



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Nikola Jedličková

Hrací varianty značkování grafů

Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Robert Šámal, Ph.D.

Studijní program: Informatika

Studijní obor: Obecná informatika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 18.7.2017

Podpis autora

Chcela by som poďakovať môjmu vedúcemu doc. Mgr. Robertovi Šámalovi, Ph.D. za rady a podporu pri písaní tejto práce. Ďalšou osobou, ktorej patrí moja veľká vďaka úplne za všetko, je Jan Bok. Nakoniec, nie však v poslednom rade, by som chcela poďakovať rodine za pomoc a podporu.

Název práce: Hrací varianty značkování grafů

Autor: Nikola Jedličková

Ústav: Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Robert Šámal, Ph.D., Informatický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Značkovanie na grafe, nazývané tiež labeling, je zobrazenie z množiny vrcholov alebo hrán do množiny značiek $L \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$. Popri prehľade doteraz známych hracích variant predstavíme aj nový typ labelingu – ESD labeling a s ním súvisiacu hraciu variantu, ktorá bola inšpirovaná článkom Tuzu. ESD labeling na grafe G je prosté zobrazenie $\phi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$, kde pre každé dve rôzne hrany platí, že súčet značiek na ich koncových vrchoch je rôzny. Okrem otázky existencie ESD labelingu sa budeme zaoberať aj hracou variantou, kde labeling postupne vytvárajú dvaja hráči.

Klíčová slova: graf, labeling, kombinatorické hry

Title: Game variants of graph labeling

Author: Nikola Jedličková

Institute: Computer Science Institute of Charles University

Supervisor: doc. Mgr. Robert Šámal, Ph.D., Computer Science Institute of Charles University

Abstract: A graph labeling on a graph G is a mapping from the vertex set or the edge set to a set of labels $L \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$. We will survey the existing results on graph labeling games. We also introduce a new type of labeling – ESD labeling and its game variant which was inspired by Tuza. An ESD labeling on a graph G is an injective mapping $\phi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ such that for every two edges, the sum of the the labels on their endpoints is different. Apart from the question of existence of such labeling, we will examine game variant in which two players gradually build an ESD labeling.

Keywords: graph, labeling games

Obsah

1	Úvod	2
1.1	História a motivácia	2
1.2	Ďalšie zdroje informácií a aplikácie labelingu	5
2	Vybrané labelingy a ich hracie varianty	6
2.1	Graceful labeling	6
2.2	Neighbour-sum-distinguishing edge-colouring	7
2.3	$L(d,1)$ -labeling	8
2.4	Magic labeling	9
3	ESD labeling	12
3.1	Základné definície a značenie	12
3.2	ESD grafy	13
3.3	Nutná podmienka pre existenciu ESD labelingu	16
3.4	Triedy grafov, ktoré nie sú ESD	19
4	Hry s ESD labelingom	21
4.1	Hry na vybraných triedach grafov	21
4.2	Iné verzie hry	26
5	Záver	29
	Bibliografia	30
	Zoznam obrázkov	32

1. Úvod

Táto práca sa zaoberá značkováním grafov a hracími variantami značkovania grafov. Značkovanie budeme často označovať pojmom labeling prevzatým z angličtiny.

V tejto kapitole objasníme motiváciu a históriu labelingu, možné aplikácie labelingu a ďalšie zdroje, kde je možné nájsť informácie o rôznych typoch labelingov. V ďalšej kapitole sa zameriame na vybrané labelingy a ich hracie varianty a ku každému uvedieme najdôležitejšie výsledky. V Kapitole 3 a Kapitole 4 predstavíme nový labeling a s ním súvisiacu hraciu variantu. V týchto kapitolách uvádzame vlastné výsledky, ktoré sú jedným z hlavných prínosov tejto práce.

Všetky grafy uvažované v tejto práci sú konečné, neorientované a neobsahujú násobné hrany ani slučky, ak nie je povedané inak.

Jednou z hlavných definícií používaných v tejto práci je definícia labelingu, preto ju zavedieme hneď v úvode práce.

Definícia 1.1 (Labeling). Nech $G = (V, E)$ je graf a $L \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ je množina značiek. Labeling definujeme ako zobrazenie z určitého definičného oboru do množiny značiek L . Podľa definičného oboru rozlišujeme niekoľko typov labelingov:

- zobrazenie $\phi : V \rightarrow L$ nazveme *vrcholový* labeling,
- zobrazenie $\phi : E \rightarrow L$ nazveme *hranový* labeling,
- zobrazenie $\phi : V \cup E \rightarrow L$ nazveme *totálny* labeling.

1.1 História a motivácia

V roku 1963 na medzinárodnej konferencii v Smoleniciach vyslovil Gerhard Ringel domnienku o dekomponovateľnosti grafov. Najskôr uvedieme definíciu dekompozície grafu a cyklickej dekompozície úplného grafu.

Definícia 1.2. [10] *Dekompozícia grafu* G je množina podgrafov H_1, \dots, H_k , taká že

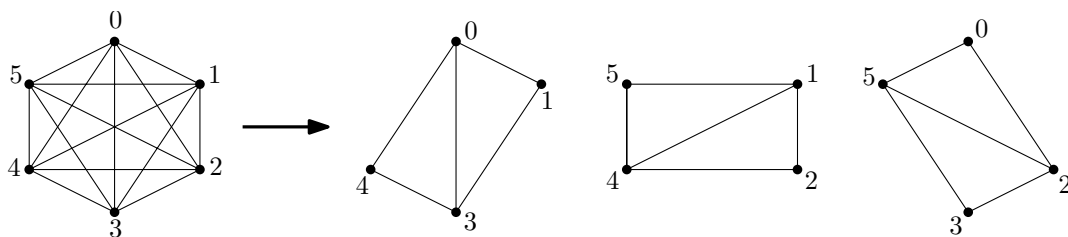
$$\bigcup_{i=1}^k E(H_i) = E(G) \quad \text{a} \quad E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset \quad \text{pre } i \neq j.$$

Graf G je *H-dekomponovateľný*, ak je každý podgraf H_i izomorfný grafu H .

Definícia 1.3 (Cyklická dekompozícia úplného grafu). [11]

Nech K_n je úplný graf. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že množina vrcholov je \mathbb{Z}_n . *Kliknutie* definujeme ako izomorfizmus $i \mapsto i + 1$. Dekompozícia $\Delta = \{H_1, \dots, H_k\}$ grafu K_n je cyklická, ak aplikáciou kliknutia na K_n získame permutáciu množiny Δ .

Na Obrázku 1.1 je uvedený príklad cyklickej dekompozície K_6 z článku [11].



Obr. 1.1: Cyklická dekompozícia K_6 [11].

Domnienka 1.1 (Ringel). Nech T je strom s m hranami. Potom je úplný graf K_{2m+1} dekomponovateľný na $2m + 1$ kópii T .

Táto domnienka je známa ako *Ringel's conjecture*, ktorú neskôr zosilnil Kotzig. Nikdy ale nebola publikovaná Ringelom. Prvá zmienka o týchto domnienkach bola publikovaná v článku Rosu [21].

Domnienka 1.2 (Kotzig). Nech T je strom s m hranami. Potom je úplný graf K_{2m+1} *cyklicky* dekomponovateľný na $2m + 1$ kópii T .

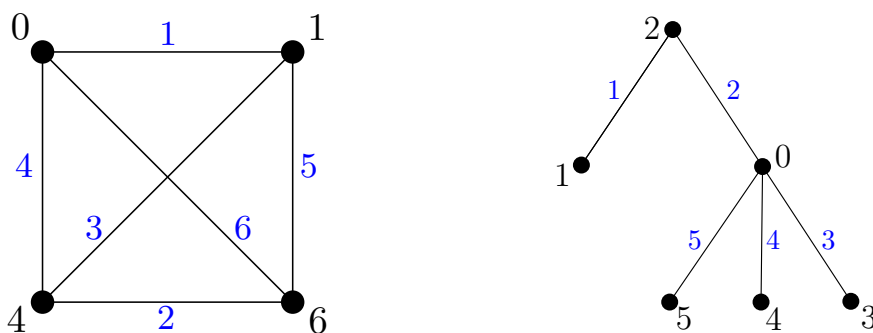
V reakcii na to dokázal Rosa [21] pomocou labelingov postačujúcu podmienku pre platnosť týchto domnienok a charakterizoval, kedy je graf H -dekomponovateľný. Predtým ešte definujeme graceful labeling a uvedieme príklady graceful grafov.

Definícia 1.4 (Graceful labeling). [10] Nech $G = (V, E)$ je graf a zobrazenie $\phi : V \rightarrow \{0, \dots, |E|\}$ je prosté. *Váhu hrany* $uv \in E$ pre graceful labeling definujeme ako $w_G(uv) = |\phi(u) - \phi(v)|$. Zobrazenie ϕ nazveme *graceful labeling*, ak váhy hrán w_G tvoria množinu $\{1, \dots, |E|\}$ a

$$\forall e, f \in E : e \neq f \rightarrow w_G(e) \neq w_G(f).$$

Graf G je *graceful*, ak preň existuje graceful labeling.

Na Obrázku 1.2 sú ukázané dva príklady graceful grafov. Váhy hrán sú vyznačené modrou farbou.



Obr. 1.2: Príklady graceful grafov.

Rosa [21] uvádzal labelingy pod pojmom *valuations* a celkovo zaviedol štyri typy labelingov pod názvami α -, β -, σ - a ρ -valuation. Graceful labeling nazýval β -valuation. Na charakterizáciu cyklicky H -dekomponovateľných grafov použil ρ -valuation, ktoré definujeme neskôr. S α - a σ -valuation sa nebudeme zaoberať.

Názov *graceful* zaviedol nezávisle na Rosovi Golomb [14].

Veta 1.1. [21] Nech H je graceful graf s m hranami. Potom $G = K_{2m+1}$ je H -dekomponovateľný. Navyše G sa dá cyklicky dekomponovať na kópie H .

Dôkaz. Tento dôkaz pochádza z článku Chartranda a kolektívu [8].

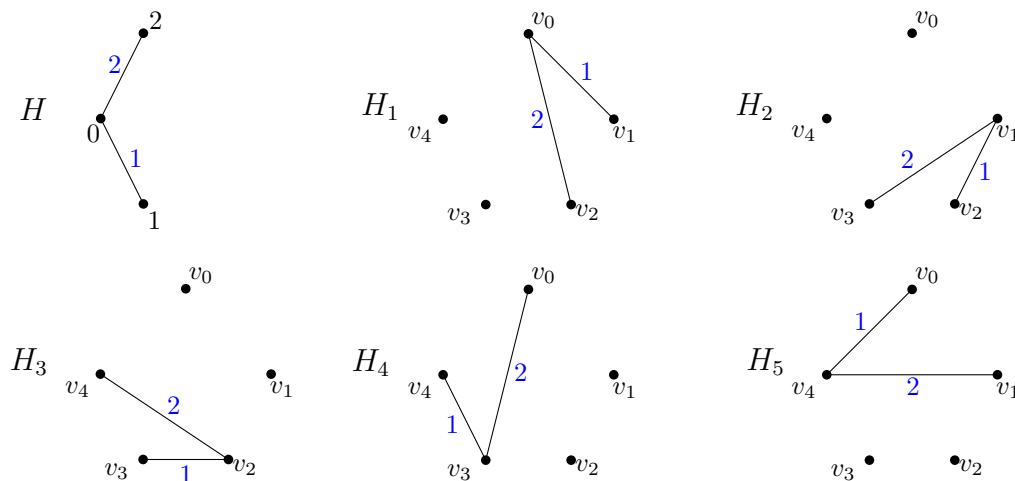
Nech existuje graceful labeling na H . Značky na vrchoch grafu H sú podmnožinou $\{0, 1, \dots, m\}$ a hrany majú váhy $1, 2, \dots, m$. Označme vrcholy grafu G ako v_0, v_1, \dots, v_{2m} a stotožníme ich po poradí s vrcholmi pravidelného $(2m + 1)$ -uholníka. Kružnicu, ktorá týmto vznikla, označme ako C .

Vrchol so značkou i v H umiestnime na vrchol v_i v G pre každý vrchol v grafe H . Labeling na H je graceful, preto majú vrcholy grafu H rôzne značky a teda každý vrchol z H bude umiestnený na iný vrchol v G . Každú hranu z H stotožníme s príslušnou úsečkou v G . Vzniknutú kópiu grafu H v G značíme ako H_1 a pre vrcholy podgrafu H_1 platí $V(H_1) \subseteq \{v_0, \dots, v_m\}$.

Každý hrane $v_s v_t$ ($0 \leq s, t \leq 2m$) v G priradíme váhu $d_C(v_s, v_t)$. Hodnota $d_C(v_s, v_t)$ je rovná dĺžke najkratšej cesty medzi vrcholmi v_s a v_t na kružnici C . Platí, že $1 \leq d_C(v_s, v_t) \leq m$. V grafe G existuje práve $2m + 1$ hrán váhy i pre každé $i = 1, \dots, m$ a podgraf H_1 obsahuje práve jednu hranu so značkou i pre každé $i = 1, \dots, m$.

Vždy keď pootočíme nejakú hranu grafu H_1 o uhol $2\pi k/(2m + 1)$ (bez ujmy na všeobecnosti v smere hodinových ručičiek) získame hranu s rovnakou váhou. Pootočením podgrafu H_1 o uhol $2\pi k/(2m + 1)$ získame podgraf $H_{k+1} \cong H$. Po $2m$ pootočeníach získame podgrafy H_1, \dots, H_{2m+1} , ktoré sú cyklickou dekompozíciou G . \square

Ako príklad uvedieme cyklickú dekompozíciu K_5 . Graf $H = P_3$ je graceful, potom podľa Vety 1.1 existuje cyklická dekompozícia grafu K_5 . Na Obrázku 1.3 je zobrazený graceful labeling na P_3 a aj cyklická dekompozícia K_5 .



Obr. 1.3: Cyklická dekompozícia K_5 na graceful podgrafy P_3 [8].

Toto tvrdenie Rosa zosilnil použitím ρ -valuation. Graceful labeling je totiž špeciálnym prípadom ρ -valuation.

Definícia 1.5. [21] Nech $G = (V, E)$ je graf. Označme $|V| = m$ a $|E| = n$. Nech $\rho : V \rightarrow \{0, 1, \dots, 2n\}$ je prosté zobrazenie. Zobrazenie ρ nazveme ρ -valuation, ak váhy hrán $w_R(uv) = |\rho(u) - \rho(v)|$ tvoria množinu $\{x_1, \dots, x_n\}$, kde $x_i = i$ alebo $x_i = 2n + 1 - i$.

Veta 1.2. [21] Nech H je graf s n hranami. Cyklická dekompozícia K_{2m+1} na podgrafy izomorfné grafu H existuje práve vtedy, ak existuje ρ -valuation grafu H .

Dôkaz je možné nájsť v knižke Bosáka [4]. Tieto tvrdenia Alexandra Rosu viedli k vzniku domnienky známej ako *Graceful Tree Conjecture*.

Domnienka 1.3 (Graceful Tree Conjecture). Každý strom je graceful.

Graceful labelingom sa budeme podrobnejšie zaoberať v Sekcii 2.1.

1.2 Ďalšie zdroje informácií a aplikácie labelingu

Grafové labelingy boli prvý krát predstavené v polovici šesťdesiatych rokov minulého storočia. Do dnešnej doby vzniklo približne 200 rôznych typov grafových labelingov. Výsledky z oblasti grafových labelingov boli publikované vo viac ako 2000 vedeckých článkoch. Najkomplexnejší a najucelenejší prehľad o rôznych typoch labelingov podáva priebežne dopĺňaný prehľadový článok od Galliana [13]. Tento článok vznikol v roku 1996 a v súčasnosti odkazuje na viac ako 2200 rôznych zdrojov. Podľa slov Galliana obsahuje všetko, čo bol schopný o grafových labelingoch nájsť.

Grafový labeling bol použitý pri riešení problému pridelenia rádiových frekvencií rádiovým vysielateľom. Poloha rádiového vysielateľa je reprezentovaná vrcholom v grafe a rádiový kanál pridelený vysielateľu je reprezentovaný značkou priradenou vrcholu. Rádiové vysielateľe, ktoré sú „blízko“ seba, nemôžu mať pridelený rovnaký kanál, pretože by sa rušili. Na riešenie tohto problému bol použitý $L(p, q)$ -labeling, ktorým sa budeme bližšie zaoberať v ďalšej kapitole. Ako prvý sa problémom pridelenia frekvencií zaoberal Hale [16]. Ďalším zdrojom informácií k tomuto problému sú napríklad články [23] a [18].

2. Vybrané labelings a ich hracie varianty

V tejto kapitole priblížime existujúce výsledky o hrách súvisiacich s labelingom. Kapitola je štruktúrovaná tak, že každá sekcia prezentuje jeden typ labelingu a s ním súvisiacu hraciu variantu. Tuza vo svojom článku [22] uviedol, že napriek tomu, že literatúra zaoberajúca sa labelingami je pomerne bohatá, existujú iba štyri články zaoberajúce sa hracími variantami. Ďalej prezentoval nové hracie varianty labelingu, z ktorých sme si jednu vybrali a tá bude podrobne preskúmaná v ďalších kapitolách ako labeling samotný a aj s ním súvisiace hracie varianty.

Hru nazveme *A-hra*, ak v prvom ťahu hrá Alica, inak hru nazveme *B-hra*. Vrchol nazveme *voľný*, ak ešte nemá priradenú značku. Hranu nazveme *uzavretá*, ak obidva jej koncové vrcholy už majú priradené značky.

2.1 Graceful labeling

V tejto sekcii nadviažeme na Sekciu 1.1, kde sme uviedli definíciu graceful labelingu 1.4 a Domnienku 1.3, ktorá hovorí, že každý strom je graceful.

Domnienka o graceful stromoch je stále otvoreným problémom. Vyriešená bola iba pre niektoré triedy stromov. Výsledky o graceful labelingu pre jednotlivé triedy stromov a ďalšie triedy grafov sú zhrnuté v prehľadnej tabuľke v článku [13].

Autori článku [1] sa zaoberali približným riešením tohto problému. Dokázali, že „skoro“ všetky stromy sú „skoro“ graceful. V tomto článku je použitá pozmenená definícia graceful labelingu, kde $\phi : V \rightarrow \{1, \dots, |E| + 1\}$. Zvyšok definície zostáva rovnaký.

Veta 2.1. [1] Pre každé $\gamma > 0$ existuje $\eta > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n > n_0$ platí nasledujúce. Nech T je strom na n vrcholoch a $\Delta(T) \leq \frac{\eta n}{\log n}$, potom existuje graceful labeling $\psi : V(T) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lceil (1 + \gamma)n \rceil\}$.

Hry s graceful labelingom

Hrou odvodenou z graceful labelingu sa ešte nikto nezaoberal. Ako prvý ju prezentoval Tuza [22]. Preto uvidíme iba definíciu pochádzajúcu z článku Tuzu a výsledky hry necháme ako otvorený problém.

Definícia 2.1. Nech $G = (V, E)$ je graf a $L = \{1, \dots, s\}$ je množina značiek. Alica a Bob sú dvaja hráči, ktorí sa striedajú po každom ťahu. V každom ťahu hráč vyberie nejakú doteraz nepoužitú značku a priradí ju nejakému voľnému vrcholu. Po každom ťahu musí pre všetky uzavreté hrany e, f platiť

$$e \neq f \rightarrow w_G(e) \neq w_G(f),$$

kde w_G je váha hrany v graceful labelingu. Alica vyhrá, ak je na konci vytvorený graceful labeling na G , inak vyhrá Bob. Špeciálne teda Bob vyhrá aj v prípade, kedy už nie je možné priradiť ďalšiu značku podľa pravidiel a hra tým končí.

Problém 2.1. [22] Nech je daný graf G . Pre aké hodnoty s má Alica výhernú stratégiu na G ?

2.2 Neighbour-sum-distinguishing edge-colouring

Tento labeling autori vo svojom článku [3] uvádzajú pod názvom *neighbour-sum-distinguishing edge-colouring*. Napriek tomu, že tento labeling autori nazývajú hranové farbenie, nejedná sa o štandardne definované farbenie grafu, ale iba o zobrazenie z množiny hrán do nejakej podmnožiny prirodzených čísel. Preto ho budeme uvádzať pod skratkou *NSDEC labeling*. Najskôr priblížime históriu tohto labelingu a v ďalšej sekcii kapitoly sa zameriame na hernú variantu.

Definícia 2.2 (NSDEC labeling). [19] Nech $G = (V, E)$ je graf, γ je hranový labeling definovaný ako $\gamma : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ a γ nemusí byť prosté. Číslo k budeme nazývať počet značiek. Zobrazenie $\rho : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ definujeme ako

$$\rho(v) = \sum_{uv \in E} \gamma(uv) \quad \text{pre } \forall v \in V(G).$$

Labeling γ nazveme NSDEC labeling, ak pre všetky $uv \in E(G)$ platí $\rho(u) \neq \rho(v)$.

Zobrazenie ρ je potom aj vrcholovým farbením grafu G . Ak má hrana obidva koncové vrcholy stupňa jeden, budeme ju nazývať *izolovaná hrana*. Z definície NSDEC labelingu plynie, že ak graf G obsahuje izolovanú hrana, potom na G neexistuje NSDEC labeling.

NSDEC labelingom sa ako prví začali zaoberať Karoński, Łuczak a Thomason [20] v roku 2002. Vyslovili domnienku známu pod názvom *1-2-3-conjecture*, ktorá je stále otvoreným problémom.

Domnienka 2.1 (1-2-3-conjecture). [20] Pre každý graf, ktorý neobsahuje izolovanú hrana, existuje NSDEC labeling používajúci najviac tri značky.

Najlepší odhad, ktorý je doteraz známy, používa 5 značiek. Tento výsledok pochádza z článku Kalkowskeho a kolektívu [19].

Veta 2.2. [19] Pre každý graf, ktorý neobsahuje izolovanú hrana, existuje NSDEC labeling používajúci najviac 5 značiek.

Hra s NSDEC labelingom

Výsledky v tejto časti pochádzajú z článku Baudona a kolektívu [3]. Autori uvádzajú výsledky o hre na cestách, cykloch, úplných grafoch a úplných bipartitných grafoch s menšou partitou veľkosti dva.

Definícia 2.3 (Hra s NSDEC labelingom). Nech pre množinu značiek L platí $L = \mathbb{N}$. Ďalej nech Alica a Bob sú dvaja hráči, ktorí sa striedajú po každom ťahu.

V každom ťahu si hráč vyberie nejakú hranu, ktorá ešte nemá značku a priradí jej nejakú značku. Značky sa môžu opakovať. Po každom ťahu musia všetky hrany, ktoré už majú značku, tvoriť NSDEC labeling. Alica vyhráva, ak na konci hry budú mať všetky hrany priradenú značku, inak vyhráva Bob.

Veta 2.3. [3] Nech P_n je cesta na n vrcholoch, $n \geq 3$.

- Bob vyhrá A-hru na P_n práve vtedy, keď $n \geq 5$.
- Bob vyhrá B-hru na P_n práve vtedy, keď $n \neq 3$ a $n \neq 5$.

Nech C_n je kružnica na n vrcholoch, $n \geq 3$.

- Bob vyhrá A-hru na C_n pre všetky n .
- Bob vyhrá B-hru na C_n práve vtedy, keď $n \neq 4$.

Nech K_n je úplný graf na n vrcholoch, $n \geq 3$.

- Bob vyhrá A-hru na K_n pre všetky n .
- Bob vyhrá B-hru na K_n práve vtedy, keď $n \neq 4$.

Nech $K_{2,n}$ je úplný bipartitný graf, $n \geq 2$.

- Bob vyhrá A-hru na $K_{2,n}$ pre všetky n .
- Alica vyhrá B-hru na $K_{2,n}$ pre všetky n .

Autori nechávajú výsledok A-hry a B-hry na $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 3$ ako otvorený problém.

2.3 $L(d,1)$ -labeling

V tejto časti sa budeme venovať $L(d,1)$ -labelingu a jeho hracej variante. Hracou variantou sa zaoberal Chia a kol. a hlavné výsledky pochádzajú z ich článku [9]. Najskôr uvedieme všeobecnú definíciu $L(p,q)$ -labelingu a potom sa zameriame na hru odvodenú od $L(d,1)$ -labelingu.

Definícia 2.4 ($L(p,q)$ -labeling). Nech G je graf, p a q sú nezáporné celé čísla, $p \geq q$. Vzdialenosť medzi dvomi vrcholmi u a v definujeme ako dĺžku najkratšej cesty medzi u a v , značíme $d(u,v)$. $L(p,q)$ -labeling definujeme ako zobrazenie $\phi : V \rightarrow \{0, 1, \dots, k\}$, pre ktoré platí:

- ak $d(u,v) = 1$, potom $|\phi(u) - \phi(v)| \geq p$,
- ak $d(u,v) = 2$, potom $|\phi(u) - \phi(v)| \geq q$.

Ako sme už naznačili v predošlej kapitole, $L(p,q)$ -labeling bol inšpirovaný problémom pridelovania frekvencií. Ďalšie výsledky z tejto oblasti zhrnul Yeh vo svojom prehľadovom článku [24].

Definícia 2.5 (Hra s $L(d,1)$ -labelingom). Nech Alica a Bob sú dvaja hráči, striedajú sa po každom ťahu. V každom ťahu si hráč vyberie nejaký voľný vrchol a priradí mu nejakú značku z množiny $\{0, 1, \dots, k\}$. Značky sa môžu opakovať. Po každom ťahu musí pre všetky vrcholy, ktoré už majú priradenú značku, platiť:

- ak $d(u,v) = 1$, potom $|\phi(u) - \phi(v)| \geq d$,
- ak $d(u,v) = 2$, potom $\phi(u) \neq \phi(v)$.

Alica vyhrá, ak má na konci hry každý vrchol priradenú značku. Inak vyhrá Bob.

Cieľom je určiť minimálne k také, aby existovala výherná stratégia pre Alicu na grafe G . Toto číslo budeme značiť ako $\tilde{\lambda}_1^d(G)$ pre A-hru a ako $\tilde{\lambda}_2^d(G)$ pre B-hru. V článku [9] sú dokázané vzorce pre prípady $\tilde{\lambda}_1^d(K_n)$, $\tilde{\lambda}_2^d(K_n)$ a $\tilde{\lambda}_1^d(K_{m,n})$, kde $d \geq \max\{m,n\}$.

Veta 2.4. [9] Pre všetky $n \geq 1$ platí:

- $\tilde{\lambda}_1^d(K_n) = (4d - 1) \cdot \lceil \frac{n-3}{3} \rceil + d \cdot ((n - 1) \bmod 3)$,
- $\tilde{\lambda}_2^d(K_n) = (4d - 1) \cdot \lceil \frac{n-1}{3} \rceil - 2d + d \cdot ((n - 2) \bmod 3)$.

Pre všetky d,m,n také, že $d \geq m \geq n \geq 2$ platí:

- $\tilde{\lambda}_1^d(K_{m,n}) = 2d + m + n - 2 - ((m + n) \bmod 2)$.

2.4 Magic labeling

Magický labeling ako prvý prezentoval Sedláček [12] v roku 1963. Jeho definícia bola motivovaná magickými štvorcami z teórie čísel. Magický labeling definoval ako funkciu α z množiny hrán do nezáporných reálnych čísel takú, že súčet hodnôt na incidentných hranách musí byť pre každý vrchol rovnaký.

V súčasnosti je najčastejšie používaná definícia, kde uvažujeme zobrazenie do prirodzených a nie reálnych čísel. Z magického labelingu vzniklo veľa rôznych variánt, my sa budeme zaoberať iba niektorými z nich.

Najskôr uvedenie definíciu totálneho vrcholovo-magického labelingu, potom sa zameriame na hracie varianty a na konci tejto sekcie sa budeme venovať hranovému vrcholovo-magickému labelingu.

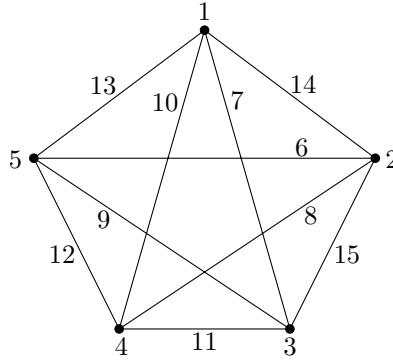
Definícia 2.6 (Totálny vrcholovo-magický labeling). Nech $G = (V,E)$ je graf, množina značiek je definovaná ako $L = \{1, \dots, |V| + |E|\}$ a $\rho : V \cup E \rightarrow L$ je prosté zobrazenie. Váhu vrcholu definujeme ako

$$w_M(v) = \rho(v) + \sum_{uv \in E} \rho(uv) \quad \text{pre } \forall v \in V.$$

Nech u je ľubovoľný vrchol, definujeme konštantu $k = w_M(u)$ a toto k nazývame *magická konštanta*. Zobrazenie ρ nazveme magický labeling, ak $w_M(v) = k$ pre všetky vrcholy $v \in V$.

Na Obrázku 2.1 je ukázaný príklad totálneho vrcholovo-magického labelingu na grafe K_5 s magickou konštantou $k = 45$.

Tento labeling sa nazýva totálny vrcholovo-magický labeling, pretože ide o totálny labeling a magická konštanta je určená pre vrcholy. Magická konštanta môže byť definovaná aj pre hrany, potom hovoríme o hranovo-magickom labelingu. Hranovo-magickými labelingami sa ale nebudeme zaoberať.



Obr. 2.1: Totálny vrcholovo-magický labeling na K_5 s $k = 45$ [15].

Definícia 2.7 (Hra s totálnym vrcholovo-magickým labelingom). Nech G je graf a $L = \{1, \dots, |V| + |E|\}$ je množina značiek. Alica a Bob sú dvaja hráči, ktorí sa striedajú po každom ťahu. V každom ťahu si hráč vyberie nejakú doteraz nepoužitú značku a priradí ju nejakému voľnému vrcholu alebo hrane, ktorá ešte značku nemá. Vrchol nazveme *uzavretý*, ak už má priradenú značku a všetky s ním incidentné hrany už majú priradenú značku. Inak je *otvorený*. Nech u je prvý uzavretý vrchol, potom magickú konštantu k určíme ako $k = w_M(u)$. Pre každý ďalší uzavretý vrchol v musí platiť $w_M(v) = k$. Ak toto nie je možné dosiahnuť pre nejaký vrchol, potom tento vrchol musí zostať otvorený do konca hry. Hra končí, keď už nie je možné vykonať ďalší ťah. Vyhráva hráč, ktorý vykonal posledný ťah v súlade s pravidlami.

V prípade, kedy graf nemá totálny vrcholovo-magický labeling, musia niektoré vrcholy zostať otvorené až do konca hry. Uvedieme dva hlavné výsledky o tejto hre pochádzajúce z článku [6], predtým ešte definujeme niekoľko pojmov. Vrchol stupňa 1 nazývame *list*. Vrchol nazveme *stonkou*, ak je incidentný s aspoň jedným listom. *Jadro grafu* vznikne z grafu odstránením všetkých listov.

Veta 2.5. [6] Nech G je graf, kde každý vrchol je buď list alebo stonka, aspoň jedna stonka v G je incidentná s aspoň tromi listami a ostatné stonky sú incidentné s aspoň dvomi listami. Ak má jadro grafu nepárny počet vrcholov, potom Alica vyhrá A-hru. Inak vyhrá A-hru Bob.

Veta 2.6. [6] Nech G je graf, v ktorom sú všetky vrcholy okrem jedného buď listy alebo stonky a každá stonka je incidentná s aspoň tromi listami. Nech je celkový počet listov párný. Ak má jadro G nepárny počet vrcholov, potom Alica vyhrá A-hru.

Na tieto dva výsledky autori nadviazali v nepublikovanom článku [5].

V ďalšej časti tejto sekcie sa zameriame na hru s hranovým vrcholovo-magickým labelingom. To znamená, že značky sú priradované iba hranám.

Definícia 2.8 (Hra s hranovým vrcholovo-magickým labelingom). Nech G je graf a L je množina značiek definovaná ako $L = \{1, \dots, |E|\}$. Alica a Bob sú dvaja hráči, ktorí sa striedajú po každom ťahu. V každom ťahu si hráč vyberie nejakú doteraz nepoužitú značku a priradí ju nejakej hrane, ktorá ešte značku nemá. Vrchol nazveme *uzavretý*, ak všetky s ním incidentné hrany už majú priradené značky. Inak je *otvorený*. Váhu uzavretého vrcholu v definujeme ako súčet zna-

čiek na hranách incidentných s v . Magickú konštantu k určíme ako váhu prvého uzavretého vrcholu. Pre všetky uzavreté vrcholy musí po každom ťahu platiť, že ich váha je rovná k . Ak nie je možné pre nejaký vrchol vytvoriť váhu k , zostane tento vrchol otvorený až do konca hry. Hra končí, keď už nie je možné vykonať ďalší ťah a vyhráva hráč, ktorý hral v poslednom ťahu.

Definíciu pre jadro grafu, stonku a list ponecháme rovnakú ako pri totálnom vrcholo-magickom labelingu. K tejto hre uvedieme výsledky z článku [17].

Veta 2.7. [17] Nech G je graf, kde každý vrchol je vrchol alebo stonka a Alica hrá v prvom ťahu. Rozlíšime dva prípady.

- Ak má jadro grafu párny počet hrán, potom platí:
Alica vyhrá práve vtedy, ak existuje stonka, ktorá je incidentná aspoň s dvomi listami.
- Ak má jadro grafu nepárny počet hrán, potom platí:
Alica vyhrá práve vtedy, ak existuje stonka, ktorá má práve jeden list.

Pred uvedením hlavného výsledku je potrebné definovať vlastnosť grafu, ktorú autori nazývajú ako *vlastnosť P* .

Definícia 2.9. Graf G spĺňa vlastnosť P , ak platí:

- každý vrchol je list, stonka alebo má stupeň 2,
- graf G obsahuje aspoň jednu stonku, ktorá je incidentná s aspoň dvomi listami,
- jadro grafu G sa dá rozložiť na párny počet hranovo disjunktných ciest medzi stonkami dĺžky $4k + 1$ pre nejaké celé nezáporné číslo k ,
- počet hrán grafu G je nepárny.

Veta 2.8. [17] Ak G spĺňa vlastnosť P , potom Alica vyhrá A-hru na G .

3. ESD labeling

V tejto kapitole predstavíme nový labeling a s ním súvisiacu hraciu variantu. Tento labeling pochádza z článku Tuzu [22] z roku 2016, kde bol uvedený pod anglickým názvom *edge-sum distinguishing labeling*. V tejto práci ho budeme uvádzať pod skratkou *ESD labeling*. V tejto a nasledujúcej kapitole budú prezentované predovšetkým vlastné výsledky.

Napriek tomu, že cieľom práce je študovať hlavne hracie varianty, táto kapitola bude venovaná existencii ESD labelingu a jeho vlastnostiam. Dôvodom je, že tento typ labelingu nebol ešte vôbec preskúmaný, podľa nášho názoru je otázka existencie dôležitá a zaujímavá, a navyše väčšinu výsledkov využijeme v ďalšej kapitole v dôkazoch tvrdení o hrách s ESD labelingom.

3.1 Základné definície a značenie

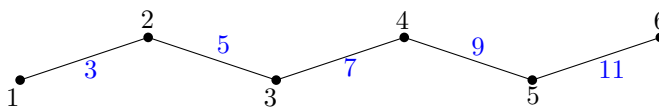
V tejto časti uvedieme základné definície, niekoľko príkladov ESD labelingu a súvislosť s existujúcimi labelingami.

Definícia 3.1 (Váha hrany v ESD labelingu). Nech $G = (V, E)$ je graf a ϕ je vrcholový labeling na G . Váhu hrany $uv \in E$ pre ESD labeling definujeme ako $w_E(uv) = \phi(u) + \phi(v)$.

Definícia 3.2 (ESD labeling). Nech $G = (V, E)$ je graf a $L = \{1, \dots, s\}$ je množina značiek. ESD labeling na grafe G definujeme ako labeling $\phi : V \rightarrow L$, kde ϕ je prosté a platí

$$\forall e, f \in E : e \neq f \rightarrow w_E(e) \neq w_E(f).$$

Na Obrázku 3.1 je uvedený príklad ESD labelingu na grafe P_6 .

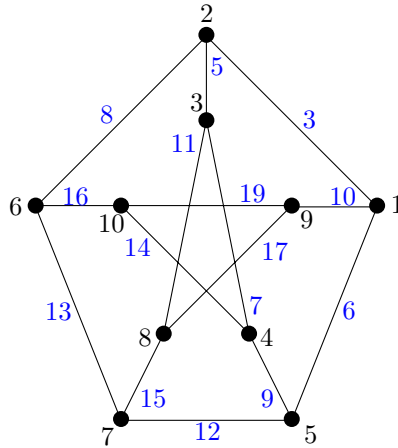


Obr. 3.1: Príklad ESD labelingu na P_6 .

ESD labeling je definovaný ako prosté zobrazenie, preto pre $|L| < |V|$ neexistuje. Vždy teda uvažujeme $|L| \geq |V|$. Špeciálny prípad, kedy nastáva rovnosť, nazývame *kanonický ESD labeling*.

Z definície ESD labelingu plynie, že každý ESD labeling na grafe G je aj farbením grafu G . Na rozdiel od farbenia nie je cieľom minimalizovať počet značiek, ale splniť podmienku pre váhy hrán.

Graf nazveme *ESD graf*, ak na ňom existuje kanonický ESD labeling. Na Obrázku 3.2 je zobrazený Petersenov graf, ktorý je netriviálnym príkladom ESD grafu. Váhy hrán sú vyznačené modrou farbou.



Obr. 3.2: Príklad kanonického ESD labelingu na Petersenovom grafe.

Súvislosť s existujúcimi labelingami

Z existujúcich labelingov je ESD labelingu najviac podobný *antimagic labeling*.

Definícia 3.3 (Antimagic labeling). [2] Nech $G = (V, E)$ je graf, $L = \{1, \dots, |E|\}$ je množina značiek a $\rho : E \rightarrow L$ je prosté zobrazenie. Váhu vrcholu v definujeme ako $w_A(v) = \sum_{uv \in E} \rho(uv)$. Zobrazenie ρ nazveme antimagic labeling, ak

$$\forall u, v \in V : u \neq v \rightarrow w_A(u) \neq w_A(v).$$

V antimagic labelingu priradujeme značky hranám a každému vrcholu priradíme súčet značiek na incidentných hranách. V ESD labelingu priradujeme značky vrcholom a každej hrane priradíme súčet jej koncových vrcholov. V obidvoch labelingoch požadujeme, aby boli vzniknuté súčty unikátne.

Graf nazveme *antimagic*, ak preň existuje antimagic labeling. K antimagic grafom sa viaže domnienka, ktorá bola zatiaľ dokázaná iba pre niektoré triedy grafov.

Domnienka 3.1. Každý súvislý graf okrem K_2 je antimagic.

Podrobnejšie výsledky je možné nájsť v článku Alona a kol. [2].

3.2 ESD grafy

V tejto sekcii dokážeme existenciu kanonického ESD labelingu pre cesty, kružnice, stromy, hviezdy a úplné bipartitné grafy s menšou partitou veľkosti dva.

Pozorovanie 3.1. Nech P_n je cesta na n vrcholoch. Každá cesta P_n je ESD graf.

Dôkaz. Pre $n \leq 2$ tvrdenie platí triviálne. Predpokladajme teda, že $n \geq 3$. Označme vrcholy po poradí ako v_1, \dots, v_n . Značky priradíme tak, že vrcholu v_i priradíme značku i pre všetky $i = 1, \dots, n$. Váhy na hranách budú mať hodnoty $3, 5, \dots, 2n - 1$. Váhy hrán sú navzájom rôzne a teda máme ESD labeling. \square

Definícia 3.4 (Hviezda). Nech $r \in \mathbb{N}$. Hviezdu S_r definujeme ako úplný bipartitný graf $K_{1,r}$.

Veta 3.1. Hviezda S_r je ESD graf pre všetky $r \geq 1$. Naviac každý labeling $\phi : V(S_r) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ taký, že ϕ je prosté, je kanonický ESD labeling.

Dôkaz. Označme ako v vrchol stupňa r . Každá hrana v grafe je incidentná s v . Pre spor predpokladajme, že existuje labeling $\phi : V(S_r) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ taký, že ϕ je prosté a zároveň ϕ nie je kanonický ESD labeling. Potom platí

$$\exists vu_1, vu_2 \in E : u_1 \neq u_2 \wedge w_E(vu_1) = w_E(vu_2).$$

S využitím predpokladu dostávame rovnosť

$$0 = w_E(vu_1) - w_E(vu_2) = (\phi(v) + \phi(u_1)) - (\phi(v) + \phi(u_2)) = \phi(u_1) - \phi(u_2).$$

Z toho plynie $u_1 = u_2$, čo je spor. □

Všeobecne nemusí platiť, že každý labeling $\phi : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, kde ϕ je prosté, je zároveň aj kanonickým ESD labelingom. Príkladom triedy grafov, kedy to tak je, sú hviezdy.

Veta 3.2. Nech C_n je kružnica na n vrchoch, kde $n \geq 3$. Potom C_n je ESD graf.

Dôkaz. Označme si za sebou idúce vrcholy v_1, \dots, v_n . Rozlíšime dva prípady.

1. Ak n je párne, potom vrcholom priradíme značky takto:

- $\phi(v_i) = i$ pre všetky $i \in \{1, \dots, n-2\}$,
- $\phi(v_{n-1}) = n$,
- $\phi(v_n) = n-1$.

Váhy hrán medzi vrcholmi v_1 až v_{n-2} budú nepárne hodnoty $3, 5, \dots, 2n-5$ a váha hrany $v_{n-1}v_n$ bude tiež nepárna, tj. $w_E(v_{n-1}v_n) = 2n-1$. Zvyšné dve hrany budú mať párne váhy, tj. $w_E(v_nv_1) = n$ a $w_E(v_{n-2}v_{n-1}) = 2n-2$. Keďže sú všetky váhy hrán rôzne, tak máme ESD labeling.

2. Ak n je nepárne, potom priradíme značky vrcholom takto:

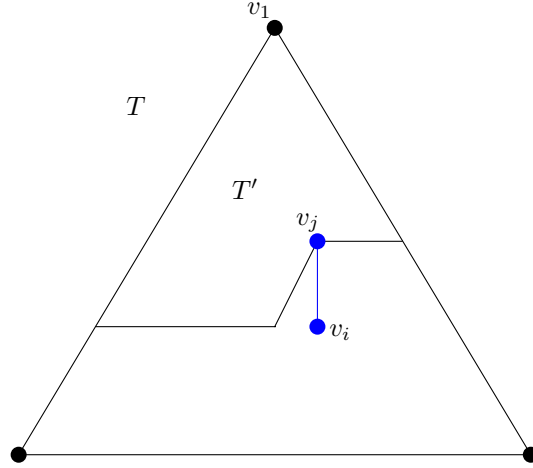
- $\phi(v_i) = i$ pre všetky $i \in \{1, \dots, n\}$.

Váhy hrán medzi vrcholmi v_1 až v_n budú nepárne hodnoty $3, 5, \dots, 2n-1$. Váha hrany v_1v_n je rovná $n+1$ a teda je párna. Váhy hrán sú unikátne a tým sme dokázali, že máme ESD labeling. □

Veta 3.3. Nech T je strom, potom T je ESD graf.

Dôkaz. Vyberieme nejaký ľubovoľný vrchol stromu, označíme ho ako v_1 a priradíme mu značku 1. Zakoreníme T vo v_1 a spustíme z v_1 prehľadávanie do šírky. Vrchol, ktorý navštívime ako i -ty v poradí označíme ako v_i a priradíme mu značku i pre každé $i = 2, \dots, n$.

Dokážeme invariant, ktorý bude platiť v každom kroku. Označme ako T' maximálny podstrom T taký, že všetky vrcholy v T' už majú priradenú značku. To znamená, že všetky vrcholy v T' už boli navštívené prehľadávaním. Nech v_i je vrchol, ktorý prehľadávanie ide práve navštíviť a priradiť mu značku i , teda $v_i \in T \setminus T'$. Označme v_j rodiča v_i (viď Obrázok 3.3). Ukážeme, že $w_E(v_i v_j) > w_E(v_a v_b)$ pre každú hranu $v_a v_b \in E(T')$.



Obr. 3.3: Konštrukcia ESD labelingu na strome.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a < b$. Rozlíšime niekoľko prípadov:

- Hrana $v_a v_b$ má obidva koncové vrcholy na úrovni vyššej alebo rovnjej ako úroveň v_j . Potom $a < j$ a $b < i$, z toho plynie $a + b < i + j$.
- Vrchol $v_a = v_j$, to znamená, že v_b a v_i majú spoločného rodiča v_j . Vrchol v_b už bol navštívený, preto $b < i$ a z toho plynie $b + j < i + j$.
- Hrana v_a je v úrovni v_j , vrchol v_b je v úrovni v_i a $v_a \neq v_j$. Hrana $v_a v_b$ už bola navštívená, preto platí $a < j$ a $b < i$. Z toho plynie $a + b < i + j$.

Dokázali sme, že v každom kroku zostávajú zachované podmienky ESD labelingu a po n krokoch dostaneme ESD labeling na grafe G . \square

V ďalšom tvrdení ukážeme, že existuje práve jeden kanonický labeling na $K_{2,r}$ až na izomorfizmy. Najskôr definujeme izomorfizmus medzi labelingami.

Definícia 3.5. Labelingy ϕ_1 a ϕ_2 na grafe G sú izomorfné, ak existuje automorfizmus f grafu G taký, že $\phi_1(v) = \phi_2(f(v))$ pre $\forall v \in V(G)$.

Veta 3.4. Pre každé $K_{2,r}$, kde $r > 2$ existuje až na izomorfizmus práve jeden kanonický ESD labeling.

Dôkaz. Vrcholy menšej partity označíme ako v_1, v_2 a vrcholy väčšej partity označíme ako u_1, \dots, u_r . Nech ϕ je kanonický labeling na $K_{2,r}$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\phi(v_1) < \phi(v_2)$. Najskôr ukážeme, že ak $\phi(v_1) = 1$ a $\phi(v_2) = n$, potom ϕ je ESD labeling. Potom zostáva ukázať, že ak $\phi(v_1) \neq 1$ alebo $\phi(v_2) \neq n$, tak ϕ nie je ESD labeling.

1. Ak $\phi(v_1) = 1$ a $\phi(v_2) = n$, potom ϕ je ESD labeling.

Nech $\phi(v_1) = 1$ a $\phi(v_2) = n$, potom sú vrcholom u_1, \dots, u_r priradené značky $\{2, \dots, (n-1)\}$. Hrany incidentné s v_1 majú váhy $3, \dots, n$ a hrany incidentné s v_2 majú váhy $(n+2), \dots, (2n-1)$. Váhy hrán sú unikátne a preto ϕ je ESD labeling.

2. Ak $\phi(v_1) \neq 1$ alebo $\phi(v_2) \neq n$, potom ϕ nie je ESD labeling.

Rozlíšime dva prípady:

- $\phi(v_1)$ a $\phi(v_2)$ sú dve po sebe idúce čísla, tzn. $\phi(v_2) = \phi(v_1) + 1$.

Z predpokladu $r > 2$ plynie, že $n \geq 5$. Na vrcholoch väčšej parity musia existovať dva rôzne vrcholy u_i a u_j také, že $\phi(u_i) = s$ a $\phi(u_j) = s + 1$. Potom platí

$$w_E(v_1, u_j) = \phi(v_1) + (s + 1) \text{ a } w_E(v_2, u_i) = (\phi(v_1) + 1) + s.$$

Dostávame, že $w_E(v_1, u_j) = w_E(v_2, u_i)$ a teda ϕ nie je ESD labeling.

- $\phi(v_1)$ a $\phi(v_2)$ nie sú dve po sebe idúce čísla, tzn. $|\phi(v_1) - \phi(v_2)| > 1$.

Z predpokladu $\phi(v_1) \neq 1$ alebo $\phi(v_2) \neq n$ plynie, že existujú dva rôzne vrcholy $u_i, u_j \in \{u_1, \dots, u_r\}$ také, že platí aspoň jedno z nasledujúcich:

- $\phi(u_i) = \phi(v_1) + 1$ a $\phi(u_j) = \phi(v_2) + 1$
- $\phi(u_i) = \phi(v_1) - 1$ a $\phi(u_j) = \phi(v_2) - 1$.

Ak platí a), potom

$$w_E(v_1 u_j) = \phi(v_1) + (\phi(v_2) + 1) \text{ a } w_E(v_2 u_i) = \phi(v_2) + (\phi(v_1) + 1).$$

Analogicky, ak platí b), potom

$$w_E(v_1 u_j) = \phi(v_1) + (\phi(v_2) - 1) \text{ a } w_E(v_2 u_i) = \phi(v_2) + (\phi(v_1) - 1).$$

V oboch prípadoch platí $w_E(v_1 u_j) = w_E(v_2 u_i)$ a preto ϕ nie je ESD labeling.

□

3.3 Nutná podmienka pre existenciu ESD labelingu

Ukázali sme niekoľko tried grafov, ktoré majú kanonický ESD labeling. Existujú aj grafy, ktoré kanonický ESD labeling nemajú. Preto určíme nutnú, nie však postačujúcu podmienku pre existenciu ESD labelingu. Predtým ešte dokážeme jednoduché lemma.

Lemma 3.5. Nech G je graf na n vrcholoch. V každom kanonickom ESD labelingu na G môže vzniknúť najviac $2n - 3$ rôznych váh hrán.

Dôkaz. Najmenšia váha hrany, ktorá môže v grafe vzniknúť je 3 a najväčšia, ktorá môže vzniknúť je $2n - 1$. Všetky váhy hrán v G teda patria do množiny $\{3, \dots, 2n - 1\}$. V tejto množine sa nachádza $2n - 3$ rôznych hodnôt. Z toho plynie, že existuje najviac $2n - 3$ rôznych váh hrán. □

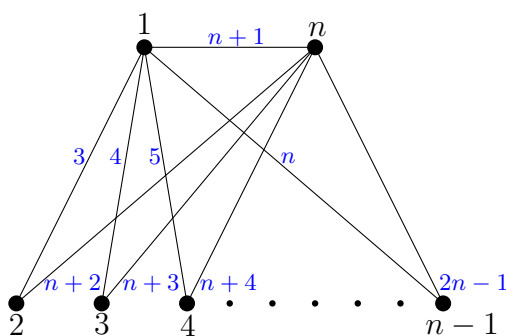
Veta 3.6. Ak má graf $G = (V, E)$ kanonický ESD labeling, potom $|E| \leq 2|V| - 3$.

Dôkaz. Označme počet vrcholov ako n a počet hrán ako m . Pre spor predpokladajme, že G má ESD labeling a $m > 2n - 3$. Podľa Lemma 3.5 môže v kanonickom ESD labelingu vzniknúť najviac $2n - 3$ rôznych váh hrán. Potom z Dirichletovho princípu plynie, že existujú aspoň dve hrany s rovnakou váhou. V ESD labelingu ale nemôžu existovať dve hrany s rovnakou váhou, teda dostávame spor. \square

Teraz ukážeme príklad grafu, ktorý má $2n - 3$ hrán a má ESD labeling a príklad grafu, ktorý má $2n - 3$ hrán a nemá ESD labeling.

Príklad 3.1. Na Obrázku 3.4 je zobrazený graf, ktorý má $2n - 3$ hrán. Čísla vyznačené modrou farbou predstavujú váhy hrán. Overíme, že ide o ESD labeling.

Hrany incidentné s vrcholom so značkou 1 majú váhy $3, \dots, n + 1$. Hrany incidentné s vrcholom so značkou n , okrem hrany medzi vrcholmi so značkami 1 a n , majú váhy $n + 2, \dots, 2n - 1$. Váhy hrán sú unikátne a teda sa jedná o ESD labeling. Je zrejmé, že ak by sme do grafu pridali ľubovoľnú ďalšiu hranu, váha tejto hrany by už nebola unikátna a tým by bola porušená podmienka ESD labelingu.



Obr. 3.4: Príklad ESD grafu s $2n - 3$ hranami.

Príkladom grafu, ktorý má $2n - 3$ hrán a zároveň nemá ESD labeling je *vejár*. Najskôr uvedieme definíciu vejáru a potom dokážeme, že preň neexistuje ESD labeling. Vejár je v anglickej terminológii označovaný ako *fan graph*, preto ho budeme značiť F .

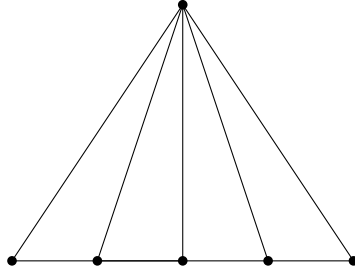
Definícia 3.6 (Vejár). [7] Vejár F_r definujeme ako cestu na r vrcholoch, kde $r \geq 2$ a jeden vrchol, hovoríme mu *centrálny*, ktorý je rôzny od všetkých vrcholov cesty a je spojený hranou so všetkými vrcholmi cesty. Počet vrcholov značme ako n a platí $n = r + 1$.

Ak hovoríme o *ceste* vo vejári, myslíme tým práve túto cestu dĺžky r . Na Obrázku 3.5 je zobrazený vejár F_5 .

Lemma 3.7. Počet hrán vejáru F_r je rovný $2n - 3$.

Dôkaz. Vejár F_r obsahuje r hrán medzi centrálnym vrcholom a cestou na r vrcholoch. Ďalej obsahuje $r - 1$ hrán na ceste dĺžky r . Spolu je to teda $2r - 1 = 2n - 3$ hrán. \square

Lemma 3.8. Nech F_r je graf na n vrcholoch, kde $n \geq 6$. Potom na F_r neexistuje kanonický ESD labeling taký, že má na centrálnom vrchole priradenú značku 1.



Obr. 3.5: Vejár F_5 .

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že existuje kanonický ESD labeling, ktorý má na vrchole značku 1. Na hranách incidentných s centrálnym vrcholom sú váhy $3, \dots, n+1$, preto na hranách cesty musia byť váhy hrán ostre väčšie ako $n+1$. Aby toto bolo splnené pre vrchol so značkou 2, musí byť vrchol so značkou 2 krajným vrcholom cesty a musí byť incidentný s vrcholom so značkou n . Tým vznikne váha $n+2$. Na hranách incidentných s vrcholom so značkou 3 (okrem hrany incidentnej s centrálnym vrcholom) musí byť váha ostre väčšia ako $n+2$. Aby toto bolo splnené, musí vrchol so značkou 3 susediť s vrcholom so značkou n a tiež musí byť krajným vrcholom cesty. Keďže ale $n \geq 6$, tak to nie je možné. Dostávame spor. \square

Lemma 3.9. Nech F_r je graf na n vrcholech, kde $n \geq 6$. Potom na F_r neexistuje kanonický ESD labeling taký, že má na centrálnom vrchole priradenú značku n .

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že existuje kanonický labeling, ktorý má na centrálnom vrchole značku n . Na hranách incidentných s centrálnym vrcholom sú potom váhy $n+1, \dots, 2n-1$. Hrany na ceste musia mať váhy ostre menšie ako $n+1$. Vrchol so značkou $n-1$ teda môže susediť iba s vrcholom so značkou 1 a musí byť krajným vrcholom cesty. Tým vznikne váha hrany n . Vrchol so značkou $n-2$ môže susediť (okrem centrálného vrcholu) už iba s vrcholom so značkou 1 a tiež musí byť krajným vrcholom cesty. Toto ale nie je možné, pretože $n \geq 6$. Dostávame spor. \square

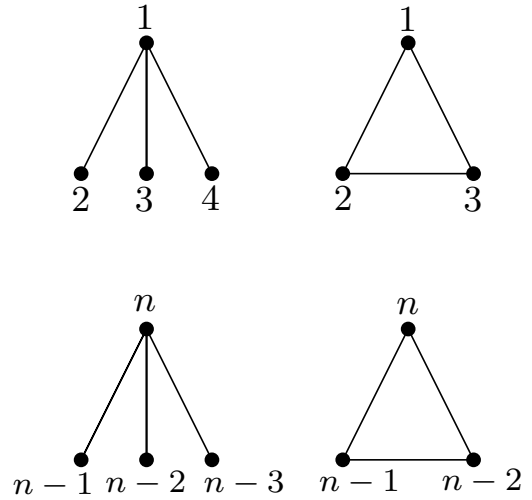
Veta 3.10. Nech F_r je vejár a počet vrcholov značíme n . Ak $n \geq 6$, potom neexistuje kanonický ESD labeling na F_r .

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že existuje kanonický ESD labeling na F_r . Podľa Lemma 3.5 môže používať najviac $2n-3$ rôznych váh hrán. Podľa Lemma 3.7 má graf F_r $2n-3$ hrán. Keďže ide o ESD labeling, každá váha hrany môže byť použitá najviac raz, preto musia byť použité všetky váhy $3, \dots, 2n-1$. Ukážeme, že to nie je možné a teda ESD labeling neexistuje.

Ľavý stĺpec Tabuľky 3.1 reprezentuje váhu hrany a pravý stĺpec reprezentuje ako sa dá získať. Váha 3 a 4 sa dá získať iba jedným spôsobom a váha 5 sa dá získať dvomi spôsobmi. V hornej časti Obrázku 3.6 sú zobrazené dva možné spôsoby, ako získať súčasne váhy 3, 4 aj 5. Iný spôsob nie je možný.

Váhy $2n-1$ a $2n-2$ sa tiež dajú získať iba jedným spôsobom. Váha $2n-3$ sa dá získať dvomi spôsobmi. V dolnej časti Obrázku 3.6 sú zobrazené dva spôsoby, ako tieto váhy získať a opäť iný spôsob neexistuje.

Váha hrany	Použité značky
3	1 + 2
4	1 + 3
5	1 + 4 2 + 3
...	
$2n - 3$	$n + (n - 3)$ $(n - 1) + (n - 2)$
$2n - 2$	$n + (n - 2)$
$2n - 1$	$n + (n - 1)$



Tabuľka 3.1: Použité váhy a značky.

Obr. 3.6: Možné umiestnenia značiek.

Podľa Lemma 3.8 neexistuje kanonický ESD labeling, ktorý má na centrálnom vrchole značku 1 a podľa Lemma 3.9 neexistuje kanonický ESD labeling, ktorý má na centrálnom vrchole značku n . Preto jediný spôsob, ako získať váhy 3, 4 a 5 je umiestniť značky 1, 2, 3 na podgraf F_r izomorfný trojuholníku a analogickým spôsobom musíme umiestniť aj značky $n, n - 1, n - 2$. Keďže $n \geq 6$, tieto dva trojuholníky by museli byť vrcholovo disjunktné. To ale nie je možné, pretože v grafe F_r neexistujú dva vrcholovo disjunktné trojuholníky. Dostávame spor. \square

3.4 Triedy grafov, ktoré nie sú ESD

V tejto sekcii ukážeme, že pre *koleso*, úplné bipartitné grafy s partitami veľkosti aspoň 3 a úplné grafy na aspoň štyroch vrchoch neexistuje kanonický ESD labeling.

Definícia 3.7 (Koleso). Koleso W_s definujeme ako kružnicu na s vrchoch, kde $s \geq 3$ a jeden vrchol v strede, ktorý je rôzny od všetkých vrcholov kružnice a je spojený hranou so všetkými vrcholmi kružnice.

Veta 3.11. Nech W_s je koleso, potom W_s nie je ESD graf.

Dôkaz. Označme počet vrcholov W_s ako n , potom platí, že $n = s + 1$. Kružnica dĺžky s vo W_s obsahuje s hrán a z každého vrcholu kružnice vedie hrana do vrcholu v strede, teda spolu s hrán incidentných s vrcholom v strede. Graf W_s potom celkovo obsahuje $2s = 2n - 2$ hrán a podľa Vety 3.6 na ňom neexistuje kanonický ESD labeling. \square

Veta 3.12. Nech $G = K_{p,r}, p, r \geq 3$ je úplný bipartitný graf, potom G nie je ESD graf.

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že existuje kanonický ESD labeling ϕ na G . Rozlíšime dva prípady.

- V oboch partitách existujú dve po sebe idúce značky.

Nech vrcholy v_i a v_j patria do jednej partity a majú po sebe idúce značky. Označme $\phi(v_i)$ ako l_1 a $\phi(v_j)$ ako $l_1 + 1$. V druhej partite označme vrcholy s po sebe idúcimi značkami ako u_i a u_j a $\phi(u_i) = l_2$ a $\phi(u_j) = l_2 + 1$. Keďže máme úplný bipartitný graf, dostávame

$$w_E(v_i u_j) = l_1 + (l_2 + 1) = (l_1 + 1) + l_2 = w_E(v_j u_i)$$

a to je spor.

- V aspoň jednej z partít neexistujú dve po sebe idúce značky.

Označme takúto partitu ako P a druhú partitu označme ako R . Z predpokladu vieme, že P má aspoň tri vrcholy. Vyberieme dva rôzne vrcholy v_i a v_j z P také, že ich značky sú ostre menšie ako počet vrcholov. Označme $\phi(v_i)$ ako l_1 a $\phi(v_j)$ ako l_2 . Označme vrchol so značkou $l_1 + 1$ ako u_i a vrchol so značkou $l_2 + 1$ ako u_j . Vrcholy u_i a u_j musia patriť do partity R , pretože l_1 a l_2 nie sú po sebe idúce čísla a sú ostre menšie ako počet vrcholov. Potom platí

$$w_E(v_i u_j) = l_1 + (l_2 + 1) = l_2 + (l_1 + 1) = w_E(v_j u_i)$$

a to je spor.

□

Veta 3.13. Nech K_n je úplný graf na n vrcholoch, potom K_n nie je ESD graf pre $n \geq 4$.

Dôkaz. Pre počet hrán v K_n platí

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Chceme dokázať, že pre $n \geq 4$ platí nasledujúci vzťah

$$\frac{n(n-1)}{2} > 2n - 3.$$

Použijeme ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &> 2n - 3 \\ n^2 - 5n + 6 &> 0 \\ (n^2 - 6n + 9) + (n - 3) &> 0 \\ (n - 3)^2 + (n - 3) &> 0 \end{aligned}$$

Pre každé $n \geq 4$ tento vzťah platí a potom podľa Vety 3.6 neexistuje kanonický ESD labeling na K_n . □

4. Hry s ESD labelingom

V tejto kapitole sa budeme zaoberať hracími variantami ESD labelingu. Hry s ESD labelingom boli prvý krát predstavené v článku Tuzu [22], kde je uvedená definícia a niekoľko otvorených problémov. Najskôr definujeme základné pojmy, potom predstavíme vlastné výsledky k hrám na určitých triedach grafov a nakoniec tiež uvedieme niekoľko otvorených problémov.

Pripomeňme, že vrchol nazývame *voľný*, ak ešte nemá priradenú značku.

Definícia 4.1 (Čiastočný ESD labeling). Nech $G = (V, E)$ je graf a H je maximálny indukovaný podgraf grafu G taký, že všetky vrcholy v H už majú priradenú značku. Vrcholy z $G \setminus H$ sú teda voľné vrcholy. Čiastočný ESD labeling na G definujeme ako ESD labeling na H .

Definícia 4.2 (Hra). Nech $G = (V, E)$ je graf a $L = \{1, \dots, s\}$ je množina značiek. Alica a Bob sú dvaja hráči, ktorí sa striedajú po každom ťahu. V každom ťahu si hráč vyberie voľný vrchol $v \in G$ a určí $\phi(v) = l$, pre nejaké zatiaľ nepoužité $l \in L$. Ťah je *prípustný*, ak po vykonaní ťahu všetky doteraz priradené značky tvoria čiastočný ESD labeling. *Koniec hry* nastáva v prípade, ak je na grafe vytvorený ESD labeling alebo neexistuje prípustný ťah. Alica vyhrá, ak je vytvorený ESD labeling, inak vyhrá Bob.

Táto verzia hry sa v angličtine nazýva *Maker-Breaker*. Alica je *maker*, pretože chce vytvoriť ESD labeling a Bob je *breaker*, pretože jej to chce prekaziť. Pod pojmom hra myslíme túto verziu hry, kde je počet značiek rovný počtu vrcholov, teda $|L| = |V|$, ak nie je povedané inak. Od Sekcie 4.2 sa budeme venovať ďalším verziám hry.

Pripomeňme, že pojmom *A-hra* nazývame hru, kde v prvom ťahu hrá Alica. Inak hru nazývame *B-hra*. *Výhernou stratégiou* označíme postupnosť ťahov jedného hráča, ktorá nevyhnutne vedie k jeho výhre.

4.1 Hry na vybraných triedach grafov

V tejto sekcii rozoberieme výsledok hry na rôznych triedach grafov. Konkrétne sa zameriame na hviezdy, kolesá, úplné bipartitné grafy, úplné grafy a grafy priateľstva.

Pozorovanie 4.1. Alica vyhrá každú hru na hviezde S_r , kde $r \geq 1$.

Dôkaz. Vo Vete 3.1 sme dokázali, že každý labeling $\phi : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, kde ϕ je prosté, je zároveň aj kanonickým ESD labelingom. Z toho plynie, že ak hráči vykonávajú iba prípustné ťahy, potom je možné priradiť značku každému vrcholu a naviac vzniknutý labeling bude kanonickým ESD labelingom. Preto Alica vždy vyhrá. \square

Veta 4.1. Bob vyhrá každú hru na úplnom bipartitnom grafe $K_{2,r}$, kde $r > 2$.

Dôkaz. Označme vrcholy menšej partity ako u a v . Vo Vete 3.4 sme dokázali, že existuje jediný kanonický ESD labeling, označme ho φ . Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\varphi(u) < \varphi(v)$ a ďalej musí platiť, že $\varphi(u) = 1$ a $\varphi(v) = n$.

Alica vyhrá v prípade, ak sa jej podarí tento labeling vytvoriť. Nech však Alica hrá v prvom ťahu akokoľvek, Bob v druhom ťahu použije značku $l \neq 1, n$ na jeden z vrcholov u alebo v . To určite môže, pretože po prvom ťahu je použitá iba jedna značka a aspoň jeden z vrcholov u a v je voľný. Vďaka tomu už nie je možné vytvoriť na grafe labeling φ a Bob vyhráva. \square

Veta 4.2. Bob vyhrá každú hru na úplnom bipartitnom grafe $K_{p,r}$, kde $p, r \geq 3$.

Dôkaz. Vo Vete 3.12 sme dokázali, že neexistuje kanonický ESD labeling, preto Bob vždy vyhrá bez ohľadu na priebeh hry. \square

Veta 4.3. Nech W_s je koleso. Bob vyhrá každú hru na W_s .

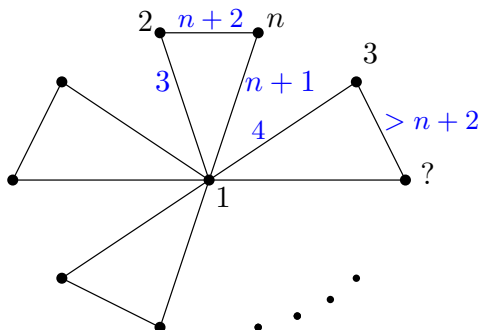
Dôkaz. Podľa Vety 3.11 neexistuje kanonický ESD labeling na W_s a preto Bob vyhrá každú hru na W_s . \square

Definícia 4.3 (Graf priateľstva). [13] Graf priateľstva FR_r definujeme ako hrano-disjunktné zjednotenie r kópií K_3 , ktoré majú práve jeden spoločný vrchol.

Veta 4.4. Nech FR_r je graf priateľstva. Bob vyhrá B-hru na FR_r , kde $r \geq 2$.

Dôkaz. Ukážeme, že existuje výherná stratégia pre Boba. Označme vrchol s najväčším stupňom ako v . Nech Bob v prvom ťahu priradí značku 1 na v .

Ukážeme, že neexistuje ESD labeling, v ktorom má vrchol v priradenú značku 1. Pre spor predpokladajme, že taký labeling existuje. Potom hrany incidentné s v budú mať váhy $3, \dots, n+1$. Hrany, ktoré nie sú incidentné s v , musia mať váhy ostre väčšie ako $n+1$. Preto vrchol so značkou 2 môže byť okrem v incidentný iba s vrcholom so značkou n . Tým vznikne váha $n+2$. Označme ako u_1 vrchol so značkou 3 a ako u_2 vrchol incidentný s vrcholom u_1 rôzny od v . Aby mala hrana u_1u_2 váhu ostre väčšiu ako $n+2$, musí mať vrchol u_2 značku n (viď Obrázok 4.1). To ale nie je možné, pretože by značka n bola použitá dvakrát. \square



Obr. 4.1: Ilustrácia sporu s existenciou konkrétneho ESD labelingu na FR_r .

V Kapitole 3 sme dokázali, že pre každú kružnicu existuje kanonický ESD labeling. Teraz sa zameriame na hru s ESD labelingom na kružnici a rozoberieme výsledok hry na C_4, C_5 a C_6 , kde je počet značiek rovný počtu vrcholov. Výsledok

hry na väčších kružniciach zatiaľ nie je známy. Nasledujúce tvrdenie pochádza z článku Tuzu [22], kde je však uvádzané bez dôkazu. Dôkaz tohto tvrdenia nie je na prvý pohľad zrejmý, takže toto tvrdenie uvedieme aj s dôkazom.

Veta 4.5. [22] Bob vyhrá každú hru na C_4, C_5 a C_6 .

Dôkaz. Tvrdenie rozdelíme na tri menšie časti, ktoré postupne dokážeme.

1. Bob vyhrá každú hru na C_4 .

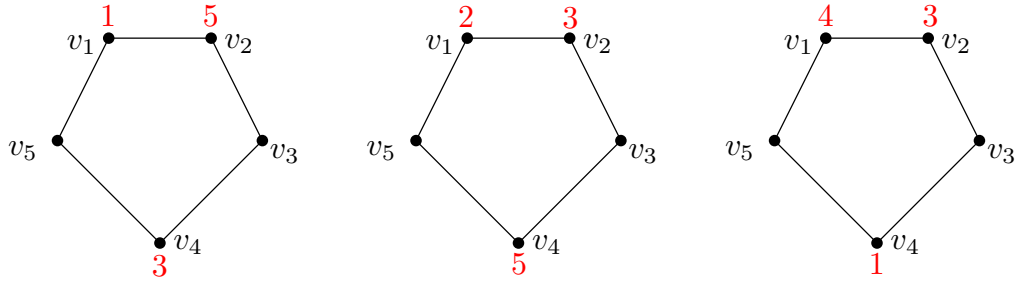
Značky rozdelíme na dve dvojice. Značky 1 a 4 budú tvoriť jednu dvojicu a značky 2 a 3 budú tvoriť druhú dvojicu. Obidve dvojice majú súčet 5. Označme vrchol, ktorému Alica priradí v prvom ťahu značku ako v_1 a ostatné vrcholy po poradí ako v_2, v_3 a v_4 . Bob v druhom ťahu priradí na v_3 ľubovoľnú značku z inej dvojice ako Alica v prvom ťahu. V ďalších ťahoch sa nedá vyhnúť tomu, aby spolu susedili značky v prvej aj v druhej dvojici. Tým by vznikli dve hrany s váhou 5 a teda Bob vyhráva.

2. Bob vyhrá každú hru na C_5 .

Rozlíšime niekoľko prípadov podľa toho, akú značku Alica priradí v prvom ťahu na nejaký vrchol. Tento vrchol označíme ako v_1 a ostatné označíme po poradí ako v_2, \dots, v_5 . Ilustráciou týchto prípadov je Obrázok 4.2.

- Ak Alica priradila v prvom ťahu jednu značku z dvojice 1 a 5, potom Bob v druhom ťahu priradí na v_2 druhú značku z tejto dvojice. Tým vznikne hrana s váhou 6. Vrcholy v_3, v_4 a v_5 sú voľné a voľné značky sú 2, 3 a 4. Ak by susedili značky 2 a 4, potom Bob vyhrá. Jediný spôsob, ako tomu Alica môže predísť, je v treťom ťahu priradiť značku 3 na v_4 . Vo štvrtom ťahu Bob môže priradiť značku 4 na vrchol susedný s vrcholom so značkou 1. Potom by priradením poslednej značky vznikli dve hrany s váhou 5, čo ale nie je možné a teda Bob vyhráva.
- Analogicky, ak Alica priradila v prvom ťahu jednu značku z dvojice značiek 2 a 3, potom Bob v druhom ťahu priradí na v_2 druhú značku z tejto dvojice. Tým vznikne hrana s váhou 5. Ak by susedili vrcholy so značkami 1 a 4, Bob vyhrá. Opäť jediný spôsob, ako tomu Alica môže zabrániť, je priradiť v treťom ťahu značku 5 na v_4 . Potom ale Bob môže priradiť značku 1 na vrchol incidentný s vrcholom so značkou 3. Poslednú značku už nie je možné priradiť, pretože by vznikli dve hrany s váhou 6. Preto Bob vyhrá.
- Ak Alica priradila v prvom ťahu značku 4, potom Bob v druhom ťahu priradí značku 3 na vrchol v_2 . Tým vznikne hrana s váhou 7. Ak by susedili vrcholy so značkami 5 a 2, potom Bob vyhrá. Alica tomu môže zabrániť iba tak, že v treťom ťahu priradí značku 1 na v_4 . Potom Bob môže vo štvrtom ťahu priradiť značku 5 na vrchol incidentný s vrcholom so značkou 3. Poslednú značku opäť nie je možné priradiť, pretože by vznikli dve hrany s váhou 6 a teda Bob vyhrá.

Týmto sme vyčerpali všetky možnosti, ktoré môžu nastať a pre každú z nich sme dokázali, že Bob vyhrá.



Obr. 4.2: Ilustrácia situácií v hre na C_5 .

3. Bob vyhrá každú hru na C_6 .

Značky rozdelíme do troch dvojíc. Dvojice definujeme ako $d_1 = \{1, 6\}$, $d_2 = \{2, 5\}$ a $d_3 = \{3, 4\}$. Každá značka patrí do práve jednej dvojice a súčet značiek v každej dvojici je rovný 7. Ukážeme výhernú stratégiu pre Boba.

Nech Alica v prvom ťahu priradí nejakú značku l_1 na v_1 . Označme ako x index dvojice, do ktorej patrí táto značka. Bob v druhom ťahu priradí na v_2 druhú značku z dvojice d_x , budeme ju značiť l_2 . V treťom ťahu priradí Alica nejakú značku l_3 na jeden z vrcholov v_3, \dots, v_6 , označíme ho v_p . Index dvojice, do ktorej patrí táto značka označíme ako y a platí, že $x \neq y$. Index zostávajúcej dvojice označíme ako z . Vzdialenosť medzi vrcholmi v_i a v_j definujeme ako $|i - j|$. Bob vo štvrtom ťahu priradí jednu zo značiek z dvojice d_z na vrchol v_q , ktorý je voľný a vzdialenosť v_p a v_q je rovná 2. Dokážeme, že takýto ťah je vždy možný a vedie nevyhnutne k výhre Boba.

Rozlíšime dva prípady.

- Ak vrchol v_p so značkou l_3 susedí s vrcholom v_1 alebo v_2 , potom vrchol v_q existuje a platí, že $q = 4$ alebo $q = 5$. V oboch prípadoch sú obidva vrcholy incidentné s v_q voľné a teda Bob môže na vrchol v_q priradiť ľubovoľnú značku bez porušenia pravidla o váhe hrán.

V tejto chvíli sú v grafe dva voľné vrcholy, ktoré sú obidva incidentné s v_q a dve voľné značky, jedna z dvojice d_y a druhá z dvojice d_z . Priradením značky z d_z na vrchol incidentný s v_q by vznikla ďalšia hrana s váhou 7. To nie je možné a teda Bob vyhráva.

- Ak vrchol v_p nesusedí s vrcholmi v_1 a v_2 , potom platí, že $p = 4$ alebo $p = 5$. Vrchol vo vzdialenosti 2 od v_p teda bude incidentný s v_1 alebo v_2 a keďže ani jeden z vrcholov v_3 a v_6 ešte nemá priradenú značku, tak vrchol v_q existuje a platí, že $q = 3$ alebo $q = 6$. V grafe je zatiaľ určená iba váha hrany v_1v_2 . Nech teda priradíme vrcholu v_q ľubovoľnú značku, nemôže vzniknúť hrana s rovnakou váhou pretože v_q je incidentný s jedným vrcholom tejto hrany a ostatné váhy ešte určené nie sú.

Podobne ako v prvom prípade sú v tejto chvíli v grafe dva voľné vrcholy, ktoré sú obidva incidentné s v_p a zostáva po jednej voľnej značke z dvojice d_y a d_z . Značka z dvojice d_y nemôže byť priradená na vrchol

incidentný s v_p , pretože by vznikla ďalšia hrana s váhou 7. Preto vyhrá Bob. \square

V Kapitole 3 sme dokázali, že každá cesta P_n je ESD graf. Výsledok hry na ceste, kde je počet značiek rovný počtu vrcholov, ešte nie je známy, preto uvidíme odhad na najmenší počet značiek taký, aby Alica vyhrala. Domnievane sa, že tento odhad nie je tesný, zatiaľ sa nám to však nepodarilo dokázať.

Veta 4.6. Nech P_n je cesta na n vrcholoch, kde $n \geq 3$ a $|L| \geq 5n$. Potom každú hru na P_n vyhrá Alica.

Dôkaz. Vrchol nazveme *opustený*, ak ešte nemá priradenú značku a žiadny s ním incidentný vrchol ešte nemá priradenú značku. Pripomeňme, že hranu nazveme *uzavretá*, ak obidva jej koncové vrcholy už majú priradené značky. Vrcholy cesty označíme po poradí ako v_1, \dots, v_n . Každému vrcholu $v_i, i = 1, \dots, n$ priradíme množinu S_i , ktorá bude obsahovať množinu značiek, ktoré je možné priradiť vrcholu v_i . Na začiatku hry je možné priradiť každému vrcholu ľubovoľnú značku, preto bude každá množina S_i obsahovať všetky značky.

Cieľom je vytvoriť výhernú stratégiu pre Alicu. Obidvaja hráči musia hrať podľa pravidiel. V k -tom ťahu hráč priradí nejakému vrcholu v_i značku $\phi(v_i) \in S_i$. Potom budeme mazať značky nasledovne:

1. zmažeme $\phi(v_i)$ z každého $S_x, x \neq i$, pretože značka $\phi(v_i)$ nemôže byť použitá znovu. V tomto bode teda zmažeme najviac jednu značku pre každý voľný vrchol.
2. pre každý voľný vrchol v_y incidentný s v_i zmažeme z S_y všetky značky l také, že $l + \phi(v_i) = w_E(e)$ pre nejakú uzavretú hranu $e \in E$. Najviac $k - 1$ hrán už môže byť uzavretých, preto zmažeme najviac $k - 1$ značiek.
3. pre každý voľný vrchol v_y a pre každý s ním incidentný vrchol v_z , ktorý už má priradenú značku, zmažeme značku l z S_y takú, že

$$l + \phi(v_z) = w_E(v_{i-1}v_i) \text{ alebo } l + \phi(v_z) = w_E(v_i v_{i+1}),$$

ak už je $w_E(v_{i-1}v_i)$ alebo $w_E(v_i v_{i+1})$ definované.

Priradením značky $\phi(v_i)$ na v_i vznikli najviac 2 nové váhy hrán a teda v tomto bode pre každý voľný vrchol za každého jeho suseda zmažeme najviac dve značky.

Ak je v každom ťahu pre každý voľný vrchol v_x množina S_x neprázdna, potom je možné dokončiť ESD labeling na P_n a teda Alica vyhráva.

Určíme koľko značiek môže byť zmazaných pre voľný vrchol v_x počas hry:

- najviac $n - 1$ značiek za použité značky,
- nech je v k -tom ťahu priradená značka prvému jeho susedovi, tým sa v druhom bode zmaže najviac $k - 1$ značiek,
- od k -tého ťahu do konca hry budeme za tohto suseda mazať najviac po dve značky, teda spolu $2(n - k)$,

- nech je v m -tom ťahu priradená značka druhému susedovi v_x (ak existuje), potom v bode 2 bude zmazaných najviac $m - 1$ značiek,
- od m -teho ťahu do konca hry budú za tohto suseda zmazané najviac dve značky, teda spolu $2(n - m)$ značiek.

Spolu je to najviac

$$(n - 1) + (k - 1) + 2(n - k) + (m - 1) + 2(n - m) = 5n - k - m - 3$$

zmazaných značiek pre voľný vrchol v_x .

Ak je teda počet značiek aspoň $5n$, potom je v množine každého voľného vrcholu aspoň jedna značka, ktorú mu je možné priradiť a preto vyhrá Alica. \square

4.2 Iné verzie hry

V tejto sekcii predkladáme naše ďalšie varianty hier s ESD labelingom, ktoré boli inšpirované pôvodnou definíciou. Zároveň sme ich doplnili o niekoľko pozorovaní. Nakoniec sformulujeme niekoľko problémov, ktoré zatiaľ neboli riešené.

Odvodená verzia hry na cestách

Odvodíme ďalšiu verziu hry – FPV, ktorá sa bude od doteraz uvažovanej verzie hry líšiť pridaním jedného pravidla. FPV verziu hry definujeme iba pre cesty. Dokážeme odhad na počet značiek taký, aby Alica vždy vyhrala FPV verziu hry na cestách.

Definícia 4.4 (FPV verzia hry na ceste – fixné poradie vrcholov). Označme vrcholy cesty v_1, \dots, v_n . Vo verzii hry FPV použijeme rovnaké pravidlá ako v základnej verzii hry (Definícia 4.2), ale v každom ťahu musí hráč priradiť značku na vrchol s najmenším indexom, ktorý ešte značku nemá. Prvý hráč priradí značku vrcholu v_1 .

Veta 4.7. Nech P_n je cesta na n vrchoch a $|L| \geq 2n - 2$. Potom Alica vyhrá každú FPV verziu hry na P_n .

Dôkaz. Každému vrcholu $v_i, i = 1, \dots, n$ priradíme množinu S_i , ktorá bude obsahovať množinu značiek, ktoré je možné priradiť vrcholu v_i . Na začiatku hry je možné priradiť každému vrcholu ľubovoľnú značku, preto bude každá množina S_i obsahovať všetky značky.

Nech je v i -tom ťahu priradená vrcholu v_i značka $\phi(v_i)$. Z množiny S_{i+1} zmažeme $\phi(v_j)$ pre všetky $j \leq i$ a ďalej zmažeme všetky značky l také, že $l + \phi(v_i) = w_E(v_p, v_q)$ pre nejaké $p, q \leq i$. To je spolu najviac $2i - 1$ značiek.

Pre posledný vrchol v_n teda zmažeme $n - 1$ značiek za každú použitú značku a $n - 2$ značiek za použité váhy hrán. To je spolu $2n - 3$ zmazaných značiek. Ak je teda počet značiek aspoň $2n - 2$, zostane pre každý vrchol a špeciálne aj pre posledný vrchol aspoň jedna značka, ktorá mu môže byť priradená. Preto je možné vytvoriť ESD labeling a Alica vyhrá. \square

Hra s povoleným opakovaním značiek

Definícia 4.5. Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf a $L = \{1, \dots, s\}$ je množina značiek pre nejaké $s \in \mathbb{N}$. Alica a Bob sú dvaja hráči, ktorí sa striedajú po každom ťahu. V každom ťahu si hráč vyberie nejakú značku $l \in L$ a voľný vrchol $v \in V$ taký, že aspoň jeden jeho sused už značku má. Keďže predpokladáme, že G je súvislý, vždy bude taký vrchol existovať. Hráč potom môže priradiť l na vrchol v , ak po priradení pre všetky uzavreté hrany e, f platí:

$$e \neq f \rightarrow w_E(e) \neq w_E(f), \quad (4.5.1)$$

kde w_E je váha hrany v ESD labelingu.

V porovnaní s doteraz uvažovanou hrou z Definície 4.2 nepožadujeme, aby bol labeling prosté zobrazenie a naopak požadujeme, aby sa značky priradzovali iba vrcholom, ktoré majú aspoň jedného suseda s už priradenou značkou.

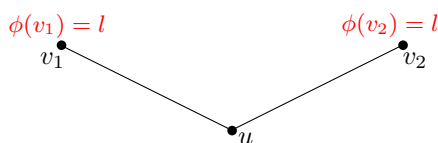
Lemma 4.8. Nech G má labeling ϕ , ktorý spĺňa pravidlo (4.5.1). Potom každé dva rôzne vrcholy grafu G , ktoré majú rovnakú značku, nemajú spoločného suseda.

Dôkaz. Pre spor predpokladajme, že labeling spĺňa pravidlo (4.5.1) a existujú dva rôzne vrcholy v_1 a v_2 , také že $\phi(v_1) = \phi(v_2)$ a majú spoločného suseda u . Potom

$$\phi(v_1) + \phi(u) = \phi(v_2) + \phi(u)$$

a to je spor s definíciou. □

Lemma 4.8 je dôvodom, prečo v hre požadujeme, aby hráč mohol priradiť značku iba vrcholu, ktorý už má nejakého suseda so značkou. Predpokladajme, že by sme toto pravidlo nepožadovali. Ak by v grafe existoval nejaký vrchol v_1 , ktorý už má značku l a voľný vrchol v_2 a mali by spoločného voľného suseda, potom by Bob mohol priradiť vrcholu v_2 značku l (viď Obrázok 4.3). Potom podľa Lemma 4.8 neexistuje labeling, ktorý spĺňa pravidlo (4.5.1) a bez ohľadu na ďalší priebeh hry Bob vyhrá.



Obr. 4.3: Možná situácia v hre s povoleným opakovaním značiek.

Táto situácia by nastala v každom grafe, ktorý obsahuje cestu dĺžky aspoň štyri ako podgraf a teda by na každom takom grafe vyhral Bob.

Veta 4.9. Nech $\Delta(G)$ značí maximálny stupeň vrcholu v grafe G . Bob vyhrá každú hru s povoleným opakovaním značiek, kde $|L| < \Delta(G)$.

Dôkaz. Označme ako v vrchol s maximálnym stupňom v grafe. Keďže $\deg(v) > L$, musia existovať dva rôzne vrcholy u_1 a u_2 susediace s v , ktoré budú mať rovnakú značku. Potom podľa Lemma 4.8 neexistuje labeling spĺňajúci podmienku 4.5.1 na grafe G . Preto každú hru vyhrá Bob. □

Problém 4.1. Nech je daný graf G na n vrcholoch a s je počet značiek. Pre aké najmenšie s vyhrá Alica hru s povoleným opakovaním značiek na grafe G ?

Achievement, Avoidance

Definícia týchto dvoch verzií je veľmi podobná Definícii 4.2.

Definícia 4.6. Nech $G = (V, E)$ je graf a $L = \{1, \dots, s\}$ je množina značiek. Alica a Bob sú dvaja hráči, ktorí sa striedajú po každom ťahu. V každom ťahu si hráč vyberie voľný vrchol $v \in G$ a určí $\phi(v) = l$, pre nejaké zatiaľ nepoužité $l \in L$. Ťah je *prípustný*, ak po vykonaní ťahu všetky doteraz priradené značky tvoria čiastočný ESD labeling. *Koniec hry* nastáva, keď už neexistuje prípustný ťah.

Definujeme dve varianty hry:

- *achievement* - hru vyhráva hráč, ktorý hral v posledom ťahu.
- *avoidance* - hru prehráva hráč, ktorý hral v posledom ťahu.

V doteraz uvažovanej hre z Definície 4.2 vyhrala Alica, ak mal na konci hry každý vrchol priradenú značku, inak vyhral Bob. V tejto hre záleží na tom, kto hral v poslednom prípustnom ťahu bez ohľadu na to, či má na konci hry každý vrchol priradenú značku alebo nie.

Veta 4.10. Nech S_r je hviezda na n vrcholoch a $|L| = n$. Potom pre hry na S_r platí nasledujúce.

- Alica vyhrá achievement verziu A-hry práve vtedy, ak n je nepárne.
- Alica vyhrá avoidance verziu A-hry práve vtedy, ak n je párne.
- Alica vyhrá achievement verziu B-hry práve vtedy, ak n je párne.
- Alica vyhrá avoidance verziu B-hry práve vtedy, ak n je nepárne.

Dôkaz. Vo Vete 3.1 sme dokázali, že každý labeling $\phi : V(S_r) \rightarrow \{1, \dots, n\}$, kde ϕ je prosté, je zároveň aj kanonickým ESD labelingom. Bez ohľadu na priebeh hry sa hráčom vždy podarí každému vrcholu priradiť značku a teda vytvoriť ESD labeling. Preto má na výsledok hry vplyv iba počet vrcholov. Ak je počet vrcholov nepárny, potom bude v poslednom ťahu hrať hráč, ktorý hral v prvom ťahu. Ak je počet vrcholov párny, potom bude v poslednom ťahu hrať hráč, ktorý hral v druhom ťahu. Z toho priamo plynie to, čo sme chceli dokázať. \square

Výsledok achievement a avoidance verzie hry sme dokázali pre hviezdy. Výsledok tejto verzie hry na ostatných triedach grafov nechávame ako otvorený problém.

5. Záver

Hlavným cieľom práce bolo preskúmať hracie varianty grafového labelingu, na niektorú z nich sa zamerať a rozšíriť ju o vlastné výsledky.

V druhej kapitole sme uviedli prehľad vybraných typov grafových labelingov a najdôležitejších poznatkov o nich. Vyberané boli predovšetkým podľa toho, či existujú výsledky k ich hracej variante. Podotýkame, že takýto prehľad zatiaľ nebol publikovaný, s výnimkou článku Tuzu [22], ktorý je ale veľmi stručný a jeho cieľom je skôr zdôrazniť, že k hrám s labelingami je známych veľmi málo výsledkov.

V tretej a štvrtej kapitole sme sa zaoberali novým typom ESD labelingu a jeho hracou variantou. Existencia labelingu ani výsledky hry na rôznych triedach grafov neboli doteraz skúmané. K otázke existencie ESD labelingu sme dokázali:

- existenciu kanonického ESD labelingu pre cesty, kružnice, hviezdy, úplné bipartitné grafy s menšou partitou veľkosti 2 a stromy,
- nutnú podmienku pre existenciu kanonického ESD labelingu a uviedli sme príklad grafu, ktorý dokazuje, že nie je postačujúca,
- neexistenciu kanonického ESD labelingu pre kolesá, úplné bipartitné grafy v partitami veľkosti aspoň tri a úplné grafy.

K hrám s ESD labelingom sme dokázali nasledujúce.

- Alica vyhrá každú hru na hviezde.
- Bob vyhrá každú hru na úplnom bipartitnom grafe s partitami veľkosti aspoň 2, na grafe priateľstva a na kružniciach C_4 , C_5 a C_6 .
- Odhad na počet značiek taký, aby Alica vyhrala každú hru na ceste a odhad na počet značiek, pre ktorý Alica vyhrá hru, kde sa priradujú značky na vrcholy cesty vo vopred určenom poradí vrcholov.
- Uviedli sme achievement a avoidance verziu hry spolu s niekoľkými pozorovaniami.

Otvorené problémy

Vzhľadom k tomu, že hrám s labelingami je venovaných veľmi málo publikácií, táto oblasť obsahuje veľké množstvo otvoreným problémov. V prehľadovej časti sme uviedli niekoľko otvorených problémov k existujúcim hrám. Teraz uvedieme dva ďalšie otvorené problémy týkajúce sa ESD labelingu a jeho hracej varianty.

Problém 5.1. Existuje kanonický ESD labeling pre každý unicyklický graf?

Problém 5.2. Kto vyhrá hru na cestách, kružniciach a stromoch, kde je počet značiek rovný počtu vrcholov?

Bibliografia

- [1] ADAMASZEK, A., ALLEN, P., GROSU, C., AND HLADKÝ, J. Almost all trees are almost graceful. *arXiv preprint arXiv:1608.01577* (2016).
- [2] ALON, N., KAPLAN, G., LEV, A., RODITTY, Y., AND YUSTER, R. Dense graphs are antimagic. *Journal of Graph Theory* 47, 4 (2004), 297–309.
- [3] BAUDON, O., PRZYBYŁO, J., SENHAJI, M., SIDOROWICZ, E., SOPENA, É., AND WOŹNIAK, M. The neighbour-sum-distinguishing edge-colouring game. *Discrete Mathematics* 340, 7 (2017), 1564–1572.
- [4] BOSÁK, J. *Rozklady grafov*. Veda-vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied, 1986.
- [5] BOUDREAU, E., HARTNELL, B., SCHMEISSER, K., AND WHITELEY, J. A special case of a game based on vertex-magic total labelings. Technical report, Saint Mary’s University, Halifax.
- [6] BOUDREAU, E., HARTNELL, B., SCHMEISSER, K., AND WHITELEY, J. A game based on vertex-magic total labelings. *Australasian Journal of Combinatorics* 29 (2004), 67–74.
- [7] BRANDSTÄDT, A., LE, V. B., AND SPINRAD, J. P. *Graph classes: a survey*. SIAM, 1999.
- [8] CHARTRAND, G., LESNIAK, L., AND ZHANG, P. *Graphs & digraphs*, vol. 39. CRC Press, 2010.
- [9] CHIA, M.-L., HSU, H.-N., KUO, D., LIAW, S.-C., AND XU, Z.-T. The game L(d,1)-labeling problem of graphs. *Discrete Mathematics* 312, 20 (2012), 3037–3045.
- [10] EDWARDS, M., AND HOWARD, L. A survey of graceful trees. *Atlantic Electronic Journal of Mathematics* 1, 1 (2006), 5–30.
- [11] EL-ZANATI, S., AND EYNDEN, C. On Rosa-type labelings and cyclic graph decompositions. *Mathematica Slovaca* 59, 1 (2009), 1–18.
- [12] FIEDLER, M., ET AL. *Theory of graphs and its applications: proceedings of the symposium held in Smolenice in June 1963*. Pub. House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1963.
- [13] GALLIAN, J. A. A dynamic survey of graph labeling. *The electronic journal of combinatorics* (2016), 1–439.
- [14] GOLOMB, S. W. How to number a graph. *Graph theory and computing* (1972), 23–37.
- [15] GÓMEZ, J. Two new methods to obtain super vertex-magic total labelings of graphs. *Discrete Mathematics* 308, 15 (2008), 3361–3372.

- [16] HALE, W. K. Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE* 68, 12 (1980), 1497–1514.
- [17] HARTNELL, B., AND RALL, D. A vertex-magic edge labeling game. *Congressus Numerantium* (2003), 163–168.
- [18] JHA, P. K. Optimal $l(2, 1)$ -labeling of cartesian products of cycles, with an application to independent domination. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 47, 10 (2000), 1531–1534.
- [19] KALKOWSKI, M., KAROŃSKI, M., AND PFENDER, F. Vertex-coloring edge-weightings: towards the 1-2-3-conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 100, 3 (2010), 347–349.
- [20] KAROŃSKI, M., ŁUCZAK, T., AND THOMASON, A. Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 91, 1 (2004), 151–157.
- [21] ROSA, A. On certain valuations of the vertices of a graph. In *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome (1966))*, pp. 349–355.
- [22] TUZA, Z. Graph labeling games. *arXiv preprint arXiv:1609.03084* (2016).
- [23] VAN DEN HEUVEL, J., LEESE, R. A., AND SHEPHERD, M. A. Graph labeling and radio channel assignment. *Journal of Graph Theory* 29, 4 (1998), 263–283.
- [24] YEH, R. K. A survey on labeling graphs with a condition at distance two. *Discrete Mathematics* 306, 12 (2006), 1217–1231.

Zoznam obrázkov

1.1	Cyklická dekompozícia K_6 [11].	3
1.2	Príklady graceful grafov.	3
1.3	Cyklická dekompozícia K_5 na graceful podgrafy P_3 [8].	4
2.1	Totálny vrcholovo-magický labeling na K_5 s $k = 45$ [15].	10
3.1	Príklad ESD labelingu na P_6	12
3.2	Príklad kanonického ESD labelingu na Petersenovom grafe.	13
3.3	Konštrukcia ESD labelingu na strome.	15
3.4	Príklad ESD grafu s $2n - 3$ hranami.	17
3.5	Vejár F_5	18
3.6	Možné umiestnenia značiek.	19
4.1	Ilustrácia sporu s existenciou konkrétneho ESD labelingu na FR_r	22
4.2	Ilustrácia situácií v hre na C_5	24
4.3	Možná situácia v hre s povoleným opakovaním značiek.	27