které úloha na vyšetření průběh funkce testuje.

V této části se tedy budeme zabývat, spíše než diferencovatelností, body, ve kterých funkce není diferencovatelná. U těchto bodů můžeme poté požadovat několik různých typů chování podle toho, jakým způsobem nesplňuje definici diferencovatelnosti. Klasifikace těchto typů chování je složitější a nejednoznačnější než např. u bodů nespojitosti, což může být důvodem, proč mezi „různými“ body nediferencovatelnosti nerozlišuje žádný z porovnávaných autorů. Pro účely této práce se hodí rozdělení podle důsledků na tvar grafu funkce na okolí tohoto bodu. Rozdělení je velmi neformální a slouží

⁴⁶viz seznam vyšetřovaných vlastností na str. 14

⁴⁷Toto tvrzení bude dokázáno později.

pouze k rozlišení různých situací a požadavků, které na bod nediferencovatelnosti můžeme klást:

- *body se svislou tečnou*, tj. body funkce, ve kterých je derivace nevlastní, nebo ve kterých existují různé nevlastní derivace zleva a zprava,
- *hroty*, tj. lokální extrémy funkce, ve kterých neexistuje derivace
- *zlomy*, tj. body, ve kterých existují vlastní derivace zleva i zprava, liší se, ale funkce v nich nemá lokální extrém,
- body, kde alespoň jedna jednostranná derivace neexistuje.

Toto rozdělení není disjunktí, např. bod se svislou tečnou může být zároveň hrotem funkce, nicméně i tak nám usnadní popis různých situací.

2.7.1 Konstrukce bodů nediferencovatelnosti

Chceme-li konstruovat libovolný bod nediferencovatelnosti funkce, nabízí se tvrzení:

Věta. Není-li funkce f v bodě x_0 spojitá, není f v x_0 diferencovatelná.

Důkaz. Jde o obměnu známé věty: „Má-li f vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak je f v x_0 spojitá.“ Důkaz této věty lze nalézt např. u Veselého (2004, p. 133).

To znamená, že bod nediferencovatelnosti mají všechny funkce, které mají nějaký bod nespojitosti, ve kterém jsou definované. Můžeme tedy užít všech konstrukcí týkajících se bodů nespojitosti ve vnitřních bodech a ve vlastních krajních bodech $D(f)$ popsaných v části 2.5.3.

Dalším možným konstrukčním postupem je využití definice funkce po částech nebo ekvivalentních zadání využívajících funkce signum nebo charakteristických funkcí. Bod nediferencovatelnosti vytvoříme v libovolném bodě

vhodnou volbou předpisů definujících jednotlivé části, a to tak, že vybereme dvě funkce, které mají v bodě x_0 , ve kterém výsledná funkce mění předpis, různou derivaci, resp. takové dvě funkce, že derivace první funkce zleva v bodě x_0 se liší od derivace druhé funkce zprava v x_0 . Rozdíl těchto derivací nemusí být pouze v hodnotě, lze vybrat funkce, které se budou lišit i existencí nebo konečností těchto derivací.

Příklad.
$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (-\infty; 0) \\ 2x & x \in \langle 0; 1) \\ \sqrt{x-1} + 2 & x \in \langle 1; +\infty) \end{cases}$$

Výhodou je, že lze snadno vytvořit body nediferencovatelnosti různého typu, přičemž lze snadno sestavit i funkci, která je v těchto bodech spojitá. Například výše uvedená funkce je spojitá a má dva body nediferencovatelnosti, bod $x = 0$, kde obě derivace jsou vlastní, ale liší se, a bod $x = 1$, kde je derivace zleva vlastní a zprava nevlastní. Další výhody a nevýhody souvisí s definicí funkce po částech a byly diskutovány v části 2.5.3.

Nechceme-li se užít definice funkce po částech a hledáme-li nějaký obecný způsob, jak funkce s body nediferencovatelnosti vytvářet, můžeme chtít využít souvislosti existence bodů nediferencovatelnosti s vlastnostmi funkce popisující derivaci. Budeme-li derivaci nějaké funkce f chápat jako funkci f' , pak bod nediferencovatelnosti f je bodem nespojitosti funkce f' nebo bodem, ve kterém f' není definovaná. Pro konstrukci f se tedy nabízí sestavit funkci f' s těmito vlastnostmi a až poté hledat f jako funkci k f' primitivní. Tento přístup má ale několik problémů – například je problém nalézt primitivní funkci k nespojitě funkci. Navíc i kdyby taková primitivní funkce k funkci f' existovala (což může a nemusí, například nemá-li f' Darbouxovu vlastnost) a my bychom ji našli, potíží je zajištění definovanosti f v bodě nespojitosti

nebo nevlastním krajním bodě f' . Prakticky se nám tedy integrací možné funkce f' spíše nepodaří žádanou funkci f s bodem nediferencovatelnosti najít.

Další volbou je využití vět o aritmetice a skládání diferencovatelných funkcí. Následující tvrzení jsou uvedena bez důkazů, neboť je lze najít například u Veselého (2004, pp. 135–138).

Věta (Aritmetika diferencovatelných funkcí). Nechtě funkce f a g jsou diferencovatelné na I . Pak i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ jsou diferencovatelné na I . Platí-li $g(x_0) \neq 0$ pro všechna $x_0 \in I$, pak je na I diferencovatelná i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta (Skládání diferencovatelných funkcí). Nechtě funkce f je diferencovatelná na I a nechtě funkce g je diferencovatelná na $f(I)$. Pak funkce $g \circ f$ je diferencovatelná na I .

Věta. Nechtě elementární funkce $f \in \langle F_E \setminus \{\sqrt[n]{x}, \arcsin x\}; O_E \rangle$. Pak je f diferencovatelná na svém definičním oboru.

Důkaz. Funkce c , x , e^x , $\log x$, a $\sin x$, jsou diferencovatelné na celých svých definičních oborech. Z vět o aritmetice a skládání diferencovatelných funkcí vyplývá, že na svém definičním oboru budou diferencovatelné i všechny funkce jimi generované pomocí aritmetických operací a skládání.

□

Funkce $\sqrt[n]{x}$ není diferencovatelná v bodě $x = 0$, funkce $\arcsin x$ není diferencovatelná v bodech $x = \pm 1$. Z toho vyplývá, že do množiny generátorů z předchozí věty nelze tyto funkce přidat.

Důležitým konstrukčním důsledkem je tedy fakt, že elementární funkce s bodem nediferencovatelnosti jsou z množiny F_E vždy vytvořeny pomocí funkce n -tá odmocnina nebo arcus sinus, resp. pomocí funkcí z nich odvozených, typicky absolutní hodnoty a arcus cosinus. Užití těchto funkcí je ale

pouze nutnou podmínkou, i funkce zkonstruované pomocí $\sqrt[n]{x}$ a $\arcsin x$ mohou být diferencovatelné na celých svých definičních oborech, např. funkce $y = \sqrt{x^4}$.

Věta (Existence bodů nediferencovatelnosti funkce n -tá odmocnina). Necht' $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a f je elementární funkce. Označme:

$$L^\pm = \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n}.$$

Je-li alespoň jedna z limit L^+ , L^- nevlastní, je x_0 z příslušné strany bodem nediferencovatelnosti f typu svislá tečna. Pokud je $\sqrt[n]{f}$ definovaná v nějakém okolí x_0 a existují $L^\pm$, existuje $f'(x_0)$ právě tehdy, když $(-1)^{n+1}L^- = L^+$.

Důkaz. Pro $f : y = (x - x_0)^n$ tvrzení platí triviálně. Pro ostatní funkce plyne z řádového srovnání funkcí f a $(x - x_0)^n$ v x_0 vyjádřeného limitami $L^\pm$.

□

Poznámka. Bez důkazu poznamenejme, že také platí vztah mezi hodnotami limit $L^\pm$ a hodnotami derivací zleva, resp. zprava, za předpokladu, že funkce f je definovaná na levém, resp. pravém, okolí x_0 .

$$f'(x_0^+) = \begin{cases} L^+ & \text{pro } L^+ \text{ nevlastní} \\ \sqrt[n]{L^+} & \text{pro } L^+ \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f'(x_0^-) = \begin{cases} (-1)^{n+1}L^- & \text{pro } L^- \text{ nevlastní} \\ \sqrt[n]{(-1)^{n+1}L^-} & \text{pro } L^- \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Toto nám umožňuje snadné rozlišení hrotů od zlomů, tj. míst, kde derivace jsou vlastní, liší se a v bodě buď je, nebo není lokální extrém.

Ukažme rozhodovací kritéria na příkladech.

Příklad. Určeme, zda funkce $f : y = \sqrt[3]{(x-2)^2 \cdot (2x+1)}$ má nějaké body nediferencovatelnosti.

Řešení. Nutnou podmínkou existence bodu nediferencovatelnosti x_0 složené funkce $\sqrt[3]{h}$ je $h(x_0) = 0$. Nediferencovatelnost funkce f je tedy možná pouze v bodech $x = 2$ a $x = -\frac{1}{2}$.

Pro bod $x = 2$ platí:

$$L^\pm = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{(x-2)^2(2x+1)}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{2x+1}{x-2} = \pm\infty.$$

Alespoň jedna z limit je nevlastní, v $x = 2$ má f bod nediferencovatelnosti typu svislá tečna.

Dále platí, že n je liché a L^- a L^+ mají různá znaménka, z čehož vyplývá, že f má v bodě $x = 2$ navíc i lokální extrém (minimum).

Pro bod $x = -\frac{1}{2}$ platí:

$$L^\pm = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^\pm} \frac{(x-2)^2(2x+1)}{(x+\frac{1}{2})^3} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^\pm} \frac{2(x-2)^2}{(x+\frac{1}{2})^2} = +\infty.$$

Funkce f je definovaná na okolí $x = -\frac{1}{2}$, $(-1)^{3+1}L^- = L^+$, tudíž má v $x = -\frac{1}{2}$ derivaci, která je ale nevlastní $(+\infty)$. Jde tedy o bod se svislou tečnou, který není lokálním extrémem. $\diamond$

Příklad. Určeme, zda funkce $g : y = \sqrt{(1-\cos x)(e^{x^2}-1)}$ má nějaké body nediferencovatelnosti.

Řešení. Body podezřelé z nediferencovatelnosti jsou $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pro bod $x = 0$ platí:

$$L^\pm = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{(1-\cos x)(e^{x^2}-1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^4}{2x^2} = 0^+.$$

Funkce g je definovaná na okolí $x = 0$, $(-1)^{2+1}L^- = L^+$, to znamená, že g je v $x = 0$ diferencovatelná.

Pro body $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ platí:

$$\begin{aligned} L^\pm &= \lim_{x \rightarrow 2k\pi^\pm} \frac{(1 - \cos x)(e^{x^2} - 1)}{(x - 2k\pi)^2} = \lim_{x \rightarrow 2k\pi^\pm} \frac{(1 - \cos(x - 2k\pi))(e^{x^2} - 1)}{(x - 2k\pi)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2k\pi^\pm} \frac{(x - 2k\pi)^2(e^{x^2} - 1)}{2(x - 2k\pi)^2} = \lim_{x \rightarrow 2k\pi} \frac{e^{x^2} - 1}{2} = \frac{1}{2}(e^{4k^2\pi^2} - 1). \end{aligned}$$

V bodech $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ funkce nemá svislou tečnu.

Dále platí, že funkce g je definovaná na okolí bodů $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $(-1)^{3+1}L^- \neq L^+$. Tzn. v bodech $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ funkce není diferencovatelná, derivace g zleva a zprava jsou vlastní a liší se. Z toho vyplývá, že g má v těchto bodech hroty. $\diamond$

Rozhodovací kritéria pro existenci a „typ“ bodu nediferencovatelnosti pro funkci $\sqrt[n]{f}$ lze dobře využít i pro konstrukci nějaké funkce s tímto chováním. Protože funkce $\sqrt[n]{x}$ mají jediný bod nediferencovatelnosti a ten je typu svislá tečna, je přirozeným požadavkem na metodu konstrukce funkcí pro vyšetřování změna počtu a typu těchto bodů a změna nekonečnosti jednostranných derivací. Toho lze právě dosáhnout skládáním $\sqrt[n]{x}$ s vhodnou funkcí f zevnitř. Jak je vidět z předchozí věty a příkladů, nejzásadnější je řádové srovnání funkce f s funkcí x^n , kde n je stupeň odmocniny. Aby bod diferencovatelnosti mohl vzniknout, je třeba volit funkci f tak, aby byla řádově menší, nebo srovnatelná s funkcí x^n .

Kromě funkce n -tá odmocnina můžeme při konstrukcích využívat i funkce arcus sinus. Její užití je velmi podobné, neboť $y = \arcsin x$ se ve svých bodech nediferencovatelnosti $x = \pm 1$ chová $y = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x}$, resp. $y = \sqrt{1+x} - \frac{\pi}{2}$, takže lze vnitřní funkci složit zvnějšku s $1-x$, resp. s $1+x$ a dál pokračovat

podle věty pro odmocninu.

Dalším jednoduchým způsobem, jak konstruovat body nediferencovatelnosti, je využití transformace zrcadlení, tj. skládání nějaké funkce s funkcí absolutní hodnota. Tento způsob vytváření bodů nediferencovatelnosti je ovšem také jen speciálním případem tvorby pomocí funkce n -tá odmocnina, což je evidentní z identity $|x| = \sqrt{x^2}$.

Známe-li nějakou funkci s bodem nediferencovatelnosti, můžeme ji využít pro sestavení dalších, a to pomocí aritmetických operací. Aritmetickými operacemi s diferencovatelnými funkcemi neovlivníme diferencovatelnost v bodě, můžeme však například ovlivnit zda v něm nastává lokální extrém, například $y = |x| + 2x$.

Věta. Nechť f je v bodě x_0 diferencovatelná, resp. diferencovatelná zleva, resp. zprava a funkce g je v x_0 spojitá, ale není diferencovatelná, resp. diferencovatelná zleva, resp. zprava. Pak funkce $f \pm g$ nejsou v x_0 diferencovatelné, resp. diferencovatelné zleva, resp. zprava. Je-li $f(x_0) \neq 0$, pak v x_0 nejsou diferencovatelné, resp. diferencovatelné zleva, resp. zprava také funkce $f \cdot g$, $\frac{g}{f}$, $\frac{f}{g}$.

Důkaz. Tvrzení vyplývá přímo z vět o aritmetice derivací, z věty o limitě derivací a z vět o aritmetice limit.⁴⁸

2.7.2 Vliv diferencovatelnosti na ostatní vlastnosti

Diferencovatelnost a body nediferencovatelnosti má poměrně malý vliv na ostatní vlastnosti funkce.

Definiční obor není samotnou (ne)diferencovatelností nijak dotčen. Protože však k tvorbě bodů nediferencovatelnosti používáme i funkce, které

⁴⁸Větu o limitě derivací zde neuvádíme, není relevantní pro konstrukce, nalézt ji můžeme např. u Kopáčka (2004, pp.111–112) jako Důsledek 5.2.

nejdou definované v celém $\mathbb{R}$, může být definiční obor ovlivněn nepřímo, a to užitou funkcí.

Chování funkce v krajních bodech definičního oboru a poloha grafu funkce vzhledem k ose x je diferencovatelností taktéž nezměněna. Vlastnosti jako sudost, lichost a periodicitu také nejsou body nediferencovatelnosti ovlivněny kromě zřejmých symetrií, resp. translací bodů nediferencovatelnosti.

Vlastností, která naopak s diferencovatelností souvisí, je spojitost. V úvodu této části bylo uvedeno tvrzení, které tyto vlastnosti spojuje, totiž že funkce f není diferencovatelná v bodě, kde f není spojitá. Pro elementární funkce je nicméně tato souvislost irelevantní, neboť v bodě, kde tyto funkce nejsou spojitě, nemohou být ani definované a o diferencovatelnosti tedy nemá smysl mluvit. Běžně používané neelementární funkce, jako např. signum, však umožňují vytvořit bod nespojitosti a nediferencovatelnosti najednou. Chceme-li tedy konstruovat funkci, která má body nespojitosti ve vnitřních bodech definičního oboru, vytvoříme také funkci, která v těchto bodech není diferencovatelná.

Dalšími vlastnostmi, pro které má případná existence bodů nediferencovatelnosti význam, jsou monotonie a konvexnost a konkávnost funkce. V bodech nediferencovatelnosti totiž může funkce tyto vlastnosti měnit. Funkce, které splňují obě duální vlastnosti, tedy jsou nerostoucí i neklesající (funkce konstantní), resp. konvexní i konkávní (funkce lineární) však body nediferencovatelnosti mít nemohou.

2.8 Asymptoty

Definice (Asymptota bez směrnice (svislá asymptota)). Říkáme, že funkce f má *svislou asymptotu* $x = a$ právě tehdy, když alespoň jedna jednostranná

limita $f(x)$ v bodě $x = a$ je nevlastní.

Definice (Asymptota se směrnicí). Říkáme, že funkce f má v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$ *asymptotu se směrnicí* o rovnici $y = ax + b$ právě tehdy, když $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Definice (Vodorovná a šikmá asymptota). Asymptotu se směrnicí funkce f nazveme *vodorovnou asymptotou* funkce f , právě tehdy, když je její směrnice nulová. Je-li směrnice nenulová, hovoříme o *šikmé asymptotě*.

Při srovnání existence a podoby asymptot s ostatními vlastnosti funkce lze dojít k názoru, asymptoty funkce jsou spíše než vlastnosti funkce per se přirovnáním chování funkce v konkrétních bodech k jiným jednodušším křivkám – přímkám. V tomto smyslu rozšiřují to, co nám konečná limita v $+\infty$ říká o podobnosti funkce s funkcí konstantní. Existence a podoba asymptot tedy souvisí s chováním funkce v krajních bodech definičního oboru, resp. v bodech nespojitosti funkce, konkrétně s limitami funkce v těchto bodech, asymptota toto chování popisuje a upřesňuje. U vyšetřování průběhu funkce je určení asymptot typické, což může být způsobeno silným grafickým významem těchto přímek a tedy jejich užitečností při sestavování náčrtku grafu funkce.

Vyšetření asymptotického chování funkce také bývá poslední často uváděnou vlastností hodnou vyšetření. Toto umístění v posloupnosti vyšetřovaných kroků je napříč autory velmi konzistentní.⁴⁹

Asymptoty s definičním oborem souvisí takto:

- existence svislých asymptot velmi těsně souvisí s existencí bodů nespojitosti 2. druhu, což u elementárních funkcí souvisí s krajními body

⁴⁹ze zkoumaných autorů se v pořadí vymykají pouze Dvořáková et al. (2011) a Tkadlec (2011)

definičního oboru.⁵⁰

- Asymptoty se směrnicí charakterizují chování funkce v nevlastních bodech, což jsou podle naší definice krajní body $D(f)$.

Jako další poznámku k určování asymptot v úloze na průběh funkce je příhodné uvést fakt, že téměř nikdo ze zkoumaných autorů nezmiňuje obecnější asymptotické chování křivek,⁵¹ ačkoliv i nelineární „asymptoty“ dávají pěknou informaci o průběhu funkce v okolí nevlastních bodů a omezíme-li se v roli takovýchto asymptot na polynomicke funkce, není těžké je v nevlastních bodech určovat. Vhodnou ukázkou nelineární asymptoty by mohla být například funkce $y = \frac{x^5 - 4x^3 + 2x - 1}{2x^3 - 1}$ se svojí asymptotickou parabolou $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$. Vzhledem k neexistenci požadavku po příkladech tohoto typu se v popisu možností konstrukce asymptot omezíme na asymptoty – přímky.

2.8.1 Konstrukce asymptot

Tématu konstrukce některých typů asymptot už jsme se mimoděk dotkli v jiných částech práce, protože definice těchto typů asymptot jsou speciálními hodnotami parametrů jiných vlastností.

Svislými asymptotami jsme se zabývali v kapitole 2.5, neboť z definice svislé asymptoty vyplývá, že všechny body, ve kterých taková asymptota existuje, jsou body nespojitosti 2. druhu. Konstrukce těchto bodů, v tuto chvíli tedy konstrukce svislých asymptot, byla tedy již ukázána, a to v části 2.5.3.

Druhým typem asymptot jsou asymptoty se směrnicí. Nutné předpoklady jejich existence vycházejí z jejich definice. Má-li se alespoň jedna z limit

⁵⁰tento fakt byl diskutován v části 2.5.3

⁵¹Přímou souvislost s průběhem funkce uvádí pouze Jankovský & Průcha (2000, pp. 122, 124) a to pouze jako poznámku bez příkladu.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b))$ rovnat nule, musí mít alespoň jedna limita $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ smysl; tj. definiční obor funkce, která může mít asymptotu, nesmí být omezený. Další nutnou podmínkou existence asymptoty se směrnicí je existence směrnice, tj. platnost rovnosti $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$.

Pro konstruování funkce s nějakou asymptotou se směrnicí je užitečné si uvědomit, které funkce takovou asymptotu mohou mít. To souvisí s limitou funkce v bodech $\pm\infty$.

Podmínkou vylučující existenci asymptoty nějaké funkce f je neexistence limity $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Věta. Necht' funkce f je definována na nějakém okolí $+\infty$ a limita v tomto bodě neexistuje. Pak f v tomto nevlastním bodě nemá asymptotu.

Důkaz. Nepřímo: Předpokládejme, že f má asymptotu.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b) + (ax + b)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) + \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b) = 0 + \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a \neq 0 & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \operatorname{sgn} a \cdot \infty \\ a = 0 & \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \end{cases}$$

Funkce f má limitu. □

Má-li funkce v nevlastním bodě vlastní limitu, je zaručena existence vodorovné asymptoty.

Věta. Necht' pro funkci f platí, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Pak f má asymptotu u bodu $+\infty$ a tato asymptota je dána rovnicí $y = a$.

Důkaz. Podle definice platí, že má-li f asymptotu o rovnici $y = a$, pak platí

$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - a) = 0$. Podle věty o aritmetice limit a z předpokladu věty dostáváme přímým výpočtem: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - a) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - a = a - a = 0$. $\square$

Z tohoto faktu a ze zřejmé jednoznačnosti asymptoty funkce v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, pak také vyplývá, že existence vlastní limity v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, vylučuje existenci asymptoty s jinou než nulovou směrnicí.

Má-li funkce v nevlastním bodě nevlastní limitu, asymptotu se směrnicí mít může a nemusí, což je zřejmé z definice. Snadno také nahlédneme, že v tomto případě může existovat pouze asymptota šikmá, nikoliv vodorovná, tj. pokud asymptota existuje, je její směrnice nenulová.

Co se týče konkrétních postupů, jak funkci s asymptotami navrhovat, je užitečné rozdělení asymptot se směrnicí na šikmé a vodorovné, neboť funkce s vodorovnými asymptotami lze vytvářet stejně jako funkce s vlastními limity v bodech $\pm\infty$, tj. pomocí konstrukcí popsaných v části 2.6.2.

Zbývá tedy ukázat, jak vytvářet funkce s šikmými asymptotami.

Věta. Nechť funkce f má v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, asymptotu danou rovnicí $y = a_1x + b_1$ a nechť funkce g má v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, asymptotu o rovnici $y = a_2x + b_2$. Pak funkce $f \pm g$ má v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, asymptotu o rovnici $y = (a_1 \pm a_2)x + b_1 \pm b_2$.

Důkaz. Tvrzení vyplývá přímo z definice asymptoty se směrnicí a z věty o aritmetice limit.

Tato věta je z konstrukčního hlediska velmi užitečná, neboť umožňuje přímou tvorbu funkce s asymptotou danou konkrétní rovnicí.

Příklad. Vytvořme funkci s asymptotou danou rovnicí $y = 2x - 3$.

Řešení. Lineární funkce $f : y = 2x - 3$ má podle definice asymptotu o rovnici $y = 2x - 3$. Stačí tedy nalézt libovolnou funkci s vodorovnou asymptotou danou rovnicí $y = 0$. To splňují například funkce $g_1 : y = \frac{1}{x}$, $g_2 : y = \frac{x^2}{e^x}$, nebo

třeba $g_3 : y = \operatorname{arccotg} x$. Hledanou funkci lze podle předchozí věty zkonstruovat jako součet nebo rozdíl funkcí f a g .

Volba funkce g ovlivňuje, zda asymptota funkce vyjde v obou bodech $\pm\infty$, či pouze v jednom a ve kterém. Chceme-li zkonstruovat funkci se stejnou asymptotou v obou bodech $\pm\infty$, zvolíme funkci g_1 , neboť má nulovou limitu v obou těchto bodech. Chceme-li, aby výsledná funkce měla asymptotu pouze v jednom z bodů $\pm\infty$, volíme funkci, která má jednu limitu nulovou a druhou nekonečnou, ze zmíněných funkcí funkci g_2 . Jestliže zvolíme funkci, která má dvě různé a konečné limity, jako třeba funkce g_3 , sečtením s f vytvoříme funkci, která má v každém z bodů $x = \pm\infty$ různou asymptotu se stejnou směrnici.

Funkce mající zadané vlastnosti jsou tedy například $y = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x + 3}{x}$, $y = 2x - 3 - \frac{x^2}{e^x} = \frac{2xe^x - 3e^x - x^2}{e^x}$, $y = 2x + \operatorname{arccotg} x - 3$. $\diamond$

Stejnou větu můžeme použít i v situaci, že již máme vytvořenou nějakou funkci f se šikmou asymptotou $y = ax + b$, u které požadujeme pouze změnu této asymptoty. V tom případě stačí k f přičíst takovou lineární funkci, která změní koeficienty a, b na požadované hodnoty. Např. funkce $f : y = \sqrt{x^2 - 4x}$ má pro $x \rightarrow +\infty$ asymptotu o rovnici $y = x + 2$. Chceme-li změnit její předpis tak, aby pro $x \rightarrow +\infty$ měla asymptotu $y = 2x - 3$, postačí k f přičíst funkci $g : y = x - 5$. Výsledná funkce $f + g = \sqrt{x^2 - 4x} + x - 5$ má požadovanou asymptotu, což je zřejmé z předcházející věty.

Jiným způsobem, jak vytvořit asymptotu s nenulovou směrnicí je obdobné tvrzení pro součin funkcí. Situace zde není však tak přímočará, jako u sčítání a odčítání, neboť součin dvou funkcí se šikmými asymptotami asymptotu nemá. Asymptotu dokonce nemusí mít ani součin funkce se šikmou a funkce s vodorovnou asymptotou, což lze ilustrovat např. na funkci $f : y = x$, která má šikmou asymptotu, funkci $g : y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ s vodorovnou

asymptotou a na jejich součinu $h = f \cdot g = x + \sqrt{x}$, který asymptotu nemá.

Věta. Nechť funkce f má v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, asymptotu o rovnici $y = ax + b$ a nechť funkce g má bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, vlastní limitu $c \in \mathbb{R}$. Dále nechť $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(g(x) - c) = 0$, resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(g(x) - c) = 0$. Pak funkce $f \cdot g$ má v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, asymptotu o rovnici $y = acx + bc$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) - (acx + bc) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x) - (ax + b)c) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x) - (ax + b)g(x) + (ax + b)g(x) - (ax + b)c) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b))g(x) + (ax + b)(g(x) - c) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b))g(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax \cdot g(x) + b \cdot (g(x) - c)) = \\ &= 0 \cdot c + 0 + b \cdot 0 \end{aligned} \quad \diamond$$

Funkci se šikmou asymptotou lze vytvořit i skládáním.

Věta. Nechť funkce f má v $+\infty$ asymptotu $y = a_1x + b_1$ a funkce g asymptotu $y = a_2x + b_2$, $a_2 > 0$. Pak $f \circ g$ má v $+\infty$ asymptotu o rovnici $y = a_1a_2x + a_1b_2 + b_1$

Důkaz.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ g)(x) - (a_1a_2x + a_1b_2 + b_1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(g(x)) - (a_1(a_2x + b_2) + b_1)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(g(x)) - (a_1g(x) + b_1) + (a_1g(x) + b_1) - (a_1(a_2x + b_2) + b_1) \end{aligned}$$

Protože $a_2 > 0$, je při substituci $y = g(x)$: $L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(g(x)) - (a_1g(x) + b_1)) =$
 $= \lim_{y \rightarrow \infty} (f(y) - (a_1y + b_1)) = 0.$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_1g(x) + b_1 - (a_1(a_2x + b_2) + b_1)) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_1(g(x) - (a_2x + b_2)) = 0.$$

$$L = L_1 + L_2 = 0$$

□

2.8.2 Vliv asymptot na ostatní vlastnosti

Svislé asymptoty jsou jen jiným názvem pro body nespojitosti 2. druhu, jejich existence je tedy od těchto bodů neoddělitelná. Asymptoty se směrnici jsou zase řádovým srovnáním vyšetřované funkce s lineární funkcí v nevlastních bodech $\pm\infty$. Vliv asymptot na ostatní vlastnosti funkce je tedy stejný jako vliv těchto parametrů. Přesto se zde hodí některé souvislosti zdůraznit.

Jak bylo řečeno, existence svislé asymptoty vynucuje existenci bodu nespojitosti 2. druhu, u kterého je dle definice alespoň jedna limita nevlastní. Z toho vyplývá, že funkce mající svislou asymptotu již nemůže být omezená, vylučuje tedy existenci maxima nebo minima funkce. Existence asymptoty se směrnici vyžaduje definovanost funkce na nějakém okolí bodu $\pm\infty$, to znamená, že vylučuje omezenost definičního oboru.

Parita funkce ovlivňuje rovnice asymptot, má-li paritní funkce svislou asymptotu o rovnici $x = a$, pak má i svislou asymptotu o rovnici $x = -a$, má-li šikmou asymptotu o rovnici $y = ax + b$, pak v případě sudé funkce má asymptotu $y = -ax + b$, v případě liché funkce $y = ax - b$. Periodicita funkce pro svislé asymptoty znamená, že existuje-li asymptota s rovnicí $x = a$, existuje i asymptota s rovnicí $x = a \pm p$, kde p je libovolná perioda funkce. Co se týče asymptot se směrnici, vyjma konstantní funkce, která je periodická a je sama sobě asymptotou, tyto asymptoty existovat nemohou.

Souvislost asymptot s chováním funkce v krajních bodech $D(f)$ byla již rozebírána, zde připomeňme, že existence vlastní limity v nevlastním bodě je ekvivalentní s existencí vodorovné asymptoty a že neexistence limity v nevlastním bodě v tomto bodě vylučuje existenci asymptoty se směrnici.

Existence a podoba asymptot také souvisí s diferencovatelností funkce,

v bodech, ve kterých má funkce svislé asymptoty, funkce není diferencovatelná (neboť tam není spojitá, u elementárních ani definovaná).

Závěr

Tato práce si kladla dva rozdílné cíle, přičemž jednoho bylo dosaženo, druhý byl splněn částečně.

Prvním cílem bylo porovnat přístupy různých autorů k úloze na průběh funkce, analyzovat důvody, které za nalezenými rozdíly stojí a formulovat obecná doporučení pro zadávání a vyhodnocování tohoto typu úlohy.

Přístup k úloze byl porovnáván na vzorku celkem 24 různých autorů textů určených různým studentům a potvrdilo se, že pojetí úlohy na průběh funkce není ustálené a může se zásadním způsobem lišit, odlišný přístup se projevil zejména v lišící se představě o výstupu úlohy, přičemž bylo zjištěno, že mezi požadavkem na graf vyšetřované funkce a na popis stavů vlastností funkce není ani jeden přístup dominantní.

Dále byly nalezeny rozdíly u jednotlivých dílčích podúloh úlohy na vyšetření průběhu funkce, zejména v určování monotonie, konvexnosti a konkávnosti a spojitosti, zde však už nikoliv v předpokládaných výstupech, jakož spíše ve formulaci výsledků. Na srovnání konkrétních různých přístupů ke stejnému typu problémů byly analyzovány důvody, které autory k těmto rozdílům vedou a byla posouzena vhodnost a korektnost těchto přístupů vzhledem k úloze na vyšetření průběhu funkce.

Na základě všech těchto zjištění byla na konci 1. kapitoly formulována doporučení pro zadávání i vyhodnocování úlohy.

První kapitola tedy svých všech cílů dosáhla.

Druhý cíl byl značně ambicióznější, byl jím rozbor jednotlivých parametrů úlohy na vyšetření průběhu funkce, analýza jejich vzájemných souvislostí a formulování metod, jakými lze tyto parametry vytvářet s ohledem na didaktickou účelnost a početní náročnost takto vytvořených úloh.

V 2. kapitole byla úloha na vyšetření průběhu funkce rozebrána podle jednotlivých vlastností, jejichž vyšetření se při řešení úlohy vyžaduje. Jednotlivé vlastnosti byly rozebrány s ohledem na různé stavy, kterých mohou nabývat, a byly navrženy i konkrétní konstrukční postupy, jakými lze funkce s požadovaným stavem vlastnosti zkonstruovat. Konstrukční metody byly formulovány jako věty a jejich užití bylo předvedeno na konkrétních příkladech, byly srovnány jejich výhody a nevýhody a možnosti užití v úloze na průběh funkce i s přihlédnutím na početní náročnost úloh takto vytvořených. V omezené míře se také podařilo popsat souvislosti mezi jednotlivými vlastnostmi, ačkoliv zvolený formát této kapitoly umožňoval srovnání pouze jedné vlastnosti vůči ostatním.

Kromě vlastností monotonie a konvexnosti a konkávnosti, které nejsou v 2. kapitole rozebrány z důvodů nutnosti dodržet termín odevzdání, tato práce k dosažení plného cíle práce postrádá část, ve které se úloha na vyšetření průběhu funkce vytváří jako celek. Tato část v práci chybí, protože 2. kapitola zásadně přesáhla předpokládaný rozsah a zvolená forma diskuze jednotlivých vlastností se projevila náročnější, než se při volbě přístupu k analýze parametrů úlohy očekávalo.

Přirozeným rozšířením, či spíše logickým dokončením této práce tedy zůstává finální rozbor úlohy, posouzení dalších jejích parametrů jako například nakreslitelnosti grafu a zhodnocení možnosti aplikace popsaných metod konstrukce stavů jednotlivých vlastností k tvorbě úlohy na vyšetření průběhu

funkce. Pro další zkoumání úlohy na vyšetření průběhu funkce doporučuji zvolit odlišný přístup, a to sice analýzu a klasifikaci již existujících příkladů a zkoumání úlohy na základě tohoto třídění.

Za hlavní přínos 1. kapitoly této práce považuji srovnání přístupu různých autorů k problematice vyšetřování funkce pomocí metod diferenciálního počtu a rozbor skutečností, které způsobují odlišnosti ve výsledcích úlohy. Druhá kapitola je pak přínosná z hlediska tvorby dílčích úloh a ve formulaci některých skutečností neformulovaných a nedokázaných ve zkoumané literatuře.

Literatura

- Batíková, B., Henzler, J. Hladíková, H., Nešverová, E., Otavová, M., Sýkorová, I. ... Valentová, E. (2009). *Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty*. Praha, Czechia: Oeconomica. ISBN: 978-80-245-1539-7.
- Bubeník, F., & Zindulka, O. (2005). *Matematika 1*. Praha, Czechia: Česká technika – nakladatelství ČVUT. ISBN: 80-01-03309-0.
- Coufal, J., & Línek, V. (2010). *Logika a matematika pro ekonomy*. Praha, Czechia: Vysoká škola ekonomie a managementu. ISBN: 978-80-86730-58-5.
- Děmidovič, B. P. (2003). *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod, Czechia: Fragment. ISBN: 80-7200-587-1.
- Dvořáková, Š., Mošna, F., & Němec, P. (2011). *Úvod do diferenciálního a integrálního počtu*. Praha, Czechia: Česká zemědělská univerzita v Praze. ISBN: 978-80-213-2207-3.
- Hrubý, D., & Kubát, J. (2002). *Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet* (2nd Rev. ed.). Praha, Czechia: Prometheus. ISBN: 80-7196-210-4.
- Jankovský, Z., & Průcha, L. (2000). *Diferenciální počet I* (2nd ed.). Praha, Czechia: ČVUT. ISBN: 80-01-0178-6.

- Jarník, V. (1984). *Diferenciální počet I* (7th ed.). Praha, Czechoslovakia: Academia. ISBN: 21-003-84.
- Jirásek, F., & Benda, J. (2006). *Matematika pro bakalářské studium*. Praha, Czechia: Ekopress. ISBN: 80-86929-02-7.
- Kaňka, M., & Malec, L. (2012). *Učebnice kvantitativních metod* (2nd. Rev. ed.). Praha, Czechia: IDEA SERVIS. ISBN: 978-80-85970-76-0.
- Klíč, A., Turzík, D., Dubcová, M., & Kubíček, M. (2007). *Matematika I ve strukturovaném studiu* (2nd Rev. ed.). Praha, Czechia: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze. ISBN: 978-80-7080-656-2.
- Klůfa, J., & Sýkorová, I. (2010). *Matematika pro informatiky a statistiky*. Praha, Czechia: Professional Publishing. ISBN: 979-80-7431-030-0.
- Kopáček, J. (2004). *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)* (4th Rev. ed.). Praha, Czechia: MATFYZPRESS. ISBN: 80-86732-25-8.
- Kopáček, J., Bočková J., Čerych, J., Doktor, P., Drahoš, J., Karger, A. . . Zahradník, M. (2005). *Příklady z matematiky nejen pro fyziky I* (4th Rev. ed.). Praha, Czechia: MATFYZPRESS. ISBN: 80-86732-42-X.
- Musilová, J., & Musilová, P. (2009). *Matematika i pro porozumění i praxi I: Netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky* (2nd Rev. ed.). Brno, Czechia: VUTIUM. ISBN: 978-80-214-3631-2.
- Nagy, J., & Navrátil, O. (2001). *Matematická analýza*. Praha, Czechia: ČVUT. ISBN: 80-01-02377-X.

- Neustupa, J. (2008). *Matematika I* (5th Rev. ed.). Praha, Czechia: Česká technika – nakladatelství ČVUT. ISBN: 979-80-01-04111-6.
- Odvárko, O. (2003). *Matematika pro gymnázia: Funkce* (3rd Rev. ed.). Praha, Czechia: Prometheus. ISBN: 80-7196-210-4.
- Petáková, J. (2006). *Matematika: příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha, Czechia: Prometheus. ISBN: 80-7196-099-3.
- Pilous, D. (2014). *Vybrané pohledy na žákovskou chybu ve výuce matematiky* (doctoral dissertation, Charles University, Praha, Czechia). Retrieved from: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/151601>
- Polák, J. (1999). *Středoškolská matematika v úlohách II*. Praha, Czechia: Prometheus. ISBN: 80-7196-166-3.
- Rektorys, K., Cipra, T., Drábek, K., Fiedler, M., Fuka, J., Kepr, B. ... Zelenka, M. (2007). *Přehled užití matematiky I* (7th ed.). Praha, Czechia: Prometheus. ISBN: 978-80-7196-179-6.
- Tkadlec, J. (2011). *Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné* (2nd Rev. ed.). Praha, Czechia: Česká technika – nakladatelství ČVUT. ISBN: 978-80-01-04791-7.
- Trch, M., Dvořáková, Š. (2010). *Kapitoly z matematiky* (2nd Rev. ed.). Praha, Czechia: Česká zemědělská univerzita v Praze. ISBN: 978-80-213-2106-9.
- Veselý, J. (2004). *Základy matematické analýzy: První díl*. Praha, Czechia: MATFYZPRESS. ISBN: 80-86732-29.

- Vitásek, T. (2012). *Elementární funkce a definiční obor* (bachelors thesis, Charles University, Praha, Czechia).

Retrieved from: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/116068/>

- Vlasov, A. K. (1958). *Učebnice vyšší matematiky I: 2. část* (2nd ed.). Praha, Czechoslovakia: Státní nakladatelství technické literatury.
ISBN: unassigned.