



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Ing. Peter Lendacký

Výpočet kapitálového požadavku za tržní riziko pro opce na koš akcií

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petr Myška, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2016

Prohlášení autora

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 15.7.2016

podpis

Název práce: Výpočet kapitálového požadavku za tržní riziko pro opce na koš akcií

Autor: Ing. Peter Lendacký

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petr Myška, Ph.D.

Abstrakt: Cílem práce je porovnat různé přístupy k výpočtu kapitálového požadavku na krytí tržních rizik pro opce na koš akcií a zjistit jejich dopady na požadavek pro konkrétní instrument. V první části práce jsou stručně popsány možné přístupy k výpočtu požadavku, a to standardizovaným přístupem a interním modelem, a teoretické základy nutné pro ocenění opcí. Pro větší názornost dopadů výpočtů byl vybrán instrument s vnořenými opcemi na akcie, který je v práci oceňován metodou Monte Carlo. Část práce je také věnována popisu Black-Scholes modelu jakožto výchozímu modelu i pro složitější instrumenty. V závěru práce jsou popsány a diskutovány dopady do kapitálu.

Klíčová slova: kapitálový požadavek, opce na akcie, Value at Risk

Title: Calculation of capital requirements of market risk for options on stock's basket

Author: Ing. Peter Lendacký

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Myška, Ph.D.

Abstract: The goal of the paper is to compare different approach in calculation of capital requirement of market risk for options on stock's basket and describe their impact on selected instrument. The first part of the paper describes possible approaches for the capital requirement calculation, namely Standardized approach and Internal model approach, and the theoretical base for option pricing. An instrument with the embedded option on equities was chosen to show the impact. Although the instrument is valued using Monte Carlo simulation, one chapter is devoted to Black-Scholes model as the base model for option pricing.

Keywords: capital requirement, equity option, Value at Risk

Pod'akovanie

Rád by som sa pod'akoval RNDr. Petrovi Myškovi, Ph.D. za cenné pripomienky, odborné vedenie a celkovú podporu pri tvorbe diplomovej práce.

Obsah

POUŽITÉ ZNAČENIE.....	1
ÚVOD	2
1 OPCIA A PRÉMIOVÝ VKLAD	3
1.1 PRÉMIOVÝ VKLAD AKC 189.....	3
2 SÚČASNÁ REGULÁCIA KAPITÁLOVEJ POŽIADAVKY	6
2.1 VÝPOČET ŠTANDARDIZOVANÝM PRÍSTUPOM	7
2.1.1 Zjednodušený prístup	8
2.1.2 Delta-plus prístup	8
2.1.3 Prístup na základe scenárov.....	8
2.2 VÝPOČET INTERNÝM MODELOM.....	9
3 ZÁKLADY PRE OCEŇOVANIE FINANČNÝCH DERIVÁTOV	11
3.1 ITOOVA ROVNICA	11
3.2 TEÓRIA ARBITRÁŽE	12
3.3 ROZDELENIE ZMIEN CIEN INŠTRUMENTU.....	13
3.4 MONTE CARLO METÓDY.....	15
3.5 BLACK-SCHOLES MODEL	17
3.5.1 Black-Scholes rovnica pre binárne opcie.....	21
3.6 NÁHODNÉ VEKTORY.....	22
4 OCENENIE PRÉMIOVÉHO VKLADU	23
4.1 PREDPOKLADY PRE OCENENIE VKLADU.....	24
4.2 OCENENIE POMOCOU MONTE CARLO SIMULÁCIE	25
4.3 OCENENIE POMOCOU BINÁRNYCH OPCÍ.....	27
5 VÝPOČET VAR.....	28
5.1 VÝPOČET POMOCOU HISTORICKEJ SIMULÁCIE.....	28
5.2 VÝPOČET ŠTANDARDIZOVANOU METÓDOU	30
5.2.1 Prístup delta-plus.....	31
5.2.2 Prístup podľa scenárov.....	33
5.2.3 Zhrnutie výsledkov.....	35
6 ZÁVER	37
LITERATÚRA.....	38
PRÍLOHY PRÁCE.....	39

Použité značenie

$r(t, T)$	bezriziková sadzba v čase t na obdobie od t do T
$r(t)$	okamžitá bezriziková sadzba v čase t, $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} r(t, T)$
$fw(r, s, T)$	forwardová bezriziková sadzba v čase t, na obdobie od s do T
CAR_{STA}	kapitálova požiadavka podľa štandardizovaného prístupu
CAR_{IM}	kapitálova požiadavka podľa interného modelu
$J(A)$	indikátor javu A

Úvod

Banky majú, v porovnaní s bežnými firmami, špecifickú bilanciu tým, že významná časť ich pasív (až 90%) je tvorená záväzkami. Krach banky tak vždy sprevádzal výrazne mnoho neuspokojených veriteľov. Navyše, veľké banky boli stále dôležitou súčasťou ekonomiky. Tieto dôvody položili základy pre reguláciu bánk, snažiac sa tak ochrániť či už množstvo veriteľov, prípadne celú ekonomiku. Mimo povolovaciu a licenčnú rovinu sa regulácia bankovníctva uberala hlavne smerom k požiadavkám na kapitál, čiže vlastné zdroje. Podľa svojich činností banky identifikujú riziká z nich plynúce a sú povinné držať aspoň minimálny kapitál k pokrytiu neočakávaných udalostí.

Novodobá regulácia sa začala rozvíjať vznikom Banky pre medzinárodne platby (Bank for International Settlement, BIS) v roku 1930, ktorá síce bola spočiatku založená kvôli administrácii a dohľadu nad reparačnými platbami po prvej svetovej vojne, časom sa však stala miestom pre fóra a diskusie pre guvernérov významných centrálnych bánk. Impulz k zavedeniu medzinárodných požiadaviek pre meranie kapitálovej primeranosti sa stal úpadok Bankhaus Herstatt v Nemecku a Franklin National Bank v USA. Po týchto udalostiach sa predstavitelia centrálnych bánk G10 rozhodli zriadiť Bazilejský výbor pre bankový dohľad (Basel Committee on Banking Supervision, BCBS), ktorý v roku 1988 vydal "Basel Capital Accord", známy ako Bazilej I, a ten sa stal medzinárodne uznávaným štandardom pre výpočet kapitálovej požiadavky pre úverové riziká. V roku 1996 bol k Bazilej I vydaný dodatok, ktorý priniesol požiadavky na kapitál pre trhové riziká.

Práve výpočtom kapitálovej požiadavky pre trhové riziká pre opcie na kôš akcií sa ďalej zaoberá predkladaná práca. V prvej časti práce je popísaná aktuálna regulácia ku kapitálovej požiadavke pre opcie. Výpočtu samotnej kapitálovej požiadavky predchádza ocenenie opcie. Časť práce sa preto venuje aj základmi pre ocenenie opcií. V záverečnej časti práce je popísaný výpočet kapitálovej požiadavky z praktického hľadiska. Aj keď pre základné typy opcií je možné k oceneniu použiť priamo analytické vzorce, pre väčšie zovšeobecnenie je vždy popísaný prístup s využitím Monte Carlo simulácií. Všetky výpočty sú taktiež aplikované na jeden konkrétny prémiový vklad, v ktorom je vnorená opcia na kôš akcií, a výpočtom kapitálovej požiadavky pre tento vklad na základe rôznych prístupov povolených súčasnou reguláciou. V závere práce sú porovnané jednotlivé výsledky a diskutovaný ich dopad na kapitál banky.

1 Opcia a prémiový vklad

Vyjdime z definície základného druhu opcie. Opcia je nástroj finančného trhu, finančný derivát, ktorý predstavuje právo investora, nie však povinnosť, kúpiť (call opcie) alebo predať (put opcie) emitentovi opcie podkladový inštrument za vopred stanovenú cenu (realizačná cena) a v stanovenom čase (realization time). V prípade, že sa investor rozhodne svoje právo využiť, teda realizovať opciu, emitent má povinnosť investorovi podkladový inštrument predať (call opcie), prípadne ho odkúpiť (put opcie). Investor za svoje právo platí emitentovi opčnú prémii (cena opcie).

V skutočnosti však, v čase realizácie opcie, zvyčajne nedochádza k fyzickej kúpe, či predaji, podkladového aktíva, iba k finančnému vysporiadaniu. Plnenie zo základných druhov opcií závisí na okamžitej cene podkladového inštrumentu, S , v čase realizácie opcie. Keďže držiteľ opcie môže pri uplatnení opcie získať od vypisovateľa podkladový inštrument za cenu K (realizačná cena), je plnenie z call opcie $\max(S - K, 0)$. Pre put opciu $\max(K - S, 0)$.

V ďalších kapitolách budeme využívať binárne opcie, nazývané tiež digitálne opcie. Binárna call opcia vyplatí jednu jednotku v prípade, že $S \geq K$.

1.1 Prémiový vklad AKC 189

Pre praktickú ilustráciu výpočtu kapitálovej požiadavky budeme pracovať s produktom Prémiový vklad České spořitelny s označením "AKC 189¹ Akciový prémiový vklad v EUR."

Tento typ produktov je podobný termínovaným vkladom, s tým rozdielom, že výnos prémiového vkladu je až do času splatnosti vkladu neznámy. Banka v čase splatnosti vypláca klientovi výnos, ktorý je závislý na výkonnosti naviazaných akcií. Za tuto neistotu, banka klientovi ponúka vyššiu sadzbu než je bežná pre štandardné termínované vklady.

Akciové prémiové vklady majú definovanú dobu trvania, podkladové akcie, prémiovú a základnú úrokovú sadzbu, časy pozorovania cien akcií a podmienky pripísania úroku na základe pozorovaných cien akcií. V čase pred emisiou (počiatkom) prémiového vkladu dôjde k stanoveniu (fixovaniu) cien podkladových akcií. Vo vopred určených časoch pozorovania cien akcií, dôjde k vyhodnoteniu podmienky pre pripísanie základnej alebo

¹ https://cz.products.erstegroup.com/Retail/cs/Produkty/PruC3uA9miovuC3uA9_a_StrukturovanuC3uA9_vklady/Factsheets/basket_Factsheet/index.phtml?q=&ISIN=PV0000001026&ID_NOTATION=

prémiovej sadzby. Podmienky pre pripísanie sadzby sú zväčša nastavené tak, že ceny určitého počtu akcií musia byť v stanovenom pásme vzhľadom k počiatočným cenám akcií. V časoch pozorovania cien dochádza k zamknutiu výnosu prémiového vkladu. Pri splatnosti vkladu je vyplatená nominálna hodnota vkladu a "prémia", nazvime ju kupón, a je to určité percento z nominálnej hodnoty. Kupón je stanovený ako súčet zamknutých výnosov za dobu trvania vkladu.

Uvedme príklad: Nech prémiový vklad vypláca základnú sadzbu 3% p. a., prémiovú sadzbu 6% p. a. (inak 0). Doba trvania nech sú 2 roky a časy pozorovania cien nech nastávajú 2x ročne, vždy po šiestich mesiacoch. Máme teda 4 obdobia fixácie výnosov. Predpokladajme, že za prvé a štvrté obdobie je zafixovaný prémiový výnos, za druhé obdobie základný, a za tretie je fixácia nula. V čase splatnosti klient dostane vyplatenú nominálnu hodnotu (vložené prostriedky) a kupón vo výške $\frac{6\%}{2} + \frac{3\%}{2} + \frac{0\%}{2} + \frac{6\%}{2} = 7,5\%$ z nominálnej hodnoty.

Vklad AKC 189 je uzatváraný na 2,5 roku. Výška prémiovej a základnej sadzby je 4% p. a. a 2% p. a. z nominálnej hodnoty. Podkladom je 21 akcií, ktorých detail je uvedený v prílohe tejto práce. Pozorovanie cien akcií, a teda aj fixácia výnosov prebieha s dennou frekvenciou. Podmienka pre priznanie prémiovej sadzby v pozorovaný deň je, aby cena všetkých podkladových akcií bola aspoň vo výške z dňa ich fixácie. V prípade, že táto podmienka nie je splnená, ale ceny všetkých akcií sú aspoň na úrovni 80% z fixovanej ceny, je priznaná základná sadzba. Vklad v čase splatnosti vypláca nominálnu hodnotu a k nej výnos, kupón, podľa vyššie uvedených podmienok.

Pre výpočet kupónu z uvedeného typu vkladu majme S_t^1, \dots, S_t^{21} uzatváracie ceny 21 podkladových akcií pre $t = \{0, \dots, Z, \dots, D\}$, kde

- 0 je rozhodný deň stanovenia ceny,
- Z je prvý deň prepočtu výnosu,
- D je posledný prepočtu výnosu.

Nech vklad vypláca prémiovú sadzbu vo výške π (p. a.) z nominálnej hodnoty NV , a základnú sadzbu vo výške b (p. a.). Označme $J(A)$ indikátor javu A . Potom celková vyplatená čiastka z vkladu v čase splatnosti vkladu T , $T > D$, bude nominálna hodnota a kupón, kde

$$\text{kupón} = NV \left(\frac{\pi - b}{365} \sum_{k=Z}^D J \left(\min_i \left\{ \frac{S_k^i}{S_0^i} \right\} \geq 1 \right) + \frac{b}{365} \sum_{k=Z}^D J \left(\min_i \left\{ \frac{S_k^i}{S_0^i} \right\} \geq 0.8 \right) \right) \quad (1.1)$$

Konkrétne hodnoty vybraného prémiového vkladu sú uvedené v tabuľke 1. Zoznam podkladových akcií a leták prémiového vkladu sú v prílohe.

Mena emisie	EUR
Dátum obchodu	23. 05. 2014
Rozhodný deň stanovenia ceny	27. 06. 2014
Prvý deň prepočtu výnosov	30. 06. 2014
Posledný deň prepočtu výnosov	28. 12. 2016
Dátum splatnosti	30. 12. 2016
Prémiová sadzba	4% p.a.
Základná sadzba	2% p.a.

Tabuľka 1 Detaily akciového prémiového vkladu AKC 189

2 Súčasná regulácia kapitálovej požiadavky

Jednou zo zákonných povinností banky je dodržiavať kapitálovú primeranosť, čiže držať primeraný objem kapitálu v pomere k rizikovej expozícii banky.

Aktuálna regulácia európskych bánk vychádza z jednotnej legislatívy Európskej únie, ktorú pre oblasť bankovníctva pripravuje Európsky orgán pre bankovníctvo (European Banking Authority, EBA). Cieľom EBA je priniesť harmonizáciu v pravidlách regulácie v Európskej únii, aktuálne založených na Basel III, a to pomocou vytvorenia jednotného európskeho súboru pravidiel v oblasti bankovníctva (Single Rulebook). Single Rulebook aktuálne pozostáva z troch hlavných dokumentov

- Smernica o ozdravení a riešení krízových situácií, Smernica 2014/59/EÚ, BRRD²
- Smernica o kapitálovej primeranosti, Smernica 2013/36/EÚ, CRD³ IV
- Nariadenie kapitálovej požiadavky, Nariadenie EÚ 575/2013, CRR⁴

a ďalej z delegovaných a vykonávacích nariadení, kde do skupiny vykonávacích nariadení patria hlavne regulačné a vykonávacie technické predpisy (RTS a ITS⁵).

Čo sa týka výpočtu kapitálovej požiadavky vychádzame z Nariadenia EÚ 575/2013, ďalej len Nariadenie.

Požiadavka na vlastné zdroje sa delí na požiadavku na podiel Tier 1 vlastného kapitálu, podiel Tier 1 kapitálu a celkový podiel kapitálu. Tieto požiadavky sa počítajú podobne, rozdiel je len v požadovanom pomere a taktiež sa mení čitateľ podielu podľa kapitálu. Uvedme detailne iba požiadavku na celkový podiel kapitálu.

Požiadavka na celkový podiel kapitálu sa stanoví ako celkové vlastné zdroje v percentuálnom vyjadrení k celkovej hodnote rizikovej expozície. Čiže

$$\textit{vlastné zdroje} = 12,5\% * \textit{riziková expozícia}, \quad (2.1)$$

kde riziková expozícia je súčet požiadaviek na vlastné zdroje na krytie kreditných, trhových a operačných a ďalších rizík.

² Bank Resolution and Recovery Directive

³ Capital Requirement Directive

⁴ Capital Requirement Regulation

⁵ Regulatory Technical Standard, Implementing Technical Standard

V tejto práci sa v oblasti trhových rizík budeme zaoberať iba výpočtom požiadavky na vlastné zdroje pre *pozičné riziko akciových nástrojov*, ktoré sa ďalej delí na požiadavku pre špecifické riziko a riziko všeobecné. *Špecifické riziko* pozície sa viaže k zmene ceny (podkladového) inštrumentu z dôvodov naviazaných na emitenta inštrumentu. *Všeobecné riziko* pozície je riziko zmeny ceny vyplývajúcej zo zmeny trhových podmienok bez špecifického vzťahu k atribútom konkrétneho inštrumentu. Pre výpočet špecifického a všeobecného rizika Nariadenie umožňuje zvoliť z dvoch prístupov, pričom prístupy je možné kombinovať.

- výpočet interným modelom
- výpočet štandardizovaným prístupom

2.1 Výpočet štandardizovaným prístupom

Každá pozícia v kapitálových nástrojoch nesie so sebou riziko, že dôjde k nepriaznivej zmene hodnoty inštrumentu. Preto pri výpočte požiadavky na kapitál pre pozičné riziko kapitálových nástrojov je hlavným parametrom pozícia v danom inštrumente. Nariadenie ďalej rozlišuje pozície na *celkovú čistú pozíciu a brutto pozíciu*.

Brutto pozíciu získame súčtom absolútnej hodnoty čistej dlhej pozície a absolútnej hodnoty čistej krátkej pozície.

Pre celkovú čistú pozíciu najprv spočítame rozdiely čistých dlhých pozícií a čistých krátkych pozícií pre každý trh zvlášť. Súčtom ich absolútnych hodnôt tak získavame čistú krátku pozíciu.

Nie je prekvapivé, že celková čistá pozícia sa použije k výpočtu požiadavky na krytie všeobecného rizika, a to jej pre násobením koeficientom 8%. Výpočet požiadavky na krytie špecifického rizika získame vynásobením brutto pozície koeficientom 8%.

Špeciálna pozornosť sa v Nariadení venuje opciám, pričom podľa článku 329 sa pre výpočet pozície pre opcie vezme pozícia v samotnom podkladovom inštrumente, vynásobená deltou opcie pre daný inštrument.

Zmyslom požiadavky na krytie rizika pozície, je držať kapitál, ktorý by pokryl nepriaznivú zmenu hodnoty držaného inštrumentu. Preto, keďže hodnota opcie sa nemení lineárne podľa hodnoty samotného podkladového inštrumentu, a navyše je závislá aj na volatilitate

podkladového inštrumentu, Nariadenie ukladá povinnosť počítať pre opcie požiadavku na vlastné zdroje aj z rizík iných než pozičných. Výpočet týchto požiadaviek je stanovený v Delegovanom nariadení 528/2014 (ďalej len DA), zaoberajúcim sa rizikom iným než delta pri opciách v štandardizovanom prístupe. Podľa DA má inštitúcia ďalšie tri možnosti ako spočítať požiadavku pre riziká iné než delta:

- zjednodušený prístup
- prístup delta-plus
- prístup na základe scenárov

2.1.1 Zjednodušený prístup

Tento prístup môžu uplatniť iba inštitúcie, ktoré nakupujú len opcie alebo waranty. V tomto prístupe záleží na type opcie, a keďže sa v ďalších kapitolách budeme bližšie zaoberať konkrétnym typom prémiového vkladu, ktorý banka upisuje a nie len nakupuje, tento prístup by nemohol byť použitý. Preto tento prístup nebudeme popisovať.

2.1.2 Delta-plus prístup

Pri zvolení tohto prístupu musí inštitúcia vypočítať požiadavky zvlášť za gamma a vega riziko. Kde gamma sa myslí citlivosť delty opcie na zmenu ceny podkladového aktíva, a vegou sa myslí citlivosť hodnoty opcie na zmenu volatility. Pričom jednotlivé požiadavky sa spočítajú:

$$gamma\ požiadavka = -\min\left(0, \frac{1}{2} Gamma * (hodnota\ podkladu * 8\%)^2\right) \quad (2.2)$$

$$vega\ požiadavka = |Vega * volatilita * 25\%| \quad (2.3)$$

Pri výpočte požiadavky na krytie gamma rizika sa sčítajú gamma vplyvy pre akcie patriace do rovnakého trhu (podľa krajiny rizika). Výsledná požiadavka je absolútna hodnota súčtu záporných hodnôt gamma dopadov.

2.1.3 Prístup na základe scenárov

Pri využití prístupu na základe scenárov sa pre každý podkladový inštrument opcie vytvorí matica scenárov, a určí sa hodnota opcie pre každý scenár. Na základe takto spočítaných hodnôt, v porovnaní s aktuálnou hodnotou opcie, získame zisky alebo straty pre jednotlivé scenáre. Pre každý podkladový inštrument určíme relevantný scenár, ktorý nesie najvyššiu stratu, prípadne najnižší zisk. Ak by sme mali opcií viac, tak relevantný

scenár sa určí agregovane, za všetky opcie. Požiadavka na vlastné zdroje sa spočíta ako súčet požiadaviek pre každý podkladový inštrument, pričom požiadavka za každý inštrument sa vypočíta ako

$$\text{požiadavka} = -\min(0, PC - ADEV * PPCU) \quad (2.4)$$

kde

PC celkový súčet zmien hodnôt opcií pre relevantný scenár

ADEV celkový súčet delt vynásobený súčtom hodnôt opcií, teda delta ekvivalent

PPCU percentuálna zmena ceny podkladového inštrumentu v relevantnom scenári

Matica scenárov musí byť rozmeru minimálne 7x3, kde prvý rozmer zachytáva zmeny cien podkladového inštrumentu a druhý zmeny volatility podkladového inštrumentu. Ak je podkladovým inštrumentom akcia, musí matica obsahovať zmenu ceny akcie o $\pm 8\%$ a zmena volatility pre všetky inštrumenty musí byť simulovaná zmenou o $\pm 25\%$. Jednotlivé intervaly zmien musia byť rovnako veľké.

Ďalšie možnosti pre výpočet non-delta rizika pre opcie v štandardizovanom prístupe už regulácia neuvádza. Uved'me ešte zhrnutie pre výpočet celkovej požiadavky na vlastné zdroje na krytie pozičného rizika akciových nástrojov pre opcie na akcie podľa štandardizovaného prístupu:

$$CAR_{STA} = CAR(\text{špecifické riziko}) + CAR(\text{všeobecné riziko}) + CAR(\text{non delta riziko})$$

$$CAR_{STA}(\text{špecifické riziko}) = 8\% * \text{čistá pozícia} * \text{delta} * \text{cena akcie}$$

$$CAR_{STA}(\text{všeobecné riziko}) = 8\% * \text{hrubá pozícia} * \text{delta} * \text{cena akcie}$$

$$CAR_{STA}(\text{non delta riziko}) = \text{gamma požiadavka} + \text{vega požiadavka}$$

Takto spočítaná požiadavka na vlastné zdroje na krytie pozičného rizika je súčasťou celkového požiadavku na kapitál banky.

2.2 Výpočet interným modelom

Inštitúcia môže pre výpočet požiadaviek na kapitál využiť, po schválení dohľadového orgánu, interné modely. Pod interným modelom Nariadenie rozumie využitie metód pre výpočet hodnoty v riziku (VaR) a stresovanej hodnoty v riziku (sVaR). Pre schválenie modelu je nutné splniť nasledujúce základné požiadavky:

- denný výpočet hodnoty v riziku
- 99 percentil jednostranného intervalu spoľahlivosti
- desaťdňová doba držania
- obdobie historického pozorovania aspoň jeden rok
- aspoň mesačná aktualizácia údajov

Pre výpočet 10 denného VaR je, podľa Nariadenia, možné využívať aj kratšie obdobie a výsledky preškálovať na 10 dní.

Pre výpočet požiadavky na krytie rizík inštitúcia z denných hodnôt VaR počíta priemerný VaR za uplynulých 60 obchodných dní, označíme ho VaR_{avg} . Požiadavka na vlatné zdroje výpočtom použitím interného modelu sa vypočíta z hodnoty v riziku a stresovanej hodnoty v riziku vzťahom

$$požiadavka = \max(VaR_{t-1}, VaR_{avg} \cdot m_c) + \max(sVaR_{t-1}, sVaR_{avg} \cdot m_s), \quad (2.5)$$

kde m_c a m_s sú multiplikačné koeficienty. Hodnoty koeficientu uvádza Tabuľka 2 podľa počtu prekročená vypočítanej hodnoty VaR za uplynulých 250 obchodných dní. Pričom za prekročenie sa považuje udalosť, keď skutočná zmena hodnoty portfólia je vyššia než vypočítaná hodnota v riziku z predchádzajúceho dňa.

Počet prekročení	Hodnota koeficientu
4 a menej	3.00
5	3.40
6	3.50
7	3.65
8	3.75
9	3.85
10 a viac	4.00

Tabuľka 2 Hodnoty multiplikačného koeficientu

Stresovaná hodnota v riziku sa počíta na 12 mesačnom súvislom období v minulosti, ktoré by malo predstavovať najväčší pozorovaný dopad na rizikové faktory s negatívnym vplyvom na hodnotu portfólia. Obdobie by sa malo revidovať aspoň 1x ročne.

3 Základy pre oceňovanie finančných derivátov

3.1 Itoova rovnica

Vývoj cien finančného inštrumentu je náhodná (stochastická) veličina.

Nech Ω je množina elementárnych javov. Systém podmnožín \mathcal{F} (tieto podmnožiny nazývame náhodné javy) nazveme σ -algebrou, ak platí nasledujúce:

- ak $A \in \mathcal{F}$, potom $A^c \in \mathcal{F}$ (komplement)
- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $\Omega \in \mathcal{F}$
- ak A_1, A_2, A_3, \dots je postupnosť množín v \mathcal{F} , potom $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Nech P je pravdepodobnosť na \mathcal{F} , potom (Ω, \mathcal{F}, P) je pravdepodobnostný priestor. Nech (Ω, \mathcal{F}, P) je pravdepodobnostný priestor a $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálnych náhodných veličín $\{X_t, t \in T\}$ definovaných na (Ω, \mathcal{F}, P) sa nazýva *náhodný proces*.

Pre modelovanie cien akcií potrebujeme definovať *Wienerov proces*.

Definícia 1 (Wienerov proces) Nech (Ω, \mathcal{F}, P) je pravdepodobnostný priestor. Náhodný proces $W(t)$ nazveme Wienerov proces ak platí:

- $W(0) = 0$ skoro isto a $\{W(t), t \geq 0\}$ má spojité trajektorie
- prírastky $W(t) - W(s)$ pre každé $t > s$ majú normálne rozdelenie $N(0, t - s)$
- náhodné veličiny $W(t_4) - W(t_3)$ a $W(t_2) - W(t_1)$ sú nezávislé pre každé $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$

V stochastickom diferenciálnom počte je základom Itoov integrál. K jeho odvodeniu majme interval $[t, T]$, rozložme ho na n intervalov $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n - 1$ a zvolme $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Položme

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(w(t_{i+1}) - w(t_i)) \quad (3.1)$$

Keďže $w(t)$ je Wienerov proces, závisí na tom, ako zvolíme τ_i . Pre $\tau_i = t_i$ tak dostávame *Itoov integrál*.

Definícia 2 (Itoov proces) Nech $w(t)$ je wienorov proces, a $\mu(t)$, $\sigma(t)$ sú stochastické procesy na (Ω, \mathcal{F}, P) . Proces $X(t)$, kde

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dw(s), \quad (3.2)$$

nazveme Itoov proces. Vyjadrený pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dw(t) \quad (3.3)$$

Majme $f(X(t), t)$ hladkú funkciu (má spojité druhé derivácie) Itoovho procesu $X(t)$. Potom pomocou Taylorovho rozvoja platí

$$df(X(t), t) = \frac{\partial f}{\partial X} dX(t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} dX(t)^2 + \dots \quad (3.4)$$

Po dosadení za $dX(t)$ a použitím pravidiel s predpokladom $dt \rightarrow 0$

$$dtdt = 0, \quad dwdt = 0, \quad dwdw = O(dt) \quad (3.5)$$

tak dostávame

$$df(X(t), t) = \left[\frac{\partial f}{\partial X} \mu(t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \sigma^2(t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial X} \sigma(t)dw(t) \quad (3.6)$$

Vzťah (3.6) sa nazýva *Itoova rovnica*.

3.2 Teória arbitráže

Pri stanovení ceny derivátov, a vlastne všetkých finančných inštrumentov, vychádzame z predpokladu neexistujúcej arbitráže. Jej predpokladom je, že dlhodobo nie je možné s nulovým rizikom realizovať vyšší než bezrizikový výnos, prípadne realizovať okamžitý výnos.

Aby sme vylúčili existenciu arbitráže, musí platiť

- rovnako rizikové inštrumenty s tým istým peňažným tokom majú rovnakú hodnotu
- bezrizikové inštrumenty so známou budúcou hodnotou sú obchodované za ich diskontovanú budúcu hodnotu

Predpokladajme, že sme schopný sa financovať za bezrizikovú úrokovú mieru r , a zostavme samofinancujúce sa portfólio z inštrumentu A , a z bezrizikovej pôžičky vo výške

a. Označme $S(t, \omega_i)$ cenu inštrumentu A v čase 1 a v stave sveta ω_i . Hodnota portfólia v čase 0 je

$$\Pi(0, 0) = -a + S(0, 0) = 0 \quad (3.7)$$

Predpokladajme, že v čase 1 máme iba dva možné stavy sveta, a ďalej nech platí, že $S(1, \omega_1) = 0$, $S(1, \omega_2) = 1$, pričom jednotlivé stavy ω_1, ω_2 nastávajú s pravdepodobnosťou p , resp. $(1 - p)$.

Aby sme z portfólia nemohli realizovať bezrizikový výnos, je zrejmé, že očakávaná hodnota portfólia v čase 1 musí byť 0.

$$E[\Pi(1)] = -a \cdot e^r + p \cdot S(1, \omega_1) + (1 - p) \cdot S(1, \omega_2) = 0 \quad (3.8)$$

Po dosadení z (3.7)

$$E[S(1)] = -a \cdot e^r = S(0, 0)e^r \quad (3.9)$$

dostávame očakávanú hodnotu inštrumentu A . Vidíme, že v zvolenej pravdepodobnostnej miere je očakávaný výnos z inštrumentu bezrizikový výnos. Aj pri zovšeobecnení zvolením inej než bezrizikovej úrokovej sadzby pre pôžičku, sme schopní nájsť pravdepodobnostnú mieru tak, aby očakávaný výnos inštrumentu bola bezriziková sadzba. Táto pravdepodobnostná miera sa označuje za *rizikovo neutrálnu*.

3.3 Rozdelenie zmien cien inštrumentu

Nech $S(t)$ je spotová cena finančného aktíva, v našom prípade akcie, v čase t . Predpokladajme, že zmenu jeho ceny v čase je možné popísať rovnicou

$$dS(t) = S(t)\mu(t)dt + S(t)\sigma(t)dw(t), \quad (3.10)$$

kde $\mu(t)$ je očakávaný výnos aktíva. Volatilitu udáva parameter $\sigma(t)$ a $w(t)$ je Wienerov proces. Vidíme, že vo vzťahu veľkosť zmeny ceny akcie závisí na určitom trende $\mu(t)$ (označovaný tiež drift) a nejakej odchýlke, ktorá je vyjadrená volatilitou. Zmena v cene je proporcionálna vo vzťahu k aktuálnej cene $S(t)$ a k veľkosti skoku, teda dt pre trend a $dw(t)$ pre odchylku.

Prepíšme rovnicu (3.10) do tvaru

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu(t)dt + \sigma(t)dw(t) \quad (3.11)$$

Tento vzťah vyjadruje relatívnu zmenu ceny finančného inštrumentu. Relatívna zmena ceny je teda stochastická veličina s normálnym náhodným rozdelením so strednou hodnotou μdt a rozptylom $\sigma^2 dt$).

$$\frac{dS(t)}{S(t)} \sim N(\mu(t)dt, \sigma^2 dt) \quad (3.12)$$

Použijeme Itoovu rovnicu (3.6) na vzťah (3.10). Dostávame tak vzťah

$$df(S(t), t) = \left[\frac{\partial f}{\partial S} \mu(t) S(t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2(t) S^2(t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial S} S(t) \sigma(t) dw(t) \quad (3.13)$$

Nech $f(S(t), t) = \ln S(t)$, potom pre parciálne derivácie funkcie platí

$$\frac{\partial f(S(t), t)}{\partial S(t)} = \frac{1}{S(t)}, \quad \frac{\partial f(S(t), t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(S(t), t)}{\partial S^2(t)} = -\frac{1}{S^2(t)} \quad (3.14)$$

Po dosadení (3.14) do (3.13) a

$$d \ln S(t) = \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) dt + \sigma(t) dw(t) \quad (3.15)$$

Ak prejdeme na diskretný čas s krokom Δt môžeme $d \ln S(t)$, prepísať na tvar $\frac{\ln S(t+\Delta t) - \ln S(t)}{\Delta t}$, tak po dosadení do (3.15) a malej úprave tak dostávame

$$\ln \frac{S(t + \Delta t)}{S(t)} \sim N \left(\left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) \Delta t, \sigma^2(t) \Delta t \right) \quad (3.16)$$

Vidíme, že logaritmickej zmena ceny inštrumentu má normálne rozdelenie, potom samotná cena inštrumentu má log-normálne rozdelenie. Keďže v tejto práci oceňujeme štruktúrované vklady (opcie), kde podkladové inštrumenty sú akcie, u ktorých predpokladáme nezápornú cenu, log-normálne rozdelenie je z tohto hľadiska vyhovujúce.

Pre X náhodnú veličinu s log-normálnym rozdelením so strednou hodnotou a rozptylom μ, σ^2 platí, že stredná hodnota tejto veličiny je rovná

$$EX = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad (3.17)$$

Ak (3.16) upravíme na

$$\ln S(t + \Delta t) \sim N \left(\ln S(t) + \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) \Delta t, \sigma^2(t) \Delta t \right) \quad (3.18)$$

potom pre strednú hodnotu veličiny $S(t + \Delta t)$ s log-normálnym rozdelením (3.18), dostaneme vzťah (3.19). Je to vzťah pre výpočet budúcej hodnoty pre spojité úročenie s úrokovou mierou rovnej driftu. V kapitole 3.2 sme ukázali, že pre rizikovo neutrálne pravdepodobnosti je drift rovný bezrizikovému výnosu.

$$E[S(t + \Delta t)] = e^{\ln S(t) + \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2}\right)\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\Delta t} = S(t)e^{\mu(t)\Delta t} = S(t)e^{r(t)\Delta t} \quad (3.19)$$

3.4 Monte Carlo metódy

Monte Carlo metódy sú v súčasnosti hojne využívané, a to nie len vo financiách, vďaka ohromnému vývoju v oblasti výpočtových technológií. V dobe, keď už aj procesory osobných počítačov majú schopnosť v zlomkoch sekundy vyriešiť zložité matematické úlohy, už nie je použitie Monte Carlo simulácií otázkou výpočtového času. Pre ich priamočiarosť sa stávajú veľmi populárne pri oceňovaní zložitejších finančných inštrumentov, a taktiež v oblasti riadenia rizík.

Za zakladateľov myšlienky využitia Monte Carlo metód, z rokov 1947, sa považujú John von Neumann, Stanislaw Ulam a Nicholas (Jäckel, 2002). Názov Monte Carlo sa zakladá na Monaku, ktoré je známe pre množstvo kasín, pretože koleso z hry ruleta je akýmsi generátorom náhodných čísel. Monte Carlo metódy su založené práve na generovaní náhodných čísel. Z dnešného pohľadu je možnosť generovania náhodných čísel úplná samozrejmosť, avšak v 50. rokoch minulého storočia to predstavovalo značné problémy.

Metódy Monte Carlo sú založené na množstve opakovaných simulácií, z ktorých je potom možné pozorovať typické či okrajové hodnoty. Najčastejšou úlohou pre použitie Monte Carlo metódy je výpočet očakávanej (strednej) hodnoty náhodnej veličiny V , ktorá je zostrojená pomocou funkcie $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a hustoty pravdepodobnosti $f(\mathbf{x})$.

$$E[V] = E[g(\mathbf{x})] = \int g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}^n \quad (3.20)$$

Postup výpočtu použitím Monte Carlo simulácií je nasledovný

1. stanovíme si požadovaný počet simulácií $n, n \in \mathbb{N}$
2. na základe znalosti hustoty pravdepodobnosti $f(\mathbf{x})$ vygenerujeme hodnoty $\mathbf{x}_i, i = \{1, \dots, n\}$
3. odhadneme strednú hodnotu $E[V] \approx \hat{v}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\mathbf{x}_i)$

Možnosť takéhoto odhadu nám dáva Kolmogorova veta týkajúca sa silného zákona veľkých čísel spolu s Mann-Waldovou vetou o spojitom zobrazení.

Veta 3.1 (Kolmogorova) *Nech X_1, X_2, \dots sú nezávislé náhodné veličiny, ktoré majú rovnaké rozdelenie s rovnakou strednou hodnotou μ . Označme*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.21)$$

Ak $n \rightarrow \infty$, potom $\bar{X}_n \rightarrow \mu$ skoro iste.

Veta 3.2 (Mann-Waldova) *Nech $\{X_n\}$ a X sú náhodné vektory s dimenziou p , definované na rovnakom pravdepodobnostnom priestore a nech funkcia $h: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ je spojité zobrazenie až na množinu D , kde $P(X \in D) = 0$. Potom platí:*

1. ak $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ potom $h(X_n) \xrightarrow{a.s.} h(X)$ (konvergencia skoro iste)
2. ak $X_n \xrightarrow{p} X$ potom $h(X_n) \xrightarrow{p} h(X)$ (konvergencia v pravdepodobnosti)
3. ak $X_n \xrightarrow{d} X$ potom $h(X_n) \xrightarrow{d} h(X)$ (konvergencia v distribúcii)

Niekedy, pri aplikovaní Monte Carlo simulácii nechceme vopred definovať počet simulácií, no potrebujeme taký počet simulácií, aby chyba odhadu bola menšia než požadovaná. V takom prípade postupujeme iteratívnym spôsobom (generujeme náhodne veličiny postupne), po každom kroku spočítame veľkosť chyby odhadu, a opakujeme až kým chyba nie je nižšia než požadovaná.

Pre výpočet veľkosti chyby odhadu, pomocou smerodajnej odchýlky, aplikujeme Lindebergovu centrálnu limitnú vetu.

Veta 3.3 (Lindebergova) *Nech X_1, X_2, \dots sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny so strednou hodnotou μ a s konečným rozptylom σ^2 . Potom pre $n \rightarrow \infty$ platí*

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad (3.22)$$

Nech $\hat{v}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$ je odhad riešenia pomocou Monte Carlo metódy pre n simulácií. Predpokladajme, že náhodne veličiny v_i majú strednú hodnotu μ a rozptyl σ^2 . Potom, na základe Lindebergovej vety, platí

$$\hat{v}_n \xrightarrow{d} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (3.23)$$

Rozptyl ani strednú hodnotu náhodnej veličiny V sice nepoznáme, ale metódy Monte Carlo postavené na vyššie uvedených vetách sú používané k ich odhadu. Rozptyl môžeme odhadnúť pomocou

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \right)^2 \quad (3.24)$$

Dostávame tak odhad smerodajnej odchýlky náhodnej veličiny V . Odhad chyby strednej hodnoty pre n simulácií je

$$\epsilon_n = \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \quad (3.25)$$

3.5 Black-Scholes model

Model Black-Scholes je základným východiskom pre oceňovanie opcií, preto je vhodné aspoň z časti popísať jeho predpoklady a základy a budeme pritom vychádzať z publikácií (Wilmott, et al., 1995) a (Hull, 1993).

Predpoklady modelu sú:

- cena podkladového aktíva je náhodná veličina s log-normálnym rozdelením
- ja známa bezriziková úroková miera a volatilita podkladového inštrumentu počas celého života opcie
- transakčné náklady pre zaistenie portfólia sú nulové
- nie je možná arbitráž
- podkladové aktívum sa obchoduje nepretržite
- je povolený krátky predaj podkladového aktíva a aktívum je možné deliť

Odvodme vzťah pre ocenenie opcie na všeobecný inštrument, ktorého cena má log-normálne rozdelenie. Majme európsku opciu na podkladový inštrument so spotovou cenou $S(t)$, realizačnou cenou X a splatnosťou v čase T . Zatiaľ nie je potrebné špecifikovať, či sa jedná o call opciu alebo put opciu. Jej hodnota v čase t nech bude $V(S(t), t)$. Predpokladajme, že $S(t)$ sa riadi rovnicou (3.10) a použitím Itoovej rovnice (3.6). Dostávame vzťah

$$dV(S(t), t) = \left[\frac{\partial V}{\partial S} \mu(t)S(t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2(t)S^2(t) \right] dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma(t)S(t)dw(t) \quad (3.26)$$

Zostrojme portfólio, ktoré sa bude skladať z jednej opcie a krátkym predajom δ kusov podkladového aktíva. Hodnota portfólia je určená vzťahom

$$\Pi(t) = V(t) - \delta S(t) \quad (3.27)$$

a zmenu ceny portfólia možno vyjadriť vzťahom

$$d\Pi(t) = dV(t) - \delta dS(t) \quad (3.28)$$

Zo vzťahu (3.28) je vidieť, že počas jedného časového skoku je stále v portfóliu $-\delta$ kusov podkladového inštrumentu. Počet kusov je možné meniť stále na počiatku časového intervalu, a potom už ostáva počet kusov nezmenený. To je v súlade s tým, ako sme vzťahom (3.1) definovali Itoov integrál. Ak do (3.28) dosadíme (3.26) a (3.10) dostávame vzťah (3.29). Pre väčšiu prehľadnosť vzorcov bude časová premenná z funkcií vynechaná, avšak je dôležité na ňu nezabúdať. Úplne je možné ju vynechať len z driftu a volatility, ak prijmeme predpoklad, že sa v čase nemenia.

$$d\Pi = \sigma S \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \delta \right) dw + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \delta S \right) dt \quad (3.29)$$

Z predchádzajúceho vzťahu vidieť, že zmena ceny portfólia sa riadi náhodnou prechádzkou. Obsahuje stochastickú zložku dw . Aby sme túto zložku eliminovali, zvolme

$$\delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (3.30)$$

Nutné poznamenať, že aj keď stále pracujeme v spojitom čase, v praxi sa skôr jedná o diskrétny čas. Zmena ceny aktíva, a teda aj opcie, či celého portfólia, sa deje stále v určitých časových intervaloch. Deltu potom stále počítame z aktuálnych údajov a

nechávame nezmenenú až do ďalšieho skoku ceny, kedy už sú k dispozícii nové údaje. Táto technika eliminácie stochastickej zložky sa nazýva *delta-hedging* a symbol delta v vyjadruje citlivosť zmeny ceny opcie na zmenu podkladového inštrumentu.

Po dosadení (3.30) do (3.29) tak dostaneme

$$d\Pi = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \quad (3.31)$$

Takto sme dostali portfólio, ktoré neobsahuje náhodnú zložku. Toto portfólio je preto bezrizikové, a na základe teórie arbitráže musí niesť presne bezrizikový výnos. Preto je možné vzťah (3.31) zapísať ako

$$\Pi r dt = \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \quad (3.32)$$

Ak teraz do (3.32) dosadíme (3.27) a (3.30), potom po vykrátení zložky dt dostaneme vzťah

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (3.33)$$

Vzťah (3.33) sa nazýva *Black-Scholesova diferenciálna rovnica*. Táto rovnica platí pre akýkoľvek derivát spĺňujúci predpoklady modelu, ktorý závisí iba na cene podkladového inštrumentu a čase.

K vyriešeniu Black-Scholesovej diferenciálnej rovnice je ešte potrebné definovať nejaké okrajové podmienky. Keďže táto parciálna diferenciálna rovnica je druhého rádu, k jej vyriešeniu je nutné mať aspoň dve rovnice okrajových podmienok. Tieto okrajové podmienky sú pre rôzne deriváty rôzne.

Stanovme najprv okrajové podmienky pre európsku call opciu $call(S(t), t)$, s realizačnou cenou K , so splatnosťou v čase T . K definovaniu okrajových podmienok využijeme základné charakteristiky opcií, ktoré boli uvedené na začiatku tejto práce. Zrejme v čase expirácie opcie je už známe plnenie z opcie, a preto jedna z okrajových podmienok je

$$call(S(T), T) = \max(S(T) - K, 0) \quad (3.34)$$

Je jasné, že spotová cena podkladového inštrumentu nemôže nadobúdať záporných hodnôt. Ak spotová cena podkladového inštrumentu je rovná 0, z rovnice (3.10) je vidieť, že cena podkladového inštrumentu bude nulová už navždy. Ak má podkladový inštrument

nulovú hodnotu je jasné, že nulovú hodnotu bude mať aj call opcia. Ďalšia z podmienok teda je

$$call(0, t) = 0 \quad (3.35)$$

Majme európsku put opciu $put(S(t), t)$, s realizačnou cenou K , so splatnosťou v čase T . Pre stanovenie okrajových podmienok pre put opciu je postup identický ako pre call opciu. V čase splatnosti je už plnenie z opcie známe, preto prvá podmienka pre put opcie je

$$put(S(T), T) = \max(K - S(T), 0) \quad (3.36)$$

Aj pre put opcie platí, že spotová cena podkladového inštrumentu je nezáporná a v prípade, že sa stane nulovou, ostane nulová stále. Avšak pre put opciu má investor istý zisk v podobe strike price. Tento zisk je bez rizika, a preto na základe podmienky arbitráže musí niesť bezrizikový výnos. Preto druhá okrajová podmienka pre put opciu je

$$put(S(t), t) = Ke^{-r(t)(T-t)} \quad (3.37)$$

Na základe týchto okrajových podmienok je potom možné vyriešiť Black-Scholesovu diferenciálnu rovnicu. Postup riešenia je možné nájsť napríklad v publikácii (Wilmott, et al., 1995). Výsledky pre call opciu a put opciu s časom expirácie T a realizačnou cenou K sú nasledujúce

$$call(S(t), t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(t)(T-t)}N(d_2) \quad (3.38)$$

$$put(S(t), t) = Ke^{-r(t)(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1), \quad (3.39)$$

kde $N(\cdot)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (3.40)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.41)$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (3.42)$$

Tento model má výhody vo svojej jednoduchosti a taktiež vo veľkej všeobecnosti. Po stanovení vhodných okrajových podmienok je ním možné oceniť rôzne deriváty.

3.5.1 Black-Scholes rovnica pre binárne opcie

Keďže zvolený prémiový vklad má vnorené binárne opcie, uveďme ešte odvodenie Black-Scholsovej rovnice aj pre tento druh opcií.

V čase expirácie je výplatná funkcia binárnej call opcie s realizačnou cenou K

$$call^{bin}(S(T), T) = \begin{cases} 1 & \text{pre } S(T) \geq K \\ 0 & \text{pre } S(T) < K \end{cases} \quad (3.43)$$

Na rozdiel od štandardných (plain vanilla) opcií z predchádzajúcej kapitoly, nás pri ocenení zaujíma iba skutočnosť, či podkladový inštrument prekročil realizačnú cenu. Veľkosť prekročenia už nie je dôležitá. Tentokrát záleží iba na tom, s akou pravdepodobnosťou je $S(T) \geq K$. Použijeme k tomu vzťah (3.18). Nech $\Delta t = T - t$, potom pre náhodnú veličinu $\ln S(t + \Delta t)$ platí

$$\begin{aligned} E[\ln S(T)] &= \ln S(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) \Delta t \\ \text{var}[\ln S(T)] &= \sigma^2(t) \Delta t \end{aligned} \quad (3.44)$$

Definujme náhodnú veličinu X ,

$$X := \frac{\ln S(T) - \ln S(t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) \Delta t}{\sigma(t) \sqrt{\Delta t}}, \quad (3.45)$$

čiže X je náhodná veličina s normovaným náhodným rozdelením. Hodnotu binárnej call opcie s realizačnou cenou K stanovíme vzťahom

$$call^{bin}(S(t), t) = e^{-r(\Delta t)} \cdot E[call^{bin}(S(T), T)] = e^{-r(\Delta t)} P(S(T) \geq K), \quad (3.46)$$

kde hľadanú pravdepodobnosť dostaneme postupným upravovaním až k náhodnej veličine X .

$$\begin{aligned} P(S(T) \geq K) &\sim P(\ln S(T) \geq \ln K) \sim \\ P \left[\frac{\ln S(T) - \ln S(t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) \Delta t}{\sigma(t) \sqrt{\Delta t}} \geq \frac{\ln K - \ln S(t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) \Delta t}{\sigma(t) \sqrt{\Delta t}} \right] &\sim \\ P \left[X \geq \frac{\ln K - \ln S(t) - \left(\mu - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) \Delta t}{\sigma(t) \sqrt{\Delta t}} \right] &= 1 - N(-d_2) = N(d_2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Výsledok nie je až tak prekvapujúci, a dá sa odvodiť priamo zo vzťahu (3.38). Jeho upravením dostaneme

$$call(S(t), t) = e^{-r(T-t)} \left(e^{r(T-t)} S(t) N(d_1) - KN(d_2) \right) \quad (3.48)$$

Ak vezmeme do úvahy výplatnú funkciu pre call opcie, (3.34), ktorá je nezáporná, je možné odvodiť, že výraz hore uvedenej rovnice musí byť taktiež nezáporný. Preto výraz $N(d_2)$ vyjadruje pravdepodobnosť, že cena aktíva v čase maturity $S(T)$ bude nad realizačnou cenou K .

3.6 Náhodné vektory

V predchádzajúcich kapitolách sme pri odvodzovaní väčšiny vzťahov používali jednorozmerné náhodné veličiny. Aby sa tieto základné vzťahy mohli využiť aj pri ocenení opcií s podkladom niekoľkých akcií, bude vhodné prejsť na náhodné vektory.

Definícia (náhodný vektor) *Nech X_1, \dots, X_n sú náhodné veličiny definované na rovnakom pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) , potom vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ je náhodný vektor. Funkciu*

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n) \quad (3.49)$$

nazveme distribučnou funkciou náhodného vektoru.

Ceny akcií, a taktiež (logaritmické) zmeny cien, sú náhodné veličiny definované na rovnakom pravdepodobnostnom priestore. Spolu tak tvoria náhodný vektor. Kvôli normálnemu rozdeleniu logaritmické zmien cien zo vzťahu (3.11) definujeme ešte n -rozmerné normálne rozdelenie

Definícia (n -rozmerné náhodné rozdelenie) *Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ je náhodný vektor, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ nech je daný vektor, $\boldsymbol{\Sigma}$ nech je symetrická pozitívne-semidefinitná matica typu $n \times n$. Hovoríme, že \mathbf{X} má n -rozmerné normálne rozdelenie s parametrami $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, značíme ako $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, ak pre každý vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ platí*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{X} \sim N(\mathbf{c}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{c}) \quad (3.50)$$

V publikácii (Anděl, 2007) je dokázané, že pre strednú hodnotu a variančnú maticu náhodného vektoru $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ platí: $E\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu}$, $\text{var}\mathbf{X} = \boldsymbol{\Sigma}$.

4 Ocenenie prémiového vkladu

Oceňovaný prémiový vklad vyplatí v čase maturity nominálnu hodnotu, a k tomu prípadne aj kupón za každý deň priaznivej výkonnosti akcií. Výplatu vkladu je preto možné rozložiť na *časť istú*, teda výplatu nominálnej hodnoty a už priznanej časti kupónu vypočítanej podľa pozorovaných cien akcie až do času ocenenia, a *časť odhadovanú*. Istá časť výplaty je už v čase ocenenia vkladu známa, je preto analogická s ocenením bezkupónového dlhopisu, čiže jednoduchým diskontovaním. Táto časť už v sebe nenesie žiadnu opciu, a preto nevstupuje do výpočtu požiadavky na kapitál pre krytie rizika pozície z akciových nástrojov. Aj keď z hľadiska trhového rizika je nutné na túto časť prémiového vkladu počítať požiadavku na kapitál pre krytie úrokového rizika, predkladaná práca sa tejto požiadavke nevenuje. V ďalšom texte nás preto bude zaujímať iba ocenenie odhadovanej (neistej) časti kupónu, teda ocenenie vnorenej opcie.

Pre prehľadnosť ešte zavedme značenia špecifické pre vybraný prémiový vklad.

čas 0	fixácia cien podkladových akcií pre výpočet kupónu
čas P	prvý deň prepočtu kupónu
čas D	posledný deň prepočtu kupónu na základe výkonnosti akcií
čas $T, T > D$	splatnosť prémiového vkladu
S_t^i	cena i -tej akcie v čase t
$\mathbf{S}_t = (S_t^1, \dots, S_t^p)^T$	vektor cien akcií v čase t , $p = 21$
${}_tperf_{t+\Delta t} = \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$	výkonnosť akcie za obdobie od t do $t + \Delta t$
${}_0perf_t = perf_t$	pre výkonnosť od fixácie ceny do času t používame zjednodušené značenie, čas počiatku vynechávame
$perf_t^i = \frac{S_t^i}{S_0^i}$	výkonnosť i -tej akcie za obdobie od fixácie ceny do času t
$\mathbf{perf}_t = \left(\frac{S_t^1}{S_0^1}, \dots, \frac{S_t^p}{S_0^p} \right)$	vektor výkonnosti cien akcií za obdobie od fixácie ceny do času t
$perf_t = \min_i \{perf_t^i\}$	výkonnosť za obdobie od fixácie ceny do času t , pre najhoršiu akciu
$b, b = 2\% p. a.$	základná sadzba vkladu, prémiová je dvojnásobok základnej

Π_t neistá časť kupónu (výplata opcie) za obdobie od t do splatnosti T

4.1 Predpoklady pre ocenenie vkladu

Predpokladajme ďalej, že nominálna hodnota prémiového vkladu, počiatkový vklad, je jedna jednotka. Prejdime na diskretný čas, a síce jeden deň. Dostávame tak dve možnosti pre značenie kroku. Buď označíme $\Delta t := 1$, a parametre náhodných veličín (drift a volatilitu) prepočítame na denné vyjadrenie, alebo parametre ponecháme v ročnom vyjadrení a krok, jeden deň, označíme $\Delta t := \frac{1}{365}$. V predkladanej práci budeme používať prvý spôsob zo spomenutých.

Predpokladáme, že ceny akcií majú log-normálne rozdelenie, a teda že vzťah (3.16) platí pre každú podkladovú akciu. To znamená, že logaritmické zmeny akcií sú normálne rozdelené. Predpokladajme ďalej, že logaritmické zmeny cien skúmaných akcií tvoria vektor náhodných veličín s n -rozmerným náhodným rozdelením. Teda platí vzťah (4.1)

$$\left(\ln \frac{S_{t+\Delta t}^1}{S_t^1}, \dots, \ln \frac{S_{t+\Delta t}^p}{S_t^p} \right)^T = \ln \mathbf{i}perf_{t+\Delta t} \sim N_p \left(\left(\boldsymbol{\mu}(t) - \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{2} \right) \Delta t, \boldsymbol{\Sigma} \Delta t \right) \quad (4.1)$$

Matica $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$ je variančná matica vektoru $\ln \mathbf{i}perf_{t+\Delta t}$. Budeme ju odhadovať na základe denných pozorovaní uzatváracích cien podkladových akcií za obdobie 2 roky. Variančná matica bude obsahovať denné rozptyly a kovariancie, pričom vektor rozptylov značíme $\boldsymbol{\sigma}^2 = (\sigma_{ii})$. Predpokladáme, že volatilita a korelácie cenných papierov sa v čase nemení, a preto aj variančná matica $\boldsymbol{\Sigma}$ bude konštantná v čase.

Prémiový vklad budeme oceňovať za predpokladu rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti, a preto očakávaný výnos akéhokoľvek inštrumentu bude rovný intenzite bezrizikovej úrokovej miery. Možnosť použitia bezrizikovej sadzby pre drift bola zjednodušene ukázaná v kapitole 3.2. Použité bezrizikové krivky pre ocenenie sú konštruované pomocou overnight a swapových sadzieb a sú prevzaté priamo zo systémov České spořitelny. V prípade, že akcia vypláca dividendu, je drift akcie bezriziková sadzba znížená o vyplácanú dividendu, teda $\mu(t) = r(t) - d(t)$. Vzhľadom k tomu, že sme zvolili ako krok jeden deň, prepočítame drift na 1-denný.

Vektor driftov, $\boldsymbol{\mu}_t$, pre jednotlivé akcie, je určený na základe meny ich denominácie, vypočítaný z ročných intenzít bezrizikových úrokových sadzieb. Pričom, ak vychádzame

zo sadziab v čase t , teda čas ocenenie, značíme $\boldsymbol{\mu}_s, s > t$, vektor driftov akcií reprezentujúč forwardové intezyty $fw(t, s, s + 1)$ znížené o dividendu, pričom platí

$$e^{r(t,s)(s-t)} e^{fw(t,s,s+1)} = e^{r(t,s+1)(s+1-t)} \quad (4.2)$$

K oceneniu všeobecného inštrumentu definujme výplatnú funkciu $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pomocou ktorej počítame hodnotu inštrumentu v čase jeho splatnosti. Napríklad, pre základnú call opciu na akciu je výplatná funkcia uvedená vzťahom (3.34), pre binárnu opciu vzťahom (3.43). Oceňovaný vybraný prémiový vklad má výplatnú funkciu pre bonus $V: \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_P, \dots, \mathbf{S}_D) = \frac{b}{365} \left(\sum_{i=P}^D \mathcal{J}(perf_i \geq 1) + \sum_{i=P}^D \mathcal{J}(perf_i \geq 0.8) \right) \quad (4.3)$$

Pri ocenení vkladu v čase $t, t \in (0, D)$ ešte nevieme všetky ceny akcií, odhadujeme ich. Výplatnú funkciu bonusu môžeme zapísať v tvare

$$V(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_P, \dots, \mathbf{S}_t, \widehat{\mathbf{S}}_{t+1}, \dots, \widehat{\mathbf{S}}_D) = V(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_P, \dots, \mathbf{S}_t) + E[V(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_t, \widehat{\mathbf{S}}_{t+1}, \dots, \widehat{\mathbf{S}}_D)] \quad (4.4)$$

Neistú časť kupónu (výnos z opcie) od času t do splatnosti vkladu sme označili Π_t . Na základe vlastností výplatnej funkcie platí

$$\Pi_t = E[V(\mathbf{S}_t, \widehat{\mathbf{S}}_{t+1}, \dots, \widehat{\mathbf{S}}_D)] = \frac{b}{365} \left(\sum_{i=t+1}^D P(perf_i \geq 1) + \sum_{i=t+1}^D P(perf_i \geq 0.8) \right) \quad (4.5)$$

Hodnota vkladu v čase $t, t \in (0, D)$ je diskontovaná hodnota nominálnej hodnoty vkladu a výplatnej funkcie kupónu. Pozostáva teda z nominálnej hodnoty a už priznanej časti kupónu, a z neistej (odhadovanej) časti kupónu, čiže opcie. Ocenením neistej časti výplatnej funkcie dostávame cenu vnorenej opcie.

V ďalšom texte budem potrebovať násobiť vektory po zložkách. Pre zjednodušenie budeme násobením vektorov uvažovať násobenie po zložkách, ak to nebude uvedené inak. Majme vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} dimenzie p . Definujme operáciu násobenie vektorov

$$\mathbf{ab} := (a_1 b_1, \dots, a_p b_p)^T \quad (4.6)$$

4.2 Ocenenie pomocou Monte Carlo simulácie

Myšlienka Monte Carlo metód sa opiera o zákon veľkých čísel. Zakladá na postupe namodelovať množstvo simulácií vývoja podkladových aktív, aplikovať na ne výplatnú

funkciu a z výsledných hodnôt výplatnej funkcie pre jednotlivé simulácie určiť strednú hodnotu.

Pre modelovanie cien akcií vyjdeme zo vzťahu (4.1) pre 1-denný skok, $\Delta t = 1$ dostaneme vzťah (vychádzame zo vzťahu (3.15))

$${}^i\text{perf}_{t+1} = e^{(\mu_t - \frac{1}{2}\sigma^2) + Z_t} \quad (4.7)$$

kde Z_t je vektor náhodných veličín s rozdelením $N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$, pričom vektory Z_i, Z_j sú pre rôzne (i, j) nezávislé. Náhodný vektor cien akcií v čase t dostaneme zreťazením jednotlivých zmien (násobením po zložkách vektorov).

$$S_t = S_0 \prod_{i=0}^t {}^i\text{perf}_{t+1} \quad (4.8)$$

Na základe vyššie uvedeného vzťahu odhadneme vývoj cien akcií. Po aplikovaní výplatnej funkcie na ceny akcií zistíme budúcu platbu. Jej diskontovaním získame cenu opcie.

Oceňme vklad v čase $t, t \in (0, D)$. Nech S_t je vektor posledných známych cien akcií, a S_0 je vektor zafixovaných cien. V prvom kroku simulujeme vývoj cien akcií. K tomu použijeme vzťah (4.7). Zvoľme $n, n = 1000$, simulácií. Ceny akcií je nutné odhadnúť až do posledného dňa prepočtu bonusu D , čiže potrebujeme modelovať $D - t - 1$ časových krokov. Pre modelovanie vývoja cien akcií prevedieme $n \times (D - t - 1)$ výberov z náhodného vektoru $Z, Z \sim N_n(0, \Sigma)$. Výberom získame $n \times (D - t - 1)$ vektorov ${}^k Z_i, kde k = \{1, \dots, n\}$ a $t = \{t, \dots, D - 1\}$. Užitím vzťahu (4.7) získame vektory výkonnosti ${}^k\text{perf}_{i+1}$, kde $i = \{t, \dots, D - 1\}$. Pre finálne ocenenie opcie spočítame výkonnosti od dátumu fixácie pre každú simuláciu $k = \{1, \dots, n\}$

$${}^k\text{perf}_{t+i} = \frac{S_t}{S_0} \prod_{j=t}^{t+i-1} {}^k\text{perf}_{j+1}, \quad kde i = \{1, \dots, D - t\} \quad (4.9)$$

Aplikovaním (4.5) na modelované výkonnosti dostaneme hodnotu kupónu pre jednu simuláciu.

Označme ${}^k\Pi_t$ výpočet bonusu za obdobie od t do splatnosti vkladu pre k -tu simuláciu, potom výsledná hodnota nejstej časti kupónu vkladu v čase t je

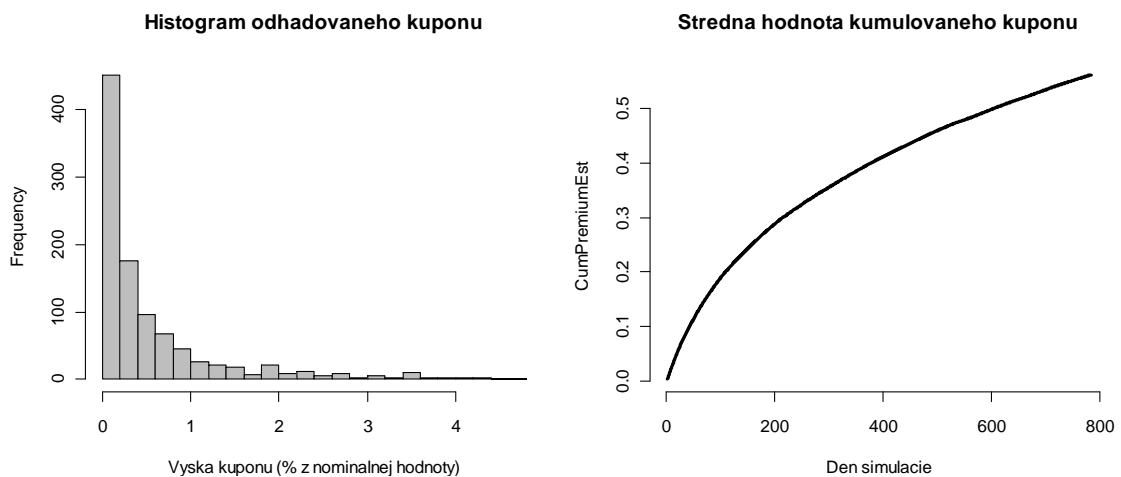
$$\Pi_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n {}^i\Pi_t \quad (4.10)$$

Cena opcie, teda opčná prémie sa spočíta diskontovaním neistej časti kupónu ku dňu ocenenia. Celková hodnota prémiového vkladu sa skladá z opčnej prémie, súčasnej hodnoty nominálnej hodnoty a zafixovaného kupónu.

$$PV_{vkladu} = e^{-r(t,T)(T-t)}(\text{nominálna hodnota} + V(S_p, \dots, S_t) + \Pi_t) \quad (4.11)$$

Prémiový vklad sme oceňovali k 6.11.2014. Veľkosť zafixovaného kupónu je ku dňu ocenenia 0,496% z nominálnej hodnoty vkladu. Výška očakávaného kupónu výpočtom Monte Carlo pre 1000 simulácií je 0,529% z nominálnej hodnoty vkladu. Opčná prémie, diskontovaný očakávaný kupón, je **0,526%**.

Na dole uvedených grafoch je možné pozorovať histogram neistej časti kupónu, a vývoj strednej hodnoty kumulácie odhadovanej výplaty kupónu od času ocenenia.



Obr. 1 Histogram výplaty bonusu a kumulatívny odhadovaný bonus.

4.3 Ocenenie pomocou binárnych opcií

Prémiový vklad je tiež možné oceniť ako postupnosť binárnych opcií, pričom je zložený z dvoch opcií na každý deň. Jedna s realizačnou cenou (K) na úrovni 80% fixovanej hodnoty a druhá na úrovni 100%. Cenu jednej opcie je možné zapísať vzťahom

$$P(S_T \geq S_0)$$

a pokračovať v úpravách obdobným spôsobom ako pri odvodení jednorozmerného prípadu v kapitole 3.5.1. Výsledná cena opcie prémiového vkladu bude súčet jednotlivých opcií.

5 Výpočet VaR

5.1 Výpočet pomocou historickej simulácie

Pre výpočet 1-denného VaRu použijeme metódu historickej simulácie na dvojročnom pozorovaní uzatváracích cien obchodných dní, teda pozorovanie 520 historických cien. Zároveň budeme na základe historických uzatváracích cien počítať variančnú maticu, ktorá taktiež vstupuje do výpočtu opčnej prémie.

Máme teda 519 pozorovaných vektorov 1-denných zmien cien akcií $\frac{S_k}{S_{k-1}}$, a k nim 519 variančných matíc Σ_k , čo dohromady predstavuje 519 scenárov. Variančné matice pre jednotlivé scenáre sú založené na zmene volatility cien akcií.

$$\Sigma_k := \Sigma_t I \frac{{}^k\sigma^2}{{}^{k-1}\sigma^2}, \quad (5.1)$$

kde I je jednotková matica, a ${}^k\sigma^2$ je diagonála matice Σ_k , čiže vektor rozptylov logaritmickej zmien cien akcií.

Predpokladajme, že sme v čase t a posledný známy vektor cien je S_t . Na tento vektor cien postupne aplikujeme jednotlivé scenáre, čím sa posunieme z času t do času $t + 1$. Máme tak

$${}^kperf_{t+i} = \frac{S_t}{S_0} \frac{S_k}{S_{k-1}} \prod_{j=t+1}^{t+i-1} {}^kperf_{j+1}, \quad \text{kde } i = \{1, \dots, D - t\}. \quad (5.2)$$

Keďže posun o jeden deň zaistil scenár zmeny ceny, potrebujeme vektory zmien cien ${}^kperf_{i+1}$ už len pre $i = \{2, \dots, D - t\}$, kde

$${}^kperf_{t+1} = e^{(\mu_t - \frac{1}{2} {}^k\sigma^2) + {}^kZ_t}, \quad k = \{1, \dots, 519\} \quad (5.3)$$

$${}^kZ_t \sim N_n(\mathbf{0}, \Sigma_k). \quad (5.4)$$

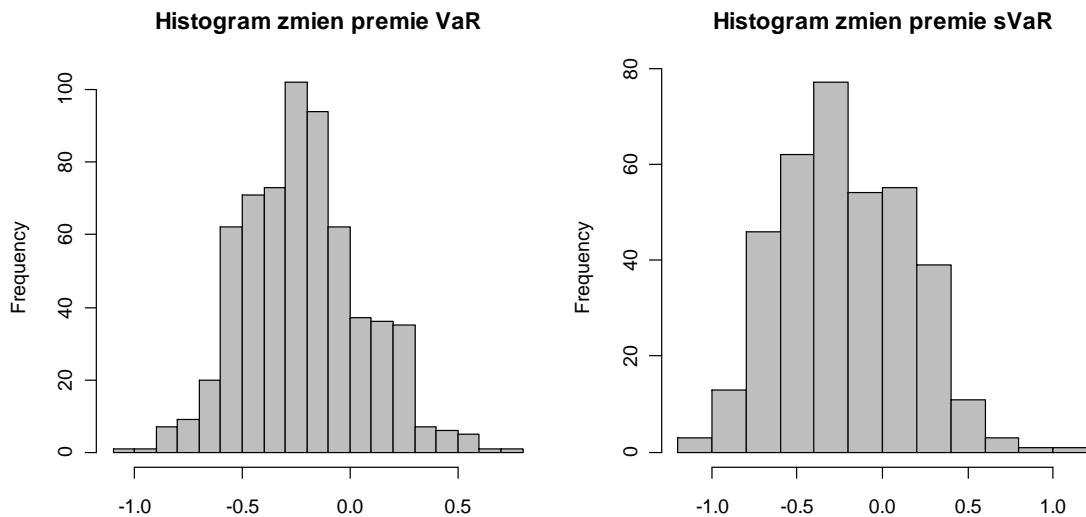
Pričom Σ_k je variančná matica príslušného scenára, a ${}^k\sigma^2$ je jej diagonála.

Pre každý takýto scenár zmeny vektora cien a variančnej matice určíme výšku bonusu Π_t^k využitím postupov uvedených v kapitole 4, a jeho diskontovaním spočítame opčnú prémie. Podľa požadovanej hladiny pravdepodobnosti VaRu vyberieme kvantil pomocou empirického rozdelenia diskontovaných hodnôt Π_t^k . Takto sme spočítali 1-denný VaR, ktorý preškálujeme na 10-denný.

Pre výpočet stresovanej hodnoty v riziku, sVaR, postupujeme rovnakým spôsobom. Scenáre však tvoria zmeny vektorov cien a variančné matice v stresovanom období, ktoré bolo vybrané na základe analýzy volatility cien akcií a ich poklesov v súvislom 12-mesačnom období.

Na Obr. 2 je možné pozorovať histogramy zmien opčných prémie podľa scenárov pre výpočet VaR a stresovanej VaR. Výsledky pre 1-denné hodnoty v riziku na 99% hladine spoľahlivosti sú:

- VaR: 0,19%
- sVaR: 0,21%



Obr. 2 Histogramy scenárov VaR a sVaR opčnej prémie

Výsledná kapitálová požiadavka sa vypočíta podľa (2.5). K výpočtu je nutné určiť priemernú hodnotu hodnoty v riziku a stresovanej hodnoty v riziku za posledných 60 obchodných dní. Priemerná hodnota VaR a sVaR je v regulácii zavedená kvôli možným zmenám v portfóliu, z ktorých by plynula rozkolísanosť požiadavky na kapitál.

V práci sa snažíme porovnať požiadavky pre jednu opciu, ktorá je v portfóliu kontinuálne, a preto nebudeme priemerné hodnoty v riziku počítať.

Výslednú požiadavku dostaneme preškálovaním na 10 denné hodnoty v riziku a vynásobením multiplikačnými koeficientami.

$$CAR_{IM} = 0,19\% * \sqrt{10} * 3 + 0,21\% * \sqrt{10} * 3 = \mathbf{3,68\%} \quad (5.5)$$

Všimnime si, že preškálovaním na 10 denné hodnoty v riziku dostaneme hodnoty v riziku vyššie, než je samotná opčná prémie. Pre zníženie požiadavky je preto vhodnejšie používať priamo výpočet pre 10-dennú hodnotu v riziku, ktorá vychádza iba 0,40%.

5.2 Výpočet štandardizovanou metódou

Výpočet požiadavky na krytie pozičného rizika štandardizovanou metódou sa zameriava na určenie pozície v akciových nástrojoch. V prípade opcií je pozícia v akciových nástrojoch určená delta ekvivalentom, teda deltou opcie pre danú akciu vynásobená cenou akcie.

$$\text{delta ekvivalent} = \text{delta opcie pre akciu} * \text{cena akcie} \quad (5.6)$$

Delta opcie vyjadruje citlivosť opčnej prémie na zmenu ceny podkladovej akcie. Pre základnú call opciu je možné deltu spočítať vztáhom

$$\Delta_t = \frac{\partial \text{call}(S(t), t)}{\partial S(t)} = N(d_1) \quad (5.7)$$

Pre oceňovaný prémiový vklad je analytické vyjadrenie delty pre jednotlivé akcie značne obtiažné, preto budeme deltu vypočítavať numericky. Vypočítame dopad percentnej zmeny ceny podkladovej akcie na opčnú prémie. Deltu pre i-tu akciu vypočítame

$$\Delta_t^i = \frac{PV(\Pi_t)^+ - PV(\Pi_t)^-}{S_t^i \left(1 + \frac{d}{2}\right) - S_t^i \left(1 - \frac{d}{2}\right)} = \frac{PV(\Pi_t)^+ - PV(\Pi_t)^-}{d \cdot S_t^i}, \quad \text{kde } d = 1\% \quad (5.8)$$

Symbolmi $PV(\Pi_t)^+$, $PV(\Pi_t)^-$ sme označili opčnú prémie vypočítanú po zmene ceny i-tej akcie o $\pm 0,5\%$.

Hodnoty delt uvádza Tabuľka 3. V tabuľke je vidieť aj aktuálnu výkonnosť akcie od dátumu fixácie ceny po deň ocenenia. Akcie, ktorých ceny sa pohybujú okolo rozhodných pásiem, teda 80% a 100% majú vyššie hodnoty delty. Pravdepodobnosť, že sa ceny týchto akcií dostanú nad alebo pod hranicu aktuálneho pásma, a tým výrazne ovplyvnia výplatu kupónu, a teda aj cenu opcie, je pre tieto akcie vyššia. To sa odráža aj vo vyššej delte.

V portfóliu máme iba jednu opciu, a preto máme v akciách iba dlhú pozíciu. Čistá a hrubá pozícia sú preto totožné.

V poslednom stĺpci tabuľky je uvedený aj delta ekvivalent akcie, ktorý je základom pre výpočet kapitálovej požiadavky na krytie pozičného rizika. Interpretácia delta ekvivalentu

je indikácia pozície danej akcie v portfóliu. Napríklad, hodnota 1,42% pre akcie Pumpy vyjadruje pozíciu ekvivalentnú 1,42% z nominálnej hodnoty prémiového vkladu.

Equity name	Delta	S_t / S_0	Delta ekv.	druh trhu
HEN3.GY.Equity	0.020%	95.64%	0.016%	DE
CA.FP.Equity	2.192%	88.38%	0.526%	FR
X005930.KS.Equity	0.000%	91.84%	0.641%	KR
OR.FP.Equity	0.065%	101.15%	0.082%	FR
SBUX.UQ.Equity	0.050%	99.37%	0.038%	US
TGT.UN.Equity	0.204%	106.49%	0.126%	US
MDLZ.UQ.Equity	0.203%	101.47%	0.077%	US
JNJ.UN.Equity	0.000%	103.83%	0.000%	US
UNA.NA.Equity	0.106%	97.69%	0.033%	NL
MAT.UQ.Equity	15.003%	80.07%	4.725%	US
NESN.VX.Equity	0.000%	102.76%	0.000%	CH
MCD.UN.Equity	0.174%	93.30%	0.164%	US
ROG.VX.Equity	0.002%	109.00%	0.005%	CH
NOVN.VX.Equity	0.012%	111.56%	0.011%	CH
BAYN.GY.Equity	0.019%	111.82%	0.022%	DE
HAS.UQ.Equity	0.019%	109.15%	0.011%	US
PUM.GY.Equity	0.811%	83.82%	1.420%	DE
X6702.JT.Equity	0.104%	92.40%	0.723%	JP
X4901.JT.Equity	0.001%	137.22%	0.055%	JP
ITX.SM.Equity	0.376%	97.37%	0.082%	ES
X7203.JT.Equity	0.001%	112.07%	0.088%	JP

Tabuľka 3 Deltá akcií a delta ekvivalenty

Súčet delta ekvivalentov pre jednotlivé akcie je dohromady **8,85%**.

$$\begin{aligned}
 CAR_{STA}(\text{všeobecné riziko}) &= CAR_{STA}(\text{špecifické riziko}) = 8\% * 8,85\% \\
 &= \mathbf{0,708\%}
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

Aj keď hlavnou zložkou požiadavky na krytie akciového rizika podľa štandardizovaného prístupu je práve požiadavka na všeobecné a špecifické riziko pozície, spočítajme ešte požiadavku na non-delta riziká podľa delta-plus prístupu a prístupu podľa scenárov.

5.2.1 Prístup delta-plus

Prístup delta-plus navyšuje požiadavku na krytie rizika pre opcie o ďalšie dva rizikové faktory, a to volatilitu a deltu. Týmto prístupom inštitúcia vypočíta citlivosť ceny opcie na zmenu volatilitu a zmenu delty.

Citlivosť opčnej prémie na zmenu delty sa označuje gamma. Pre základné opcie platí vzťah:

$$\Gamma_t = \frac{\partial^2 call(S(t), t)}{\partial S(t)^2} = \frac{N'(d_1)}{S(t)\sigma\sqrt{T}} \quad (5.10)$$

Opäť však pri výpočte gammy pre i-tu akciu pre prémiový vklad vzťah riešime numericky.

$$\Gamma_t^i = \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{S_t^i \left(1 + \frac{d}{2}\right) - S_t^i \left(1 - \frac{d}{2}\right)} \quad (5.11)$$

Po dosadení z (5.8) a úpravách dostaneme

$$\Gamma_t^i = \frac{4[PV(\Pi_t)^+ + PV(\Pi_t)^- - 2PV(\Pi_t)]}{(d \cdot S_t^i)^2}, \quad kde \ d = 1\% \quad (5.12)$$

Podobne pre vega, ktorou označujeme citlivosť ceny opcie na zmenu volatility

$$\mathcal{V}_t = \frac{\partial call(S(t), t)}{\partial \sigma} = S(t)\sqrt{T}N'(d_1) \quad (5.13)$$

Pre numerické riešenie postupujeme obdobne, ale použijeme iba jednostranný odhad

$$\mathcal{V}_t^i = \frac{PV(\Pi_t)^+ - PV(\Pi_t)}{(1 + d)\sigma_t^i}, \quad kde \ d = 1\% \quad (5.14)$$

Symbolom $PV(\Pi_t)^+$ označujeme opčnú prémii vypočítanú so zmenou volatility o jedno percento.

Tabuľka 4 ukazuje prehľad jednotlivých citlivostných ukazovateľov pre podkladové akcie, a na základe vzorcov z kapitoly 2.1.2 vypočítava požiadavku pre gamma a delta riziko. Požiadavky sa pre jednotlivé druhy trhov, do ktorých akcie patria, sčítajú. Výsledná požiadavka pre riziko gamma je absolútna hodnota záporných požiadaviek pre jednotlivé trhy, požiadavka vega je súčet absolútnych hodnôt požiadaviek po jednotlivých trhoch.

Akciové trhy, do ktorých sú akcie zaradené, uvádza Tabuľka 3.

Celková vypočítaná požiadavka pre non-delta riziko opcie na základe delta plus prístupu, je **14,38%**. Prehľad požiadaviek pre jednotlivé uvádza Tabuľka 5

Akcia	cena akcie	Gamma	Vega	Volatilita	CAR gamma	CAR vega
HEN3.GY.Equity	80.36	-0.07%	2.096%	18.994%	-1.397%	0.100%
CA.FP.Equity	24.01	2.27%	-0.172%	26.373%	4.192%	-0.011%
X005930.KS.Equity	1204000	0.00%	-0.339%	23.738%	0.000%	-0.020%
OR.FP.Equity	127.35	0.04%	-0.999%	18.592%	2.096%	-0.046%
SBUX.UQ.Equity	77.45	0.07%	-0.020%	20.379%	1.397%	-0.001%
TGT.UN.Equity	61.89	-0.06%	2.234%	17.270%	-0.699%	0.096%
MDLZ.UQ.Equity	37.84	-0.30%	1.998%	18.693%	-1.397%	0.093%
JNJ.UN.Equity	109.01	0.00%	2.358%	13.121%	0.000%	0.077%
UNA.NA.Equity	31.07	-0.23%	-1.043%	15.234%	-0.699%	-0.040%
MAT.UQ.Equity	31.49	-1.10%	1.697%	19.821%	-3.494%	0.084%
NESN.VX.Equity	70.65	0.00%	0.610%	12.860%	0.000%	0.020%
MCD.UN.Equity	94.66	0.05%	2.743%	12.108%	1.397%	0.083%
ROG.VX.Equity	287.00	0.00%	2.635%	16.911%	0.000%	0.111%
NOVN.VX.Equity	89.75	0.00%	0.506%	15.075%	0.000%	0.019%
BAYN.GY.Equity	114.50	0.00%	2.447%	21.921%	0.000%	0.134%
HAS.UQ.Equity	58.12	-0.19%	0.141%	19.083%	-2.096%	0.007%
PUM.GY.Equity	175.05	-0.01%	-0.031%	19.734%	-0.699%	-0.002%
X6702.JT.Equity	693.00	0.00%	1.184%	34.942%	-4.192%	0.103%
X4901.JT.Equity	3802.50	0.00%	0.841%	31.533%	-0.699%	0.066%
ITX.SM.Equity	21.87	-0.46%	0.721%	21.895%	-0.699%	0.039%
X7203.JT.Equity	6812.00	0.00%	-0.740%	26.593%	0.000%	-0.049%

Tabuľka 4 Prehľad citlivostných koeficientov pre delta-plus prístup výpočtu požiadavky

Druh trhu	CAR Gamma	CAR Vega
DE	2.0962%	0.2321%
FR	0.0000%	0.0578%
KR	0.0000%	0.0201%
US	4.8912%	0.4400%
NL	0.6987%	0.0397%
CH	0.0000%	0.1501%
JP	4.8912%	0.1205%
ES	0.6987%	0.0395%
Celkom	13.2761%	1.0997%

Tabuľka 5 Vypočítane požiadavky pre gamma a vega riziko

5.2.2 Prístup podľa scenárov

V tomto prístupe si inštitúcia zvolí maticu scenárov, ktorú potom aplikuje na každú podkladovú akciu. Matica zahrnuje výpočet opčnej prémie pre scenáre zmeny ceny podkladových akcií a zmeny ich volatilit.

Matica scenárov, ktorá bola aplikovaná obsahovala 8 scenárov zmeny ceny, a 4 scenáre zmeny volatility. Pričom $\Delta S_t = \{\pm 8\%, \pm 6\%, \pm 4\%, \pm 2\%\}$, $\Delta \sigma = \{\pm 25\%, \pm 12,5\%\}$.

Tabuľka 6 obsahuje výsledky aplikácie matice scenárov pre akciu CA FP s dopadom na opčnú prémii vkladu. Prvý krok výpočtu požiadavky pre tento prístup, je určenie aplikácia matice scenárov na každú podkladovú akciu a určenie relevantného scenára. Pričom za relevantný scenár sa považuje ten, ktorý vyprodukuje najväčšiu stratu, prípadne najnižší zisk. Pre akciu CA FP je to scenár zmeny ceny akcie s 8% so zachovaním volatility. Dopad scenára je pokles opčnej prémie o 0,073%.

$\Delta S \setminus \Delta \sigma$	-25%	-12.50%	0%	12.50%	25%
-8%	0.058%	-0.051%	<u>-0.073%</u>	-0.002%	-0.038%
-6%	0.089%	-0.029%	-0.050%	0.031%	-0.010%
-4%	0.113%	-0.009%	-0.030%	0.054%	0.015%
-2%	0.134%	0.007%	-0.013%	0.072%	0.037%
0%	0.148%	0.018%	0.000%	0.089%	0.054%
2%	0.159%	0.025%	0.013%	0.105%	0.065%
4%	0.168%	0.031%	0.020%	0.118%	0.073%
6%	0.176%	0.038%	0.025%	0.129%	0.081%
8%	0.181%	0.046%	0.027%	0.141%	0.088%

Tabuľka 6 Výsledky matice scenárov pre akciu CA FP

Po aplikácii matice scenárov získame pre každú akciu relevantný scenár. V tabuľke nižšie vidieť, že relevantný scenár pre každú akciu bol pokles ceny o 8%. Tabuľka 7 ukazuje relevantný scenár pre každú akciu, dopad scenára na opčnú prémii a výpočet požiadavky podľa rovnice (2.4).

akcia	max. pokles	scenár	delta ekvivalent	požiadavka	druh trhu
HEN3.GY.Equity	-0.1210%	-8%	0.016	-0.12%	DE
CA.FP.Equity	-0.1009%	-8%	0.526	-0.06%	FR
X005930.KS.Equity	-0.1245%	-8%	0.641	-0.07%	KR
OR.FP.Equity	-0.0842%	-8%	0.082	-0.08%	FR
SBUX.UQ.Equity	-0.0467%	-8%	0.038	-0.04%	US
TGT.UN.Equity	-0.1133%	-8%	0.126	-0.10%	US
MDLZ.UQ.Equity	-0.0837%	-8%	0.077	-0.08%	US
JNJ.UN.Equity	-0.0930%	-8%	0.000	-0.09%	US
UNA.NA.Equity	-0.0508%	-8%	0.033	-0.05%	NL
MAT.UQ.Equity	-0.2963%	-8%	4.725	0.08%	US
NESN.VX.Equity	-0.0649%	-8%	0.000	-0.06%	CH
MCD.UN.Equity	-0.0629%	-8%	0.164	-0.05%	US
ROG.VX.Equity	-0.0181%	-8%	0.005	-0.02%	CH
NOVN.VX.Equity	-0.0612%	-8%	0.011	-0.06%	CH
BAYN.GY.Equity	-0.0456%	-8%	0.022	-0.04%	DE
HAS.UQ.Equity	-0.0752%	-8%	0.011	-0.07%	US
PUM.GY.Equity	-0.2181%	-8%	1.420	-0.10%	DE
X6702.JT.Equity	-0.1040%	-8%	0.723	-0.05%	JP
X4901.JT.Equity	-0.0639%	-8%	0.055	-0.06%	JP
ITX.SM.Equity	-0.0809%	-8%	0.082	-0.07%	ES
X7203.JT.Equity	-0.0459%	-8%	0.088	-0.04%	JP

Tabuľka 7 Relevantné scenáre pre podkladové akcie a vypočítaná požiadavka

Jednotlivé požiadavky sú potom agregované podľa druhu trhu akcie. Výsledná požiadavka, je absolútna hodnota súčtu záporných požiadaviek.

druh trhu	požiadavka
DE	0.27%
FR	0.14%
KR	0.07%
US	0.36%
NL	0.05%
CH	0.14%
JP	0.14%
ES	0.07%
Celkom	1,25%

Tabuľka 8 Výsledná požiadavka v prístupe podľa scenárov

Výsledkom požiadavky na krytie non-delta rizík pre prémiový vklad je **1,25%** z nominálnej hodnoty vkladu.

5.2.3 Zhrnutie výsledkov

Celkový prehľad výsledkov zobrazený v nižšie uvedenej tabuľke ukazuje najnižšiu požiadavku pri použití štandardizovaného prístupu a použitím scenárov pre výpočet

non-delta rizika. Pri použití delta-plus prístupu sa nám požiadavka ohromne navýši kvôli gamma riziku. Bude to pravdepodobne spôsobené tým, že niektoré akcie sa nachádzajú v okolí bariér pre výplatu kupónu, a zmena ceny, čiže možný posun ešte viac k bariére, môže spôsobovať zvýšenie citlivosti na ďalšiu zmenu ceny.

Výhoda použitia prístupu na základe scenárov je, že počítame priamo zmenu opčnej prémie na základe hypotetickej zmeny rizikového faktoru o zamýšľaný posun. V prípade použitia prístupu delta-plus odhadujeme citlivosť na zmenu rizikového faktoru, avšak tá platí iba v tesnom okolí výpočtu. Keďže opcia sa správa úplne inak v okolí bariéry, nie je možné citlivosti využívať k väčším pohybom s rizikovými faktormi.

Výhody výpočtu interným modelom pomocou hodnoty v riziku spočívajú hlavne v zachytení určitého diverzifikačného efektu a vo využití spoločného pôsobenia rizikových faktorov, kde môže dochádzať k vzájomným protipohybom, čo sa týka vplyvu na zmenu ceny. V našom prípade, keď máme v portfóliu iba jednu opciu, a zameriavame sa úzko na obmedzenú množinu rizikových faktorov, bude takýto efekt minimálny. Navyše, významný podiel na výške požiadavky použitím VaR majú regulatorné multiplikačné koeficienty, ktoré sa často ťažšie ekonomicky zdôvodňujú.

Ukázalo sa tiež, že škálovaním hodnoty v riziku taktiež dochádza k zvyšovaniu požiadavky. Ak by sme použili priamo 10 denný VaR, znížila by sa požiadavka približne o 120 bodov, teda na úroveň štandardizovaného prístupu s použitím scenárov.

	CAR celkom	CAR všeobecné riziko	CAR špecifické riziko	CAR non-delta
<i>CAR_{STA} delta plus</i>	15.79%	0.71%	0.71%	14.38%
<i>CAR_{STA} scenáre</i>	2.66%	0.71%	0.71%	1.25%
<i>CAR_{IM} 1 denný VaR</i>	3.68%			

Tabuľka 9 Prehľad kapitálovej požiadavky podľa rôznych prístupov

6 Záver

Správna optimalizácia kapitálovej požiadavky má významný dopad na ziskovosť a konkurencie schopnosť banky. Snaha bánk si požiadavku čo najviac znížiť dáva priestor vývoju rôznych sofistikovaných modelov pre jej výpočet, pričom sa očakáva, že úžitok zo zníženia požiadavky prevýši náklady spojené s udržiavaním, počítaním a celkovou obsluhou modelu. Banky sa preto rozhodujú medzi jednoduchosťou výpočtu a dopadom požiadavky na kapitál. Sofistikovanejšie modely sa zvyčajne prejavajú pri väčších portfóliách, kde každé percento môže priniesť značnú úsporu.

Z analyzovaných prístupov sme zistili, že pre naše jednoduché portfólio pozostávajúce z jednej opcie s 21 podkladovými akciami, je požiadavka na vlastný kapitál na krytie rizík z akciových nástrojov výrazne odlišná iba v prípade použitia delta-plus metódy pri štandardizovanom prístupe. Štandardizovaný prístup pre výpočet požiadavky pre krytie pozičného rizika, ktorá je založená na delta ekvivalentoch, kapitálovú požiadavku výrazne nezvyšuje. Ukázalo sa, že požiadavka na krytie non-delta rizík na základe využitia prístupu scenárov je určite zaujímavou alternatívou k internému modelu. Jej myšlienka počítat dopady zmeny rizikových faktorov priamo do precenenia sa až tak neodlišuje od prístupu využitia hodnoty v riziku historickou simuláciou. Navyše, schválenie používania interného modelu je zvyčajne zložitý a dlhšie trvajúci proces, čo pri použití štandardizovaného prístupu s použitím scenárov pre non-delta riziká nie je nutné. Prístup využitia scenárov je proti delta-plus prístupu snád' náročnejší iba v tom zmysle, že banka musí používať vhodný model na ocenenie relevantných inštrumentov.

Ak má inštitúcia len malé, či nevýznamné portfólia, a v prípade, že by nebolo použitie interného modelu veľmi efektívne, je vhodné uprednostniť prístup na základe scenárov pred delta-plus prístupom. Vzhľadom k nízkym nárokom pre jeho zavedenie sa ešte viac prejavujú jeho výhody pri výpočte požiadavky na kapitál.

Literatúra

Anděl, Jiří. 2007. *Statistické metody*. Praha : matfyzpress, 2007.

Anděl, Jiří. 2007. *Základy matematické statistiky*. Praha : matfyzpress, 2007.

Björk. 1996. *Interest Rate Theory*. s.l. : CIME Lectures, 1996.

Cipra, Tomáš. 2005. *Matematika cenných papírů*. HZ Praha, 2005.

ČNB. Vyhláška č. 123/2007, o pravidlech obezřetného podnikání bank, spořitelných a úvěrových družstev o obchodníků s cennými papíry.

EBA. Nariadenie 575/2013 o prudenciálnych požiadavkách na úverové inštitúcie a investičné spoločnosti a o zmene nariadenia.

EBA, DA. Delegované nariadenie 528/2014 regulačné technické predpisy pre riziko iné než delta pri opciách v štandardizovanom prístupe k trhovému riziku.

Elliott, Robert a Kopp, Ekkehard. 2005. *Mathematics of Financial Markets*. New York : Springer, 2005.

Hull, John. 1993. *Options, Futures and Other Derivatives*. New Jersey : Prentice Hall, 1993.

Jäckel, Peter. 2002. *Monte Carlo Methods in Finance*. s.l. : John Wiley & Sons Ltd., 2002.

Mandl, Petr, Mazurová, Lucie a Justová, Iva. 2010. *Matematika řízení rizik 2009/10*. Praha : matfyzpress, 2010.

Prášková, Zuzana a Lachout, Petr. 2005. *Základy náhodných procesů*. 2005.

Prášková, Zuzana. 2005. *Základy náhodných procesů II*. 2005.

Wilmott, Howison and DeWynne. 1995. *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. 1995.

Prílohy práce

Priložené CD obsahuje súbory s údajmi o vývoji cien podkladových akcií, ich dividendy, a úrokové sadzby k ich oceneniu. Priložený je aj skript s príkazmi, ktoré boli použité pre vykreslenie grafov a všetky súvisiace výpočty v programe R, a propagačný leták prémiového vkladu.