MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Šlampiak

Wilcoxonův dvouvýběrový test

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 26. července 2016 Podpis autora

Názov práce: Wilcoxonův dvouvýběrový test

Autor: Tomáš Šlampiak

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: Ing. Marek Omelka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá dvojvýberovým Wilcoxonovým štatistickým testom. Vysvetľuje, akú charakteristiku dát test sleduje. S využitím poznatkov o projekciách náhodných veličín prináša odvodenie asymptotickej normality za platnosti nulovej hypotézy. Odvodené sú dve verzie testu, jeden pri platnosti silnejšieho predpokladu modelu posunu a druhý, ktorý predpokladá len spojitosť distribučných funkcií. Nakoniec je v práci pomocou simulácií preskúmané, ako sa tieto dve verzie správajú, hlavne dopad na klasickú verziu testu v prípade, že nemôžeme predpokladať model posunutia.

Kľúčové slová: Wilcoxonov test, U-štatistika, Mannov-Whitneyov U test

Title: Wilcoxon two-sample test

Author: Tomáš Šlampiak

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Ing. Marek Omelka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this work we present two-sample Wilcoxon statistic test. It is explained which parameter of data could be tested. Using knowledge of projection of random variables there is shown the derivation of the asymptotic distribution under the null hypothesis. We derive two versions of test, first of them supposes a shift model, while the other one just assumes that observations consist of two independent samples with continuous distributions. Finally, we deduce the behaviour of both tests from simulations, especially the impact on the first version when there is assumed no shift model.

Keywords: Wilcoxon test, U-statistic, Mann-Whitney U test

Na tomto mieste ďakujem vedúcemu práce, Ing. Marekovi Omelkovi, Ph.D., za vedenie, užitočné rady, pripomienky k vznikajúcej práci, ktoré boli veľmi dôležité pri jej vypracovávaní a v neposlednom rade za všetok obetovaný čas.
Vďaka patrí aj mojej rodine za poskytnutie zázemia a priateľom za prejavenú podporu.

Obsah

Úvod

Témou nasledujúcej bakalárskej práce je Wilcoxonov dvojvýberový štatistický test, ktorý je pomerne často používaný v praxi a niekedy pri jeho aplikovaní dochádza k nesprávnej interpretácii dosiahnutých výsledkov alebo sa využíva aj na miestach, kde sú jasne porušené predpoklady použité pri jeho odvodení. Niektorí autori používajú aj označenie Mannov-Whitneyov test, pretože v určitom prípade existuje vzťah medzi obomi testovými štatistikami, bude to uvedené v práci.

Cieľom práce bude jasne sformulovať Wilcoxonov test v takzvanej klasickej verzii so všetkými predpokladmi a následne po odstránení silných predpokladov na testované dáta taktiež odvodiť asymptotickú normalitu a modifikáciu testu. Potom budeme v práci pomocou simulácií porovnávať dvojicu odvodených testov, z ktorých jeden, ten so silnejšími predpokladmi, sa momentálne používa v štatistických softvéroch a upozorníme, kedy je problém s jeho použitím a hlavne, čo jeho použitím nemôžeme testovať.

Práca by mala byť zrozumiteľná čitateľovi, ktorý absolvoval aspoň základný kurz z matematickej štatistiky a je jasne oboznámený s pojmom štatistického testu a rozumie jeho princípom.

Celý obsah práce je rozčlenený do štyroch kapitol, z ktorých prvá prináša dve formulácie, objasňuje, prečo hovoríme o Wilcoxonovom ako aj Mannovom-Whitneyovom teste a oboznamuje nás s pojmom U-štatistika. Druhá časť práce je venovaná projekciám na priestor náhodných veličín s konečným druhým momentom a väčšina tvrdení je z knihy A. W. van der Vaarta, Asymptotic Statistics, pričom niektoré dôkazy sú podrobnejšie rozpracované. Ťažiskom teoretickej časti je tretia kapitola, ktorá využíva poznatky o projekciách a aplikuje ich na odvodenie asymptotickej normality testových štatistík uvedených v kapitole prvej. Záverečná časť práce sa venuje výsledkom simulácií a poznatkom, ktoré pre oba testy prinášajú.

1. Wilcoxonov test

V prvej kapitole sformulujeme Wilcoxonov štatistický test a budeme skúmať, aký parameter v akom modele testuje. Najprv však zavedieme pojem usporiadaného náhodného výberu a poradovej štatistiky, pomocou ktorej sformulujeme test jedným z možných spôsobov. Aj z tohto dôvodu môžeme používať test na testovanie parametrov ordinálnych veličín, u ktorých vieme určiť poradie a máme prirodzenú štruktúru usporiadania $\leq$. Pri prvej formulácii však budeme mať na testované dáta pomerne silné predpoklady, preto v druhom prípade zavedieme pojem U-štatistiky a pomocou nej odvodíme ekvivalentný test. V ďalších kapitolách zistíme, ako sa správa pri menej obmedzujúcich predpokladoch a ukážeme asymptotickú normalitu testovej štatistiky.

1.1 Usporiadaný náhodný výber

Uvažujme náhodný výber $X_1, \ldots, X_n$ z jednorozmerného spojitého rozdelenia s distribučnou funkiou F a hustotou f, ktorá je absolutne spojitá vzhľadom k Lebesgueovej miere. Ďalej nech $n \geq 2$.

Definícia 1. Usporiadaný náhodný výber *získame tak, že zoradíme všetky náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ podľa veľkosti od najmenšej po najväčšiu*

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}.$$

Symbol $X_{(k)}$ označuje k-tu najmenšiu hodnotu medzi pozorovaniami a nazývame ju k-ta poradová štatistika.

Poznámka. Usporiadaný náhodný výber je dobre definovaný a nemusíme uvažovať neostré nerovnosti, pretože $P[X_i = X_j] = 0$ pre každé $i \neq j$ vďaka tomu, že uvažujeme výber zo spojitého rozdelenia.

Definícia 2. Poradím *náhodnej veličiny X_i vo výbere $X_1, \ldots, X_n$ rozumieme prirodzené číslo $R_i \in \{1, \ldots, n\}$ také, že $X_i = X_{(R_i)}$.*

1.2 I. formulácia

Predpokladajme, že máme dva na sebe nezávislé náhodné výbery $X_1, \ldots, X_n$ s distribučnou funkciou F_X a $Y_1, \ldots, Y_m$ s distribučnou funkciou F_Y. Ako je v dvojvýberových problémoch bežné, chceme porovnať parameter takýchto dvoch rozdelení. Najčastejšie nás v praxi zaujíma testovanie hypotézy o strednej hodnote.

Uvažujme najprv distribučné funkcie, ktoré sú spojité a naviac

$$\exists \delta_X \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : F_X(x) = F_Y(x - \delta_X).$$

Takýto model sa niekedy nazýva aj model posunutia v polohe alebo skrátene model posunu. Je to pomerne obmedzujúci predpoklad, pretože pripúšťa len dáta z rozdelení rovnakého charakteru a dovoľuje, aby sa líšili len posunutím. Dokonca v takomto modeli sú rozptyly rozdelení, ak existujú, rovnaké.

Zaoberajme sa testom hypotézy $H_0 : \delta_X = 0$ proti alternatíve $H_1 : \delta_X \neq 0$. Dôvodom, prečo sa o Wilcoxonovom teste často hovorí ako o teste rovnosti stredných hodnôt, je to, že za platnosti H_0 sa rovnajú mediány oboch rozdelení a v prípade existencie aj stredné hodnoty. Takýto test sa dá odvodiť pomocou testovej štatistiky, ktorá je založená na združenom náhodnom výbere $Z = (Z_1, \ldots, Z_{n+m}) := (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$. Získame ju tak, že spočítame poradia R_i náhodných veličín X_i pre $i = 1, \ldots, n$ vo výbere Z.

$$W_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} R_i.$$

Za platnosti H_0 sa dajú napočítať momenty tejto štatistiky a taktiež sa dá dokázať asymptotická normalita. Postup ako určiť strednú hodnotu a rozptyl sa dá nájsť v knihe Anděl (2007), kapitola 8, strana 102. Asymptotická normalita tam dokázaná nie je a nebudeme jej odvodenie predvádzať, pretože to vykonáme vo všeobecnejšom prípade pri menej obmedzujúcich predpokladoch.

Tvrdenie 1. *Za platnosti H_0 vo vyššie opísanom modeli je*

(i) $\mathbb{E}\, W_{n,m} = \frac{n(n+m+1)}{2}$;

(ii) $var(W_{n,m}) = \frac{nm(n+m+1)}{12}$.

(iii) Pre $n,m \to \infty$ platí

$$U = \frac{W_{n,m} - \mathbb{E}\, W_{n,m}}{\sqrt{var(W_{n,m})}} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{1.1}$$

Z rovnosti (1.1) dostaneme, že test, ktorý zamieta hypotézu H_0, o nulovosti posunu, v prípade, keď $|U| \geq u_{1-\alpha/2}$, kde $u_{1-\alpha/2}$ je kvantil normovaného normálneho rozdelenia, má asymptotickú hladinu α. Ak výbery nepochádzajú z rozdelení, ktoré by sa líšili len posunutím, tak sa test môže správať inak a ukazuje sa, že testuje iný parameter, neporovnáva stredné hodnoty ani mediány výberov. Odvodíme preto test iným spôsobom.

1.3 Definícia U-štatistiky

V tejto časti zavedieme všeobecnú definíciu k-rozmernej U-štatistiky, pomocou ktorej v ďalšej časti uvedieme test založený na dvojrozmernej U-štatistike, označovanej aj Mannova-Whitneyova štatistika, ktorá pri predpokladoch uvedených v prvej formulácii Wilcoxonovho testu umožňuje odvodenie ekvivalentného štatistického testu. V tomto prípade však dostaneme lepší náhľad na to, čo konkrétne testujeme v prípade rôznych rozdelení.

Nech $\{X_1^{(1)}, \ldots, X_{n_1}^{(1)}\}, \ldots, \{X_1^{(k)}, \ldots, X_{n_k}^{(k)}\}$ je k nezávislých náhodných výberov z rozdelení s distribučnými funkciami $F_{X^{(1)}}, \ldots, F_{X^{(k)}}$ a $\theta = \theta(F_{X^{(1)}}, \ldots, F_{X^{(k)}})$ je parametrická funkcia, pre ktorú máme nestranný odhad tvaru

$$\theta = \mathbb{E}\big[h(X_1^{(1)}, \ldots, X_{m_1}^{(1)}; \ldots; X_1^{(k)}, \ldots, X_{m_k}^{(k)})\big],$$

kde o funkcii h predpokladáme, že je symetrická v premenných $x_1^{(i)},\dots,x_{m_i}^{(i)}$ pre všetky $i = 1,\dots,k$. Znamená to, že pri sledovaní zložiek, ktoré rozdelíme do k blokov podľa indexu i, je funkčná hodnota rovnaká pri ľubovoľnej permutácii premenných $x_1^{(i)},\dots,x_{m_i}^{(i)}$. Túto funkciu nazývame niekedy jadro.

Definícia 3. *Nech h je funkcia ako hore a $n_1 \geq m_1,\dots,n_k \geq m_k$ sú prirodzené čísla. Potom k-rozmerná* U-štatistika*, ktorá odhaduje parametrickú funkciu θ, je definovaná*

$$U_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k}\binom{n_i}{m_i}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{c_i} h\left(X_{j_{11}}^{(1)},\dots,X_{j_{1m_1}}^{(1)};\dots;X_{j_{k1}}^{(k)},\dots,X_{j_{km_k}}^{(k)}\right),$$

kde $\{j_{i1},\dots,j_{im_i}\}$ označuje množinu m_i indexov z množiny $\{1,\dots,n_i\}$ pre všetky $1 \leq i \leq k$ a $\sum_{c_i}$ predstavuje súčet cez všetky takéto možné m_i-prvkové kombinácie z prvkov $\{1,\dots,n_i\}$.

1.4 II. formulácia

Uvažujme znovu dva na sebe nezávislé náhodné výbery $X_1,\dots,X_n$ s distribučnou funkciou F_X a $Y_1,\dots,Y_m$ s distribučnou funkciou F_Y. Teraz budeme predpokladať len spojitosť distribučných funkcií a zaujímať nás bude parameter $\theta = P(X \leq Y)$. Keďže pravdepodobnosť je stredná hodnota indikátoru, nestranný odhad parametru dostaneme ako U-štatistiku s jadrom $h(x,y) = \mathbb{I}(X \leq Y)$. Ide teda o dvojrozmernú ($k = 2$) štatistiku, kde oproti definícii zavádzame značenie $n_1 = n$, $n_2 = m$ a naviac platí $m_1 = m_2 = 1$.

$$W^*_{n,m} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}(X_i \leq Y_j).$$

Táto štatistika je často nazývaná aj Mannova-Whitneyova. S Wilcoxonovým testom sa spája, pretože existuje deterministický vzťah medzi $W_{n,m}$ a $W^*_{n,m}$, ktorý následne uvedieme.

Tvrdenie 2. *Platí $nm\,W^*_{n,m} + W_{n,m} = nm + \frac{n(n+1)}{2}$.*

Dôkaz. Stačí si uvedomiť, že poradie X_i vo výbere $Z = (X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)$ môžeme pomocou indikátorov vypočítať ako súčet X_j a Y_j, ktoré sú menšie ako X_i. Pre každé $i = 1,\dots,n$ je preto

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}(X_j \leq X_i) + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}(Y_j \leq X_i).$$

Potom však

$$nm\,W^*_{n,m} + W_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}(X_i \leq Y_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}(X_j \leq X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{I}(Y_j \leq X_i).$$

Prostredný člen na pravej strane rovnosti je súčet všetkých poradí X_i medzi veličinami $X_1,\dots,X_n$, takže to je rovné $\frac{n(n+1)}{2}$. Zvyšné sumy pre každé X_i spočítajú počet Y_j, ktoré sú väčšie a taktiež aj menšie, preto je to počet X_i krát počet Y_j, čo je presne nm.

□

Vďaka tomu sa z testovej štatistiky $W_{n,m}^*$ dá odvodiť ekvivalentný štatistický test hypotézy $H_0^* : \theta = 1/2$ proti alternatíve $H_1^* : \theta \neq 1/2$ v modele posunutia s testom odvodeným v I. formulácii. Vieme, aký parameter táto štatistika odhaduje, preto nám to dáva lepší pohľad, ako sa môže Wilcoxonov test odvodený z rovnosti (3.1) správať v prípade výberov z rozdelení, ktoré sa líšia tvarom distribučných funkcií a nie len posunom. V ďalšej časti práce budeme preto skúmať momenty tejto U-štatistiky, odvodíme jej asymptotické rozdelenie a sformulujeme test tak, aby bolo jasné, aký parameter rozdelení sleduje pri jednoduchších predpokladoch.

2. Projekcie a podmienená stredná hodnota

Na odvodenie momentov testovej štatistiky uvedenej v predchádzajúcej kapitole a skúmanie asymptotickej normality budeme potrebovať poznatky zo štúdia aproximácií náhodných veličín. Čerpáme z knihy Van der Vaart (2007), kde sa kapitola 11 zaoberá projekciami v priestore náhodných veličín s konečným druhým momentom, označovaný aj L_2-priestor, čo následne vedie k podmienenej strednej hodnote. Ďalej je zaujímavá projekcia na priestor súm, ktorá je dôležitá na odvodenie asymptotickej normality Wilcoxonovho testu.

2.1 Projekcia

Častou metódou, ako odvodiť asymptotické rozdelenie postupnosti štatistík T_n, je ukázať, že je asymptoticky ekvivalentná inej postupnosti S_n, ktorej limitné rozdelenie poznáme. Vďaka Cramérovej-Sluckého vete je potom asymptotické rozdelenie týchto dvoch postupností štatistík identické.

Ako sme uvádzali, najprv nás bude zaujímať projekcia v L_2-priestore, ktorá vychádza z toho, že chceme hľadať S_n, ktorá je „najbližšie" v zmysle druhého momentu. Uvažujme $\mathcal{S}$, lineárny priestor všetkých štatistík, teda pre každé dve štatistiky $S_1,S_2 \in \mathcal{S}$ a reálne čísla $a,b \in \mathbb{R}$ je aj $aS_1 + bS_2 \in \mathcal{S}$.

Definícia 4. *Nech T a $\{S; S \in \mathcal{S}\}$ sú náhodné veličiny, definované na rovnakom pravdepodobnostnom priestore, s konečnými druhými momentmi. Náhodnú veličinu $\hat{S}$ nazveme* projekcia *T na $\mathcal{S}$, ak*

$$\hat{S} = \arg\min_{S \in \mathcal{S}} \mathbb{E}\big[(T-S)^2\big].$$

Na projekciu definovanú vyššie sa môžeme pozerať ako na projekciu v zmysle vektorových priestorov vzhľadom ku skalárnemu súčinu $\langle S_1,S_2 \rangle = \mathbb{E}\,[S_1S_2]$. Viac je obsiahnuté v nasledujúcej vete.

Veta 3. *Nech $\mathcal{S}$ je lineárny priestor náhodných veličín s konečnými druhými momentmi a $T \in \mathcal{S}$. Potom $\hat{S}$ je projekcia T na $\mathcal{S}$ práve vtedy, keď $\hat{S} \in \mathcal{S}$ a*

$$\forall S \in \mathcal{S} : \mathbb{E}\big[(T-\hat{S})S\big] = 0. \tag{2.1}$$

Každé dve projekcie T na $\mathcal{S}$ sa rovnajú skoro isto (t.j. $P[\hat{T} = \hat{S}] = 1$). Ak $\mathcal{S}$ obsahuje konštantné náhodné veličiny, potom $\mathbb{E}T = \mathbb{E}\hat{S}$ a $cov\big(T-\hat{S}, S\big) = 0$ pre každú $S \in \mathcal{S}$.

Dôkaz. K nájdeniu v knihe Van der Vaart (2007), kapitola 11, strana 154.

□

Uvažujme postupnosť štatistík T_n a lineárnych priestorov $\mathcal{S}_n$ pre $n \in \mathbb{N}$. Predpokladajme, že poznáme pre každé n projekciu $\hat{S}_n$ štatistiky T_n na $\mathcal{S}_n$. Chceme vedieť ako vyzerá limitné rozdelenie štatistík T_n, ak poznáme limitné rozdelenie projekcií S_n.

Veta 4. *Buď $\mathcal{S}_n$ lineárny priestor náhodných veličín s konečným druhým momentom, ktorý obsahuje konštantné náhodné veličiny. Nech T_n sú náhodné veličiny a ich projekcie na $\mathcal{S}_n$ sú $\hat{S}_n$. Platí*

$$\frac{var T_n}{var \hat{S}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \implies \frac{T_n - \mathbb{E}T_n}{\sqrt{var T_n}} - \frac{\hat{S}_n - \mathbb{E}\hat{S}_n}{\sqrt{var \hat{S}_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0. \tag{2.2}$$

Dôkaz. Ukážeme, že postupnosť na pravej strane implikácie z (2.2) konverguje v L_2 k nule, z čoho potom vyplýva konvergencia v pravdepodobnosti. Stredná hodnota oboch zlomkov je nulová, pretože sa pri jej výpočte v čitateli odčítavajú rovnaké konštanty a z linearity dostávame, že stredná hodnota celej postupnosti je nulová. Rozptyl sa preto rovná druhému momentu

$$\operatorname{var}\left(\frac{T_n - \mathbb{E}T_n}{\sqrt{\operatorname{var} T_n}} - \frac{\hat{S}_n - \mathbb{E}\hat{S}_n}{\sqrt{\operatorname{var} \hat{S}_n}}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{T_n - \mathbb{E}T_n}{\sqrt{\operatorname{var} T_n}} - \frac{\hat{S}_n - \mathbb{E}\hat{S}_n}{\sqrt{\operatorname{var} \hat{S}_n}}\right)^2\right]. \tag{2.3}$$

Z linearity dostávame, že výraz vpravo z (2.3) je rovný

$$\frac{\mathbb{E}\left[(T_n - \mathbb{E}T_n)^2\right]}{\operatorname{var} T_n} + \frac{\mathbb{E}\left[(\hat{S}_n - \mathbb{E}\hat{S}_n)^2\right]}{\operatorname{var} \hat{S}_n} - 2\frac{\operatorname{cov}(T_n,\hat{S}_n)}{\sqrt{\operatorname{var} T_n \operatorname{var} \hat{S}_n}}. \tag{2.4}$$

V prvých dvoch členoch si všimnime, že čitateľ zlomku je rovný definícii rozptylu, takže oba zlomky sú rovné 1 a ďalej je $\operatorname{cov}(T_n,\hat{S}_n) = \mathbb{E}\left[T_n\hat{S}_n\right]$, pretože stredné hodnoty sú nulové. Podľa (2.1) vo Vete 3 je $\mathbb{E}\left[(T_n - \hat{S}_n)\hat{S}_n\right] = 0$ a preto

$$\mathbb{E}\left[T_n\hat{S}_n\right] = \mathbb{E}\left[T_n\hat{S}_n\right] - \mathbb{E}\left[(T_n - \hat{S}_n)\hat{S}_n\right] = \mathbb{E}\hat{S}_n^2 = \operatorname{var} \hat{S}_n.$$

Ďalej z predpokladu implikácie, $\operatorname{var} T_n / \operatorname{var} \hat{S}_n \to 1$ pri $n \to \infty$, dostávame pre výraz v (2.4), že sa rovná výrazu na ľavej strane nasledujúceho vzťahu a platí konvergencia

$$2 - 2\frac{\operatorname{var} \hat{S}_n}{\sqrt{\frac{\operatorname{var} T_n}{\operatorname{var} \hat{S}_n}} \operatorname{var} \hat{S}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 - 2 = 0.$$

Týmto dostávame konvergenciu v L_2, z ktorej vyplýva tvrdenie vety.

□

2.2 Podmienená stredná hodnota

Ak začneme študovať náhodnú veličinu v prípade, že podmienime jej rozdelenie znalosťou inej a budeme hľadať aproximáciu v priestore merateľných funkcií vzhľadom k podmienke, povedie nás to k podmienenej strednej hodnote. V tejto časti naviac budeme používať označenie $L_p(\Omega,\mathcal{A},P)$ pre priestor s konečným p-tým momentom.

Definícia 5. *Nech* $X_1 \in L_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ *a* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ *je* σ*-algebra. Potom každú reálnu náhodnú veličinu* Y*, ktorá splňuje*

(1) $Y \in L_1(\Omega,\mathcal{F},P_{/\mathcal{F}})$;

(2) $\forall B \in \mathcal{F} : \int_B Y dP = \int_B X dP$;

nazveme podmienená stredná hodnota *náhodnej veličiny* X *vzhľadom k* $\mathcal{F}$ *a budeme ju označovať* $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

Definícia 6. *Pre* $X \in L_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ *a* $Y : (\Omega,\mathcal{A}) \to (E,\mathcal{E})$ *náhodné veličiny budeme označovať*

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}\big[X|\sigma(Y)\big]$$

a nazývať podmienená stredná hodnota *náhodnej veličiny* X *pri* Y.

Teraz uvedieme vetu, ktorá sa týka vlastností podmienenej strednej hodnoty a odkážeme sa na dôkaz v knihe Lachout (1998), kde jednotlivé časti môžeme nájsť v kapitole 7 postupne na stranách 36 − 38.

Veta 5. *Majme* $X \in L_1(\Omega,\mathcal{A},P)$ *a* $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ*-algebru.*

(i) *Vždy platí*

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\big] = \mathbb{E}X.$$

(ii) *Ak* X *je* $\mathcal{F}$*-merateľná, potom*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X \quad s.j.$$

(iii) *Ak* $\sigma(X)$ *a* $\mathcal{F}$ *sú nezávislé, potom*

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}X \quad s.j.$$

2.3 Projekcia na priestor súm

Majme $X_1,\ldots,X_n$ nezávislé náhodné veličiny a v tejto časti uvažujme priestor $\mathcal{S}$ náhodných veličín v tvare

$$\sum_{i=1}^{n} g(X_i), \tag{2.5}$$

kde g je merateľná funkcia s $\mathbb{E}\, g^2(X_i) < \infty$. Zaujímať nás bude projekcia ľubovoľnej náhodnej veličiny T na priestor $\mathcal{S}$, pretože asymptotické rozdelenie štatistík v $\mathcal{S}$ sa dá odvodzovať z centrálnej limitnej vety.

Veta 6. *Nech* $X_1,\ldots,X_n$ *sú nezávislé náhodné veličiny. Potom projekcia náhodnej veličiny* T *s konečným druhým momentom na priestor* $\mathcal{S}$ *je*

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[T|X_i] - (n-1)\mathbb{E}T. \tag{2.6}$$

Dôkaz. Jasne je vidieť, že štatistika vpravo je v priestore $\mathcal{S}$, pretože to je suma merateľných funkcií náhodných veličín X_i. Podľa Vety 3 preto stačí ukázať platnosť (2.1). Keďže X_i sú nezávislé, tak platia rovnosti

$$\forall i \neq j : \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[T|X_i]\,|X_j\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[T|X_i]\big] = \mathbb{E}T, \tag{2.7}$$

kde prvá rovnosť plynie z toho, že $\mathbb{E}[T|X_i]$ je $\sigma(X_i)$-merateľná a vďaka nezávislosti z bodu (iii) Vety 5 a druhá rovnosť plynie z bodu (i) tej istej vety. Potom dostávame pre všetky j, že $\mathbb{E}[\hat{S}|X_j]$ je rovné

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[T|X_i] - (n-1)\mathbb{E}T\right)\Big|X_j\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[T|X_i]\,|X_j\big] - \mathbb{E}\big[(n-1)\mathbb{E}T\,|X_j\big].$$

Dosadením (2.7) a uvedomením si, že $(n-1)\mathbb{E}T$ je konštanta, dostávame pre všetky j rovnosti

$$\mathbb{E}[\hat{S}|X_j] = (n-1)\mathbb{E}T + \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[T|X_j]\,|X_j\big] - (n-1)\mathbb{E}T = \mathbb{E}[T|X_j], \tag{2.8}$$

pričom využívame, že $\mathbb{E}[T|X_j]$ je $\sigma(X_j)$-merateľná. Takže pre štatistiky z priestoru $\mathcal{S}$, štatistiky tvaru (2.5), máme pre každé $j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\mathbb{E}\big[(T-\hat{S})\,g(X_j)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[(T-\hat{S})\,|X_j]\;g(X_j)\big] = \mathbb{E}[0\,g(X_j)] = 0.$$

Prvá rovnosť plynie z bodu (i) Vety 5 a $\sigma(X_j)$-merateľnosti funkcie $g(X_j)$ a druhá rovnosť vyplýva z (2.8). Týmto sme dokázali (2.1), a síce pre každú štatistiku $S \in \mathcal{S}$ tvaru (2.5) je $\mathbb{E}[(T-\hat{S})S] = 0$.

$\square$

3. Momenty a asymptotická normalita testovej štatistiky

Kapitola sa venuje odvodeniu asymptotickej normality štatistiky $W^*_{n,m}$ uvedenej pri formulácii v prvej kapitole (v časti 1.4) tejto práce a odvodeniu testu. Pre skrátenie ju budeme v tejto kapitole označovať len W^*.

Pripomeňme, že uvažujeme nezávislé náhodné výbery $X_1,\dots,X_n$ a $Y_1,\dots,Y_m$ so spojitými distribučnými funkciami F_X a F_Y. Štatistika W^* dáva nestranný odhad parametru $\theta = P(X \leq Y)$. Najprv odvodíme pomocou Vety 6 projekciu štatistiky $W^* - \theta$ na priestor štatistík tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} g(X_i) + \sum_{j=1}^{m} h(Y_j). \tag{3.1}$$

Podobne ako v I. formulácii Wilcoxonovho testu uvažujme združený náhodný výber $Z = (Z_1,\dots,Z_{n+m}) := (X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)$, kde všetky zložky sú nezávislé. Potom podľa Vety 6 je projekcia náhodnej veličiny W^* na priestor náhodných veličín tvaru (2.5) rovná

$$\widetilde{W}^* = \sum_{k=1}^{n+m} \mathbb{E}[W^*|Z_k] - (n+m-1)\mathbb{E}W^*.$$

Využijeme W^* ako nestranný odhad θ a rozdelenie súm, čím dostaneme rovnosť

$$\widetilde{W}^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[W^*|X_i] - n\theta + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}[W^*|Y_j] - m\theta + \theta.$$

Celkovo dostávame projekciu štatistiky $W^* - \theta$ na priestor tvaru (3.1) ako štatistiku

$$W = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[W^* - \theta|X_i] + \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}[W^* - \theta|Y_j]. \tag{3.2}$$

Keďže nás budú zaujímať ďalej momenty tejto štatistiky a taktiež budeme chcieť odvodiť asymptotickú normalitu, chceme zjednodušiť tvar tejto projekcie a vyjadriť ho pomocou distribučných funkcií. Toto zjednodušenie je v obsahu nasledujúcej vety.

Veta 7. *Projekciu štatistiky $W^* - \theta$ na priestor štatistík tvaru (3.1) môžeme písať v tvare*

$$\widetilde{W} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} h(Y_j), \tag{3.3}$$

kde $g(x) = 1 - F_Y(x) - \theta$ a $h(y) = F_X(y) - \theta$.

Dôkaz. Vychádzať budeme zo vzťahu (3.2), ktorý sme odvodili pred znením vety. Počítajme podmienenú strednú hodnotu, ktorá sa tam objavuje. Pre každé $k = 1, \dots, n$ platí

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{I}(X_i \le Y_j) \,|\, X_k = x\big] = \begin{cases} \mathbb{E}[\mathbb{I}(x \le Y_j)] = 1 - F_{Y_j}(x), & \text{ak } k = i, \\ \theta, & \text{ak } k \ne i. \end{cases} \tag{3.4}$$

Dostaneme to vďaka nezávislosti $X_1, \dots, X_n$ a faktu, že stredná hodnota indikátoru je rovná pravdepodobnosti. Zo vzťahu (3.4) ďalej dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W^* - \theta \,|\, X_i = x] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big[\mathbb{I}(X_i \le Y_1) \,|\, X_i = x\big] - \theta = \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 - F_Y(x)\Big) + \frac{n-1}{n}\theta - \theta = \frac{1 - F_Y(x) - \theta}{n} = \frac{1}{n}\, g(x). \end{aligned}$$

Prvá rovnosť vyplýva z toho, že $Y_1, \dots, Y_m$ sú nezávislé a rovnako rozdelené a z linearity podmienenej stredej hodnoty, druhá rovnosť dosadením vzťahu (3.4) a ďalšie dve sú len úpravy. Analogicky sa odvodí vzťah

$$\mathbb{E}[W^* - \theta |\, Y_j = y] = \frac{1}{m}\, h(y).$$

Rovnosť zo znenia vety potom už dostávame len dosadením do rovnosti (3.2). □

Získali sme teda projekciu štatistiky $W^* - \theta$ s nulovou strednou hodnotou. Ďalej budeme chcieť použiť Vetu 4 a odvodiť asymptotickú normalitu. Zaoberáme sa strednou hodnotou sumy umocnenej na druhú, preto si najprv uvedomíme, že platí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} f^2(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\ne i}^{n} f(x_i) f(x_j). \tag{3.5}$$

Počítajme najprv rozptyl U-štatistiky W^* so strednou hodnotou θ, máme

$$\operatorname{var} W^* = \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Big(\mathbb{I}(X_i \le Y_j) - \theta\Big)\right)^2\right].$$

Vďaka vzťahu (3.5) a linearite strednej hodnoty sa rovná výrazu

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 m^2}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta_{0,0} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1, l\ne j}^{m} \delta_{0,1} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1, k\ne i}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta_{1,0} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1, k\ne i}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1, l\ne j}^{m} \delta_{1,1} \Bigg), \end{aligned}$$

kde pre jednotlivé členy platí

$$\begin{aligned}
\delta_{0,0} &= \mathbb{E}\Big[(\mathbb{I}(X_i \le Y_j) - \theta)^2\Big] = \operatorname{var}\Big(\,\mathbb{I}(X_i \le Y_j)\,\Big),\\
\delta_{0,1} &= \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{I}(X_i \le Y_j) - \theta\big)\,\big(\mathbb{I}(X_i \le Y_l) - \theta\big)\Big] = \operatorname{cov}\Big(\,\mathbb{I}(X_i \le Y_j);\, \mathbb{I}(X_i \le Y_l)\Big),\\
\delta_{1,0} &= \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{I}(X_i \le Y_j) - \theta\big)\,\big(\mathbb{I}(X_k \le Y_j) - \theta\big)\Big] = \operatorname{cov}\Big(\,\mathbb{I}(X_i \le Y_j);\, \mathbb{I}(X_k \le Y_j)\Big),\\
\delta_{1,1} &= \mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{I}(X_i \le Y_j) - \theta\big)\,\big(\mathbb{I}(X_k \le Y_l) - \theta\big)\Big] = \operatorname{cov}\Big(\,\mathbb{I}(X_i \le Y_j);\, \mathbb{I}(X_k \le Y_l)\Big).
\end{aligned}$$

Ďalej využijeme nezávislosť a dostaneme rovnosť

$$\operatorname{var} W^* = \frac{1}{n^2m^2}\left(nm\delta_{0,0} + 2n\binom{m}{2}\delta_{0,1} + 2m\binom{n}{2}\delta_{1,0} + 4\binom{n}{2}\binom{m}{2}\delta_{1,1}\right). \quad (3.6)$$

Na počítanie vyššie uvedených kovariancií využijeme podmieňovanie a vlastnosti podmienenej strednej hodnoty. Dostávame tak rovnosti

$$\operatorname{var}\Big((\mathbb{I}(X_i \le Y_j)\Big) = P(X_i \le Y_j) - \theta^2 = \theta - \theta^2,$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\Big(\mathbb{I}(X_i \le Y_j);\, \mathbb{I}(X_i \le Y_l)\Big) &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{I}(X_i \le Y_j)\,\mathbb{I}(X_i \le Y_l)\Big] - \theta^2 =\\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[\mathbb{I}\big(X_i \le \min(Y_j,Y_l)\big)\,\big|X_i\big]\Big] - \theta^2 = \mathbb{E}\big[1 - F_Y(X_i)\big]^2 - \theta^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\Big(\mathbb{I}(X_i \le Y_j);\, \mathbb{I}(X_k \le Y_j)\Big) &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{I}(X_i \le Y_j)\,\mathbb{I}(X_k \le Y_j)\Big] - \theta^2 =\\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[\mathbb{I}\big(\max(X_i,X_k) \le Y_j\big)\,\big|Y_j\big]\Big] - \theta^2 = \mathbb{E}\big[F_X(Y_j)\big]^2 - \theta^2,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}\Big(\mathbb{I}(X_i \le Y_j);\, \mathbb{I}(X_k \le Y_l)\Big) = P\Big(X_i \le Y_j, X_k \le Y_l\Big) - \theta^2 = \theta^2 - \theta^2 = 0.$$

Následne využijeme nezávislosť a určíme aj rozptyl projekcie

$$\operatorname{var}\widetilde{W} = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\right) + \frac{1}{m^2}\operatorname{var}\left(\sum_{j=1}^{m} h(Y_j)\right) = \frac{1}{n}\,\delta_{0,1} + \frac{1}{m}\,\delta_{1,0}. \quad (3.7)$$

Ide o odvodenie dvojvýberových testov, takže budeme brať do úvahy asymptotickú normalitu za predpokladu

$$n \to \infty,\ m \to \infty,\ \lambda_n = \frac{n}{m} \to \lambda \in (0;\infty). \quad (3.8)$$

Pre podiel rozptylov testovej štatistiky W^* a jej projekcie teda máme

$$\frac{\operatorname{var}\widetilde{W}}{\operatorname{var} W^*} = \frac{\frac{1}{n}\Big(\delta_{0,1} + \frac{n}{m}\delta_{1,0}\Big)}{\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{m}\delta_{0,0} + \frac{m-1}{m}\delta_{0,1} + \frac{n-1}{m}\delta_{1,0} + \frac{(m-1)(n-1)}{m}\delta_{1,1}\Big)}.$$

Keďže $\delta_{1,1} = 0$ a $\delta_{0,0}/m \to 0$, tak celý zlomok konverguje k jednej, preto podľa Vety 4 a Cramérovej-Sluckého vety je asymptotické rozdelenie testovej štatistiky a jej projekcie rovnaké. Relatívne zložitý výraz pre rozptyl štatistiky W^* teda môžeme nahradiť rozptylom $\widetilde{W}$ a dostaneme konvergenciu v distribúcii k rovnakej veličine. Z toho dôvodu dostávame konvergenciu v distribúcii

$$\frac{W^* - \theta}{\sqrt{\frac{1}{n}\delta_{0,1} + \frac{1}{m}\delta_{1,0}}} = \sqrt{\frac{mn}{m\,\delta_{0,1} + n\,\delta_{1,0}}}\,(W^* - \theta) \xrightarrow{d} N(0;1). \tag{3.9}$$

Z posledného vzťahu budeme vychádzať pri odvodení testu hypotézy o rovnosti distribučných funkcií $H_0 : \delta_X = 0$, ktorá bola uvedená v prvej kapitole práce (v časti 1.2). Za platnosti H_0 je teda parameter $\theta = 1/2$ a taktiež môžeme vypočítať koeficienty kovariancií. Platí

$$\delta_{0,1} = \mathbb{E}\big[1 - F_Y(X_1)\big]^2 - \theta^2 = 1 - 2\theta + \int_{\mathbb{R}} F_Y^2(x) f_X(x)dx - \theta^2 = \int_0^1 t^2 dt - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Rovnosť distribučných funkcií je dôležitá na výpočet integrálu a podobným výpočtom zistíme, že $\delta_{1,0} = 1/12$. V tomto prípade po úprave štatistiky zo vzťahu (3.9) odvodíme test na hladine α tak, že budeme zamietať hypotézu v prípade, ak

$$\sqrt{\frac{12mn}{m+n}}\left|W^* - \frac{1}{2}\right| \geq u_{1-\alpha/2}, \tag{3.10}$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je kvantil normovaného normálneho rozdelenia. Ďalej budeme tento test označovať ako klasický Wilcoxonov test alebo skrátene klasický test.

Tvrdenie 8. *Za predpokladu (3.8) podiel zamietnutí hypotézy H_0 pri použití klasického Wilcoxonovho testu v prípade, že $\theta = \frac{1}{2}$, konverguje k číslu*

$$2\left(1 - \Phi\left(u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{1}{12}\,\frac{1+\lambda}{\delta_{0,1} + \lambda\,\delta_{1,0}}}\right)\right),$$

kde $u_{1-\alpha/2}$ je kvantil a Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia.

Dôkaz. Podiel zamietnutí testu pomocou nejakej testovej štatistiky sa rovná pravdepodobnosti, že testová štatistika padne do kritického oboru testu. V našom prípade preto chceme určiť, k čomu konverguje postupnosť

$$P\left(\sqrt{\frac{12mn}{m+n}}\left|W^* - \frac{1}{2}\right| \geq u_{1-\alpha/2}\right).$$

Po úprave, ktorá zahŕňa prenásobenie oboch strán nerovnosti, dostaneme, že sa to rovná nasledovnej pravdepodobnosti

$$P\left(A_{m,n}\left|W^* - \frac{1}{2}\right| \geq u_{1-\alpha/2}\,\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}\right), \tag{3.11}$$

kde

$$A_{m,n} = \sqrt{\frac{mn}{m\,\delta_{0,1} + n\,\delta_{1,0}}} \quad \text{a} \quad B_{m,n} = \sqrt{\frac{12mn}{m+n}}.$$

Podľa (3.9) za platnosti H_0 štatistika na ľavej strane v nerovnosti z (3.11) konverguje k normovanému normálnemu rozdeleniu, preto vďaka spojitosti distribučnej funkcie normovaného normálneho rozdelenia Φ táto pravdepodobnosť pri (3.8) konverguje k

$$2\left(1-\Phi\left(u_{1-\alpha/2}\lim_{(3.8)}\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}\right)\right).$$

Na dokončenie dôkazu stačí určiť

$$\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}=\sqrt{\frac{1}{12}\,\frac{1+\frac{n}{m}}{\delta_{0,1}+\frac{n}{m}\delta_{1,0}}}\xrightarrow[(3.8)]{}\sqrt{\frac{1}{12}\,\frac{1+\lambda}{\delta_{0,1}+\lambda\,\delta_{1,0}}}.$$

□

Zo vzťahu (3.9) sa dá taktiež odvodiť test hypotézy $H_0^*:\theta=1/2$, ktorá bola uvedená v II. formulácii z prvej kapitoly práce (v časti 1.4). Hlavnou myšlienkou je v odhade asymptotického rozptylu testovej štatistiky použiť vlastnosti empirickej distribučnej funkcie na odhad parametrov $\delta_{0,1}$ a $\delta_{1,0}$. Ukážeme, že štatistika

$$\widetilde{W}_{n,m}=\frac{W^*-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{n}\hat{\delta}_{0,1}+\frac{1}{m}\hat{\delta}_{1,0}}}\tag{3.12}$$

konverguje k normovanému normálnemu rozdeleniu, pričom odhady jednotlivých parametrov sú

$$\hat{\delta}_{0,1}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{F}_m(X_i)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{F}_m(X_k)\right)^2,\tag{3.13}$$

$$\hat{\delta}_{1,0}=\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(1-\hat{F}_n(Y_j)-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left[1-\hat{F}_n(Y_k)\right]\right)^2,\tag{3.14}$$

kde

$$\hat{F}_m(X_i)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{I}(Y_j\le X_i),$$
$$\hat{F}_n(Y_j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}(X_i\le Y_j)$$

sú empirické distribučné funkcie jednotlivých výberov. Najdôležitejším poznatkom pri dôkaze tejto konvergencie je fakt, že empirická distribučná funkcia rovnomerne konverguje v pravdepodobnosti k distribučnej funkcii náhodného výberu, t.j.

$$\sup_{t\in R}\left|\hat{F}_m(t)-F_Y(t)\right|\xrightarrow[m\to\infty]{P}0.\tag{3.15}$$

Pomocou tohto chceme teda ukázať, že $\hat{\delta}_{0,1}\xrightarrow[(3.8)]{P}\delta_{0,1}$. Vzťah (3.13) upravíme

$$\hat{\delta}_{0,1}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{F}_m(X_i)\right]^2-\frac{n}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{F}_m(X_k)\right]^2.\tag{3.16}$$

Zaoberajme sa najprv druhým sčítancom z (3.16). Platí

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{F}_m(X_k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big[\hat{F}_m(X_k)-F_Y(X_k)\Big]+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F_Y(X_k). \tag{3.17}$$

Prvý člen na pravej strane rovnosti môžeme odhadnúť

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big[\hat{F}_m(X_k)-F_Y(X_k)\Big]\leq\sup_{t\in R}\Big|\hat{F}_m(t)-F_Y(t)\Big|,$$

takže konverguje podľa (3.15) k nule a druhý člen na pravej strane rovnosti (3.17) je priemer nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín, preto podľa zákona veľkých čísel konverguje k $\mathbb{E}F_Y(X_1)$. Celkom teda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{F}_m(X_k)\xrightarrow[(3.8)]{P}\mathbb{E}F_Y(X_1). \tag{3.18}$$

Ďalej sledujme prvý sčítanec na pravej strane rovnosti (3.16) a upravme ho

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Big[\hat{F}_m(X_i)\Big]^2&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Big[\hat{F}_m(X_i)-F_Y(X_i)\Big]^2+\\&+\frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Big[F_Y(X_i)\Big(\hat{F}_m(X_i)-F_Y(X_i)\Big)\Big]+\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[F_Y(X_i)]^2.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Najprv odhadneme prvý člen na pravej strane predchádzajúcej rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[\hat{F}_m(X_i)-F_Y(X_i)\Big]^2\leq\sup_{t\in R}\Big|\hat{F}_m(t)-F_Y(t)\Big|\sum_{i=1}^{n}\Big|\hat{F}_m(X_i)-F_Y(X_i)\Big|.$$

Využijeme, že suprémum konverguje k nule podľa (3.15) a suma na pravej strane nerovnosti po predelení výrazom $(n-1)$ konverguje taktiež k nule, ako sme dokazovali v rovnosti (3.17). Preto je ohraničená v pravdepodobnosti a súčin celkovo konverguje k nule. Pozrime sa na druhý sčítanec z pravej strany rovnosti (3.19) a odhadnime ho

$$2\sum_{i=1}^{n}\Big[F_Y(X_i)\Big(\hat{F}_m(X_i)-F_Y(X_i)\Big)\Big]\leq 2\sup_{t\in R}\Big|\hat{F}_m(t)-F_Y(t)\Big|\sum_{i=1}^{n}F_Y(X_i).$$

Podobne ako v predchádzajúcom využijeme konvergenciu supréma k nule z (3.15) a to, že suma po predelení výrazom $(n-1)$ je znovu konvergentná v pravdepodobnosti podľa (3.18). Je teda aj ohraničená a súčin bude preto konvergovať v pravdepodobnosti k nule. Ostáva už len posledný sčítanec v rovnosti (3.19), na ktorý použijeme zákon veľkých čísel a dostaneme konečne konvergenciu

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Big[\hat{F}_m(X_i)\Big]^2\xrightarrow[(3.8)]{P}\mathbb{E}\big[F_Y(X_1)\big]^2. \tag{3.20}$$

Nakoniec teda vďaka tvrdeniam (3.18) a (3.20) a vďaka rovnosti (3.16) dostávame

$$\hat{\delta}_{0,1}\xrightarrow[(3.8)]{P}\mathbb{E}\big[F_Y(X_1)\big]^2-\big[\mathbb{E}F_Y(X_1)\big]^2=\text{var}\,\big[F_Y(X_1)\big]=\delta_{0,1}.$$

Pri dôkaze konvergencie odhadu $\hat{\delta}_{1,0}$ by sme postupovali analogicky, všade by sme miesto $F_Y(.)$ mohli písať $1 - F_X(.)$ a n nahradiť m. Asymptotická normalita štatistiky z (3.12) potom plynie z Cramérovej-Sluckého vety a spomínaného vzťahu (3.9).

Test hypotézy $H_0^* : \theta = \frac{1}{2}$ proti alternatíve $H_1^* : \theta \neq \frac{1}{2}$ pri predpoklade nezávislosti oboch náhodných výberov a spojitosti distribučných funkcií na hladine α môžeme preto odvodiť zo vzťahu (3.12) tak, že hypotézu zamietneme v prípade, ak $|\widetilde{W}_{n,m}| \geq u_{1-\alpha/2}$. Tento test budeme v ďalšej časti práce nazývať modifikovaný Wilcoxonov test alebo skrátene modifikovaný test.

4. Porovnanie klasického a modifikovaného Wilcoxonovho testu pomocou simulácií

V záverečnej kapitole práce sa pokúsime pomocou simulácií ukázať, aký dopad má porušenie predpokladu modelu posunu na klasický Wilcoxonov test (3.10). Porovnáme to s modifikovaným Wilcoxonovým testom, ktorý predpokladá len spojitosť, preto by mal dodržovať asymptotickú hladinu mimo model posunutia.

4.1 Porovnanie pri $\theta = \frac{1}{2}$

Najprv zvolíme výbery $X_1, \ldots, X_n$ a $Y_1, \ldots, Y_m$ z rozdelení so spojitými distribučnými funkciami F_X a F_Y tak, aby parameter $\theta = P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$ a vyberieme rôzne tvary hustôt. Skúsime rozdielne ako aj rovnaké rozsahy výberov, nasimulujeme desaťtisíckrát oba testy a porovnáme, v koľkých prípadoch bola zamietnutá hypotéza. V prípadoch, kde nebude splnený predpoklad modelu posunutia bude mať klasický test rôznu silu, ktorá súvisí s Tvrdením 8 a modifikovaný test by mal dodržovať asymptotickú hladinu.

V ďalšej časti prinášame prehľad, kde vždy uvedieme, aké rozdelenia sme zvolili, stručný komentár a následne tabuľku s údajmi, koľkokrát bola zamietnutá hypotéza pri rôznej voľbe rozsahov výberov n a m.

- **NORMÁLNE A ROVNOMERNÉ ROZDELENIE**
  X má normované normálne $\mathcal{N}(0,1)$ rozdelenie a Y má rovnomerné rozdelenie na intervale $(-1; 1)$. Jasne sa ukázalo (viď Tabuľka 4.1), že v prípade nerovnakého rozsahu oboch výberov zamietal klasický test viac ako 5 %, ak sme mali menej dát z rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$ a naopak sme zaznamenali menej zamietnutí, konkrétne približne 2,7 % prípadov, ak bola medzi rozsahmi obrátená nerovnosť. Taktiež si môžeme všimnúť, že empirická hladina modifikovaného testu závisela na celkovom súčte rozsahu oboch výberov, pretože test zamietol viac ako 6 %, ak bol súčet rozsahov len 40.

Rozsah X	**Rozsah** Y	**Klasický test podiel zamietnutí** [%]	**Modifikovaný test podiel zamietnutí** [%]
10	30	8,92	7,71
30	10	2,74	6,24
30	90	8,40	5,65
90	30	2,75	5,68
50	50	5,51	5,39

Tabuľka 4.1: Porovnanie pre výbery z rozdelení $\mathcal{N}(0,1)$ a $\mathcal{R}(-1; 1)$.

- **TROJUHOLNÍKOVÉ A ROVNOMERNÉ ROZDELENIE**
  X má tzv. trojuholníkové rozdelenie na intervale $(0;2)$, ktoré vznikne ako súčet dvoch $\mathcal{R}(0;1)$ rozdelení, označme ho $\mathrm{Troj}(0;2)$ a Y má rovnomerné rozdelenie na intervale $(0;2)$. Keďže trojuholníkové rozdelenie nie je často používané, uvedieme aj jeho hustotu

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } x \in (0;1), \\ 2-x, & \text{ak } x \in (1;2), \\ 0, & \text{ak } x \notin (0;2). \end{cases}$$

  Ak sme nasimulovali väčší počet pozorovaní z trojuholníkoveho rozdelenia, tak klasický test zamietal v rozmedzí $8-10\,\%$ prípadov (viď Tabuľka 4.2) a len približne 2,5 % testov zamietlo hypotézu, ak bol väčší počet dát z rovnomerného rozdelenia. V tomto prípade je zaujímavé porovnať túto silu klasického testu so znením Tvrdenia 8, pretože vieme presne určiť $\delta_{0,1} = \frac{1}{24}$ a $\delta_{1,0} = \frac{2}{15}$. Preto v prípade, keď máme trikrát menej dát z trojuholníkového rozdelenia (teda predpokladáme $\lambda = \frac{1}{3}$), podiel zamietnutí klasickým testom by mal konvergovať k 2,60%, čo je porovnateľné zo simuláciami. V prípade $\lambda = 3$ by sme sa mali limitne dostať na hladinu 8,86 %, k čomu sme sa v prípade vyšších rozsahov priblížili. Pri rovnosti výberov by sme mali konvergovať k 5,58 %, čo sa zhoduje so simuláciami. Modifikovaný test sa správal podobne ako v predchádzajúcej simulácii a empirická hladina mala vyšší odskok od 5 %, ak prevažoval počet dát z rozdelenia s väčším rozptylom.

Rozsah X	**Rozsah** Y	**Klasický test podiel zamietnutí** [%]	**Modifikovaný test podiel zamietnutí** [%]
10	30	2,48	5,80
30	10	9,64	8,17
30	90	2,48	5,41
90	30	8,44	5,50
50	50	5,60	5,30

Tabuľka 4.2: Porovnanie pre výbery z rozdelení $\mathrm{Troj}(0;2)$ a $\mathcal{R}(0;2)$.

- **DVE ROVNOMERNÉ ROZDELENIA**
  X a Y majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0;1)$. V tomto prípade sú splnené hypotézy u oboch testov, takže bude zaujímavé porovnať ako sa správajú ich asymptotické hladiny. Klasický test dodržoval hladinu a podiel zamietnutí nikdy neprekročil hladinu 5 % (viď Tabuľka 4.3). Pri použití modifikovaného testu pri malom rozsahu dát bol podiel zamietnutí približne 7 % a táto empirická hladina sa zlepšila pri väčších rozsahoch. Tieto výsledky simulácii môžeme pripísať tomu, že pri modifikovanom teste asymptotický rozptyl testovej štatistiky len odhadujeme a v klasickom prípade je jeho predpokladaná hodnota správna, pretože dáta pochádzajú z rovnakých rozdelení.

Rozsah X	Rozsah Y	**Klasický test podiel zamietnutí** [%]	**Modifikovaný test podiel zamietnutí** [%]
10	30	4,67	7,30
30	10	4,99	7,11
30	90	4,77	5,48
90	30	4,55	5,30
50	50	4,65	5,15

Tabuľka 4.3: Porovnanie pre výbery z rozdelení $\mathcal{R}(0;1)$ a $\mathcal{R}(0;1)$.

- **DVE NORMÁLNE ROZDELENIA**
  X má normované normálne $\mathcal{N}(0,1)$ rozdelenie a Y má normálne rozdelenie s rozptylom 4. Tentokrát bol počet zamietnutí klasickým testom menší, 1,9 % resp. 1,7 % (viď Tabuľka 4.4), pri menšom počte dát z normovaného normálneho rozdelenia a výrazne, až v 14 % prípadov, klasický test zamietal, ak sme mali naopak prevahu dát z rozdelenia $\mathcal{N}(0,1)$. Modifikovaný test sa správal podobne, ako v predchádzajúcom prípade a za zmienku ešte stojí, že ani v prípade rovnosti rozsahu výberov sa relatívny počet zamietnutí pomocou klasického testu nepriblížil k 5 % na rozdiel od ostatných simulácií, čo zrejme súvisí s Trdením 8 a bude spôsobené tým, že medzi parametrami $\delta_{0,1}$ a $\delta_{1,0}$ je väčší rozdiel ako v ostatných prípadoch.

Rozsah X	Rozsah Y	**Klasický test podiel zamietnutí** [%]	**Modifikovaný test podiel zamietnutí** [%]
10	30	1,90	5,62
30	10	14,87	8,85
30	90	1,70	5,15
90	30	14,21	5,78
50	50	7,82	5,46

Tabuľka 4.4: Porovnanie pre výbery z rozdelení $\mathcal{N}(0,1)$ a $\mathcal{N}(0,16)$.

- **NORMÁLNE A STUDENTOVO ROZDELENIE**
  X má normované normálne $\mathcal{N}(0,1)$ rozdelenie a Y má t_1 rozdelenie s 1 stupňom voľnosti. Podobne ako v druhom porovnávaní klasický test zamietal menej pri menšom počte pozorovaní z $\mathcal{N}(0,1)$ rozdelenia a naopak (viď Tabuľka 4.5). Ak sme mali 90 nasimulovaných dát z normovaného normálneho rozdelenia a 30 z t_1 rozdelenia s jedným stupňom voľnosti, klasický test zamietol presne 879 z 10-tis. prípadov. Empirická hladina modifikovaného testu sa znovu odvíjala od súčtu oboch rozsahov a s vyšším číslom sa zlepšovala.

Rozsah X	Rozsah Y	Klasický test podiel zamietnutí [%]	Modifikovaný test podiel zamietnutí [%]
10	30	2,97	6,47
30	10	9,05	7,93
30	90	2,53	5,01
90	30	8,79	6,04
50	50	5,57	5,47

Tabuľka 4.5: Porovnanie pre výbery z rozdelení $\mathcal{N}(0{,}1)$ a t_1.

4.2 Porovnanie pri $\theta \neq \frac{1}{2}$

Tentokrát nasimulujeme výbery $X_1, \ldots, X_n$ a $Y_1, \ldots, Y_m$ z rozdelení so spojitými distribučnými funkciami F_X a F_Y tak, aby parameter $\theta = P(X \leq Y) \neq \frac{1}{2}$. Zvolíme rôzne tvary hustôt a budeme sledovať, koľkokrát testy hypotézu zamietnu, čo bude v tomto prípade znamenať silu testu, pretože hypotézy H_0 aj H_0^* nebudú platiť. Znovu uvedieme prehľad rozdelení so stručným komentárom a tabuľky s údajmi.

- **NORMÁLNE A ROVNOMERNÉ ROZDELENIE**
  X má $\mathcal{N}(0{,}1)$ rozdelenie a Y má rovnomerné rozdelenie na intervale $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$. Oproti prvému prípadu z predchádzajúcej časti sme len posunuli jedno z rozdelení doprava a zmenili tak parameter θ, ktorého približná hodnota je 0,58. V simuláciach, kde sme použili viac dát z normovaného normálneho rozdelenia, modifikovaný test zamietol aspoň o 8 % viac prípadov (viď Tabuľka 4.6). V opačnom prípade síce klasický test dával lepšie výsledky, ale rozdiel medzi podielom zamietnutí bol len 2 %. Pri rovnakom rozsahu dát sme zaznamenali takmer rovnaký výsledok a samozrejme počet zamietnutí vzrastal so zvyšujúcim sa rozsahom dát u oboch testov.

Rozsah X	Rozsah Y	Klasický test podiel zamietnutí [%]	Modifikovaný test podiel zamietnutí [%]
10	30	16,71	14,59
30	10	9,53	17,08
30	90	30,89	24,78
90	30	26,76	36,97
50	50	32,10	31,82

Tabuľka 4.6: Porovnanie pre výbery z rozdelení $\mathcal{N}(0{,}1)$ a $\mathcal{R}\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$

- **TROJUHOLNÍKOVÉ A ROVNOMERNÉ ROZDELENIE**
  X má trojuholníkové rozdelenie $\mathrm{Troj}(0; 2)$ a Y znovu posunieme oproti simuláciám z predošlej časti, tentokrát o $\frac{1}{4}$ doľava, a preto má rovnomerné rozdelenie na intervale $\left(-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$. Parameter $\theta = \frac{289}{768} \doteq 0{,}38$. Pri tejto dvojici zase pozorujeme, že modifikovaný test zamietal až o 10 % viac prípadov, ak počtom prevažovali dáta z rozdelenia s väčšou mierou variability, čo bolo tentokrát rovnomerné rozdelenie (viď Tabuľka 4.7). V opačnom prípade zase

klasický test zamietol o viac ako 7 % prípadov viac, ak sme mali 90 pozorovaní z trojuholníkoveho rozdelenia a 30 z rovnomerného. Pri rovnakom rozsahu dát sme napozorovali podobné výsledky u oboch testov.

Rozsah X	**Rozsah** Y	**Klasický test podiel zamietnutí** [%]	**Modifikovaný test podiel zamietnutí** [%]
10	30	18,86	28,75
30	10	25,84	22,72
30	90	53,60	64,48
90	30	53,27	45,89
50	50	57,87	57,51

Tabuľka 4.7: Porovnanie pre výbery z rozdelení Troj(0;2) a $\mathcal{R}\left(-\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$.

- **DVE ROVNOMERNÉ ROZDELENIA**
  X má rovnomerné $\mathcal{R}(0;1)$ rozdelenie a Y má rovnomerné rozdelenie posunuté o $\frac{1}{8}$ doprava, takže tentokrát je splnený predpoklad modelu posunu, a teda parametre v asymptotickom rozptyle testovej štatistiky vieme určiť presne, preto bude zaujímavé sledovať, či je sila klasického testu vyššia. Parameter $\theta = \frac{79}{128} \doteq 0{,}62$. Prekvapujúco bol v každom prípade vyšší počet zamietnutí na strane modifikovaného testu (viď Tabuľka 4.8). Dôvod môže byť aj ten, že klasický test v modele posunu dodržuje viac hladinu, ako sme sa mohli presvedčiť v predošlej časti, a preto má tendenciu menejkrát zamietať hypotézu.

Rozsah X	**Rozsah** Y	**Klasický test podiel zamietnutí** [%]	**Modifikovaný test podiel zamietnutí** [%]
10	30	19,87	22,82
30	10	20,39	23,48
30	90	49,69	51,61
90	30	48,91	50,86
50	50	54,14	55,35

Tabuľka 4.8: Porovnanie pre výbery z rozdelení $\mathcal{R}(0;1)$ a $\mathcal{R}\left(\frac{1}{8}; \frac{9}{8}\right)$

- **DVE EXPONENCIÁLNE ROZDELENIA**
  X má exponenciálne rozdelenie Exp(1) a Y má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 2, Exp(2). Parameter θ je v tomto prípade rovný $\frac{2}{3}$. Počet zamietnutí neplatnej hypotézy pomocou oboch testov je porovnateľný (viď Tabuľka 4.9). Samozrejme počet zamietnutí závisí od súčtu rozsahu výberov, ako je bežné u všetkých štatistických testov, väčší počet dát nám dovolí častejšie zamietnúť hypotézu, ak neplatí. V podiele zamietnutí sa taktiež prejavil vplyv väčšej variability rovnakým spôsobom ako v predošlých troch prípadoch a modifikovaný test bol silnejší aspoň o 4 % pri väčšom počte dát z rozdelenia s vyšším rozptylom. Pri opačnej nerovnosti ale klasický test nezaznamelnal výraznejšiu prevahu v počte zamietnutí.

Rozsah X	**Rozsah** Y	**Klasický test podiel zamietnutí** [%]	**Modifikovaný test podiel zamietnutí** [%]
10	30	35,69	43,61
30	10	36,99	37,25
30	90	80,85	84,85
90	30	78,80	76,63
50	50	83,44	83,92

Tabuľka 4.9: Porovnanie pre výbery z rozdelení Exp(1) a Exp(2)

- **EXPONENCIÁLNE A ROVNOMERNÉ ROZDELENIE**
  X má rozdelenie Exp(1) a Y má rovnomerné rozdelenie na intervale $(0;2)$. Parameter $\theta = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e^2}\right) \doteq 0{,}567$. Tentokrát je parameter, ktorý sleduje modifikovaný test najbližšie polovici, takže preto máme oveľa menej zamietnutí ako v ostatných prípadoch (viď Tabuľka 4.10) a celkom výrazne znovu vidíme, že modifikovaný test zamieta viac ako klasický, ak použijeme viac dát z rozdelenia s väčšou mierou variability . Táto simulácia potvrdzuje podobne ako všetky simulácie z predchádzajúcej časti to, že klasický test není testom strednej hodnoty, ako sa niekde v literatúre Wilcoxonov test označuje, pretože stredné hodnoty výberov sa rovnajú a vidíme, že aj klasický test zamieta hypotézu častejšie ako v 5 % prípadov.

Rozsah X	**Rozsah** Y	**Klasický test podiel zamietnutí** [%]	**Modifikovaný test podiel zamietnutí** [%]
10	30	12,61	12,66
30	10	8,47	13,11
30	90	21,86	19,03
90	30	18,61	23,41
50	50	21,96	21,58

Tabuľka 4.10: Porovnanie pre výbery z rozdelení Exp(1) a $\mathcal{R}(0;2)$

4.3 Zhrnutie výsledkov

Pomocou simulácií sa podarilo jasne ukázať, že klasický Wilcoxonov test závisí dosť výrazne na tom, či dáta pochádzajú z modelu posunutia. Ak to neplatí, tak tento test predovšetkým pri menšom počte získaných dát a rozdiele ich rozsahu zamietal platnú hypotézu výrazne menej alebo viac ako v 5 % prípadov, čo je bežná hladina pri testovaní.

Na počet zamietnutí pomocou klasického testu mali dosť výrazny vplyv parametre $\delta_{0,1}$ a $\delta_{1,0}$, čo súvisí s Tvrdením 8. Taktiež pri porovnávaní sily oboch testov hrala výraznú úlohu miera variability u jednotlivých rozdelení. V každom prípade totiž modifikovaný test zamietol viackrát hypotézu, ak sme mali viac pozorovaní z výberu s väčšou variabilitou. Aj preto pri použití modifikovaného Wilcoxonového testu v prípade, keď nemáme prístup k veľkému počtu dát a pozorujeme vysoký rozdiel v rozpätí oboch výberov, musíme dávať pozor na výsledok, ktorý dosiahneme pomocou testu. V takomto prípade môže mať modifikovaný test zvýšenú tendenciu zamietať a hladina testu je väčšinou vyššia ako si zvolíme.

Ďalej sa ukázalo, že klasický test v prípade modelu posunu dodržuje hladinu oveľa lepšie ako modifikovaný test už aj pri malom rozsahu výberov, pretože modifikovaný test dopláca na to, že parametre $\delta_{0,1}$ a $\delta_{1,0}$ musíme odhadovať z dát. Trošku prekvapujúce bolo, že neplatnú hypotézu klasický test ale nezamietal častejšie, čo môže byť spôsobené práve faktom, že modifikovaný test nie je vôbec konzervatívny a pri malých rozsahoch zamietal často výraznejší počet platných hypotéz.

Simulácie samozrejme ukazujú aj to, že Wilcoxonov test neporovnáva stredné hodnoty alebo mediány výberov, o čom sme sa presvedčili aj pri jeho odvodzovaní, ale na túto skutočnosť sa častokrát zabúda, preto ju chceme zdôrazniť.

Záver

Táto bakalárska práca sa zaoberala dvojvýberovým Wilcoxonovým štatistickým testom, odvodením jeho klasickej, používanej, verzie v takzvanom modele posunutia. V mnohých prípadoch môžeme z nameraných dát zistiť, že tento model splnený nie je alebo len z povahy úlohy jasne vyplýva jeho porušenie, napríklad pri porovnávaní percentuálneho výskytu choroby u oboch pohlaví. Preto sa práca venovala modifikácii klasickej verzie a odvodeniu testu len pri predpoklade spojitosti distribučných funkcií. Taktiež pri tomto procese ukázala, aký parameter náhodných výberov takto modifikovaný Wilcoxonov test sleduje.

Po formulácii hypotézy a alternatívy sa práca zaoberala odvodením asymptotickej normality a určením kritického oboru, pri čom bolo potrebné využiť poznatky o prejekciách náhodných veličín čerpané z knihy Asymptotic Statistics, ktorej autorom je A. W. van der Vaart. Niektoré dôkazy boli v práci podrobnejšie rozpracované oproti publikácii, z ktorej práca čerpala. Hlavným prínosom teoretickej časti bola však následná aplikácia týchto poznatkov na odvodenie momentov testových štatistík, ako aj asymptotickej normality, z ktorej sa odvodili asymptotické verzie Wilcoxonovho testu.

Nakoniec práca pomocou simulácií sledovala, ako sa oba testy správajú, zaoberala sa ich hladinou a silou pre rozdelenia so spojitými distribučnými funkciami. Pre klasický test sú známe korekcie na spojitosť, ktoré sa používajú v softvéroch, pretože v dátach vznikajú kvôli zaokrúhľovaniu zhody. Práve to by mohlo byť námetom pre ďalšie šťúdium takejto úpravy pri modifikovanom teste. Taktiež by bolo možné sledovať, aký rozsah výberov je potrebný k uspokojivému priblíženiu sa hladine testu. Ukázalo sa totiž, že pri menších rozsahoch modifikovaný test niekedy zamietol vyšší počet platných hypotéz, keďže hladinu dodržiava len asymptoticky.

Zoznam použitej literatúry

ANDĚL, J. (2007). *Statistické metody.* Čtvrté upravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-003-8.

LACHOUT, P. (1998). *Teorie pravděpodobnosti.* 1. vydání. Karolinum, Praha. ISBN 80-7184-730-5.

VAN DER VAART, A. W. (2007). *Asymptotic Statistics.* 8th printing. Cambridge University Press, New York. ISBN 978-0-521-78450-4.