

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Aplikace vlastních čísel a vlastních vektorů
Applications of eigenvalues and eigenvectors

Kateřina Marková

Vedoucí práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Studijní program: Specializace v pedagogice
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – jednoobor

Praha 2017

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Aplikace vlastních čísel a vlastních vektorů* vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 18. 4. 2017

.....

podpis studentky

Poděkování:

Ráda bych poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za cenné rady a připomínky, za velmi laskavý přístup, podporu a v neposlední řadě za rychlé odpovědi na každou z mých otázek. Velmi si vážím času, který věnovala pečlivé kontrole mé práce.

Anotace

Cílem této práce je popsat dvě aplikace vlastních čísel a vlastních vektorů, jednu v oblasti matematiky a jednu mimo matematiku. V práci jsou shrnuty poznatky o vlastních číslech a vlastních vektorech, které se v těchto aplikacích využívají. Práce se skládá ze dvou částí, části teoretické a části praktické. Tyto části jsou dále rozděleny do celkem šesti kapitol.

Teoretická část práce obsahuje čtyři kapitoly. Jsou v ní shrnuty základní poznatky o vlastních číslech a vlastních vektorech, podobnosti matic, kvadratických formách a kuželosečkách. Tyto poznatky jsou dále využity v praktické části, která se skládá ze dvou kapitol. V jedné kapitole je popsáno využití vlastních čísel a vlastních vektorů mimo matematiku, konkrétně v oblasti biologie. Druhá kapitola praktické části je věnována rotaci kuželoseček a využití vlastních čísel a vlastních vektorů v této problematice. Kapitoly praktické části jsou doplněny o řešené příklady ze zkoumaných oblastí.

Klíčová slova: vlastní číslo, vlastní vektor, aplikace vlastních čísel a vlastních vektorů, Leslieho model růstu populace, kuželosečky, rotace kuželoseček

Annotation

The aim of this work is to describe two applications of eigenvalues and eigenvectors, one application in math and one application outside math. There are summarized findings about eigenvalues and eigenvectors, which are used in the applications. The work consists of two parts, the theoretical part and the practical part. These parts are divided into a total of six chapters.

The theoretical part contains four chapters. There is described the basic knowledge about eigenvalues and eigenvectors, diagonalizability of matrices, binary quadratic forms and conic sections. This knowledge is used in the practical part, which consists of two chapters. The first chapter describes application of eigenvalues and eigenvectors outside math, specifically in biology. The second chapter explains the rotation of conic sections and application of eigenvalues and eigenvector in this problematics. The chapters of practical part are supplemented by solved examples of examined mathematical parts.

Keywords: eigenvalue, eigenvector, applications of eigenvalues and eigenvectors, Leslie's model of population growth, conic sections, rotation of conic sections

Obsah

Úvod	8
I Teoretická část	10
1 Vlastní čísla a vlastní vektory	11
1.1 Příklady výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů	15
2 Podobnost matic	20
3 Kvadratické formy	27
3.1 Kvadratické formy a vlastní čísla	29
4 Kuželosečky	31
4.1 Kuželosečky v základní poloze	31
4.1.1 Elipsa a kružnice	32
4.1.2 Hyperbola	34
4.1.3 Parabola	36
4.2 Posunutá kuželosečky	37
II Praktická část	40
5 Leslieho model růstu populace	41
5.1 Leslieho matice a jak ji najít	41
5.2 Vlastní čísla a vlastní vektory Leslieho matice	44

5.3	Ukázka růstu populace dle Leslieho modelu na konkrétním příkladu	50
6	Rotace kuželoseček	56
6.1	Kuželosečky v obecné poloze	56
6.2	Rovnoosá hyperbola	62
6.3	Příklad rotace singulární kuželosečky	64
6.4	Příklad rotace regulární kuželosečky	66
	Závěr	70
	Seznam použité literatury	71

Úvod

Jedním ze základních stavebních kamenů matematiky je lineární algebra. Hlavním předmětem zkoumání tohoto odvětví matematiky jsou vektory, vektorové prostory a v neposlední řadě soustavy lineárních rovnic. Používání vektorů, lineárních zobrazení a matic je běžnou praxí při řešení jakýchkoli úloh lineárního charakteru. Hned vedle vektorového prostoru je velmi důležitým pojmem lineární algebry pojem matice, která je jedním ze základů jejích početních metod. Matice představují nejjednodušší nástroj, jak například vyjádřit obecnou rotaci vektorů, jak zapsat soustavu lineárních rovnic nebo jak zjistit lineární závislost, popřípadě nezávislost vektorů.

Základy lineární algebry a maticového počtu je všeobecně známé téma, a tedy předpokládáme, že čtenář je s touto oblastí matematiky seznámen. V teoretické části této práce shrnujeme základní poznatky o vlastních, neboli charakteristických číslech a vektorech matic. Postup výpočtu těchto hodnot není uveden obecně, ale na konkrétních příkladech. Dále shrnujeme několik základních poznatků o podobnosti matic, kvadratických formách a kuželosečkách a uvádíme jejich souvislost s vlastními čísly a vlastními vektory matic.

Téma vlastních čísel a vlastních vektorů matic a jejich aplikací jsem si vybrala proto, že lineární algebra je mou oblíbenou oblastí matematiky, a abych ukázala některé příklady využití vlastních čísel a vlastních vektorů v matematice i mimo matematiku. Vlastní čísla a vlastní vektory mají využití v mnoha oblastech, například v informatice nebo kvantové fyzice. Mimo oblast matematiky jsem však pro svou práci zvolila méně tradiční využití, a to z oblasti biologie v tzv. Leslieho modelu růstu populace. V praktické části této práce je kromě využití mimo matematiku uvedena i jedna aplikace v matematice, konkrétně v popisu rotace kuželoseček z oblasti analytické geometrie. Kapitoly praktické části jsou

doplněny o příklady týkající se konkrétní problematiky a podrobný popis jejich řešení.

Jak je výše uvedeno, teoretická část obsahuje obecné poznatky, které dále využíváme v praktické části. Doplnění teorie potřebné k ucelenému popisu konkrétních aplikací pak nalezneme u jednotlivých kapitol praktické části. V úvodu těchto kapitol jsou uvedeny odkazy na zdroje, odkud jsou informace čerpány. Veškeré obrázky v této práci jsou vytvořeny autorkou v programu GeoGebra.

Část I

Teoretická část

Kapitola 1

Vlastní čísla a vlastní vektory

V této kapitole shrnujeme základní informace o vlastních číslech a vlastních vektorech matic. Tyto poznatky jsou dále využity a doplněny v kapitolách s konkrétními aplikacemi vlastních čísel a vlastních vektorů popsaných v praktické části této práce. Kapitola 1 je zpracována na základě zdrojů [1], [2] a [11]. Důkazy tvrzení a řešené příklady jsou vytvořeny autorkou.

Definice 1. Nechť A je čtvercová matice n -tého řádu. Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{x} \in V_n(T)$, se nazývá *vlastní (charakteristický) vektor* matice A , jestliže platí:

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : A\mathbf{x}^T = \lambda\mathbf{x}^T.$$

Číslo λ se nazývá *vlastní (charakteristické) číslo* matice A .

Matice A je maticí určité transformace. Obrazem vlastního vektoru matice A v dané transformaci bude λ -násobek téhož vektoru, kde λ odpovídá příslušnému vlastnímu číslu.

Rovnici $A\mathbf{x}^T = \lambda\mathbf{x}^T$ upravíme:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}^T &= \lambda\mathbf{x}^T, & | - \lambda\mathbf{x}^T \\ A\mathbf{x}^T - \lambda\mathbf{x}^T &= \mathbf{o}^T, \\ (A - \lambda E)\mathbf{x}^T &= \mathbf{o}^T. \end{aligned}$$

Jedná se o homogenní soustavu lineárních rovnic o n neznámých zapsanou v maticovém tvaru, kde E je jednotková matice. Vlastním vektorem je nenulové (netriviální) řešení této soustavy. Matice A má nenulové řešení právě tehdy, je-li hodnota matice soustavy (značíme $h(A)$) menší než počet neznámých, tj. v našem případě $h(A - \lambda E) < n$. Matice $A - \lambda E$ je singulární, proto platí vztah:

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

který můžeme rozepsat jako:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Vzniklý polynom se nazývá *charakteristický polynom (charakteristická rovnice)* matice A . Jedná se o polynom stupně nejvýše n . Kořeny polynomu jsou vlastní čísla $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$, matice A . Pokud $\lambda_i = \lambda_j$, pro $i \neq j$, hovoříme o tzv. *algebraické násobnosti* vlastního čísla, která odpovídá počtu vlastních čísel, jejichž hodnoty se sobě rovnají. [11]

Definice 2. Matice A se nazývá *symetrická*, jestliže $A = A^T$.

Věta 1. *Nechť A je reálná symetrická matice. Pak jsou všechna její vlastní čísla reálná.*

Důkaz. Označme λ vlastní číslo matice A a \mathbf{v} vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ . Chceme dokázat, že $\lambda = \bar{\lambda}$, kde $\bar{\lambda}$ je komplexně sdružené číslo k číslu λ . Jelikož A je reálná, využijeme vlastnost $A = \bar{A}$. Symbol \bar{A} (resp. $\bar{\mathbf{v}}$) značí matici (resp. vektor), kde pro každý index i, j platí, že \bar{a}_{ij} je prvek matice A (resp. platí, že \bar{v}_i je složka vektoru \mathbf{v}).

$$A\mathbf{v}^T = \lambda\mathbf{v}^T,$$

$$\overline{A\mathbf{v}^T} = \overline{\lambda\mathbf{v}^T},$$

$$A\bar{\mathbf{v}}^T = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}^T.$$

Z definice symetrické matice víme, že $A = A^T$, a proto můžeme provést následující úpravy:

$$\bar{\mathbf{v}}A = \bar{\mathbf{v}}A^T = (\overline{A\mathbf{v}^T})^T = (\overline{\lambda\mathbf{v}^T})^T = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}},$$

$$\begin{aligned}\lambda(\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T) &= \bar{\mathbf{v}}(\lambda\mathbf{v}^T) = \bar{\mathbf{v}}(A\mathbf{v}^T) = (\bar{\mathbf{v}}A)\mathbf{v}^T = (\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}})\mathbf{v}^T = \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T) \\ &\Rightarrow \\ \bar{\lambda}(\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T) &= \lambda(\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T), \\ (\lambda - \bar{\lambda})(\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T) &= 0.\end{aligned}$$

Abychom nyní dokázali, že $\lambda = \bar{\lambda}$, musí platit $(\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{v}) \neq 0$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (a_1 + b_1i, a_2 + b_2i, \dots, a_n + b_ni), \\ \bar{\mathbf{v}} &= (a_1 - b_1i, a_2 - b_2i, \dots, a_n - b_ni), \\ \bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T &= (a_1^2 + b_1^2) + \dots + (a_n^2 + b_n^2) \neq 0 \\ &\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}.\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že každé vlastní číslo matice A je reálné. □

Věta 2. *Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé (LN).*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Pro jednodušší zápis budeme v tomto důkazu uvažovat namísto řádkových vektorů sloupcové vektory $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T$.

Nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ jsou vlastní vektory matice A odpovídající vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

$$\exists k; 1 \leq k \leq n : \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \text{ jsou LN} \quad \wedge \quad \mathbf{v}_{k+1} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{k+1} &= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k, & | \cdot \lambda_{k+1} \\ \lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} &= \alpha_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

Zároveň platí tyto rovnosti:

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} &= A\mathbf{v}_{k+1} = A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{v}_k) = \alpha_1 \underbrace{A\mathbf{v}_1}_{\lambda_1\mathbf{v}_1} + \dots + \alpha_k \underbrace{A\mathbf{v}_k}_{\lambda_k\mathbf{v}_k}, \\ \lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} &= \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k\lambda_k\mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

Dostali jsme dvě různá vyjádření součinu $\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}$, která lze nyní dát do rovnosti:

$$\alpha_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k = \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\lambda_k\mathbf{v}_k,$$

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{v}_k = \mathbf{o}.$$

Jelikož předpokládáme, že vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou různá, rozdíl libovolných dvou vlastních čísel je nenulový.

Tedy platí:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{o},$$

což je spor s definicí vlastního vektoru. Vlastní vektory odpovídající vlastním číslům jsou nenulové. Vektor \mathbf{v}_{k+1} je vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ_{k+1} a musí platit $\mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{o}$. □

Definice 3. Množina vektorů M se nazývá *ortogonální*, jestliže všechny vektory z M jsou na sebe kolmé.

Definice 4. Množina vektorů M se nazývá *ortonormální*, jestliže je ortogonální a všechny vektory mají velikost 1.

Definice 5. Matice A se nazývá *ortogonální*, jestliže $A^T = A^{-1}$.

Věta 3. *Nechť A je symetrická matice. Pak vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální.*

Důkaz. Definujme skalární součin $x \cdot y$ vektorů $x, y \in \mathbb{R}^n$ jako maticové násobení

$$x \cdot y = xy^T.$$

Nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou vlastní vektory odpovídající vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$. Proto platí rovnosti:

$$A\mathbf{v}_1^T = \lambda_1\mathbf{v}_1^T,$$

$$A\mathbf{v}_2^T = \lambda_2\mathbf{v}_2^T.$$

Jelikož A je symetrická matice, rovněž platí rovnost:

$$\mathbf{v}A = \lambda\mathbf{v}.$$

Musíme dokázat, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ jsou na sebe kolmé, tedy že platí $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$:

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= (\lambda_1\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1A) \cdot \mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1A)\mathbf{v}_2^T = \\ &= \mathbf{v}_1(A\mathbf{v}_2^T) = \mathbf{v}_1(\lambda_2\mathbf{v}_2^T) = \lambda_2(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2^T) = \lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2). \\ \lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= \lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2), \\ (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= 0.\end{aligned}$$

Z předpokladu $\lambda_1 \neq \lambda_2$ platí $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, z čehož plyne $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Pokud je skalární součin dvou vektorů roven nule, jsou tyto vektory na sebe kolmé. \square

1.1 Příklady výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů

Princip výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů ukážeme na příkladech matic třetího a čtvrtého řádu.

Uvažujme čtvercovou matici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice A jsou kořeny charakteristického polynomu $\det(A - \lambda E) = 0$. Vypočítáme charakteristický polynom matice A a najdeme vlastní čísla jako řešení tohoto polynomu:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & 6 \\ 2 & 1 - \lambda & 6 \\ 2 & -1 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 40\lambda + 36.$$

Pro vlastní čísla matice A platí:

$$\lambda^3 - 12\lambda^2 + 40\lambda + 36 = 0.$$

Vlastní čísla matice A tedy jsou:

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Dostali jsme vlastní číslo $\lambda_1 = 9$ s algebraickou násobností 1 a vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ s algebraickou násobností 2. Nyní najdeme vlastní vektory odpovídající příslušným vlastním číslům. Vlastní vektor \mathbf{v}_i odpovídající vlastnímu číslu λ_i je libovolné řešení homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} 4 - \lambda_i & -1 & 6 \\ 2 & 1 - \lambda_i & 6 \\ 2 & -1 & 8 - \lambda_i \end{pmatrix} \mathbf{v}_i^T = \mathbf{o}^T.$$

Vlastní vektor \mathbf{v}_1 :

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 4 - 9 & -1 & 6 \\ 2 & 1 - 9 & 6 \\ 2 & -1 & 8 - 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

řešením této homogenní soustavy je například vektor $(1, 1, 1)$, který je vlastním vektorem odpovídajícím vlastnímu číslu $\lambda_1 = 9$:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1).$$

Podle věty 2 jsou vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům matice A lineárně nezávislé. Takové vlastní vektory lze najít jako lineárně nezávislá řešení homogenní soustavy $(A - \lambda_i E)\mathbf{v}_i^T = \mathbf{o}^T$. Množina řešení této soustavy tvoří podprostor vektorového prostoru $V_n(T)$ dimenze $n - h(A)$. Pokud se sobě některá vlastní čísla matice A rovnají, tedy mají algebraickou násobnost vyšší než 1, vlastní vektory odpovídající těmto vlastním číslům nemusí být lineárně nezávislé. Lineárně nezávislé jsou pouze v případě, že algebraická násobnost daného vlastního čísla je rovna číslu $n - h(A)$. V opačném případě existuje vlastní číslo, pro které jsou příslušné vlastní vektory lineárně závislé.

Vlastní vektory $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 4 - 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 - 2 & 6 \\ 2 & -1 & 8 - 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tuto homogenní soustavu řeší například dvojice vektorů $(1, 2, 0)$, $(-3, 0, 1)$. Jedná se o lineárně nezávislé vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ s algebraickou násobností 2:

$$\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0),$$

$$\mathbf{v}_3 = (-3, 0, 1).$$

Vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 jsou lineárně nezávislé, jelikož dimenze podprostoru $V_n(T)$, kterému odpovídá množina řešení homogenní soustavy $(A - \lambda_2 E)\mathbf{v}_i^T = \mathbf{0}^T$, je rovna:

$$n - h(A) = 3 - 1 = 2.$$

Pro matici A jsme našli trojici vlastních čísel $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, kterým odpovídá trojice lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 0)$ a $\mathbf{v}_3 = (-3, 0, 1)$.

Uvažujme nyní matici čtvrtého řádu:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podobně jako u matice třetího řádu, vypočteme nyní vlastní čísla matice B jako kořeny charakteristického polynomu $\det(B - \lambda E) = 0$:

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda).$$

Pro vlastní čísla matice B platí:

$$(2 - \lambda)(3 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0.$$

Vlastní čísla matice B tedy jsou:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1.$$

Analogicky jako v předešlém příkladu vypočteme vlastní vektory odpovídající jednotlivým vlastním číslům:

Vlastní vektor \mathbf{v}_1 :

$$B - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 0).$$

Vlastní vektory $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$:

$$B - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu λ_2 jsou nenulové násobky vektoru $\mathbf{v} = (0, 0, 1, 0)$, proto vektor $\mathbf{v}_2 = (0, 0, t, 0), t \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{v}_3 = (0, 0, l, 0), l \in \mathbb{R}$. K tomuto vlastnímu číslu neexistují dva lineárně nezávislé vlastní vektory.

Tuto matici nelze diagonalizovat, jelikož jsme nenašli 2 lineárně nezávislé vlastní vektory \mathbf{v}_2 a \mathbf{v}_3 odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ s algebraickou násobností 2.

Vlastní vektor \mathbf{v}_4 :

$$B - \lambda_4 E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_4 = (0, 1, 0, 0).$$

Pro matici B jsme našli čtyři vlastní čísla $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 1$. Pro tuto matici ale neexistuje čtveřice lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Analogicky jako pro matici čtvrtého řádu lze najít vlastní čísla a vlastní vektory pro čtvercovou regulární matici řádu n .

Kapitola 2

Podobnost matic

Tato kapitola je zpracována na základě zdrojů [1] a [2]. Důkazy vět jsou autorské, pokud není u konkrétního důkazu uvedeno jinak.

Definice 6. Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n . Řekneme, že matice A je *podobná* matici B , jestliže existuje regulární matice P taková, že platí:

$$PB = AP.$$

Tuto rovnost můžeme také zapsat ve tvaru:

$$B = P^{-1}AP,$$

nebo

$$A = PBP^{-1}.$$

Značíme $A \approx B$.

Věta 4. *Relace \approx je ekvivalence.*

Důkaz.

(1) reflexivita: $\forall A \in T^{n \times n} : A \approx A, PA = AP \Rightarrow P = E$.

(2) symetrie: $\forall A, B \in T^{n \times n} : A \approx B \Rightarrow B \approx A$, plyne z definice podobnosti

(3) tranzitivita: $\forall A, B, C \in T^{n \times n} : (A \approx B \wedge B \approx C) \Rightarrow A \approx C$,

$\exists P : B = P^{-1}AP, \exists S : C = S^{-1}BS$, dokážeme, že $\exists R : C = R^{-1}AR$:

$$C = S^{-1}BS = S^{-1}(P^{-1}AP)S = (S^{-1}P^{-1})A(PS) = R^{-1}AR, \text{ kde} \\ R = PS. \quad \square$$

Věta 5. $A \approx B$. Pak platí:

1. $\det(A) = \det(B)$,
2. A má inverzní matici právě tehdy, když B má inverzní matici,
3. $h(A) = h(B)$,
4. A, B mají stejný charakteristický polynom,
5. A, B mají stejná charakteristická čísla.

Důkaz.

$$1. \det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(P) \cdot \det(A) = \\ = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(P) \cdot \det(A) = \det(A).$$

2. Předpokládejme, že $\exists A^{-1}$, pak $B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, tedy existuje i B^{-1} . Analogicky pokud $\exists B^{-1}$, pak $A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$, tedy existuje i A^{-1} .

3. Jelikož P je regulární matice a víme, že násobením regulární maticí se hodnost nezmění [2, str. 134], platí vztah $h(A) = h(PBP^{-1}) = h(B)$.

$$4. \det(B - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda E) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP) = \det[P^{-1}(A - \lambda E)P] = \\ = \det(P^{-1}) \cdot \det(P) \cdot \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E).$$

5.

$$A\mathbf{x}^T = \lambda\mathbf{x}^T, \\ PBP^{-1}\mathbf{x}^T = \lambda\mathbf{x}^T, \\ BP^{-1}\mathbf{x}^T = \lambda P^{-1}\mathbf{x}^T, \\ B\mathbf{v}^T = \lambda\mathbf{v}^T, \quad \text{kde } \mathbf{v}^T = P^{-1}\mathbf{x}^T.$$

□

Definice 7. Matice A je *diagonalizovatelná*, jestliže existuje diagonální matice D taková, že platí $A \approx D$.

Poznámka 1. Pro lepší přehlednost následujících dvou vět a jejich důkazů budeme uvažovat sloupcové vektory namísto řádkových.

Věta 6. Pro matici A existuje regulární matice P a diagonální matice D takové, že

$$A = PDP^{-1},$$

právě tehdy, když sloupce matice P jsou tvořeny vlastními vektory matice A a prvky na diagonále matice D jsou odpovídající vlastní čísla matice A v pořadí sloupců matice P .

Důkaz. 1. \Rightarrow : Nechť $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ jsou lineárně nezávislé vektory, které tvoří sloupce regulární matice P . Označme:

$$P = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n),$$

kde $\mathbf{p}_i = (p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n})^T$. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou prvky na diagonále matice D . Označme:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Využijeme blokový zápis součinů matic $AP = PD$:

$$A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Protože

$$A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = (A\mathbf{p}_1, \dots, A\mathbf{p}_n),$$

dostáváme rovnost

$$(A\mathbf{p}_1, \dots, A\mathbf{p}_n) = (\lambda_1\mathbf{p}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{p}_n).$$

Odtud plyne

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1,$$

$$A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2,$$

\vdots

$$A\mathbf{p}_n = \lambda_n\mathbf{p}_n,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ jsou vlastní vektory matice A odpovídající příslušným vlastním číslům.

2. \Leftarrow : Nechť $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ jsou vlastní vektory matice A a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou příslušná vlastní čísla matice A . Pak platí:

$$A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i.$$

Opět označme:

$$P = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n), \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li matice P, D a využijeme-li vztah $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$, dostaneme rovnost:

$$(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\mathbf{p}_1, \dots, \lambda_n\mathbf{p}_n) = A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n),$$

tedy

$$PD = AP.$$

Vztah $PD = AP$ lze upravit na rovnost:

$$PDP^{-1} = A,$$

čímž jsme dokázali tvrzení věty. □

Definice 8. Čtvercová matice A je ortogonálně diagonalizovatelná, jestliže existuje ortogonální matice Q a diagonální matice D taková, že platí

$$D = Q^T A Q.$$

Věta 7. Matice A je symetrická právě tehdy, když je matice A ortogonálně diagonalizovatelná.

Důkaz. 1. \Rightarrow : Důkaz provedeme indukcí podle n , kde n je řád matice A . Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = 1, \dots, k$. Označme $n = k + 1$. Předpokládejme, že platí:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 = A \mathbf{v}_1, \quad \|\mathbf{v}_1\| = 1.$$

Vektor \mathbf{v}_1 lze doplnit na ortonormální bázi [1, Věta 8.69, str. 284]:

$$\beta = \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n.$$

Označme Q_1 matici, jejíž sloupce jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$:

$$Q_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Matice Q_1 je ortogonální. Ukážeme, že matice $B = Q_1^T A Q_1$ je blokově diagonální tvaru:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \mathbf{o} & A_1 \end{array} \right).$$

Tvar matice B vyplývá ze součinu blokových matic Q_1^T, A, Q , kde

$$Q_1^T = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix},$$

a součin matic A, Q je roven:

$$A Q = A(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) = (A \mathbf{v}_1, A \mathbf{v}_2, \dots, A \mathbf{v}_n).$$

Jelikož předpokládáme rovnost $\lambda_1 \mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_1$, platí:

$$AQ = (\lambda_1 \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n).$$

Pak

$$B = Q_1^T A Q_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{pmatrix} (\lambda_1 \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \mathbf{o} & A_1 \end{array} \right).$$

Matice A_1 vznikla z matice A vynecháním prvků $\mathbf{v}_i^T(\lambda_1 \mathbf{v}_1)$. Pro $i = 1$ platí $\mathbf{v}_1^T(\lambda_1 \mathbf{v}_1) = \lambda_1$. Pro všechna $i = 2, 3, \dots, n$ platí $\mathbf{v}_i^T(\lambda_1 \mathbf{v}_1) = 0$, protože pro skalární součiny vektorů $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_1$ platí $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 = 0$. Proto lze jednoznačně určit první sloupec výsledné matice B .

Jelikož platí

$$B^T = (Q_1^T A Q_1)^T = Q_1^T A^T (Q_1^T)^T = Q_1^T A Q_1 = B,$$

je matice B symetrická a lze namísto symbolu $*$ doplnit nulový vektor:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & A_1 \end{array} \right).$$

Předpokládejme, že existuje P_2 ortogonální a D_1 diagonální, pro které platí:

$$P_2^T A_1 P_2 = D_1,$$

$$Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & P_2 \end{array} \right).$$

Matice $Q = Q_1 Q_2$ je ortogonální. Lze provést následující úpravy:

$$\begin{aligned} Q^T A Q &= (Q_1 Q_2)^T A (Q_1 Q_2) = (Q_2^T \underbrace{Q_1^T}_{B}) A (Q_1 Q_2) = Q_2^T B Q_2 = \\ &= \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & P_2^T \end{array} \right)}_{Q_2^T} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & A_1 \end{array} \right)}_B \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & P_2 \end{array} \right)}_{Q_2} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o} & D_1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

2. \Leftarrow :

Předpokládejme, že platí $D = Q^T A Q$. Matice Q je ortogonální, tudíž platí

$$Q Q^T = Q^T Q = E.$$

Pak

$$Q D Q^T = Q (Q^T A Q) Q^T = (Q Q^T) A (Q Q^T) = A,$$

$$A^T = (Q D Q^T)^T = (Q^T)^T D Q^T = Q D Q^T = A.$$

Tedy matice A je symetrická.

Tímto jsme dokázali, že ortogonální diagonalizovatelnost a symetrie jsou ekvivalentní vlastnosti. □

Kapitola 3

Kvadratické formy

Teorii kvadratických forem využijeme v praktické části při popisu rotace kuželoseček. Kapitola je zpracována na základě zdrojů [2] a [10]. Jako v předešlé kapitole, důkazy vět jsou vytvořeny autorkou, pokud není uvedeno jinak.

Definice 9. Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem T . *Kvadratickou formou* o n proměnných s koeficienty z tělesa T nazveme funkci:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i < j} 2a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j.$$

Poznámka 2. Doposud jsme ve většině případů uvažovali řádkové vektory. V této kapitole budeme pracovat se slupcovými vektory $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, které pro přehlednost používáme i v praktické části.

Podle definice je kvadratická forma polynom v n proměnných a koeficienty jsou prvky z tělesa T . Všechny členy kvadratické formy mají stupeň 2. Provedeme-li substituci

$$x_i = ty_i,$$

dostaneme:

$$f(x_1, \dots, x_n) = t^2 f(y_1, \dots, y_n).$$

Uvažujme čtvercovou symetrickou matici A řádu n nad tělesem T . Kvadratickou formu $f(x_1, \dots, x_n)$ lze vyjádřit jako maticový součin:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \dots, x_n)^T \cdot A \cdot (x_1, \dots, x_n).$$

Pokud $i \neq j$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pro prvky matice A platí vztah $a_{ij} = a_{ji}$.

Příklad 1. Určete matici A kvadratické formy

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 9x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Věta 8. Každou kvadratickou formu lze diagonalizovat¹.

Důkaz. Nechť $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ je kvadratická forma v n proměnných s koeficienty z tělesa T . Jelikož matice A je symetrická, podle věty 7 v předchozí kapitole platí, že matice A je ortogonálně diagonalizovatelná. Tedy existuje ortogonální matice Q taková, že diagonalizuje matici A a platí:

$$Q^T A Q = D.$$

Zavedeme substituci:

$$\mathbf{x} = Q \mathbf{y},$$

$$\mathbf{y} = Q^{-1} \mathbf{x} = Q^T \mathbf{x}.$$

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (Q \mathbf{y})^T A (Q \mathbf{y}) = (\mathbf{y}^T Q^T) A (Q \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \underbrace{(Q^T A Q)}_D \mathbf{y} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}.$$

Podle věty 6 pak platí rovnost

$$\mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A . □

¹Kvadratickou formu $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ lze převést na kvadratickou formu $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D \mathbf{y}$ vůči jiné bázi, kde $D = (d_{ii})$ je diagonální matice. O kvadratické formě $g(\mathbf{x})$ pak řekneme, že je v *diagonálním tvaru*. [10, str. 3]

Důsledek. Pro každou reálnou kvadratickou formu $f(x_1, \dots, x_n)$ v n proměnných s maticí A nad tělesem T existuje báze $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ prostoru $\mathbb{R}^{n \times 1}$. Vzhledem k této bázi má kvadratická forma $f(x_1, \dots, x_n)$ diagonální matici $D = (d_{ij})$, pro kterou platí

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n d_{ii} y_i^2.$$

(y_1, \dots, y_n) jsou souřadnice vektoru $(x_1, \dots, x_n)^T$ vzhledem k nové bázi $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$. Prvky diagonály matice D odpovídají vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ matice A .

Důkaz. Viz [10, Tvzení 13.7, str. 7]. □

3.1 Kvadratické formy a vlastní čísla

Definice 10. Reálná kvadratická forma $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ se nazývá

pozitivně definitní,	jestliže	$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{o} : f(x_1, \dots, x_n) > 0,$
pozitivně semidefinitní,	jestliže	$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{o} : f(x_1, \dots, x_n) \geq 0,$
negativně definitní,	jestliže	$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{o} : f(x_1, \dots, x_n) < 0,$
negativně semidefinitní,	jestliže	$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{o} : f(x_1, \dots, x_n) \leq 0,$
indefinitní,	jestliže	$\exists \mathbf{x}_i \neq \mathbf{o} : f(\mathbf{x}_i) > 0 \wedge \exists \mathbf{x}_j \neq \mathbf{o} : f(\mathbf{x}_j) < 0.$

Věta 9. Nechť $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ je reálná kvadratická forma. Pokud pro vlastní čísla λ_i , kde $i \in \{1, \dots, n\}$, matice A platí:

$\forall i : \lambda_i > 0,$	<i>pak je forma</i>	<i>pozitivně definitní,</i>
$\forall i : \lambda_i \geq 0 \wedge \exists k \in \{1, \dots, n\} : \lambda_k = 0,$	<i>pak je forma</i>	<i>pozitivně semidefinitní,</i>
$\forall i : \lambda_i < 0,$	<i>pak je forma</i>	<i>negativně definitní,</i>
$\forall i : \lambda_i \geq 0 \wedge \exists k \in \{1, \dots, n\} : \lambda_k = 0,$	<i>pak je forma</i>	<i>negativně semidefinitní,</i>
<i>nenastane ani jedna z předchozích možností,</i>	<i>pak je forma</i>	<i>indefinitní.</i>

Důkaz. Věta 9 je důsledkem věty 8, podle které lze každou kvadratickou formu diagonalizovat. Pokud kvadratickou formu $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ diagonalizujeme, dostaneme tento tvar kvadratické formy:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

jak uvádíme v důkazu věty 8. Zde už lze nahlédnout, že definitnost kvadratických forem závisí na koeficientech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A .

□

Definice 11. *Maximum kvadratické formy $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ je největší vlastní číslo matice A . Minimum kvadratické formy $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ je nejmenší vlastní číslo matice A .*

Kapitola 4

Kuželosečky

Vlastní čísla a vlastní vektory mají využití také v popisu rotace kuželoseček, kterou se zabýváme v praktické části. Abychom mohli určit, jaký typ kuželosečky popisuje obecná rovnice vzniklá určitou rotací kuželosečky v základní poloze, musíme nejprve odvodit, jak rovnice jednotlivých kuželoseček v základní poloze vypadají. To v případě elipsy a hyperboly znamená, že mají střed v počátku soustavy souřadnic a osy kuželoseček odpovídají osám souřadnic. V případě paraboly je počátek soustavy souřadnic vrcholem paraboly a její ohnisko leží na některé z os souřadnic. Jelikož obecná rovnice kuželosečky nemusí popisovat pouze kuželosečku se středem v počátku soustavy souřadnic, připomeneme také rovnice kuželoseček, jejichž střed je posunutý o libovolný vektor. Definice v této kapitole jsou převzaty z publikace [5]. Další text je zpracován autorkou na základě zdrojů [5] a [9]. Obrázky jsou vytvořeny autorkou v programu GeoGebra.

4.1 Kuželosečky v základní poloze

Kuželosečky jsou kvadratické útvary v prostoru \mathbf{E}^2 , které vzniknou průnikem roviny a pláště rotačního kuželu. V případě kružnice a elipsy lze nahradit plášť rotačního kuželu pláštěm válce a výsledná křivka se nezmění.

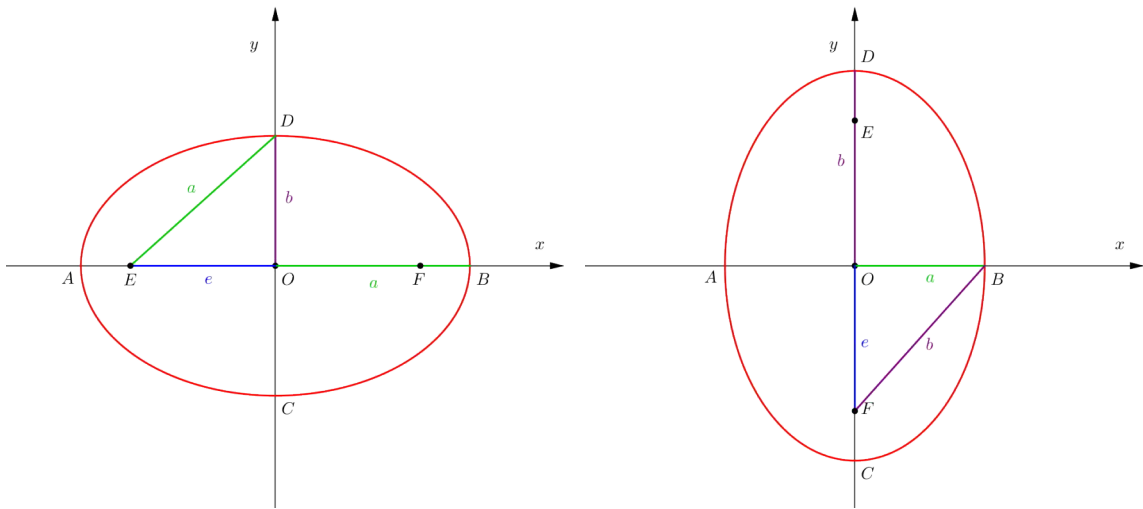
Základní rovnicí kuželoseček v \mathbf{E}^2 , kde $c_1, \dots, c_5 \in \mathbb{R}$ a $c_1 \neq 0$ nebo $c_2 \neq 0$, je podle

Šindela a Vlacha [9, str. 81] rovnice:

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3x + c_4y = c_5. \quad (4.1)$$

Rovnice (4.1) popisuje dva typy kuželoseček. Prvním typem jsou tzv. *regulární* kuželosečky. Regulárními kuželosečkami nazýváme kružnici, elipsu, hyperbolu a parabolu. V ostatních případech, kdy je jeden z koeficientů c_1, c_2 nenulový, ale nejedná se o výše popsané útvary, popisuje rovnice tzv. *singulární (degenerované)* kuželosečky. Jedná se o případy, kdy dochází k redukci regulární kuželosečky na např. dvojici rovnoběžných přímek, přímku, bod nebo prázdnou množinu. Když se vrátíme k představě, jak kuželosečka vzniká průnikem roviny a pláště rotačního kuželu, v případě singulární kuželosečky prochází rovina vrcholem kuželu.

4.1.1 Elipsa a kružnice



Obrázek 4.1: Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ Obrázek 4.2: Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a < b$

Definice 12. Jsou dány dva body E, F roviny α . Množina všech bodů X roviny α se nazývá *elipsa*, pokud součet vzdáleností bodu X od bodů E, F je roven stejnému číslu v pro každý bod X , $|XE| + |XF| = v$. Zároveň musí platit $v > |EF| \geq 0$. Body E, F se nazývají *ohniska* elipsy.

Nastane-li rovnost $E = F$, hovoříme o kružnici se středem v bodě $E = F$. Obrazem každé

kružnice k v libovolné rotaci je kružnice k' shodná s kružnicí k , proto se z hlediska rotací kuželoseček omezíme na elipsy, pro které platí $E \neq F$.

Nyní odvodíme rovnici elipsy v základním tvaru. Elipsa v základním tvaru má střed O ve středu soustavy souřadnic. Označme vrcholy a délky úseček jako na obr. 4.1. Souřadnice bodů F, E jsou $F = [e; 0]$ a $E = [-e; 0]$. Délka a se nazývá *délka hlavní poloosy* a délka b je *délka vedlejší poloosy*. Vzdálenost ohniska od středu elipsy se nazývá *excentricita* a značí se e . Jak již bylo řečeno v úvodu kapitoly, hlavní a vedlejší poloosy elipsy v základní poloze leží na osách soustavy souřadnic.

Pro trojúhelník EOD na obr. 4.1 vyplývá z Pythagorovy věty vztah:

$$a^2 = e^2 + b^2, \quad a > b.$$

Pro elipsu na obr. 4.2 platí:

$$b^2 = e^2 + a^2, \quad a < b.$$

Zde dochází k výměně označení hlavní a vedlejší poloosy (b je hlavní poloosa). Rovnici odvodíme pomocí prvního vztahu, pomocí druhého vztahu bychom rovnicí odvodili analogicky.

Jelikož $|ED| = a = |FD|$, pro všechny body $X = [x, y]$ z definice elipsy platí:

$$2a = |EX| + |FX| = \sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2},$$

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2} \quad |^2,$$

$$(e+x)^2 - (e-x)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(e-x)^2 + y^2},$$

$$a\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = a^2 - ex \quad |^2,$$

$$a^2e^2 + x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 - a^4 = 0.$$

Ze vztahu $a^2 = e^2 + b^2$ vyjádříme $e^2 = a^2 - b^2$, $b^2 = a^2 - e^2$ a dosadíme do rovnice:

$$a^2(a^2 - b^2) + x^2b^2 + a^2y^2 - a^4 = 0,$$

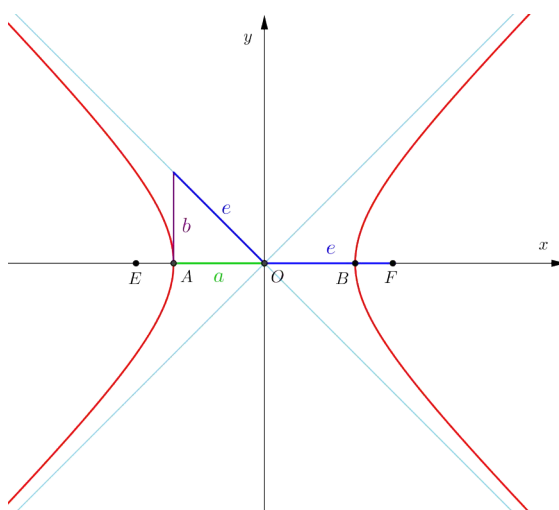
$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad | : (a^2b^2),$$

po vydělení celé rovnice výrazem a^2b^2 dostaneme hledanou rovnici elipsy v základním tvaru:

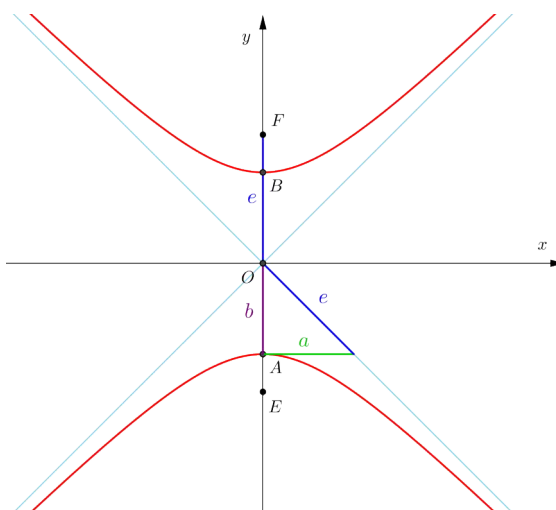
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.2)$$

Rovnici (4.2) jsme dostali z původní rovnice $2a = \sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$ umocňováním, proto nevíme, zda jsou rovnice ekvivalentní. Dá se ukázat, že všechna řešení rovnice (4.2) jsou zároveň řešením původní rovnice a skutečně se jedná o ekvivalentní rovnice. [5, str. 160] Rovnice (4.2) odpovídá rovnici (4.1) a navíc splňuje podmínku nenulových koeficientů c_1 a c_2 , tedy se jedná o rovnici kuželosečky.

4.1.2 Hyperbola



Obrázek 4.3: Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Obrázek 4.4: Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

Definice 13. V rovině α jsou dány dva různé body E, F . Množina všech bodů X roviny α , pro které se $||XE| - |XF||$ rovná danému kladnému číslu, které je menší než $|EF|$, se nazývá *hyperbola*. Body E, F jsou *ohniska* této hyperboly.

Přímka EF se nazývá *hlavní osa* a osa úsečky EF *vedlejší osa* hyperboly. Úsečku AO , délku *hlavní poloosy*, značíme a . Úsečku OF , *excentricitu* hyperboly, značíme e . Délku *vedlejší poloosy* značíme b a definujeme ji vztahem $b = \sqrt{e^2 - a^2}$. Bod S , střed úsečky

EF , nazveme *středem* hyperboly. Pro hyperbolu v základní poloze platí, že $S = O$, vedlejší osou je osa y a hlavní osa je osa x soustavy souřadnic. Stejně jako v předešlém případě, označme vrcholy a délky úseček jako na obr. 4.3 a souřadnice bodů F, E jsou $F = [e; 0]$ a $E = [-e; 0]$. Rovnici hyperboly v základním tvaru odvodíme obdobným způsobem jako u rovnice elipsy.

Z obr. 4.3 podle Pythagorovy věty platí:

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Pro hyperbolu na obr. 4.4 platí stejná rovnost. Opět dochází k výměně značení hlavní (b) a vedlejší (a) poloosy hyperboly.

Pro všechny body $X = [x, y]$ z definice hyperboly platí:

$$2a = ||XE| - |XF|| = \left| \sqrt{(x - e)^2 + y^2} - \sqrt{(x + e)^2 + y^2} \right|.$$

Umocněním a dosazením za $(e^2 - a^2)$ dostaneme téměř stejným postupem jako u rovnice elipsy rovnici hyperboly v základní poloze:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.3)$$

Pro hyperbolu na obr. 4.4 dostaneme rovnici:

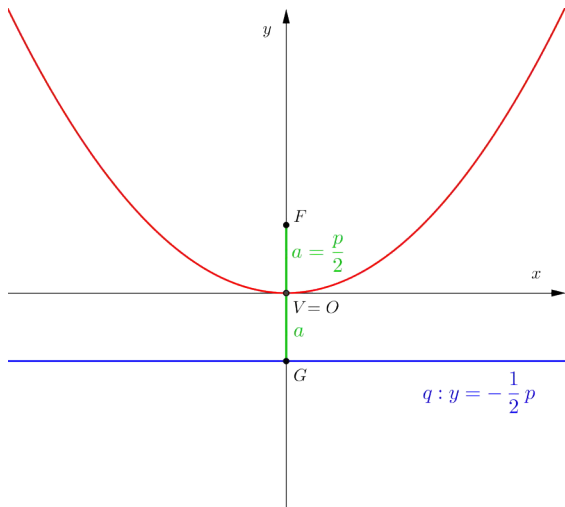
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Je-li pro x, y splněna rovnice (4.3), musí být nutně splněno $x^2 \geq a^2$. Jako u rovnice elipsy bychom ukázali, že z rovnice (4.3) plyne rovnost, ze které jsme vycházeli. [5, str. 185] Skutečně se tedy jedná o rovnici hyperboly.

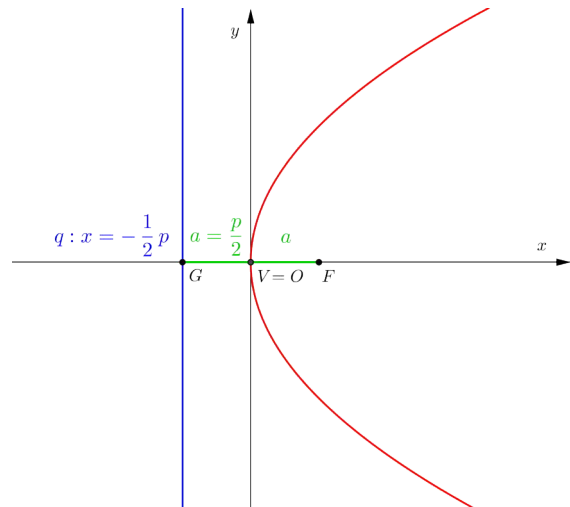
Poznámka 3. Na obr. 4.3 a 4.4 jsou vyznačeny asymptoty hyperboly. V rotaci kuželoseček s asymptotami nebudeme pracovat, jen uvedeme rovnice těchto asymptot:

$$y = \pm \frac{bx}{a}.$$

4.1.3 Parabola



Obrázek 4.5: Parabola $x^2 = 2py$



Obrázek 4.6: Parabola $y^2 = 2px$

Definice 14. V rovině α je dán bod F a přímka q , která jím neprochází. Množina všech bodů X roviny α , které mají stejnou vzdálenost od bodu F a od přímky q , se nazývá *parabola*. Bod F se nazývá *ohnisko*, přímka q *řídící přímka* paraboly.

Označme G patu kolmice na přímku q procházející bodem F . Střed úsečky FG nazveme *vrcholem* paraboly a označíme jej V . Pro parabolu v základní poloze platí $V = O$ (střed soustavy souřadnic). Vzdálenost bodu F od přímky q (paty kolmice G) značíme p a platí $|FV| = |GV| = \frac{p}{2}$. Zvolme $F = [0, \frac{p}{2}]$ jako na obr. 4.5. Řídící přímka q má rovnici $y = -\frac{p}{2}$.

Stejně jako v předchozích dvou případech, při odvození rovnice paraboly v základním tvaru budeme vycházet z definice paraboly. Pro všechny body $X = [x, y]$ paraboly platí:

$$|XF| = |Xq|,$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y + \frac{p}{2}|}{\sqrt{1}},$$

$$\sqrt{x^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|.$$

Umocněním a ekvivalentními úpravami dostaneme rovnici paraboly v základní poloze:

$$x^2 = 2py \quad (4.4)$$

Rovnice (4.4) popisuje parabolu na obr. 4.5. Ani rovnice paraboly v základní poloze nemá pouze jeden předpis. Pokud parabolu s rovnicí $x^2 = 2py$ zobrazíme v osově souměrnosti podle osy x , změní se rovnice paraboly takto:

$$x^2 = -2py.$$

Parabola na obr. 4.6 má předpis:

$$y^2 = 2px,$$

a stejně jako v předešlém případě můžeme popsat parabolu k ní osově souměrnou podle osy y rovnicí:

$$y^2 = -2px.$$

4.2 Posunuté kuželosečky

Zvolme nyní soustavu souřadnic (S, x', y') , která vznikne posunutím původních os x, y o vektor $\mathbf{v} = (m, n)$ do nového počátku $S = [m, n]$. Jelikož soustava souřadnic (S, x', y') vznikne posunutím soustavy souřadnic (O, x, y) , jsou osy x', y' rovnoběžné s osami x, y . Bod S je různý od počátku O .

Elipsa se středem v bodě S , jejíž hlavní a vedlejší poloosa leží na osách x', y' , má vzhledem k soustavě souřadnic (S, x', y') rovnicí:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Substitucí $x' = x - m$ a $y' = y - n$ pak dostáváme rovnici této elipsy vzhledem k soustavě souřadnic (O, x, y) [9, str. 78]:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1. \quad (4.5)$$

Souřadnice ohnisek elipsy závisí na její poloze, tedy zda je hlavní poloosa rovnoběžná s osou x , nebo naopak s osou y (viz obr. 4.1 a 4.2). Je-li $0 < b < a$, pak pro ohniska elipsy platí $E = [m - \sqrt{a^2 - b^2}, n]$ a $F = [m + \sqrt{a^2 - b^2}, n]$. Platí-li nerovnost $0 < a < b$, elipsa má ohniska $E = [m, n - \sqrt{b^2 - a^2}]$, $F = [m, n + \sqrt{b^2 - a^2}]$. [5, str. 162-163]

Odstraníme-li násobením zlomky z rovnice posunutě elipsy (4.5), dostaneme vhodnými úpravami rovnici ve tvaru [9, str.78]:

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3x + c_4y = c_5, \quad c_1c_2 > 0. \quad (4.6)$$

Jedná se o rovnici (4.1) s přidanou podmínkou, díky které lze přesně určit, o jaký typ kuželosečky se jedná.

Rovnice

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3x + c_4y = c_5, \quad c_1c_2 < 0$$

odpovídá rovnici (4.1) s podmínkou $c_1c_2 < 0$, což znamená, že koeficienty c_1, c_2 mají opačná znaménka. Rovnice v tomto tvaru s touto podmínkou popisuje rovnici hyperboly, která je ekvivalentní s rovnicí posunutě hyperboly:

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = \pm 1.$$

Rovnice:

$$c_1x^2 + c_3x + c_4y = c_5, \quad c_2 = 0, \quad c_4 \neq 0$$

popisuje parabolu, kterou lze zapsat ekvivalentní rovnicí:

$$(x - m)^2 = \pm 2p(y - n).$$

Parabola má vrchol v bodě $V = [m, n]$ a ohnisko $F = [m, n \pm \frac{p}{2}]$. Základní rovnice kuželosečky (4.1) s nulovým koeficientem c_2 je rovnicí paraboly. Pokud je ale navíc splněna podmínka $c_4 \neq 0$, rovnice popisuje právě regulární kuželosečku. V případě $c_4 = 0$ dostáváme předpis pro dvojici rovnoběžných přímk, tedy singulární (degenerovanou) kuželosečku. [9]

Rovnice:

$$c_2y^2 + c_3x + c_4y = c_5, \quad c_1 = 0, \quad c_3 \neq 0,$$

a s ní ekvivaletní rovnice:

$$(y - n)^2 = \pm 2p(x - m),$$

popisuje parabolu s vrcholem $V = [m, n]$ a ohniskem $F = [m \pm \frac{p}{2}, n]$. Jako v předešlém případě lze na základě splnění podmínek $c_1 = 0$ a $c_3 \neq 0$ rozhodnout, o jaký typ kuželosečky se jedná.

Stejně jako umíme převést rovnici typu (4.5) na rovnici typu (4.6), lze i obráceně z rovnice typu (4.6) získat rovnici ve tvaru (4.5). Využíváme k tomu metodu doplnění na čtverec, díky které zjistíme vektor posunutí v a tím i souřadnice počátku S (resp. vrcholu V u paraboly). Touto metodou lze rovnici typu (4.6) převést i na rovnici s hodnotou 0, popřípadě -1 , na pravé straně. [9, str. 78] Použití této metody ukážeme v řešení následujícího příkladu.

Příklad 2. Rozhodněte, jaký typ kuželosečky je popsán rovnicí

$$45x^2 - 16y^2 - 450x = -1205,$$

určete souřadnice středu S (popř. vrcholu V) a dalších důležitých bodů.

Řešení:

$$\begin{aligned} 45x^2 - 16y^2 - 450x &= -1205, \\ 45(x^2 - 10x) - 16y^2 &= -1205, \\ 45((x - 5)^2 - 25) - 16y^2 &= -1205, \\ 45(x - 5)^2 - 16y^2 &= -80, \\ \frac{(x - 5)^2}{16} - \frac{y^2}{45} &= -\frac{1}{9}, \\ \frac{(x - 5)^2}{\frac{16}{9}} - \frac{y^2}{5} &= -1. \end{aligned}$$

Jedná se o rovnici hyperboly se středem $S = [5, 0]$ a ohnisky $E = [5, -e]$, $F = [5, e]$, kde $e = \sqrt{\frac{4}{3} + 5}$. Hlavní poloosa je rovnoběžná s osou y .

Část II

Praktická část

Kapitola 5

Leslieho model rústu populace

V této kapitole ukážeme důležitost vlastních čísel v biologii. Konkrétně nás budou zajímat vlastní čísla matice, kterou sestavil Patrick Holt Leslie (1900-1972) ve svém modelu rústu populace, publikovaném v časopise *Biometrika*¹ z roku 1945. Nejprve ale musíme pochopit princip výpočtů a způsob sestavení tzv. *Leslieho matice*, než přejdeme k samotným vlastním číslům a jejich významu. Definice, tvrzení a důkazy uvedené v této kapitole jsou přebrány ze zdrojů [3] a [4]. Další text v podkapitolách (5.1) a (5.2) je zpracován autorkou rovněž na základě zdrojů [3] a [4].

Leslieho model se zabývá především ženskou částí populace a její dynamikou. Hlavní charakteristikou je pouze věk ženy (samice). Věk obvykle vyjadřujeme přirozeným číslem. Pro využití tohoto modelu rústu populace se předpokládá poloviční zastoupení žen v dané populaci. Zároveň v tomto modelu nepředpokládáme změnu porodnosti a úmrtnosti v čase. Jednotku času volíme libovolně dle toho, jak jemné rozdíly v rústu populace chceme pozorovat. Většinou se za jednotku času udává 1 rok. [3, str. 20]

5.1 Leslieho matice a jak ji najít

Definice 15. Uvažujme $n + 1$ věkových skupin.

¹LESLIE, P. H. On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika*. Biometrika Trust, November 1945, Vol. 33, No. 3, 183-212.

- *Maximální věk jedince* je věk, kterého se s vysokou pravděpodobností dožije každý jedinec. Tuto hodnotu označme N .
- *Věkový interval jedné skupiny*, značíme písmenem a , dostaneme jako podíl maximálního pravděpodobného věku jedince a počtu věkových skupin, $a = \frac{N}{n+1}$.
- *Stáří jedinců* v i -té věkové skupině náleží do intervalu věku $\langle 0; ai \rangle$ pro $i = 1$, a do intervalu $\langle a(i-1); ai \rangle$ pro $i = 2, \dots, n+1$.
- *Počet jedinců* v jednotlivých věkových skupinách v čase t udává sloupcový vektor $\mathbf{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t))^T$.

Příklad 3 (Disjunktní rozklad intervalu věku). Zvolme tyto hodnoty:

$$N = 75, \quad n + 1 = 5, \quad a = \frac{N}{n+1} = \frac{75}{5} = 15, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5:$$

1. věková skupina: $\langle 0; 15 \rangle$,
2. věková skupina: $\langle 15; 30 \rangle$,
3. věková skupina: $\langle 30; 45 \rangle$,
4. věková skupina: $\langle 45; 60 \rangle$,
5. věková skupina: $\langle 60; 75 \rangle$.

Poznámka 4. Uvedené rozdělení do věkových skupin není určitě jediné možné. Stejně tak můžeme zadefinovat rozdělení do zleva polouzavřených intervalů

$$\langle a(i-1); ai \rangle \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n \text{ a } \langle a(i-1); ai \rangle \text{ pro } i = n+1.$$

V každé populaci je vývoj závislý na určité míře porodnosti a úmrtnosti. Pro skupinu obsahující právě narozené jedince musí platit, že je závislá na počtu jedinců ve všech ostatních věkových skupinách a koeficientu porodnosti těchto skupin. Počet jedinců v jednotlivých věkových skupinách, vyjma zmíněné skupiny, do které patří právě narození jedinci, je navíc závislý na počtu jedinců v předešlé věkové skupině a pravděpodobnosti přežití těchto jedinců.

Koeficient porodnosti označme l . Koeficient porodnosti l_i i -té věkové skupiny udává, kolik jedinců (samic, jelikož uvažujeme pouze ženskou část populace) se narodí jedné samici

v této věkové skupině. V reálné populaci je porodnost určena ještě dvěma hodnotami, *věkem dosažení pohlavní dospělosti* (m) a *maximálním možným věkem plodnosti* (M). Pro tyto dvě hodnoty platí:

$$m \leq M; m, M \in \{1, 2, \dots, n + 1\}.$$

Hodnoty m, M se týkají konkrétního věku samice. Jelikož ale nebereme v potaz rozdíly koeficientu porodnosti samic uvnitř jedné věkové skupiny, přiřazujeme proměnným m, M hodnoty označení celých věkových skupin. Například $M = 5$ znamená, že od 6. věkové skupiny do poslední $(n + 1)$ -ní věkové skupiny je koeficient porodnosti $l = 0$. Stejně tak pro $m = 3$ platí $l_0 = l_1 = 0$. Pokud jsou samice plodné celý život, nastává rovnost $M = n + 1$.

Obecně platí:

$$l_0 = l_1 = \dots = l_{m-1} = l_{M+1} = l_{M+2} = \dots = l_{n+1} = 0,$$

$$l_m > 0, l_{m+1} > 0, l_{m+2} > 0, \dots, l_{M-1} > 0, l_M > 0.$$

Koeficient úmrtnosti, který lze ekvivalentně popsat jako průměrnou pravděpodobnost přežití jedince v j -té věkové skupině, označíme p_j . Zde však nemůžeme uvažovat skupinu jedinců, kteří by překročili maximální možný věk N . Jelikož uvažujeme pravděpodobnost a každý jedinec s pravděpodobností 1 zemře (žádný z jedinců nebude žít věčně), pohybujeme se v intervalu $(0, 1)$.

Z předchozí charakteristiky plynou tyto podmínky pro pro indexy i, j koeficientů l a p :

$$\forall i; i \in \{0, \dots, n\} : l_i \geq 0,$$

$$\forall j; j \in \{0, \dots, n - 1\} : 0 < p_j \leq 1.$$

Přepišme výše popsané skutečnosti do rovnic:

$$x_0(t) = l_0 x_0(t - 1) + l_1 x_1(t - 1) + \dots + l_n x_n(t - 1), \quad (5.1)$$

$$x_i(t) = p_{i-1} x_{i-1}(t - 1), i \in \{1, \dots, n\}. \quad (5.2)$$

Rovnice (5.1) popisuje počet novorozených dětí, rovnice (5.2) počet členů dané věkové skupiny v závislosti na úmrtnosti skupiny předešlé. Tyto rovnosti popisují celkový růst populace v závislosti na čase a lze je zapsat v maticovém tvaru:

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t-1).$$

Maticový zápis rovnic (5.1) a (5.2):

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_0 & l_1 & l_2 & \cdots & l_n \\ p_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t-1) \\ x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ \vdots \\ x_n(t-1) \end{pmatrix}$$

Čtvercová matice A řádu $n+1$ se nazývá *Leslieho matice*.

5.2 Vlastní čísla a vlastní vektory Leslieho matice

Definice 16. Reálné vlastní číslo λ_0 se nazývá *ryze dominantní*, jestliže pro všechna reálná vlastní čísla $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$, platí: $|\lambda_0| > \lambda_i$, λ_0 má algebraickou násobnost 1 a všechny složky vektoru \mathbf{v} , příslušného vlastnímu číslu λ_0 , jsou kladné.

Poznámka 5. Při hledání ryze dominantního vlastního čísla λ_0 uvažujeme pouze reálné kořeny charakteristické rovnice. Na množině reálných čísel je definováno ostré uspořádání, zatímco komplexní kořeny uspořádat nelze.

Poznámka 6. Zavedeme značení, které budeme používat v následujících tvrzeních. Horní index u vektoru $\mathbf{v}^{(c)}$ určuje, kterému vlastnímu číslu odpovídá \mathbf{v} jako vlastní vektor. Všechny matice jsou řádu $n \times n$, všechny vektory n -rozměrné. Symbol $|A|$, resp. $|\mathbf{v}|$, označuje matici, jejíž složky jsou $(|A|)_{ij} = |a_{ij}|$, resp. vektor, jehož složky jsou $(|\mathbf{v}|)_i = |v_i|$. Označení $(A\mathbf{v})_k$ znamená maticový součin k -tého řádku matice A a vektoru \mathbf{v} . Tedy $(A\mathbf{v})_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}v_j$. Nerovnost $\mathbf{v} > \mathbf{w}$ znamená, že $\forall i : v_i > w_i$. Speciálním případem je nerovnost $\mathbf{v} > \mathbf{o}$, což znamená, že $\forall i : v_i > 0$. Nerovnost $A\mathbf{v} > A\mathbf{w}$ znamená, že pro každý index k platí

$(A\mathbf{v})_k > (A\mathbf{w})_k$, tedy $\sum_{j=1}^n a_{kj}v_j > \sum_{j=1}^n a_{kj}w_j$. Analogicky pro ostatní nerovnosti. Dále budeme potřebovat definici tzv. *primitivní matice*, a k -tou mocninu matice A , kterou rozumíme součin $A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (k -krát).

Definice 17. Matice A s nezápornými prvky se nazývá *primitivní*, pokud $\exists k \in \mathbb{N} : A^k > O$. To znamená, že pro všechny složky výsledné matice A^k platí $\forall i, j : a_{ij} > 0$.

Tvrzení 1. Je-li matice A taková, že $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$ a $\mathbf{v} \geq \mathbf{w}$, pak $A\mathbf{v} \geq A\mathbf{w}$. Je-li matice A taková, že $\forall i, j : a_{ij} > 0$, $\mathbf{v} \geq \mathbf{w}$ a existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $v_i > w_i$, pak $A\mathbf{v} > A\mathbf{w}$.

Důkaz. Plyne bezprostředně z vyjádření

$$(A\mathbf{v})_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}v_j, \quad (A\mathbf{w})_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}w_j.$$

□

Tvrzení 2. Nechť A je matice taková, že $\forall i, j : a_{ij} > 0$, \mathbf{v} je vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu λ a $\mathbf{v} \geq \mathbf{o}$. Pak $\mathbf{v} > \mathbf{o}$ a $\lambda > 0$.

Důkaz. Jelikož \mathbf{v} je vlastní vektor matice A , platí $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ a existuje index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ takový, že $v_i > 0$. Dále z Tvrzení 1 platí $\lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v} > A\mathbf{o} = \mathbf{o}$. To znamená, že pro každý index k je $\lambda v_k > 0$. Zejména $\lambda v_i > 0$, a jelikož z předpokladu víme, že $v_i > 0$, pak i $\lambda > 0$. Stejně tak pro libovolný index k je $v_k > 0$, neboť $\lambda v_k > 0$. □

Tvrzení 3. Je-li primitivní matice A taková, že $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$ a $\mathbf{v} \geq \mathbf{o}$ je její vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ , pak $\mathbf{v} > \mathbf{o}$ a $\lambda > 0$.

Důkaz. Jelikož dle Tvrzení 1 platí $\lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v} \geq \mathbf{o}$, pak i $\lambda \geq 0$. A je primitivní matice, tedy $\exists k \in \mathbb{N}$ takové, že $A^k > O$. Poněvadž $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, je také

$$A^k\mathbf{v} = A^{k-1}A\mathbf{v} = \lambda A^{k-1}\mathbf{v} = \dots = \lambda^k\mathbf{v}.$$

Z Tvrzení 2 nyní plyne, že $\mathbf{v} > \mathbf{o}$ a $\lambda^k > 0$, takže $\lambda \neq 0$. □

Tvrzení 4. Nechť pro matici A platí $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$. Pak množina

$$S_A = \{c \geq 0 : (\exists \mathbf{v}^{(c)}) \mathbf{v}^{(c)} \geq \mathbf{o}, \|\mathbf{v}^{(c)}\| = 1, A\mathbf{v}^{(c)} \geq c\mathbf{v}^{(c)}\}.$$

je neprázdná a shora omezená.

Důkaz. Buď $\mathbf{v}^{(0)}$ libovolný nezáporný vektor takový, že $\|\mathbf{v}^{(0)}\| = 1$. Dle Tvrzení 1 je $A\mathbf{v}^{(0)} \geq A\mathbf{o} = \mathbf{o} = 0\mathbf{v}^{(0)}$, takže $0 \in S_A, S_A \neq \emptyset$.

Buď $c \in S_A$ a $\mathbf{v}^{(c)}$ příslušný vlastní vektor, který existuje podle definice množiny S_A . Nechť i je takový index, že

$$v_i^{(c)} = \max \{v_1^{(c)}, v_2^{(c)}, \dots, v_n^{(c)}\}.$$

Pak je $v_i^{(c)} > 0$ a

$$cv_i^{(c)} \leq (A\mathbf{v}^{(c)})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j^{(c)} \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}v_i^{(c)} \leq v_i^{(c)} \max \left\{ \sum_{j=1}^n a_{hj}; h = 1, \dots, n \right\},$$

tedy

$$c \leq \max \left\{ \sum_{j=1}^n a_{hj}; h = 1, \dots, n \right\}$$

a c je horní závora množiny S_A . □

Tvrzení 5. Nechť A je matice taková, že $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$, S_A je množina definovaná v Tvrzení 4 a ryze dominantní vlastní číslo $\lambda_0 = \sup S_A$. Pak pro každý vektor \mathbf{w} platí:

$$A|\mathbf{w}| \leq \lambda_0|\mathbf{w}|.$$

Důkaz. Nulový vektor splňuje uvedenou nerovnost triviálně. Pro všechny další vektory důkaz provedeme sporem.

Připusťme, že existuje nenulový vektor \mathbf{w} splňující nerovnost $A|\mathbf{w}| > \lambda_0|\mathbf{w}|$ a položme

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{|w_i|} ((A|\mathbf{w}|)_i - \lambda_0|w_i|); |w_i| > 0 \right\}.$$

Pak je $\varepsilon > 0$ a

$$\varepsilon|w_i| \leq (A|\mathbf{w}|)_i - \lambda_0|w_i| \text{ pro každý index } i,$$

$$(\lambda_0 + \varepsilon)|w_i| \leq (A|\mathbf{w}|)_i,$$

$$(\lambda_0 + \varepsilon)|\mathbf{w}| \leq A|\mathbf{w}|.$$

Položíme-li

$$\mathbf{v}^{(\lambda_0 + \varepsilon)} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} |\mathbf{w}|,$$

dostaneme, že

$$\mathbf{v}^{(\lambda_0 + \varepsilon)} \geq \mathbf{o},$$

$$\|\mathbf{v}^{(\lambda_0 + \varepsilon)}\| = 1,$$

$$A\mathbf{v}^{(\lambda_0 + \varepsilon)} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} A|\mathbf{w}| \geq \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} (\lambda_0 + \varepsilon) |\mathbf{w}| = (\lambda_0 + \varepsilon) \mathbf{v}^{(\lambda_0 + \varepsilon)},$$

takže $\lambda_0 + \varepsilon \in S_A$, což je ve sporu s vlastnostmi suprema množiny S_A . □

Tvrzení 6. *Nechť A je matice taková, že $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$, \mathbf{w} je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ matice A . Pak*

$$A|\mathbf{w}| \geq |\lambda| |\mathbf{w}|.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu reálných čísel:

$$(A|\mathbf{w}|)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} |w_j| = \sum_{j=1}^n |a_{ij} w_j| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \right| = |(A\mathbf{w})_i| = |(\lambda w)_i| = |\lambda| |w_i|.$$

□

Tvrzení 7. *Nechť A je matice taková, že $\forall i, j : a_{ij} \geq 0$, a označme $\lambda_0 = \sup S_A$. Pak $\lambda_0 \geq 0$, λ_0 je vlastním číslem matice A a příslušný vlastní vektor $\mathbf{v} \geq \mathbf{o}$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že množina $M = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \geq \mathbf{o}, \|\mathbf{v}\| = 1\}$ je kompaktní². Z trojúhelníkové nerovnosti pro normu plyne, že pro vektory $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \in M$ platí

$$\|\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{v}^{(2)}\| \leq \|\mathbf{v}^{(1)}\| + \|\mathbf{v}^{(2)}\| = 1 + 1 = 2,$$

²**Definice** (Kompaktní množina). Množina $M \in \mathbb{R}_r$ (kde \mathbb{R}_r je množina uspořádaných r -tic) se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti z M lze vybrat konvergentní vybranou posloupnost, která má limitu v M . [7, str. 65]

Věta. Množina $M \in \mathbb{R}_r$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená. [7, str. 65]

takže množina M je omezená³.

Bud' $\{\mathbf{w}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$ posloupnost vektorů konvergující k vektoru \mathbf{v} v prostoru \mathbb{R}^n s metrikou určenou euklidovskou normou. To znamená, že pro každý index i platí:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (w_i^{(k)} - v_i)^2} = 0, \text{ neboli } \lim_{k \rightarrow \infty} w_i^{(k)} = v_i.$$

Jelikož $w_i^{(k)} \geq 0$, je také $v_i \geq 0$, tedy $\mathbf{v} \geq \mathbf{o}$. Zobrazení $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem $F(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$ je spojitě, z čehož podle Heineho podmínky⁴ plyne rovnost

$$F\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}^{(k)}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(\mathbf{w}^{(k)}),$$

tj.

$$\|\mathbf{v}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{w}^{(k)}\| = 1.$$

Celkem tedy dostáváme, že $\mathbf{v} \in M$. Množina M obsahuje s konvergentní posloupností i její limitu, takže tato množina je nejen omezená, ale i uzavřená⁵.

Hodnota $\lambda_0 = \sup S_A$ je limitou posloupnosti čísel $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ z množiny S_A . Tedy existuje posloupnost $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S_A$ taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lambda_0$. K číslům $c_k \in S_A$ existují vektory $\mathbf{v}^{(c_k)}$ takové, že

$$\mathbf{v}^{(c_k)} \geq \mathbf{o}, \quad (5.3)$$

$$\|\mathbf{v}^{(c_k)}\| = 1, \quad (5.4)$$

$$A\mathbf{v}^{(c_k)} \geq c_k \mathbf{v}^{(c_k)}. \quad (5.5)$$

Relace (5.3) a (5.4) říkají, že všechny vektory $\mathbf{v}^{(c_k)} \in M$. Z vlastností množiny M plyne, že existuje posloupnost $\{\mathbf{v}^{(c_{k_l})}\}_{l=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti vektorů $\{\mathbf{v}^{(c_k)}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že

³**Definice** (Omezená množina). Množina $M \in \mathbb{R}_r$ se nazývá *omezená*, jestliže existuje takové $x \in \mathbb{R}_r$ a $K \in \langle 0, +\infty \rangle$, že $\rho(x, y) \leq K$ pro všechna $y \in M$. [7, str. 65]

⁴**Věta** (Heineho). *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^* \text{ limitu } A \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^*$. Nechť $x_n, n \in \mathbb{N}$, je posloupnost reálných čísel taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, přičemž $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Navíc zobrazení F je spojitě, proto můžeme připustit, že pro některá k je $x_k = a$. [6, str. 57-59]*

⁵**Definice** (Uzavřená množina). *Uzavřením \overline{M} množiny $M \subset \mathbb{R}_r$ nazveme množinu všech limit konvergentních posloupností prvků z M . Množinu M nazveme *uzavřenou*, jestliže je $\overline{M} = M$, tj. limita každé konvergentní posloupnosti prvků z M leží v M . [7, str. 58]*

$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{(c_{k_l})} = \mathbf{v} \in M$. Z relace (5.3) dále plyne $\mathbf{v} \geq \mathbf{o}$, tedy $|\mathbf{v}| = \mathbf{v}$.

Z (5.5) dostáváme nerovnost

$$A\mathbf{v}^{(c_{k_l})} \geq c_{k_l}\mathbf{v}^{(c_{k_l})}.$$

Poněvadž lineární zobrazení je spojité, $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{(c_{k_l})} = \mathbf{v}$ a $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lambda_0$, dostaneme z poslední nerovnosti tuto nerovnost:

$$A\mathbf{v} \geq \lambda_0\mathbf{v}.$$

Z Tvzení 5 navíc dostaneme rovnost $A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}$, což z definice vlastního čísla a vektoru znamená, že \mathbf{v} je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_0 .

□

Věta 10. *Nechť L je Leslieho matice, p_j jsou koeficienty úmrtnosti udávající průměrnou pravděpodobnost přežití, takové že $\forall j; j \in \{1, \dots, n-1\} : 0 < p_j \leq 1$, pro koeficienty porodnosti l_i platí $\forall i, i \in \{0, \dots, n\} : l_i \geq 0$ a navíc je splněna podmínka, že alespoň dvě čísla l_i v matici L jsou nenulová. Pak matice L má kladné vlastní číslo λ_0 , pro které platí:*

1. Algebraická násobnost λ_0 je 1.
2. Je-li $\mathbf{v}^{(0)}$ vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_0 , pak jsou všechny jeho složky kladné.
3. Pro libovolné vlastní číslo λ_i matice L takové, že $\lambda_i \neq \lambda_0$, platí $|\lambda_i| \leq \lambda_0$.

Důkaz. Položíme $\lambda_0 = \sup S_A$, kde S_A je množina zavedená v Tvzení 4. Podle Tvzení 7 je λ_0 vlastním číslem matice L a příslušný vlastní vektor $\mathbf{v}^{(0)} \geq \mathbf{o}$. Podle Tvzení 3 je $\lambda_0 > 0$ a $\mathbf{v}^{(0)} > \mathbf{o}$.

Buď λ_i vlastní číslo matice L , $\lambda_i \neq \lambda_0$, a vektor \mathbf{w} je příslušný vlastní vektor k číslu λ_i .

λ_0 je ryze dominantní vlastní číslo matice $L \stackrel{T5}{\Rightarrow} L|\mathbf{w}| \leq \lambda_0|\mathbf{w}|$.

Z Tvzení 6 plyne:

$$|\lambda_i||\mathbf{w}| \leq L|\mathbf{w}| \leq \lambda_0|\mathbf{w}|.$$

Neboť w jakožto vlastní vektor je nenulový, existuje index k takový, že $w_k > 0$. Z předchozí nerovnosti nyní dostaneme:

$$|\lambda_i|w_k \leq \lambda_0 w_k \Rightarrow |\lambda_i| \leq \lambda_0.$$

□

Jelikož $x(t) = Ax(t-1)$ je rekurentně zadaná soustava lineárních rovnic, platí, že existuje t_0 takové, že pro všechna $t \geq t_0$ jsou všechny složky vektoru $x(t)$ větší než příslušné složky vektoru $x(t-1)$. Tedy $\exists t_0 \in \mathbb{N} \forall t \geq t_0 : x_i(t) > x_i(t-1)$ pro každý index i . Z každého takového vektoru lze vyjádřit věkové rozložení populace (četnost jednotlivých věkových skupin $X_i, i = 0, \dots, k$), které bude odpovídat rozložení populace v čase $t = n$. Toto procentuální zastoupení jednotlivých věkových skupin spočteme jako podíl jednotlivých složek vektoru $x(t)$ a součtu všech jeho složek. Z předchozích tvrzení plyne, že vektor $x(t)$ lze nahradit vlastním vektorem $v^{(0)}$, který je příslušný ryze dominantnímu vlastnímu číslu λ_0 . Věkové rozložení populace pak získáme jako podíl jednotlivých složek vektoru $v^{(0)}$ a součtu všech jeho složek, který označíme V :

$$v^{(0)} = \left(v_0^{(0)}, v_1^{(0)}, \dots, v_n^{(0)} \right)^T,$$

$$V = v_0^{(0)} + v_1^{(0)} + \dots + v_n^{(0)},$$

$$X_i = \frac{v_i^{(0)}}{V}.$$

Poznámka 7. Pokud $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice L , pak i $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, komplexně sdružené číslo k číslu λ_1 , je vlastní číslo matice L .

5.3 Ukázka růstu populace dle Leslieho modelu na konkrétním příkladu

Uvažujme populaci, ve které platí následující vlastnosti:

$$n+1 = 4, \quad m = 1, \quad N = 60, \quad M = 4 = n+1, \quad a = \frac{N}{n+1} = \frac{60}{4} = 15.$$

Intervaly věkových skupin: $\langle 0; 15 \rangle$, $\langle 15; 30 \rangle$, $\langle 30; 45 \rangle$, $\langle 45; 60 \rangle$.

Koeficienty porodnosti: $l_0 = 0$, $l_1 = 4$, $l_2 = 3$, $l_3 = 1$.

Koeficienty úmrtnosti: $p_0 = 0,3$, $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,5$.

Výchozí stav: $\mathbf{x}(0) = (0, 2, 1, 0)^T$.

Leslieho matice:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Růst populace v závislosti na čase:

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t-1) \\ x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \end{pmatrix}.$$

Výpočet λ_0 a $\mathbf{v}^{(0)}$ matice L :

$$\det(L - \lambda E) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 3 & 1 \\ 0,3 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & -\lambda \end{vmatrix} = (-0,5) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 1 \\ 0,3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ 0,3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,8 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 - 1,2\lambda^2 - 0,72\lambda - 0,12 = 0.$$

$$\lambda_1 \doteq 1,342\ 68,$$

$$\lambda_2 \doteq -0,349\ 879,$$

$$\lambda_3 \doteq -0,496\ 403 + 0,094\ 997\ 5i,$$

$$\lambda_4 \doteq -0,496\ 403 - 0,094\ 997\ 5i.$$

Ryze dominantní vlastní číslo matice L je číslo λ_1 . V našem případě je tedy $\lambda_0 = \lambda_1$.

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^{(1)} \doteq \begin{pmatrix} 0,966\ 69 \\ 0,215\ 99 \\ 0,128\ 692 \\ 0,047\ 923 \end{pmatrix}, \quad V = 1,359\ 295.$$

$$X_0 = \frac{v_0^{(0)}}{V} \doteq 0,711\ 17,$$

$$X_1 = \frac{v_1^{(0)}}{V} \doteq 0,158\ 90,$$

$$X_2 = \frac{v_2^{(0)}}{V} \doteq 0,094\ 68,$$

$$X_3 = \frac{v_3^{(0)}}{V} \doteq 0,035\ 26.$$

Z výpočtů plyne, že v tomto modelu je nejpočetnější 1. věková skupina, která má přibližně 71,1% zastoupení v celkové populaci. Naopak nejméně početnou skupinou je 4. věková skupina se zhruba 3,5% zastoupením.

Poznámka 8. Výpočty kořenů charakteristické rovnice a vlastního vektoru byly provedeny v internetovém prostředí *Wolfram Alpha*.

V tomto konkrétním populačním modelu můžeme ukázat, jaké je procentuální zastoupení jednotlivých věkových skupin na začátku růstu. Víme, k jaké hodnotě se procenta zastoupení skupin v populaci blíží, ale ukážeme, že teprve po 4. časovém období budou počty ve všech skupinách nenulové. Od 5. časového úseku budou tyto hodnoty jen růst, zatímco v předchozích obdobích počty spíše oscilují.

Využijeme zde maticový předpis růstu populace v závislosti na čase.

$t = 1$:

$$\begin{pmatrix} x_0(1) \\ x_1(1) \\ x_2(1) \\ x_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(0) \\ x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0(0) \\ x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(1) = (11; 0; 1,6; 0,5)^T.$$

Násobením matice L a vektoru $\mathbf{x}(1)$ získáme řešení $\mathbf{x}(2)$. Analogicky další řešení.

$t = 2$:

$$\mathbf{x}(2) = (5,3; 3,3; 0; 0,8)^T.$$

$t = 3$:

$$\mathbf{x}(3) = (5,3; 3,3; 0; 0,8)^T.$$

$t = 4$:

$$\mathbf{x}(4) = (14,280; 4,200; 1,272; 1,320)^T.$$

$t = 5$:

$$\mathbf{x}(5) = (21,936; 4,284; 3,360; 0,636)^T.$$

⋮

Po 4. časovém období jsme skutečně dostali vektor se všemi složkami nenulovými. Můžeme využít způsobu výpočtu procentuálního rozložení populace jako u vlastního vektoru matice L a spočítat procentuální rozložení pro $t = 4$. Procentuální zastoupení jednotlivých skupin v celkové populaci opět vypočteme jako podíl jednotlivých složek vektoru $\mathbf{x}(4)$ a součtu všech jeho složek, který označíme $b(4)$.

$$\mathbf{x}(4) = \begin{pmatrix} 14,280 \\ 4,200 \\ 1,272 \\ 1,320 \end{pmatrix}, \quad b(4) = 21,072.$$

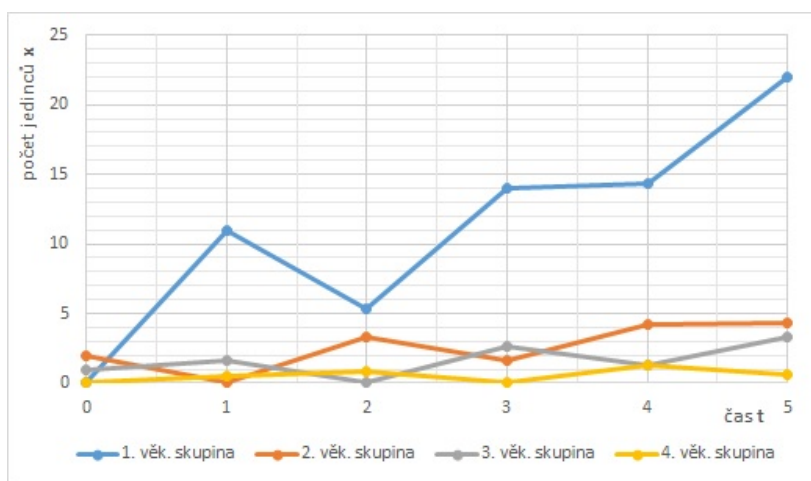
$$X_0 = \frac{14,280}{b(4)} \doteq 0,6777,$$

$$X_1 = \frac{4,200}{b(4)} \doteq 0,1993,$$

$$X_2 = \frac{1,272}{b(4)} \doteq 0,0604,$$

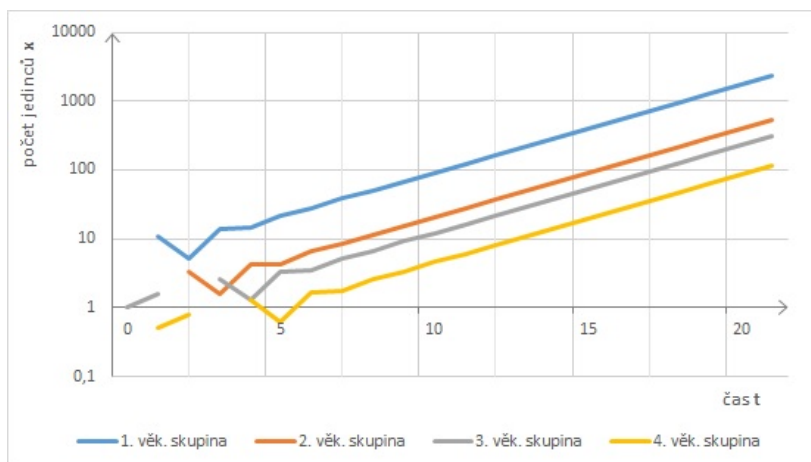
$$X_3 = \frac{1,320}{b(4)} \doteq 0,0626.$$

Vidíme, že výsledky pro $t = 4$ a konečné procentuální rozložení, ke kterému daná společnost konverguje (pro t blížící se k nekonečnu) podle předchozího výpočtu pomocí vlastních čísel, se u jednotlivých složek liší. Hodnoty v tuto chvíli neodpovídají, museli bychom pozorovat delší časový interval, abychom zjistili, od kterého t_0 se začnou blížit k dříve zjištěným výsledkům. Tento vývoj popisují následující grafy:



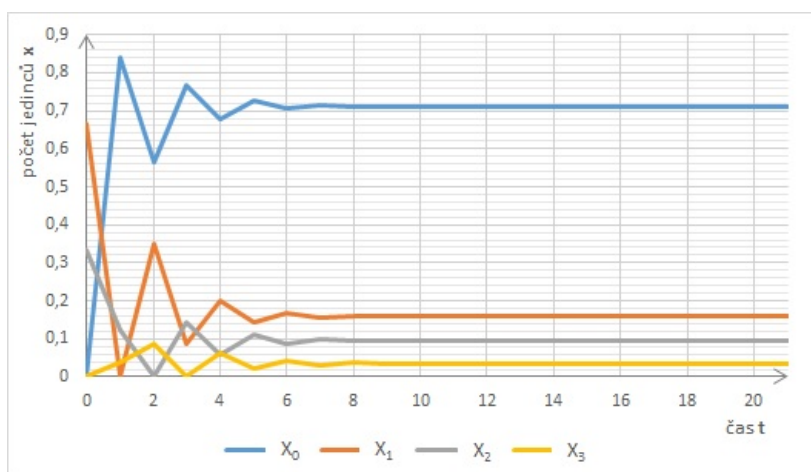
Obrázek 5.1: Vývoj populace v čase $t = 0, \dots, 5$

Graf na obr. 5.1 popisuje nezávislé chování vývoje populace v čase $t = 0, \dots, 5$. Jak popisuje následující graf na obr. 5.2, další vývoj populace už je rostoucí.



Obrázek 5.2: Dlouhodobý vývoj populace

V grafu na obr. 5.2 používáme pro svislou osu logaritmické pravítko, proto je graf v některých hodnotách nespojitý. Logaritmické pravítko umožňuje názorně zobrazovat veličiny v rozpětí mnoha řádů, ale neumožňuje zobrazit čísla záporná nebo nulu. Nula se v našem případě vyskytuje v každém z vektorů $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ a $x(3)$, ale jak jsme již uvedli, pro $t = 4$ a dále už jsou všechny prvky vektoru $x(t)$ kladné.



Obrázek 5.3: Vývoj věkového rozložení populace

Graf na obr. 5.3 popisuje procentuální zastoupení jednotlivých věkových skupin v celkové populaci. Můžeme vidět, že již po 8. časovém období ($t = 8$) tyto hodnoty konvergují ke stejným výsledkům, jaké jsme získali při obecném řešení s použitím vlastních čísel.

Kapitola 6

Rotace kuželoseček

V následující kapitole se vrátíme k využití vlastních čísel a vlastních vektorů v matematice, konkrétně v analytické geometrii. Kapitola je věnována popisu rotace kuželoseček kolem středu kartézské soustavy souřadnic, popřípadě jejich posunutí o libovolný vektor. K popisu rotace kuželoseček se využívá teorie podobnosti matic, která je podrobně popsána v teoretické části, stejně jako rovnice kuželoseček v základní poloze.

6.1 Kuželosečky v obecné poloze

Na rotaci kuželoseček lze nahlížet dvěma způsoby. Buď to jako na rotaci všech bodů kuželosečky kolem počátku soustavy souřadnic, nebo jako na rotaci os soustavy souřadnic, což je způsob, jak na ni budeme nahlížet v této kapitole. Vůči soustavě souřadnic, která vznikla vhodně zvolenou rotací ρ , lze kuželosečku, původně zapsanou v obecné poloze, zapsat rovnicí kuželosečky v poloze základní. Cílem této kapitoly je nalézt takovou rotaci ρ soustavy souřadnic, vůči které bude možné převést obecnou rovnici kuželosečky na rovnici kuželosečky v základní poloze. Rovnice kuželosečky v obecné poloze (posunutá a otočená) obsahuje smíšený člen, který přímo souvisí s rotací ρ soustavy souřadnic. [9, str. 82]

Rovnice kuželosečky v obecné poloze (obecná rovnice) má tvar:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (6.1)$$

kde členy a_{ij} pro $i, j \in \{1, 2, 3\}$, jsou reálná čísla.

Pokud budeme uvažovat, že platí $a_{12} = a_{21}$ a $a_{13} = a_{31}$, celou rovnici lze zapsat v maticovém tvaru takto:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Všimněme si, že v rovnici (6.1) tvoří kvadratické členy spolu se členem smíšeným rovnici kvadratické formy. [9, str. 82] Tuto část rovnice označíme $g(x)$. Kvadratická forma $g(x) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ obsahuje vektor $\mathbf{x} = (x, y)^T$ a čtvercovou matici A typu $(2, 2)$ tvořenou členy a_{ij} pro $i, j \in \{1, 2\}$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Obecnou rovnici kuželosečky (6.1), zadanou vzhledem ke kanonické bázi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ původní soustavy souřadnic (O, x, y) , lze zapsat rovnicí kuželosečky v základní poloze, která má tvar regulární, nebo singulární kuželosečky vzhledem k bázi $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$ nové soustavy souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y}) . Tato soustava souřadnic vznikla rotací ρ původní soustavy souřadnic kolem počátku. [9, str. 82]

Z teorie podobnosti matic a kvadratických forem víme, že každá symetrická matice A je ortogonálně diagonalizovatelná a stejně tak každou kvadratickou formu $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ lze diagonalizovat. Najdeme tedy diagonální matici $D = Q^T A Q$, kde Q je ortogonální matice, která diagonalizuje matici A . Jelikož matice Q je ortogonální, lze do kvadratické formy $g(x) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ vložit výraz $Q Q^T$ nebo $Q^T Q$ a výraz se nezmění, neboť se z definice ortogonální matice jedná o jednotkovou matici E :

$$g(x) = (x, y) \cdot \underbrace{Q Q^T A Q Q^T}_D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \cdot Q D Q^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

V rovnici (6.2) použijeme substituci:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y) \cdot Q \quad (6.3)$$

a dostáváme kvadratickou formu $h(x) = \bar{x}^T D \bar{x}$, kde $\bar{x} = (\bar{x}, \bar{y})^T$, popisující původní kvadratickou formu $g(x)$ vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ nově vzniklých os souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y}) :

$$h(x) = (\bar{x}, \bar{y}) \cdot D \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Pokud jsou členy a_{13}, a_{23}, a_{33} rovnice (6.1) nulové, po vyjádření diagonální matice D již dostaneme výslednou rovnici regulární (popřípadě singulární) kuželosečky vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Pokud však bude alespoň jeden z těchto členů nenulový, musíme příslušnou proměnnou x, y (dle toho, pro která i, j je člen a_{ij} nenulový) také vyjádřit vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ jako \bar{x}, \bar{y} .

Ze substituce (6.3) a z vlastnosti ortogonální matice Q platí:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = Q^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Z posledního vztahu dostáváme proměnné x, y vyjádřené pomocí \bar{x}, \bar{y} . Můžeme už tedy přepsat celou původní obecnou rovnici kuželosečky na rovnici kuželosečky v základní poloze vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ otočené soustavy souřadnic.

Poznámka 9. Vektory báze $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tvoří řádky matice Q^T (sloupce matice Q). Matice Q^T odpovídá matici rotace kuželosečky kolem počátku o úhel α . Jelikož ale nahlížíme na rotaci kuželosečky jako na rotaci os soustavy souřadnic, a ne jako na rotaci všech bodů kuželosečky kolem počátku, z geometrické představy všechny body kuželosečky zůstávají na místě a osy souřadnic otáčíme o úhel $-\alpha$. Tuto skutečnost musíme zohlednit právě v geometrickém vyjádření rotace kuželosečky.

Jelikož diagonální matice D má na diagonále prvky odpovídající vlastním číslům λ_1 a λ_2 matice A , můžeme vyslovit následující větu:

Věta 11. Každou rovnici ve tvaru (6.1), v níž je alespoň jeden z koeficientů a_{11}, a_{12}, a_{22} nenulový, můžeme pomocí ortogonální substituce (6.3) převést na rovnici

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f = 0, \quad (6.4)$$

kde $d, e, f \in \mathbb{R}$ a koeficienty λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla symetrické matice kvadratické formy, kterou tvoří kvadratické členy a smíšený člen rovnice (6.1). Rovnice (6.4) pak představuje

<i>elipsu,</i>	<i>je-li</i> $\lambda_1 \lambda_2 > 0,$
<i>hyperbolu,</i>	<i>je-li</i> $\lambda_1 \lambda_2 < 0,$
<i>parabolou,</i>	<i>je-li</i> $\lambda_1 \lambda_2 = 0,$

včetně degenerovaných případů nebo prázdnou množinu. [9, str. 82]

Důkaz. Jelikož chceme, aby výsledná rovnice byla rovnicí kuželosečky, budeme uvažovat případy, kdy je alespoň jeden z koeficientů λ_1, λ_2 nenulový. Důkaz rozdělíme na tyto části, čímž vyšetříme všechny případy:

I. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0,$

- (a) λ_1 a λ_2 mají stejná znaménka - *elipsa*,
- (b) λ_1 a λ_2 mají různá znaménka - *hyperbola*.

II. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ (např. $\lambda_1 \neq 0$),

- (a) $e \neq 0$ - *parabola*,
- (b) $e = 0$ - *degenerovaná kuželosečka*.

I. V rovnici (6.4) doplníme členy \bar{x} a \bar{y} na čtverce:

$$\lambda_1 \left(\bar{x} + \frac{d}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{d^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left(\bar{y} + \frac{e}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{e^2}{4\lambda_2} + f = 0,$$

$$\lambda_1 \left(\bar{x} + \frac{d}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(\bar{y} + \frac{e}{2\lambda_2} \right)^2 - \frac{d^2}{4\lambda_1} - \frac{e^2}{4\lambda_2} + f = 0.$$

Zvolíme substituci $\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \frac{d}{2\lambda_1}$, $\bar{\bar{y}} = \bar{y} + \frac{e}{2\lambda_2}$, $g = f - \frac{d^2}{4\lambda_1} - \frac{e^2}{4\lambda_2}$ a dostáváme rovnici

$$\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2 + \lambda_2 \bar{\bar{y}}^2 + g = 0. \quad (6.5)$$

(a) Předpokládejme, že λ_1 a λ_2 mají stejná znaménka a $g \neq 0$. Pak lze rovnici (6.5) vydělit výrazem $(-g)$ a přepsat do tvaru:

$$\frac{\bar{\bar{x}}^2}{-\frac{g}{\lambda_1}} + \frac{\bar{\bar{y}}^2}{-\frac{g}{\lambda_2}} = 1.$$

Pokud má g opačné znaménko než λ_1 a λ_2 , platí:

$$-\frac{g}{\lambda_1} > 0, \quad -\frac{g}{\lambda_2} > 0.$$

Můžeme provést substituci $a = \sqrt{-\frac{g}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{-\frac{g}{\lambda_2}}$ a dostáváme rovnici elipsy v základní poloze:

$$\frac{\bar{\bar{x}}^2}{a^2} + \frac{\bar{\bar{y}}^2}{b^2} = 1.$$

Jestliže mají koeficienty λ_1 , λ_2 a g stejná znaménka, nastávají opačné nerovnosti:

$$-\frac{g}{\lambda_1} < 0, \quad -\frac{g}{\lambda_2} < 0.$$

Zde volíme substituci $a = \sqrt{\frac{g}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{g}{\lambda_2}}$ a vznikne rovnice:

$$-\frac{\bar{\bar{x}}^2}{a^2} - \frac{\bar{\bar{y}}^2}{b^2} = 1,$$

kterou neřeší žádný z bodů $[x, y]$, jedná se tedy o prázdnou množinu. V případě, kdy $g = 0$ a λ_1 , λ_2 mají stejná znaménka, má původní rovnice tvar:

$$\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2 + \lambda_2 \bar{\bar{y}}^2 = 0.$$

Řešením je jediný bod $[0, 0]$, jedná se o degenerovanou kuželosečku.

(b) Předpokládejme, že λ_1 a λ_2 mají různá znaménka a $g \neq 0$. Opět z rovnice (6.5) dostáváme vydělením výrazem $(-g)$ tvar:

$$\frac{\bar{x}^2}{-\frac{g}{\lambda_1}} + \frac{\bar{y}^2}{-\frac{g}{\lambda_2}} = 1.$$

Bez újmy na obecnosti zvolíme, že znaménko λ_2 se rovná znaménku g . Pak platí:

$$-\frac{g}{\lambda_1} > 0, \quad -\frac{g}{\lambda_2} < 0,$$

a pokud položíme $a = \sqrt{-\frac{g}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{g}{\lambda_2}}$, výsledkem je rovnice hyperboly v základní poloze:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1.$$

Opět zbývá prošetřit případ, kdy $g = 0$. Bez újmy na obecnosti zvolme $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$. Zavedeme-li substituci $a = \lambda_1$, $b = -\lambda_2$, má rovnice (6.5) tvar:

$$a^2 \bar{x}^2 - b^2 \bar{y}^2 = 0,$$

$$(a\bar{x} - b\bar{y})(a\bar{x} + b\bar{y}) = 0,$$

což odpovídá rovnicím různoběžek:

$$\bar{y} = \frac{a}{b} \bar{x}, \quad \bar{y} = -\frac{a}{b} \bar{x}.$$

II. Je-li $\lambda_1 \neq 0$, dostáváme následující tvar rovnice (6.4), kde koeficient u \bar{x} doplníme na čtverec:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \bar{x}^2 + d\bar{x} + e\bar{y} + f &= 0, \\ \lambda_1 \left(\bar{x} + \frac{d}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{d^2}{4\lambda_1} + e\bar{y} + f &= 0. \end{aligned}$$

I v tomto případě zvolíme substituci $\bar{\bar{x}} = \bar{x} + \frac{d}{2\lambda_1}$ a dále budeme pracovat s rovnicí:

$$\lambda_1 \bar{\bar{x}}^2 + e\bar{y} + f - \frac{d^2}{4\lambda_1} = 0. \tag{6.6}$$

(a) Předpokládejme, že $e \neq 0$. Pak lze rovnici (6.6) upravit na tvar:

$$\bar{\bar{x}}^2 + \frac{e}{\lambda_1} \left(\bar{y} + \frac{4f\lambda_1 - d^2}{4e\lambda_1} \right) = 0.$$

Označíme-li $2p = \frac{e}{\lambda_1}$ a $\bar{y} = \bar{y} + \frac{4f\lambda_1 - d^2}{4e\lambda_1}$, dostáváme rovnici paraboly:

$$\bar{x}^2 + 2p\bar{y} = 0,$$

$$\bar{x}^2 = -2p\bar{y}.$$

(b) Předpokládejme, že $e = 0$. Dostaneme následující tvar rovnice (6.6):

$$\bar{x}^2 + f - \frac{d^2}{4\lambda_1} = 0,$$

$$\bar{x}^2 + \frac{4f\lambda_1 - d^2}{4\lambda_1^2} = 0.$$

Pokud platí, že $4f\lambda_1 - d^2 \leq 0$ a zvolíme $a^2 = -\frac{4f\lambda_1 - d^2}{4\lambda_1^2}$, dostáváme rovnici:

$$\bar{x}^2 - a^2 = 0,$$

$$(\bar{x} - a)(\bar{x} + a) = 0,$$

což odpovídá rovnicím rovnoběžek $\bar{x} = a$, $\bar{x} = -a$.

Pokud platí, že $4f\lambda_1 - d^2 > 0$ a zvolíme $a^2 = \frac{4f\lambda_1 - d^2}{4\lambda_1^2}$, po dosazení vznikne rovnice:

$$\bar{x}^2 + a^2 = 0.$$

Tuto rovnici neřeší žádný z bodů $[x, y]$ pro $x, y \in \mathbb{R}$. Vyšetřením všech případů, které mohli pro rovnici (6.4) nastat, jsme větu dokázali. [8, str. 78-82] □

6.2 Rovnoosá hyperbola

Hyperbola se nazývá *rovnoosá*, jestliže se rovnají délky její hlavní a vedlejší poloosy, tedy $a = b$. Rovnice rovnoosé hyperboly vypadá takto:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = \pm 1. \tag{6.7}$$

Poznámka 10. Jak bylo uvedeno v teoretické části, znaménko na pravé straně rovnice udává, ve které dvojici kvadrantů se hyperbola nachází.

Častěji než v základním tvaru se setkáváme se zápisem rovnoosé hyperboly v obecném tvaru, a to ve funkci nepřímé úměrnosti. Grafem nepřímé úměrnosti je právě rovnoosá hyperbola

$$y = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Po úpravě na $xy = k$ dostáváme rovnici kuželosečky v obecné poloze (6.1), kde pro jednotlivé koeficienty a_{ij} platí:

$$a_{11}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{31} = 0, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}, \quad a_{33} = -k.$$

Dokážeme, že se jedná o rovnici hyperboly, kterou vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ otočené soustavy souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y}) zapíšeme ve tvaru rovnice (6.7). K výpočtu potřebujeme matici A kvadratické formy $g(x) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = xy$ a vlastní čísla a vlastní vektory matice A , abychom mohli sestavit diagonální matici D a ortogonální matici Q :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Kořeny charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ jsou $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Jelikož $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, lze podle věty 11 rozhodnout, že se skutečně jedná o hyperbolu.

Vlastní vektor $\mathbf{v}^{(1)}$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = (1, 1), \quad \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|} = \bar{\mathbf{e}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Vlastní vektor $\mathbf{v}^{(2)}$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = (-1, 1), \quad \frac{\mathbf{v}^{(2)}}{\|\mathbf{v}^{(2)}\|} = \bar{\mathbf{e}}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Matice Q^T odpovídá rotaci kuželosečky o úhel $\alpha = -45^\circ$, což odpovídá otočení os souřadnic o úhel $-\alpha = 45^\circ$.

Člen xy nyní můžeme zapsat vzhledem k bázi soustavy souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y}) pomocí substituce (6.3). Jak jsme zjistili, tato soustava je otočená kolem počátku o úhel 45° .

$$xy = (\bar{x}, \bar{y}) \cdot D \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = (\bar{x}, \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\bar{y}^2.$$

Dosadíme do původní rovnice $xy = k$ a úpravami dostaneme rovnici hyperboly ve tvaru (6.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{x}^2 - \frac{1}{2}\bar{y}^2 &= k, \\ \frac{\bar{x}^2}{2k} - \frac{\bar{y}^2}{2k} &= \pm 1. \end{aligned}$$

Je-li $k > 0$, bude pravá strana kladná, v případě $k < 0$, bude znaménko záporné. Zvolíme-li $a^2 = 2k$, dostáváme požadovaný tvar rovnice hyperboly:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{a^2} = \pm 1.$$

6.3 Příklad rotace singulární kuželosečky

Příklad 4. Určete typ kuželosečky popsané následující rovnicí a zakreslete ji v soustavě souřadnic (O, x, y) :

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 12 = 0.$$

Řešení:

Matice A kvadratické formy $g(x) = x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$ je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

Nalezneme vlastní čísla matice A a ortonormální vlastní vektory matice A , abychom mohli sestavit matice D a Q :

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4) = 0.$$

Kořeny charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ jsou $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0$. Podle věty 11 se jedná o singulární kuželosečku, jelikož platí rovnost $\lambda_1 \lambda_2 = 0$.

Vlastní vektor $\mathbf{v}^{(1)}$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = (1, \sqrt{3}), \quad \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|} = \bar{\mathbf{e}}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vlastní vektor $\mathbf{v}^{(2)}$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = (-\sqrt{3}, 1), \quad \frac{\mathbf{v}^{(2)}}{\|\mathbf{v}^{(2)}\|} = \bar{\mathbf{e}}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Jelikož matice Q^T odpovídá rotaci kuželosečky o úhel $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, nová soustava souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y}) vznikla rotací soustavy souřadnic (O, x, y) o úhel $-\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Použijeme substituci (6.3), která kvadratickou formu $g(x)$ převede na kvadratickou formu

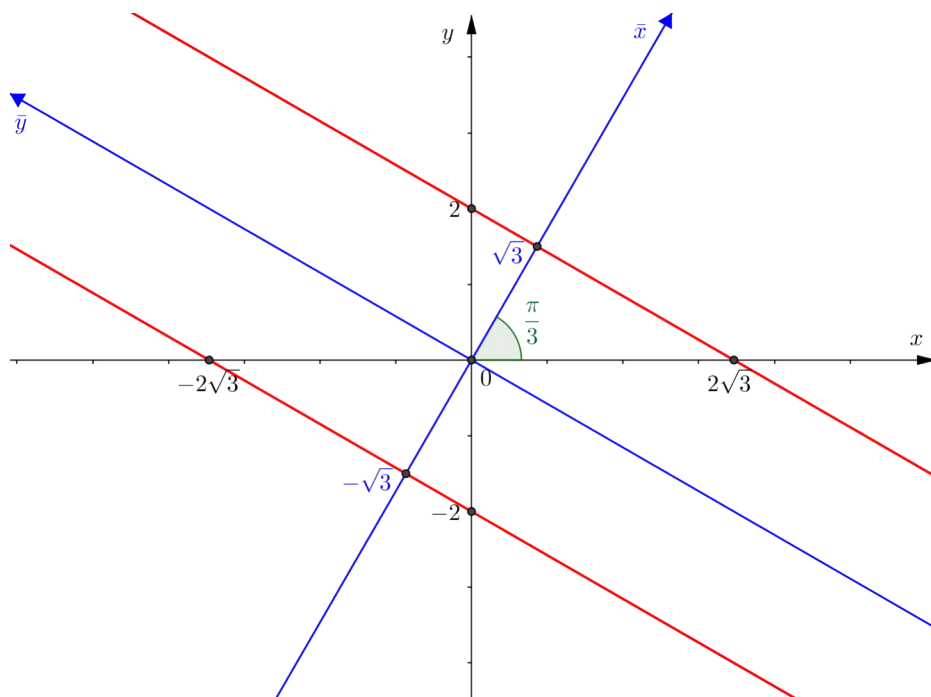
$$h(x) = 4\bar{x}^2,$$

což je původní kvadratická forma $g(x)$ zapsaná vzhledem k bázi soustavy souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y}) .

Dosazením do zadané rovnice kuželosečky dostáváme rovnici singulární kuželosečky vzhledem k nové soustavě souřadnic, která odpovídá dvojici rovnoběžných přímek:

$$4\bar{x}^2 - 12 = 0,$$

$$\bar{x} = \pm\sqrt{3}.$$



Obrázek 6.1: Přímký $\bar{x} = \pm\sqrt{3}$ vzhledem k soustavě souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y})

6.4 Příklad rotace regulární kuželosečky

Příklad 5. Určete typ kuželosečky popsané následující rovnicí:

$$31x^2 - 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 80x - 80\sqrt{3}y = -256,$$

zakreslete ji v soustavě souřadnic (O, x, y) a určete souřadnice středu S (popřípadě vrcholu V) této kuželosečky.

Řešení:

Matice A kvadratické formy $g(x) = 31x^2 - 10\sqrt{3}xy + 21y^2$ je

$$A = \begin{pmatrix} 31 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 21 \end{pmatrix}.$$

Abychom sestavili diagonální matici D a ortogonální matici Q takové, že $D = Q^T A Q$, vypočteme vlastní čísla a vlastní vektory matice A :

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 31 - \lambda & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 21 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 52\lambda + 576 = 0.$$

Kořeny charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ jsou $\lambda_1 = 36$, $\lambda_2 = 16$. Podle věty 11 se jedná o elipsu, jelikož pro vlastní čísla matice A platí nerovnost $\lambda_1 \lambda_2 > 0$.

Vlastní vektor $\mathbf{v}^{(1)}$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -5 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & -5\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = (\sqrt{3}, -1), \quad \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|} = \bar{\mathbf{e}}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Vlastní vektor $\mathbf{v}^{(2)}$:

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 15 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & -5\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = (1, \sqrt{3}), \quad \frac{\mathbf{v}^{(2)}}{\|\mathbf{v}^{(2)}\|} = \bar{\mathbf{e}}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$D = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad Q^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice Q^T odpovídá rotaci kuželosečky o úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Nová soustava souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y}) tedy vznikla rotací soustavy souřadnic (O, x, y) o úhel $-\alpha = -\frac{\pi}{6}$.

Stejně jako v řešení příkladu rotace singulární kuželosečky použijeme nyní substituci (6.3), která kvadratickou formu $g(x)$ převede na kvadratickou formu

$$h(x) = 36\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2.$$

To je původní kvadratická forma $g(x)$ zapsaná vzhledem k bázi $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$ soustavy souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y}) .

Nyní vyjádříme proměnné x, y pomocí \bar{x}, \bar{y} , abychom mohli přepsat i zbývající členy zadané rovnice kuželosečky

$$-80x - 80\sqrt{3}y + 256$$

vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ otočené soustavy souřadnic:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y} \\ -\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y} \end{pmatrix},$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y},$$

$$y = -\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y},$$

Dosadíme do výrazu $-80x - 80\sqrt{3}y + 256$ a upravíme:

$$-80x - 80\sqrt{3}y + 256 = -80 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y} \right) - 80\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y} \right) + 256 = -160\bar{y} + 256.$$

Zadanou rovnici kuželosečky

$$31x^2 - 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - 80x - 80\sqrt{3}y = -256$$

lze přepsat na rovnici kuželosečky v základní poloze vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ otočené soustavy souřadnic takto:

$$36\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 - 160\bar{y} + 256 = 0,$$

$$36\bar{x} + 16(\bar{y}^2 - 10\bar{y}) = -256,$$

$$36\bar{x}^2 + 16(\bar{y} - 5)^2 - 400 = -256,$$

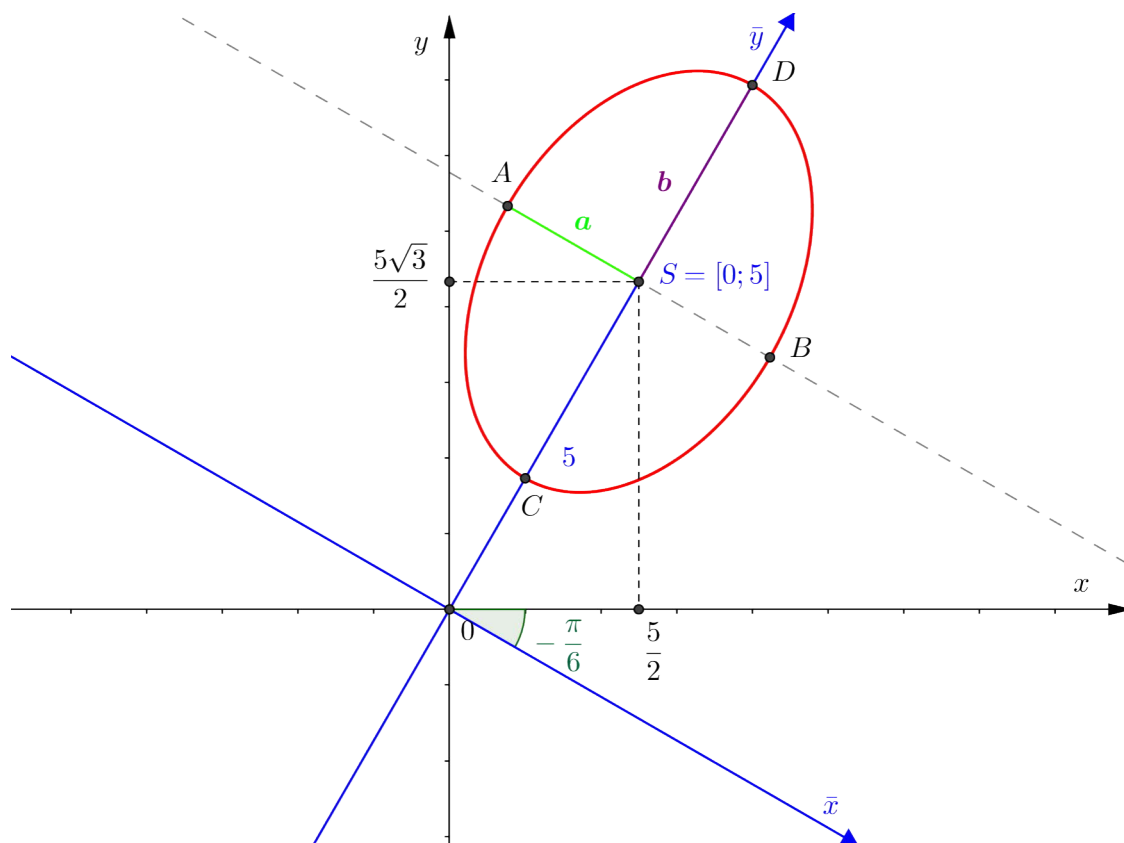
$$36\bar{x}^2 + 16(\bar{y} - 5)^2 = 144,$$

$$\frac{\bar{x}^2}{4} + \frac{(\bar{y} - 5)^2}{9} = 1.$$

Výsledná kuželosečka je elipsa se středem v bodě $S = [0; 5]$ vzhledem k bázi $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Bod S vzhledem ke kanonické bázi $\{e_1, e_2\}$ vypočteme jako:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Bod S má vzhledem k soustavě souřadnic (O, x, y) souřadnice $S = \left[\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right]$. Pro délky hlavní a vedlejší poloosy elipsy platí $a < b$, délka hlavní poloosa je $b = 3$ a délka vedlejší poloosa je $a = 2$.



Obrázek 6.2: Elipsa $\frac{\bar{x}^2}{4} + \frac{(\bar{y}-5)^2}{9} = 1$ vzhledem k soustavě souřadnic (O, \bar{x}, \bar{y})

Závěr

Cílem této práce je popsat dvě aplikace vlastních čísel a vlastních vektorů, jednu v oblasti matematiky a jednu mimo matematiku. Vzhledem k různorodosti aplikací vlastních čísel a vlastních vektorů bylo pro mne obtížné vybrat pouze dvě aplikace, které bych v této práci popsala. Původně jsem zamýšlela zařadit do praktické části práce více aplikací z různých oblastí. Problematika využití vlastních čísel a vlastních vektorů, která jsou nakonec v praktické části uvedena, je velmi obsáhlé téma, jehož rozsah jsem zpočátku neodhadla. Proto jsem se zaměřila právě na dvě aplikace, jednu v matematice a jednu mimo matematiku.

Mimo matematiku jsem zvolila téma, které je méně tradiční, a to Leslieho model růstu populace. Tento model růstu populace je popsán maticí, ze které lze například vyčíst koeficienty úmrtnosti a pravděpodobnosti přežití jednotlivých generací. Právě pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů tzv. Leslieho matice lze vypočítat procentuální zastoupení věkových skupin dané populace v konkrétním čase. Tato aplikace se mi velmi líbí, jelikož spojuje principy lineární algebry a pravděpodobnost vývoje mnoha generací nejen lidské populace. Z aplikací vlastních hodnot v oblasti matematiky jsem zvolila popis rotací kuželoseček, jelikož rotace kuželoseček je proces, který si lze snadno představit a nějakým způsobem znázornit. To přispívá k názornosti matematického popisu takového procesu.

Dalším tématem, které by bylo zajímavé například z hlediska moderní aplikace vlastních čísel zkoumat, je uspořádání webových stránek podle koeficientu důležitosti a pravděpodobnosti, s jakou se na stránku dostaneme náhodným kliknutím. Přiřazování těchto koeficientů k webovým stránkám je základní myšlenkou fungování webového prohlížeče Google. Vzhledem ke zkoumání jednotlivých aplikací mohu usoudit, že takto zajímavých aplikací bych jistě našla víc, jelikož se jedná o tematicky velmi bohatou problematiku.

Seznam použité literatury

- [1] BARTO, Libor a Jiří TŮMA. *Lineární algebra* [elektronická skripta] 2017. [citováno 10. 04. 2017]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/barto/LinAlg/skripta_1a5.pdf
- [2] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4.
- [3] HEJNOVÁ, Veronika. *Modely růstu populace*. Brno, 2013. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Fakulta přírodovědecká. Ústav matematiky a statistiky. Vedoucí práce Zdeněk POSPÍŠIL.
- [4] HOLČÍK, Jiří s Martin KOMENDA, (eds.) a kol. *Matematická biologie: e-learningová učebnice* [online]. Vyd. 1. Brno: Masarykova univerzita, 2015. ISBN 978-80-210-8095-9. Dostupné z: <http://portal.matematickabiologie.cz>.
- [5] KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-163-9.
- [6] KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza pro fyziky (I)*. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2002. ISBN 80-85863-89-8.
- [7] KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza nejen pro fyziky (II)*. 3. upr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 80-7378007-0.
- [8] PECH, Pavel. *Kuželosečky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7040-755-7.
- [9] ŠINDEL, Libor a Oldřich VLACH. *Analytická geometrie*. Ostrava, 2012. Učební materiál.

- [10] TŮMA, Jiří. *Kvadratické formy* [online]. Učební materiál. [citováno 10. 04. 2017] Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/tuma/2002/NLinalg13.pdf>.
- [11] Wikipedie: Otevřená encyklopedie: *Vlastní číslo* [online]. c2015 [citováno 15. 03. 2017]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Vlastní_číslo.