Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zavedení rozšířené reálné osy
Defining of the extended real number line

David Vodrážka

Vedoucí práce:	Mgr. Derek Pilous, Ph.D.
Studijní program:	Specializace v pedagogice
Studijní obor:	Matematika – anglický jazyk

2015

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval pod vedením vedoucího práce Mgr. Derka Pilouse, Ph.D. samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla použita k získání jiného nebo stejného titulu.

V .... dne ....

....
podpis

Tímto bych chtěl poděkovat Mgr. Derkovi Pilousovi, Ph.D. za pomoc při psaní této práce a za cenné rady.

Především bych chtěl poděkovat svým rodičům, bez kterých bych se nikdy nedostal tak daleko, abych mohl tuto práci napsat.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své přítelkyni Kateřině Tylové za podporu nejenom při psaní této práce.

ANOTACE
Práce postupně zavádí axiomaticky a konstruktivně přirozená čísla, celá čísla, racionální čísla a reálná čísla. Porovnává tato dvě zavedení jak na množin, tak na operací na nich. Zabývá se všemi důležitými vlastnostmi těchto množin – operacemi na nich, jejich uspořádáním a jejich velikostí. Ve druhé kapitole se zabývá rozšířenou osou reálných čísel, kterou zavádí výpisem výsledků operací s nekonečmi, poté zkoumá platnost axiomů reálných čísel na jejich rozšíření a poté hledá axiomy, které platí na rozšířené ose reálných čísel.

KLÍČOVÁ SLOVA
přirozená čísla, reálná čísla, rozšířená reálná osa, zavedení číselných oborů, axiomy, konstrukce

ANOTATION
This text defines through axioms and formal construction natural numbers, integers, rational numbers and real numbers. These approaches to defining are compared. Both approaches are used to define sets and operations on these sets. Various properties of these sets are inquired upon – their operations, ordering and size. The second chapter deals with extended real number line, which is presented through explicit determination of operations with infinities, then searches for a set of axioms which would define this structure.

KEYWORDS
natural numbers, real numbers, extended real numbers, defining fields, axioms, construction

Obsah

Úvod

V současné matematické literatuře převládá axiomatické zavedení reálných čísel. Nepodařilo se mi však nalézt literaturu, kde by byla rozšířená osa reálných čísel definována jinak nežli výpisem operací s nekonečny, tedy konstruktivně. Tuto práci jsem se rozhodl napsat, abych mohl lépe porozumět tomu, jak je možné rozšířenou osu reálných čísel definovat a abych se pokusil nalézt axiomy, kterými by mohla být definována.

V první kapitole bude čtenář seznámen s postupnou konstrukcí nejprve přirozených, poté celých, racionálních a reálných čísel.

Nejprve zkonstruujeme přirozená čísla množinovým modelem a poté si představíme Peanovy axiomy a ukážeme, že množinový model odpovídá těmto axiomům. Dále zavedeme relace rovnosti a uspořádání a operace sčítání a násobení. Ukážeme, že přirozená čísla jsou úplně uspořádaná a také dobře uspořádaná.

Přirozená čísla následně rozšíříme na čísla celá a spolu s tím také rozšíříme operaci sčítání o opačné prvky a zavedeme operaci odčítání. Předvedeme, že celá čísla jsou také úplně uspořádaná, ale již nejsou dobře uspořádaná. Krátce také zmíníme historii objevování celých čísel.

Zavedeme racionální čísla a rozšíříme operaci násobení o inverzní prvky a zavedeme operaci dělení. Objasníme, jak se provádí algebraické operace na zlomcích a ukážeme, že i racionální čísla jsou úplně uspořádaná.

Vysvětlíme, co jsou to algebraické struktury a jakou strukturou jsou přirozená, celá a racionální čísla. Struktury, které zde uvedeme jsou grupa, těleso a uspořádané těleso, jehož uspořádání budeme definovat jinak než u přirozených čísel, abychom si ulehčili později práci.

Vytvoříme takový aparát, abychom byli schopni sestrojit reálná čísla. Předvedeme motivační úlohu, na které ukážeme, proč nám nestačí čísla racionální a poté sestrojíme reálná čísla konstruktivně pomocí cauchyovských posloupností a také je zavedeme axiomaticky.

Ve druhé kapitole se již zabýváme rozšířenými reálnými čísly. Nejprve utvoříme tabulky pro sčítání a pro násobení, ukážeme si, že jsou ekvivalentně zavedena i v literatuře a poté se pokusíme najít předpisy, které by rozšířená reálná čísla definovala. Na závěr se zamyslíme nad tím, jakou algebraickou strukturu tvoří.

1. Zavedení reálných čísel

Předtím, než se začneme zabývat nekonečny a rozšířenou osou reálných čísel, musíme zavést čísla reálná. Reálná čísla jsou nástavbou čísel racionálních, která vychází z čísel celých a ta z čísel přirozených. Nestačí zavést pouze množiny čísel, ale musíme také definovat jednotlivé vztahy a operace mezi prvky těchto množin.

Při zavádění množin a operací se musíme zamyslet nad tím, jakým způsobem je chceme zavést. V moderní matematice převládá zavedení *axiomatické*, ale historicky předcházelo *konstruktivní*.

Konstruktivní zavedení je vybudování modelu. Tento model konstruujeme tak, že zavedeme, co jsou základní kameny a co je operace, kterou z těchto základních kamenů daný model vybudujeme. Tato operace musí být proveditelná na řečených základních kamenech. Tímto popíšeme algoritmus, který má počáteční bod (základní kameny) a jednotlivé kroky (přiřazená operace) a tím jsme schopni zkonstruovat celý model.

U axiomatického zavedení řekneme, že všechno, co splňuje dané podmínky – axiomy – nazýváme danou strukturou. Hlavní výhodou axiomatického zavedení je, že nám udává všechny podmínky, které můžeme používat při dokazování nebo zavádění nových tvrzení na dané struktuře. Ve zkonstruovaném modelu může nastat situace, kdy model splňuje něco, co nesplňuje obecně každý model, který splňuje axiomy, což může vést k újmě na obecnosti.

Rozdíl těchto dvou přístupů spočívá tedy v tom, že při konstrukci vycházíme z počáteční znalosti a na ní stavíme nějaký určitý model. U axiomatického zadání řekneme, co musí model splňovat a potom každý model, který naše podmínky splňuje, je danou strukturou. Při konstrukci je naším výsledkem jeden jasný model, což je důležité například při uchopování nových konceptů, protože si tento model můžeme nějak představit a tím snáze pochopit, jak funguje, zatímco při axiomatickém zavedení známe pouze podmínky, které jsou splněny.

V tomto textu budeme provádět zavedení oběma způsoby, abychom jasně demonstrovali rozdíl mezi těmito přístupy a zároveň rozšířili vhled čtenáře do této problematiky. Konstruktivní zavedení budeme vždy provádět formálně.

Další důležitý přístup, který je zde potřeba zmínit, je *intuicionismus*. Tento směr neuznává axiomatické zavedení, pouze konstruktivní. Pokud nemáme jasnou konstrukci, nemůžeme prohlásit, že daná struktura existuje. Intuicionisté neuznávají formální zavedení. Zakladatelem tohoto směru je L. E. J. Brouwer. Německý matematik L. Kronecker kdysi prohlásil *„Bůh stvořil přirozená čísla, všechno ostatní je lidské dílo."* (Bell, 1986, str. 477). Tímto řekl, že lidé mají vrozenou představu o tom, co to jsou přirozená čísla a jsou tedy schopni z této představy vycházet a konstruovat složitější struktury. Kronecker žil v době před založením intuicionismu, ale jeho tvrzení je základem tohoto směru. Bez jakýchkoli důkazů se berou přirozená čísla jako zřejmá a vyvozují se z nich další závěry.

Pokud není řečeno jinak, jsou axiomatické definice v této kapitole převzaty z učebnice *Základy algebry* od Vladimíra Kořínka vydané v roce 1956.

1.1 Přirozená čísla

Přirozená čísla jsou velice intuitivní a ač jen málokdo zná formální definici, téměř každý s nimi umí pracovat: sčítat, odčítat, násobit, dělit. V algebře a teorii množin jsou většinou definována s nulou, $0, 1, 2, 3, \ldots$, v matematické analýze bez nuly $1, 2, 3, 4, \ldots$. V algebře se zařazuje nula do přirozených čísel proto, že potom přirozená čísla obsahují neutrální prvek k operaci sčítání. Historicky přirozená čísla nulu neobsahovala, protože nebyla potřeba kvantifikovat nepřítomnost daného prvku.

V této práci budeme používat první verzi, s nulou. Přirozená čísla nebyla dlouhou dobu řádně definována. Až roku 1889 vydal Guiseppe Peano knihu *Arithmetices principia: nova methodo exposita*, kde zadefinoval takzvanou *Peanovu aritmetiku* (Kennedy, 1980). Axiomy, kterými se definují přirozená čísla, jsou odvozena z axiomů pro Peanovu aritmetiku a proto se jim říká *Peanovy axiomy.*

To, že nebyla přirozená čísla jasně definována až do roku 1889 poukazuje na to, že přirozená čísla jsou pro lidi skutečně přirozená a proto nemají potřebu je nikterak kvantifikovat.

Přirozená čísla se značí $\mathbb{N}$, nyní je zavedeme konstruktivně, poté axiomaticky a porovnáme, zda vytvořená množina splňuje axiomy.

1.1.1 Konstrukce

Konstrukce, kterou zde provedeme je formální, založená na aparátu teorie množin. Samozřejmě se nejedná o jedinou možnou konstrukci, tuto konstrukci volíme proto, že je nejrozšířenější v literatuře a vhodná také tím, že počet prvků množiny je roven číslu, které této množině přiřazujeme, jak uvidíme z následujícího postupu.

K této konstrukci používáme levou a pravou množinovou závorku, čárku a prázdnou množinu ($,,\{'' ,,\}'' ,,\ ,'' ,,\emptyset''$). Prázdná množina je základním kamenem a proveditelná operace je uzavření všech předchozích množin do závorek a vložení čárek.

Definice 1. Řekneme, že prázdná množina je 0, $0 := \emptyset$, což je první prvek. Každý další prvek je množina obsahující všechny předcházející prvky. Množina obsahující n prvků odpovídá číslu n (Holmes, 1998).

$$0 := \emptyset$$

$$1 := \{\emptyset\}$$

$$2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$4 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

$$\vdots$$

Což tedy můžeme přepsat do přehlednějšího zápisu:

$$0 := \emptyset$$

$$1 := \{0\}$$

$$2 := \{0, 1\}$$

$$3 := \{0, 1, 2\}$$

$$4 := \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\vdots$$

Tímto postupem jsme schopni ke každému číslu sestrojit následující číslo. Zkonstruovali jsme potenciálně nekonečnou posloupnost, jejíž prvky nazveme přirozenými čísly.

Ještě než si zavedeme přirozená čísla axiomaticky, musíme definovat pojem relace a rovnost, kterých je využíváno v Peanových axiomech.

1.1.2 Relace

Relace je vztah mezi dvěma prvky. Například můžeme říci, že Tomáš a Marek jsou kamarádi, je tedy mezi nimi vztah přátelství. Toto je příklad nematematické relace. Nás samozřejmě budou zajímat matematické relace.

Relace na množině M je formálně podmnožinou kartézského součinu $M \times M$. Tato podmnožina obsahuje všechny uspořádané dvojice, které jsou v dané relaci.

To, že dva prvky a, b jsou v relaci R budeme značit zápisem aRb, čteme prvek a je v relaci R s prvkem b. Povšimněme si, že záleží na pořadí prvků a, b.

Rovnost

Definice 2. Nechť a, b jsou dvě čísla, potom mohou nastat dva případy. Buďto a reprezentuje stejné číslo jako b, nebo reprezentují čísla různá. První případ značíme:

$$a = b$$

Tomuto vztahu říkáme *rovnost*. V druhém případě řekneme, že a se nerovná b a značíme tento fakt:

$$a \neq b$$

Rovnost je definována čtyřmi základními vlastnostmi:

$\mathbf{R}_0$ Pro každá dvě čísla a, b platí právě jeden z těchto vztahů:

$$a = b, \qquad a \neq b$$

$\mathbf{R}_1$ **Reflexivita** Pro každé číslo a platí:

$$a = a$$

R_2 Symetrie Platí-li $a = b$ pak platí také $b = a$, tedy:

$$a = b \Rightarrow b = a$$

R_3 Transitivita Platí-li pro tři čísla a, b, c rovnosti $a = b, b = c$, pak platí také rovnost $a = c$, čili:

$$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

Axiom tranzitivity R_3 nám umožnuje zapsat konjunkci $a = b \wedge b = c$ zkráceným zápisem $a = b = c$.

1.1.3 Axiomatické zavedení

Nyní již zavedeme Peanovy axiomy. Na rozdíl od konstrukce není jasně řečeno, co jsou jednotlivé prvky, pouze říkáme, co musí splňovat. Axiomy, které si ukážeme, jsou poněkud odlišné od původních axiomů, které vyslovil Peano, protože od roku 1889 byly pozměněny. Největší rozdíl od původních axiomů je v prvním axiomu, kde začínáme nulou, Peano začínal jednotkou.

Definice 3. Zavedeme množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$ a zobrazení „mít následníka”, které zobrazuje z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a značí se $S(n)$. Pak každá množina splňující následující axiomy je množinou přirozených čísel (Hazewinkel 2002).

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x) \in \mathbb{N}$
3. $x \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x) \neq 0$
4. $x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$
5. $0 \in M \wedge \forall x(x \in M \Rightarrow S(x) \in M) \Rightarrow N \subseteq M$

1.1.4 Porovnání konstrukce a axiomů přirozených čísel

Máme tedy model přirozených čísel, který jsme zkonstruovali pomocí množin a axiomy, které musí množina přirozených čísel splňovat. Nyní ověříme, zda model splňuje podmínky, aby jsme jej mohli skutečně nazývat přirozenými čísly.

1. Nula náleží do $\mathbb{N}$, což je zkonstruováno prázdnou množinou. To, zda prázdnou množinu považujeme za součást přirozených čísel, je rozdíl mezi tím, jak přirozená čísla definujeme v teorii množin a v matematické analýze.V tomto textu považujeme prázdnou množinu (0) za součást $\mathbb{N}$. V opačném případě by do $\mathbb{N}$ patřila až jednoprvková množina $\{\emptyset\}$ a v Peanových axiomech by místo 0 byla 1.

2. Zobrazení $S(x)$ je v našem množinovém modelu sjednocení x a $\{x\}$, tedy

   $$S(x) = x \cup \{x\}$$

   Tuto operaci můžeme provést s libovolnou množinou z našeho modelu a vždy vznikne opět množina, která náleží do našeho množinového modelu.

3. Sjednocením dvou množin, z nichž alespoň jedna je neprázdná, nám nikdy nemůže vzniknout prázdná množina a třetí Peanův axiom tedy také platí na našem množinovém modelu.

4. Pokud se množina $x \cup \{x\}$ rovná množině $y \cup \{y\}$, pak je zjevné, že počet prvků x je stejný jako y, musí proto být stejné x i y. Čtvrtý axiom je splněn.

5. Každá množina, která obsahuje prázdnou množinu a všechny její následníky musí mít přirozená čísla jako podmnožinu. Pokud bude tato množina obsahovat ještě nějaké další prvky, pak bude $\mathbb{N}$ její vlastní podmnožinou. V opačném případě budou tyto množiny identické, což ale znamená, že jsou si obě vzájemně podmnožinou.

Náš model, který byl vytvořen z prázdné množiny, skutečně splňuje všechny potřebné axiomy a odpovídá tedy přirozeným číslům zavedeným axiomaticky.

1.2 Sčítání

Sčítání je binární operace, zobrazení z kartézského součinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, tedy uspořádané dvojici $(a, b); a, b \in \mathbb{N}$ přiřazujeme jedno číslo $c \in \mathbb{N}$.

1.2.1 Konstrukce

Sčítání zkonstruujeme pomocí algoritmu. Nejprve si však zavedeme nové zobrazení. Ze 4. Peanova axiomu plyne, že zobrazení S je prosté, proto k němu existuje inverzní zobrazení. Toto zobrazení pojmenujeme *předchůdce* (predecessor) a budeme jej značit P.

Nyní sestavíme algoritmus, který bude definovat sčítání na přirozených číslech. Vstupem tohoto algoritmu bude uspořádaná dvojice přirozených čísel (a, b) a výstupem bude přirozené číslo c.

1. Pokud $b \neq 0$, pak algoritmus opakujeme se vstupem $(S(a), P(b))$.

2. Pokud $b = 0$, pak je výstupem a.

Tento algoritmus převede vstup $a + b$, neboli uspořádanou dvojici (a, b), na výstup c, jinými slovy $a + b \to c$. Prohlásíme, že výstup algoritmu je roven součtu vstupních prvků v daném pořadí.

Musíme ověřit, že tento algoritmus vždy skončí a že bude mít vždy výstup. Algoritmus převede vstupní dvojici na jinou, kde na pozici prvního prvku, tedy a, je buď a, nebo nějaký následník tohoto prvku. Výstup bude mít algoritmus vždy a vždy to bude přirozené číslo.

Každé přirozené číslo je buď 0 nebo nějaký následník 0, musí proto platit, že pomocí zobrazení P se dostaneme v konečném kroku do 0 a algoritmus skončí.

1.2.2 Axiomatické zavedení

V Peanově aritmetice je sčítání zavedeno dvěma axiomy:

$$x + 0 = x$$
$$x + S(y) = S(x + y)$$

Toto zavedení je na pomezí zavedení axiomatického a konstruktivního. Máme dány dvě podmínky, které musí být splněny, ale zároveň dávají i návod na konstruktivní přiřazení součtu sčítanců. Díky této vlastnosti nám stačí ověřit, že výše uvedený konstruktivní algoritmus splňuje obě podmínky a tím již bude dokázáno, že obě tyto varianty definují sčítání stejně.

První axiom algoritmus zjevně splňuje, při vstupu $(x, 0)$ dostaneme okamžitě výstup x. Při vstupu $(x, S(y))$ algoritmus převede tuto uspořádanou dvojici, po y krocích, na dvojici $(x+y, S(0))$, kterou pak v dalším kroce převede na $(S(x+y), 0)$, z čehož již dostaneme výsledek $S(x + y)$.

Důkaz. Indukcí podle y, indukční předpoklad: $x + S(y) = S(x + y)$.
První krok: $y = 0 : x + S(0) = S(x) + 0 = S(x + 0)$.
$y \to S(y) : x + S(S(y)) = S(x) + S(y) = S(S(x) + y) = S(x + S(y))$, první a poslední rovnost vycházejí z algoritmu a prostřední z indukčního předpokladu. $\square$

Došli jsme k závěru, že algoritmus provádí stejné sčítání jako axiomy sčítání v Peanovské aritmetice.

1.2.3 Obecné axiomy sčítání

Čistě axiomatické, nekonstruktivní zavedení sčítání se v dostupné literatuře provádí až na grupách, tedy strukturách, kde ke každému prvku existuje prvek opačný (tedy takový, jehož součet s původním prvkem je nulový). To v $\mathbb{N}$ zjevně není splněno, k žádnému přirozenému číslu kromě 0 neexistuje přirozené číslo takové, aby jejich součet byl nulový. Podrobnější analýzou těchto axiomů se budeme zabývat při zavádění sčítání na celých číslech (viz. 1.7.1). V tuto chvíli budeme jen zkoumat, nakolik jsou tyto axiomy platné, resp. použitelné pro sčítání na přirozených číslech. Nejprve si axiomy uvedeme:

Definice 4.

A$_0$ **Definice sčítání** K libovolným dvěma číslům a, b je jednoznačně určeno číslo třetí, kterému říkáme jejich *součet*. Toto číslo budeme značit $a + b$ a čísla a, b budeme nazývat *sčítance*.

A$_1$ Nechť platí $a = b$. Pokud přičteme k číslu a i b libovolné číslo c, dostaneme v obou případech stejný součet, tedy:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c$$

A$_2$ **Asociativita sčítání** Nechť a, b, c jsou tři libovolná čísla. Přičteme-li k součtu $a + b$ číslo c, dostaneme stejný součet, jako když přičteme k číslu a součet $b + c$, tedy:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$\mathbf{A}_3$ Komutativita sčítání Nechť a, b jsou dvě libovolná čísla. Přičteme-li k číslu a číslo b, dostaneme tentýž součet, jako když přičteme k číslu b číslo a. Pro každá dvě čísla tedy platí:

$$a + b = b + a$$

$\mathbf{A}_4$ Existence nulového prvku Existuje alespoň jedno číslo h takové, že pro každé číslo a platí:

$$a + h = a$$

$\mathbf{A}_5$ Existence opačného čísla Ke každému číslu a existuje *číslo opačné* $-a$, pro které platí:

$$a + (-a) = h$$

Přirozená čísla nemohou tyto axiomy splňovat, protože neobsahují opačné prvky, pro které by platilo:

$$a \in \mathbb{N}, a \neq 0 : a + (-a) = 0$$

Proto zavádíme celá čísla, která již opačné prvky obsahují. Sčítání se takto axiomaticky v literatuře zavádí až na celých číslech, toto zavedení je zde uvedeno, abychom ukázali, že axiomatické zavedení, jak se uvádí v literatuře, není možné na přirozených číslech použít.

Ukážeme, že sčítání na přirozených číslech, tak jak jsme jej zavedli (ať algoritmicky nebo axiomaticky, neboť jsme ukázali ekvivalenci), splňuje všechny axiomy které může, tedy kromě $\mathbf{A}_5$. Splnění prvních dvou axiomů je triviální, existence nulového prvku je přímo první axiom Peanovy aritmetiky pro sčítání, jak je uvedena 1.2.2. Zabývejme se tedy asociativitou a komutativitou. Následující důkazy jsou převzaty ze studentského textu (Pelc, 2008). Vzhledem ke kontextu předpokládáme, že všechny použité proměné jsou libovolné prvky $\mathbb{N}$ a nebudeme tuto skutečnost v jednotlivých tvrzeních dál uvádět.
Nejprve si dokážeme pomocné lemma.

Lemma 1.

$$S(x) + y = S(x + y)$$

Toto lemma je zpravidla dokazováno z Peanových axiomů uvedených v Definici 3. Pro úplnost si tento důkaz uvedeme.

Důkaz. Indukcí podle y:
Složíme dvě rovnosti:

$$\begin{aligned} S(x) + 0 &= S(x) \\ S(x) &= S(x + 0) \\ S(x) + 0 &= S(x + 0) \end{aligned}$$

Indukční krok. Máme:

$$\begin{aligned} S(x) + S(y) &= S(S(x) + y) \\ S(S(x + y)) &= S(x + S(y)) \end{aligned}$$

A navíc platí:

$$S(x) + y = S(x + y) \Rightarrow S(S(x) + y) = S(S(x + y))$$

Nyní složíme výše uvedené rovnosti a implikaci a dostaneme:

$$S(x) + y = S(x + y) \Rightarrow S(x) + S(y) = S(x + S(y))$$

což je to, co potřebujeme pro indukční krok. $\square$

Jak vidíme, tento důkaz je nápadně podobný důkazu ekvivalence algoritmického zavedení sčítání s Peanovou aritmetikou. Skutečně, tato ekvivalence nám umožňuje důkaz dramaticky zjednodušit.

Důkaz. Jeden krok algoritmu sčítání převede dvojici $(x, S(y))$ na $(S(x), y)$ a tedy nutně

$$x + S(y) = S(x) + y.$$

Protože se levá strana podle druhého axiomu z Peanovy aritmetiky rovná $S(x+y)$, rovná se tomuto výrazu i strana pravá. $\square$

Tvrzení 1.

$$x + 0 = 0 + x$$

Důkaz. Dokazujem indukcí podle x. Počátek indukce: tvrzení $0 + 0 = 0 + 0$ platí triviálně, neboť obě strany rovnosti jsou identické.
Indukční krok:

$$\begin{aligned} S(x) + 0 &= S(x) \\ &= S(x + 0) \\ &= S(0 + x) \\ &= 0 + S(x) \end{aligned}$$

$S(x) + 0 = S(0 + x)$ platí, protože z Peanových axiomů platí:

$$(x \neq 0 \Rightarrow \exists y : x = S(y)) \Rightarrow (S(x) \neq 0 \Rightarrow \exists y : S(x) = S(y))$$

a tedy

$$x + 0 = 0 + x \Rightarrow S(x + 0) = S(0 + x).$$

Odtud již dostaneme

$$x + 0 = 0 + x \Rightarrow S(x) + 0 = 0 + S(x),$$

což potřebujeme. $\square$

Nyní máme již dostatečný aparát k tomu, abychom dokázali, že sčítání je komutativní.

Tvrzení 2. Komutativita sčítání:

$$x + y = y + x$$

Důkaz. Počátek indukce. $x + 0 = 0 + x$ jsme již dokázali.
Indukční krok:

$$\begin{aligned} x + S(y) &= S(x + y) \\ &= S(y + x) \\ &= S(y) + x \end{aligned}$$

Rovnost $x + S(y) = S(y + x)$ plyne z $x + y = y + x \Rightarrow S(x + y) = S(y + x)$ a odsud již plyne

$$x + y = y + x \Rightarrow x + S(y) = S(y) + x.$$

□

Tvrzení 3. Asociativita sčítání:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Důkaz. Indukcí podle z:

Počátek indukce. Složíme dvě rovnosti:

$$\begin{aligned} (x + y) + 0 &= x + y \\ &= x + (y + 0) \end{aligned}$$

Indukční krok.

$$\begin{aligned} (x + y) + S(z) &= S((x + y) + z) \\ &= S(x + (y + z)) \\ &= x + S(y + z) \\ &= x + (y + S(z)) \end{aligned}$$

Rovnost $(x + y) + S(z) = S(x + (y + z))$ opět plyne z

$$((x + y) + z = x + (y + z)) \Rightarrow (S((x + y) + z) = S(x + (y + z)))$$

Odsud již

$$((x + y) + z = x + (y + z)) \Rightarrow ((x + y) + S(z) = x + (y + S(z))).$$

□

Dokázali jsme tedy, že naše algoritmické i Peanovo axiomatické sčítání splňuje kromě existence opačného prvku všechny ostatní axiomy obecného sčítání. Opačné tvrzení ale neplatí, bez axiomu o existenci opačných prvků nedefinují ostatní axiomy jednoznačně operaci sčítání podle našeho zavedení.

Dokážeme předchozí tvrzení příkladem. Definujme $x \oplus y := \max\{x, y\}$. Operace $\oplus$ je zjevně komutativní i asociativní a má i nulový prvek (0). Splňuje tedy axiomy $\mathbf{A}_0$ – $\mathbf{A}_4$, přesto je zjevně odlišná od námi zavedeného sčítání ($1 + 1 = 2 \neq 1 = 1 \oplus 1$).

1.3 Násobení

Další základní aritmetickou operací je násobení. Budeme postupovat stejně jako u sčítání, nejprve jej zavedeme konstruktivně algoritmem, dokážeme ekvivalenci s axiomy Peanovy aritmetiky a nakonec budeme zkoumat nekonstruktivní axiomatické zavedení.

1.3.1 Konstruktivní zavedení

Vytvoříme algoritmus obdobně jako u sčítání. Vstupem bude tentokrát uspořádaná trojice $(a, b, 0)$ a výstupem bude přirozené číslo c.

1. Pokud $b \neq 0$, pak trojici (a, b, c) převedeme na $(a, P(b), c + a)$.
2. Pokud $b = 0$, pak výstupem je c.

Algoritmus tedy převádí trojici $(a, b, 0)$ na výstup, kterým je číslo c. Prohlásíme, že c je výsledkem násobení $a \cdot b$.

1.3.2 Axiomatické zavedení

V Peanových aritmetice je násobení zavedeno dvěma axiomy a operací sčítání, kterou jsme již zavedli.

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \\ x \cdot S(y) &= (x \cdot y) + x \end{aligned}$$

Stejně jako u sčítání nám tyto axiomy dávají jednoznačný návod, jak vybudovat operaci násobení. Ukážeme, že algoritmus násobení splňuje oba axiomy:

1. Vstupem pro $x \cdot 0$ je uspořádaná trojice $(x, 0, 0)$, ze které v prvním kroku dostaneme výsledek 0.
2. Vstupem pro $x \cdot S(y)$ je $(x, S(y), 0)$, po prvním kroku získáme (x, y, x), což je podle toho jak jsme vytvořili algoritmus $x \cdot y + x$.

Algoritmus splňuje oba axiomy násobení a obě tyto konstrukce tedy tvoří stejnou operaci násobení.

1.3.3 Obecné axiomy násobení

Situace je stejná jako u operace sčítání. Nejprve uvedeme výčet axiomů.

Definice 5.

M$_0$ **Definice násobení** Pro každá dvě čísla a, b je jednoznačně určeno číslo jako jejich *součin*. Toto číslo budeme značit ab nebo $a \cdot b$ a říkáme, že *číslem b násobíme číslo a.*

M$_1$ Nechť $a = b$. Pak platí, že součin a s libovolným číslem c je roven součinu b se stejným číslem c, tedy:

$$a = b \Rightarrow ac = bc$$

$\mathbf{M}_2$ **Asociativita násobení** Pro libovolná tři čísla a, b, c platí, že a přenásobené součinem bc je rovno součinu ab přenásobenému c:

$$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$$

$\mathbf{M}_3$ **Komutativita násobení** Vynásobíme-li libovolné číslo a libovolným číslem b, získámé stejný součin, jako když vynásobíme číslo b číslem a. Platí tedy:

$$ab = ba$$

$\mathbf{M}_4$ **Existence jednotkového prvku** Existuje alespoň jedno číslo j, pro které platí, že vynásobíme-li jím libovolné číslo a, získáme opět číslo a, tomuto prvku říkáme *jednotkový prvek*:

$$aj = a$$

$\mathbf{M}_5$ **Existence inverzního prvku** Pro každé číslo a, kromě h z axiomu A_4, existuje číslo a^{-1} takové, že součin a a a^{-1} je roven *jednotkovému prvku* j, tomuto prvku říkáme *inverzní prvek.*

$$a \cdot a^{-1} = j$$

Při pozorném čtení si jistě povšimneme, že axiomy $\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}_5$ jsou stejné jako axiomy sčítání $\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_5$, pouze se záměnou symbolu operace, a proto každé sčítání splňuje axiomy násobení a obráceně. Aby axiomatické zavedení definovalo tyto operace jednoznačně (a shodně s naším konstruktivním zavedením), musíme je propojit *distributivním zákonem.*

Definice 6. Mějme množinu M s komutativními operacemi $+$ a $\cdot$. Řekneme, že $\cdot$ je distributivní vůči $+$ pokud pro každé a, b, c z M platí:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Axiomy A_4 a M_4 říkají to samé, pouze pro různé operace. Zavedeme tedy společný název *neutrální prvek*, který bude označovat buď to nulový prvek pokud se jedná o operaci sčítání, nebo jednotkový prvek, pokud se jedná o operaci násobení.

1.3.4 Porovnání konstrukce a axiomů násobení

Opět ukážeme, že násobení, jak jsme jej zkonstruovali, je komutativní, asociativní a také distributivní vůči sčítání (Pelc, 2008).

Lemma 2.

$$S(y) \cdot x = (y \cdot x) + x$$

Důkaz. Indukcí podle x:
Počátek indukce.

$$\begin{aligned} S(y) \cdot 0 &= 0 \\ &= 0 \cdot 0 \\ &= (y \cdot 0) \cdot 0 \end{aligned}$$

Indukční krok.

$$\begin{aligned} S(y) \cdot S(x) &= (S(y) \cdot x) + S(y) \\ &= S((S(y) \cdot x) + y) \\ &= S(((y \cdot x) + x) + y) \\ &= S(((y \cdot x) + y) + x) \\ &= ((y \cdot x) + y + S(x) \\ &= (y \cdot S(x)) + S(x) \end{aligned}$$

□

Tvrzení 4. Komutativita násobení:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Důkaz. Indukcí podle x:
Počátek indukce. Tvrzení $0 \cdot y = y \cdot 0$ máme již dokázáno.
Indukční krok.

$$\begin{aligned} S(x) \cdot y &= (x \cdot y) + y \\ &= (y \cdot x) + x \\ &= y \cdot S(x) \end{aligned}$$

□

Tvrzení 5. Distributivita násobení:

$$(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot (b + c)$$

Důkaz. Indukcí podle c:
Počátek indukce.

$$(a \cdot b) + (a \cdot 0) = (a \cdot b) + 0 = a \cdot b = a \cdot (b + 0)$$

Indukční krok. Využijeme již dokázanou asociativitu sčítání:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) + (a \cdot S(c)) &= (a \cdot b) + ((a \cdot c) + a) \\ &= ((a \cdot b) + (a \cdot c)) + a \\ &= (a \cdot (b + c)) + a \\ &= a \cdot S(b + c) \\ &= a \cdot (b + S(c)) \end{aligned}$$

□

Tvrzení 6. Asociativita násobení:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Důkaz. Indukcí podle c:
Počátek indukce.

$$(a \cdot b) \cdot 0 = 0 = a \cdot 0 = a \cdot (b \cdot 0)$$

Indukční krok. Využijeme již dokázanou distributivitu násobení:

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot S(c) &= ((a \cdot b) \cdot c) + (a \cdot b) \\ &= (a \cdot (b \cdot c)) + (a \cdot b) \\ &= a \cdot ((b \cdot c) + b) \\ &= a \cdot (b \cdot S(c))\end{aligned}$$

□

1.4 Uspořádání

Pomocí relace rovnosti umíme rozhodnout o tom zda jsou si dvě čísla rovna či nikoliv. Nyní si zadefinujeme relaci, kterou budeme schopni prvky množiny uspořádat.

Definice 7. Nechť R je relace a M libovolná množina. Potom pokud relace R na množině M splňuje následující axiomy, řekneme, že relace R je neostré uspořádání.

U_0 **Reflexivita** Pro každý prvek a z množiny M platí, že je v relaci sám se sebou:

$$\forall a \in M : aRa$$

U_1 **Transitivita** Pro libovolné tři prvky a, b, c z množiny M platí, že pokud je a v relaci s b a b v relaci s c, pak je také a v relaci s c:

$$\forall a, b, c \in M : aRb \land bRc \Rightarrow aRc$$

U_2 **Antisymetrie** Pro každé dva prvky a, b z množiny M platí, že pokud je a v relaci s b a zároveň b v relaci s a pak a je rovno b:

$$\forall a, b \in M : aRb \land bRa \Rightarrow a = b$$

1.4.1 Uspořádání přirozených čísel

Definice 8 (Relace menší rovno)**.**
Relaci menší rovno ($\leq$) definujeme na přirozených číslech následovně:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a \leq b :\equiv \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b^{[1]}$$

Definice 9 (Relace větší rovno)**.**
Relaci větší rovno ($\geq$) definujeme jako inverzní relaci k relaci menší rovno:

$$a \leq b :\equiv b \geq a$$

[1] Používáme přirozená čísla s 0 a tedy je možné, aby bylo $c = 0$

Definice 10 (Relace menší/větší).
Relaci menší ($<$) na množině $\mathbb{N}$ definujeme jako doplněk relace větší rovno:

$$< := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \geq$$

Relaci větší ($>$) na množině $\mathbb{N}$ definujeme jako doplněk relace menší rovno:

$$> := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus \leq$$

Ukážeme, že relace $\leq$ splňuje všechny tři axiomy uspořádání a jedná se tedy o neostré uspořádání.

U$_0$ Aby platilo $a \leq a$, musí existovat c z přirozených čísel takové, že platí $a + c = a$. Přirozená čísla, jak jsme je zadefinovali, obsahují nulu a c tedy může být rovno 0. Výraz $a+0 = a$ je podle axiomu sčítání $\mathbf{A}_4$ platný, neboť 0 je neutrální prvek vzhledem k operaci sčítání. Relace $\leq$ je proto reflexivní.

U$_1$ Pro libovolné tři prvky a, b, c z množiny M platí $a \leq b$ a $b \leq c$, platí tedy také:

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N} : a + c_1 = b \wedge b + c_2 = c$$

Mějme součet $c_3 = c_1 + c_2$, jelikož c_1 i c_2 jsou přirozená, musí být i c_3 přirozené. Potom platí:

$$a + c_3 = c \Rightarrow a \leq c$$

Čímž je dokázána tranzitivita.

U$_2$ Pokud platí $a \leq b$ a $b \leq a$, pak

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{N} : a + c_1 = b \wedge b + c_2 = a.$$

Dosadíme za a, $a = b + c_2$ a získáme

$$b + c_2 + c_1 = b$$

Jak c_1, tak c_2 jsou přirozená a musí proto platit $c_1 = 0 = c_2$. Tím je dokázáno $a = b$.

Oproti sčítání a násobení ověříme u uspořádání ještě dvě důležité vlastnosti a to, že námi definované uspořádání $\leq$ je na $\mathbb{N}$ *úplné* a *dobré*.

Definice 11. Pokud $\forall a, b \in M : aRb \vee bRa$, kde R je relace uspořádání (neboli každé dva prvky jsou uspořádány), pak řekneme, že M je úplně uspořádaná uspořádáním R, nebo též R je úplným uspořádáním na M.

Ukážeme, že množina přirozených čísel je úplně uspořádaná relací $\leq$.

Z Peanových axiomů víme, že pokud dvě přirozená čísla nejsou stejná, potom musí být nutně jedno z nich k-tým následníkem toho druhého:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : a = S^k(b) \vee b = S^k(a)$$

Pro každé dva prvky a, b z přirozených čísel musí proto nastat pouze jedna ze tří možností:

1. $a = b$
2. $\exists k \in \mathbb{N} : b = S^k(a) \Rightarrow a + k = b$
3. $\exists k \in \mathbb{N} : a = S^k(b) \Rightarrow b + k = a$

Nastává-li první možnost, $a = b$, pak dle axiomu $\mathbf{U}_0$ jsou tyto prvky stejné a jsou uspořádané (platí $a \leq a$). Pokud nastane možnost druhá, pak dle definice uspořádání platí $a \leq b$ a prvky a, b jsou tedy uspořádané. Třetí a poslední možnost znamená, že platí $b \leq a$ a opět jsou prvky uspořádané.

Tímto jsme dokázali, že množina přirozených čísel je úplně uspořádaná relací $\leq$.

Definice 12.
Řekneme, že prvek a je nejmenším prvkem množiny M, pokud platí:

$$a \in M \wedge \forall b \in M : b \geq a$$

Definice 13. Řekneme, že množina je dobře uspořádaná, pokud každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek.

Dokážeme, že $\mathbb{N}$ je dobře uspořádaná.

Důkaz. Pokud daná podmnožina obsahuje 0, pak řekneme, že jejím nejmenším prvkem je 0. Pokud 0 neobsahuje, pak zjistíme, zda obsahuje následníka. Takto budeme pokračovat, dokud nenajdeme prvek, který náleží do řečené podmnožiny (což jistě nastane, protože tvořením následníku od 0 dostáváme všechna přirozená čísla), tento prvek je vždy nejmenším prvkem. □

1.5 Spočetná množina

Dosud jsme zkoumali samotné zavedení přirozených čísel, operace na nich a jejich uspořádání. Dále vyvstává otázka, jak je vlastně tato množina velká. Intuitivně tušíme, že množina přirozených čísel je nekonečná, protože ke každému číslu lze najít číslo větší, tuto úvahu nyní formalizujeme.

Definice 14. Řekneme, že množina je nekonečná, pokud existuje její bijekce na její vlastní podmnožinu.

Přirozená čísla jsou podle této definice zjevně nekonečná, touto bijekcí je zobrazení S (následník) z definice, které zobrazuje $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Z teorie množin však známe, že nekonečné množiny mohou být „různě velké“ (mají různou mohutnost). Ukazuje se, že množina přirozených čísel je jedna z nejmenších nekonečných množin v tom smyslu, že přirozená čísla lze prostě zobrazit do každé nekonečné množiny. Proto přirozená čísla používáme k definici „nejmenších“, tzv. *spočetných* nekonečných množin.

Definice 15. Spočetná množina je každá množina, kterou lze jednoznačně zobrazit na libovolnou podmnožinu přirozených čísel.

Aby byla množina spočetná, musíme najít zobrazení, které ji převede na libovolnou podmnožinu přirozených čísel a poté ukázat, že se jedná o jednoznačné zobrazení – je prosté (injektivní) a na (surjektivní).

Definice 16 (Prosté zobrazení)**.**
Prosté zobrazení zobrazí všechny vzory na různé obrazy. Zobrazení f z množiny A do množiny B je prosté pokud platí:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definice 17. Zobrazení na[2]
Zobrazení z množiny A na množinu B pokryje celou množinu B, neexistuje prvek množiny B, který nemá vzor v množině A, tedy:

$$\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$$

Každá konečná množina je spočetná, zabývat se spočetností množiny má proto smysl pouze u nekonečných množin.

1.6 Odčítání

Řekneme, že $a - b = c$, pokud platí rovnost $a = c + b$. Součtem dvou přirozených čísel je číslo přirozené (jak plyne např. z algoritmu sčítání), jsou tedy uzavřena na operaci sčítání. U operace odčítání tomu už tak není. Je-li $a < b$, pak přímo z definice relace $<$ plyne, že neexistuje takové přirozené číslo c, aby platilo $a = b + c$. Zajímá nás, jak rozšířit přirozená čísla tak, aby výsledná struktura byla uzavřená na odčítání. Odpovědí jsou tzv. *celá čísla.*

1.7 Celá čísla

Celá čísla se značí $\mathbb{Z}$ a jsou tvořena přirozenými čísly uzavřenými na operaci odčítání.

$$\ldots - 3, -2, -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots$$

Obsahují záporná čísla, jejichž přijetí v matematice bylo problematické. Nepoužívali je ani staří Sumerové či Egypťané, kteří běžně používali zlomky, tedy čísla racionální, ani staří Řekové, kteří objevili nesouměřitelnost a tím čísla iracionální. Přitom oba tyto typy čísel jsou z hlediska algebraické konstrukce mnohem složitější než čísla celá a budeme je zavádět až později. Poprvé se předobraz záporných čísel objevil kolem roku 200 před naším letopočtem v Číně, kde se používal systém početních tyčinek, který zaznamenával kladná čísla pomocí červených tyčinek a záporná pomocí černých. Tento systém se používal k zaznamenávání obchodních transakcí a výběru daní.

K první částečné formalizaci záporných čísel a operací na nich došlo v Indii, kde se záporná čísla objevila kolem roku 620 našeho letopočtu v práci matematika Brahmagupty. Používal představu „majetku“ pro kladná čísla a „dluhu“ pro záporná. Brahmagupta použil speciální znaménko pro označení záporných čísel. Již tehdy se v Indii používala nula a tak mohl Brahmagupta stanovit pravidla pro počítání se zápornými čísly následovně:

Dluh mínus nula je dluh.

[2]Znalost pojmu prosté zobrazení a zobrazení na předpokládáme, uvádíme je zde kvůli formalizaci důkazů.

Majetek mínus nula je majetek.

Nula mínus nula je nula.

Dluh odečtený od nuly je majetek.

Majetek odečtený od nuly je dluh.

Součin nuly a dluhu nebo majetku je nula.

Součin nuly a nuly je nula.

Součin a podíl dvou majetků je jeden majetek.

Součin a podíl dvou dluhů je jeden majetek.

Součin a podíl dluhu a majetku je dluh.

Součin a podíl majetku a dluhu je dluh.

V Evropě se záporná čísla neobjevila až do patnáctého století, kdy začali učenci studovat starověké texty z islámských zemí a Byzance. V sedmnáctém století dostala záporná čísla nový význam, díky anglickému matematikovi Johnu Wallisovi, kterému je připisováno vytvoření číselné osy (Rogers, 2015).

Nyní formálně zavedeme celá čísla. Ve shodě s literaturou tak učiníme pouze konstruktivně rozšířením přirozených čísel.

Definice 18. Máme množinu $P = \{p; p \in \mathbb{N} \wedge p > 0\}$ všech kladných přirozených čísel. Sestrojíme množinu $\{-\}$, což je jedno prvková množina, která obsahuje pouze prvek „$-$“. Provedem kartézský součin $\{-\} \times P$, uspořádanou dvojici $(-, p)$ píšeme jako $-p$. Nyní si zadefinujeme množinu celých čísel $\mathbb{Z}$ jako sjednocení množiny přirozených čísel a kartézského součinu $\{-\} \times P$: $\mathbb{Z} = (\{-\} \times P) \cup \mathbb{N}$. Tím, že $\{-\} \times P$ a $\mathbb{N}$ jsou disjunktní, máme zaručeno, že pro každý prvek $a \in \mathbb{Z}$ platí, že a je buď nějaké přirozené číslo p a nebo nějaké formálně opačné číslo $-p$ k nějakému přirozenému číslu p. Platí $p + (-p) = 0$ pro všechny prvky $\mathbb{Z}$ (Mac Lane, 1974, str. 68).

V množinovém konstruktivním prostoru, který jsme použili k vytvoření modelu přirozených čísel není symbol „$-$“ k dispozici. Můžeme jej však bez újmy na obecnosti definovat například $- := \emptyset$. Jediné, co musíme pro korektnost definice ověřit je, že $\{-\} \times P$ je skutečně disjunktní s $\mathbb{N}$, tedy, že žádná dvojice $(-, p)$ není reprezentována stejnou množinou jako nějaké přirozené číslo. K tomu potřebujeme definici uspořádané dvojice.

Definice 19. Uspořádanou dvojicí prvků a, b rozumíme $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Každé přirozené číslo v našem modelu obsahuje prvek $\emptyset$, který naopak není prvkem žádné uspořádané dvojice (jejím prvkem může být nejvýše $\{\emptyset\}$), množiny $\{-\} \times P$ a $\mathbb{N}$ jsou tedy skutečně disjunktní.

1.7.1 Konstrukce sčítání na celých číslech

Motivací k rozšíření přirozených čísel na celá byla uzavřenost na odčítání. Nyní už můžeme nadefinovat rozdíl libovolných dvou přirozených čísel. Pro $a \geq b$ již máme rozdíl $a - b$ definován a pro $a < b$ jej dodefinováváme následně:

$$a - b := -(b - a)$$

Rozdíl $b - a$ je určitě přirozené číslo a $-(b - a)$ je číslo k němu opačné, jehož existence je zaručena definicí celých čísel.

Nyní tedy máme definován rozdíl dvou libovolných přirozených čísel a můžeme ho použít k definici součtu libovolných celých čísel. To provedeme tak, že rozšíříme sčítání přirozených čísel. Definujeme:

- $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} : a + b := b - (-a)$
- $\forall a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : a + b = a - (-b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : a + b = -(-a + (-b))$

Odčítání obecných celých čísel nyní definujeme stejně jako v přirozených číslech, tedy $a - b = c$ pokud $a = b + c$.

1.7.2 Axiomatické zavedení sčítání na $\mathbb{Z}$

Každé číslo h z axiomu A_4 mající takovouto vlastnost nazýváme *nulový prvek*. Na přirozených číslech existuje pouze jeden nulový prvek h. Dokažme si, že tomu tak je:

Důkaz. Sporem předpokládejme, že v $\mathbb{N}$ existují dva různé nulové prvky. Označíme si je h_1 a h_2. Podle axiomu A_4 platí

$$a + h_1 = a \wedge a + h_2 = a$$

Tyto rovnosti platí pro všechna $a \in \mathbb{N}$, tedy i pro h_1, h_2. Musí proto platit:

$$h_2 + h_1 = h_2 \wedge h_1 + h_2 = h_1$$

Podle axiomu A_3 platí

$$h_1 + h_2 = h_2 + h_1$$

To ale znamená, že $h_1 = h_2$, což je spor s předpokladem, že h_1 a h_2 jsou různé nulové prvky a tím jsme tedy sporem dokázali jednoznačnost nulového prvku (Kořínek 30). □

Sčítání na celých číslech se řídí axiomy, které jsme zavedli již u čísel přirozených. Těmito axiomy se bude řídit sčítání na každé další množině, kterou zavedeme.

Axiomatické sčítání nijak nezohledňuje strukturu celých čísel, jak jsme ji definovali, tedy sjednocení $\mathbb{N}$ a $\{-\} \times P$ a naši interpretaci těchto množin jako čísel nezáporných a záporných. Proto jí také vyhovuje mnoho zdánlivě různých operací, které nejsou shodné se sčítáním v naší konstrukci.

Definujeme-li například $x \oplus y := x + y + 1$, kde na pravé straně je námi konstruktivně definované $+$, splňuje tato operace všechny axiomy: je zjevně komutativní i asociativní, má nulový prvek -1 a ke každému číslu x existuje opačné číslo $-2 - x$, protože $x \oplus (-2 - x) = x + (-2 - x) + 1 = -1$.

Obecněji, je-li $\varphi : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z}$ bijekce, můžeme definovat

$$x \oplus y = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)). \tag{O}$$

Taková operace opět splňuje všechny axiomy:

- asociativita: $x \oplus (y \oplus z) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(y) + \varphi(z)))) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)) = (x \oplus y) \oplus z$
- komutativita: $x \oplus y = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)) = y \oplus x$
- nulový prvek: $x \oplus \varphi^{-1}(0) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(\varphi^{-1}(0))) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$
- opačný prvek: $x \oplus \varphi^{-1}(-\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(x) - \varphi(x)) = \varphi^{-1}(0)$

Poznamenejme, že předchozí příklad je speciálním případem tohoto pro $\varphi(x) = x + 1$.

Přepíšeme-li vztah (O) na $\varphi(x \oplus y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, vidíme, že zobrazení φ je izomorfismus. Tedy každá struktura (grupa) izomorfní s konstruktivně definovanými celými čísly (kterou si můžeme představit jako reálnou osu s celými čísly, jimž jsou „zpřeházeny jmenovky“) splňuje uvedené axiomy sčítání. Ukazuje se, že implikace platí i obráceně – každá operace, která axiomy splňuje, je izomorfní s konstruktivně definovaným sčítáním. Důkaz popíšeme jen zhruba: pro danou operaci splňující axiomy konstruujeme izomorfismus tak, že sobě přiřadíme nulové prvky a konstruujeme obraz jedničky pomocí dělitelnosti (resp. množin násobků všech čísel, definovaných induktivně pomocí sčítání). Z nuly a jedničky lze pomocí přenosu operace při izomorfismu zkonstruovat obrazy všech celých čísel.

1.7.3 Konstrukce násobení na $\mathbb{Z}$

Rozšíříme násobení, jak jsme si jej zadefinovali na přirozených číslech, do celých čísel a to následně:

- $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} : a \cdot b := -((-a) \cdot b)$
- $\forall a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : a \cdot b := -(a \cdot (-b))$
- $\forall a, b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : a \cdot b := (-a) \cdot (-b)$

1.7.4 Axiomatické zavedení násobení na $\mathbb{Z}$

Násobení na celých číslech se řídí axiomy, které jsme uvedli u přirozených čísel. Stejně jako jsme ukázali u sčítání, není těmito axiomy operace násobení jasně určena. Operace sčítání a násobení, zavedené axiomaticky, jsou jednoznačné pouze pokud je propojíme distributivním zákonem (Aliprantis, 1998).

1.7.5 Uspořádání celých čísel

Abychom mohli ukázat, že celá čísla jsou uspořádaná, musíme rozšířit definice relace $\leq$.

Definice 20. Relace menší rovno.
Relaci menší rovno ($\leq$) definujeme na celých číslech následně:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : a \leq b :\equiv \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b$$

Povšimněme si, že definice je shodná s tou na přirozených čísel, pouze jsme rozšířili obor ze kterého jsou a a b (ale nikoli c), tím pádem je i důkaz platnosti axiomů uspořádání zcela shodný jako u přirozených čísel.

Aby byla celá čísla také dobře uspořádaná, musí v každé jejich podmnožině být nejmenší prvek. Vezmeme-li si například množinu všech záporných čísel ($\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$), která je podmnožinou celých čísel, není možné nalézt prvek nejmenší. Pro libovolné a z $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ existuje b z $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ takové, že $b < a$. Množina celých čísel proto není dobře uspořádaná.

1.8 Spočetnost celých čísel

Ověříme, zda jsou celá čísla spočetná. Musíme najít zobrazení z $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{N}$ a toto zobrazení musí být jednoznačné (prosté a na).

K tomu abychom takové zobrazení mohli najít si nejprve množinu celých čísel šikovně seřádíme a to následovně:

$$0, \quad 1, -1, \quad 2, -2, \quad 3, -3, \quad \ldots$$

Nyní již vidíme, jak by mělo toto zobrazení vypadat, jelikož jsme si definovali přirozená čísla s 0, první prvek se bude zobrazovat na 0. Zobrazení bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} 0 &\to 0 \\ 1 &\to 1 \\ -1 &\to 2 \\ 2 &\to 3 \\ -2 &\to 4 \\ 3 &\to 5 \\ -3 &\to 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Toto zobrazení můžeme předepsat například takto:

$$\forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} 2n - 1 : \ n > 0 \\ -2n : \ n \leq 0 \end{cases}$$

Například 0 bude zobrazená do 0, $f(0) = -2 \cdot 0 = 0$, 2 bude zobrazena do 3, $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ a -3 do 6, $f(-3) = -2 \cdot (-3) = 6$.

Našli jsme zobrazení, které zobrazí celá čísla na čísla přirozená, musí ale ještě ověřit, že se jedná o zobrazení jednoznačné.

Prosté

Musí platit $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z} : n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$.

Důkaz. Sporem předpokládejme $n_1 \neq n_2 \wedge f(n_1) = f(n_2)$. Musíme ověřit tři možnosti.

$$\begin{aligned} 2n_1 - 1 &= 2n_2 - 1 \\ 2n_1 &= 2n_2 \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

Došli jsme ke sporu s předpokladem $n_1 \neq n_2$.

$$\begin{aligned} -2n_1 &= -2n_2 \\ n_1 &= n_2 \end{aligned}$$

Opět jsme došli ke sporu s předpokladem $n_1 \neq n_2$.

Třetí možnost je $-2n_1 = 2n_2 - 1$. Vezmeme-li v úvahu, že n_1 musí být nekladné číslo a n_2 kladné, podle toho jak je definované zobrazení f, pak vidíme, že na levé straně máme nezáporné sudé číslo a na pravé straně máme kladné liché číslo nebo -1. Rovnost tedy nemůže platit.

Došli jsme tedy ke sporu s $f(n_1) = f(n_2)$. Všechny tři varianty vedly ke sporu, tím jsme dokázali že zobrazení f je prosté. □

Na

Musí platit $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{Z} : f(m) = n$.

Důkaz. Každé přirozené číslo je buď sudé nebo liché (předpokládáme sudost 0). Pro lichá čísla musí platit:

$$\begin{aligned} 2m - 1 &= n \\ 2m &= n + 1 \end{aligned}$$

Liché číslo $+1$ je číslo sudé a pro každé takové existuje celé číslo $2m$. Pro sudá musí platit:

$$\begin{aligned} -2m &= n \\ 2m &= -n \end{aligned}$$

Pro každé záporné sudé číslo existuje celé číslo ve tvaru $2m$. Dokázali jsme, že zobrazení f je na. □

Tím máme dokázáno, že f je prosté a na a tím pádem jednoznačné. Dokázali jsme, že celá čísla jsou spočetná.

1.9 Dělení

Operace sčítání má inverzní operaci odčítání, stejně tak má operace násobení inverzní operaci a tou je dělení. Zavedeme si jí následovně:

Definice 21. Řekneme že $\frac{a}{b} = c$, pokud platí $a = b \cdot c$ a c je jediný prvek s touto vlastností.

Pokud by a, b bylo rovno 0, pak by $a = b \cdot c$ řešila všechna c. Podmínka „c je jediný prvek s touto vlastností“ tedy vylučuje dělení 0.

Stejně jako přirozená čísla nejsou uzavřená na odčítání, celá čísla nejsou uzavřena na dělení:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 : \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$$

Vyvstává proto potřeba množinu celých čísel rozšířit tak, aby byla uzavřená na dělení.

1.10 Racionální čísla

Racionální čísla jsou celá čísla doplněná o zlomky tak, aby byla uzavřená na dělení. K jejich definování potřebujeme znát *rozklad na třídy ekvivalence*.

Definice 22. Rozklad na třídy ekvivalence.
Nechť R je relací ekvivalence na množině M. Mějme systém podmnožin množiny M, $[a]_M := \{b \in M : aRb\}$ a platí:

1. $\forall a, b \in M, a \neq b : [a]_M \cap [b]_M = \emptyset$
2. $\bigcup_{a \in M} [a]_M = M$

Pak systém podmnožin množiny M nazveme rozkladem M na třídy ekvivalence.

Definice 23 (Racionální čísla)**.**
Racionální čísla jsou množina uspořádaných dvojic (a, b), a, b jsou celá čísla a $b \neq 0$. Mezi těmito uspořádanými dvojicemi zavedeme ekvivalenci $\sim$. Tuto ekvivalenci definujeme následně:

$$(a, b) \sim (c, d) := a \cdot d = b \cdot c$$

Tato ekvivalence nyní rozloží všechny uspořádané dvojice na třídy ekvivalence. Řekneme, že zlomek $\frac{a}{b}$ je roven všem uspořádaným dvojicím ze třídy ekvivalence která obsahuje dvojici (a, b).

Množina racionálních čísel obsahuje celou množinu celých čísel. Každému prvku $k \in \mathbb{Z}$ odpovídá třída ekvivalence, která obsahuje uspořádanou dvojici $(k, 1)$.

Dokážeme, že $\sim$ je skutečně ekvivalence. $\sim$ musí být reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Důkaz.

- **Reflexivita** $(a, b) \sim (a, b) : a \cdot b = a \cdot b$, což platí pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$.

- **Symetrie** $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b) : a \cdot d = b \cdot c \Rightarrow c \cdot b = a \cdot d$, což zjevně platí pro všechna $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.
- **Tranzitivita** $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim (e,f) : a \cdot d = b \cdot c \wedge c \cdot f = e \cdot d \Rightarrow a \cdot f = e \cdot b$. Pokud $a \cdot f = e \cdot b$ rozšíříme součinem $c \cdot d$, získáme
$$a \cdot d \cdot f \cdot c = b \cdot c \cdot e \cdot d$$
Což musí platit, pokud je splněn předpoklad $a \cdot d = b \cdot c \wedge c \cdot f = e \cdot d$.

□

1.10.1 Operace na racionálních číslech

Operace na racionálních číslech jsou stejné jako na celých, ale ukážeme si jak algebraicky vypadá počítání se zlomky.

Sčítání

Součtem dvou zlomků je opět zlomek a platí:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Hodnoty b a d nesmí nikdy být 0 a proto výsledkem bude zlomek, jehož jmenovatel opět není 0.

Nulovým prvkem sčítání na racionálních číslech je třída ekvivalence, která obsahuje uspořádanou dvojici $(0,1)$ (tedy zlomky ve tvaru $\frac{0}{k}$, pro všechna k celá). Z rovnosti

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot b}{b \cdot 1} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b}$$

vidíme, že $\frac{0}{1}$ je skutečně nulovým prvkem, musí jím proto být celá třída ekvivalence.
Ověříme, že sčítání je komutativní i na racionálních číslech:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \\
\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} &= \frac{c \cdot b + a \cdot d}{b \cdot d} \\
\frac{c \cdot b + a \cdot d}{b \cdot d} &= \frac{c}{d} + \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

Dále ověříme asociativitu:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} &= \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} + \frac{e}{f} \\
\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} + \frac{e}{f} &= \frac{a \cdot d \cdot f + c \cdot b \cdot f + e \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot f} \\
\frac{a \cdot d \cdot f + c \cdot b \cdot f + e \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot f} &= \frac{a \cdot d \cdot f}{b \cdot d \cdot f} + \frac{c \cdot b \cdot f + e \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot f} \\
\frac{a \cdot d \cdot f}{b \cdot d \cdot f} + \frac{c \cdot b \cdot f + e \cdot b \cdot d}{b \cdot d \cdot f} &= \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)
\end{aligned}$$

Sčítání zlomků je komutativní a asociativní.

Opačným prvkem k prvku $\frac{a}{b}$ je třída ekvivalence obsahující prvek $\frac{-a}{b}$, jak je jasně vidět z této rovnosti:

$$\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = \frac{a \cdot b + (-a) \cdot b}{b \cdot b} = \frac{a \cdot b - a \cdot b}{b \cdot b} = \frac{0}{b \cdot b}$$

Odčítání

Rozdíl dvou zlomků je součtem zlomku se zlomkem jehož čitatel je opačným číslem:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{a \cdot d + (-c) \cdot b}{b \cdot d}$$

Násobení

Součinem dvou zlomků je opět zlomek a platí:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

S hodnotami ve jmenovateli opět nenulovými.
Komutativita a asociativita násobení zlomků platí triviálně. Jednotkovým prvkem násobení je opět číslo 1, které, jak jsme uvedli v definici, je v racionálních číslech zastoupené třídou ekvivalence obsahující dvojici $(1, 1)$. Ukážeme, že skutečně splňuje vlastnost jednotkového prvku

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$$

Inverzním prvkem $\frac{a}{b}$ je prvek $\frac{b}{a}$:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a}$$

Ukážeme, že výsledný zlomek je roven $\frac{1}{1}$

$$\frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow a \cdot b \cdot 1 = 1 \cdot b \cdot a$$

Pravá rovnost zjevně platí vždy.

Dělení

Dělení je násobení inverzním prvkem.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Nemůžeme dělit 0, tedy žádným zlomkem ve tvaru $\frac{0}{a}$ pro libovolné a celé.

1.10.2 Uspořádání racionálních čísel

Ověřit, že racionální čísla jsou uspořádaná, můžeme převedením problému na uspořádání celých čísel.
Víme, že platí:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = c \cdot b$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že jmenovatel je vždy kladný, například zlomek $-\frac{4}{9}$ bude tvořen dvojicí $-4, 9$, dvojici $4, -9$ zakážeme.

Pokud nyní řešíme nerovnost $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, přenásobení obou stran jmenovately je ekvivalentní úprava (samozřejmě nepovolujeme, aby byl jmenovatel 0). Proto platí:

$$a \cdot d \leq c \cdot b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$$

Tím jsme převedli úlohu na předchozí případ uspořádání celých čísel o kterém již víme, že platí. Racionální čísla jsou tedy úplně uspořádaná.

1.11 Spočetnost racionálních čísel

Stejně jako u celých čísel si musíme nejprve racionální čísla seřadit tak, abychom byli schopni vytvořit zobrazení z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{N}$. Čísla uspořádáme do tabulky, a to tak, že prvek v a-tém řádku a b-tém sloupci bude uspořádaná dvojice $(\frac{a}{b}, -\frac{a}{b})$. Tabulka bude vypadat následovně:

$$\begin{array}{ccccc}
(\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}) & (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) & (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) & \cdots \\
(\frac{2}{1}, -\frac{2}{1}) & (\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}) & (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) & (\frac{2}{4}, -\frac{2}{4}) & \cdots \\
(\frac{3}{1}, -\frac{3}{1}) & (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) & (\frac{3}{3}, -\frac{3}{3}) & (\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}) & \cdots \\
(\frac{4}{1}, -\frac{4}{1}) & (\frac{4}{2}, -\frac{4}{2}) & (\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) & (\frac{4}{4}, -\frac{4}{4}) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Uspořádané dvojice nyní seřadíme. a označuje řádek a b sloupec, čísla v tabulce seřadíme tímto algoritmem:
První prvek je $a = 1, b = 1$, tedy první řádek, první sloupec, dvojice $(\frac{1}{1}, -\frac{1}{1})$.

1. Pokud je $b = 1$, pak dalších $a + 1$ prvků posloupnosti bude: Pro n od 1 do $a + 1$: $(a + 2 - n, n)$.

2. Pokud je $a = 1$, pak dalších $b + 1$ prvků posloupnosti bude: Pro n od 1 do $b + 1$: $(n, b + 2 - n)$.

Opakováním kroků 1 a 2 sestrojíme nekonečnou posloupnost uspořádaných dvojic. Tuto posloupnost můžeme sestrojit protože tabulka obsahuje nekonečně mnoho prvků.

Tímto každý prvek tabulky zobrazíme na přirozené číslo. To ale ještě nestačí, musíme tabulku zobrazit nejprve na posloupnost sudých přirozených čísel začínajících od 2:

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}) &\to 2 \\
(\frac{2}{1}, -\frac{2}{1}) &\to 4 \\
(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &\to 6 \\
(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) &\to 8 \\
(\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}) &\to 10 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nyní řekneme, že přiřazujeme číslo $n-1$ prvnímu prvku z uspořádané dvojice a číslo n druhému prvku uspořádané dvojice. Ještě dodáme, že 0 zobrazíme na 0 a tím je zobrazení kompletní.

$$\begin{aligned}
0 &\to 0 \\
\frac{1}{1} &\to 1 \\
-\frac{1}{1} &\to 2 \\
\frac{2}{1} &\to 3 \\
-\frac{2}{1} &\to 4 \\
\frac{1}{2} &\to 5 \\
-\frac{1}{2} &\to 6 \\
\frac{1}{3} &\to 7 \\
-\frac{1}{3} &\to 8 \\
\frac{2}{2} &\to 9 \\
-\frac{2}{2} &\to 10 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Teď už jenom zbývá dokázat, že vytvořené zobrazení je jednoznačné.

Prosté

Žádné dva vzory nesmí mít stejný obraz. Dokážeme, že v tabulce nejsou žádné dva stejné prvky.

Důkaz. Nikde v tabulce není 0, proto platí $\frac{a}{b} \neq -\frac{a}{b}$. Žádná uspořádaná dvojice v tabulce neobsahuje dva stejné prvky.

Na pozici (a, b) v tabulce je zlomek $\frac{a}{b}$, nikde se tedy nevyskytují dva identické zlomky, ale v tabulce je nekonečně mnoho zlomků, které reprezentují stejné racionální číslo. Pokud ale ukážeme, že množina všech zlomků je spočetná, potom musí být spočetná i jejich podmnožina a to racionální čísla (Aliprantis, 1998).

Žádné dva prvky v tabulce nejsou stejné a algoritmus nezobrazí žádný prvek dvakrát, námi vytvořené zobrazení je tedy prosté. □

Na

Aby bylo zobrazení na, musí být pokryta celá množina do které zobrazujeme, což jsou přirozená čísla.

Důkaz. Na 0 zobrazujeme 0, jak jsme explicitně řekli. Algoritmem jsme sestavili nekonečnou posloupnost uspořádaných dvojic a druhé prvky z této dvojice jsme zobrazili na sudá čísla a první prvky na lichá. Je tedy pokryta 0, všechna lichá čísla a všechna sudá čísla. Pokryli jsme celou množinu přirozených čísel a zobrazení je tedy na. □

1.12 Algebraické struktury

Množina přirozených čísel není uzavřena na operaci odčítání, protože platí:

$$\exists a, b \in \mathbb{N} : a - b \notin \mathbb{N}$$

Stejně tak množina celých čísel není uzavřena na dělení:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} : \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$$

Proto je potřeba rozlišovat na jaké množině je možné volně používat jednotlivé operace. K tomuto rozlišení slouží algebraické struktury. Následující definece jsou parafrázovány za účelem zestručnění z učebnice *Algebra* od Mac Lanea a Birkhoffa vydané v roce 1974.

1.12.1 Grupa

Definice 24. Mějme množinu G a asociativní binární operaci $\square$, neutrální prvek u k operaci $\square$ náleží do G a zároveň ke každému prvku $a \in G$ existuje prvek $a' \in G$, který je inverzní k a vzhledem k operaci $\square$. Platí tedy:

$$\begin{aligned} u \square a = a = a \square u \\ a \square a' = u = a' \square a \end{aligned} \tag{1.1}$$

Množina G s operací $\square$ tvoří grupu a píšeme $(G, \square, u)$ je grupa.

Grupě s operací sčítání říkáme *aditivní grupa* a s operací násobení *multiplikativní grupa*. Přirozená čísla s operací sčítání netvoří grupu, protože neobsahují inverzní prvky k operaci sčítání. Například celá čísla s operací sčítání tvoří grupu $(\mathbb{Z}, +, 0)$, ale celá čísla s operací násobení již grupu netvoří, neobsahují totiž inverzní prvky. Racionální čísla tvoří grupu jak s operací sčítání: $(\mathbb{Q}, +, 0)$, tak s operací násobení: $(\mathbb{Q} \backslash \{0\}, \cdot, 1)$.

1.12.2 Těleso

Definice 25. Mějme množinu T se dvěmi binárními operacemi, sčítáním a násobením, $0, 1 \in T$ pak T je *Těleso*, pokud platí:

1. $(T, +, 0)$ je komutativní aditivní grupa.
2. $(T \backslash \{0\}, \cdot, 1)$ je multiplikativní grupa.
3. Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

1.12.3 Uspořádané těleso

Definice 26. Nechť T je těleso a obsahuje neprázdnou vlastní podmnožinu T^+ pro niž platí (Koliha, 1969):

O$_1$ $\forall a \in T : (a \in T^+) \vee (-a \in T^+)$

O$_2$ $a, b \in T^+ \Rightarrow (a + b \in T^+) \wedge (a \cdot b \in T^+)$

Pak řekneme, že T je *uspořádané těleso* a prvky množiny T^+ nazýváme *nezáporné prvky* (0 náleží do T^+), také si zadefinujeme T_0^+, což jsou *kladné prvky*. Relaci uspořádání definujeme následovně:

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in T^+, \quad a > b \Leftrightarrow a - b \in T_0^+$$

Takto definované uspořádání nám ulehčí práci v dalších částech této práce. Provedeme důkaz, že toto uspořádání je ekvivalentní s tím ze sekce *Uspořádání*.

Tvrzení 7. Nechť T je uspořádané těleso, T^+ jeho podmnožinou obsahující nezáporné prvky a T_0^+ jeho podmnožinou obsahující kladné prvky a relace menší rovno je definována následovně:

$$\forall a, b \in \mathbb{T} : a \leq b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{T}^+ : a + c = b$$

$$\forall a, b \in \mathbb{T} : a \leq b \Leftrightarrow b - a \in T^+$$

Pak jsou tyto definice ekvivalentní:

$$\exists c \in \mathbb{T}^+ : a + c = b \Leftrightarrow b - a \in T^+$$

Důkaz. Nejprve dokážeme $\exists c \in \mathbb{T}^+ : a + c = b \Rightarrow b - a \in T^+$.

$$\exists c \in \mathbb{T}^+ : a + c = b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{T}^+ : c = b - a \Rightarrow b - a \in T^+$$

Nyní dokážeme opačnou implikaci $b - a \in T^+ \Rightarrow \exists c \in \mathbb{T}^+ : a + c = b$.

$$b - a \in T^+ \Rightarrow \exists c \in \mathbb{T}^+ : b - a = c \Rightarrow \exists c \in \mathbb{T}^+ : b = c + a$$

Tím byly dokázany implikace oběma směry a byla tedy dokázána ekvivalence. □

1.13 Reálná čísla

Těleso racionálních čísel obsahuje všechny kladné a záporné zlomky, ale neobsahuje například řešení rovnice $a \cdot a = 2$. Tento fakt lze jednoduše demonstrovat: Předpokládejme, že existuje racionální číslo v základním tvaru $\frac{p}{q}$, tedy p, q jsou nesoudělná, pak musí platit:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ p^2 &= 2q^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

p^2 tedy musí být sudé (ať je q^2 sudé nebo liché, $2q^2$ je vždy sudé číslo). Pokud je sudé p^2, pak musí být samozřejmě sudé i p. Můžeme tedy místo p psát $2m$.

$$\begin{aligned} (2m)^2 &= 2q^2 \\ 4m^2 &= 2q^2 \\ 2m^2 &= q^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nyní vidíme, že i q musí být sudé podle stejné úvahy. Tím jsme ale došli ke sporu se zadáním, že $\frac{p}{q}$ je v základním tvaru. Dokázali jsme tedy sporem, že neexistuje racionální číslo, které by bylo řešením rovnice $a \cdot a = 2$ (Jarník, 1974, str. 39).

Tímto vyvstává potřeba zavedení nové, větší, struktury, která by obsahovala jak racionální čísla, tak odmocninu ze dvou a další čísla, která nejsou obsažena v racionálních čísel. Touto strukturou jsou právě *reálná čísla*. Nyní zavedeme takový analytický aparát, abychom byli schopni zkonstruovat množinu reálných čísel. V celé této podkapitole čerpáme ze článku z vědeckého časopisu (Koliha, 1969).

V této podkapitole bude T označovat uspořádané těleso a T^+ bude značit nezáporné prvky T, T_0^+ kladné prvky T. V této podkapitole nebudeme provádět důkazy, jsou k dohledání v (Koliha, 1969).

Tvrzení 8. Každé uspořádané těleso obsahuje ve smyslu izomorfizmu $\mathbb{Z}$ jako podmnožinu.

Minimální uspořádané těleso je $\mathbb{Q}$.

Definice 27. Nechť $M \subset T$ a $h \in T$ a platí:

$$\forall x \in M : x \leq h$$

Pak řekneme že h je horní závora. Pokud existuje $d \in T$ pro které platí:

$$\forall x \in M : x \geq d$$

Potom d je dolní závora.

Definice 28. Nechť $M \subset T$ a $a \in T$. Platí-li:

$$(\forall x \in M : x \leq a) \wedge (\forall \varepsilon \in T_0^+ \quad \exists x \in M : x > a - \varepsilon)$$

pak řekneme, že a je *supremem* množiny M, $\sup M$

Definice 29. Pokud $M \subset T$, $b \in T$ a:

$$(\forall x \in M : x \geq b) \wedge (\forall \varepsilon \in T_0^+ \quad \exists x \in M : x < b + \varepsilon)$$

Pak b je *infimem* množiny M, $\inf M$.

Pokud supremum M náleží do M, pak platí, že $\sup M = \max M$ a stejně tak pokud infimum patří do M, pak $\inf M = \min M$. Každá množina, která má konečný počet prvků, má maximum i minimum, neboť můžeme vždy určit, který prvek je nejmenší a který největší.

Supremum množiny M je nejmenší prvek množiny všech horních závor množiny M a infimum množiny M je největší prvek množiny všech dolních závor množiny M.

Definice 30. $|x|$ se nazývá *absolutní hodnota* x a pro prvky x tělesa T jí definujeme:

$$|x| = \begin{cases} x : \; x \geq 0 \\ -x : \; x < 0 \end{cases}$$

Definice 31. Řekneme, že prvek $a \in T$ je limitou posloupnosti $[a_n]$ prvků z tělesa T, jestliže pro každé $\varepsilon \in T_0^+$ existuje $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$, že:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad n > n_0$$

Má-li posloupnost $[a_n]$ limitu a, píšeme $a_n \to a$ a takovou posloupnost nazýváme konvergentní. Je-li $[a_n]$ neklesající, tj. $a_{n+1} \geq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}_0^+$ a je-li $a_n \to a$, zavádíme označení $a_n \nearrow a$. Analogicky, má-li nerostoucí posloupnost $[a_n]$ ($a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}_0^+$) limitu a, píšeme $a_n \searrow a$.

Definice 32. Posloupnost $[a_n]$ prvků z T se nazývá cauchyovská, jestliže pro každé $\varepsilon \in T_0^+$ existuje $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$, že platí:

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad p \in \mathbb{Z}_0^+$$

Definice 33. Prvek $a \in T$ je hromadný prvek množiny $X \subset T$, platí-li: pro každé $\varepsilon \in T_0^+$ existuje nekonečně mnoho různých prvků $x \in X$, že $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$.

1.13.1 Řez

Definice 34. Řez v tělese T se definuje pomocí dvou vlastních podmnožin $A, A' \subset T$, pro něž

- $A \cup A' = T, A \cap A' = \emptyset$
- $\forall a \in A, b \in A' : a \leq b$

Řez označujeme symbolem A/A'.

Definice 35. Mezera v tělese T je řez A/A', pro který neexistuje ani $\max A$ ani $\min A'$. Uspořádané těleso T se nazývá *spojité*, neobsahuje-li mezery.

Definice 36. Je-li $a, b \in T, a < b$, můžeme definovat interval $\langle a, b\rangle$ jako množinu všech prvků $x \in T$, pro něž

$$a \leq x \leq b.$$

V každém intervalu je nekonečně mnoho prvků tělesa T.

Věta 1. V uspořádaném tělese T platí:

1. Konvergentní posloupnost je cauchyovská.
2. Cauchyovsk posloupnost je omezená.
3. Limita konvergentní posloupnosti je jejím hromadným prvkem.
4. Má-li cauchyovská posloupnost hromadný prvek, pak je limitou této posloupnosti.
5. $\varepsilon_n \to 0, |a_n - a| \leq \varepsilon_n \Rightarrow a_n \to a$.
6. $\varepsilon_n \to 0, a_n$ omezená $\to \varepsilon_n \cdot a_n \to 0$.
7. $a_n \nearrow a \Rightarrow a_n \leq a$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}_0^+$.
8. $a_n \leq b_n, a_n \to a, b_n \to b \Rightarrow a \leq b$.
9. Je-li $[I_n]$ posloupnost do sebe vložených intervalů ($I_n \supset I_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}_0^+$), při čemž $|I_N| \to 0$, je průnikem všech intervalů I_n prázdná nebo jednobodová množina.
10. Je-li A/A' řez v T, $c = \max A$ nebo $c = \min A'$, potom je horní hranicí A a dolní hranicí A'. Dále platí
$$a \in A, x \leq a \Rightarrow x \in A$$
$$b \in A', y \geq b \Rightarrow y \in A'$$
11. Neklesající shora omezená posloupnost $[a_n]$ má nejvýš jeden hromadný prvek. Je-li a hromadný prvek $[a_n]$, potom
$$a = \sup[a_n], a_n \to a.$$
Analogické tvrzení platí pro nerostoucí zdole omezenou posloupnost, místo suprema vystupuje infimum.

Archimédův axiom

Definice 37. Buď T uspořádané těleso, $a, b \in T, a > 0$. Potom existuje $n \in \mathbb{N} \subset T$, že platí

$$n \cdot a > b$$

Uspořádané těleso T, v němž platí Archimédův axióm, se nazývá *archimédovsky uspořádané.*

Těleso $\mathbb{Q}$ je Archimédosvsky uspořádané. V následující části textu bude T označovat archimédovsky uspořádané těleso.

Věta 2. Buď T archimédovsky uspořádané těleso. Potom:

1. $n^{-1} \to 0,\ 2^{-n} \to 0$ v T
2. Je-li a hromadný prvek posloupnosti $[a_n] \subset T$, existuje vybraná posloupnost $[a_{n_k}]$, že $a_{n_k} \to a$.
3. Neklesající shora omezená (resp. nerostoucí zdola omezená) posloupnost $[a_n] \subset T$ je cauchyovská.

Cantorův axiom

Definice 38. Každá posloupnost uzavřených do sebe vložených intervalů I_n z T má neprázdný průnik.

Axiom úplnosti

Definice 39. Každá cauchyovská posloupnost prvků z T má v T limitu.

Věta 3. Cantorův axiom a Axiom úplnosti jsou v uspořádaném tělese T ekvivalentní.

1.13.2 Konstrukce reálných čísel

Uspořádané těleso, v němž platí Archimédův a Cantorův axiom se nazývá těleso reálných čísel a označuje se $\mathbb{R}$.

Konstrukce, kterou nyní ukážeme, pochází původně od Georga Cantora. Jedná se o rozšíření racionálních čísel o iracionální pomocí cauchyovských posloupností.

Symbolem $\mathbf{R}$ označíme množinu všech cauchyovských posloupností racionálních čísel. Rovnost v $\mathbf{R}$ definujeme následujícím způsobem:

$$[a_n] = [b_n] \Leftrightarrow a_n - b_n \to 0$$

Součet a součin definujeme rovnostmi

$$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n], \quad [a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n]$$

Množina $\mathbf{R}$ s takto definovanými operacemi tvoří těleso, nulový prvek v $\mathbf{R}$ představuje posloupnost $[a_n]$, pro kterou platí $a_n \to 0$. Uspořádání v $\mathbf{R}$ je určeno podmnožinou $\mathbf{R}^+$, která obsahuje nulový prvek tělesa $\mathbf{R}$ a dále všechny prvky $[a_n]$, pro něž existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a kladné racionální číslo r taková, že $a_n \geq r$ pro všechna $n > n_0$. $\mathbf{R}$ tedy obsahuje $\mathbb{Q}$ jako podtěleso. Racionální číslo a je v $\mathbf{R}$ obsaženo například ve tvaru $[a] = [a, a, a, \ldots]$. Jednotkovým prvkem tělesa $\mathbf{R}$ je $[1] = [1, 1, 1, \ldots]$.

1.13.3 Axiomatické zavedení reálných čísel

Těleso reálných čísel lze zadefinovat těmito 13 axiomy.

Definice 40. Rovností na $\mathbb{R}$ nechť je základní rovnost na množině a nechť jsou na $\mathbb{R}$ definovány operace sčítání a násobení

$$(a, b) \to a + b; \quad (a, b) \to a \cdot b$$

Pro které platí:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $a + b = b + a$
3. Existuje $0 \in \mathbb{R}$, pro všechna $a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$
4. Pro všechna $a \in \mathbb{R}$, existuje $-a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot b = b \cdot a$
7. Existuje $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$, pro všechna $a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$
8. Pro všechna $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, existuje $a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$
9. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Dále nechť $\mathbb{R}$ obsahuje vlastní podmnožinu $\mathbb{R}^+$, pro kterou platí:

10. Pro všechna $a \in \mathbb{R}$: buď $a \in \mathbb{R}^+$, nebo $-a \in \mathbb{R}^+$
11. $a, b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+, a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

Uspořádání se definuje:

$$a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+, \quad a > b \Leftrightarrow a \geq b \wedge a \neq b$$

Uspořádání je archimédovské:

12. Pro každé dva prvky $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ existuje celé kladné číslo $n : n \cdot a > b$.

Množina $\mathbb{R}$ vyhovuje Cantorovu axiomu:

13. Je-li $\langle I_n \rangle$ posloupnost do sebe vložených intervalů ($I_{n+1} \subset I_n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}_0^+$), potom je průnik intervalů této posloupnosti neprázdný.

1.13.4 Porovnání konstrukce a axiomů

Nyní ověříme, že konstrukce z cauchyovských posloupností skutečně splňuje všechny axiomy a může být tedy nazývána reálnými čísly. Jelikož budeme pracovat s posloupnostmi, musíme zavést jejich aritmetiku.

Definice 41. Je-li $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, pak platí (Jarník, 1974, str. 81):

- $\lim(a_n + b_n) = a + b$
- $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

A pokud platí $b \neq 0$

- $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Aritmetika limit nám říká, že sčítání a násobení konvergentních posloupností je stejné jako u racionálních čísel. Jelikož všechny posloupnosti jsou cauchyovské, jsou také konvergentní. Tím pádem v modelu platí stejné sčítání, odčítání, násobení a dělení jako v racionálních číslech. Důsledkem je, že axiomy $1, 2, 5, 6, 9, 11, 12$ jsou v modelu splňeny triviálně.
Ostatní axiomy podrobíme bližší kontrole.

Axiom 3 *Existuje* $0 \in \mathbb{R}$, *pro všechna* $a \in \mathbb{R} : a + 0 = a$.

0 je zastoupena posloupností b_n, jejíž členy jsou rovny nule. Podle aritmetiky limit pak jasně platí, že pro každou posloupnost $a_n \to a$ platí $a_n + b_n = a$.

Axiom 4 *Pro všechna* $a \in \mathbb{R}$, *existuje* $-a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$.

Mějme posloupnost $a_n \to a$ a $b_n \to -1$, potom podle aritmetiky limit pro posloupnost $c_n = a_n \cdot b_n$ platí, že její limita je $-a$ a součet $a_n + c_n$ je roven 0.

Axiom 7 *Existuje* $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0$, *pro všechna* $a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a$.

Jedničku reprezentuje například posloupnost b_n, která je pro všechna n rovna 1, tato řada je různá od nuly pro každý její člen. Pro každou řadu $b_n \neq 0$, jejíž limita je b, platí $a_n \cdot b_n = b$.

Axiom 8 *Pro všechna* $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, *existuje* $a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$.

Prvek a^{-1} je vyjádřen například posloupností $a_n = \frac{1}{a}$. V cauchyovské konstrukci je také obsažena posloupnost $b_n = a$ a podle aritmetiky limit posloupností platí $a_n \cdot b_n = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

Axiom 10 *Nechť* $\mathbb{R}$ *obsahuje vlastní podmnožinu* $\mathbb{R}^+$, *pro kterou platí:*

$$\textit{Pro všechna } a \in \mathbb{R} : \textit{buď } a \in \mathbb{R}^+, \textit{ nebo } -a \in \mathbb{R}^+$$

Množina $\mathbb{R}^+$ vypadá následně: $\mathbb{R}^+ = \{a_n : a_n \in \mathbb{R} \wedge \lim a_n \geq 0\}$. Nyní již čtenář lehce nahlédne, že axiom 10 je splněn.

Axiom 13 *Pro každé dva prvky* $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ *existuje celé kladné číslo* m : $m \cdot a > b$.[3]

Prvky a, b jsou tvořeny posloupnostmi $a_n \to a, b_n \to b$. Určitě existuje posloupnost $c_n \in \mathbb{R}$ taková, že $\lim c_n = \frac{b}{a}$. Potom můžeme jako m zvolit libovolnou posloupnost d_n, pro kterou platí:

$$d_n > c_n \wedge \forall n : d_n \in \mathbb{Z}$$

Která je určitě obsažena v cauchyovském modelu reálných čísel.

Tímto jsme ukázali, že model zkonstruovaný z cauchyovských posloupností splňuje všech 13 axiomů reálných čísel a skutečně tvoří reálná čísla.

[3] Zde je použito písmene m místo n, aby se nepletlo s označením $n$tého prvku posloupnosti.

1.13.5 Alternativní axiomy

Bez důkazu uvedeme tyto axiomy, které jsou ekvivalentní s těmi, které jsme odvodili. S těmito axiomy budeme pracovat ve druhé kapitole (Aliprantis, 1998).

1. Komutativita: $x + y = y + x$ a $x \cdot y = y \cdot x$
2. Asociativita: $x + (y + z) = (x + y) + z$ a $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
3. Distributivita: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
4. Existuje prvek $0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists - x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$
6. Existuje prvek $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq y \vee y \leq x$
9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
10. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow x + z \leq y + z$
11. Axiom úplnosti: Množina horních závor A^* má minimum pro každou neprázdnou shora omezenou množinu A.

1.14 Nespočetnost reálných čísel

V roce 1891 G. Cantor předvedl důkaz, který je dnes známý jako *Cantorova diagonální metoda*. Touto metodou Cantor dokázal, mimo jiné, že reálná čísla jsou nespočetná (Simmons 20). Nyní si tento důkaz předvedeme.

Důkaz. **Cantorova diagonální metoda**
Dokážeme, že interval $(0, 1)$, který je podmnožinou reálných čísel, je nespočetný a tím bude dokázáno, že i celá reálná čísla jsou nespočetná.

Předpoklad: Reálná čísla a tedy i interval $(0, 1)$ jsou spočetné. Musí proto existovat posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$, která obsahuje všechna čísla z intervalu $(0, 1)$. Každé z čísel v tomto intervalu lze zapsat desetiným rozvojem ve tvaru $0,251091\ldots$

Vytvoříme číslo x následně: zvolíme dvě různá čísla b, c z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Pokud má a_k na k-tém místě v desetiném rozvoji číslo b, pak x bude mít na k-tém místě c, pokud a_k nemá na k-tém místě b, pak x bude mít na k-tém místě b.

Číslo x může vypadat například takto: $0, bbcbccbcb\ldots$ Toto číslo se od každého a_k liší určitě na k-tém místě a proto nemůže být obsaženo v posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a zároveň platí $0 < x < 1$, což je ve sporu s předpokladem. $\square$

2. Rozšířená reálná čísla

Rozšířená reálná čísla jsou reálná čísla, která jsou rozšířená o dva prvky, a to $+\infty$ a $-\infty$. Těmto prvkům říkáme po řadě *plus nekonečno* a *mínus nekonečno*, plus nekonečno pro zkrácení zápisu značíme pouze ∞. Rozšířená reálná čísla značíme $\mathbb{R}^*$. Můžeme tedy napsat:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$$

V první kapitole jsme si ukázali, že můžeme buďto uvést axiomy, které mají platit a nebo můžeme vytvořit model. Představa, kterou mají lidé obvykle v hlavě, je osa reálných čísel s plus nekonečnem na „pravém konci“ a mínus nekonečnem na konci levém. Tato představa je často problematická, protože svádí k tomu, že nekonečno je velice vysoké číslo, což ale není pravda, protože osa reálných čísel není omezená ani shora ani zdola a tedy neexistuje číslo tak vysoké aby bylo 'na konci' reálné osy čísel.

Nekonečna v tomto textu zavádíme za účelem jejich užití v limitním počtu. Hlavním úkolem je tedy sestavit rozšířenou osu reálných čísel tak, aby jsme pomocí ní byli schopni efektivně vyčíslovat limity.

Rozšířená osa reálných čísel má jak plus nekonečno, tak mínus nekonečno, ale například rozšířená komplexní čísla mají pouze jedno nekonečno. Toto je možné si představit, jako kartézský součin reálné a imaginární osy natažený na kouli a doplněný o protipól počátku – jediné nekonečno. Tento model funguje na komplexních číslech, protože nepožadujeme uspořádání. Pokud bychom si představili osu reálných čísel jako kružnici s 0 na jedné straně a nekonečnem naproti, pak by nebylo možné rozhodnout, které číslo je větší, protože by byla zároveň napravo i nalevo od sebe.[1]

V této kapitole se budeme zabývat tím, co je potřeba říci, aby rozšířená reálná čísla fungovala tak jak mají. Pokusíme se najít axiomy, které budou stačit ke kompletnímu zavedení.

2.1 Tabulka operací

Nejzjevnější způsob, jak zavést výsledky operací s nekonečmi, je jejich vypsání. Tento způsob ale není didakticky příliš vhodný. Učit se nazpaměť tabulku operací studentům nijak nepomůže k tomu, aby měli vhled do toho, jak rozšířená osa reálných čísel funguje. Avšak tím, že začneme tímto zavedením, budeme při dalších postupech již vědět, co všechno musí být splněno, a budeme to moci efektivně ověřovat.

Chceme, aby rozšířená reálná čísla byla uspořádaná. Prohlásíme tedy, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí:

$$-\infty < \infty \wedge -\infty < a < \infty$$

Rozšířenou osu reálných čísel zavádíme pro účely limitního počtu a výpis vlastností proto vychází z věty o aritmetice limit (Jarník, 1974).

[1]Komplexní čísla jsou zde použita pouze pro srovnání, nedefinujeme je nikde v textu a ani nejsou jinde použita.

Uvádíme věty o limitách posloupností, věty o limitách funkcí jsou zcela analogické.

Věta 4. Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$, $\lim b_m = b \in \mathbb{R}^*$. Pak

- je-li $a, b \in \mathbb{R}$, je $\lim a_n + b_n = a + b$,
- je-li $a = \infty$ a $b > -\infty$, je $\lim a_n + b_n = \infty$,
- je-li $a = -\infty$ a $b < \infty$, je $\lim a_n + b_n = \infty$.

K vyčíslení prvního případu tedy stačí aritmetika v $\mathbb{R}$, pro další dva zavedeme v $\mathbb{R}^*$ vztahy $\infty + b = \infty$ pro $b > -\infty$ a $-\infty + b = -\infty$ pro $b < \infty$ (a komutativně rozšíříme). V případě, že $a = \infty$ a $b = -\infty$ (nebo obráceně), nemůžeme pouze na základě a, b o limitě $a_n + b_n$ rozhodnout. Uveďme čtyři posloupnosti:

$$\begin{aligned}
a_n &= n^2 - n\\
b_n &= n - n^2\\
c_n &= n - n\\
d_n &= n \cdot (2 + (-1)^n) - n
\end{aligned}$$

Platí $\lim a_n = \infty, \lim b_n = -\infty, \lim c_n = 0$ a $\lim d_n$ neexistuje. Můžeme tedy buď říci, že pro vyčíslování limit nemůžeme výsledek operace $\infty - \infty$ použít, ať je definován jakkoli, nebo, návodněji, výsledek této operace ponechat nedefinovaný.

Analogicky postupujeme v případě násobení.

Věta 5. Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$, $\lim b_m = b \in \mathbb{R}^*$. Pak

- je-li $a, b \in \mathbb{R}$, je $\lim a_n b_n = ab$,
- je-li $a = \infty$ a $b > 0$ nebo $a = -\infty$ a $b < 0$, je $\lim a_n b_n = \infty$,
- je-li $a = -\infty$ a $b > 0$ nebo $a = \infty$ a $b < 0$, je $\lim a_n b_n = -\infty$.

Budeme tedy definovat $\infty \cdot b = \infty$, $-\infty \cdot b = -\infty$ pro $b > 0$ a $\infty \cdot b = -\infty$, $-\infty \cdot b = \infty$ pro $b < 0$. Výraz $\pm\infty \cdot 0$ opět ponecháme nedefinovaný, protože stejně jako v případě sčítání zde není možno z hodnot a a b o limitě rozhonout. Ukažme tento fakt na následujících posloupnostech:

$$\begin{aligned}
a_n &= n^2 \cdot \frac{1}{n}\\
b_n &= n \cdot \frac{1}{n^2}\\
c_n &= n^2 \cdot (-\frac{1}{n})\\
d_n &= n \cdot (2 + (-1)^n) \cdot \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Platí $\lim a_n = \infty, \lim b_n = 0, \lim c_n = -\infty$ a $\lim d_n$ neexistuje.

V následujících tabulkách znamená $\mathbb{R}$ libovolný prvek reálných čísel, $\mathbb{R}^+$ znamená libovolný prvek reálných čísel větší než 0 a $\mathbb{R}^-$ znamená libovolný prvek reálných čísel menší než 0. Uvnitř tabulky sčítání znamená $\mathbb{R}$ součet dvou libovolných reálných čísel tak, jak je definováno na reálných číslech. Uvnitř tabulky

násobení znamená $\mathbb{R}^-$ a $\mathbb{R}^+$ výsledek násobení, jak je definováno na reálných číslech.
Sčítání na $\mathbb{R}^*$ dodefinováváme takto:

$+$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	nedefinováno
$\mathbb{R}$	$-\infty$	$\mathbb{R}$	∞
∞	nedefinováno	∞	∞

Vysvětlili jsme proč nedefinujeme $-\infty + \infty$ a $\infty + (-\infty)$. Všech ostatních výsledků bylo dosaženo pomocí věty o aritmetice limit.
Násobení na $\mathbb{R}^*$ dodefinováváme takto:

$\cdot$	$-\infty$	$\mathbb{R}^-$	0	$\mathbb{R}^+$	∞
$-\infty$	∞	∞	není definováno	$-\infty$	$-\infty$
$\mathbb{R}^-$	∞	$\mathbb{R}^+$	0	$\mathbb{R}^-$	$-\infty$
0	není definováno	0	0	0	není definováno
$\mathbb{R}^+$	$-\infty$	$\mathbb{R}^-$	0	$\mathbb{R}^+$	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	není definováno	∞	∞

Rozšířená reálná čísla jsou tedy nyní uspořádaná a mají definované operace sčítání a násobení, ne však úplně. V algebraickém smyslu tedy $+$ a $\cdot$ nejsou operace na $\mathbb{R}^*$.

2.1.1 Zavedení v literatuře

V knize *Principles of Real Analysis* od autorů Ch. Aliprantise a O. Burkinshawa se setkáme s podobným zavedení ve stručnější podobě. Následující zavedení je překladem z angličtiny ze zmíněné knihy.

Rozšířená osa reálných čísel $\mathbb{R}^*$ je tvořena reálnými čísly a dvěma přidanými prvky, $+\infty$ a $-\infty$, tedy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

Algebraické operace pro tato dvě nekonečna jsou definována následovně:

1. $\infty + \infty = \infty$ a $-\infty - \infty = -\infty$
2. $(\pm\infty) \cdot \infty = \pm\infty$ a $(\pm\infty) \cdot (-\infty) = \mp\infty$
3. $x + \infty = \infty$ a $x - \infty = -\infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$
4. $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ pokud $x > 0$ a $x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ pokud $x < 0$

Výrazy $\infty - \infty$ a $-\infty + \infty$ jsou ponechány nedefinované. V této knize se předpokládá

5. $0 \cdot \infty = 0$

$\mathbb{R}^*$ je uspořádané s ∞ jako největší prvek a $-\infty$ jako nejmenší prvek. Dále,

6. $-\infty < x < \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (Aliprantis, 1998, str. 29)

Toto zavedení je stejné jako naše tabulka operací, s rozdílem, že my uvádíme výraz $0 \cdot \infty$ jako nedefinovaný. Definovat $0 \cdot \infty = 0$ je vhodné v aritmetice určené pro teorii míry a integrálu, nikoli však v limitním počtu, jak jsme vysvětlili výše. Pokud bychom 5. položku uvedli jako nedefinovaný výraz, získali bychom ekvivalentní zavedení.

2.2 Platnost axiomů $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^*$

Ověříme, které z axiomů definujících reálná čísla, zůstávají platné i po rozšíření na $\mathbb{R}^*$. K tomuto ověření použijeme tabulky sčítání a násobení, které jsme uvedli výše. Pro přehlednost zde uvádíme ještě jednou axiomy z první kapitoly, jejichž platnost budeme nyní ověřovat.

1. Komutativita: $x + y = y + x$ a $x \cdot y = y \cdot x$
2. Asociativita: $x + (y + z) = (x + y) + z$ a $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
3. Distributivita: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
4. Existuje prvek $0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$
6. Existuje prvek $1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x$
7. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$
8. $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq y \vee y \leq x$
9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
10. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$
11. Axiom úplnosti: Množina horních závor A^* má minimum pro každou neprázdnou shora omezenou množinu A.

Pokud některý axiom nebude platit na rozšířené ose reálných čísel, pak se pokusíme najít jiný axiom, který by zachoval vlastnosti původního na reálných číslech a zároveň platil na rozšířené ose reálných čísel. Ověřujeme pouze případy, kde se vyskytuje $\pm\infty$, ostatní případy vždy platí, neboť jsou právě těmito axiomy definovány.

1. Komutativita: tabulky sčítání a násobení jsou diagonálně symetrické, pro libovolné dva prvky z $\mathbb{R}^*$ proto platí $a + b = b + a$ a $a \cdot b = b \cdot a$. Může nastat případ, kdy není ani jedna strana definována, musíme proto dodat, pokud má jedna strana smysl.

2. Asociativita: pokud se kdekoli v součinu, bez ohledu na uzávorkování, vyskytuje $\pm\infty$ a 0, pak ani jedna strana není definovaná. Pokud se v součtu vyskytuje $\infty - \infty$, pak také není ani jedna strana definovaná. Pokud má jedna strana smysl, pak asociativita platí.

3. Distributivita na $\mathbb{R}^*$ neplatí v následujících případech:

$$\forall b, c \in \mathbb{R}^*, b > 0, c < 0 : \pm\infty \cdot (b + c) \neq \pm\infty \cdot b + (\pm\infty \cdot c)$$
$$\forall b \in \mathbb{R}^*, c = 0 : \pm\infty \cdot (b + c) \neq \pm\infty \cdot b + (\pm\infty \cdot c)$$

   Pokud jsou b a c navzájem opačné prvky, nemá smysl ani jedna strana (levá $\infty \cdot 0$, pravá $\infty + (-\infty)$), jinak levá strana smysl má, pravá ne.

   Distributivita je jedna z nejzákladnějších vlastností a proto nám nezbývá než ji i nadále používat, ale při každém použití musíme zvážit, zda může nastat některá z uvedených možností. Pokud ano, pak distributivitu použít nemůžeme. Vyloučení těchto případů nijak neoslabí distributivitu na reálných číslech.

4. Prvek 0 existuje a rovnost $x + 0 = x$ je splněna i pro $x = \pm\infty$.

5. Opačný prvek, tak, jak se v algebře definuje, k $\pm\infty$ neexistuje, neboť v $\mathbb{R}^*$ není žádný prvek, jehož součet s některým z těchto prvků by byl nulový. Přesto vztah těchto dvou prvků některé důležité vlastnosti opačných prvků splňuje. Jak ukážeme později, platí např. $(-1)\cdot\infty = -\infty$, $(-1)\cdot(-\infty) = \infty$. Další vlastnost – totiž fakt, že limita posloupnosti opačných prvků je opačná – nám umožní formulovat zobecnění pojmu opačného prvku tak, aby již v $\mathbb{R}^*$ vždy existoval:

$$\forall a \in \mathbb{R}^*\, \exists b \in \mathbb{R}^* : (\lim a_n = a \wedge \forall n \in \mathbb{N}\, \exists b_n : a_n + b_n = 0) \Rightarrow \lim b_n = b$$

   Použití poměrně složitého konceptu limity narušuje jednoduchou formu původních axiomů, vzhledem k účelu zavedení rozšířené reálné osy pro limitní počet je však přirozené.

6. Existuje prvek 1 a $1 \cdot x = x$ platí i pro $x = \pm\infty$.

7. Neexistuje takový prvek x^{-1}, aby platilo $\pm\infty \cdot x^{-1} = 1$. Musíme proto vyloučit prvky $\pm\infty$, stejně jako na $\mathbb{R}$ vylučujeme 0.

8. Předpokládáme $-\infty < \infty$ a pro všechna x reálná $-\infty < x < \infty$ a proto platí $\forall x \in \mathbb{R}^* : x \leq y \vee y \leq x$.

9. Implikace $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^* : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ platí, pokud nenastává případ $-\infty + \infty$. Musíme proto axiom upravit na $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \{x, z\} \neq \{-\infty, \infty\} \wedge \{y, z\} \neq \{-\infty, \infty\} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$. Na reálných číslech axiom nebyl nijak oslaben.

10. Platí pouze slabší varianta implikace $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leq y \wedge 0 < z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$, musíme zakázat $z = 0$, protože $\pm\infty \cdot 0$ není definováno. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ ovšem platí:

$$x = x \cdot (1 + 0) = x + x \cdot 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0$$

Axiom jsme proto pro reálná čísla nijak neoslabili.

11. Axiom úplnosti je splněn pro všechny ohraničené podmnožiny z $\mathbb{R}$, protože tento axiom definuje $\mathbb{R}$. Neohraničené podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou na $\mathbb{R}^*$ ohraničeny pouze jedním prvkem, a to ∞, tento prvkem je proto nejmenší horní závorou.

Není zřejmé, zda předchozí modifikace axiomů $\mathbb{R}$ jsou plnou axiomatizací $\mathbb{R}^*$. Nebude-li vyžadovat nezávislost axiomů, můžeme přidávat další, které budou postulovat důležité vlastnosti $\mathbb{R}^*$, jako existenci nevlastních prvků. Přidáme proto dva axiomy, které zaručí existenci $\pm\infty$ v $\mathbb{R}^*$.
Přidáváme dva axiomy:

1. Existuje největší prvek $\mathbb{R}^*$, označíme jej $+\infty$.
2. Existuje nejmenší prvek $\mathbb{R}^*$, označíme jej $-\infty$.

2.3 Axiomy rozšířené osy reálných čísel

Získali jsme axiomy, které definují reálná čísla a zároveň platí i na rozšířené ose reálných čísel.

1. Existuje největší prvek $\mathbb{R}^*$, označíme jej $+\infty$.
2. Existuje nejmenší prvek $\mathbb{R}^*$, označíme jej $-\infty$.
3. Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^*$, $\{x, y\} \neq \{\infty, -\infty\}$ platí: $x+y = y+x$ a pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^*$, $\{x, y\} \neq \{\pm\infty, 0\}$ platí: $x \cdot y = y \cdot x$.
4. Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}^*, \{, \infty, -\infty\} \not\subset \{x, y, z\}$ platí: $x+(y+z) = (x+y)+z$. Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}^*, \{, \pm\infty, 0\} \not\subset \{x, y, z\}$ platí: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
5. Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ platí: $x \neq \pm\infty \vee y \cdot z > 0 \Rightarrow x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.
6. Existuje prvek 0 takový, že $x + 0 = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^*$.
7. Pro všechna $a \in \mathbb{R}^*$,existuje $b \in \mathbb{R}^*$ takové, že $(\lim a_n = a \wedge \forall n \in \mathbb{N}\, \exists b_n : a_n + b_n = 0) \Rightarrow \lim b_n = b$, b nazveme opačným prvkem[2] a.
8. Existuje prvek 1, $1 \neq 0$ a $1 \cdot x = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^*$.
9. Existuje prvek x^{-1} pro všechna $x \in \mathbb{R}^*, x \neq 0, x \neq \pm\infty$ takový, že $x \neq \pm\infty \Rightarrow x \cdot (x^{-1}) = 1$.

[2]Nevyžadujeme zde, aby platilo $a + (-a) = 0$ a nejedná se proto o opačné prvky jako takové.

10. Pro všechna $x \in \mathbb{R}^*$ platí: $x \leq y \vee y \leq x$.
11. Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}^*, \{x, z\} \neq \{-\infty, \infty\} \wedge \{y, z\} \neq \{-\infty, \infty\}$ platí: $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
12. Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ platí: $x \leq y \wedge 0 < z \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$.
13. Axiom úplnosti: Množina horních závor A^* má minimum pro každou neprázdnou shora omezenou množinu A.

Nyní máme 13 axiomů rozšířené osy reálných čísel. Pokusíme se nyní odvodit vlastnosti, které požadujeme, aby rozšířená osa reálných čísel měla.

2.3.1 Ověření axiomů

Pokud do axiomu $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \{x, z\} \neq \{-\infty, \infty\} \wedge \{y, z\} \neq \{-\infty, \infty\} : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$. dosadíme x, z libovolná reálná a $y = \infty$, dojdeme k:

$$x \leq \infty \Rightarrow x + z \leq \infty + z$$

Předpoklad je splněn pro všechna reálná čísla a musí proto platit $\infty + z$ je větší nebo rovno $x + z$ pro libovolná x, z reálná. Musí proto platit $\infty + z = \infty$ pro všechna z reálná.

Z toho, jak jsme si definovali opačné prvky přímo plyne, že $\infty \cdot (-1) = -\infty$ a obráceně.
Ověříme, že z axiomů plyne $-\infty < \infty$ a $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty$.

Důkaz.

Definice 42 (Maximum, minimum)**.**
Nechť existuje prvek m množiny M a pro všechny prvky x množiny M platí:

$$m \geq x$$

Pak řekneme, že m je maximem množiny M.

Nechť existuje prvek n množiny M a pro všechny prvky x množiny M platí:

$$m \leq x$$

Pak řekneme, že n je minimem množiny M.

Z definice maxima přímo plyne:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : x \leq \infty$$

A zároveň platí $\infty \notin \mathbb{R}$, čímž dostáváme:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x < \infty$$

Z definice minima přímo plyne:

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : x \geq -\infty$$

A zároveň platí $-\infty \notin \mathbb{R}$, čímž dostáváme:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > \infty$$

Tím jsme dokázali $-\infty < x < \infty$ pro všechna x reálná. Z faktu, že ∞ je maximem $\mathbb{R}^*$ a $-\infty$ je minimem $\mathbb{R}^*$ plyne $-\infty < \infty$. $\square$

Z axiomu $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, \{x, z\} \neq \{-\infty, \infty\} \wedge \{y, z\} \neq \{-\infty, \infty\}$ platí: $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ zopakujeme postup, tentokrát pro y, z libovolná reálná a $x = -\infty$:

$$-\infty \leq y \Rightarrow -\infty + z \leq y + z$$

Musí platit, že $-\infty + z$ je menší rovno než všechna reálná čísla, proto určitě platí $-\infty + z = -\infty$ pro všechna z reálná.

Pokud by bylo $y = \infty = z$ a x libovolné reálné:

$$x \leq \infty \Rightarrow x + \infty \leq \infty + \infty \Rightarrow \infty \leq \infty + \infty$$

Musí proto platit $\infty + \infty = \infty$.

Pokud by bylo $x = -\infty = z$ a y libovolné reálné:

$$-\infty \leq y \Rightarrow -\infty + (-\infty) \leq y + (-\infty) \Rightarrow -\infty + -(\infty) \leq -\infty$$

Musí proto platit $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

Z axiomu o existenci jednotkového prvku víme, že $1 \cdot x = x$. Pomocí distributivity získáme:

$$x + x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = (1 + 1) \cdot x = 2 \cdot x$$

Takto můžeme pokračovat.

$$x + x + x = 2 \cdot x + 1 \cdot x = (2 + 1) \cdot x = 3 \cdot x$$

Provedeme indukční krok

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n\text{-krát}} = (n - 1) \cdot x + 1 \cdot x = n \cdot x$$

Jelikož jsme již dokázali $\infty + \infty = \infty$ a také $-\infty + (-\infty) = -\infty$ tak máme také dokázáno:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 : n \cdot \infty = \infty \wedge n \cdot (-\infty) = -\infty$$

Při použití distributivity nenastal žádný z případů, kde distributivita neplatí, tento postup je korektní. Nyní již umíme násobit rozšířená reálná čísla přirozenými čísly bez 0.

Víme, že platí pro všechna n přirozená, nenulová:

$$\infty = 1 \cdot \infty = \frac{n}{n} \cdot \infty = \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \infty)$$

Víme, že $n \cdot \infty = \infty$, získali jsme rovnost:

$$\infty = \frac{1}{n} \cdot \infty$$

Můžeme proto prohlásit o násobení nekonečna libovolným zlomkem $\frac{p}{q} > 0$:

$$\frac{p}{q} \cdot \infty = \frac{1}{q} \cdot (p \cdot \infty) = \infty$$

Rozšířili jsme násobení rozšířených reálných čísel na násobení kladnými zlomky.

Pro libovolné $r > 0$ reálné platí: existuje q_1, q_2 racionální, takové, že platí $0 < q_1 < r < q_2$. Využijeme axiom $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^*, c \geq 0 : a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$.

$$q_1 \leq r \leq q_2 \Rightarrow q_1 \cdot \infty \leq r \cdot \infty \leq q_2 \cdot \infty \Rightarrow \infty \leq r \cdot \infty \leq \infty$$

Z čehož je již jasné, že platí $a \cdot \infty = \infty$ pro všechna $a > 0$ reálná. Čtenář lehce nahlédne, že stejně tak platí $a \cdot (-\infty) = -\infty$ pro všechna $a > 0$ reálná.

Víme, že platí $\infty \cdot (-1) = -\infty$, umíme tedy násobit všechny prvky $\mathbb{R}^*$ prvkem (-1). Každý prvek $x \in \mathbb{R}^*, x < 0$ můžeme zapsat jako $(-1) \cdot (-x), (-x) > 0$. Z toho, že umíme násobit všemi kladnými prvky $\mathbb{R}^*$ a (-1) proto plyne, že umíme násobit všemi prvky $\mathbb{R}^*$, kromě výrazu $\pm\infty \cdot 0$, tento výraz není definován z důvodů, které jsme již uvedli.

Tímto jsme ukázali, že z axiomů, které jsme uvedli lze odvodit vlastnosti, které požadujeme pro $\mathbb{R}^*$. Nejsme ale schopni dokázat, že definují $\mathbb{R}^*$ jednoznačně a že jsou nezávislé a proto řeknem, že se jedná pouze o vlastnosti, které jsou splněny na $\mathbb{R}^*$.

2.4 $\mathbb{R}^*$ jako algebraická struktura

Máme definovanou množinu $\mathbb{R}^*$ a na ní dvě operace, sčítání a násobení, rozhodneme nyní, jakou algebraickou strukturu $(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$ tvoří.

Grupa s operací sčítání

Aby rozšířená reálná čísla tvořila grupu, musela by mít neutrální prvek a inverzní prvky k operaci sčítání[3]. Neutrální prvek je 0, kdyby jím bylo něco jiného, pak by přirozená, celá, racionální a reálná čísla netvořila grupu a ani rozšířená reálná čísla jako jejich nadmnožina by tedy nemohla tvořit grupu. V $\mathbb{R}^*$ musí tedy ke každému prvku existovat inverzní prvek vzhledem ke sčítání, tak aby platilo:

$$a + a' = 0$$

Tuto vlastnost musíme ověřit pouze u prvků, které jsme přidali, tedy $\pm\infty$. Přestože jsme vytvořili takový axiom, který povoluje, aby $\pm\infty$ mělo opačný prvek, neplatí rovnost $\infty + x = 0$ pro žádné x a rozšířená osa reálných čísel proto **netvoří** grupu s operací sčítání.

[3] Zde se již jedná o opačné prvky, jak jsou definovány na $\mathbb{R}$

Grupa s operací násobení

Neutrálním prvkem vzhledem k operaci násobení je 1. Abychom mohli nazvat rozšířenou osu reálných čísel grupou s operací násobení, muselo by plati, že existuje takový prvek $x \in \mathbb{R}^*$, pro který platí $\infty \cdot x = 1$. Takový prvek neexistuje a rozšířená osa reálných čísel proto **netvoří** grupu s operací násobení.

Rozšířená osa reálných čísel netvoří ani aditivní, ani multiplikativní grupu a nemůže proto tvořit ani těleso.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s přirozenými, celými, racionálními a reálnými čísly, jak jsou definována, co na nich platí a proč je definujeme a poté aximaticky zavést rozšířená reálná čísla.

Tyto množiny jsme definovali, ale také jsme je zkonstruovali. Definovali jsme základní operace, sčítání a násobení, a uspořádání na těchto množinách. Dokázali jsme jejich spočetnost, respektive nespočetnost u reálných čísel.

V první kapitole jsme uvedli vše, co je třeba znát o těchto množinách. Tyto informace lze dohledat v literatuře. Tato práce je však stručně a přehledně řadí v jednom krátkém textu, přínos první kapitoly je proto v tom, že čtenář si může lehce zjistit všechna důležitá fakta bez schánění mnoha knih. Nepodařilo se nalézt literaturu, kde by bylo pohromadě axiomatické a konstruktivní zavedení. Zvláště pak tato zavedení na přirozených číslech se těžko hledají, protože většina literatury předpokládá znalost celých čísel i s operacemi.

Našim cílem v kapitole druhé bylo najít axiomy, které by zavedli rozšířenou osu reálných čísel. Našli jsme vlastnosti, které definují reálná čísla a jsou splněna na rozšířené ose reálných čísel. Nepodařilo se nám již ověřit, zda definují $\mathbb{R}^*$ jednoznačně a zda jsou na sobě nezávislé. Důvod proč se axiomatické zavádění nepoužívá v literatuře je zřejmě ten, že struktura $(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$ netvoří ani grupu ani těleso (což jsme v textu ukázali) a proto je její axiomatické zavedení složité a ne příliš užitečné.

Stanovené cíle, nalezení axiomů, které kompletně definují $\mathbb{R}^*$, se podařilo naplnit jen částečně, o nalezených vlastnostech nemůžeme prohlásit, že se jedná o axiomy. První kapitola je ve výsledku rozsáhlejší než bylo původně zamýšleno, ale všechny uvedené informace souvisí s tématem a jsou přínosné pro čtenáře.

Seznam použité literatury

[1] ALIPRANTIS, Charalambos D a Owen BURKINSHAW. Principles of real analysis. 3rd ed. San Diego: Academic Press, 1998, x, 415 p. ISBN 0120502577

[2] ATTEN, Markus Sebastiaan Paul Rogier van. One hundred years of intuitionism (1907-2007): the Cerisy conference. Boston: Birkhauser, c2008, xiii, 422 p. Publications des Archives Henri-Poincaré.

[3] BELL, E. T. Men of Mathematics. New York 1986, str. 477.

[4] JARNÍK, Vojtěch. Diferenciální počet: Vysokošk. učebnice. 1. [díl]. 6., nezm. vyd. Praha: Academia, 1974. 391, [1] s.

[5] HAZEWINKEL, Edited by Michiel. Encyclopaedia of mathematics. [Online-Ausg.]. Berlin: Springer-Verlag, 2002. ISBN 1402006098.

[6] HODGE, Jonathan K, Steven SCHLICKER a Ted A SUNDSTROM. Abstract algebra: an inquiry-based approach. xxii, 573 pages. ISBN 9781466567061.

[7] HOLMES, M. Randall. Elementary set theory with a universal set. Louvain-la-Neuve: Academia Bruylant, 1998. ISBN 2872094881.

[8] KATE, S.K. a BHAPKAR H.R. Basics Of Mathematics, Technical Publications, 2009. 120 s.

[9] KENNEDY, C. Hubert. Peano. Life and Works of Giuseppe Peano. Reidel, Dordrecht u. a. 1980, ISBN 90-277-1068-6 (Studies in the History of Modern Science 4).

[10] KOLIHA, Jaromír Axiomatické zavedení reálných čísel. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, vol. 14 (1969), issue 1, pp. 1-14

[11] KOŘÍNEK, Vladimír. Základy algebry. 2. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956. 520 s.

[12] MAC LANE, Saunders a BIRKHOFF, Garrett. Algebra. 2. vyd. Bratislava: Alfa, 1974. 662 s. Edícia teoretickej literatúry.

[13] PELC, Jan. Peanova aritmetika prvního řádu. Studentský text, 2008. 10 s.

[14] ROGERS, L. (2015). The History of Negative Numbers : nrich.maths.org. [online] Nrich.maths.org. Dostupné na: `http://nrich.maths.org/5961` [Zobrazeno 28 Mar. 2015].

[15] SIMMONS, Keith. Universality and the liar: an essay on truth and the diagonal argument. New York: Cambridge University Press, 1993, xii, 229 p.:. ISBN 0521430690.