Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Didaktické přístupy k výuce některých témat v matematice na základní škole v řeči učitelů

Didactic approaches to the teaching of some mathematical topics at the primary school in teachers´ diskurse

Bc. Jaroslava Vencovská

Vedoucí práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.
Studijní program: Učitelství pro střední školy
Studijní obor: Učitelství pro ZŠ a SŠ – matematika

2017

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Didaktické přístupy k výuce některých témat v matematice na základní škole v řeči učitelů vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 21. dubna 2017

....

podpis

Poděkování

Děkuji vedoucí mé práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a podnětné připomínky. Děkuji za možnost nahlédnout do rozhovorů učitelů, bez nichž by se tato práce neobešla.

ABSTRAKT

Cílem diplomové práce bylo prostřednictvím nových analýz rozhovorů s učiteli matematiky popsat didaktické praktiky využívané učiteli při výuce vybraných témat (konkrétně úměrnosti, lineárních rovnic, dělitelnosti, procent, souměrnosti, Pythagorovy věty) a porovnat je s praktikami uváděnými v učebnicích a další odborné literatuře. Nejprve jsou popsány výukové metody, formy vyučování a mechanismus poznávacího procesu podle M. Hejného. Na základě analýzy více jak třiceti rozhovorů bylo zjištěno, že učitelé si kromě obvyklých didaktických praktik, které doporučují učebnice, vytvářejí i vlastní metody a postupy. Tyto metody a postupy jsou uvedeny ke každému kritickému tématu zvlášť ve čtvrté kapitole diplomové práce. Dále je u každého tématu uvedena obsahová analýza vybraných učebnic. Zjištěné postupy a praktiky učitelů, které používají při výuce kritických témat matematiky, tvoří výsledek mé práce.

KLÍČOVÁ SLOVA

úměrnosti, lineární rovnice, dělitelnost, procenta, souměrnosti, Pythagorova věta, chyby, obtíže žáků, didaktické praktiky

ABSTRACT

The aim of the thesis was through a new analysis of interviews with teachers of mathematics, to describe didactic practices used by teachers while teaching selected topics (namely, proportions, linear equations, divisibility, percent, symmetry, Pythagorean theorem) and compare them with the practices reported in textbooks and other literature. First, teaching methods, teaching forms and the mechanism of concept development by M. Hejný are given. Based on the analysis of more than thirty interview, it was found that teachers use the usual didactic practices but also create their own methods and procedures. These methods and techniques are provided for each critical issue separately in the fourth chapter of the thesis. Furthermore, the content analysis of selected textbooks is given for each topic. Identified practices of teachers which they use in their teaching practice, form the result of my work.

KEYWORDS

Proportions, linear equations, divisibility, percent, symmetry, Pythagorean theorem, mistakes, pupils' problems, didactic practices

Obsah

1 Úvod 7

2 Výzkum kritických míst v matematice a pojmy související s výukou matematiky 8

2.1 Výzkum kritických míst v matematice z hlediska didaktických praktik učitelů… 8

2.2 Výukové metody a formy vyučování 13

2.3 Žákův poznávací proces (podle M. Hejného) 15

2.4 Formální a neformální znalost 18

2.5 Konstruktivistická výuka 20

2.6 Činnostní výuka 21

3 Metodologie – výzkumné otázky a analýza dat 23

4 Výuka vybraných témat a obtíže žáků očima učitelů 25

4.1 Přímá a nepřímá úměrnost 26

4.2 Lineární rovnice 34

4.3 Dělitelnost 41

4.4 Procenta 48

4.5 Souměrnost 55

4.6 Pythagorova věta 59

5 Závěr 65

6 Literatura a zdroje 68

1 Úvod

Téma své diplomové práce jsem si vybrala proto, že mě zajímalo, jakým způsobem učitelé vlastně v praxi matematiku učí. K tomu jsem dostala příležitost znovu zpracovat data, která byla získána v rámci projektu GAČR Kritická místa matematiky základní školy, analýzy didaktických praktik učitelů. Tato data už byla analyzována z hlediska didaktických přístupů u těch témat, která učitelé považují z hlediska svých žáků za problematická. Učitelé se však vyjadřovali i k tématům, která podle nich problematická nejsou, ale která jsou přitom v matematice základní školy významná.

Cílem diplomové práce je prostřednictvím nových analýz rozhovorů s učiteli pořízených v rámci projektu GAČR zjistit, jaké didaktické praktiky učitelé využívají při výuce vybraných témat (konkrétně úměrností, lineárních rovnic, dělitelnosti, procent, souměrnosti a Pythagorovy věty), a porovnat je s praktikami, k nimž vedou učebnice a další odborná literatura, a dále popsat, v čem učitelé vidí z hlediska žáků v daných tématech problém.

Práce začíná teoretickou kapitolou, která se věnuje pojmům důležitým pro analýzu rozhovorů. Konkrétně jde o výukové metody, formy vyučování a mechanismus poznávacího procesu podle teorie generických modelů. Také je zde uvedený způsob sběru dat v projektu GAČR a stručný popis výsledků rozhovorů s učiteli matematiky na 2. stupni základní školy tak, jak je analyzovaly N. Vondrová a J. Žalská.

Další kapitola je věnována metodologii, tedy sběru dat a jejich analýzám jak ve zmíněném projektu GAČR, tak v diplomové práci.

Čtvrtá kapitola se zabývá výsledky analýz rozhovorů vybraných učitelů u témat, která učitelé nepovažují za problematická, avšak jsou v kontextu matematiky základní školy důležitá. Je zde zachyceno několik možností, jak téma zkoumaní učitelé vyučují, a na závěr je shrnut přístup výuky těchto problematických témat v několika učebnicích.

Práce je ukončena závěrem, v němž je zhodnoceno dosažení cíle.

Diplomová práce je psána v rámci projektu GAČR P407/11/1740 Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů.

2 Výzkum kritických míst v matematice a pojmy související s výukou matematiky

Jak bylo uvedeno v úvodu, práce se zabývá didaktickými praktikami učitelů. Nejdříve shrnu průběh výzkumu, na který ve své práci úzce navazuji a jehož data z rozhovorů využívám. Protože přejímám i metodologii z tohoto výzkumu, věnuji se zde podrobně i metodologii a nejen výsledkům, jak je obvyklé.

Dále uvedu pojmy, které souvisí s vyučováním a které jsou potřebné pro interpretaci zjištění z analýz rozhovorů, konkrétně výukové metody a jejich třídění a organizační formy vyučování. Ze stejného důvodu následuje popis teorie poznávacího procesu v matematice. Kapitola je uzavřena stručným představením principů výuky založené na konstruktivismu.

2.1 Výzkum kritických míst v matematice z hlediska didaktických praktik učitelů

V současnosti se často setkáváme s otázkou matematické zdatnosti českých žáků. Na silné a slabé stránky žáků v oblasti matematiky upozorňují např. mezinárodní srovnávací výzkumy TIMSS a PISA, které odhalují některá obtížná místa matematiky na základě výsledků žáků v testech. Na náhled učitelů na obtížná místa matematiky základní školy se v letech 2011–2014 zaměřili badatelé v rámci projektu GAČR. Výsledkem je mj. kniha *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* autorského kolektivu vedeného M. Rendlem a N. Vondrovou. Autoři shromažďovali a analyzovali zkušenosti učitelů týkající se tzv. kritických míst v matematice základní školy. Ty definovali jako oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě.

Jako vhodnou metodu výzkumu si badatelé vybrali hloubkový rozhovor s učiteli, který tazateli, na rozdíl od dotazníku, nechává možnost doptat se na vysvětlení nejasných odpovědí a případně doplnit další otázky. Nevýhodou této metody je nízký vzorek respondentů, který je však vyvážen jejich vlastními názory bez možnosti podsunutí domněnek tazatele.

Výzkum vycházel z rozhovorů s 60 učiteli 1. a 2. stupně základních škol a nižšího stupně gymnázií. Jak uvádí autoři výše zmíněné knihy, důležitým kritériem pro výběr učitelů byla délka jejich pedagogické praxe. Jedná se o učitele, kteří byli ochotni nechat tazatele nahlédnout do své hodiny, a podělit se tak o své zkušenosti a poznatky. Výzkum byl tak časově náročný nejen pro tazatele, ale i pro učitele, kteří vyučují v různých krajích celé České republiky. Učitelé mají odlišnou délku praxe, a jsou tedy i různého věku a zkušeností. Jak uvádějí autoři, z výše řečeného a také z rozhovorů samotných dále vyplývá, že i žáci vybraných učitelů pocházejí z různých ekonomických, sociálních a kulturních poměrů, což je z hlediska předmětu výzkumu pozitivní; soubor totiž není zatížen žádnou systematickou chybou. V tabulce 1 jsou uvedeny souhrnné údaje o učitelích, kteří se účastnili výzkumu. Mezi učitele 2. stupně jsou zahrnuti i učitelé osmiletých gymnázií (celkem 5) a gymnázií (celkem 2).

Učitelé	Počet	Mužů	Žen	Délka praxe	Průměrná délka praxe	Medián délky praxe	Praha	Mimo Prahu	Náslechů	Následných rozhovorů
1. stupně	26	1	25	3–43 let	18 let	17 let	12	14	4	3
2. stupně	34	9	25	9–40 let	22 let	21 let	13	21	16	15

Tab. 1: Přehled dotazovaných učitelů (Rendl, M., Vondrová N. a kol., 2013, str. 9)

Cílem rozhovoru bylo zjistit, jaké oblasti matematiky považují vyučující za kritické, jak se s nimi vypořádávají a v čem spatřují příčiny žákovských obtíží. Předem byla stanovena témata, kterých by se každý rozhovor měl dotknout: profesní dráha učitele, učivo dříve a nyní, současné učivo podle používané učebnice nebo školního vzdělávacího plánu z hlediska jeho obtížnosti pro žáky a učitele (tedy která část učiva je kritickým místem), přechod mezi stupni škol a matematické znalosti, vyučovací metody, diferenciace žáků, učitelské pojetí matematiky, spolupráce s učiteli a rodiči. (Rendl, Vondrová a kol., 2013, str. 9)

V rozhovorech byly jako podpůrný prostředek pro oživení témat, která se v konkrétních ročnících základních škol vyučují, použity učebnice. Tazatelé neměli dáno přesné znění otázek ani témat, přizpůsobovali se aktuálním odpovědím učitelů, a tak mohli otázky přeformulovat podle aktuálních odpovědí, případně nějaké přidat. Rozhovory mají v zásadě stejný charakter, ale liší se od sebe z hlediska prostoru, který tazatelé věnovali jednotlivým tématům.

> Tazateli byli členové řešitelského týmu projektu GAČR a ve třech případech studenti navazujícího magisterského studia matematiky (celkem šlo o 14 tazatelů). Všichni byli proškoleni, jak rozhovor vést a zaznamenat, mimo jiné při společné hrubé analýze prvního pilotního rozhovoru. V první polovině roku 2011 byly provedeny 4 pilotní rozhovory, od podzimu téhož roku pak byly rozhovory sbírány postupně až do podzimu 2013. (Rendl, Vondrová a kol., 2013, str. 10)

Rozhovory byly se souhlasem učitelů nahrávány na audiozáznamník a trvaly vesměs mezi 50 a 70 minutami, výjimečně byly kratší (kolem 30 minut) či delší (až do dvou hodin). U 20 učitelů vykonali tazatelé náslechy na hodinách a s 18 z nich byly vedeny následné rozhovory, z důvodu rozšíření již zjištěných informací.

Rendl, Vondrová a kol. (2013) uvádějí, že se při rozhovorech podařilo vytvořit přátelskou atmosféru, a rozhovory mají tak uvolněný, autentický charakter. Učitelé se nesnažili odpovídat na otázky účelově, ale podle své vlastní zkušenosti. Ovšem je třeba upozornit, že výpovědi učitelů „neodrážejí realitu jako takovou, ale realitu viděnou a sdělenou učitelem“ (Rendl, Vondrová a kol., 2013, str. 11).

Výsledky rozhovorů s učiteli 2. stupně se zabývá 3. kapitola knihy (Vondrová, Žalská, 2013). Učitelé zmínili jako kritická kromě slovních úloh témata v aritmetice (desetinná čísla, zlomky, celá čísla), algebře (algebraické výrazy), geometrii (konstrukční úlohy, míra – obsah, obvod, objem, povrch). Autorky u každého z nich popisují převládající didaktické přístupy a zdůrazňují ty, které mohou pomoci předcházet žákovským problémům. Níže uvedu v několika odstavcích podstatná zjištění.

Vondrová a Žalská uvádějí, že v aritmetice je důležité, aby žák látku pochopil nejenom intuitivně, ale aby zvládl také formální matematickou formu, tedy propojil představu a proceduru. Zlomky by se tedy podle nich měly reprezentovat nejenom pomocí obrázků, ale také na číselné ose a práce s nimi by měla obsahovat také zlomky větší než jedna. Číselná osa se využívá i při výkladu záporných čísel, pohyb po ní je intuitivní a dobře funguje při operacích sčítání a odčítání, problém nastává při operacích násobení a dělení. Strukturální odvození pravidel násobení a dělení je příliš složité, a tak se jím někteří učitelé vůbec nezabývají a předkládají operace žákům jako fakt.

Podle autorek (str. 70–88) se u desetinných čísel učitelé shodují v nutnosti podporovat a rozvíjet u žáků schopnost odhadu, někteří z nich žákům umožňují použití tabulek vytvořených pro základní převodní vztahy. Modely, které učitelé uvádějí v souvislosti s výukou desetinných čísel, jsou číselná osa, model metru a model peněz. Většina učitelů se shoduje v potřebě využití reálných zkušeností. Zlomky učitelé vysvětlují pomocí různých modelů (koláčový, reálný, geometrický či diskrétní) a zmiňují potřebu procvičování a pozitivního přístupu žáků ke zlomkům. Z rozhovorů dále vyplynulo, že učitelé používají u výuky celých čísel modelu teploměru, platební bilance, číselné osy nebo reálné finance. Uvádějí možnost využití znaménkové tabulky či barevného rozlišení a opět zdůrazňují potřebu procvičování.

Algebra skýtá pro žáky úskalí v časovém rámci, kdy žáci nemívají dostatek prostoru na „sžití se“ s prací s výrazy (přechod z „jablíček“, „hruštiček“ na abstrakci, Vondrová, Žalská, 2013, s. 92). Problém učitelé vidí nejenom v motivaci žáků (obtížná propojenost reálného života s algebrou), ale také v komplexnosti procesů, tedy přílišné složitosti, nutnosti použít více výpočtů. A v neposlední řadě činí žákům obtíže, pro algebru velice důležitá, matematizace textu.

Autorky uvádějí, že se učitelé „snaží přiblížit podstatu algebraických operací pomocí izolovaných modelů s celočíselnými hodnotami namísto proměnných“ (Vondrová, Žalská, 2013, str. 92). Několik učitelů navrhuje použití vizuální techniky (barevnost, velká písmena).

Převod textu do matematického jazyka činí žákům podle učitelů problémy i u slovních úloh. Žáci mívají obtíže i s charakterem samotného zadání úloh, které bývá pseudo-reálné, a s úlohami, které nelze zařadit do určitého typu. Při řešení nejenom těchto komplikací často hraje velkou roli charakteristika žáka, tedy jeho rodina, okolí, přístup k matematice…

„Dva učitelé navrhují v první řadě demystifikovat slovní úlohy, motivovat žáky a odstranit jejich strach před slovními úlohami, a to zejména zdůrazněním spojení s reálným životem.“ (Vondrová, Žalská, 2013, str. 100) Někteří učitelé preferují výuku na základě vzorových úloh (podle základních typů), k čemuž jim pomáhá i grafické znázornění situace nebo schéma řešení úlohy. Opět se shodují v nutnosti procvičování.

Konstrukční úlohy jsou podle výpovědí učitelů náročné na dobré grafické provedení obrázku, kdy hlavní problém nastává již ve fázi rozboru. Zde je potřeba zapamatovat si dílčí konstrukční kroky, při jejichž zápisu musí žáci zvládat matematickou symboliku, což tvoří další nesnáz. Pro výuku této látky mohou učitelé využívat různé počítačové programy, které provedou řešení krok po kroku, avšak většinou nebývají využívány. „Většina se shoduje v nutnosti naučit se postupy u jednoduchých konstrukcí tak dobře, aby se pak daly využít u složitějších konstrukcí.“ (Vondrová, Žalská, 2013, str. 110) Jedna učitelka využívá mnemotechnické pomůcky, jiná plakát s geometrickými značkami, další umožňuje zápis vlastními slovy.

Poslední v knize uváděnou oblastí jsou výpočty v geometrii, které jsou podle učitelů problematické díky množství vzorců, které žáci musí znát. Učitelé vidí příčinu nesnází ve špatné představivosti žáků, kdy ti nadaní to „vidí“ a ti méně nadaní bohužel ne, mnohým žákům ale může podle nich pomoci zkušenost z reálného života (Vondrová, Žalská, 2013, s. 114). „Učitelé pro vytvoření představy o pojmech obsah, obvod, objem využívají čtverečkovanou síť, jednotlivé úsečky přenesené do přímé čáry, či krychličky a jejich sestavení do tělesa.“ (Vondrová, Žalská, 2013, str. 116) Zde učitelé zdůrazňují důležitou roli opakování a drilu, ale zároveň žákům umožňují některé složitější vzorce vyhledávat např. v tabulkách. Učitelé se ve svých technikách odvozování vzorců většinou shodují s učebnicemi, často zmiňují možnost manipulace s pomůckami, stříhání a lepení (obsah), rýsování či rozložení útvaru a nalévání vody do nádob.

Rendl a Vondrová upozorňují, že rozhovory získané v rámci projektu GAČR „pokrývaly mnohem širší tematické pole než jen samotnou obtížnost různých učebních celků a způsoby jejich didaktického zvládání“ (Rendl, Vondrová a kol., 2013, str. 11). Části rozhovorů týkající se kritických míst byly využity řešiteli výše zmíněného projektu GAČR, části týkající se těch částí matematiky, které za kritické považovány nebyly, ale významné jsou, zpracovány nebyly se staly podkladem mé diplomové práce.

2.2 Výukové metody a formy vyučování

Vyučovací metoda neboli výuková metoda je v literatuře popisována jako postup, cesta, způsob vyučování, kterým se učitel řídí, aby dosáhl vytyčeného cíle. Slovo pochází z řeckého „methodos“ a znamená cestu, postup. Forma vyučování je charakterizována jako uspořádání celého vyučovacího procesu, v závislosti na jeho částech (žák, učitel, látka) a jeho vzájemných vazeb v prostoru a čase.

Existuje řada různých způsobů členění vyučovacích metod. Např. je můžeme dělit „podle fází vyučovacího procesu (utváření, upevňování, prověřování vědomostí), podle způsobu prezentace (slovní, názorné, praktické), podle charakteru specifické činnosti (metody uplatňované v jednotlivých vyučovacích předmětech).“ (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, str. 355)

Vyučovací metody se různě mění a kombinují v závislosti na vyučovaném předmětu, na probírané látce a na potřebách žáků. Učitelé se rozhodují o využití jednotlivých metod už při přípravě hodiny, své rozhodnutí poté mohou dle potřeb měnit.

Mezi výukové metody patří také komplexní výukové metody, které tyto metody dále rozšiřují o prvky organizačních forem.

Mezi základní formy vyučování podle Maňáka (2003) patří například:

- Frontální výuka
- Skupinová a kooperativní výuka
- Individuální a individualizovaná výuka, samostatná práce žáků
- Projektová výuka

Existují ještě další formy vyučování, ale o těch se zde nebudu zmiňovat, protože se v rozhovorech s učiteli neobjevily. Žádná z těchto forem nebývá využívaná samostatně, navzájem se prolínají a podporují. Jejich použití závisí na konkrétní probírané látce, cíli, ke kterému chce učitel hodinu dovést, učitelových a školních možnostech apod.

Frontální výuka

Jak uvádí Maňák (2003), frontální výuka je charakteristická tím, že učitel pracuje s celou třídou plánovitě, soustavně a v určeném čase, má při práci dominantní postavení (řídí, usměrňuje a kontroluje). Vyučovací hodina má předem určený dílčí cíl, odpovídající probíranému tématu. Hodina je koncipována tak, aby si žáci osvojili maximum poznatků, a učitel musí být v neustálém kontaktu se třídou. Pro výuku je typická kombinace více metod, např. výklad, řízený rozhovor, předvádění, individuální práce žáků a další. Tato forma vyučování umožňuje učiteli uplatnit individuální přístup k jednotlivým žákům, ovšem za předpokladu optimálního počtu žáků ve třídě.

Důležité je udržení pozornosti žáků, jednou z možností je rozdělení klasické vyučovací hodiny na několik menších sekvencí např. na 20minutové úseky, kdy se střídají různá témata. Naopak ve vyšších ročnících je možno vyučovací hodinu prodloužit. „Typický průběh vyučovací hodiny má následující podobu:

- zahájení (pozdrav, organizační záležitosti),
- opakování minulého učiva (kontrola domácích úkolů, resp. zkoušení),
- výklad nového učiva,
- procvičování a upevňování učiva,
- zadání domácí úlohy,
- ukončení.“ (Maňák, 2003, str. 134)

Skupinová a kooperativní výuka

Při skupinovém vyučování se třída rozdělí do několika skupin (3 až 5členných), které mezi sebou navzájem spolupracují při řešení společného problému. Žáci spolupracují nejenom sami mezi sebou, ale také s učitelem. Charakteristické rysy této výuky jsou:

- „spolupráce žáků při řešení obvykle náročnější úlohy nebo problému,
- dělba práce žáků při řešení úlohy, problému,
- sdílení názorů, zkušeností, prožitků ve skupině,
- prosociálnost, tj. vzájemná pomoc členů skupiny,
- odpovědnost jednotlivých žáků za výsledky společné práce.“ (Maňák, 2003, str. 138)

V praxi má skupinová výuka tři základní fáze:

1. Přípravná (formulace otázky, úkolu nebo problému): v této fázi učitel motivuje žáky, vytváří ve třídě skupiny, zadává jim úlohy a přesné instrukce.

2. Realizační (činnost žáků přímo ve skupině): učitel pozoruje a koordinuje činnost žáků, podporuje spolupráci a komunikaci ve skupinách.
3. Prezentační (výsledky práce skupin): v této fázi učitel vyzývá žáky k závěrečnému hodnocení práce a prezentaci výsledků skupinové práce.

Kooperativní učení je učení lišící se od individuálního tím, že je postaveno na spolupráci osob při řešení složitějších úloh. Řešitelé jsou vedeni k tomu, aby si dokázali rozdělit sociální role, naplánovali si celou činnost, rozdělili si dílčí úkoly, naučili se radit si, pomáhat, slaďovat úsilí, kontrolovat jeden druhého, řešit dílčí spory, spojovat dílčí výsledky do většího celku, hodnotit přínos jednotlivých členů atd. (Průcha, 2009, str. 133)

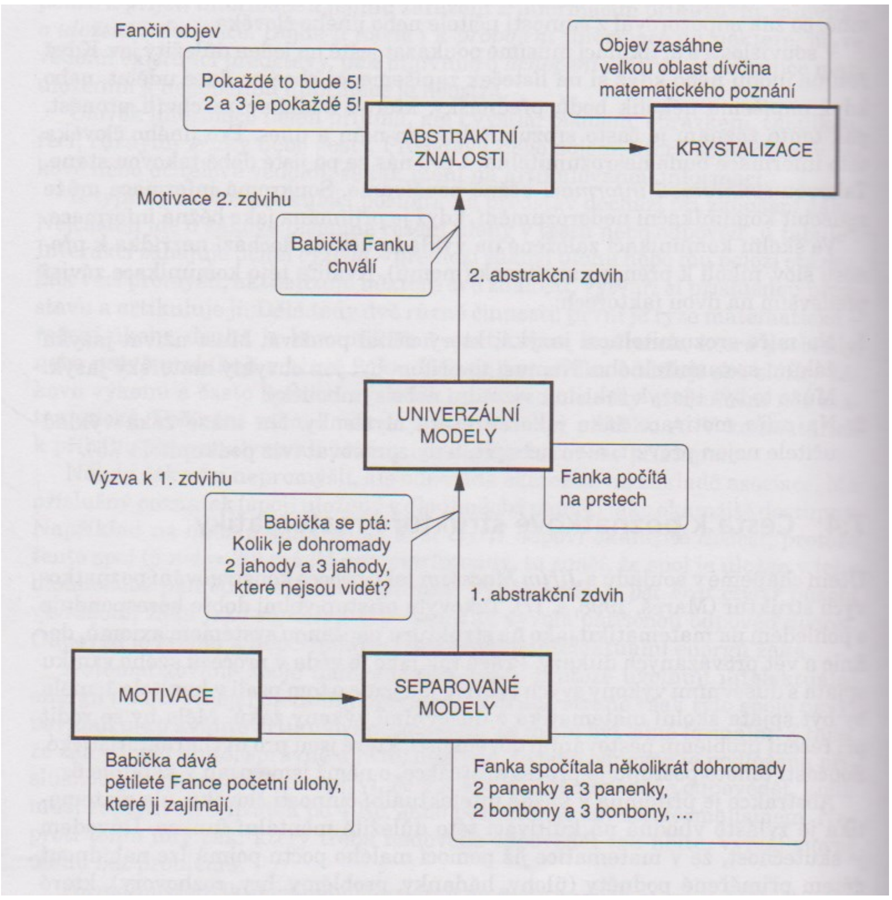
Individuální a individualizovaná výuka, samostatná práce žáků

Princip individuální a individualizované výuky spočívá v přizpůsobení se možnostem žáka, uplatňování individuálního přístupu k žákům a diferenciací cílů výuky i používaných postupů. Učitel při ní nechává prostor každému jednotlivci pro jeho aktivní myšlenkovou nebo motorickou činnost, kterou ovšem musí předem naplánovat a řídí ji (Maňák, 2003, str. 152). Individuální výuku lze chápat také jako výuku jednoho žáka jedním učitelem.

Ve všech formách výuky je základním prvkem aktivita žáka. „Aktivitou ve výchovně-vzdělávacím procesu se rozumí zvýšená, intenzivní, spontánní nebo uvědomělá činnost žáka, jejímž cílem je osvojit si příslušné vědomosti, dovednosti, návyky, postoje a způsoby chování.“ (Maňák, 2003, str. 153)

2.3 Žákův poznávací proces (podle M. Hejného)

Pro vyučování matematiky je důležité, aby bylo koncipováno v souladu s poznávacím procesem žáků. V českém prostředí je nejznámější teorií poznávacího procesu v matematice teorie generických modelů (ve starší terminologii M. Hejného univerzálních modelů). M. Hejný popisuje poznávací proces jako posloupnost několika činností. Na začátku celého procesu musí být motivace a dostatek konkrétních příkladů (modelů), po prozkoumání těchto příkladů žák dochází k obecnějším a abstraktnějším poznatkům. Celou činnost dobře znázorňuje obrázek 1 (Hejný, Kuřina, 2001, str. 104). V níže uvedeném popisu teorie generických modelů vycházím z knihy (Hejný, Kuřina, 2001).



Obr. 1: Poznávací proces (Hejný, Kuřina, 2001)

Motivace

Motivace může být dvojího druhu, a to buď vnitřní motivace, nebo vnější pobídky (incentivy). Tyto faktory spouštějí lidské jednání, aktivují ho, dodávají mu energii, zaměřují lidské jednání určitým směrem a udržují a řídí průběh celého procesu. Je to třecí plocha mezi extrémy: nemám a chtěl bych mít, neumím a chci umět, neznám a chci znát… Na každého žáka platí jiná forma motivace: vhodně položený dotaz, diskuse, zajímavá problematika spjatá s životní situací… Pokud dítě dostatečně nemotivujeme, obrátí svou pozornost jiným směrem. Pozor bychom měli dávat také na zábavnou formu motivace, žák poté může vyžadovat tento druh činnosti, tedy zábavu a učení odsouvá do pozadí. (Hejný, Kuřina, 2001, str. 105)

Význam motivace zdůrazňuje i J. A. Komenský „Přistupuj k učení jen tehdy, byla-li u žáka silně podnícena chuť k učení." (Komenský, 1946, str. 31) Schukajlow a kol. (2012) se ve svém článku zmiňují, že významné je zaujetí učivem. Možným způsobem motivace žáků je ukázka možnosti využití získaných vědomostí v reálném životě, například pro získání dobrého zaměstnání. Žáci by podle něj měli být motivováni kladně, záporných pocitů zažívají ve škole dostatek i bez záporné motivace. Důležitou roli zde hrají hodnoty, které žáci uznávají.

Separované modely

Tímto termínem se označují jednotlivé modely reprezentující obecný pojem. Pomáhají dítěti lépe pochopit různé pojmy, činnosti… Pro správné a dobré pochopení látky by měl žák mít dostatečný počet separovaných modelů, v opačném případě se jeho znalosti stávají formálními, protože se neopírají o konkrétní představy.

Univerzální modely

Tyto modely mají obecnější charakter než separované modely. Vytváří se abstrakčním zdvihem ze separovaných modelů. „Představuje etapu nalézání výsledků, nalézání společné podstaty komunity separovaných modelů i jejich vzájemných souvislostí. Typickým zástupcem univerzálního modelu může být algoritmus, vzorec, graf, obecný návod…“ (Hejný, Kuřina, 2001, str. 108)

Abstraktní znalosti

Každý abstraktní poznatek je výsledkem určitého poznávacího procesu, ale může se také v budoucnu stát univerzálním nebo separovaným modelem jiného poznávacího procesu v dalším vzdělávání. „Abstraktní poznatek se tvoří ve chvíli, kdy množství zkušeností jednotlivých žáků se přemění v nový pojem, tato chvíle je nazývána druhým abstrakčním zdvihem. Žák musí být dostatečně motivován pro objevování nových pojmů. Jazyk je jednou ze složek, které navádějí žáka na možnosti tvoření pojmů.“ (Hejný, Kuřina, 2001, str. 84)

Krystalizace

„Každý nový mentální krok, podílející se na vytváření nového abstraktního poznatku, se okamžitě stává součástí celé poznatkové struktury a vstupuje do krystalizace.“ (Hejný, Kuřina, 2001, str. 112) Krystalizace může probíhat také jako restrukturalizace, neboli rozšíření či dokonce změna části kognitivní struktury. „Školní matematika by měla být spjata s duševními výkony žáků, měla by se rodit při řešení problémů pěstováním, pro ni charakteristických dovedností. V poznávacím procesu žák obvykle nejdříve porozumí několika konkrétním příkladům, všímá si, co mají společného, a dochází tak k obecnějším a abstraktnějším poznatkům.“ (Hejný, Kuřina, 2001, str. 103)

Abstrakční zdvihy

Důležitou roli nejen v matematice, ale hlavně v poznávacím procesu žáka hrají objevy, náhlá uzření nové, často obecnější nebo abstraktně vyšší skutečnosti. Abstrakční zdvihy jsou někdy chápány také jako AHA-efekt, žák se snaží zodpovědět si otázku: „Jak to vlastně je?“ Hejný rozlišuje dva druhy objevů: zobecnění a abstrakci. První zdvih (zobecnění) nastává ve chvíli, kdy se z úrovně separovaných modelů žák dostává na úroveň univerzálních modelů; žák má dostatek separovaných modelů k tomu, aby mohl postoupit dál. Druhý zdvih, tedy abstrakce je, jak z obr. 1 vyplývá, přechod z univerzálního modelu na abstraktní znalost. Jak uvádí Hejný, záleží na úhlu pohledu, zda abstrakční zdvih, který probíhá u jednotlivých žáků, nazveme prvním zdvihem (zobecněním) nebo druhým zdvihem (abstrakcí). Poznávací proces je velice individuální, ale vždy musí probíhat pomocí dostatečného počtu separovaných modelů a minimálně jednoho abstrakčního zdvihu.

Vzhledem k zaměření práce na didaktické praktiky učitelů uvedu také zásady, které by měli podle Hejného a Kuřiny učitelé dodržovat, pokud chtějí učit v souladu s popsanou teorií:

- Pro docílení AHA-efektu je nutné intelektuální sebevědomí.
- Učitel by měl podporovat žáky v jejich zvídavosti a napětí z očekávání. Přílišná netrpělivost a snaha o ukrácení procesu poznání bývá většinou spíše kontraproduktivní.
- Dobrou podporou pro rozvoj objevitelských schopností dítěte je projevená radost z právě provedeného objevu. (Hejný, Kuřina, 2001, str. 115)

2.4 Formální a neformální znalost

Podle Mareše (1998, str. 21) mají žáci dva základní přístupy k učení:

- Povrchový, který se opírá především o pamětní učení, memorování, o rozšiřování poznatků bez větší snahy dobrat se jejich smyslu, stavějící často na mechanickém „biflování“… Poznatky jsou přitom formální, žáci nerozlišují podstatné od nepodstatného, uvádějí mnoho detailů a učivo brzy zapomínají.

- Hloubkový, rozumějící, který vychází ze snahy postihnout smysl učiva, porozumět mu, porozumět jevům i světu kolem sebe. Žáci přitom učivu rozumějí, pochopili jeho obsah i strukturu.

Neformální znalost je podle Hejného znalost, která se zakládá na dostatku separovaných a univerzálních modelů (Hejný, Kuřina, 2001, str. 119). Naopak formální znalost tuto oporu postrádá, zakládá se pouze na mechanickém naučení a zapamatování si látky. Jsou to dva extrémy, žákovské porozumění se zpravidla nachází mezi těmito extrémními body. V případě formalismu by se však i jeho náznaky měly co nejrychleji řešit. Pro budování neformální znalosti je nezbytné projít si určitou etapou, kdy si žák utvoří o látce konkrétní a až poté abstraktní představy.

Nemoc formalismu má tři stadia (Hejný, Kuřina, 2001, str. 127):

- V prvním stadiu si žák sám uvědomuje své nedostatky v porozumění látce a snaží se je odstranit. Může se tak dít s pomocí nebo bez pomoci učitele.
- Ve druhém stadiu už se žák rozhoduje, zda je ještě vhodné a účelné zjištěné nedostatky odstraňovat nebo zda se formalismu poddá a látku se nebude snažit pochopit. V tomto stadiu je pomoc učitele vítána, musí však být vhodně zvolena.
- Ve třetím stadiu žák ztratil veškeré naděje na nápravu škod, látku se již nesnaží nijak pochopit, pomoc od okolí odmítá a po učiteli vyžaduje poučky, které se naučí zpaměti a algoritmy pro zapamatování. Tento způsob učení mu připadá jako jediný možný.

Při léčbě formalismu je velice důležitý pohled učitele. Hejný uvádí, že učitel, který vnímá chybu jako prohřešek či jev naprosto vyloučený, vzbuzuje u žáků strach z přiznání vlastních chyb, a nabádá je tak nevědomky k tomu, aby se vyhýbali odhalení svých chyb a tím i případnému odhalení nemoci formalismu a jejímu včasnému zamezení. Někdy se však nejedná o formalismus, ale žák potřebuje pouze více času na pochopení látky. Důležité je, zda si dítě samo uvědomuje své chyby a zda má samo zájem o jejich nápravu: „Žák, který se sám pídí po tom, ‚jak to vlastně je‘, nemocí formalismu netrpí.“ (Hejný, Kuřina, 2001, str. 131)

Pokud se však o formalismus skutečně jedná, pak „nejlepší nápravou bývá doplnění separovaných a univerzálních modelů. Tomuto procesu se říká oživení dané znalosti.“ (Hejný, Kuřina, 2001, str. 137). Ovšem vůbec nejlepším způsobem, jak formalismu zamezit, je jeho prevence. Tíha prevence spočívá na učiteli, který musí věnovat dostatek času a pozornosti etapě budování modelů. „Učitelé by měli dávat větší důraz na konstruktivní přístup k vyučování matematice. Tento požadavek je náročný především na učitelovy znalosti poznávacího procesu, ale také schopnosti realizovat konstruktivní přístup k vyučování v praxi.“ (Hejný, Kuřina, 2001, str. 141)

2.5 Konstruktivistická výuka

Právě popsaná teorie univerzálních modelů může sloužit jako podklad pro koncipování vyučování založeného na konstruktivismu. „Konstruktivismus není jasně vymezenou teorií, ale skládá se z mnoha proudů a neustále se vyvíjí. Také dostává celou řadu přívlastků podle toho, jaké aspekty poznání a výuky akcentuje (radikální, sociální, didaktický apod.).“ (Vondrová, 2014, s. 9) Hejný a Kuřina mluví o tzv. didaktickém konstruktivismu a přinášejí desatero jeho zásad (Hejný, Kuřina, 2001, s. 160–161):

1. Aktivita: matematika je specifickou lidskou aktivitou, nikoli jen její výsledek formulovaný do souboru definic, vět a důkazů.
2. Řešení úloh: podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování.
3. Konstrukce poznatků: poznatky jsou nepřenosné, přenosné jsou pouze informace; poznatky vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Zkušenosti: tvorba poznatků se opírá o informace a zkušenosti poznávajícího.
5. Podnětné prostředí: základem matematického vzdělávání je prostředí podněcující tvořivost, předpokladem k tomu je tvořivý učitel, dostatek podnětů a příznivé sociální klima třídy.
6. Interakce: k rozvoji konstrukce poznatků přispívá i sociální interakce ve třídě.
7. Reprezentace a strukturování: významné je pěstování nejrůznějších druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.
8. Komunikace: důležitá je komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky, ty se musí pěstovat systematicky.

9. Vzdělávací proces: mělo by být hodnoceno porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla a aplikace matematiky.
10. Formální poznání: vyučování, které má charakter předávání informací nebo dává pouze návody, jak postupovat, vede k pseudopoznání, tedy k formálnímu poznání.

Konstruktivistické pojetí vyučování matematice, které klade důraz na duševní rozvoj matematického světa každého žáka a na porozumění matematice, nazývá Vondrová podnětná výuka: Pro podnětné vyučování matematice je klíčový důraz na vlastní aktivitu žáka. V mysli žáka by v ideálním případě měl postupně vznikat svět matematiky, který pro něj bude mít smysl a přitom bude v souladu s matematikou, jak ji vnímá odborná veřejnost. To klade velké nároky na učitele, který nepředkládá hotové poznatky, které má žák reprodukovat, ale ukazuje mu cesty, kterými se on sám k takovému poznání může dopracovat. (Vondrová, 2014, s. 10)

Vondrová (2014, s. 11–14) formuluje 7 principů podnětné výuky z hlediska učitele a jeho činnosti:

- Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
- Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy).
- Učitel podporuje žákův aktivní přístup k získávání poznatků.
- Učitel rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení v matematice.
- Učitel nahlíží na chybu žáka jako na vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
- Učitel iniciuje a moderuje diskuse se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů.
- Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění.

2.6 Činnostní výuka

Činnostně orientovaná výuka je takové pojetí výuky, které umožňuje žákům činnostní přístup k vyučovacím předmětům a k učivu. Východisko tvoří materiální činnosti žáků, jež překonávají odtržení školy od reálného života. Její znaky jsou aktivizace smyslů, odpovědnost a metodická kompetence žáků, orientace na konkrétní produkty, kooperativní jednání a zaměření na život. (Maňák, 2003, str. 91)

Připravenost žáka i činnosti je často považována za dovednost. Znaky, jimiž se dovednost vyznačuje, jsou (Maňák, 2003, str. 93):

- Vyladěnost žáka na řešení situací, porozumění situacím, žákova disponovanost tyto situace zvládat.
- Tvořivá aktivita žáka.
- Řešení situací, které se rodí z činností žáka.
- Rekonstrukce již zvládnutých činností a zkušeností pří řešení nových situací.

3 Metodologie – výzkumné otázky a analýza dat

V práci řeším následující otázky:

1. Jaké didaktické praktiky využívají podle svých slov vybraní učitelé matematiky při výuce následujících témat: úměrností, lineárních rovnic, dělitelnosti, procent, souměrnosti a Pythagorovy věty?
2. Lze najít jejich odraz v některých učebnicích matematiky, resp. jsou tyto praktiky v souladu s praktikami, k nimž vedou učebnice a další odborná literatura?
3. Jaké obtíže zmiňují učitelé v souvislosti se zkoumanými tématy?

Jak jsem již uvedla, navazuji úzce na výzkum provedený v rámci projektu GAČR, jehož metodologii jsem popsala již ve druhé kapitole. V této části se tedy zaměřím zejména na analýzu dat.

Pro potřeby své diplomové práce jsem získala již zpracované rozhovory s učiteli (provedené ve zmíněném projektu), které byly přepsány do protokolů, a zápisy z náslechů v hodinách některých učitelů. Pracovala jsem s rozhovory s 34 učiteli matematiky (9 mužů, 25 žen). Čtyři učitelé učilo na nižším gymnáziu, 2 učilo na vyšším gymnáziu a zbylých 28 na základní škole. Třináct učitelů působilo v Praze, 21 učitelů učilo v menších městech nebo na vesnicích. Délka jejich praxe byla od 9 do 40 let.

Nejdříve jsem si stanovila, která témata budu ve výpovědích učitelů sledovat. Jak je uvedeno výše, jedná se o ta, která sice nebyla vybrána učiteli a řešiteli projektu GAČR jako kritická, ale jsou v rámci školské matematiky významná. Kromě toho mělo jít o témata, o nichž se učitelé v rozhovorech častěji zmiňovali. Těmto nárokům vyhovovala témata: úměrnosti, lineární rovnice, dělitelnost, procenta, souměrnost a Pythagorova věta.

Analýza rozhovorů, kterou jsem prováděla ve své diplomové práci, vycházela především z příslušného tématu. Nejdříve jsem vybrala rozhovory, které se týkaly matematiky 2. stupně. V další fázi jsem z rozhovorů s učiteli z druhého stupně základních škol a gymnázií vybírala pouze ty, které se věnovaly výše uvedeným tématům. Konkrétně o problematice přímé a nepřímé úměrnosti hovořilo 10 učitelů, o lineárních rovnicích 14 učitelů, o dělitelnosti se zmínilo 7 učitelů, o procentech

10 učitelů, souměrnosti v rozhovorech uvedlo 7 učitelů a Pythagorovu větu uvedli 4 učitelé.

V první fázi kódování jsem vybírala a kódovala pouze části protokolů týkajících se vybraných témat, přičemž jsem rozlišovala zhruba tři kategorie: zda se učitel vyjadřoval k charakteru tématu, k obtížím žáků v něm či k didaktickým praktikám, které učitel používá pro výuku tématu. Tyto tři kategorie jsem pak sledovala napříč všemi rozhovory. Druhá a třetí kategorie vztažená k jednotlivým tématům je jádrem prezentace výsledků v další kapitole.

Kromě analýz rozhovorů jsem také prováděla rozbor tří řad učebnic matematiky pro 2. stupeň s cílem zjistit, jaké didaktické praktiky podporují u mnou zkoumaných témat a zda je v nich možné najít odraz toho, co o svých didaktických přístupech říkají učitelé. Učebnice od autorů Trejbal a Šarounová mi byly doporučeny od kolegyně, která s nimi pracovala a považovala je za dobré. Já jsem přidala ještě učebnice od autorů Odvárko a Kadleček, se kterými jsem se setkala už jako žačka i v průběhu dalšího studia a které jsou v současné době pravděpodobně nejrozšířenější. Tyto řady obsahují pro každý ročník několik učebnic. Například učebnice od autora Trejbal má 2 knihy pro ročník, Odvárko a Kadleček 3 knihy, přičemž 1 kniha je vždy věnována speciálně geometrii.

Rozhovory s některými učiteli byly již z hlediska mnou vybraných témat zpracovány ve dvou diplomových pracích. Problematice lineárních rovnice se ve své diplomové práci věnovala A. Nováková, která vedla rozhovory s 5 učiteli na toto téma. D. Reichmann se ve své diplomové práce věnoval tématu přímá a nepřímá úměrnost. Rozhovory vedl s jinými třemi učiteli. Ve své práci jsem výše zmíněné rozhovory analyzovala i z jiných hledisek než lineární rovnice, resp. úměrnosti, a kromě toho je doplnila rozhovory s dalšími učiteli, které již součástí výše zmíněných diplomových prací nejsou.

4 Výuka vybraných témat a obtíže žáků očima učitelů

V této kapitole se budu věnovat didaktickým přístupům, která učitelé uváděli k těm tématům, která nebyla autory již zmíněné knihy (Rendl, Vondrová a kol., 2013) vybrána jako kritická (tedy se jim při analýze rozhovorů nevěnovali), ale která jsou v matematice základní školy významná (konkrétně úměrnosti, lineární rovnice, dělitelnost, procenta, souměrnost, Pythagorova věta). Mnoho učitelů se v rozhovorech zmiňuje především o problémech, které žáci v daném problému mají, ale jen někdy uvádějí, jakým způsobem se je snaží řešit. Právě tyto zmínky budou předmětem této kapitoly.

Nejdříve se podívám na kurikulární dokumenty z hlediska témat, která jsou v centru mé pozornosti. Podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf) mají žáci porozumět základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. V průběhu výuky by žáci měli být schopni bez problémů používat některé pojmy, algoritmy, terminologii a symboliku.

Vzdělávací obor Matematika a její aplikace se v rámcovém vzdělávacím programu dělí do čtyř okruhů. První okruh se nazývá Číslo a proměnná a žáci si v něm osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (propojení s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací. Ve své práci se z okruhu Číslo a proměnná věnuji dělitelnosti, procentům a lineárním rovnicím. Podle RVP by měl žák po probrání látky dokázat modelovat a řešit situaci s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel, užívat různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek versus část, řešit aplikační úlohy na procenta, matematizovat jednoduché reálné situace s využitím proměnných, formulovat a řešit reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav a analyzovat a řešit jednoduché problémy (v oboru celých a racionálních čísel).

Z okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty se mé práce týká přímá a nepřímá úměrnost. Žáci se seznamují s různými typy změn a závislostí z reálného života a učí se je reprezentovat a analyzovat pomocí tabulek, diagramů a grafů. Zkoumání závislostí pomáhá žákům lépe pochopit pojem funkce. Výstupem tohoto okruhu by měla být schopnost žáků rozpoznat přímou a nepřímou úměrnost, matematizovat jednoduché reálné situace pomocí funkčních vztahů či práce s daty a jejich soubory.

Posledním okruhem, který se mé práce týká, je Geometrie v rovině a v prostoru. V něm žáci vyhledávají podobnosti a odlišnosti útvarů kolem nás, charakterizují je a třídí, odhadují a vypočítávají jejich úhly, obsahy a obvody resp. objemy a povrchy, rozpoznávají charakteristiky různých rovinných či prostorových útvarů a využívají je k řešení konstrukčních úloh. Já se budu zabývat Pythagorovou větu a souměrností.

Posledním okruhem vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, ty by měly prolínat a spojovat všechny ostatní okruhy.

Nyní se budu věnovat výsledkům analýzy rozhovorů podle jednotlivých témat.

Poznámka: Kód U32 znamená kód učitele, z jehož rozhovoru je citát převzat. Citáty zde uvádím v té podobě, ve které se objevují v přepisech rozhovorů (tedy ponechávám hovorovou češtinu, nevhodný pořádek slov či zbytečné opakování slov, nepřesné vyjadřování apod.).

4.1 Přímá a nepřímá úměrnost

Nejprve se zaměřím na problematiku přímé a nepřímé úměrnosti. Této látce předchází výuka poměru, který žáci využívají i při výpočtu úměrností (tak je tomu například v učebnicích pro 7. ročník od autorů Odvárko a Kadleček.) Jak naznačuje následující úryvek, je možné výuku provádět několika způsoby s ohledem na zdatnost žáků, hodinovou dotaci předmětu a další. Učitelka uvádí, že dříve kladla na žáky větší nároky tím, že do výuky přímé a nepřímé úměrnosti zapojila také rovnice se zlomky, které se probírají až v následujícím ročníku. Dnes od tohoto výkladu upustila, bohužel již neuvádí důvod svého rozhodnutí.

U32: Bere se tady poměr přímá nepřímá úměrnost, tady většinou ty děti si dokážou řict, jestli je to přímá, nepřímá úměrnost, i tu úměru si dokážou zapsat *a v téhle době, kdy se to bere, si zapamatuju, jak se to má dělat. To, že se tady ukáže i měřítko, který se pak znovu bere při podobnosti v osmičce, tak oni si to pak s tou úměrou už vzpomenou, že je to vlastně to samý, jo, a znovu musíte. Dřív v těch letech dřív jsem třeba učila, už v té přímý, nepřímý úměře to řešila přes trojčlenku normálně jako rovnici, že to psali jako zlomky. Teďka to už nedělám, jedu doopravdy jenom v řádku tou úměrou a ty zlomky jakoby tu rovnici se zlomkem až v té osmičce, kdy se ty rovnice jako takový berou, jo.*

Žáci podle učitelů nemají větší problémy s rozpoznáváním přímé a nepřímé úměrnosti. Většina učitelů se shoduje v tom, že slovní úlohy na přímou a nepřímou úměrnost nečiní žákům obtíže, najdou se však tací, kteří tvrdí opak. Všeobecně známou je také učiteli uváděná informace o špatné čtenářské gramotnosti českých žáků. Pokud jsou ve slovní úloze pouze ty informace, které žáci nutně potřebují k výpočtu, pak je vše v pořádku, v opačném případě učitelé potvrzují, že čtení s porozuměním není příliš silnou stránkou českých žáků. Žáci mají problémy od potřebného oddělit nepotřebné. Jak říká učitel v druhém úryvku, žáci si musí uvědomit, kterou informaci budou potřebovat k výpočtu a co je na čem závislé. K takovému rozboru úlohy je potřeba úlohu si přečíst několikrát a na určování závislostí příliš nespěchat.

U40: Přímá a nepřímá úměrnost, mm, to je docela dobrá látka, oni poznávají, že jo, z textu, celkem snadno, co zařadit do přímý, do nepřímý úměrnosti, když se něco zvětšuje, ta jedna veličina, tak ta druhá se taky zvětšuje tolikrát a podobně, tak to oni poznají.

U57: To mě vždycky vytočí, když hledají přímou a nepřímou ve všem a za každou cenu ji z toho musí vydolovat. Já totiž myslím, že tam je také velký problém, najít vůbec ty dvě závislé veličiny. Já to tam opakovaně po nich chci. Vždycky mi řekni, co tam je na čem závislé, a pak až můžeme jít dál. I takové ty informace navíc, ale nesouvisející s vlastním počítáním, na to se také často nechají nachytat. To asi taky můžu říct, že je něco obecnějšího.

Někteří učitelé zdůrazňují nutnost využití také znalostí žáků z prvního stupně, kdy předpokládají použití „selského rozumu“ a početních znalostí z dřívějška pro vyřešení slovních úloh na úměrnosti. Na tyto znalosti poté navazují dalším výkladem. Někteří učitelé ukáží několik způsobů řešení úlohy a nechají na žácích, aby si sami vybrali způsob, který jim bude nejlépe vyhovovat. Učitelka U47 popisuje, jak žáci sami dospívají k tomu, co je úměrnost a jak se řeší úlohy. Vyjadřuje se také k otázce znalostí definic, které podle ní nejsou na základní škole tak důležité jako používání odborného jazyka. Pokud žák učivu důkladně porozumí, chápe jej do hloubky, pak je schopný jednoduchou definici vyslovit sám, byť ne zcela matematicky přesně; můžeme říci, že má neformální znalost látky. Učitelka se snaží využívat podnětnou výuku, ale upozorňuje na to, že to jde jen někdy.

U47: Taková typická úloha na úměrnost je: spotřeba auta je x litrů na 100 km, kolik km auto ujede, když má v nádrži x litrů? Zeptám se dětí, jak by tu úlohu řešily. Ony umí nějaké postupy už z prvního stupně, aniž by věděly, co je trojčlenka a tak. Ony to vypočítají a odůvodní a pak si to znovu ukážeme a vysvětlíme na základě poměru. Takže já to vykládám, ale formou vhodných otázek, abych je dovedla k tomu postupu. A pak to dáme společně dohromady.

Vždycky se snažím, u jakékoliv látky, jim to vysvětlit formou odvození, ne jim to předložit jako holý fakt. Dávám jim různé návodné otázky, aby se snažily na to přijít samy.

Definování přijde až na závěr. Ale já si na definice tolik nepotrpím. Aby [děti] používaly odborný jazyk, to ano, ale aby se učily definice, to bych neřekla, že je na základní škole důležité. Dítě, které rozumí věci, je schopno nějakou definici, která má hlavu a patu, vymyslet samo.

Takže definování přijde v průběhu hodiny, ne až na závěr. Ale ne vždy to tak jde. Někdy třeba vzoreček musím dětem předložit jako holý fakt – tak to prostě je a kdo mi nevěří... Někdy se ale nechá odvodit, třeba u těchto geometrických tvarů nebo i u některých algebraických výrazů.

Většina učitelů se shoduje v tom, že žákům nabízí několik variant řešení úlohy. Pokud si žák vymyslí vlastní způsob řešení, který vede ke správnému výsledku, pak učitelé nemají problémy s tím, aby řešení přijali. Ovšem najdou se i učitelé, kteří preferují jednoduché a jasné řešení. Tito učitelé ukáží pouze jeden způsob výpočtu, který vždy vede ke správnému výsledku, a žák se jím má řídit. Podle mého názoru však tento způsob výuky nepodporuje žákův rozvoj, nemotivuje ho k dalšímu objevování a většinou vede k rychlému zapomínání probrané látky.

Např. Reichmann (2013) ve své diplomové práci z náslechů na hodinách zjistil, že učitelka U57 zmiňuje dva způsoby zápisu a následného řešení úlohy na přímou či nepřímou úměrnost, kdy tři veličiny znám a čtvrtou máme vypočítat. Za prvé přes zápis úměry$a/b = c/d; a.d = c.b$ a za druhé (ten následně preferuje) přímo přes vyjádření neznámé$a = b.c/d$.

Existuje několik způsobů, jak úlohy na přímou a nepřímou úměrnost řešit. Učitelka U47 se zmiňuje o sestrojování grafu, který je podle jejího názoru pěkně přehledný, a žáci se v něm lépe zorientují. Avšak, jak tvrdí učitelka a posléze i žáci, ne vždy se mohou na grafické řešení úlohy naprosto spolehnout. Snaží se ale, aby žáci pochopili nutnost grafy sestrojovat a chápat.

U47: Vymyslíte nějakou úlohu, třeba: počet prodaných kilogramů jablek a jejich celková cena. Jedno, dvě, tři kila a cena. Z toho pak vymyslíte nebo sestrojíte, graf. Proč se sestrojuje graf? Z toho grafu můžete pěkně vyčíst cenu i za další nebo jiné množství jablek. Ale zase na druhou stranu, i děti samy přijdou na to, že to grafické řešení je nepřesné. Takže jim spíš říkám – a děti samy vám to potvrdí – že se v praxi setkávají se spoustou grafů a diagramů, tak aby se uměly v tom vyznat a orientovat a proč to je. Speciálně tohle učivo je tedy pro ně náročné.

V průběhu výuky přímé a nepřímé úměrnosti se probírají také grafy, jsou to jedny z prvních grafů funkcí, se kterými se žáci setkávají. Většinou ovšem ani netuší, že to jsou grafy funkcí. Tento poznatek jim bude odhalen až v následujících ročnících, kde se také naučí grafy správně pojmenovat. Učitelka U52 upozorňuje na zajímavý postup, kdy nechává žáky, aby si vzniklý graf sami pojmenovali, a až posléze jim řekne správný název. Podle jejího názoru si tak žáci snáze uvědomí, k čemu tento graf patří.

U56: Pak také bylo moc hezký, my když jsme zanášeli nepřímou úměrnost do grafu a vyšly tam ty body do nějakého ošklivého tvaru, přímka to nebyla, oni: „Co to tedy je?“. Já: „Tak jak byste si to pojmenovali?“ A oni to fakt pojmenovali a přijali to jako skluzavku. Což mi přišlo hezký. Já jsem jim pak tedy řekla o hyperbole … a kdykoliv jsme narazili na graf nepřímé úměrnosti, pak nám to i pomohlo

Každý učitel by si měl určit cíl, ke kterému chce své žáky dovést, znalosti, bez kterých se podle něj žák v dalším studiu a případně i v životě neobejde. Je velice zajímavé sledovat různý přístup k výuce přímé a nepřímé úměrnosti u různých učitelů.

Někteří připravují své žáky na látku ve vyšších ročnících, a proto zacházejí více do detailů. Jiní se spokojí se základními znalostmi. Tato diferenciace souvisí také se školou, na které učitel působí. Například na víceletých gymnáziích se učitelé více zaměřují na hlubší znalosti, protože je žáci budou potřebovat v dalším studiu, a učitelé si tak usnadní práci v následujících ročnících. Na základních školách naopak budou učitelé spokojeni se základními znalostmi, protože vědí, že mezi žáky jsou i tací, kteří na hlubší náhled do látky nemají dostatek schopností, píle, trpělivosti či motivace. Následující úryvky z rozhovorů reprezentují tyto dva rozdílné pohledy na hloubku probrané látky. Učitel U55 vyučuje na gymnáziu, a proto požaduje po svých žácích širší spektrum znalostí než učitelka U56, která vyučuje na základní škole.

U55: ...se soustředím na ty pojmy, které by studenti měli vědět. Klesající, rostoucí na čem a tyhle věci. Ta nepřímá úměrnost je krásným příkladem, že se nemůže říct, že je klesající, když je klesající na těch množinách. Spíš takhle k tomu přistupuji, aby našli nějaké ty logické vztahy. Spíš jdu takhle do hloubky, aby si uvědomili, co říkají.

U56: Já jakoby dost často končím u toho, aby všichni zvládali tu úvahu přes tu jedničku. Hodně pracuji s tou tabulkou, do ní často cpu tu variantu, když tam ta jednička není, tak ať si ji tam spočítají. Jinak dál přijdou grafy té přímé a nepřímé. No, já jsem nad tím uvažovala a pro ně je ta tabulka to základní, strašně se podle toho orientují. Jsem vypozorovala, že ta tabulka je pro ně jako dobrá. Takže po nich budu chtít, aby z té tabulky šli do grafu. Ale nebudu po nich chtít rovnici. To znamená tabulku, graf a tím končím.

Ve většině učebnic předchází přímá úměrnost nepřímé. V učebnicích je věnováno stejně prostoru jak přímé, tak nepřímé úměrnosti, což je podle některých učitelů špatně. Nepřímá úměrnost je totiž podle nich mnohem těžší na pochopení než přímá. Jak říká učitel U55, problém u nepřímé úměrnosti mohou způsobovat třeba záporná čísla, kdy přestává platit pravidlo: kolikrát se veličina zvětší, tolikrát se druhá zmenší a naopak. V průběhu výuky mají totiž podle učitelky U56 dost práce se zapamatováním pravidla a na výjimky už nezbývá čas. Dále Reichmann (2013) ve své diplomové práci uvádí úryvek rozhovoru, kde učitelka U56 upozorňuje na přílišnou „hustotu“ látky, v učebnicích je podle ní moc informací na malém prostoru.

U55: Když už si studenti nepřímou úměrnost pamatují, tak si to pamatují na základě toho: že se jedna veličina, kolikrát se zvětší, tolikrát se zmenší druhá, což bohužel není pravda. Protože to platí víceméně pro kladná čísla, no a když budu násobit číslem záporným, tak zas to bude jinak.

U56: Je ošizená. Určitě, určitě. A to mi přijde škoda, protože ta nepřímá úměrnost je mnohem složitější, že jo. To je prostě, pro ně vstřebat jenom ten moment „čím víc dělníků, tím míň toho času“.

Někteří žáci ovšem podle učitelů nechtějí důkladně pochopit nepřímou úměrnost, stačilo by jim pouze dostat univerzální recept na řešení. Je to vidět i v porovnání učebnic s reálnou výukou. V učebnicích bývá definice ve tvaru: Kolikrát se zvětší první veličina, tolikrát se zmenší druhá veličina. A učitelé mnohdy v hodinách z této definice sleví na pouhé: čím víc, tím míň a naopak. Všimněme si, že učitelé se v rozhovoru někdy vyjadřují nepřesně v tom smyslu, že říkají pouze „čím víc, tím víc“ místo „kolikrát víc, tolikrát víc“. Samozřejmě nemůžeme s jistotou tvrdit, že se takto nepřesně vyjadřují i při výuce.

Pokud by byli žáci vedeni k důkladnějšímu pochopení a rozboru jednotlivých úloh, pak by podle učitelky U56 byla šance na zlepšení pochopení přímé a nepřímé úměrnosti a vlastně i celé matematiky (Reichmann, 2013, s. 108).

U56: Já si myslím, že největší zádrhel je, že chtějí přijmout zjednodušenou formu, jak to dělat, a my jim to dost často připustíme, např. tím, že řekneme: „Napište si čím víc, tím míň a můžete to řešit trojčlenkou.“ Jakmile to připustíme, tak vlastně neklademe důraz na to, uvažujte, dělejte pokaždé tu myšlenkovou cestu a jenom si to vlastně v rychlosti udělejte. Oni jakoby nemají vyvolaný proces toho myšlení, mi přijde.

Trend moderní výuky spočívá v propojování předmětů mezi sebou formou mezipředmětových vztahů. Důležité je propojovat nejenom předměty mezi sebou, ale také školní předměty s reálným životem za zdmi školní budovy. Následující úryvek z rozhovorů potvrzuje, že podle názoru učitele žáci nejsou schopni přenést představu reálného života do úlohy v matematice. Nevidí nelogičnost špatného výsledku, protože z hlediska početního jim výpočet dává smysl, a zda by byl výsledek možný i v každodenním životě, už dále neřeší. Jak učitelka U56 říká, žáci chtějí konkrétní návod, jak mají úlohu řešit, nechtějí se zabývat jejím hlubším pochopením.

U56: I když je to ze života, tak oni si to v tom životě, podle mě, nepředstavují. Já si myslím, že problém je to, když to trvá 2 hodiny, tak to je při 4 kilometrech v hodině, když to trvá 4 hodiny, tak jeden přístup je, že se nezastaví a neřeknou si – může to být jinak než dvojnásobek, takže napíšou 8. A druhý případ je, že třeba uvažují a říkají si, je to tedy nepřímá, no a jak já to tedy zjistím? Teďka vynechají ale nějakou tu zkušenost životní a chtějí na to nasadit nějaký systém. A my jsme včera k tomu došli, že oni v podstatě po mně chtěli, abych jim řekla, že to mám dělit. K tomu mě v podstatě dohnali a skončili jsme tím, že to vezmu, kolik těch kilometrů celkem je, a musím to vydělit.

Následující citát ukazuje, že ne vždy je nezbytně důležité lpět na správných definicích a formálních zápisech. Hlavním cílem každého učitele by mělo být, aby žák chápal podstatu vyučované látky a byl schopný ji nejenom využívat, ale také na ni dále navazovat novými poznatky. K řešení úlohy není třeba znát konvenční formu zápisu, ale způsob řešení.

U50: I dnes to bylo patrno, že jsem to, že je to nepřímá úměra, přešel, že to není podstatný, že podstatnější je, že jsou tady nějaké údaje a nějak se mění, a myslím, že pokud to definitivní utřídění přijde až u funkcí v devítce, to nevadí. Ale je jasné, že tenhle údaj se nezmění… a zase: jestli se jmenuje koeficient, není asi tak podstatný, jestli děti napíší k krát x a řeknou, no, to je to číslo, které se nemění, a zapomenou, že se mu říká koeficient, ale budou právě schopni řešit úlohy. Letos poprvé jsem míchal (úměry) tak, že se s některými úlohami na nepřímou už setkali dříve, namíchal jsem je. To, v čem jsem se hodně posunul, je, že již nelpím na tom, jak vypadají ty 3 tečky v tom zápise, to je to stresující, tj. nevím, jak udělat zápis, tak vlastně nemohu začít.

Shrnutí

V rozhovorech, ve kterých se učitelé zmiňují o přímé a nepřímé úměrnosti, převažují poznámky typu:

- nepřímá úměrnost je složitější než přímá, v učebnicích je jim ovšem věnováno stejně pozornosti
- s úměrnostmi souvisí i první grafy, se kterými se žáci setkávají
- lepší než grafické je řešení početní (je přesnější)

- učebnice i učitelé nabízejí několik variant řešení
- kapitola úměrnosti tvoří základ pro další látku – rovnice...
- čtenářská gramotnost žáků je špatná, žáci projevují obtíže při výběru důležitých informací z textu

Někteří učitelé se zmiňovali o přehnaném množství látky, kterou po žácích v 7. ročníku požadují učebnice. Je ale pouze na učiteli, jakou učebnici a posléze i výukovou strategii zvolí. Jak se sami učitelé zmiňují, na úměrnosti se dále navazuje ve vyšších ročnících, proto je možné v 7. ročníku uvést pouze základy a k látce se dále spirálovitě vracet v dalších letech. Žáci si tak své znalosti více upevní.

Zaujala mě poznámka několika učitelů, kteří se zmiňovali o probírání grafů. Pro žáky v tomto ročníku bývá obtížné si zapamatovat všechny matematické definice, poučky, názvy grafů a podobně. Proto se někteří učitelé rozhodli znalosti upevňovat postupně a informaci, že se graf nepřímé úměrnosti jmenuje hyperbola, odložili až na později. Učitelka U56 dokonce nechává žáky, aby si graf sami pojmenovali, a až poté jim jejich znalosti upřesní. Vychází z předpokladu, že žáci si graf pojmenují nějakým názvem, který znají z běžného života, a tak se z abstraktního objektu stává věc konkrétní a známá. Opět si myslím, že je to pěkný způsob, jak žáky motivovat.

Učitelé se většinou shodují v názoru, že v učebnicích by mělo být co nejvíce příkladů z reálného života, aby si žáci dokázali problematiku lépe představit, a uvědomit si tak logiku svého výpočtu. Měla jsem možnost prohlédnout si učebnice tří řad (autorů Trejbal, Šarounová a kol., Odvárko a Kadleček) a podle mého názoru propojení reálného světa se světem matematiky nejlépe vystihli autoři Odvárko a Kadleček. Tito autoři navíc zvolili přehlednou a hravou úpravu učebnice, což by mohlo žáky zaujmout. Naproti tomu Trejbal se nevěnuje příliš grafické úpravě učebnice a spíše upřednostňuje textovou, výkladovou formu předání znalostí; tato učebnice není dle mého názoru pro žáky příliš atraktivní právě z hlediska úspory místa na úkor názornosti. Ani v této učebnici ale nenalezneme kapitolu, kterou jako jediní vložili do své učebnice autoři Šarounová a kol., a to kapitolu s názvem Jiné závislosti. O důležitosti rozlišování přímé, nepřímé a jiné závislosti se také zmiňují učitelé v rozhovorech. Učitel U57 dokonce přímo tvrdí: *To mě vždycky vytočí, když hledají přímou a nepřímou ve všem a za každou cenu ji z toho musí vydolovat.*

V učebnici od autorů Odvárko a Kadleček začíná výklad přímou úměrností, která je vysvětlována větou „Kolikrát více, tolikrát více.“ a „Kolikrát méně, tolikrát méně.“ Nepřímé úměrnosti, která následuje za kapitolou věnovanou trojčlence, už autoři nevěnují tolik pozornosti. Tematický celek uzavírá pravoúhlá soustava souřadnic a grafy přímé i nepřímé úměrnosti.

Šarounová a kol. začínají celou kapitolu vysvětlením pojmu poměr a měřítko. Dále se uvádí poučka „kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota jedné veličiny, tolikrát se zvětší (zmenší) i hodnota druhé veličiny“; u nepřímé úměrnosti je tato poučka jen pozměněna, a sice „kolikrát se zvětší (zmenší) jedna veličina, tolikrát se zmenší (zvětší) druhá veličina“. Přímou i nepřímou úměrnost vysvětlují autoři pomocí již probraného poměru.

V učebnici od J. Trejbala jsou uvedeny dvě poučky. První koresponduje s učebnicí od Šarounové a kol., pouze místo veličiny se zde používá proměnná x a proměnná y. Druhá poučka pracuje s poměrem: „V jakém poměru se zvětší (zmenší) hodnota proměnné x, v takovém poměru se zvětší (zmenší) hodnota proměnné y.“ Výklad přímé úměrnosti provádí autor pomocí soustavy souřadnic a poměru. Stejné dvě poučky jsou uvedeny i u nepřímé úměrnosti, kde autor provádí výklad opět pomocí soustavy souřadnic a poměru. Na přímou a nepřímou úměrnost navazuje trojčlenkou.

4.2 Lineární rovnice

Látku s názvem lineární rovnice zařazuje většina autorů učebnic i učitelů do 8. ročníku základní školy. Jak uvádějí Šarounová a kol., rovnice je zápis rovnosti dvou výrazů, kde hledáme neznámé číslo tak, aby po dosazení neznámého čísla za proměnnou do levé i pravé strany rovnice se tyto strany rovnaly jedna druhé, a rovnost tedy platila. Bez dobré znalosti úpravy výrazů budou mít žáci v kapitole týkající se lineárních rovnic problémy, které se mohou dále prohlubovat v následujícím učivu (složitější rovnice a nerovnice).

U52: Výrazy vlastně, lineární rovnice, to je spojitost s výrazy, takže kdo se nechytil u výrazů, nemá šanci u rovnic.

Důležitou roli v řešení lineárních i jiných rovnic a nerovnic hrají ekvivalentní úpravy. Ekvivalentní úprava rovnic je taková úprava, při které rovnice původní i rovnice upravená mají stejné kořeny. Žádný kořen úpravou neubyl ani nepřibyl (Šarounová a kol., 1998, str. 140) Někteří učitelé se však zmínili o tom, že pochopení ekvivalentních úprav je pro žáky složité, a navrhovali vyučovat úpravu rovnic pomocí „převádění“ čísel a neznámé mezi stranami rovnice. K této úpravě se žáci postupem času stejně dopracují, a podle názorů některých učitelů by toto pojetí úpravy rovnic, kdy všechna čísla převedu na jednu stranu rovnice a všechny neznámé na druhou stranu rovnice, bylo lépe pochopitelné. Tento názor podle učitelů podporuje také fakt, že výklad ekvivalentních úprav rovnice se provádí na modelu vah, se kterými se v dnešním reálném světě žáci příliš často nesetkají.

U40: Pak jsou tam rovnice, nerovnice, u těch rovnic mám celkem pocit, že (váhá)… Takhle, tam je problém vysvětlit ty ekvivalentní úpravy, tam jsou, že jo, tam se to vysvětluje na základě přirovnání k vahám, levá pravá strana, misky vah, takže snaha mít za každou cenu tu rovnováhu, takže když přidám na jednu stranu, tak musím přidat na druhou stranu. Tam teda jsem narazila, když se snažím ty úpravy vysvětlovat, že jako když přičítám číslo na jedné straně, tak přičítám i na druhý straně, tak ono potom vlastně ve finále ty děti učíme zjednodušení těch úprav, (váhá) že ono se to projeví to přičtení stejného čísla tak, že mi to číslo zmizí na jedné straně a přičtu ho na druhý straně a najednou mi tam vlastně jakoby vypadne ta úprava vlastně na obou stranách. Což oni si potom neuvědomují, že jsme udělali ekvivalentní úpravu, přičtení na obou stranách, nebo odečtení, to je jedno. Jo, že přetahujeme vlastně vždycky jedno číslo z jedné strany na druhou stranu a měníme tomu znaménko při sčítání odčítání. Takže já jsem kolikrát přemýšlela, jestli není jednodušší je naučit rovnou ten postup toho přetahování těch členů z jedné strany na druhou tou protioperací jakoby, než jim vlastně vysvětlovat ty ekvivalentní úpravy.

Následující úryvky také podporují výše napsané, tedy, že učitelé látku ekvivalentní úprava rovnic proberou, ale dále pracují spíše s úpravou převáděním na druhou stranu rovnice (viz také úryvek z rozhovoru s učitelem U33 níže). Ovšem bez pochopení ekvivalentních úprav nemohou žáci pochopit, proč převádění funguje, proto by se podle mého názoru neměly z výuky vynechávat. Různí učitelé používají různé techniky k pochopení převádění na druhou stranu rovnice. Někteří použijí pouze učebnice, ale jiní se snaží přijít na nějaký nový a podle nich lepší způsob vysvětlení. Snaží se i úpravu lineárních rovnic spojit se situací z reálného života, a proto i výklad provádění změny znamének uvádějí na příkladech ze života. Několik způsobů vysvětlení a zjednodušení těchto úprav uvádějí následující úryvky z rozhovorů. Dodejme, že jsou to způsoby, které nemají nic společného s pochopením podstaty úprav. Jde spíše o mnemotechnické pomůcky.

U36: [Na dotaz tazatele, jakým způsobem pozná, že žáci chápou úpravy, které provádějí.] Myslíte ekvivalentní úpravy, že např. na jedné straně (rovnice) je plus a na druhé mínus? Vysvětluji jim to například na rouře od kamen a bílé kočce. Na jedné straně máte plus a na druhé mínus, jako když na jedné straně je bílá kočka a proběhne rourou, tak tam bude mínus, protože se změní jako ta kočka, která je teď černá. Oni si to na tomto pamatují, že se tam musí změnit znaménko.

U45 ...úplně jednoduše. Jedu do Německa, překračuju hranice, měním jazyk, abych se domluvila. Čili když je to plus, převedu, musím měnit znaménko. Stejně tak když skáču přes potok, taky, jsem mokrá, změna stavu. Ale spíš ten jazyk a ta země je lepší, že si to uvědomí.

Mezi učiteli podle rozhovorů nepanuje jednotný názor na propedeutiku lineárních rovnic. Jsou tací, kteří si myslí, že propedeutika je naprosto zbytečná ztráta času, obzvlášť když žáci ještě nemají pro rovnice a jejich výpočet nezbytné znalosti. Jiní učitelé zastávají názor, že začít s výukou rovnic nebo alespoň s přípravou na jejich výuku by se mělo co nejdříve. Správná chvíle by mohla nastat právě při výuce přímé a nepřímé úměrnosti, která se probírá v sedmém ročníku, protože se zde objevují neznámé. Učitelka U36 tvrdí, že žáci už rovnice znají z 1. stupně, takže není důvod používat žádné obrázky, proto bez zdržování jdou přímo počítat (Nováková, 2013, s. 71). Jak už jsem se zmiňovala výše, většina učitelů také navazuje na kapitolu výrazy, bez které by se látka týkající se lineárních rovnic nedala vyučovat, a již zde se žáci postupně na tuto látku připravují. Nováková (2013) dále uvádí konkrétní okruhy matematiky, které se projevují na špatném zvládání tématu lineární rovnice. V těchto okruzích žáci podle názoru učitelů získali nedostatečné znalosti, a to vede k nepochopení lineárních rovnic. Jsou jimi např. desetinná čísla, celá čísla a práce se znaménky, zlomky, vzorce a výrazy, absolutní hodnota, slovní úlohy a další.

U42: Já bych nedělala propedeutiku. Kdy byste to dělal? V šestce? Úprava rovnic? A že byste říkal „přičtete, odečtete, vynásobíte stejným číslem", když oni neumějí vůbec pracovat s proměnnou?

U56: My jsme se to učili přes úměru $x/24 = 6/2{,}5$ *a pak jsme šli takovou tou radou, vždycky vynásobíte tímhle číslem (ukazuje na 24). Já se snažím ty rovnice v tu chvíli vždycky trochu začít. Ale vzhledem k tomu, že v těch šestkách jsem je neměla, tak to nešlo.*

Pro žáky, kteří do této chvíle počítali pouze s konkrétními čísly, je obtížné najednou začít počítat s abstraktním písmenem. Proto se učitelé snaží nejenom propedeutikou v dřívějších ročnících, ale také různými pomůckami jim tento přechod usnadnit. Většinou používají místo písmen nějaká slova, která mají neznámou nahradit, a až ve chvíli, kdy si žáci vyřeší dostatek úloh s těmito slovy a začnou si je zkracovat, začnou přecházet k písmenům. Opět ale nesmí učitelé zapomínat na faktor času, kdy nemohou žákům nechat libovolně dlouhou dobu na řešení úloh a samostatný přechod od slov k písmenům namísto neznámých. Je zapotřebí i dostatečná píle žáků a jejich snaha posunout se dál, v určité chvíli totiž budou muset zvládnout vyřešit rovnici i beze slov, jen s písmenem místo neznámé, a proto je nutná také domácí příprava žáků. Tímto způsobem je minimalizována hrozba „nemoci" formalizmu, která se většinou „léčí" dostatečným počtem vyřešených úloh.

U46: Takže oni, když mají třeba 7y – 2y, tak třeba řeknou 5 a já řeknu: „Já jsem měla 7 jablíček, 2 jablíčka jsem snědla a teď mám 5 korun?" „Jé, no „y"." A když je takhle chytíte za slovo pětkrát, šestkrát, tak je to bez problémů. Zrovna tak vědí, že třeba „y" a „y^2*" je úplně něco jiného, to že nemůžou sloučit. To už zase potom používám ne jablíčka a hruštičky, ale to mám potom jablíčko a pytel koksu, jo, aby opravdu věděli, že je to úplně něco jiného, že to se nedá.*

Nejenom způsob výpočtu, ale také úprava zápisu lineární rovnice hraje velkou roli v poznávacím procesu žáka. Přehlednost zápisu řešení žákům pomáhá nejenom představit své řešení jiným, ale také si posléze najít v řešení chybu, které se dopustili. Můžou ji tak snáze opravit. Pokud jsou žáci na takovouto úpravu v sešitech zvyklí, pak pro ně není problém zvyknout si na styl zápisu výpočtu rovnic, nejenom lineárních. Následující poznámka také podporuje již vyslovenou domněnku, jak je důležité, aby žáci vyřešili co nejvíce různých úloh. Jak uvádí Rendl a Páchová (2013), dotazovaní učitelé v převážné většině považují „dril“ za nezbytnou součást tvořící jeden z hlavních pilířů matematiky na základní škole. Očekávají od něj lepší porozumění učivu, diferenciaci toho, co se žákům tradičně plete, dlouhodobější uchování učiva v paměti, automatizaci algoritmů a jejich provádění bez nutnosti zamýšlení se nad úlohou. A v neposlední řadě by dril měl zaručit nejenom naučení se algoritmu, ale také jeho použití v praxi, což bez vyřešení dostatečného množství úloh není podle učitelů možné.

U48: …já s nimi můžu udělat rohlíky a čokoládu a slovní úlohy, jakoby návod, co vlastně ta rovnice je, že to není rovnice, co je to za hrůzu s písmenky, nebo písmenkem, je to normálně matematický zápis nějakého lidského konání, takže to tam takhle dáme…ale já pak potřebuju, aby ty děti, když dostanou 2x + 5 = 25 a dostanou 3x + 10 =…a další typy, tak já už nemůžu na každý ty rohlíky, že jo. Oni potřebují ten mechanismus toho výpočtu, a tam oni, když napočítají deset příkladů, tak jsou na nějaký úrovni, když napočítají 100 těch příkladů, tak jsou jinde, a když napočítají 1000, tak jsou jinde. Tohle já vnímám jakoby, ten trénink a ten dril, kdy prostě jedem. Jedem rovnice, jedem 10 rovnic, zkouška a musím mít naučený ten postup a musím mít ten zápis, protože abych se v tom neztratila, „rovná se“ pod sebe, zkoušku píšu tímhle způsobem a ne jinak, protože se v tom potom nikdo nevyzná. Ta matematika je jasná, musí být stručný zápis, naprosto jasný, přehledný, aby se kdokoliv v tom vyznal.

Cíl, ke kterému zmíněná učitelka směřuje, je dovést žáka k zautomatizování procesu výpočtu rovnic. Pokud přitom dochází k dobrému pochopení toho, co je rovnice a jaká je podstata ekvivalentních úprav, pak bychom mohli říci, že v jazyce teorie generických modelů (Hejný, 2004) si žáci mají vytvořit univerzální model řešení rovnice. Učitelé matematiky mohou také využít fakt, že s lineárními rovnicemi se žáci nesetkávají pouze v matematice, ale také ve fyzice a dalších předmětech mnohem dříve, než se je začnou učit v matematice. To může však mít také negativní důsledky, pokud učitel fyziky naučí žáky řešit rovnice jen mechanicky, bez porozumění úpravám. Výhodu má ten učitel, který učí žáky nejenom matematiku, ale také fyziku.

U33: Lineární rovnice je látka, se kterou se děti v průběhu školní docházky setkávají v matematice, ale i třeba ve fyzice apod. Takže oni s těmi rovnicemi jakoby nevědomky už pracují. Oni jsou schopný, když mají 2 + x = 10, jsou schopný říct, že x je

2 (pozn. přeřeknutí). Ale tady se učí řešit rovnice všechny, a to znamená, že musí zvládnout ten algoritmus. Tam se mi osvědčuje úplně mechanická záležitost, kdy mají rovnici a postupně si určují, čeho se potřebují zbavit, co si osamostatní, a vždycky jim říkám, chceš se zbavit tady té 2? Jak se jí zbavíš? Musíš udělat opak, takže opačná matematická operace. Tam celkem tohle funguje dobře.

Zajímavé je i pozorovat snahu učitelů podporovat žáky v řešení co nejvíce úloh. Učitel by se měl snažit žáky motivovat. Mnoho učitelů se v rozhovorech zmiňuje o tom, že zadávají domácí úkoly, které následně hodnotí, jiní uvádějí snahu podpořit žáky v řešení tím, že je odmění za každý jednotlivý krok výpočtu, další dávají svým žákům na výběr mezi lehkými a těžkými úlohami. Pomocí takovýchto testů se žáci mohou lépe připravit na různá další testování, jako je například Matematický Klokan. Např. učitel U35 klade důraz na míru procvičování a počítání (Nováková, 2013, s. 68). Několikrát opakoval nutnost domácí přípravy, jež vede k získávání zkušeností, nadhledu a dovednosti propojovat zkušenosti z různých oblastí („selský rozum, kupecké počty“). Dokládá to i četnými zkušenostmi bývalých žáků. Dále vidí jako významný moment z pozice učitele důraz na přístup k žákům. Během své dlouhé kariéry učitel dospěl k názoru, že trpělivost, pravidelnost a neúnavnost s důrazem nejen na matematiku jsou velmi důležité a zásadní přístupy, ověřené praxí.

U53: Třeba dělám taky takovou věc, to neuvidíte teda ale, to třeba hodně dělám u rovnic. Že si můžou vybírat. Máme třeba testík udělaný formou takovou, že si můžou vybírat, který úlohy chtěj řešit. A buď mají úlohy za 1 bod, nebo za 2, nebo za 3, nebo za 4. A říkám nechám to na vás, děcka. Cílem je získat co nejvíc bodů. Do kterých úloh se pustíš, tvůj problém. A mají na to třeba 20 minut a mají si teda vybrat, který úlohy chtěj, a mají je vyřešit. No a jsou tací, kteří jich radši udělají 30 úloh za ten bod, než by šli do těch za ty 4 body. Ale jsou tací, kteří přesně jdou odzadu a řeší ty těžký.

Shrnutí

V rozhovorech týkajících se lineárních rovnic se učitelé nejčastěji zmiňují o následujících problémech:

- obtíže při přechodu z konkrétních čísel na abstraktní písmena
- potřeba vyřešit dostatečné množství úloh v příliš krátkém časovém intervalu

- složitost vysvětlování pojmu ekvivalentní úpravy rovnic a jejich obtížný nácvik

Na závěr zmíním několik problémů, ke kterým se učitelé v rozhovorech vůbec nevyjádřili nebo jen okrajově. Je to například úprava v sešitech žáků, která mnohdy zapříčiní numerické chyby v počítání. O tomto tématu se jako jedna z mála zmínila například učitelka U48, která potvrzuje, jak moc je důležitá úprava především pro rychlou a snadnou orientaci a následnou kontrolu a hledání chyb. S tím souvisí i další problém, a sice zkouška. Několik učitelů se o provádění zkoušky při výpočtu lineárních rovnic okrajově zmínilo, ale nepovažovali za nutné se tímto tématem příliš zabývat. Zkouška je ovšem nezbytnou součástí výpočtu, a proto by na ni žáci neměli zapomínat. Někdy jen díky provedení zkoušky žák zjistí chybnost výpočtu a svou chybu je i schopen nalézt a odstranit. Žáci by měli být schopni zkoušku provést a v případě slovních úloh provést ještě reflexi, zda je překontrolovaný výsledek reálný. Ne vždy totiž musí nalezený výsledek odpovídat zadání slovní úlohy. Například když se úloha týká počítání s nedělitelnými jednotkami, jako je třeba člověk, pak může zkouška vycházet správně, ale ve skutečnosti není výsledek reálný, neodpovídá zadání úlohy. Problémem při provádění zkoušky může být, když úloha vyjde chybně a zkouška tuto chybu neodhalí. V takovém případě přichází v úvahu varianta, že žák na svůj omyl přišel, nechce se mu však hledat chybu ve výpočtu, a tak raději provede další chybu i ve zkoušce tak, aby vše vypadalo jako správné. Nebo si žák opravdu své chyby není vědom a zkouška mu vyšla pouze shodou okolností

Při rozboru učebnic mě zaujal fakt, že autoři Šarounová a kol. začínají s lineárními rovnicemi již na konci 7. ročníku, kdy žáci ještě nemají probranou látku týkající se výrazů. Jsou zde uvedená základní pravidla pro řešení rovnic, ekvivalentní úpravy rovnic a několik slovních úloh. Na tuto látku navazují v druhém díle učebnice pro 8. ročník. Trejbal i Odvárko a Kadleček mají kapitolu lineární rovnice umístěnou v druhém dílu učebnice. Všechny mnou prohlížené učebnice mají, pokud se lineárních rovnic týká, obsahově stejnou náplň, pouze Šarounová a kol. vložili ještě navíc rovnice s neznámou ve jmenovateli, kterým se ostatní autoři učebnic vyhnuli.

Odvárko a Kadleček podrobně rozeberou ekvivalentní úpravu rovnic, uvedou řadu úloh na procvičení a poté uvedou metodu „měnič“ neboli „převádění z jedné strany na druhou stranu rovnice“. Vše doprovází několika příklady a úlohami na procvičení.

Na začátku kladou velký důraz na podrobné zapisování všech ekvivalentních úprav a v příkladech uvádí i možné chyby, kterých se žáci mohou dopustit v případě příliš rychlého přechodu na metodu „měnič“.

Šarounová a kol. výklad ekvivalentních úprav lineárních rovnic začínají vysvětlením pojmu ekvivalentní úprava pomocí slovníku cizích slov a matematického slovníku. Navazují na výklad pomocí modelu vah (s názorným obrázkem). Příklad s vahami podrobně rozeberou, převážně slovně, a navazují dalšími řešenými příklady, ve kterých upozorňují na možné chyby v případě příliš rychlého přechodu na metodu „měnič“ (v této učebnice není metoda „měnič“ přímo pojmenována, jsou zde uvedeny pouze ukázky dvou způsobů zápisu, a to zkrácený, tedy metoda „měnič“, a podrobné rozepisování řešení rovnice pomocí ekvivalentních úprav). Autoři rozebírají příklady, kdy lineární rovnice nemá řešení nebo má nekonečně mnoho řešení. Také v této učebnici žáci naleznou dostatečné množství úloh na procvičení získaných poznatků, úlohy jsou na konci tematického okruhu.

J. Trejbal využívá pro vysvětlení pojmu ekvivalentní úprava rovnic taktéž metodu vah, na místo metody „měnič“ používá podle svých slov „zkrácenou formu zápisu řešení“. V této učebnici žáci nenaleznou žádný příklad možné chyby, které se mohou dopustit v případě rychlého přechodu na „zkrácenou formu zápisu řešení“ (metodu „měnič“). Autor však uvádí velké množství řešených příkladů (podrobně rozepsaných) s gradací obtížnosti, kdy za nejobtížnější považuje lineární rovnici se zlomkem; řešené příklady prokládá dostatečným počtem úloh.

4.3 Dělitelnost

Dělitelnost je látka, která se probírá v 6. ročníku základní školy, případně v primě na víceletém gymnáziu. Tato kapitola vyžaduje nejen řešení výpočetních úloh, ale také se v ní objevuje řada nových pojmů, ve kterých se žáci musí zorientovat, například dělitelnost, dělitel, násobek, ciferný součet, sudá, lichá čísla...

Stejně jako u předchozích témat se i zde učitelé snaží propojit matematiku s reálným životem. Ne u každé kapitoly je snadné vymyslet odpověď na všudypřítomnou otázku žáků: „A k čemu mi to bude?“. V následujícím úryvku učitelka U42 uvádí, jak snadno lze u kapitoly dělitelnost na tuto otázku odpovědět a zároveň tak motivovat žáky k učení. Učitelka nabízí hned několik příkladů, kdy se v reálném životě dají poznatky z dělitelnosti použít. Dále také naznačuje důležitost propedeutiky již v předcházejících letech a nutnost procvičování prostřednictvím co největšího počtu úloh.

U42: Znaky dělitelnosti, no. A teď někdo řekne „a k čemu se to využije třeba“. Takto já se snažím ukázat, že někde v praxi. Dnes třeba když se posílají šifrované správy, tak právě na tom, jak složité je udělat rozklad prvočíselný, tak na tom jsou založeny některé ty veřejné klíče, například. Nebo se tím kontrolovala, nevím, dnes se to dělá asi jinak, rodná čísla. Jo, že se tam něco přidalo, muselo to být něčím dělitelné. No tak mají jako pojem učivo dělitelnost. Ale k tomu, aby získali pojem třeba dělitel a násobek, si myslím, k tomu je, když se bere násobení a dělení třeba v pětce, kterou jsem měla také kdysi, protože pětka byla kdysi na druhém stupni. Takže když třeba to bylo v pětce, tak třeba já jsem řekla: dobře, třeba řeknu číslo 28, 28 děleno 4, 28 děleno 7, tak oni napsali, dělali zkoušku: 4 x 7. Teď jsme si říkali dělitel a já jsem se třeba k tomu ptala, jestli by uměli to 28 napsat ještě jinak než 4 krát 7. A teď oni řekli 2 krát 2 krát... ještě? Ne, už to dále nejde. A teď při tom dělení toto můžete procvičovat a ty děti se najednou naučí ten rozklad, aniž... Ale dělí! A pak už můžete zavádět, už máte nějaký pojem dělitel. Prostě aby ty děti neslyšely ten pojem, jakože to na ně spadne.

Samostatné myšlení je jeden z mnoha cílů, ke kterým se učitel snaží své žáky vést. Jedním z prostředků, jak toho dosáhnout, je způsob výuky. Pokud učitelé látku vysvětlují krok po kroku a věnují dostatek času nákresům a ukázkám, pak mají žáci možnost na své znalosti si přijít sami (AHA efekt), a rozvíjí si tak již zmiňované samostatné myšlení. Pokud ovšem žákům učitel předloží něco jako prostý fakt, někteří to přijmou a budou schopni takovou znalost i použít, jiní se to ovšem naučí jako básničku zpaměti, a pokud budou navazovat na tuto znalost dalšími poznatky, tak budou ztraceni. Někteří učitelé si to uvědomují a u dělitelnosti se snaží o názornou výuku a o to, aby si žáci dokázali poznatky představit na známé situaci. Tuto myšlenku podporuje i učitelka U42, která má zkušenosti s prací s žáky, kteří trpí poruchami učení.

U42: Prostě jdu dále, a vysvětluji, a já to hlavně, všechno, co dělám, já mám řadu dětí, které mají dys-, tak oni mají napsáno názorně, ale já tedy se snažím všechno, co jde, udělat z jejich znalostí, na základě jejich znalostí, zkušeností a kreslit. Tady bych vám mohla ukázat krabice, kde mám na tu dělitelnost, to jsem dělala vloni, ale letos až *to budu dělat, tak to opět vytáhnu, to je moje... Nebo 2 autobusy vyjedou současně a ten jeden udělá tu smyčku za tolik a druhý tu smyčku za tolik, kdy budou zase oba na startu a dají si kávu.*

Asi nejobtížnější látkou z celé kapitoly dělitelnosti jsou pro žáky znaky dělitelnosti čísla 3 a 9. Učitelka U42 se snaží žákům vše vysvětlit a odvodit. Jak uvádí, znaky dělitelnosti číslem 5, 10 a 2 žáci většinou dobře znají, lehce si je zapamatují.

U42: No, a teď bude dělitelnost, že jo, tak tam to bude problém, dělitelnost je vždy jako problém, protože dělitel násobek, to ještě jo. Znaky dělitelnosti 5, to se chápe, já všechno odvozuji, znak dělitelnosti 3 já odvodím, aniž řeknu, že to je takhle. To odvodíme, že opravdu ten ciferný součet, že to tak je. To já udělám k tomu ten důkaz, že dělitelnost 3, že součet cifer, musí být dělitelný třemi. A to existuje na to, že když uděláte deset, vezmete číslo, že jo, 758, tak tam máte stovky, že jo. Tak řeknete deset děleno třemi je 3 a 1 zbyde, sto děleno třemi je 33 a jedno zbyde. Čili když dělíte třemi, mám takhle kupy, tak si to rozdělím. Na stovky, na desítky, na to... Tak když dělím stovky, kolik mám stovek, tolik mi zbyde. Když mám desítky, kolik mám desítek, tolik mi zbyde, je to tak? [Teď tedy nestíhám.]

U42: No tak z každé stovky, když dělím na 3 díly, tak mi zbyde 1, z každé desítky mi zbyde 1. Čili tím když mám 7 stovek, tak mi zbyde 7, když mám 3 desítky, tak mi zbydou 3. A pak je ten zbytek, ten cancour těch jednotek. Čili z těch stovek mi zbyde 7, z toho (???) a 3 a tady mám to, čili ciferný součet.

Jak bylo již na začátku řečeno, v této kapitole se musí žáci naučit hodně nových pojmů a umět s nimi jak počítat, tak je správně přiřadit k určitému typu úlohy. Učitelé uvádí i u jiných témat, že si žáci častou pletou pojmy, jako je obsah a obvod, násobení a sčítání nebo konkrétně u tohoto tématu dělitel a násobek. Žáci se na prvním stupni většinou učí násobilku tak, že si říkají násobky jednotlivých čísel například 3, 6, 9... Vědí tedy, co jsou násobky, a znají je celkem dobře. Učitelka U41 vidí problém v tom, že žáci nepřemýšlejí nad tím, co vyžaduje zadání úlohy, a často si již známé pojmy násobek a dělitel zaměňují. Opět se zde projevuje již výše zmiňovaná špatná čtenářská gramotnost a přílišná horlivost (zbrklost) žáků.

U41: Akorát teda teď zase ty pojmy dělitel a násobek mi tam neustále zaměňují. A je to jen pochopit ty dva pojmy. Já chci dělitel a oni mi spočítají násobek atd. Takže to *zase do nich pořád tluču: násobek, co je to násobek? Řekni mi násobky čísla 5. 5, 10, 15... No. Tak proč mi říkáš, že násobek čísla 5 je 1? Podobně zase jako obsah, obvod jenom ty pojmy. Že to zaměňují a nepřemýšlí nad tím.*

Jak říká učitelka U51, kapitola dělitelnosti je rozdělena na dvě části. První se týká násobku a dělitele a druhá obsahuje znaky dělitelnosti. U násobku a dělitele mají žáci většinou problémy pouze s faktem, že nepoznají, co se po nich požaduje. Učitelka U51 ovšem tvrdí, že k řešení těchto úloh občas postačí použít selský rozum, který podle jejího názoru většině žáků chybí. Jak ale sama dále říká, při výuce znaků dělitelnosti žákům předloží větu jako holý fakt, který se musí naučit nazpaměť a umět jej použít.

U51: To je zase něco jiného, u dělitelnosti je to násobek a dělitel. Tady rozkládají číslo třeba 81 na jednotlivé činitele, z čeho ta čísla jsou složena. Pak mají 2 čísla a zjišťují, co mají společného. Záleží, jestli poznají, jestli je to ten násobek, co se po nich chce, nebo ten dělitel. Tam jsou právě dva výpočty, a oni nevědí který. Například úloha: Dělíme růže po 2, po 3, po 5 a oni mi řeknou, že výsledek je jediná. Oni si neuvědomí, co to znamená, vědí, že to je ten společný dělitel. Jsou schopni napsat, že mají jen jednu růži. Chybí jim tam selský rozum nebo odhad.

Pak jsou tu znaky dělitelnosti, jak se pozná, že je číslo dělitelné 10, 5. Tak to je prostě věta, kterou oni se musí naučit. Tady je dělitelnost 4. Tady 8, 3, 9. Číslo je dělitelné 9, když je číselný součet dělitelný 9. Tady mají tu větu, oni si ji napíší do sešitu, věty se musíme učit nazpaměť, pak mají třeba 23 a zkoušejí, čím je dělitelné. Říkají: Na konci je trojka, dvojkou to dělit nepůjde. Pak se sečtou 1 + 2, 3 + 3 je 6, a tak jdou postupně.

Žáci by měli být schopni své již získané znalosti uplatňovat v průběhu celého studia a pomocí již poznaného si ulehčit práci s nově poznávaným. Nejenom čtenářská gramotnost, ale i nedostatečný vhled do úlohy je obtíží při jejím řešení. Jak ukazuje další úryvek z rozhovorů, je důležité snažit se kombinovat jednotlivé znalosti dohromady a pokoušet se, aby žáci viděli spojitosti jednoho s druhým a sami se snažili si svou práci ulehčit. Učitelka U41 naznačuje, že žáci úlohu vyřeší, ovšem při jejím složitém výpočtu udělají snáze chybu, než kdyby na začátku úlohy použili již získané znalosti a výpočet si zjednodušili.

U41: Teď jsem zrovna dala do písemky $(45/15)^3$. Čekala jsem, že mi to zkrátí na 3 a řeknou mi, že je to 27. Ne oni si vynásobí 45 x 45 x 45, 15 x 15 x 15; vyjdou jim dvě megačísla, pak mi to postupně krátí. A výjimka, pár z nich mi tam neudělá chybu.

Velikou částí práce učitele je žáka motivovat. Jednotliví učitelé mají své triky, jak si udržet dětskou pozornost. Někteří učitelé se snaží udržet si pozornost žáků tím, že je motivují uvedením reálné situace, podrobným nákresem situace, nebo jak uvádí učitelka U49 chozením k tabuli. Učitelka se snaží o vyvolání tak zvaného AHA efektu, který je pro žáky výhodný pro snazší zapamatování látky, zároveň žáky motivuje a udržuje jejich pozornost společnou prací na tabuli a pohybovou aktivitou s touto prací spojenou. Níže popisovaný styl výuky je náročný na čas, ale jak učitelka říká, žáci se do výuky zapojí a baví je to. Potřebují si úlohu nejdřív rozkreslit a názorně představit, aby pochopili, co mají dělat.

U49: Tak třeba tady ty násobky (NSD a NSN), zkoušíme si psát nějaké násobky pod sebou, pak si zakroužkováváme… to by bylo na dlouho.

U společných násobků, tak si napíšeme společné násobky dvou čísel nebo tří čísel, celou dlouhou řadu, je to baví, chodí k tabuli postupně, protože se potřebují hýbat, a střídají se „a teď ještě napíšeme další násobky“ a pak zakroužkováváme, hledáme, spíš když vidím, že děti už jsou neposední, tak je aktivuji, chtějí se předvést, tak alespoň aby tam mohli napsat to číslo…. Znaky dělitelnosti dvěma: hledáme, snažím se, aby vyvodili ten znak, dělitelnost třemi si zase rozepíšeme, proč je to ten ciferný součet, tady jsem tu učebnici taky dost používala. … Taky jsme si napsali všechna čísla od jedničky až do sta na tabuli a teď jsme postupně vyškrtávali čísla, která jsou dělitelná dvěma, třemi, a došli jsme až k číslům, která nejsou dělitelná ničím, pouze jedničkou (prvočísla). To je bavilo. … spíše přidávám úlohy nebo nějakou zajímavůstku… třeba když tady jsou slovní úlohy, švadlenka něco stříhá, tak si to kreslíme, děti si to nedovedou představit, tak stříhá z kusu látky např. 120 cm na sukně a 180 na šaty a kolik ušije šatů, sukní, kolik jí zůstane materiálu. To jsou pro nás takové normální věci, ale oni si to neumějí představit, jak to třeba stříhá, nebo že jí něco zůstane.

Několik učitelů zmiňuje jako ideální prostředek k výuce matematiky hraní matematických her. Nejinak je tomu i v případě dělitelnosti, kdy učitelka U43 uvádí konkrétní hru, která žáky nejenom baví, ale zároveň jim prohlubuje jejich matematické znalosti. Několik učitelů matematiky dokonce vede kroužky deskových her, při kterých si žáci mohou zdokonalit své znalosti získané v matematice.

U43: Toto je na dělení 9, hrají vždy 2 proti sobě a mají kameny a pokládají čísla, a když už se začne, tak se pokládají čísla v tomhle směru a v tom směru [ukazuje vertikální a horizontální směrem] a vždy to číslo musí být dělitelné 9. Nádherně je na tom vidět, jak jim trvá vstřebat dělitelnost 9. Jako zažitou jo, oni vědí ciferný součet. Jako třeba, chtěj sem přidat 9 [učitelka ukazuje, že stačí pouze přidat 1 kámen s číslem 9]. Jim to nedojde, že jen přidám 9 a je to hotovo, oni to celé přepočítávají, jestli s tou přidanou 9 to bude sedět.

V rozhovorech se několikrát vyskytl názor, že matematika je taková skládačka, která je složená z jednotlivých témat. Pokud některé z nich žáci neznají, pak se to projeví v dalších letech, protože většina poznatků z matematiky navazuje na předchozí a zároveň je předpokladem pro další. Nejinak je tomu i u dělitelnosti, na kterou dále navazují zlomky, což je velice důležitá látka, bez které se žádný žák neobejde. Proto je i u této látky důležité, jakým způsobem bude výklad žákům zprostředkován. V rozhovorech se vyskytlo několik způsobů postupu výkladu, ovšem několik učitelů se shoduje v potřebě názornosti a přenechání aktivity na žácích, což je pro ně podle učitelů přínosnější než prosté předávání definic a faktů (což ovšem někteří učitelé také dělají). Učitelka U33 říká, že u žáků není problémem určit dělitele nebo násobek nějakého čísla. Obtíže nastávají ve chvíli, kdy mají pracovat s pojmy nejmenší společný násobek a největší společný dělitel.

U33: Tam jsme vlastně využili a stále se k tomu vracíme, to bylo tzv. činnostní učení. Kde děti si to osahají tím, že mají ty kartičky s těmi čísly. Ty kartičky potom zase využíváme ještě, když máme dělitelnost. Tam zase děti rozkládají čísla na prvočinitele a u toho se nám také osvědčily ty kartičky.

Tak tady jsem už říkala o dělitelnosti. U té dělitelnosti, tam je veliký problém, kdy oni jsou schopni určit dělitele, jsou schopni určit násobek nějakého čísla, ale pak pojem nejmenší společný násobek a největší společný dělitel už začíná být problém. Takže tam se opravdu uchylujeme k tomu, že se mechanicky učí, jakým způsobem tam ta prvočísla získají v tom rozkladu, doplní. Pak potřebujeme, oni ten společný dělitel *a společný násobek už u těch čísel viděli, protože když v 7. ročníku se začnou sčítat zlomky, tak tam vlastně vytvářejí společného jmenovatele, tam bývá většinou kámen úrazu, když nám chybí ty základy ze 6. třídy z té dělitelnosti. Na to hodně dbáme. Pro některé děti je velice těžké určit pravidla dělitelnosti pro čísla, třeba pro 3, protože tam už je ta poučka, kterou se musí naučit a kterou si musí uložit a umět ji používat, a to už je problém. Většinou 2, 5 a 0 jim nedělá takový problém.*

Shrnutí

V rozhovorech týkajících se dělitelnosti převažují poznámky typu:

- žáci často zaměňují pojmy násobek a dělitel
- žáci mají obtíže při odvozování/definování znaků dělitelnosti, obzvlášť u čísel 3 a 9
- učitelé uvažují o formách výuky a aplikování her do výuky
- žáci mají nedostatečný vhled a následně nepochopí úlohu (špatná čtenářská gramotnost)

Z rozhovorů jasně vyplývá, co žákům tvoří největší obtíže, a to znaky dělitelnosti čísla 3 a čísla 9, zaměňování pojmů dělitel a násobek a hledání nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele. Učitelé se snaží každý svým způsobem žákům s těmito problémy pomoci, otázkou však zůstává, jaký způsob pomoci jednotliví žáci přijmou. V této části se většina učitelů shoduje, že nejlépe funguje forma hry a názorná výuka. Současně se snaží žáky co nejvíce aktivovat a zapojit do výuky.

Při procházení kapitoly dělitelnost přirozených čísel v jednotlivých učebnicích mě zaujalo, že Šarounová a kol. se opět časově liší od ostatních. Tuto látku totiž autoři zařadili na rozdíl od ostatních autorů učebnic až na začátek 7. ročníku. Je ovšem také fakt, že Šarounová a kol. se látce více věnují. Autorská dvojice Odvárko a Kadleček například úplně vynechává znaky dělitelnosti číslem 4 nebo číslem 9, oproti tomu Šarounová a kol. v opakovacích a rozšiřujících úlohách ještě přidávají znaky dělitelnosti čísla 25. Rozdíly jsou patrné již při nahlédnutí do obsahu učebnice. Šarounová a kol. jdou ve výkladu více do hloubky, v jejich učebnici lze nalézt podkapitolu věnující se dělitelnosti součtu, rozdílu a součinu, a dále rozklad složených čísel na prvočinitele, což v učebnici od autorů Odvárko a Kadleček buď chybí, nebo je začleněno v jiné podkapitole. V obou učebnicích začíná kapitola částí týkající se vysvětlení pojmů dělitel a násobek. Odvárko a Kadleček věnují každému pojmu samostatnou podkapitolu, Šarounová a kol. mají vše v jedné podkapitole, na jejíž závěr uvádí praktický způsob zápisu všech dělitelů určitého čísla do jednoduché tabulky „téčka“. Následují znaky dělitelnosti čísel 5, 10, 2 a 3. Jeden z několika rozdílů, který mě zaujal je, že autoři Odvárko a Kadleček uvádí společně znaky dělitelnosti čísel 5 a 10, zatímco Šarounová a kol. dávají dohromady znaky dělitelnosti čísel 5 a 2, každý má samozřejmě svou vlastní logiku výkladu. Dále uvádí výklad pojmu prvočíslo a číslo složené a na závěr se autoři věnují společnému děliteli a společnému násobku.

4.4 Procenta

Kapitolu procenta většina autorů učebnic zařazuje do učebnic 7. ročníku. Je to látka, která navazuje na zlomky a svým způsobem je rozšiřuje. Ne všichni učitelé jsou však s tímto rozložením učiva spokojeni. Učitelka U30 říká, že na škole, kde vyučuje, se tato látka probírá až v 8. ročníku a žákům to tak více vyhovuje. Podporuje tak myšlenku, která se v rozhovorech s učiteli také vyskytla, a sice že žák musí být na přijetí určitého učiva dostatečně psychicky připraven a musí mít dostatek času pro jeho pochopení. Jak se snaží učitelka U30 naznačit, je především na učiteli, aby rozhodl, kdy je žák dostatečně připravený na výklad nové látky. Svůj poznatek dále rozvádí v následujícím úryvku z rozhovoru.

U30: Zjistili jsme, že snáz se nám učí látka procenta. Ne na konci 7. ročníku, ale na začátku 8. ročníku, kdy jsou děti o necelý půl rok starší a tu látku daleko snáz nejen pochopí, ale tu látku snáz využijí i v praktickém životě, protože ne, že by to ten sedmák nepochopil, ale neutvrdí si to. A jak je to ke konci školního roku, tak některé věci už uniknou, neprocvičí se dobře, je spousta i školních akcí. Takže jsme byli rádi, že jsme si mohli tohle přesunout, ona tam ta látka v učebnici Fraus je, ona je až jakoby dál, ale my s ní začínáme.

Kapitole Procenta předchází kapitola s názvem Zlomky. Učitelka U42 dokonce říká, že s procenty by se mělo začínat už v průběhu výuky zlomků, tedy zařadit propedeutiku procent do zlomků. Učitelé se shodují na tom, že procenta jsou vlastně rozšířením chápání pojmu zlomek. Ke konci následujícího úryvku učitelka U42 uvádí příklad propojení jednoho s druhým nenásilným způsobem, kdy je pouze na žákovi, zda si uvědomí, že půlka může být chápáno buď jako 50 % z něčeho nebo ½ z něčeho. Výpočet povede ke stejnému výsledku. Na tomto příkladu si učitelka také mohla ověřit, zda žáci dobře chápou, co je základ, což je, jak sama říká, základní otázkou procent.

U42: Dám vám příklad. Hele, povídá učitelka učitelce, třeba, jo. Tak: přišlo tam… no, hele, přišlo tam 15 dětí, no vždyť to je čtvrtina. Kolik dětí mělo přijít? Tak řeknu 16 dětí, to je čtvrtina. Kolik dětí mělo přijít? A někdo řekne: 16 děleno 4, to je divný, někdo 16 krát 4. To je základ. A já řeknu: děti, přišlo 16 dětí, ale jenom čtvrtina mohla něco. Kolik je to dětí? A otázka základu je základní otázkou procent. A když se to pochopí, když pochopíte…A to se musí začít u zlomků. Třeba já jsem dala, byla jsem teda mrcha, dala jsem dětem do testu příklad: Paní učitelka vybírala peníze. První den přinesla jedna třetina dětí peníze a druhý den vybrala, řeknu, 300korun a řekla „tak už mám půlku“. Kolik měla vybrat? A to oni museli udělat.

Dále se učitelé shodně zmiňují o problematice slev. Tvrdí, že žáci nemají problém vypočítat slevu, když je pouze jedna, ale v případě, který popisuje učitelka U46, kdy se slevy hromadí, už si žáci nevědí rady. V následujícím úryvku si učitelka vymyslela hezkou pomůcku, která by žákům mohla při výpočtu pomoci, a sice pohyb po schodech. Učitelka U46 také popisuje, jak u žáků došlo pomocí dostatečného množství vyřešených úloh k AHA efektu. V určité fázi řešení jim dochází důležitost výpočtů jednotlivých základů, a tak se pomůcka, kterou jim poskytla učitelka v podobě schodů, stává nepotřebnou. Těžko říci, zda je pak pomůcka pro žáky jen mnemotechnickou pomůckou, nebo zda slouží jako generický model procesu řešení úloh, kde dochází k postupným slevám.

U46: No, a pak tam mám procenta. Teď v sedmé třídě jsem strašně bojovala, právě na doučování. Tam bylo třeba, že rozhlasový přijímač nešel na odbyt, takže ho zlevnili o 10 %, stále nešel na odbyt, takže ho ještě z té nové ceny zlevnili o dalších 10 %. Reakce je: že výsledná cena je o 20 % levnější. A když jim říkám: „Vždyť to není pravda. Vždyť to bylo z té nové ceny těch 10 %.“ „No ale 10 % a 10 % je 20 %.“ Tak pak jsem jim malovala takový schody, že to jde takhle dolů, ale že musí šlápnout na ten prostřední schod, takže musí tu prostřední cenu si vypočítat a teprve z ní těch 10 %, a to jsem teda z těch sedmáků úplně rostla. Takže jsme potom zdražovali svetr, a když jim dám třeba tu konečnou cenu a mají se dopracovat k té původní nebo obráceně, jim dám *původní, tak zas jim říkám: „Jdeme po schodech dolů…“ nebo znám konečnou: jdeme po schodech nahoru, tak pak teprve řekli: „Aha, no jó.“ Ale jako ze začátku… ale to by se s vámi hádali, já je neučím ty sedmáky, takže úplně do krve by se hádali, že přece 10 % a 10 % je 20 %.*

Někteří učitelé se v rozhovorech zmiňují o způsobu počítání procent pomocí písmen *č*, *z*, *p*. Tato písmenka mají nahrazovat slova procentová část, základ, počet procent. Na druhou stranu však také říkají, že toto počítání dělá žákům problémy z toho důvodu, že si nedokáží uvědomit, kterému číslu mají konkrétní písmenko přiřadit. O tomto problému se zmiňuje i učitelka U32, která dále říká, že právě převedení čísel do reálného světa pomocí lízátek, cigaret, rohlíků a podobně žákům pomáhá snáze si uvědomit, co vlastně počítají. S tímto názorem jsem se v rozhovorech setkala hned několikrát a netýkalo se to pouze procent. Přímá ukázka a názornost je tedy nejenom podle učitelky U32 dobrý způsob výuky. Někteří učitelé se zmiňují dokonce o reálném dělení koláče, čokolády a dalších.

U32: Oni, tam je problém, že si nedokáží uvědomit, co vlastně z těch procent znají, jestli to je základ nebo je to nějaký počet procent nebo jestli mají počítat nějaký počet procent. To jim dělá problém. Ten výpočet potom už ani tolik ne, ale nějak to zařadit jo. A co je zajímavý, 20 % je třeba 150 a teď vždycky říkám, na druhém místě vždycky počítáte 1 %. A teď oni těch 150 nedělej 20, oni tak to vydělím 100, jakože to byl základ. Ale on to byl těch 20 %. Tak právě musím ty lízátka. Nebo ty cigarety, aby si to vůbec uvědomili.

Učitelka U41 potvrzuje, že názvosloví v matematice je velice důležité a žáci musí vše dokonale ovládat, ale zároveň nesouhlasí se zkracováním určitých názvů; u procent jsou to již zmiňovaná písmenka, která žáky pouze pletou a často si je ani nepamatují.

U41: Počítám základ, že počítám ten počet procent, je to třeba 13 %, 50 %, to názvosloví musí mít, aby věděli, co počítají, mně se jenom nelíbilo takový to, že si označím Z, Č, P, že Z = a já si to nepamatuju…

Chuť k učení se snaží učitelka U52 vyvolat tím, že, jak říká, dělá s žáky „blbiny“. Snaží se je zaujmout svou vlastní aktivitou, a tím vyvolat aktivitu žáků. Ovšem do jaké míry je tato motivace skutečnou motivací k poznávání trojčlenky, je otázkou. Tazatel se bohužel nedoptal, co má symbolizovat ono hýbání rukama. Snad ukazování, co s čím se při trojčlence násobí? Těžko si lze představit, že by to mohlo pomoci k vytvoření univerzálního modelu daného poznatku.

U52: Takže procenta, ty učím přes trojčlenku, takže procenta mají docela rádi a trojčlenku, tu jsme vysvětlili takovým způsobem, že prostě já s nimi dělám blbiny, hýbu rukama a oni vidí šaškárnu, tak proč to nepřijmout. Takže při tom si pohrajeme.

Procenta se mohou počítat několika způsoby. Jedním z nich je výpočet pomocí trojčlenky. Při tomto stylu výpočtu může ale podle učitelky U41 nastat problém, že žáci se výpočet naučí zpaměti a nad úlohou příliš nepřemýšlí. Vyzkoušela tedy, jak sama tvrdí, ne úplně ideální způsob výpočtu přes 1 %. Žáci musí nad úlohou přemýšlet, což jim zabere více času, než když mohou aplikovat známé schéma trojčlenky.

U41: Ale jako třeba konkrétně, jak jsme se o tom bavili minule, úměrnosti, trojčlenka si myslím, že patří před procenta určitě, že jako letos jsem si vyzkoušela procenta pomocí 1 %, já nemám ráda nějaký ty vzorečky – nějaký „čé, zet, pé“ a podobně, se používá nějaká část, základ..., to nechci, takže všechno přes 1 %, a jako dře to, není to úplně ideální. Když se jim dá schéma pomocí trojčlenky, tak je to mnohem jednodušší, tím 1 % jim to člověk vysvětluje, že jo, aby to tak nějak, aby tomu porozuměli, co je to celek, setina, nějaká část, ono to navazuje na zlomky. Tady v té řadě je to za zlomky, což je naprosto v pořádku, protože procenta jsou de facto zlomky, ale pro slabší děti, šikovný děti to pochopí bez potíží, ale slabším dětem nedělá problémy, třeba když vědí, že 100 % je 300, spočítat z toho 25 %. Ale když vědí, že nějakých 265 je třeba 37 % a kolik je 100 %, tam už třeba ten problém trochu je, i třeba když já nevím 365 z 500, to taky docela umí, ale to už jsou takový, že už se to učí zpaměti stejně pak, ta trojčlenka je prostě naprosto jasný schéma. Přes to 1 % musí přemýšlet, co počítají a proč to počítají.

Učitelka U41 má na počítání procent přes 1 % jiný názor, podle ní je to velice výhodný způsob výpočtu z toho důvodu, že žáci musí rozumět tomu, co právě počítají. Vyzkoušela si tímto stylem odučit celou kapitolu o procentech a až na úplný závěr žákům předložila vzorečky na výpočet procent. Nechává na úsudku žáka, aby si sám vybral způsob, kterým se mu budou procenta počítat lépe, ale jak sama říká, upřednostňuje počítání přes 1 %, a proto tomu také věnuje mnohem více času.

U41: Jako letos jsem to učila tak, že se snažím jet přes to 1 % a pořád tomu rozumět, jako co počítáme. A vlastně poslední hodina s procenty byla, že jsme si to napsali, že jsme si shrnuli ty tři typy, přesně jak říkáte, když neznám počet procent, když neznám základ, když neznám ten díl, tu část, jak se to počítá přes to 1 %, a pak jsem jim teda ty vzorečky ukázala, že se to vlastně dá počítat, že si to takhle označím, ale ty vzorečky jsem docela i záměrně s nimi nedrilovala, aby spíš tam zůstal ten dril přes to 1 %, a kdo chce, tak si může ty vzorečky, když je to pro něj snazší, ale jako řekla jsem jim, že je nemám moc ráda, a že proto my je moc trénovat nebudeme.

Učitelé, kteří se ve svých rozhovorech zmiňují o procentech, se většinou shodují, že žáci nemají problémy počítat s procenty, když mají jasně dáno, co se počítá. Pokud se ale začnou úlohy typově promíchávat, nastávají obtíže, protože žáci nedokáží rozluštit, co po nich zadání vyžaduje. Jak říká učitelka, nejlepším způsobem, jak této situaci předejít, nebo se jí úplně vyhnout, je dostatek různých úloh. Podle toho, co zmiňuje na konci úryvku, za většinu těchto problémů podle ní může převážně již výše zmiňovaná špatná čtenářská gramotnost českých žáků.

U51: Co nejvíce příkladů. Stejně potom se narazí. Já už potom pracuji s typově stejnými příklady. Dám jim prověrku a jsou tam 4 různé úlohy a oni vědí, že tam ty 4 budou a musí je najít. Jednou se počítá ten základ, ten celek, jednou se počítá, kolik je to procent, jednou se počítá ta část a potom je problém, když oni vědí, že sleva je 30 %, oni si neuvědomí, že mají počítat, kolik platí, takže oni počítají těch 30, ale ne těch 70 %, protože v tom zadání je napsáno 30. Když se pak všechno dát dohromady, jsou z toho zmatení. Pokud se pořád počítá základ, tak to jde všem. Jakmile se to pomíchá...

Učitelka U42 v následujícím úryvku shrnula podle mého názoru podstatu výuky nejen procent, ale celé matematiky. A sice, že procenta, posléze matematiku, musí žák pochopit, vědět jak se počítají, ale také umět své znalosti použít. A k tomu se žáky podle svých slov snaží dovést.

U42: Jedna otázka je pochopení a druhá otázka je, jak jako to počítám, a třetí otázka je vlastně umět, jo, třeba když já budu vědět, že spočte přes jednotku, tak ale aby to tam pak opravdu uměl udělat.

Na závěr této části jsem vybrala úryvek z rozhovoru, který jakoby naznačoval, že není důležité, jakým způsobem žáci počítají, stačí se dostat ke správnému výsledku.

Učitelka U51 říká, že je více způsobů výpočtu, ale důležité je dojít k hledanému číslu co nejrychleji. K tomuto názoru došla díky testům, ke kterým se snaží žáky připravit – Scio testy. A v těchto testech, jak říká, není důležité, jak žák k výsledku dojde, ale jestli k němu je schopen dojít. Otázkou ovšem zůstává, zda je rychlost při řešení matematických úloh opravdu to nejdůležitější a jakým způsobem žáky k rychlému řešení dovést. Je také zajímavé, že tato učitelka se na rozdíl např. od učitelky U41 domnívá, že řešení přes 1 % je rychlejší než pomocí trojčlenky.

U51: Základ, část a počet procent. Já třeba nepoužívám trojčlenku, já je spíše učím, ať si spočítají v hlavě 1 %. Aby to bylo úsporné. Abych je připravila na ty testy. 10 let to dělala jedna firma, Scio. 4 roky jsem s žáky pracovala s těmito testy, neřešit až tak ty zápisy, ale ten výsledek. Oni musí vědět, že třeba 50 je výsledek a to, jak k té 50 došli, je jedno.

Někteří učitelé se v rozhovorech zmiňují o povinně volitelném předmětu, který mají na svých školách zavedený, a sice finanční matematika. V tomto předmětu pak mají více času se tematice úroků věnovat a více tak procvičit nejenom úroky, ale i procenta.

Shrnutí

V rozhovorech, ve kterých se učitelé zmiňují o procentech, převažují poznámky typu:

- existují různé způsoby výuky (přes 1%, trojčlenka)
- žáci nechápou výpočet načítajících se slev
- žáci mají nedostatečný vhled a následně nepochopí úlohy (špatná čtenářská gramotnost)
- žáci obtížně určují základ, tedy 100 %

Velkým problémem zůstává otázka, jakým způsobem žáky procenta vůbec učit. Učitelé mají v rozhovorech různé názory. Někteří kladou větší důraz na výuku přes 1 %, jiní postupují pomocí trojčlenky a někteří zdůrazňují, že není důležitý způsob výpočtu, ale výsledek jako takový. Většinou se však učitelé shodují v tom, že žák by měl znát různé způsoby, jak se k výsledku dostat, a sám si pak vybrat, který z nich je mu nejpříjemnější. Dále se shodují v názoru, že pro žáky je velice obtížná orientace v různých typech úloh. V procentech jsou 3 až 4 různé typy úloh a v okamžiku, kdy se začnou mezi sebou prolínat, mají žáci problém rozpoznat, který ze základních typů právě řeší (což odpovídá i problémům, které mají žáci u úměrností). Tento fakt je podle učitelů částečně dán i špatnou čtenářskou gramotností českých žáků. Mnozí učitelé se ale shodují v názoru, že dostatečný počet vyřešených úloh by žákům v tomto problému mohl pomoci.

Mnou vybrané učebnice všechny shodně umístily látku procenta do 7. ročníku základní školy. Obsahově jsou si také velice podobné, snad jen s menšími odchylkami. Co mě ale zaujalo, bylo to, že v učebnici od autora Trejbala jsou úlohy týkající se procent přesně rozdělené do 3 jednotlivých celků podle toho, jakého typu úloh se týkají a jaké údaje jsou známé, a sice výpočet procentové části, když známe počet procent, který jí přísluší, a známe základ, dále výpočet základu, kde známe procentovou část a počet procent, který jí přísluší, a poslední typ výpočet počtu procent, když známe základ a známe procentovou část. Další dvě učebnice se těmto třem typům úloh samozřejmě také věnují, ovšem nemají je takto striktně rozdělené. První varianta, která má vše důkladně oddělené, je pro žáky pohodlnější, protože nemusejí přemýšlet, co přesně mají řešit. Ovšem v druhých dvou učebnicích si mohou žáci lépe procvičit své znalosti tím, že sami rozpoznávají typ úlohy, což je podle mého názoru přínosnější z dlouhodobého hlediska. Dále mě zaujala stručná kapitola Procenta kolem nás v učebnici od autorů Odvárko a Kadleček, která přímo propojuje reálný život s matematikou. Určitě u většiny úloh z učebnic jejich autoři čerpali z reálného života, aby tak žáci mohli procenta lépe pochopit, avšak Odvárko a Kadleček těmto úlohám věnovali celou samostatnou kapitolu.

V souvislosti s tím, jak učitelé zmiňovali různé způsoby řešení úloh o procentech, je důležité si všimnout, jak k nim přistupují učebnice. Každá z učebnic preferuje jiný styl výpočtu. Například Šarounová a kol. uvádějí výpočty počtu procent, základu a procentové části přes 1 % a o možnosti výpočtu trojčlenkou se nezmiňují. Odvárko a Kadleček uvádějí v řešených úlohách obě možnosti, jak přes 1 %, tak pomocí trojčlenky, ale ve většině případů upřednostňují spíše trojčlenku, které také věnují celou 1 podkapitolu. Ve všech učebnicích se dále setkáváme s pojmem úrok a promile, ke kterým se učitelé nevyjadřovali, ale se kterými se žáci budou i nadále setkávat nejenom v matematice, ale i v reálném životě.

4.5 Souměrnost

Pojem souměrnosti musíme rozdělit ještě do dvou částí, a to osová souměrnost a středová souměrnost. O osové souměrnosti se žáci učí již v 6. ročníku základní školy, naopak středová souměrnost přichází až v 7. ročníku základní školy. I já vybrané úryvky rozdělím na ty, které se týkají osové souměrnost, a ty, které hovoří o středové souměrnosti ve srovnání s osovou, protože žádný učitel se v rozhovorech nezmiňoval pouze o středové souměrnosti.

Většina učitelů se shoduje, že pokud žáci mají řešit lehké úlohy, pak jim látka připadá snadná a dobře ji zvládnou, v případě, že mají řešit složitější úlohu, už začínají mít problémy. Např. U49 z osmiletého gymnázia v následujícím úryvku poukazuje na problém větších útvarů, které přesahují přes osu souměrnosti do druhé poloroviny. Mnoho učitelů také mluví o absenci prostorové představivosti, která je základní příčinou žákovských potíží zejména v geometrii. Prostorová představivost je nejenom pro osovou souměrnost, ale obzvláště pro středovou souměrnost velice důležitá a problém, o kterém učitelka U49 hovoří, se jí také týká.

U49: Tady třeba mají osovou souměrnost, tak oni si musejí každý ten bodík najít v osové souměrnosti, tzn. kolmice, kružítkem přenesou stejná vzdálenost do opačné poloroviny.

[Tazatel: A není to pro ně velký skok od toho, že se mají jen dívat na obrázky?]

U49: Oni už mají, asi ze základní školy, pojem o tom, co to je osová souměrnost. Ne, nedělá jim to problém, samozřejmě, pokud jim dáte nějaký útvar, který třeba přesahuje přes tu osu, třeba když trojúhelník má vrchol v jedné polorovině a dva vrcholy v druhé, tak trochu váhají, ale zvládnou to.

Dalším problémem, se kterým se žáci potýkají a který se prostorové představivosti týká stejnou měrou, je problém nalezení všech os souměrnosti u daného útvaru. Jak říká nejenom učitelka U51, žáci většinou snadno naleznou jednu nebo dvě osy souměrnosti (horizontální a vertikální), pokud ale útvar má ještě další jednu či více os, mají už žáci většinou obtíže tyto osy v obrázku vyhledat.

U51: Tady je úloha na osovou souměrnost. To žákům většinou jde [ukazuje obrázek v úloze]. Ale jakmile mají třeba tento měsíc, tak jsou zvyklí ho rozdělovat shora *[podle osové souměrnosti s vertikální osou], ale zapomenou, že jej mohou přehnout i takto [ukazuje přehnutí podél osy, která není ani horizontální ani vertikální].*

V následujícím úryvku učitelka popisuje způsob, jak začít s výukou osové souměrnosti prakticky v reálném životě. Trochu je to i způsob, jak se vypořádat s problémem, o kterém se zmiňovala učitelka U51 výše. Žáci sami procházejí ulice a vyhledávají osovou souměrnost v různých objektech, a mohou tak snáze přijít na to, že osa souměrnosti vede nejenom vertikálně a horizontálně. Současně také zjišťují, že osová souměrnost není jen nějaký matematický pojem, ale má svůj odraz v každodenním životě. Zároveň mají více možností se o svých domněnkách a objevech bavit se svými spolužáky, a tak si učivo i více osvojit. Učitelka se však nezmiňuje o faktu, že v realitě žáci vidí spíše roviny souměrnosti a že pak žáci musí zkušenost s nimi aplikovat na dvojrozměrnou situaci, tedy osy souměrnosti. Někteří žáci mohou mít problém tuto souvislost vidět.

U43: To byli páťáci také tenkrát a já jsem vytáhla Blokus, jako skládačku, udělali jsme si na tom osovou souměrnost, byli jsme venku fotit, ukazovat si, že tenhle barák je osová souměrnost, jo, oni lítali po Vršovicích: „Paní učitelko, podívejte, i tenhle odpadkový koš, on jde rozpůlit a každá půlka je stejná...“ a vůbec netušili, že v tom je ta krása té geometrie, a přes toto my jsme se dostali k tomu, že vlastně vždy ta geometrie je součástí matematiky a že to je děsně v pohodě. To se jim líbilo, tak s těmahle šesťákama, až se dostaneme ke geometrii a osový souměrnosti, tak také vyrazíme, máme takový oblouk tady po Vršovicích ke kostelu a tak, tam jsou ty souměrnosti, speciálně tyhle secesní baráky, tak tam jako kdekoliv tu rovinu souměrnosti vedou, ať je to prostředkem baráku, ať je to oknem, ať jsou to dveře, tak na tom je ta geometrie úžasně vidět.

Stejně jako u jiného učiva i u osové a středové souměrnosti se učitelé snaží ukazovat a vysvětlovat látku pomocí her. Žáky to tak více baví a podle názoru některých učitelů se i látku rychleji naučí a lépe si ji zapamatují. Učitelka U33 například ve své výuce spojuje skupinovou práci s hrou tak, že jeden žák nakreslí polovinu útvaru a druhý žák musí podle předlohy dokreslit polovinu druhou. Jak říká, pro žáky je to dobrodružství, a tak si ani neuvědomují, že se vlastně učí.

U33: Tam se dá vymyslet spoustu obrázků. A oni si můžou různě překládat a překreslovat pomocí průsvitky a vytvořit obrázek, že mají půlku, pracujeme ve dvojicích, že jeden nakreslí jakoby půlku a ten druhý musí dokreslit ten obrázek. Takže to je pro ně takový, jako že si u toho v podstatě tvoří a že je to pro ně i nějaké dobrodružství a tak.

V dalším úryvku už se dostáváme k problematice středové souměrnosti. Učitelka U41 poukazuje na fakt, jak snadno se dají tyto souměrnosti v hlavách žáků zaměnit. Úryvek z rozhovoru naznačuje, že oddělené souměrnosti, zvlášť osová a zvlášť středová, žákům nedělají problémy, jsou schopni úlohy vypracovat, ale když mají sami rozeznat, kterou souměrnost mají použít, pak si nevědí rady a vybírají spíše náhodně, bez rozmyšlení. Jak říká učitelka U41, obtíže může způsobovat i ta skutečnost, že v učebnicích jsou souměrnosti každá zvlášť a až následně se s nimi pracuje dohromady a kámen úrazu přichází ve chvíli, kdy k souměrnostem přibydou další, pro žáky podobné operace, jako jsou shodnost, posunutí, otočení a další.

U41: Spousty těch dětí to v té osové souměrnosti udělaly tak, že udělaly středovou, že to přehodily sem a udělaly to obráceně. Já jsem jim tam pak říkala, koukni, vždyť to máš ve středový, tys to přes ten střed dal, ale na druhou stranu. Osová – to musíš dělat ty kolmice a vlastně ten bod leží na ose, kam se ti překlopí, atd.

U41: Tam v těch knížkách jsou oddělené ty souměrnost. Zase když budu brát jenom osovou, tak jí určitě budou umět dobře, protože se jim nebude mít co plést, pak budou dělat za rok středovou, určitě jim půjde dobře, ale netuším, co budou dělat v kvintě, až budou dělat využití souměrnosti a budou je mít všechny dohromady, pak je ještě vlastně otočení, posunutí.

Učitelé se většinou shodují v názoru, že i přes veškeré snahy učivo s žáky opakovat a neustále jej připomínat, žáci prostě zapomínají. Již Rendl a Páchová (2013) v rozhovorech zaznamenali názor několika učitelů, kteří si myslí, že zapomenutí učiva je otázkou několika měsíců, někdy i let, ovšem jak uvádí následující úryvek z rozhovorů, může žák „zapomenout“ i během několika dní. Zůstává ovšem otázkou, zda žákyně látku skutečně zapomněla, jak tvrdí, nebo je její chyba způsobena spíše nepozorností a nedostatečným množstvím vyřešených úloh.

U41: Když to člověk s nimi počítá, tak to umí dobře, ale přijde za 2 roky a ono najednou nic prostě, a oni to šíleně zapomínají. Nebo takhle tam kousek od vás, v té primě, jak jste seděl u toho Pavla, tak tam přes lavici seděla Zuzana, to je taky celkem premiantka třídy, holka šikovná, ale ona si udělá jeden trojúhelník osovou souměrností, ten zvládla, pak měli dělat středovou a ona mi tam řekla, že to už zapomněla, ale my jsme to dělali před týdnem, nebo před třemi dny, ale ona to zapomněla během toho jednoho příkladu, co dělala osovou, tak mi zase zapomene tu středovou, prostě v tu chvíli se prostě soustředila na osovou. No a to už je úplně katastrofa, jo, že když to probírám, ona mi to během jednoho příkladu není schopna přehazovat mezi tím…

Shrnutí

V rozhovorech týkajících se souměrností se učitelé nejčastěji zmiňují o následujících problémech:

- žáci obtížně rozeznávají osovou souměrnost od středové souměrnosti
- žáci zapomínají již probranou látku

Překvapilo mě, že zatímco, když učitelé hovořili o jiných geometrických tématech, zmiňovali velmi často špatnou prostorovou představivost, u souměrnosti tomu tak nebylo (částečně na ni upozornila učitelka U49).

Jak jsem uvedla výše, osová souměrnost se učí již v 6. ročníku, zatímco středová souměrnost se objevuje až v učebnicích pro 7. ročník základních škol. V učebnicích, které mám k dispozici, jsem žádné rozdíly v prezentaci látky nenalezla. Ve všech učebnicích se na začátku kapitoly středová souměrnost začíná opakováním již známé osové souměrnosti a osově souměrnými útvary, až poté následuje další výklad neznámého. Učebnice vždy vysvětlí hlavní pojmy souměrnosti a co to souměrnost vlastně je, až poté se věnuje osově nebo středově souměrným útvarům. Pro žáky by tak učivo mělo být snáze uchopitelné.

Učebnice od autorů Odvárko a Kadleček v tomto tématu uvedli opět dostatek příkladů i úloh, zajímavě žáky navedli na použití průsvitného papíru, ovšem co se propojení s realitou týče, tomu se příliš nevěnovali. V osové souměrnosti jsem našla pouze 3 příklady a v kapitole středová souměrnost o 1 příklad více, tedy 4 příklady z reálného života, což mi připadá málo. Učitelé se v rozhovorech zmiňují, jak se snaží žáky navést na odkrývání osové a středové souměrnosti v reálném životě, bohužel si příklady musí nacházet sami, protože učebnice je v tomto konkrétním případě příliš nepodpoří.

Autoři Šarounová a kol. představují žákům možnost rýsování obrazů v osové souměrnosti dvěma způsoby, pomocí pravítek a pomocí kružítka; kladou také důraz na způsob zápisu konstrukce, kterou podrobně popisují. V učebnice se opět příliš příkladů z reálného života neobjevuje, u osově souměrných útvarů uvádějí autoři několik útvarů, které si žáci mají představit a určit jejich případnou osu souměrnosti. Autoři se snaží žáky upozornit na fakt, že útvary jsou osově souměrné pouze na svém povrchu, nikoliv vnitřně (např. televizor, krabice, lidská bytost, a další jsou osově souměrné útvary, pokud nevezmeme v potaz jejich obsah, ten už osově souměrný není). Ovšem dále pokračují bez využití poznatků z reálného světa. U středové souměrnosti autoři postupují naprosto stejně s výjimkou zapojení příkladů z reálného života, ty se v tomto tématu neobjevují vůbec.

J. Trejbal nabízí ve své učebnici v kapitole týkající se středové souměrnosti pouze jediný příklad z reálného života, všechny ostatní příklady i úlohy jsou formulovány čistě matematicky.

4.6 Pythagorova věta

Pythagorova věta se vyučuje v 8. ročníku. Opět je pouze na učitelích, jak k výkladu této látky přistoupí. Učitelka U32 říká, že po žácích požaduje znalost Pythagorovy věty zpaměti, ovšem slovy, ne pomocí písmen. Podle ní žáci tím, že znají znění věty, mohou i lépe pochopit, co vlastně Pythagorova věta znamená. Dle mého názoru je ale nutné k tomuto pamětnímu záznamu dodat názorné vysvětlení a příslušný obrázek. Učitelka se dále zmiňuje také o faktu, že jakmile se trojúhelník označí jinak než *ABC*, pak žáci nejsou schopni své znalosti využít a pravoúhlý trojúhelník jakoby vůbec neviděli.

U32: V té Pythagorové větě, to je další věc, na který trvám. Tam chci, aby uměli zpaměti nadefinovat Pythagorovu větu, a nechci po nich, aby se mi učili takovýto c na druhou rovná se a na druhou plus b na druhou, protože oni to potom nedokážou použít. Jakmile se začne ten trojúhelník jmenovat úplně jinak nebo je to slovní úloha, ve který vůbec žádný písmenka nemají, tak jsou namydlený, protože nevědí, co je přepona, co jsou odvěsny.

V následujícím úryvku se učitelka U32 zmiňuje, že i slabé děti se mohou Pythagorovu větu naučit, ale bohužel i u této látky přichází po nějaké době zapomenutí. Také upozorňuje na fakt, že bez znalosti Pythagorovy věty budou mít žáci v matematice problémy.

U32: Jo, oni třeba měli různý obrazce, ve kterých třeba i někde byl znázorněn pravý úhel a teď tam někde nějaká úhlopříčka, a oni tam z toho třeba zapisovali pravoúhlý trojúhelník a z něj zapisovali Pythagorovu větu. A to i doopravdy ty hloupý děti tu na tu tabuli napsaly dobře. Já jsem jim třeba malovala na papíry různě takovéto obrázky a oni k nim jenom dopisovali Pythagorovu větu, ani nic nepočítaly, jenom prostě to zvládaly, jo. Normálně to zvládaly zapsat. Přešel půl roku a zase jsme nikde. Ale to kdybychom dali příklad, to je to samý třeba v té devítce, když se počítají tělesa, jo, a v těch tělesech oni mají dopočítávat nějakou výšku. A zase musejí Pythagorovou větou.

Následující úryvek poukazuje i na praktickou stránku školské matematiky. Žáci tak mají větší motivaci se Pythagorovu větu, posléze i celou matematiku více učit, protože vidí uplatnění v reálném životě. Učitelka U30 se dokonce snaží, aby si žáci na praktickou stránku matematiky přišli sami, pomocnými otázkami se je pokouší přivést na myšlenku, jak a kterou část svých matematických znalostí v určité situaci mohou využít. Jak sama říká, Pythagorova věta se dá aplikovat do mnoha praktických příkladů.

U30: Tak musím říct, že před těmi 4 lety s vámi naprosto souhlasím, že to byl docela oříšek na to, aby děti si ji aplikovaly do těch praktických příkladů, ale právě proto, že se dá ta Pythagorova věta použít na spoustu příkladů z praxe. Ať už k výpočtu délky nějakého okapu nebo něčeho takového, že najednou ví, že nemusí, já vždycky říkám, jak bys na to přišel. No, já bych tam vylezl na barák, změřil to. A já povídám. No jo, ale to je někdy obtížný, jak budeš měřit, čím budeš měřit, vždyť spadneš z toho domu. Aha, aha. To bys musel stavět lešení a to už oni vědí, že to stojí peníze, atd. A říkám: a nešlo by to třeba spočítat? A oni, a jo, vždyť je tam pravoúhlý trojúhelník. Že na to přicházejí sami.

Učitelka U33 v následujícím úryvku z rozhovoru upozorňuje na nutnost co nejvíce si při výkladu Pythagorovy věty dělat obrázky (pokud možno barevně odlišené). Zdůrazňuje tak fakt, že žáci nejlépe pochopí výklad, když jej nejenom slyší, ale také vidí. Několik učitelů se také shoduje, že je třeba žákům předkládat pokud možno co nejrůzněji označené trojúhelníky, aby si žáci utvořili v hlavě obecný vzorec pro Pythagorovu větu a nezůstal jim v hlavě pouze izolovaný vzorec se základními písmenky *a*, *b*, *c* (viz také U32 nahoře).

U33: Pak je tam Pythagorova věta, což považuju za poměrně důležitou část, protože na ní je potom stavěna celá početní geometrie a musím říct, že u Pythagorovy věty malovat, malovat, psát různé druhy trojúhelníků, protože jsem se setkala s tím, že děti mají zafixovanou Pythagorovu větu, že $c^2 = a + b^2$*, a ve chvíli, kdy dostanou trojúhelník KLM, tak je to problém, takže my začínáme tím, že schválně bereme úplně různé trojúhelníky s různými písmenky, aby každý byly schopny zapsat do tvaru Pythagorovy věty. A aby vždycky si uvědomily pojem odvěsna a přepona.*

Velice důležité při výpočtu Pythagorovy věty je, aby žáci rozpoznali pravoúhlý trojúhelník a aby byli schopni pojmenovat všechny jeho strany, tedy dvě odvěsny a přeponu. K této znalosti jim napomáhá grafické znázornění úlohy. Díky grafickému znázornění si žáci snáze uvědomí, že každé ze tří čísel, které jsou ve vzájemném vztahu, je vlastně obsah nějakého čtverce. Jak již bylo řečeno výše, žáci rychle zapomínají, a proto si také nemusí uvědomit, že nějaké číslo na druhou je ve skutečnosti obsah čtverce o dané délce strany, a tento fakt si grafickým znázornění úlohy připomenou. Jak uvádí učitel U44, při výkladu Pythagorovy věty lze snadno využít i počítače, který usnadní práci učiteli. Někteří žáci se navíc mohou v počítačové úpravě úlohy lépe orientovat, obzvlášť jedná-li se o úlohu prostorovou.

[Tazatel: A jak to tedy děláte?]

U44: No, hodně polopatě. Odvěsny, předpona, hodně nakreslím ty čtverce a třeba i počítačově to přeneseme a je vidět, že ty dva menší dají součet.

[Tazatel: Aha, takže používáte, že to tam přenesete nějak myší? Že to tam je vidět? Nebo jak to myslíte s tím počítačem?]

U44: Já jsem to nepřenášel myší, my to máme přímo na některých cédéčkách, že tam je to vidět. Že to v tom programu už je, anebo když je nejhůř, to třeba nakreslím na tabuli a změříme si obsahy.

[Tazatel: Hmhm, jo, takže když toto potom takto uvedete, tak potom už je to OK, jo? Když to pochopí tu první hodinu?]

U44: Když to pochopí tu první hodinu, dávám jim různé Pythagorejské trojúhelníky, že to platí na různých, hodně důležitý je říci, že to platí na pravoúhlým trojúhelníku, a pak je další výborná věc, vyjadřování odvěsny, přepony, proč je tam ta odmocnina, to už musejí být dobře probrané ty rovnice.

Shrnutí:

V rozhovorech, ve kterých se učitelé zmiňují o Pythagorově větě, převažují poznámky typu:

- nutnost různorodého označování trojúhelníků
- názorný výklad pomocí kreseb
- správné označování všech stran trojúhelníka (odvěsny, přepona)
- ukázky použití Pythagorovy věty v praxi

U kapitoly Pythagorova věta se učitelé shodují, že nejdůležitější je názornost výkladu, jak sami říkají „malovat, malovat, malovat“. Dále se učitelé velice často zmiňují o nutnosti obměňovat pojmenování trojúhelníků z důvodu hlubšího pochopení látky. Někteří žáci podle slov učitelů nejsou schopni akceptovat fakt, že písmena ve vzorci se mohou také zaměnit, jsou pouhými zástupci odvěsen a přepony. Žádný z učitelů se nezmiňoval o tom, že by pro žáky byl nějaký rozdíl při používání Pythagorovy věty v rovině či v prostoru.

Pythagorova věta je v každé ze zkoumaných učebnic obsahově přibližně stejně rozvedená. Ovšem v učebnici od autora Trejbala jsem si všimla jisté výjimky. Zde totiž není uvedeno, jako v dalších dvou mnou sledovaných učebnicích, užití Pythagorovy věty v rovině a v prostoru. Samozřejmě i zde autor uvádí několik úloh na užití Pythagorovy věty v rovině a v prostoru, ovšem neuvádí žádnou řešenou úlohu, která by žákům ukázala, jak se může využít Pythagorova věta v prostorových útvarech. Naopak se zde autor více věnuje pojmu iracionální číslo a reálné číslo. Učebnice od autorů Šarounová a kol. zase uvádí v závěru kapitoly pythagorejské trojúhelníky, o kterých se v ostatních učebnicích autoři nezmiňují. Základní výklad je však ve všech mnou sledovaných učebnicích zhruba stejný. Autoři na začátku výkladu uvádějí rovnou

Pythagorovu větu, většinou se snaží využít jak grafické podoby, tak slovní a algebraické vyjádření. Učebnice neobsahují žádné návodné úlohy, které by žáky mohly k dané větě dovést. Ve všech učebnicích jsem také nalezla alespoň malou zmínku o původu Pythagorovy věty, a tudíž i vysvětlení jejího názvu. Dále následují různé úlohy na užití Pythagorovy věty v praxi, tedy nejenom v rovině, ale také v prostoru.

V učebnici Odvárko, Kadleček se autoři snaží, aby žáci nepodlehli jednotnému označení a načrtávání stále stejných trojúhelníků tím, že od samého začátku výkladu ukazují několik možných variant umístění pravého úhlu i více variant označení vrcholů trojúhelníků. To se prolíná celým výkladem. Pro žáky je i přínosné, že se zde setkají s důkazem Pythagorovy věty v různých reprezentacích: graficky, slovně a algebraicky. Učebnice se následně už ke slovnímu vyjádření nevrací, ale žáci vědí, kde jej mohou nalézt.

Šarounová a kol. začínají celý výklad náhledem do historie, krátce žákům vysvětlí, kdo to byl Pythagoras ze Samu, kdy žil a co objevil. Stejně jako Odvárko a Kadleček Pythagorovu větu prezentují více způsoby. Pro žáky asi nejnázornější je znázornění grafické, kde zároveň vidí i důkaz platnosti této věty. Autoři se v učebnici nedrží jednotného označení trojúhelníků *ABC*, toto označení využívají jen na začátku, kdy větu vysvětlují, a poté přechází k označení *DEF*, *KLM* a další. Stejně tak umístění pravého úhlu se snaží uvádět v každém příkladu jinak, aby si žáci zvykli na různé umístění a pojmenování. Šarounová a kol. mají v úlohách pro žáky zakomponovanou také jednu úlohu, která žáky podvědomě nutí vrátit se ke slovnímu vyjádření Pythagorovy věty, k dalším výpočtům však žákům stačí už pouze algebraická znalost.

V učebnici od J. Trejbala mohou žáci vidět hned několik grafických znázornění Pythagorovy věty. Je zde uvedeno jak grafické, tak slovní a algebraické vyjádření. Základní algebraické vyjádření je uvedeno, stejně jako v předešlých učebnicích, na trojúhelníku označeném *ABC*. I J. Trejbal uvádí několik historických faktů o Pythagorovi ze Samu a jeho životě. Autor v průběhu výkladu mění jak umístění pravého úhlu, tak označení trojúhelníků. Také v této učebnici se autor v úlohách pro žáky jednou vrací ke slovnímu vyjádření Pythagorovy věty, poté opět přechází k algebraickému zápisu. Přínosem této učebnice je dostatečné množství obrázků v podobě návodných příkladů, konkrétní ukázky umístění pravoúhlého trojúhelníku i jeho vyznačení v určitých útvarech.

5 Závěr

Cílem diplomové práce bylo prostřednictvím rozhovorů s učiteli zjistit, jaké didaktické praktiky využívají při výuce vybraných témat, a porovnat je s praktikami, k nimž vedou učebnice a další odborná literatura. Dalším cílem bylo popsat, v čem učitelé vidí z hlediska žáků v daných tématech problém.

Učitelé se ve všech vybraných tématech shodli na názoru, že většina učebnic neuvádí dostatečné množství realistických příkladů a úloh. Proto se sami učitelé zapojují do jejich vymýšlení. Z těchto úloh pak žáci podle učitelů snáze propojí svět matematiky se světem reálným. Z rozhovorů vyplývá, že by čeští žáci potřebovali zlepšit čtenářskou gramotnost, aby lépe zvládali slovní úlohy. Dále stručně shrnu poznatky u jednotlivých mnou sledovaných témat.

Přímá a nepřímá úměrnost: Na základě analýz rozhovorů a učebnic jsem zjistila, že si učitelé v tomto tématu převážně stěžují na malý prostor pro nepřímou úměrnost, a to jak ze strany učebnic, tak z pohledu časového rozvrhu, kdy je věnován stejný prostor přímé i nepřímé úměrnosti. Nepřímá úměrnost je pro žáky složitější, proto by jí měl být také věnován větší prostor. Téma přímé a nepřímé úměrnosti učitelé využívají jako odrazový můstek k výkladu grafů, rovnic… Učitelé žákům dávají někdy i nepřesné, ale pro žáky snáze zapamatovatelné poučky. Otázkou zůstává, zda tyto nepřesnosti pak nepůsobí problémy později, kdy už žáci nepracují jen s úlohami na úměrnosti.

Lineární rovnice: Učitelé se shodují na názoru, že hlavním problémem tématu lineární rovnice je správné použití ekvivalentních úprav rovnic. V rozhovorech lze vysledovat několik rozdílných metod, kterými se učitelé snaží žákům tyto úpravy vysvětlit; některé jejich metody jsou originální a v učebnicích se neobjevují (v mnou sledovaných učebnicích se objevila pouze metoda vah a metoda „měnič“). Učitelé okrajově zmiňují i problém úpravy v sešitech a provádění zkoušky.

Dělitelnost: Problémy žákům podle učitelů činí znaky dělitelnosti čísel 3 a 9. V rozhovorech také učitelé často upozorňují na problémy při rozlišování pojmů násobek a dělitel a hledání nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele.

Učebnice se liší nejenom v časovém zařazení, ale také v rozsahu výkladu, proto si učitelé musí často vypomáhat sami (např. formou her, pohybových aktivit, názorností).

Procenta: Učitelé mají různý způsob výkladu, někteří vysvětlují procenta přes 1 %, jiní přes trojčlenku. V rozhovorech se však shodují v názoru na žákovské obtíže s určením základu a s načítajícími se slevami. Dále z rozhovorů vyplývá, že žáci mají nedostatečný vhled do úlohy na procenta, obtížně určují základ. V jedné řadě mnou zkoumaných učebnic jsou striktně rozděleny úlohy do tří typů, což někteří učitelé odsuzují kvůli nebezpečí formalismu.

Souměrnosti: Podle učitelů žáci snadno naleznou vertikální a horizontální osu souměrnosti, s jinou orientací osy už mají problémy, mají špatnou prostorovou představivost. S tím souvisí i jejich obtíže s odlišením osové souměrnosti od středové souměrnosti. Učitelé se snaží žáky motivovat zapojením různých her do výuky (např. Blokus) či focením osově souměrných útvarů. Učebnice uvádějí dostatek příkladů na souměrnosti, ovšem nikoliv z reálného života.

Pythagorova věta: Jako problémové učitelé označili prototypické umístění a označení trojúhelníků. Shodují se v potřebě názornosti, kterou učebnice do jisté míry splňují. Učitelé se snaží žákům přiblížit Pythagorovu větu na příkladech z reálného života, kde má velké využití. Výklad provádějí na barevně odlišených nákresech, aby žáci získali lepší přehled a snáze rozeznali pravoúhlý trojúhelník.

I když nelze získané poznatky v žádném případě kvůli omezenému vzorku zobecňovat, domnívám se, že rozhovory přinesly přinejmenším prvotní vhled do toho, jak učitelé uvažují o sledovaných tématech z hlediska žákovských obtíží i svých didaktických přístupů. Práce by mohla pomoci budoucím učitelům v získávání praktických zkušeností, které by mohli dále využít.

Velký přínos pro mou budoucí praxi vidím v tom, že jsem si mohla důkladně pročíst rozhovory s několika desítkami učitelů, ve kterých se učitelé dělí o své zkušenosti z praxe, názory na výuku i učebnice. Doufám, že se v budoucnosti budu moci k těmto rozhovorům vrátit a čerpat z nich inspiraci pro svou praxi, je v nich totiž mnoho názorů, které bych si určitě ráda ověřila v praxi. Za zajímavou považuji i zkušenost s analýzou několika řad učebnic. Měla jsem možnost vidět jejich rozdílný způsob výkladu sledovaných témat, různorodost v názornosti a propojenosti s reálným světem. Určitě jsem vděčná hlavně za příležitost nahlédnout do praxe jiných, zkušenějších učitelů.

6 Literatura a zdroje

ČÁP, J., MARES, J. *Psychologie pro učitele*. Praha: Portál, 2007.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál, 2001.

KOMENSKÝ, J. A. *Didaktika analytická*. Praha: Samcovo knihkupectví, 1946.

KOMENSKÝ, J. A. *Velká didaktika. Vybrané spisy, sv. I*. Praha: SPN, 1956.

LINHART, J. *Základy psychologie učení*. Praha: SPN, 1982.

MAŇÁK, J., ŠVEC, V. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003.

MAREŠ, J. *Styly učení žáků a studentů*. Praha: Portál, 1998.

PRŮCHA, J., WALTEROVÁ, E., MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha: Portál, 2009.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: MŠMT, 2016. Dostupný z www: http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf

RENDL, M., VONDROVÁ, N. a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*, Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2013.

SKALKOVÁ, J. *Obecná didaktika*. Praha: Grada Publishing, 2007.

SCHUKAJLOW, STANISLAW a kol. Teaching methods for modelling problems and students' task-specific enjoyment, value, interest and self-efficacy expectations. *Educational Studies in Mathematics*. 2012, 79(2), 215–237.

STEHLÍKOVÁ, N. Kultura vyučování matematice a využití úloh. In Vagaský, M., Hejný, M., Kvasz, L. (Eds.). *Zborník príspevkov z letnej školy z teórie vyučovania matematiky Pytagoras 2006*. Bratislava : P-MAT, 2006, s. 86–92.

STEHLÍKOVÁ, N. Charakteristika kultury vyučování matematice. In Hošpesová, A., Stehlíková, N., Tichá, M. (Eds.). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice : Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 13–48.

VONDROVÁ, N., ŽALSKÁ, J. Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Rendl, M., Vondrová, N. a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*, Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2013, s. 63–126.

VONDROVÁ, N. *Úvod do didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014. Dostupný z www: vzdelavani-dvpp.eu/download/opory/18vondrova68.kn.bl.TISK.pdf

Seznam použitých učebnic:

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: Prometheus, 1999.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl*. Praha: Prometheus, 1997.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: Prometheus, 1999.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl*. Praha: Prometheus, 1999.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl*. Praha: Prometheus, 1999.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: Prometheus, 1999.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl.* Praha: Prometheus, 2000.

ODVÁRKO, O., KADLEČEK, J. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: Prometheus, 2001.

ŠAROUNOVÁ, ALENA a kol. *Matematika 6, 1. díl*. Praha: Prometheus, 2008.

ŠAROUNOVÁ, ALENA a kol. *Matematika 7, 1. díl*. Praha: Prometheus, 1999.

ŠAROUNOVÁ, ALENA a kol. *Matematika 7, 2. díl.* Praha: Prometheus, 1998.

ŠAROUNOVÁ, ALENA a kol. *Matematika 8, 1. díl*. Praha: Prometheus, 2009.

ŠAROUNOVÁ, ALENA a kol. *Matematika 8, 2. díl*. Praha: Prometheus, 2009.

ŠAROUNOVÁ, ALENA a kol. *Matematika 9, 1. díl*. Praha: Prometheus, 2007.

TREJBAL, JOSEF a kol. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl.* Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 1999.

TREJBAL, JOSEF a kol. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 1998.

TREJBAL, JOSEF a kol. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 1998.

TREJBAL, JOSEF a kol. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 1998.

TREJBAL, JOSEF a kol. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl.* Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 1999.