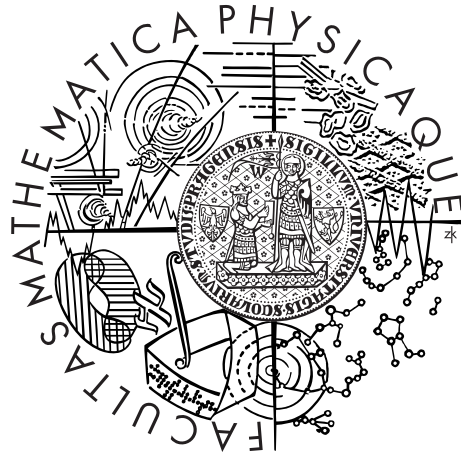


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petra Žalobínová

## Křivky skryté v diferenciálních rovnicích

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2015

Ďakujem vedúcemu bakalárskej práce doc. RNDr. Pavlovi Pyrihovi, CSc. za jeho čas, ústretovosť, cenné rady a pripomienky počas celého vedenia mojej bakalárskej práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 31.7.2015

Petra Žalobínová

Title: Curves hidden in differential equations

Author: Petra Žalobínová

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: Bachelor thesis *Curves hidden in differential equations* is engaged in solving and deriving differential equations, leading to the selected curve, which are cycloid curve and curves described by the hyperbolic functions. The core of the work is outlined into four transparent chapters, where the first of them gives a brief insight into the theory of curves and differential equations. In the following chapters, the work is specifically devoted to two historically significant problems, which are brachistochrone and catenary problems, but also deals with eigen, more modern problem of dynamics of symbiotic populations. The text explains the procedure of deriving differential equations from the considered problems and shows their solutions, by multiple methods. The contribution of this work, apart from the formulation and solution of the problem of symbiotic populations, is processing and making additions to solutions of these problems using a variety of methods from cited literature. The most important addition is relatively new and less known proof of the uniqueness of solutions of brachistochrone problem, which is enhanced by eigen intermediate steps and explanations.

Keywords: curve, differential equation, catenary, brachistochrone, tautochrone

Názov práce: Krivky skryté v diferenciálnych rovniciach

Autor: Petra Žalobínová

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Bakalárska práca *Krivky skryté v diferenciálnych rovniciach* sa zaoberá odvođením a následne riešením diferenciálnych rovníc, vedúcich na vybrané krivky, a to cykloidu a na krivky popísané hyperbolickými funkciami. Jadro práce je koncipované do štyroch prehľadných kapitol, kde prvá z nich podáva stručný náhľad do teórie kriviek a diferenciálnych rovníc. V ďalších kapitolách sa práca špeciálne zaoberá dvoma historicky významnými problémami, a to úlohou o brachistochrone a reťazovke, no zaoberá sa aj vlastným modernejším problémom dynamiky symbiotických populácií. Text práce vysvetľuje postup odvodenia diferenciálnych rovníc z uvažovaných problémov, ako aj ich riešenie, a to viacerými metódami. Prínosom práce je, okrem formulácie a riešenia problému symbiotických populácií, spracovanie a doplnenie riešení spomínaných problémov pomocou rôznych metód z citovaných literatúr. Najdôležitejším doplnením je pomerne nový a menej známy dôkaz o jednoznačnosti riešenia úlohy o brachistochrone, ktorý je rozšírený o vlastné medzikroky a vysvetlenia.

Kľúčové slová: krivka, diferenciálna rovnica, reťazovka, brachistochrona, tautoch-rona

# Obsah

1	Historický úvod	2
2	Vybrané partie z teórie kriviek a diferenciálnych rovníc	3
3	Reťazovka	7
4	Hyperbolické funkcie v diferenciálnych rovniciach	13
5	Úloha o brachistochrone	17
6	Záver	29
	Literatúra	30
	Zoznam obrázkov	31

# Kapitola 1

## Historický úvod

Diferenciálne rovnice tvoria jednu z najdôležitejších partií analýzy a sú kľúčové najmä pre pochopenie fyzikálnych javov.

Jednou z najznámejších úloh, ktorej sa budeme venovať aj v tejto práci, je hľadanie tvaru dokonale ohybného lanka (reťaze) zaveseného medzi dvoma bodmi pod silou vlastnej tiaže. Galileo tvrdil, že riešením takejto úlohy je parabola, čo bolo vyvrátené Jungiusom v roku 1669. Jej riešenie sa podarilo odvodiť až v roku 1691 Leibnizovi, Huygensovi a Johnovi Bernoullimu, na výzvu Jacoba Bernoulliho. Reťazovke bude venovaná aj celá kapitola 3 so zhodným názvom. V nej odvodíme tvar diferenciálnej rovnice z matematicko-fyzikálnej interpretácie spomínanej úlohy a uvedieme dva prístupy k jej riešeniu. Ukážeme tiež, že hľadaným riešením tejto úlohy je krivka zvaná reťazovka (angl. catenary, z latinského catena-reťaz).

Ďalšou úlohou, ktorej sa budeme v tejto práci venovať je odvodenie diferenciálnych rovníc, ktoré vedú na hyperbolické funkcie. V úvode kapitoly 4 sformulujeme problém rastu symbiotických populácií a reprezentujeme ho sústavou diferenciálnych rovníc, ktoré následne vypočítame analyticky, pre rôzne počiatkové podmienky. Vybrané riešenia a ich správanie potom ilustrujeme aj graficky. V závere kapitoly 3 sa budeme zaoberať problémom hyperbolického sínusu. Jeho diferenciálnu rovnicu odvodíme z riešenia problému o reťazovke, popísaného v kapitole 3.

Nemenej dôležitým a významným historicko-matematickým problémom kapitoly 5 je úloha o brachistochrone. Tá spočíva v hľadaní takej krivky, ktorá minimalizuje čas prechodu guľičky medzi dvoma bodmi v rôznej výške. Navrhol ju John Bernoulli v roku 1696 a jej riešením je krivka nazývaná brachistochrona (z gréckeho brachisto, najkratši + chronos, čas). V tejto práci budú spracované a vysvetlené dva postupy hľadania a zostavenia diferenciálnej rovnice, ktorá na túto krivku vedie. Prvý sa opiera o riešenie Johanna Bernoulliho, ktoré vychádza z fyzikálneho princípu, Snellovho zákona lomu. Druhé riešenie predstavil Jacob Bernoulli v roku 1698 a spoločne s Leonahrdom Eulerom a Josephom L. Lagrangeom sa tak zaslúžil o vznik klasického variačného počtu. V závere kapitoly 5 ukážeme, že riešením tohto problému je krivka zvaná cykloida. Historické poznatky v tomto texte sú čerpané z [7] a [10].

# Kapitola 2

## Vybrané partie z teórie kriviek a diferenciálnych rovníc

V tejto kapitole zdefinujeme základné pojmy a tvrdenia z teórie kriviek a diferenciálnych rovníc.

**Definícia 2.1** (Diferenciálna rovnica). *Nech  $F$  je funkcia  $n + 2$  premenných definovaná na množine  $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ . Nech  $C^n(I)$  je množina všetkých funkcií  $y = f(x)$ , ktoré sú na intervale  $I$   $n$ -krát diferencovateľné a pre každé  $x_0 \in I$  je  $(x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0)) \in M$ . Potom rovnicu*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

*nazývame obyčajnou diferenciálnou rovnicou (ODR)  $n$ -tého rádu. Číslo  $n$  nazývame rádom diferenciálnej rovnice (2.1). Vid' [3, str. 125].*

**Definícia 2.2** (Riešenie diferenciálnej rovnice). *Každú funkciu  $y = \varphi(x) \in C^n(I)$ , pre ktorú platí*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$$

*pre každé  $x \in I$ , nazývame riešením diferenciálnej rovnice (2.1) na intervale  $I$ . Graf riešenia  $y = \varphi(x)$  sa nazýva integrálna krivka diferenciálnej rovnice. Vid' [3, str. 125].*

**Poznámka 2.3.** Funkcia  $y = \varphi(x)$  môže byť určená aj parametricky  $x = \psi_1(t)$ ,  $y = \psi_2(t)$  alebo implicitne  $\phi(x, y) = 0$ . Ak je riešenie dané implicitne, potom ho nazývame integrálom diferenciálnej rovnice. Vid' [3, str. 125].

**Definícia 2.4** (Maximálne riešenie). *Riešenie rovnice (2.1) sa nazýva maximálne riešenie, ak je definované na maximálnom intervale  $I$ , tzn. nie je reštrikciou riešenia rovnice (2.1), definovanom na intervale  $I'$ , pre ktorý je  $I \subset I' \neq I$ . Vid' [13, str. 433, Označenie 15.1.2].*

**Poznámka 2.5.** Každé riešenie diferenciálnej rovnice (2.1) je reštrikciou nejakého jej maximálneho riešenia. Vid' [13, str. 443].

Uvažujme diferenciálnu rovnicu s počiatočnou podmienkou (počiatočná úloha)

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2.2)$$

kde  $f(x,y)$  je funkcia definovaná na otvorenej súvislej množine  $G$  v  $\mathbb{R}^2$ . V nasledujúcom texte sformulujeme vety, ktoré pojednávajú o jednoznačnosti a existencii riešenia počiatkovej úlohy (2.2) .

**Veta 2.6** (Peano). *Nech funkcia  $f$  z úlohy (2.2) je spojitá na oblasti  $G \subset \mathbb{R}^2$  a nech  $[x_0, y_0] \in G$ . Potom má počiatková úloha (2.2) aspoň jedno riešenie. Vid' [13, str. 435, Tvrdenie 15.2.1]*

**Veta 2.7** (Picard-Lindelöf). *Nech  $\varepsilon > 0$  a nech  $I = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ . Nech je navyše  $f$  z úlohy 2.2 spojitá na  $I$  a existuje také číslo  $K > 0$ , že pre všetky  $y_1, y_2 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$  platí*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|. \quad (2.3)$$

*Potom existuje riešenie  $\varphi(x)$  úlohy (2.2) a interval  $(c, d)$  obsahujúci  $x_0$ , na ktorom je toto riešenie jednoznačné. Vid' [13, str. 439, Veta 15.3.1] .*

*Poznámka 2.8.* Ak je  $f(x,y)$  spojitá na uzavretej a ohraničenej oblasti  $V$  a má na  $V$  spojitú parciálnu deriváciu  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , potom je podľa Weierstrassovej vety táto derivácia na  $V$  ohraničená a splňuje teda aj Lipschitzovskú podmienku (2.3) na  $V$ .

**Veta 2.9.** *Nech  $f$  z úlohy (2.2) je spojitá a lokálne lipschitzovská na oblasti  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Potom existuje interval  $(c, d)$  obsahujúci  $x_0$  a na ňom práve jedno maximálne riešenie úlohy (2.2) . Vid' [13, str. 443, Veta 15.4.4] .*

*Poznámka 2.10.* Znenie týchto viet môžeme preformulovať aj na systémy ODR, a to vektorovým zobecnením vzorcov pre jednu rovnicu. Vid' [13, str. 441-444] .

Diferenciálne rovnice úzko súvisia aj s teóriou variačného počtu. Jedna z jeho klasických úloh je nájst extrém funkcionálu, ktorý zobrazuje množinu reálnych funkcií do množiny reálnych čísel. Riešením tejto úlohy je funkcia, v ktorej má daný funkcionál extrém.

Nech  $C^1([a, b])$  je metrický priestor všetkých funkcií  $y(x)$  so spojitou prvou deriváciou na  $[a, b]$  s metrikou  $d(y, z) = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - z(x)|$  a nech

$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx$  je funkcionál. Nasledujúca definícia je prirodzenou obdobou definície extrémov funkcií.

**Definícia 2.11.** *Hovoríme, že funkcionál  $F(y)$  nadobúda lokálne minimum (maximum) na  $C^1([a, b])$  pre  $y_0 \in [a, b]$ , ak existuje také  $P_{y_0}$ , prstencové okolie  $y_0$ , že pre všetky  $y \in C^1([a, b]) \cap P_{y_0}$  platí*

$$F(y) \geq F(y_0), \quad (F(y) \leq F(y_0)).$$

*V prípade ostrých nerovností hovoríme o ostrom lokálnom minime (maxime). Funkcionál  $F(y)$  nadobúda globálne minimum (maximum) na  $C^1([a, b])$  pre  $y_0 \in C^1([a, b])$ , ak pre všetky  $y \in C^1([a, b])$  platí*

$$F(y) \geq F(y_0), \quad (F(y) \leq F(y_0)).$$

*V prípade ostrých nerovností hovoríme o ostrom globálnom minime (maxime).*

*Poznámka 2.12.* To, či funkcia  $y_0$  naozaj minimalizuje hodnoty určené funkcionálom  $F(y)$ , sa overuje jej malou zmenou, variáciou  $v$  (nemusíme skúmať všetky funkcie z jej okolia). Po týchto zmenách sa totiž hodnota  $F$  nesmie zmenšiť. To znamená, že funkcia  $g(t) = F(y_0 + vt)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  musí mať v bode  $t = 0$  minimum. Toto pozorovanie dáva návod k dôkazu nasledujúceho tvrdenia.

**Veta 2.13** (Euler-Lagrangeova rovnica). *Nech  $f(x, y(x), y'(x))$  má spojité druhé parciálne derivácie vzhľadom na všetky premenné pre  $x \in [a, b]$ , a nech  $F$  nadobúda na  $C^1([a, b])$  lokálny extrém pre  $y_0$ . Potom funkcia*

$$h : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_0(x), y'_0(x))$$

je spojitě diferencovateľná na  $[a, b]$  a pre všetky  $x \in [a, b]$  platí

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x), y'_0(x)) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) \right] = 0. \quad (2.4)$$

Rovnica (2.4) sa nazýva Euler-Lagrangeova rovnica funkcionálu  $F$ .

Vid' [12, str. 33, veta 2.2.3].

*Poznámka 2.14* (Integrál Euler-Lagrangeovej rovnice). Ak funkcia  $y_0$  splňuje Euler-Lagrangeovu rovnicu (2.4) a funkcia  $f$  nezávisí explicitne na  $x$ , potom platí

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0, y'_0) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_0, y'_0) \right] = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0, y'_0) + \\ & + \left[ -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'}(x, y_0, y'_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y'_0) y'_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'}(x, y_0, y'_0) y''_0 \right] = \\ & = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0, y'_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y'_0) y'_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'}(x, y_0, y'_0) y''_0 = 0. \end{aligned}$$

Prenásobením poslednej rovnosti  $y'_0$  dostaneme

$$y'_0 \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0, y'_0) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}(x, y_0, y'_0) y'_0 - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'}(x, y_0, y'_0) y''_0 \right] = 0$$

kde ľavá strana rovnosti je deriváciou  $y'_0(x) \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) - f(x, y_0(x), y'_0(x))$ . Odtiaľ získame integrál Euler-Lagrangeovej rovnice pre funkciu  $f$  explicitne nezávislú na  $x$

$$y'_0(x) \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) - f(x, y_0(x), y'_0(x)) = konst. \quad (2.5)$$

Analogicky možno vyjadriť tieto rovnice pre  $f$ , nezávislú na  $y$ ,  $y'$ .

*Poznámka 2.15.* Funkcie  $y(x) \in C^1([a, b])$  splňujúce Euler-Lagrangeovu rovnicu sa nazývajú extrémaly funkcionálu  $F$ . Ak nejaké  $y_0$  minimalizuje (maximalizuje) funkcionál  $F$ , potom je  $y_0$  extrémalom tohto funkcionálu. Opačná implikácia však neplatí. Ak  $F$  nadobúda extrém, potom ich nadobúda v extrémoch.

V nasledujúcom texte si zdefinujeme základné pojmy z teórie kriviek.

**Definícia 2.16** (Krivka). *Nech je rovinná krivka  $K$  v pravouhlom súradnicovom systéme vektorovou funkciou skalára*

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}, \quad t \in [a, b],$$

ktorá je na  $[a, b]$  spojitá. Potom rovnicu

$$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (2.6)$$

kde zložky  $\varphi(t), \psi(t)$  určujúce túto rovnicu sú spojité funkcie na  $[a, b]$ , nazývame parametrickou rovnicou krivky  $K$ . Ak sú  $x, y$  tvaru

$$x = t, \quad y = f(t),$$

kde  $f$  je spojitú funkcia na  $[a, b]$ , potom je krivka  $K$  daná rovnicou

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2.7)$$

Vid' [3, str. 65, časť 3,1.]

**Veta 2.17** (Dĺžka krivky). *Nech  $K$  je krivka v rovine určená parametrickou rovnicou so zložkami*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kde  $\varphi(t), \psi(t)$  majú spojité derivácie na  $[\alpha, \beta]$ . Potom dĺžka krivky  $K$  je

$$L(K) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (2.8)$$

Nech  $K$  je krivka v rovine určená rovnicou

$$y = f(x), \quad t \in [a, b],$$

kde  $f(x)$  má spojitú deriváciu na  $[a, b]$ . Potom dĺžka krivky  $K$  je

$$L(K) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (2.9)$$

Vid' [3, str. 74, veta 1., veta 2.] .

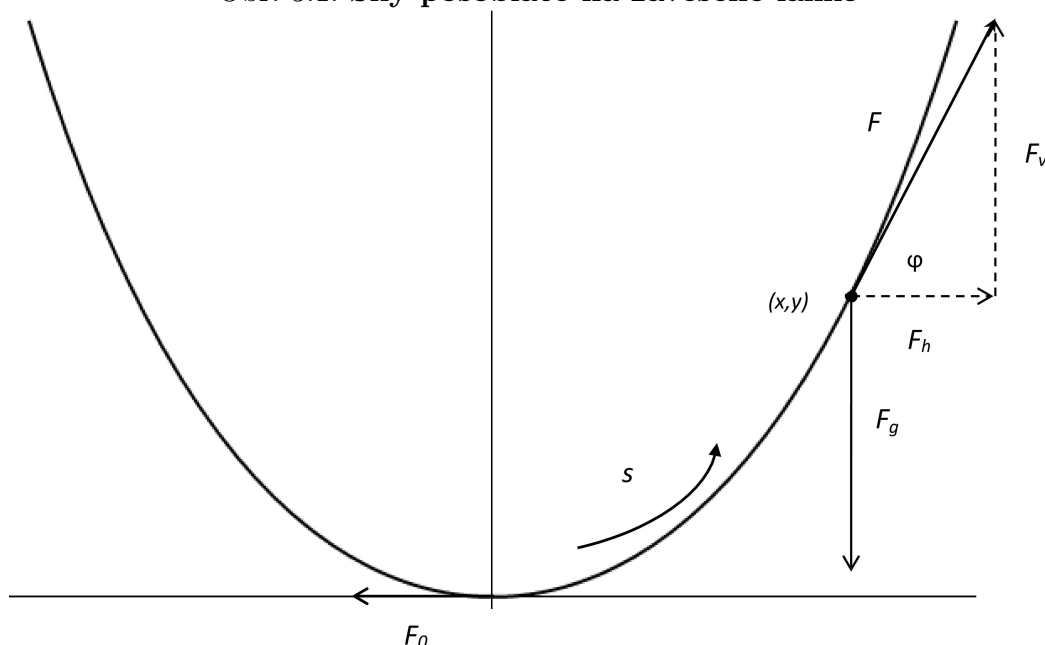
# Kapitola 3

## Reťazovka

V tejto kapitole budeme hľadať tvar dokonale ohybného lanka (reťaze) zaveseného v dvoch bodoch rovnakej výšky, visiaceho len pod silou vlastnej tiaže. V celom texte budeme na značenie vektorov používať tučné písmo.

**Úloha 3.1** (Odvodenie diferenciálnej rovnice). *Nech sú koncové body dokonale ohybného homogenného lanka zavesené v dvoch rôznych bodoch rovnakej výšky. Nech najnižší bod lana, označme ho  $L$ , prechádza bodom  $(0,0)$ . Označme ďalej  $s$  dĺžku oblúka od tohto bodu do variabilného bodu  $(x,y(x))$  a  $\rho$  hustotu lanka. Zostavte diferenciálnu rovnicu, ktorá vedie na krivku popisujúcu tvar tohto lanka, visiaceho len pod vplyvom vlastnej tiaže.*

Obr. 3.1: Sily pôsobiace na zavesené lanko



*Riešenie.* Pri zostavovaní rovnice budeme vychádzať z toho, že sily pôsobiace na časť lana od jeho najnižšieho bodu po  $(x,y(x))$ , v pokoji, sú v rovnováhe. To znamená, že výslednica síl pôsobiacich na túto časť lana je nulová, a teda horizontálna zložka  $\mathbf{F}_h$  sily  $\mathbf{F}$  bude v rovnováhe s horizontálnou silou  $\mathbf{F}_0$  pôsobiacou v najnižšom bode lana a vertikálna zložka  $\mathbf{F}_v$  bude v rovnováhe s gravitačnou

silou  $\mathbf{F}_g$  pôsobiacou na časť lana od bodu  $L$  do  $(x, y(x))$ , viď [10, str. 66-67] . Pre veľkosti síl to teda znamená, že  $F_g = F_v$  a  $F_0 = F_h$ . Fyzikálnu ako aj geometrickú interpretáciu vyššie popísanej situácie ilustruje obrázok 3.1 , odkiaľ sú zrejmé aj nasledujúce vzťahy.

$$F \cos \varphi = F_h = F_0, \quad F \sin \varphi = F_v = F_g = gM(s) = g \int_0^s \varrho(t) dt, \quad (3.1)$$

kde  $M(s)$  je hmotnosť časti lana od bodu  $L$  do  $(x, y(x))$ , dĺžky  $s$ . Nech  $\varrho(x)$  je hustota lanka v bode  $(x, y(x))$ . Hmotnosť  $M(s)$  ohnutého lanka, ktorého tvar je určený grafom funkcie  $y(x)$ , potom vypočítame sčítaním jednotlivých hmotností  $\varrho(x)ds$  maličkých dielikov  $ds$ . Užitím týchto dvoch rovností a úpravou výrazu

$$F \sin \varphi = F \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \varphi = F \cos \varphi \tan \varphi = F_0 \frac{dy}{dx} = F_0 y'(x)$$

získame rovnosť

$$F_0 y'(x) = g \int_0^s \varrho(x) ds. \quad (3.2)$$

Z predpokladu homogénosti lanka plynie, že hustota  $\varrho(x)$  je konštantná. Označme ju teda  $\varrho(x) = \varrho_k$ . Použitím zrejmého vzťahu

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} dx = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

môžeme (3.2) ekvivalentne prepísať na tvar

$$F_0 y'(x) = g \int_0^x \varrho_k \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (3.3)$$

Derivovaním tohto výrazu získame rovnosť

$$F_0 y''(x) = \frac{d}{dx} g \int_0^x \varrho_k \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad (3.4)$$

a použitím známeho vzťahu

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x),$$

upravíme (3.4) na:

$$F_0 y''(x) = \frac{d}{dx} g \int_0^x \varrho_k \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = g \varrho_k \sqrt{1 + y'^2(x)}. \quad (3.5)$$

Jej vydelením hodnotou  $F_0$  tak získame diferenciálnu rovnicu druhého rádu s počiatocnými podmienkami (počiatocná úloha)

$$y''(x) = k \sqrt{1 + y'^2(x)} \quad y_0 = y(0) = 0, \quad y'_0 = y'(0) = 0, \quad (3.6)$$

kde  $k = \frac{g\varrho_k}{F_0}$ , ktorá vedie na tvar krivky opisujúcej zavesené lanko.

*Poznámka 3.2.* Prvá z počiatkových podmienok je volená tak, aby hľadaná krivka prechádzala bodom  $(0,0)$ , tzn.  $y_0 = y(0) = 0$ . Druhá podmienka plynie z predpokladu, že bod  $(0,0)$  je najnižším bodom uvažovanej krivky. Znamená to, že v bode  $x = 0$  musí byť splnená nutná podmienka pre nadobúdanie extrému  $y'(0) = 0$ .

**Tvrdenie 3.3** (O existencii a jednoznačnosti riešenia). *Počiatková úloha (3.6) má práve jedno maximálne riešenie.*

*Dôkaz.* Prvým krokom k dôkazu je prevedenie diferenciálnej rovnice druhého stupňa na sústavu diferenciálnych rovníc prvého stupňa, a to substitúciou  $y_1(x) = y(x)$ ,  $y_2(x) = y_1'(x)$ . Jej použitím získame počiatkovú úlohu

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) = f_1(x, y_1, y_2), & y_1(x_0) &= y_1(0) = 0 \\ y_2'(x) &= k\sqrt{1 + y_2^2(x)} = f_2(x, y_1, y_2) & y_2(x_0) &= y_2(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

ekvivalentnú s počiatkovou úlohou (3.6), kde sme pravé strany rovníc označili  $f_1, f_2$ . Druhým a zároveň posledným krokom dôkazu je overenie predpokladov vety 2.9 pre vektorovú funkciu

$$(f_1, f_2) = \mathbf{f} : G = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

z počiatkovej úlohy (3.7). Predpoklad spojitosti  $\mathbf{f}$  je splnený vďaka spojitosti funkcií  $f_1, f_2$  na otvorenej oblasti  $G$ . Tá je zaručená existenciou vlastnej derivácie funkcie  $y_2(x)$ . Je zrejmé, že aj parciálne derivácie

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} &= 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} &= 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \frac{ky_2}{\sqrt{1 + y_2^2}} \end{aligned}$$

sú na  $G$  spojité, z čoho plynie, že na každom kompaktnom intervale  $K \subset G$  sú ohraničené. Funkcia  $\mathbf{f}$  teda spĺňa podmienku lokálnej lipschitzovskosti na  $G$ . Tým sú splnené všetky predpoklady vety 2.9, a existuje teda interval  $(c, d)$  obsahujúci  $x_0 = 0$  a na ňom práve jedno maximálne riešenie počiatkovej úlohy (3.6). □

*Poznámka 3.4.* Existencia vlastnej derivácie funkcie  $y_2$  implikuje jej spojitosť. Funkcie  $f_1, f_2, \frac{\partial f_2}{\partial y_2}$  sú teda zložením spojitých funkcií a sú preto spojité.

**Tvrdenie 3.5.** *Počiatková úloha (3.6) má na  $\mathbb{R}$  riešenie*

$$y(x) = \frac{1}{k} \cosh(kx) - \frac{1}{k}.$$

*Dôkaz.* Prvý prístup k riešeniu diferenciálnej rovnice (3.6) je substitúcia  $y' = z$  a separácia premenných. Nech  $y' = z$ . Potom  $y'' = z' = \frac{dz}{dx}$  a rovnica (3.6) teda bude mať tvar

$$\frac{dz}{dx} = k\sqrt{1 + z^2},$$

čo je diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorú už vieme jednoducho vyriešiť metódou separácie premenných. Jej použitím získame rovnicu

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k dx. \quad (3.8)$$

Integrovaním (3.8)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = \int k x dx$$

dostávame rovnosť

$$\operatorname{arcsinh}(z) = kx + c, \quad (3.9)$$

kde  $c$  je konštanta. Dosadením počiatočnej podmienky  $y(0) = y'(0) = z(0) = 0$  vypočítame, že  $c = 0$ . Vyjadrením  $z$  z (3.9) získame rovnosť

$$z = \sinh(kx)$$

a spätnou substitúciou  $z = \frac{dy}{dx}$  dostaneme diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$\frac{dy}{dx} = \sinh(kx),$$

ktorej riešením je

$$y = \frac{1}{k} \cosh(kx) + C.$$

Z počiatočných podmienok vypočítame, že  $C = -\frac{1}{k}$ . Riešením počiatočnej úlohy (3.6) na  $\mathbb{R}$  je teda

$$y(x) = \frac{1}{k} \cosh(kx) - \frac{1}{k}. \quad (3.10)$$

□

V prípade, že nemáme znalosti o hyperbolických funkciách, je vhodné použiť nasledujúce alternatívne riešenie, ktorého postup sa opiera o [4, str. 252] .

*Poznámka 3.6* (Alternatívne riešenie). Umocnením (3.6) dostaneme tvar rovnice

$$y''^2(x) = k^2(1 + y'^2(x))$$

a jej zderivovaním vzhľadom na premennú  $x$  získame rovnosť

$$2y''(x)y'''(x) = 2k^2y'(x)y''(x). \quad (3.11)$$

Z (3.6) je zrejmé, že  $y''(x) \neq 0$ , a preto môžeme (3.11), predelením výrazom  $2y''(x)$ , upraviť na tvar

$$y'''(x) = k^2y'(x). \quad (3.12)$$

Substitúciou  $z(x) = y'(x)$ ,  $z'(x) = y''(x)$ ,  $z''(x) = y'''(x)$  a dosadením do (3.11) dostaneme homogénnu lineárnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientmi

$$z''(x) - k^2z(x) = 0, \quad (3.13)$$

s počiatočnými podmienkami  $z(0) = 0$ ,  $z'(0) = k$ . Tie získame dosadením počiatočných podmienok  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  do pôvodnej rovnice (3.6) a užitím

poslednej substitúcie. Hľadané riešenie rovnice (3.13) je tvaru  $e^{\lambda x}$ . Prvky fundamentálneho systému nájdeme riešením charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \Rightarrow (\lambda - k)(\lambda + k) = 0.$$

Je evidentné, že korene tejto rovnice sú  $\lambda_1 = k$ ,  $\lambda_2 = -k$ . Keďže sú obidve reálne a rôzne, fundamentálny systém je  $\{e^{kx}, e^{-kx}\}$  a obecné riešenie je tvaru  $z = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$ . Dosadením počiatkových podmienok získame sústavu rovníc

$$z(0) = 0 = c_1 + c_2, \quad z'(0) = k = kc_1 - kc_2,$$

z ktorej dopyčítame hodnoty konštánt  $c_1 = \frac{1}{2}$ ,  $c_2 = \frac{-1}{2}$ . Odtiaľ je riešenie tvaru  $z = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$ . Spätnou substitúciou dostaneme diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$y'(x) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2},$$

ktorej riešením je

$$y(x) = \frac{1}{k} \left( \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \right) + C.$$

Dosadením počiatkových podmienok vypočítame hodnotu konštanty  $C = \frac{-1}{k}$ . Riešenie rovnice (3.6) má teda na  $\mathbb{R}$  tvar

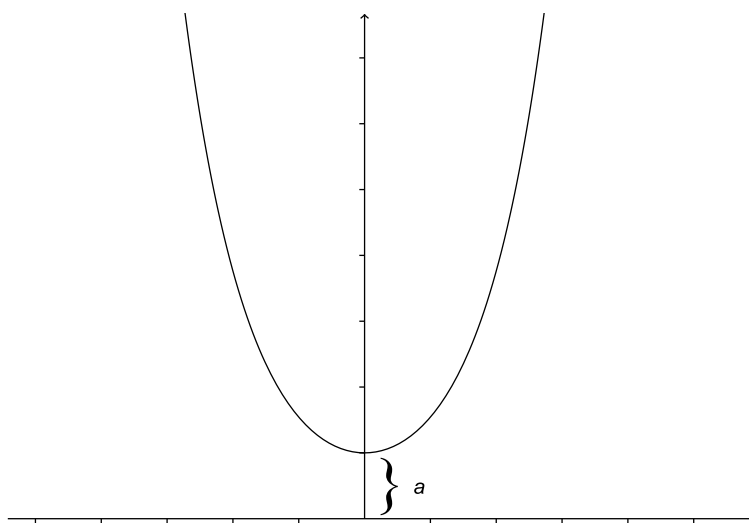
$$y(x) = \frac{1}{k} \left( \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \right) - \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \cosh(kx) - \frac{1}{k}.$$

**Definícia 3.7** (Reťazovka). *Reťazovka je krivka, ktorej obecná rovnica má na  $\mathbb{R}$  tvar*

$$y(x) = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

kde  $a$  je výška jej vrcholu. Vid' [7, str. 123].

Obr. 3.2: **Reťazovka**



Konštanta  $\frac{-1}{k}$  vo výraze  $\frac{1}{k} \cosh(kx) - \frac{1}{k}$  je len posunutím krivky po zvislej osi a tvar krivky teda nijako neovplyvní. Preto môžeme riešenie počiatočnej úlohy (3.6) zapísať v tvare

$$y(x) = \frac{1}{k} \cosh(kx) \quad (3.14)$$

a formulovať záver, že krivka popisujúca zavesené dokonale ohybné homogénne lanko je krivka zvaná reťazovka.

V nasledujúcej kapitole 4 naviažeme na hyperbolické funkcie a pokúsime sa odvodiť diferenciálnu rovnicu vedúcu na krivky určené funkciami  $\cosh$  a  $\sinh$ .

# Kapitola 4

## Hyperbolické funkcie v diferenciálnych rovniciach

V tejto kapitole sformulujeme úlohy vedúce na diferenciálne rovnice, ktorých riešením sú hyperbolické funkcie  $\sinh$  a  $\cosh$ .

**Model 4.1** (Dynamika symbiotických populácií). *Uvažujme nasledujúcu modelovú situáciu pre dve symbiotické populácie  $x$  a  $y$ . Označme  $x(t)$ ,  $y(t)$  veľkosti populácií  $x$ ,  $y$  v čase  $t$ . Nech rýchlosť rastu populácie  $y(t)$  v čase  $t$  závisí priamo na veľkosti populácie  $x(t)$  a rýchlosť rastu populácie  $x(t)$  v čase  $t$  naopak, na veľkosti populácie  $y(t)$ . Sústava diferenciálnych rovníc popisujúca túto situáciu je*

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = x(t), \quad \frac{dx}{dt} = x'(t) = y(t). \quad (4.1)$$

V ďalšom texte sa budeme zaoberať riešeniami sústavy (4.1) z modelu 4.1 pre nami zvolené počiatočné podmienky.

**Tvrdenie 4.2.** *Počiatočná úloha*

$$y'(t) = x(t), \quad x'(t) = y(t) \quad y_0 = y(0) = 1, \quad x_0 = x(0) = 0. \quad (4.2)$$

*má na  $\mathbb{R}$  riešenie tvaru*

$$y(t) = \cosh(t), \quad x(t) = \sinh(t).$$

*Dôkaz.* Úpravou prvej rovnice na tvar  $y' - x = 0$  a jej derivovaním získame rovnicu  $y'' - x' = 0$ . Substitúciou  $x' = y$  tak prevedieme sústavu (4.1) na ekvivalentnú rovnicu

$$y''(t) - y(t) = 0. \quad (4.3)$$

Diferenciálna rovnica (4.3) je homogénna lineárna rovnica druhého rádu s konštantnými koeficientmi. Jej riešenie je teda tvaru  $e^{\lambda t}$ , kde  $\lambda$  je koreňom charakteristickej rovnice

$$\lambda^2 - 1 = 0. \quad (4.4)$$

Je zrejmé, že riešením rovnice (4.4) sú reálne čísla  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ , takže fundamentálny systém je tvaru

$$\{e^t, e^{-t}\}.$$

Obecným riešením rovnice (4.3) je teda

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Hodnoty konštant  $c_1, c_2$  sa dopočítajú dosadením počiatočných podmienok  $y(0) = 1, x(0) = y'(0) = 0$  do rovníc

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \\ y'(t) &= c_1 e^t - c_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Tým získame sústavu rovníc  $c_1 + c_2 = 1, c_1 - c_2 = 0$ , odkiaľ je zrejmé, že  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ . Riešením sústavy (4.1) s počiatočnými podmienkami  $y(0) = 1, x(0) = 0$  je teda

$$y(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh(t) \Rightarrow y'(t) = x(t) = \sinh(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

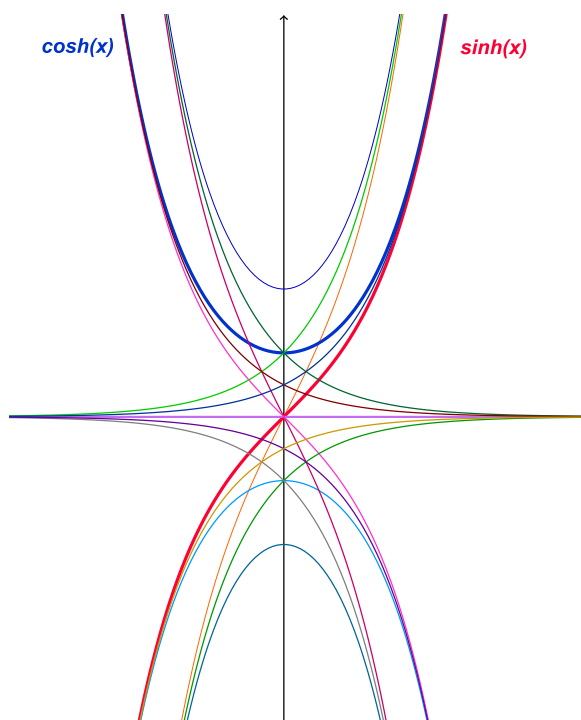
□

*Poznámka 4.3* (Variácie počiatočných podmienok). Nulové riešenie

$$y(t) = x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

by sme dostali analogicky pre hodnoty konštant  $c_1 = c_2 = 0$ , a teda pri voľbe počiatočných podmienok  $y(0) = y'(0) = 0$ . Riešenia  $y(t)$  pre rôzne vybrané hodnoty konštant  $c_1, c_2 \in [-1, 1]$  sú ilustrované na obrázku 4.1.

Obr. 4.1: Riešenia pre rôzne počiatočné podmienky



Poznámka 4.4. Sústavu (4.1) možno ekvivalentne prepísať na tvar

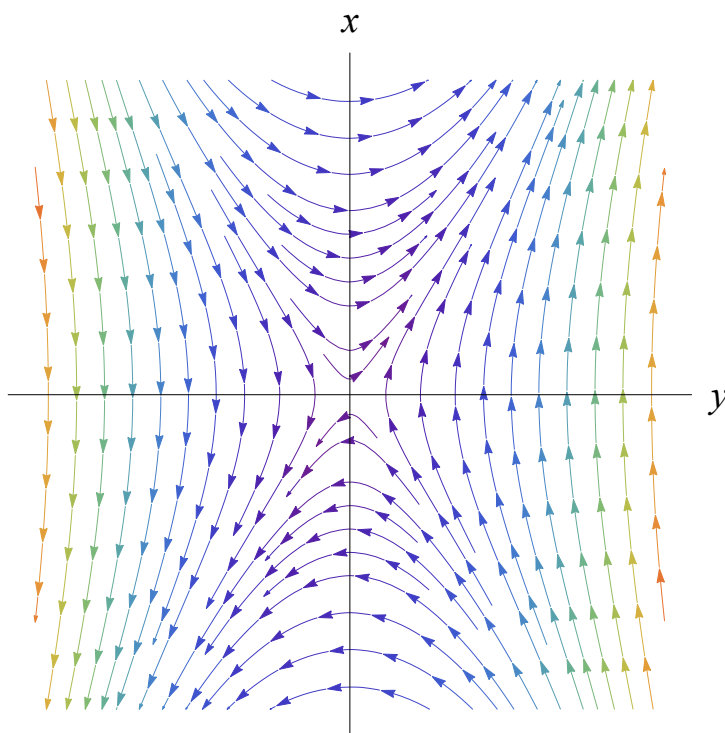
$$\begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Pre nájdenie stacionárneho riešenia sústavy diferenciálnych rovníc (4.1) položíme sústavu (4.7) rovnú nule.

$$\begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

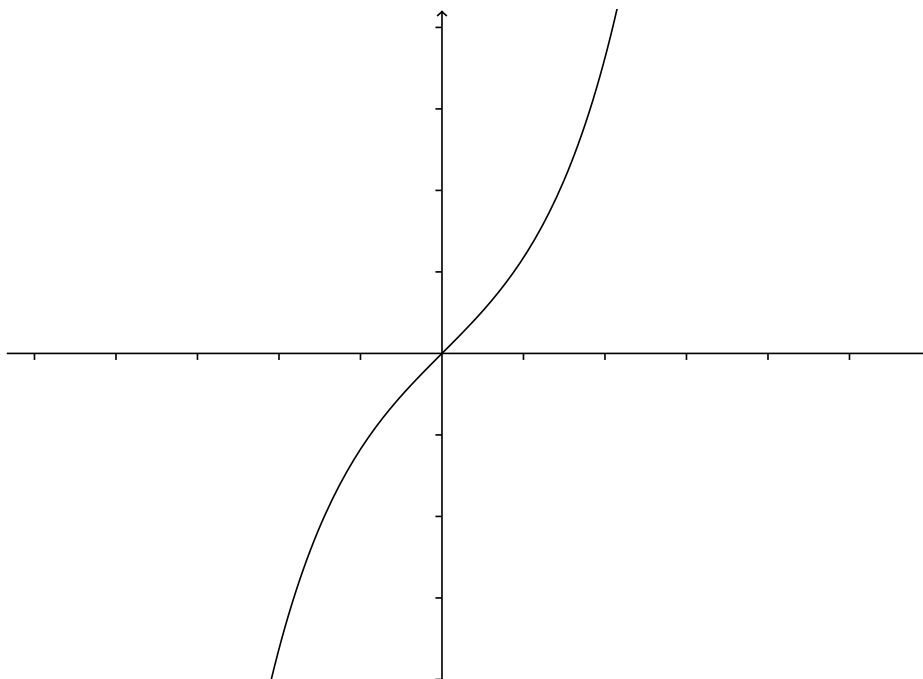
Keďže determinant  $\det \mathbf{A}$  je nenulový, je  $x = y = 0$  jediným riešením sústavy (4.8). Bod  $(0,0)$  v rovine je teda kritickým (singulárnym) bodom sústavy (4.1). Vzhľadom na to, že korene  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  charakteristickej rovnice (4.4) sú reálne a majú rôzne znamienka, je tento kritický bod klasifikovaný ako sedlový bod sústavy (4.1). Vid' [9, 261-262]. Správanie riešení skúmaného systému je ilustrované fázovým portrétom na obrázku 4.2. Ten možno chápať ako vybranú časť trajektórií v rovine  $yy'$  resp.  $yx$ , ktorú nazývame fázová rovina. Vid' [2, str. 373].

Obr. 4.2: Fázový portrét



Zatiaľ čo krivka určená grafom hyperbolickej funkcie  $\cosh$  sa v praxi vyskytuje pomerne často (napr. zavesená reťaz, mosty, oblúky), praktické problémy vedúce na  $\sinh$ , obr. 4.3, sú dosť zriedkavé. V nasledujúcom texte sa budeme zaoberať riešením počiatkovej úlohy odvodenej z tvaru diferenciálnej rovnice (3.6) z kapitoly 3, ktorá vedie na túto menej známú krivku.

Obr. 4.3: **Sinh(x)**



**Tvrdenie 4.5.** *Riešením počiatocnej úlohy*

$$y''(x) = k\sqrt{y'^2(x) - 1}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (4.9)$$

je

$$y(x) = \frac{1}{k} \sinh(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Dôkaz.* Substitúciou  $y' = z$  v (4.9) získame diferenciálnu rovnicu prvého rádu

$$z' = k\sqrt{z^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = k\sqrt{z^2 - 1}.$$

Separovaním premenných a integrovaním dostaneme

$$\int \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} dz = \int k dx.$$

Riešením integrálov z poslednej rovnosti je

$$\operatorname{arccosh}(z) = kx + c.$$

Dosadením počiatocnej podmienky  $y'(0) = z(0) = 1$  dopočítame hodnotu konštanty  $c = \operatorname{arccosh}(1) = 0$ . Substitúciou  $z = \frac{dy}{dx}$  a aplikovaním inverznej funkcie  $\operatorname{arccosh}$  dostávame  $\frac{dy}{dx} = \sinh(kx)$ . Separovaním premenných a integrovaním oboch strán rovností dospejeme k výslednej rovnosti

$$y = \frac{1}{k} \sinh(kx) + C,$$

kde  $C$  je vzhľadom na počiatocnú podmienku  $y(0) = 0$  rovné nule. Riešením počiatocnej úlohy (4.9) je teda

$$y(x) = \frac{1}{k} \sinh(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

# Kapitola 5

## Úloha o brachistochrone

Úloha o brachistochrone spočíva v hľadaní najrýchlejšej cesty z bodu A do bodu B ležiacich v rôznych výškach ako naznačuje obrázok 5.4 . Aký tvar by mala mať trajektória hmotného bodu, aby sa dostal do bodu B za čo najkratší čas, len pôsobením gravitácie? V tejto kapitole popíšeme dve riešenia tejto úlohy. Fyzikálne riešenie, pomocou Fermatovho princípu a Snellovho zákona a analytické, pomocou variačného počtu.

**Úloha 5.1** (Odvodenie diferenciálnej rovnice). *Odvodte diferenciálnu rovnicu vedúcu na krivku, po ktorej sa hmotný bod dostane z počiatočného bodu  $A = (x_0, y_0)$  do bodu  $B = (x_B, y_B)$  pôsobením gravitačnej sily, pri zanedbaní trenia čo najrýchlejšie.*

Pred samotným riešením tejto úlohy sformulujeme niekoľko základných fyzikálnych tvrdení, ktoré sú kľúčové pri odvodení fyzikálneho riešenia úlohy o brachistochrone. To spočíva v ich aplikovaní na riešenie obdobnej úlohy z optiky, viď [10, str. 35-40] , pomocou ktorého nájdeme dôležité vzťahy, neskôr použité na riešenie úlohy 5.1 .

**Tvrdenie 5.2** (Fermatov princíp minimálneho času). *Svetelný lúč prechádzajúci bodom A v jednom optickom prostredí a bodom B v druhom prostredí prejde vzdialenosť AB za najkratší možný čas. Viď [6, str. 363-364] .*

**Tvrdenie 5.3** (Snellov zákon lomu). *Pomer sínu uhlu dopadu svetelného lúča a sínu uhla lomu je rovný pomeru rýchlostí šírenia vlnenia v daných prostrediach*

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

*Viď [6, str. 364] .*

**Tvrdenie 5.4** (Zákon zachovania mechanickej energie). *Veľkosť celkovej mechanickej energie v izolovanej sústave (sústava, na ktorú nepôsobia žiadne vonkajšie sily) sa zachováva, tzn.  $E_p + E_k = c$ , kde  $E_p$  je potenciálna a  $E_k$  kinetická energia telesa. Viď [6, str. 67] .*

*Dôsledok.* Ak sa teleso pohybuje len účinkom gravitačnej sily, potom platí, že kinetická energia v najnižšom bode sa rovná potenciálnej v najvyššom bode a

naopak. Označme  $v_{max}$  maximálnu rýchlosť a  $y_{max}$  maximálnu výšku telesa. Platí teda

$$E_{p_{max}} = E_{k_{max}} = \frac{mv_{max}^2}{2} = mgy_{max} = c.$$

Odtiaľ odvodíme vzťah pre výpočet rýchlosti telesa  $v(x)$  v ľubovoľnom bode  $x$  jeho trajektórie, v ktorom má výšku  $y(x)$ .

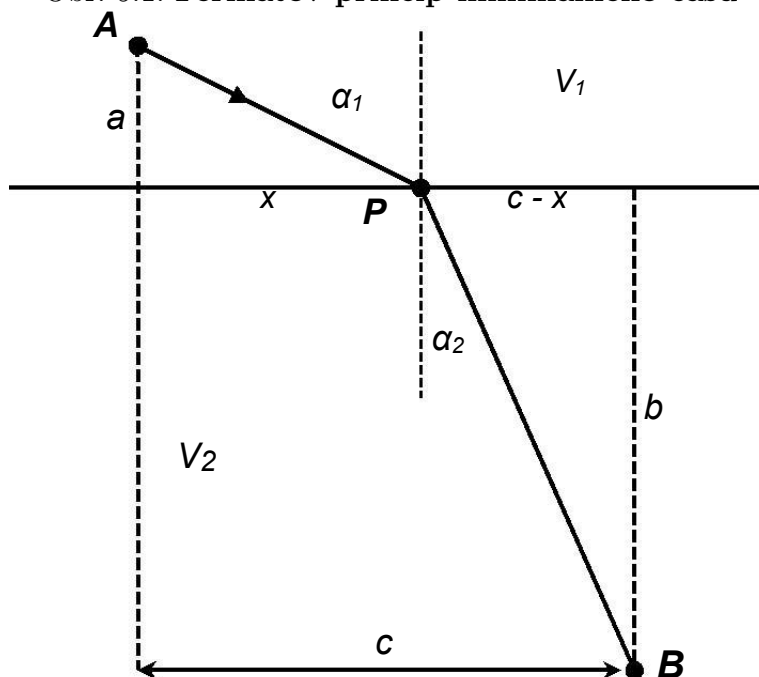
$$\begin{aligned} E_p(x) + E_k(x) &= \frac{mv(x)^2}{2} + mgy(x) = mgy_{max} \Rightarrow \\ \Rightarrow v(x) &= \sqrt{2g(y_{max} - y(x))}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

V súradnicovom systéme označuje  $y_{max}$   $y$ -ovú súradnicu iniciálneho bodu trajektórie telesa a  $y(x)$  hodnoty funkcie udávajúcej jej tvar.

*Poznámka 5.5 (Úloha z optiky).* Nech sa lúč svetla šíri v optickom prostredí z bodu  $A$  do bodu  $P$  rýchlosťou  $v_1$ . V bode  $P$  sa dostane do opticky hustejšieho prostredia a šíri sa až do bodu  $B$  rýchlosťou  $v_2$  ako ilustruje obrázok 5.1. Vzhľadom k značeniu na tomto obrázku je dĺžka dráhy, ktorú opíše svetelný lúč na tejto ceste rovná  $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$ . Potom čas  $T$  potrebný na prejde tejto dráhy, podľa definície rýchlosti ( $v = \frac{ds}{dt}$ ), je

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}.$$

Obr. 5.1: Fermatov princíp minimálneho času



Podľa Fermatovho princípu 5.2 sa bude svetlo šíriť časovo najkratšou trajektóriou. Aby bolo  $T$  v danom bode minimálne, musí v ňom spĺňať rovnicu  $\frac{dT(x)}{dx} = 0$ . Odtiaľ dostávame vzťah

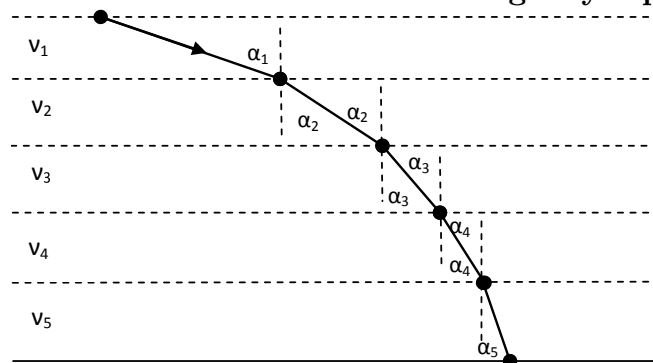
$$\frac{1}{2} \frac{2x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{2} \frac{2(c-x)}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}} \Rightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (c-x)^2}}. \quad (5.2)$$

Z geometrickej interpretácie na obrázku 5.1 je zrejmé, že  $\sin \alpha_1 = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$  a  $\sin \alpha_2 = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$ . Dostávame teda ekvivalentné vyjadrenie (5.2)

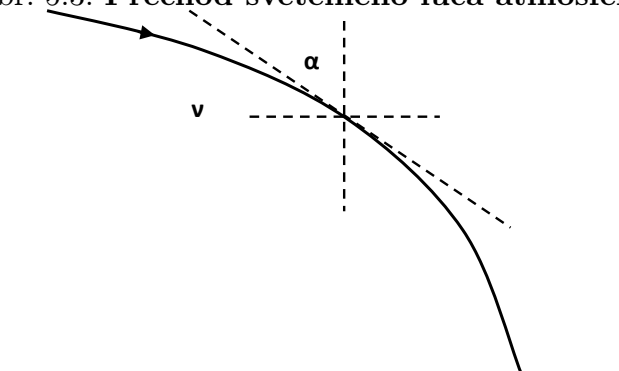
$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2},$$

čo je Snellov zákon lomu. Tento princíp budeme využívať aj v nasledujúcej úlohe. Nech sa tentoraz lúč svetla šíri cez viaceré prostredia a nech je každé prostredie opticky hustejšie ako to predchádzajúce. Znamená to, že rýchlosť šírenia svetla bude klesať po každom prechode do nového prostredia. Lúč sa teda bude čoraz viac lámať k vertikále. Túto situáciu ilustruje obrázok 5.2. Aplikovaním Snellovho zákona na situáciu na tomto obrázku získame vťahy

Obr. 5.2: Prechod svetelného lúča nehomogénnym prostredím



Obr. 5.3: Prechod svetelného lúča atmosférou



$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = \frac{\sin \alpha_3}{v_3} = \frac{\sin \alpha_4}{v_4} = \frac{\sin \alpha_5}{v_5}.$$

Ak budeme vrstvy naďalej stenšovať a zväčšovať ich počet, v limite bude rýchlosť svetla klesať spojite s dopadajúcim lúčom ako na obrázku 5.3. Bude teda platiť vzťah

$$\frac{\sin \alpha}{v} = k, \tag{5.3}$$

kde  $k$  je konštanta. Tento vzťah je dôležitý pri odvodení diferenciálnej rovnice v pôvodnej úlohe 5.1.

*Poznámka 5.6.* Nech body  $A$  a  $B$  neležia sa rovnakej vertikále. Ak by sa tak stalo, riešenie by bolo triviálne. Bola by ním úsečka z bodu  $A$  do bodu  $B$ .

*Riešenie* (Fyzikálne riešenie). Pri riešení budeme vychádzať zo získanej rovnosti (5.3). Z (5.1) je zrejmé, že pre uvažovanú úlohu 5.1 je

$$v(x) = \sqrt{2g(y_0 - y(x))}. \quad (5.4)$$

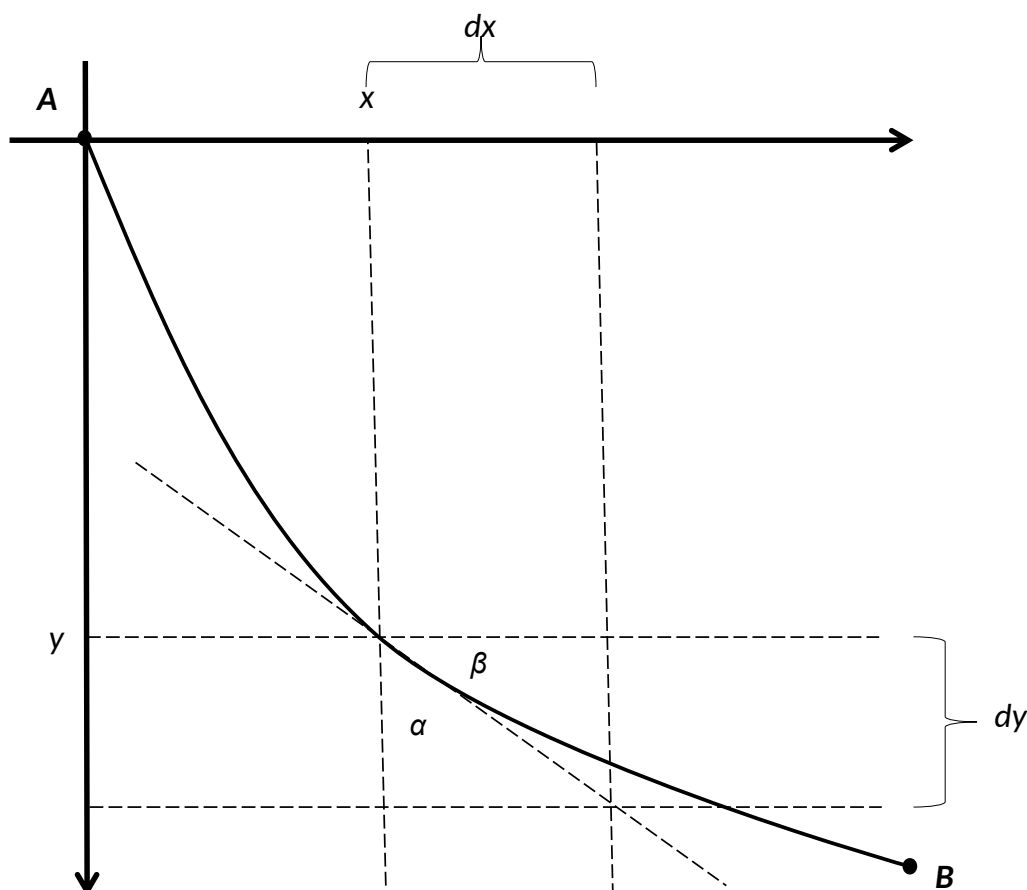
Dosadením (5.4) do (5.3) získame rovnosť

$$\frac{\sin \alpha}{v} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} = k. \quad (5.5)$$

Z geometrickej interpretácie derivácie a s použitím značenia z obrázku 5.4 vyjadríme  $\sin \alpha$  pomocou  $dx$  a  $dy$

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 [1 + (\frac{dy}{dx})^2]}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}}. \quad (5.6)$$

Obr. 5.4: Pohyb hmotného bodu



Nakoniec, dosadením (5.6) do (5.5) získame rovnosť

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} = k \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{[1 + (y'(x))^2]2g(y_0 - y(x))} = k^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow &\frac{1}{[1 + (y'(x))^2](y_0 - y(x))} = 2gk^2 \Rightarrow [1 + (y'(x))^2](y_0 - y(x)) = \frac{1}{2k^2g}. \end{aligned}$$

Hľadaná diferenciálna rovnica, ktorá vedie na spomínanú krivku má teda tvar

$$[1 + (y'(x))^2](y_0 - y(x)) = c, \quad (5.7)$$

kde  $c = \frac{1}{2gk^2}$  je konštanta.

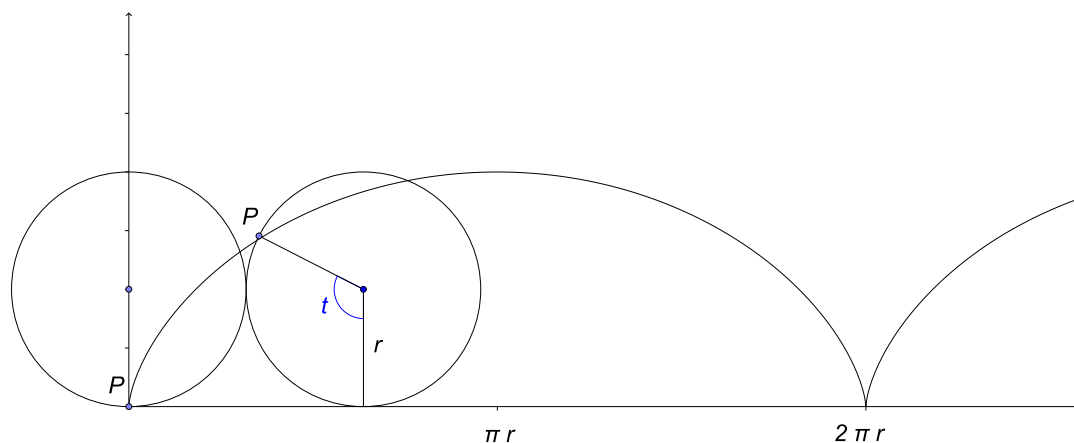
**Tvrdenie 5.7.** *Netriviálnym riešením diferenciálnej rovnice (5.7) je prostá cykloida.*

**Definícia 5.8** (Cykloida). *Prostá cykloida je krivka určená parametrickými rovnicami*

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vid' [7, str. 82].

Obr. 5.5: Cykloida



*Poznámka 5.9.* Cykloidu opisuje pevný bod kružnice, ktorá sa valí bez sklzu po priamke. Parametre  $r$  a  $t$  z jej parametrických rovníc označujú polomer tejto kružnice a príslušný uhol odvalenia (Obr. 5.5).

*Dôkaz.* Prvým krokom k riešeniu rovnice (5.7) je separácia premenných:

$$\begin{aligned} [1 + y'^2(x)](y_0 - y(x)) = c &\Rightarrow [1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2](y_0 - y) = c \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{c}{(y_0 - y)} - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{c - (y_0 - y)}{(y_0 - y)}} &\Rightarrow dx = \pm \sqrt{\frac{(y_0 - y)}{c - (y_0 - y)}} dy. \end{aligned}$$

Odmocnením  $(\frac{dy}{dx})^2$  sme pridali ďalšie riešenie. K dôkazu tvrdenia postačí pracovať s jedným z nich. Nech

$$dx = -\sqrt{\frac{(y_0 - y)}{c - (y_0 - y)}} dy. \quad (5.8)$$

Použitím (5.5) dostaneme vyjadrenie pre  $y$  a  $dy$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = k \Rightarrow \sin^2 \alpha \frac{1}{2gk^2} = (y_0 - y) \Rightarrow y = y_0 - c \sin^2 \alpha \Rightarrow (5.9)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = \frac{d(y_0 - c \sin^2 \alpha)}{d\alpha} \Rightarrow dy = -2c \sin \alpha \cos \alpha d\alpha. \quad (5.10)$$

Vzťah pre  $dx$  získame dosadením 5.9 a 5.10 do (5.8)

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{\frac{y_0 - (y_0 - c \sin^2 \alpha)}{c - [y_0 - (y_0 - c \sin^2 \alpha)]}} 2c \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= \sqrt{\frac{c \sin^2 \alpha}{c(1 - \sin^2 \alpha)}} 2c \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} 2c \sin \alpha \cos \alpha d\alpha = \\ &= 2c \sin^2 \alpha d\alpha = c(\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \\ &= c(\sin^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha) d\alpha = c(1 - \cos 2\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Integrovaním (5.11) vyjadríme  $x$

$$x = \int c(1 - \cos 2\alpha) d\alpha = c\alpha - \frac{c \sin 2\alpha}{2} + c_1 = \frac{c}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) + c_1, \quad (5.12)$$

kde veľkosť konštanty  $c_1$  závisí na voľbe počiatkovej podmienky resp. súradníc  $(x_A, y_A)$  počiatkového bodu  $A$ . Po úprave výrazu (5.9) na tvar

$$y = c \sin^2 \alpha = \frac{c}{2}(1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

a voľbou  $r = \frac{c}{2}$ ,  $t = 2\alpha$ , dostaneme rovnosti

$$x = r(t - \sin t) + c_1, \quad y = -r(1 - \cos t) + y_0, \quad (5.13)$$

čo sú parametrické rovnice prostej osovo súmernej cykloidy 5.5, vzhľadom k osi  $x$ . Tá je navyše posunutá po osi  $x$  o hodnotu konštanty  $c_1$  a po osi  $y$  o  $y_0$ . Keďže tvar krivky je voči posunutiu a otáčaniu invariantný, môžeme formulovať záver, že riešením 5.7 je prostá cykloida.

*Poznámka 5.10.* Konštantu  $r$  z (5.13) je volená tak, aby krivka s počiatkom v bode  $A = (x_A, y_A)$  prechádzala bodom  $B$  ako na obrázku 5.4.

*Poznámka 5.11.* Ak by sme za  $dx$  v rovnici (5.8) zvolili

$$dx = \sqrt{\frac{(y_0 - y)}{c - (y_0 - y)}} dy,$$

analogickým postupom by sme opäť získali parametrické rovnice prostej cykloidy

$$x = -r(t - \sin t) + c_1, \quad y = -r(1 - \cos t) + y_0.$$

Tá by bola s predchádzajúcou osovo súmerná podľa osi  $y$ . Vzhľadom na invariantnosť tvaru krivky voči posunutiu a otáčaniu môžeme konštatovať, že prostá cykloida je jediným netriviálnym riešením rovnice (5.7). Je zrejmé, že triviálnym riešením (5.7) je konštantná funkcia  $y(x) = p$ . Tá však nemôže byť riešením problému o brachistochrone, pretože by musela prechádzať bodmi  $A$  a  $B$ , ktoré sú v rôznych výškach. Dokonca aj v extrémnom prípade, keď sa  $y$ -ové súradnice  $y_A, y_B$  bodov  $A, B$  rovnajú, je toto riešenie nevyhovujúce. Konštantná funkcia by mala potom tvar  $y(x) = y_A$ . Podľa (5.1) by to však znamenalo, že rýchlosť telesa v každom bode trajektórie je nulová. Čas, za ktorý by sa dostalo z bodu  $A$  do bodu  $B$  len účinkom gravitačnej sily by bol teda nekonečný.

V ďalšom texte naznačíme ako hľadať tvar krivky z úlohy 5.1 pomocou analytickej metódy, variačného počtu. Jej základnou myšlienkou je nájsť globálne minimum funkcionálu, ktorý udáva čas prechodu z bodu  $A$  do bodu  $B$  po nejakej krivke s predpisom  $y(x)$ .

**Úloha 5.12.** *Odvoďte tvar funkcionálu  $T$ , ktorý udáva čas, za ktorý sklízne hmotný bod z počiatočného bodu  $A = (x_A, y_A)$  do bodu  $B = (x_B, y_B)$  po krivke určenej funkciou  $y(x)$  a overte, že riešenie (5.13) spĺňa nutnú podmienku pre to, aby bola extrémálou.*

*Riešenie* (Analytické riešenie). Užitím rovnosti (5.5) a vzťahu pre výpočet okamžitej rýchlosti v bode  $x$ ,  $v(x) = \frac{ds}{dt}$ , dostávame funkcionál  $T(y)$  v tvare

$$\begin{aligned} T(y(x)) &= \int_{x_A}^{x_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{v(x)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v(x)} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + dy^2}}{v(x)} dx = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{v(x)} dx = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2g(y_0 - y(x))}} dx, \end{aligned} \quad (5.14)$$

kde hodnota  $y_0 = y_A$ . Pri hľadaní jeho kritických bodov budeme vychádzať z vety 2.13 a poznámky 2.14. Najprv ukážeme, že riešenie (5.13) spĺňa vzťah, odvodený z integrálu Euler-Lagrangeovej (ďalej len Eulerovej) rovnice (2.5). Označme

$$f(x, y(x), y'(x)) = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2g(y_A - y(x))}}, \quad y'(x) = z.$$

Funkcia  $f(x, y(x), y'(x))$  nezávisí explicitne na  $x$ , a preto má integrál Eulerovej rovnice podľa (2.5) tvar

$$f - z \frac{\partial f}{\partial z} = konst. \quad (5.15)$$

Derivovaním  $f$  podľa premennej  $z$  získame výraz  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{2g(y_A - y)}\sqrt{1 + z^2}}$  a jeho dosadením do (5.15) dostaneme rovnosť

$$\frac{1}{\sqrt{2g(y_A - y)}} \left( \sqrt{1 + z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{1 + z^2}} \right) = k,$$

ktorú upravíme na ekvivalentný tvar

$$y(1 + z^2) = \frac{1}{2gk^2}.$$

Spätňou substitúciou  $z = y'(x)$  získame diferenciálnu rovnicu

$$(y_A - y(x))[1 + y'(x)^2] = (y_A - y(x))[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2] = c, \quad (5.16)$$

kde  $c = \frac{1}{2gk^2}$  je konštanta. V dôkaze tvrdenia 5.7 sme ukázali, že riešením tejto diferenciálnej rovnice je prostá cykloida (ďalej len cykloida). Správnosť tohto riešenia ľahko overíme dosadením vzťahov pre  $x$ ,  $y$ ,  $dx$ ,  $dy$  do rovnice 5.16. Tie odvodíme z parametrických rovníc (5.13).

$$x = r(t - \sin t) + c_1 \Rightarrow dx = r(1 - \cos t)dt,$$

$$y = -r(1 - \cos t) + y_A \Rightarrow dy = -r \sin t dt,$$

kde  $2r = c$ . Po ich dosadením do (5.16) získame rovnicu

$$r(1 - \cos t) \left[ 1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} \right] = c$$

a po úprave jej ľavej strany dostávame

$$\begin{aligned} r(1 - \cos t) \left[ 1 + \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)^2} \right] &= r \left[ \frac{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}{1 - \cos t} \right] = \\ &= \frac{r(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)}{1 - \cos t} = 2r \frac{1 - \cos t}{1 - \cos t} = 2r = c. \end{aligned}$$

To, že krivka s parametrickými rovnicami (5.13) rieši rovnicu (5.16) je nutnou podmienkou pre to, aby riešenie (5.13) spĺňalo Eulerovu rovnicu (2.4). Tá je zas nutnou podmienkou pre to, aby funkcionál  $T$  nadobúdal pre (5.13) lokálny extrém, resp. globálny extrém. Riešenie (5.13) je teda kritickým bodom funkcionálu  $T$ .

*Poznámka 5.13.* Označenie  $ds$  zo vzťahu pre rýchlosť je zmenou prejdenej dráhy  $s(x)$  hmotného bodu za časový interval  $dt$ , kde  $s(x)$  je dĺžka jeho trajektórie od počiatočného bodu  $(x_0, y_0)$  do bodu  $(x, y(x))$ . Keďže trajektória tohto bodu je zadaná krivkou s predpisom  $y(x)$ , predstavuje  $s(x)$  dĺžku tejto krivky na intervale  $[x_0, x]$ .

*Poznámka 5.14.* Fyzikálnym i analytickým prístupom sme overili nutné podmienky pre to, aby bola cykloida (5.13) riešením úlohy o brachistochrone. Na to aby sme mohli tvrdiť, že ním naozaj je, je nevyhnutné overiť ďalšie podmienky. Stačilo by napríklad, aby sme dokázali, že existuje optimálna cesta z počiatočného bodu  $A = (x_0, y_0)$  do bodu  $B$ , a že cykloida ako jediná splňuje nutnú podmienku optimality (riešenie rovnice (5.7)). Overovanie je však dosť náročné, pretože je potrebné vyhnúť sa cykloide, ktorá sa dotýka priamky  $y = y_0$  viac než raz predtým, ako dosiahne bod  $B$ . To predstavuje problém aj z hľadiska variačného počtu, keďže v bode  $y(x) = y_0$  má funkcionál (5.14) singularitu. Vid' [11, str. 44]. Novším prístupom k tomuto problému je použitie transformácie, ktorá prevedie integrand

v skúmanom funkcionále na konvexnú funkciu. Tá potom dovoľuje aplikovať postačujúcu podmienku optimality riešenia odvodennej diferenciálnej rovnice, tzn. ukázať, že jej riešenie je ostrým globálnym minimom tohto funkcionálu. Vid' [1, str. 1] . Pri dôkaze optimality budeme vychádzať z Cauchy-Schwartzovej nerovnosti.

**Lemma 5.15** (Cauchy-Schwarz). *Pre všetky  $n, m \in \mathbb{R}$  a pre všetky  $a, b > 0$  je*

$$\sqrt{a^2 + n^2} \sqrt{b^2 + m^2} \geq -\frac{a}{b}(a - b)^2 + ab + nm, \quad (5.17)$$

ekvivalentne

$$\sqrt{b^2 + m^2} \geq \sqrt{a^2 + n^2} + \frac{a^2 - \frac{a^3}{b} + nm - n^2}{\sqrt{a^2 + n^2}}. \quad (5.18)$$

Rovnosť vo výraze (5.17) resp. (5.18) nastane práve vtedy, keď  $(a, n) = (b, m)$ . Vid' [1, str. 1] .

*Poznámka 5.16.* Výraz (5.17) vznikol úpravou klasickej Cauchy-Schwartzovej nerovnosti, a to odčítaním nezáporného členu  $\frac{a}{b}(a - b)^2$ . Klasickú verziu možno nájsť v [8, str. 74] .

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že počiatočný bod trajektórie je  $A = (x_0, y_0) = (0, 0)$ . Jej parametrické rovnice sú potom

$$x = r(t - \sin t), \quad y = -r(1 - \cos t). \quad (5.19)$$

Z predpokladu, že počiatočný bod dráhy hmotného bodu je  $(0, 0)$  plynie, že hodnota  $y_0$  vo výraze (5.12) je nula. Funkcionál  $T$ , ktorý udáva čas prechodu z  $A = (0, 0)$  do  $B = (x_1, y_1)$  má teda tvar

$$T(y) = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(-y(x))}} dx. \quad (5.20)$$

Ten sa budeme snažiť minimalizovať na množine  $Y^1$  všetkých spojitých diferencovateľných funkcií  $y : (0, x_1) \rightarrow (-\infty, 0)$ , ktoré je možné spojiť dodefinovať na  $[0, x_1]$ , a to hodnotami  $y(0) = 0$ ,  $y(x_1) = y_1$ . Uvažujme transformáciu

$$f = \sqrt{-y} \quad \Rightarrow \quad y = -f^2 \quad \Rightarrow \quad y' = -2ff'. \quad (5.21)$$

Dosadením (5.21) do (5.20) získame tvar funkcionálu

$$\begin{aligned} S(f) = T(y) = T(-f^2) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + 4f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x)}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1}{f^2(x)} + 4f'^2(x)} dx, \end{aligned} \quad (5.22)$$

kde  $f \in F^1$  a  $F^1$  je obor hodnôt zobrazenia  $y \mapsto \sqrt{-y}$ ;  $y \in Y^1$ .  $F^1$  je teda množinou všetkých spojitých diferencovateľných funkcií  $f : (0, x_1) \rightarrow (0, \infty)$ , ktoré je možné spojiť dodefinovať na  $[0, x_1]$  hodnotami  $f(0) = 0$ ,  $f(x_1) = \sqrt{-y_1}$ . V nasledujúcom texte dokážeme optimalitu  $f_* : [0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$  z diferenciálnej rovnice

$$f_*^2(x)(1 + 4f_*'^2(x)f_*'^2(x)) = c, \quad x \in (0, x_1), \quad (5.23)$$

s počiatočnou hodnotou  $f_*(0) = 0$ , kde  $c > 0$  je tu volená tak, aby  $f_*(x_1) = \sqrt{-y}$ . Rovnicu (5.23) získame dosadením (5.21) do diferenciálnej rovnice (5.7), ktorej riešenie poznáme z dôkazu tvrdenia 5.7. Z predchádzajúcej argumentácie ohľadom množín  $F^1$ ,  $Y^1$  a z použitej transformácie je zrejmé, že také spojité diferencovateľné riešenie  $f_*$  existuje a  $f_* > 0$  na intervale  $(0, x_1)$ . Preto  $f_* \in F^1$ .

**Tvrdenie 5.17.** *Pre všetky  $f \in F^1$  také, že  $f \neq f_*$  je*

$$S(f) > S(f_*). \quad (5.24)$$

*Dôkaz.* Dôkaz tvrdenia prevedieme v dvoch krokoch. Najprv ukážeme, že  $S(f) \geq S(f_*)$ , a potom vylúčime prípad  $S(f) = S(f_*)$ . Označme  $s_f(x) = \sqrt{\frac{1}{f^2(x)} + 4f'^2(x)}$ . Keďže pre všetky  $x \in (0, x_1)$  je  $f(x), f_*(x) > 0$  a  $f'(x), f'_*(x) \in \mathbb{R}$ , môžeme aplikovať lemmu 5.15 na výrazy  $\frac{1}{f}, \frac{1}{f_*} > 0$  a  $2f', 2f'_* \in \mathbb{R}$ . Ich dosadením do (5.18) dostaneme nerovnosť

$$\sqrt{\frac{1}{f^2(x)} + 4f'^2(x)} \geq \sqrt{\frac{1}{f_*^2(x)} + 4f_*'^2(x)} + k(x), \quad k = \frac{\frac{1}{f_*^2} - f \frac{1}{f_*^3} + 4f'_* f' - 4f_*'^2}{\sqrt{\frac{1}{f_*^2} + 4f_*'^2}},$$

ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou

$$s_f(x) \geq s_{f_*}(x) + k(x), \quad (5.25)$$

a ktorá platí pre všetky  $x \in (0, x_1)$ . Odtiaľ plynie vzťah

$$\sqrt{2g}S(f) \geq \sqrt{2g}S(f_*) + \int_0^{x_1} k(x)dx.$$

K dôkazu prvého kroku už len stačí ukázať, že  $\int_0^{x_1} k(x) = 0$ . Ekvivalentnou úpravou (5.23) získame rovnosť

$$\begin{aligned} s(x) &= \sqrt{\frac{1}{f^2(x)} + 4f'^2(x)} = \sqrt{c} \frac{1}{f^2}, \quad x \in (0, x_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow k = \frac{\frac{1}{f_*^2} - f \frac{1}{f_*^3} + 4f'_* f' - 4f_*'^2}{\sqrt{c} \frac{1}{f_*^2}}. \end{aligned}$$

Potom  $k = \frac{r}{\sqrt{c}}$ , kde

$$r = 1 - \frac{f}{f_*} + 4f'_* f' f_*^2 - 4f_*'^2 f_*^2 = -\frac{1}{f_*} (f - f_*) + 4f_*^2 f'_* (f' - f_*'). \quad (5.26)$$

Nech  $p = 4f_*^2 f'_*$ . Najprv pomocou (5.23) vyjadríme  $p'$ .

$$\begin{aligned} f_*^2(1 + 4f_*^2 f_*'^2) = c &\Rightarrow f_*^2 + 4f_*^4 f_*'^2 = c \Rightarrow \\ \Rightarrow 4f_*^2 + 16f_*^4 f_*'^2 = 4c &\Rightarrow 4f_*^2 + p^2 = 4c \Rightarrow p^2 = 4c - 4f_*^2 \end{aligned}$$

Derivovaním poslednej rovnosti dostaneme

$$2pp' = -8f_* f_*' \Rightarrow p' = \frac{-4f_* f_*'}{4f_*^2 f_*'} = -\frac{1}{f_*},$$

na  $(0, x_1)$ . Substitúciou  $p = 4f_*^2 f'_*$ ,  $p' = -\frac{1}{f_*}$  vo výraze  $r$  z (5.26) získame rovnosť

$$r = p'(f - f_*) + p(f' - f'_*) = [p(f - f_*)]' = R' \Rightarrow R = p(f - f_*).$$

Keďže  $f, f_* \in F^1$ , v bodoch  $0, x_1$  ich môžeme spojiťe dodefinovať hodnotami  $f_*(0) = f(0) = 0$  a  $f_*(x_1) = f(x_1) = \sqrt{-y_1}$ . Odtiaľ už priamo plynie

$$\int_0^{x_1} k(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^{x_1} r(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} (R(x_1) - R(0)) = 0.$$

Tým sme ukázali, že platí  $\sqrt{2g}S(f) \geq \sqrt{2g}S(f_*)$ , a teda i  $S(f) \geq S(f_*)$ . Keďže kladná konštanta  $\sqrt{2g}$  nijako neovplyvňuje vzťahy medzi  $S(f)$ ,  $S(f_*)$ , budeme v ďalšom texte predpokladať  $\sqrt{2g} = 1$ .

K dôkazu druhého kroku stačí ukázať, že rovnosť  $S(f) = S(f_*)$  implikuje  $f = f_*$ . Keďže  $\int_0^{x_1} k(x) = 0$ , za predpokladu  $S(f) = S(f_*)$  platí

$$S(f) - S(f_*) - \int_0^{x_1} k(x) = \int_0^{x_1} (s_f(x) - s_{f_*}(x) - k(x))dx = 0. \quad (5.27)$$

Z výrazu (5.25) odvodeného z 5.15 je zrejmé, že integrand  $(s_f - s_{f_*} - k)$  je nezáporný a spojitý (je zložením spojitých funkcií) na  $(0, x_1)$ . Ak by bol tento integrand kladný v nejakom bode z  $(0, x_1)$ , implikovalo by to, že výraz (5.27) je tiež kladný, čo by bol spor. Odtiaľ plynie

$$s_f(x) - s_{f_*}(x) - k(x) = 0 \Rightarrow s_f(x) = s_{f_*}(x) + k(x)$$

na intervale  $(0, x_1)$ . Táto rovnosť je rovnosťou vo vzťahu (5.25) a podľa poslednej časti lemy 5.15 nastane práve vtedy, ak  $(\frac{1}{f}, 2f') = (\frac{1}{f_*}, 2f'_*)$ , čo implikuje  $(f, f') = (f_*, f'_*)$  na  $(0, x_1)$ . Keďže je navyše  $f_*, f \in F^1$ , je  $f = f_*$  na  $[0, x_1]$ , čo je v rozpore s predpokladom tvrdenia 5.17. Pre všetky  $f \in F^1$ ;  $f \neq f_*$  teda platí  $S(f) > S(f_*)$ . □

Z dôkazu tvrdenia 5.17 plynie, že  $y = -f^2$  je jediným riešením problému o brachistochrone. V predchádzajúcom texte bolo ukázané, že týmto riešením je cykloida 5.8. Hovoríme preto, že cykloida je brachistochrónna (z gréckeho brachisto-najkratší, chronos-čas). V závere tejto kapitoly ukážeme ďalšiu zaujímavú vlastnosť cykloidy, tautochrónnosť.

*Poznámka 5.18 (Tautochróna).* Z tvaru funkcionálu  $T$  z úlohy 5.12 a z interpretácie rovnosti (5.1) môžeme odvodiť, že čas  $T_{tauto}$ , za aký skĺzne hmotný bod z bodu  $P = (x_P, y_P)$  cykloidy (5.19) do jej najnižšieho bodu  $B = (r\pi, -2r)$  je

$$T_{tauto} = \int_{x_P}^{r\pi} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y_P - y(x))}} dx = \int_{x_P}^{r\pi} \sqrt{\frac{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}{2g(y_P - y(x))}} dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r(t - \sin t), \quad dx = r(1 - \cos t)dt \\ y = -r(1 - \cos t), \quad dy = -r \sin t dt \\ x = x_P \Rightarrow t = t_P, \quad x = r\pi \Rightarrow t = \pi \\ y(t_P) = -r(1 - \cos t_P) = y_P \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_{t_P}^{\pi} \sqrt{\frac{1 + \frac{\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{-r(1-\cos t_P) + r(1-\cos t)}} r(1-\cos t) dt = \\
&= \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_{t_P}^{\pi} \sqrt{\frac{\frac{\sin^2 t + (1-\cos t)^2}{(1-\cos t)^2} r^2 (1-\cos t)^2}{r(\cos t_P - \cos t)}} dt = \\
&= \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_{t_P}^{\pi} \sqrt{\frac{\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t}{\cos t_P - \cos t}} dt = \\
&= \sqrt{\frac{r}{2g}} \int_{t_P}^{\pi} \sqrt{\frac{2(1-\cos t)}{\cos t_P - \cos t}} dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_P}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{(2\cos^2(\frac{t_P}{2}) - 1) - (2\cos(\frac{t}{2}) - 1)}} dt = \\
&= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{t_P}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{(2\cos^2(\frac{t_P}{2}) - 2\cos(\frac{t}{2}))}} dt = \\
&\left\{ \begin{array}{l} u = \cos(\frac{t}{2}) \Rightarrow du = -\frac{1}{2}\sin(\frac{t}{2})dt \Rightarrow dt = \frac{-2}{\sin(\frac{t}{2})} \\ t = t_P \Rightarrow u = \cos(\frac{t_P}{2}) = p \quad t = \pi \Rightarrow u = 0 \end{array} \right\} \\
&= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_p^0 \frac{-2}{\sqrt{p^2 - u^2}} du = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_p^0 \frac{1}{p\sqrt{1 - (\frac{u}{p})}} du = \\
&= -2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[ \arcsin\left(\frac{u}{p}\right) \right]_p^0 = -2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[ \arcsin\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{\cos(\frac{t_P}{2})}\right) \right]_{t_P}^{\pi} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.
\end{aligned}$$

Je zrejmé, že vypočítaný čas  $T_{tauto} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$  nijako nezávisí na súradniciach bodu  $P = (x_P, y_P)$ . Je teda rovnaký pre ľubovoľne zvolený bod  $P$ . Hovoríme preto, že cykloida je tautochróna (z gréckeho tauto-rovnaký, chronos-čas).

*Poznámka 5.19.* Úloha o brachistochrone bola zadaná Johannom Bernoullim a publikovaná v júni 1696 v časopise *Acta Eruditorum*. O jej riešenie sa pokúšali tí najlepší matematici. Nakoniec bolo spracovaných šesť riešení. Okrem samotného riešenia Johanna Bernoulliho bolo medzi nimi riešenie jeho staršieho brata Jacoba Bernoulliho, Leibniza, Tschirnhausa, l'Hospitala a Newtona. Viď [11, str. 33]. Newton tento problém vyriešil konštrukčne a vychádzal pri tom z vlastností cykloidy. Jeho pôvodné riešenie, predstavené prezidentovi kráľovskej spoločnosti Charlesovi Montagueovi v roku 1697 k nájdeniu v [5, str.112].

# Kapitola 6

## Záver

V tejto práci boli zhrnuté a vysvetlené rôzne metódy riešenia diferenciálnych rovníc, ktoré vedú na známe, či menej známe krivky. V kapitole 2 sme zadefinovali niekoľko pojmov a tvrdení, o ktoré sa opierajú výpočty a úvahy vybraných problémov. V kapitole 3 sme sa venovali hľadaniu krivky, ktorú opisuje tvar dokonale obybného lanka (reťaze) zaveseného medzi dvoma bodmi. Diferenciálnu rovnicu vedúcu na túto krivku sme odvodili z obecných známych fyzikálnych tvrdení a ich geometrickej interpretácie. Tú sme vyriešili dvoma rôznymi metódami, a to separáciou premenných a substitúciou. Riešením oboch sme dostali krivku zvanú reťazovka 3.2 a ukázali sme, že toto riešenie je jednoznačné. V kapitole 4 sa nám podarilo sformulovať praktický problém dynamiky symbiotickým populácií, na základe ktorého sme odvodili sústavu diferenciálnych rovníc vedúcu na obe hyperbolické funkcie  $\sinh$ ,  $\cosh$ . Ďalej sme zostavili a vyriešili diferenciálnu rovnicu vedúcu na menej známu krivku  $\sinh$ . V poslednej kapitole 5, sme sa venovali problému o brachistochrone, ktorého história siaha do 17. storočia a privádza nás k menám ako Bernoulli, Fermat, Newton či Euler. Spracovaný tu bol fyzikálny aj analytický postup odvodenia diferenciálnej rovnice, ktorá, ako sme ukázali ďalej, vedie na krivku zvanú cykloida. Pri fyzikálnom riešení sme sa zoznámili s niektorými fyzikálnymi tvrdeniami, pri analytickom sme použili a ilustrovali metódy variačného počtu, pomocou ktorého sme ukázali aj tautochrónnosť cykloidy. Že je cykloida riešením problému o brachistochrone (je brachistochrónna) sme dokázali pomocou Cauchy-Schwartzovej nerovnosti.

# Literatúra

- [1] BALDER, E. (27.2.2002). The brachistochrone problem made elementary. *Mathematical Institute, University of Utrecht, the Netherlands*, **12**, 1–2.
- [2] BOYCE, W. a DiPRIMA, R. (2003). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Siedme vydanie. Wiley. ISBN 0471307890.
- [3] ELIAŠ, J., HORVÁTH, J. a KAJAN, J. (1980). *Zbierka úloh z vyššej matematiky*. Tretie vydanie, Tretia časť. Alfa, Bratislava.
- [4] GIL, J. B. (2005). The catenary (almost) everywhere. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, **12**(2), 251–258.
- [5] GREEN, J. (1903). *A short history of the English people*. 3. diel. Macmillan, London.
- [6] HAJKO, V. a DANIEL-SZABÓ, J. (1983). *Základy Fyziky*. Druhé vydanie. Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied.
- [7] LOCKWOOD, E. (1961). *A book of curves*. Cambridge University press, Cambridge.
- [8] NELSEN, R. *Důkazy beze slov I*. Young Scientist. ISBN 9788088792611.
- [9] PURI, N. (2010). *Fundamentals of Linear Systems for Physical Scientists and Engineers*. CRC Press. ISBN 9781439811580.
- [10] SIMMONS, G. (1991). *Differential Equations, with Applications and Historical Notes*. Druhé vydanie. McGraw-Hill. ISBN 0070575401.
- [11] SUSSMANN, H. J. a WILLEMS, J. C. (1997). 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *IEEE Control Systems*, (0272-1708/97), 32–44.
- [12] VAN BRUNT, B. (2003). *The calculus of variations*. Universitext. Springer. ISBN 0387402470.
- [13] VESELÝ, J. (2009). *Základy matematické analýzy*. Druhý diel. MatfyzPress, Praha. ISBN 978-80-7378-063-0.

# Zoznam obrázkov

3.1	Sily pôsobiace na zavesené lanko . . . . .	7
3.2	Reťazovka . . . . .	11
4.1	Riešenia pre rôzne počiatkové podmienky . . . . .	14
4.2	Fázový portrét . . . . .	15
4.3	Sinh(x) . . . . .	16
5.1	Fermatov princíp minimálneho času . . . . .	18
5.2	Prechod svetelného lúča nehomogénnym prostredím . . . . .	19
5.3	Prechod svetelného lúča atmosférou . . . . .	19
5.4	Pohyb hmotného bodu . . . . .	20
5.5	Cykloida . . . . .	21