

Univerzita Karlova v Praze  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

## **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

**Konstrukce úloh na limity funkcí**  
**Problem posing for limits of functions**

Pavla Prskavcová

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika – pedagogika

2015

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma Konstrukce úloh na limity funkcí vypracovala pod vedením vedoucího práce Mgr. Derka Pilouse, Ph.D. samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla použita k získání jiného nebo stejného titulu.

V ..... dne .....

.....  
podpis

Moje poděkování patří Mgr. Derkovi Pilousovi, Ph.D. za nekonečnou trpělivost, kterou při práci se mnou projevil, za jeho čas a cenné rady.

Především bych ale chtěla na tomto místě poděkovat mamince za její podporu v průběhu celého mého studia, obzvlášť za podporu v uplynulých měsících.

Název práce: Konstrukce úloh na limity funkcí  
Autor: Pavla Prskavcová  
Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky  
Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

Abstrakt:

Práce se zabývá elementárními metodami řešení úloh z limitního počtu a návrhem úloh těmito metodami řešitelných. V první části shrnuje potřebnou teorii (definice a věty). V druhé části pak standardní metody řešení úloh na limity. V třetí části ukazuje pomocí analýzy metod z druhé části, jak navrhovat úlohy řešitelné elementárními metodami (bez použití výsledků z diferenciálního počtu).

Klíčová slova: limita, řešení úloh, návrh úloh, elementární funkce.

Title: Problem posing for limits of functions  
Author: Pavla Prskavcová  
Department: Department of Mathematics and Mathematical Education  
Supervisor: Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

Abstract:

The aim of the thesis is to describe methods of limit problems solving and of posing new problems that are solvable by those methods. The first part of the thesis contains the necessary theory (definitions and theorems). In the second part of the thesis there are described the standard methods used for evaluating containing limits. The third part suggest ways of posing problems solvable by using elementary methods, based on the analysis of methods describes in the second part of the thesis (without usage of the differential calculus).

Keywords: limit, problem solving, problem posing, elementary function.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Vymezení základních pojmů</b>	<b>7</b>
1.1	Limita funkce . . . . .	7
1.1.1	Rozšířená reálná osa . . . . .	9
1.1.2	Okolí bodu a sjednocená definice limity . . . . .	10
1.1.3	Spojitosť . . . . .	10
1.2	Věty používané při výpočtu limit . . . . .	11
1.2.1	Základní vlastnosti limit . . . . .	11
1.2.2	Limita konstantní a identické funkce . . . . .	11
1.2.3	Věta o aritmetice limit . . . . .	12
1.2.4	Věta o limitě složené funkce . . . . .	13
1.2.5	Věta o „dvou policajtech“ . . . . .	14
1.2.6	Věty o spojitosti funkce . . . . .	14
1.2.7	Vztah limity funkce k limitě posloupnosti . . . . .	15
1.2.8	Bolzanova-Cauchyova podmínka . . . . .	16
1.2.9	Dominance . . . . .	16
1.2.10	Ekvivalence . . . . .	17
1.2.11	L'Hospitalovo pravidlo . . . . .	18
1.2.12	Taylorovy polynomy . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Metody výpočtu limit funkcí</b>	<b>21</b>
2.1	Dosazovací limity . . . . .	21
2.2	Racionální funkce . . . . .	23
2.2.1	Polynomy . . . . .	23
2.2.2	Limita racionální funkce v nevlastním bodě . . . . .	23
2.2.3	Limita racionální funkce ve vlastním bodě . . . . .	25
2.3	Iracionální funkce . . . . .	26
2.3.1	Limita iracionální funkce v nevlastním bodě . . . . .	26
2.3.2	Limita iracionální funkce ve vlastním bodě . . . . .	27
2.4	Úlohy vedoucí na dominance . . . . .	27
2.5	Úlohy vedoucí na ekvivalence . . . . .	31
2.6	L'Hospitalovo pravidlo . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Konstrukce úloh</b>	<b>36</b>
3.1	Racionální a iracionální funkce . . . . .	37
3.2	Dominance . . . . .	40
3.3	Ekvivalence . . . . .	41
3.4	Kombinované úlohy . . . . .	44

# Úvod

Tématem mé bakalářské práce je konstrukce úloh na limity funkcí. K výběru tohoto tématu mě přivedl vedoucí mé práce Mgr. Derek Pilous, Ph.D. po mnoha konzultacích v rámci předmětu Matematická analýza I. Díky němu jsem v rámci přípravy na zápočtový test získala vhled do problematiky řešení úloh na limity funkcí. Toto téma mi přišlo natolik zajímavé, že jsem se později rozhodla zvolit si ho jako téma své bakalářské práce. Další motivací bylo vytvořit text, který by byl nápomocný studentům při přípravě na zápočtový test z Matematické analýzy I. Tento zápočtový test je hodnocen jako jeden z nejobtížnějších požadavků v rámci studia, proto mě napadlo, že by mohlo být prospěšné napsat práci, která by mohla být pomůckou při přípravě na tento test. I z těchto důvodů se v rámci práce snažím o vyjadřování co nejsrozumitelnější studentům bakalářského studia (například jsem se snažila vyhýbat formulaci definic a vět pomocí predikátového počtu nebo takové formulace alespoň přibližovat dále pomocí vlastních slov a ukázkových úloh).

Primárním cílem mé práce je vytvořit systém tvorby úloh na výpočet limit. Je tedy přímo určena především pro vyučující, kteří s její pomocí mohou vytvářet úlohy pro použití ve výuce a testování. První dvě části (zvláště druhá) mohou být však užitečné i jako studijní materiál pro studenty analytických předmětů; důrazem na elementární metody se odlišuje od většiny používaných cvičebnic a skript. Studenti, kteří si prostudují i poslední kapitolu, mohou navíc získat hlubší vhled do problematiky limit elementárních funkcí.

První část mé práce je věnována nezbytným teoretickým znalostem definic a vět, které se při výpočtu limit užívají, i samotných definic limit a dalších důležitých pojmů.

Druhá část nám ukáže situace, které mohou v rámci řešení limit nastat, a popíše metody jejich řešení. V rámci této části uvidíme jednoduché i složitější úlohy, ze kterých budeme vycházet v části třetí.

V třetí části se budeme zabývat samotnou konstrukcí úloh. Cílem této části je popsat tvorbu úloh takovým způsobem, aby byl čtenář schopen tvorbě úloh porozumět a následně sám takové úlohy konstruovat.

# Kapitola 1

## Vymezení základních pojmů

První kapitola je věnována základním pojmům, definicím a větám. Znalost těchto prvků je nezbytná pro porozumění dalším částem mé práce. Zaměření mé práce je praktické, proto jsou zde záměrně vynechány důkazy, které si čtenář v případě zájmu může dohledat v odkazované literatuře. Použité věty a definice jsou převzaty z odkazované literatury s drobnými úpravami, které si vyžádalo vytržení z kontextu původního textu. Zdrojem definic a matematických vět, u nichž není uveden odkaz, je Mgr. Derek Pilous, Ph.D.

### 1.1 Limita funkce

Začneme úlohou, která nám objasní intuitivní význam pojmu limita. Mějme jako příklad funkci  $f$  definovanou předpisem  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Taková funkce zcela jistě není definována v bodě  $x = 0$ . Pro všechny ostatní reálné hodnoty  $x$  funkce definována je. Za  $x$  můžeme dosazovat hodnoty, které se nule nerovnjají, ale blíží se k ní libovolně blízko. Nyní „půjdeme“ po ose  $x$  k číslu nula zprava: označíme jako  $x_1 = 0,1, x_2 = 0,01, x_3 = 0,001 \dots, x_n = 10^{-n}$ . Funkční hodnoty v těchto bodech budou  $f(x_1) \doteq 0,998334, f(x_2) \doteq 0,999983$  a od čísla  $x_3$  jsou funkční hodnoty v dalších bodech natolik blízké číslu jedna, že mezi nimi matematické programy jako Wolfram či GeoGebra nedělají rozdíl. Z toho vidíme, že čím jsou  $x$  bližší číslu 0 (ale při  $x \neq 0$ ), tím jsou funkční hodnoty v těchto hodnotách bližší číslu 1 – formálně budeme říkat, že limita funkce  $f$  pro  $x$  blížící se (též „jdoucí“) k 0 je rovna 1. Pojem limity je tedy matematickou formalizací intuitivního pojmu „blížení se“.

Nyní uvedeme formální definici limity funkce, nejprve vlastní (konečné) limity ve vlastním bodě.

**Definice 1.** (Jarník, 1984) Říkáme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $c \in \mathbb{R}$  limitu  $A \in \mathbb{R}$ , jestliže ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje kladné číslo  $\delta$  tak, že nerovnost

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

platí pro všechna  $x$ , pro něž je  $0 < |x - c| < \delta$ .

Hodnoty splňující poslední nerovnost jsou hodnoty  $x$  z intervalu  $(c - \delta, c + \delta)$  různé od  $c$ . Definice tedy říká, že pro hodnoty  $x$  blízké ale různé od  $c$  jsou hodnoty  $f(x)$  velmi málo odlišné od čísla  $A$ . Z podmínky  $0 < |x - c|$  plyne, že existence

ani hodnota limity funkce  $f$  v bodě  $c$  nezávisí na funkční hodnotě ani na tom, zda je v tomto bodě funkce vůbec definována.

Mějme nyní funkci  $f$  danou předpisem  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  a uvažujme její limitu v bodě  $x = 0$ . Pokud půjdeme po ose <sup>(1)</sup>  $x$  k nule „zleva“ (tedy ze záporných čísel), dostáváme vždy hodnotu  $-1$ . Pokud ovšem půjdeme „zprava“ (tedy z kladných čísel), nabývá funkce hodnoty  $1$ . Limita v tomto bodě – tak jak byla definována – nemá smysl, protože se funkce neblíží z obou stran ke stejné hodnotě. Půjdeme-li ovšem k nule pouze zleva nebo pouze zprava, funkce se blíží k výše uvedeným hodnotám (resp. jich nabývá). Toto pozorování formalizujeme pomocí tzv. jednostranných limit, což je obsaženo v následující definici:

**Definice 2** (Jednostranné limity). (Jarník, 1984) Říkáme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $c \in \mathbb{R}$  limitu zprava (resp. zleva)  $A$ , jestliže ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje kladné číslo  $\delta$  tak, že nerovnost

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

platí pro všechna  $x$  z intervalu  $(c, c + \delta)$  (resp. pro všechna  $x$  intervalu  $(c - \delta, c)$ ).

Předchozí definice nepostihují každé intuitivní blížení se funkčních hodnot k hodnotě limitní. Představme si funkci  $f$  danou předpisem  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  v okolí bodu  $x = 0$ . Funkce zde roste zprava i zleva nade všechny meze („do nekonečna“). Tuto skutečnost postihujeme pomocí pojmu nevlastní limity.

**Definice 3** (Nevlastní limita). (Jarník, 1984) Říkáme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $c$  nevlastní limitu  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), jestliže ke každému reálnému číslu  $K$  existuje číslo  $\delta > 0$  tak, že nerovnost  $f(x) > K$  (resp.  $f(x) < K$ ) platí pro všechna  $x$ , pro něž je  $0 < |x - c| < \delta$ . Značíme  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ ). Podobně se definují symboly  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = -\infty$ ; pouze nerovnosti  $0 < |x - c| < \delta$  je nutno nahradit u prvních dvou symbolů nerovnostmi  $c < x < c + \delta$ , u druhých dvou symbolů nerovnostmi  $c - \delta < x < c$ .

Jak vidíme, podmínku  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , vyjadřující blízkost hodnot  $f$  k limitě  $A$ , zde nahradila podmínka  $f(x) > K$  (resp.  $f(x) < K$ ), která vyjadřuje, že  $f$  se zvětšuje nad (resp. zmenšuje pod) všechny reálné meze.

K úplnému pokrytí pojmu limita, jak je definován v matematice, nám nyní zbývá poslední případ, a to limita v nevlastním bodě. Mějme funkci  $f$  danou předpisem  $f(x) = \frac{1}{x}$  a řešme limitu této funkce pro  $x \rightarrow \infty$ . Můžeme vidět, že pokud jdeme s  $x$  do nekonečna, blíží se graf funkce k ose  $x$ , neboli hodnoty funkce se blíží k 0. Formální definici vytvořme tak, že podmínku pro růst nad (resp. pokles pod) všechny meze z Definice 3 použijeme na samotnou proměnnou  $x$ .

**Definice 4.** Říkáme, že funkce má v  $+\infty$  limitu  $A \in \mathbb{R}^*$  a píšeme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , pokud:

- je-li  $A \in \mathbb{R}$ , pak ke každému kladnému  $\varepsilon$  existuje reálné  $K$  takové, že nerovnost  $|f(x) - A| < \varepsilon$  platí pro všechna  $x > K$ ,

<sup>(1)</sup> „Jít po ose“ je neformální termín, jímž vyjadřujeme, že hledáme hodnoty funkce v bodech posloupnosti, která má příslušný bod za limitu, jak jsme to viděli v úvodní úloze tohoto odstavce.

- je-li  $A = \infty$ , pak ke každému reálnému  $\varepsilon$  existuje reálné  $K$  takové, že nerovnost  $f(x) > \varepsilon$  platí pro všechna  $x > K$ ,
- je-li  $A = -\infty$ , pak ke každému reálnému  $\varepsilon$  existuje reálné  $K$  takové, že nerovnost  $f(x) < \varepsilon$  platí pro všechna  $x < K$ .

Podobně definujeme, že funkce  $f$  má v  $-\infty$  limitu  $A$  (píšeme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ), pouze nerovnosti  $x > K$  nahradíme ve všech případech  $x < K$ .

Tyto čtyři definice se dají sjednotit pomocí zavedení pojmu okolí. Než to však provedeme, přiřadíme symbolům  $+\infty$ ,  $-\infty$  význam čísel z takzvané rozšířené reálné osy  $\mathbb{R}^*$ . Do této chvíle měly tyto symboly význam pouze v rovnosti s limitou a vyjadřovaly jisté chování funkce v okolí limitního bodu.

### 1.1.1 Rozšířená reálná osa

**Definice 5** (Rozšířená reálná osa). Rozšířenou reálnou osou rozumíme množinu  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  (nebude-li hrozit nedorozumění, budeme  $+\infty$  značit pouze  $\infty$ ) s uspořádáním a aritmetickými operacemi z  $\mathbb{R}$ , které dodefinováváme následujícími vztahy:

- $-\infty < a < \infty$  pro každé  $a \in \mathbb{R}$
- $-(+\infty) := -\infty$
- $\frac{1}{+\infty} := 0$
- $a + \infty := \infty$  pro každé  $a > -\infty$
- $a \cdot \infty := \infty$  pro každé  $a > 0$
- $\infty^a := \infty$  pro každé  $a > 0$
- $a^\infty := \infty$  pro každé  $a > 1$

Dále aritmetické operace na  $\mathbb{R}^*$  rozšiřujeme tak, aby sčítání a násobení bylo komutativní, asociativní, platil distributivní zákon a dále aby pro každé  $a, b \in \mathbb{R}^*$  platilo:

- $a - b = a + (-b)$
- $-a = -1 \cdot a$
- $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$
- $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$
- $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
- $a^{b \cdot c} = (a^b)^c$ ,

má-li podle předchozího alespoň jedna strana smysl. Nedefinované výrazy jsou:  $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \infty/\infty, \frac{a}{0}, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ .

Rozšířenou reálnou osu jsme zde zavedli kvůli následující definici okolí bodu. Pro tento účel však není nezbytně nutná. Hlavní motivací pro její zavedení je aritmetika limit (viz oddíl 1.2.3).

### 1.1.2 Okolí bodu a sjednocená definice limity

**Definice 6** (Okolí bodu  $a$ ). Okolím bodu  $a \in \mathbb{R}^*$  rozumíme množinu

- $U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  pro  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$
- $U(\infty, \varepsilon) = (\varepsilon, \infty)$  pro  $\varepsilon \in \mathbb{R}$
- $U(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -\varepsilon)$  pro  $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Levým resp. pravým okolím bodu  $a$  rozumíme množinu

- $U^-(a, \varepsilon) = \{x; x \in U(a, \varepsilon) \wedge x \leq a\}$  resp.
- $U^+(a, \varepsilon) = \{x; x \in U(a, \varepsilon) \wedge x \geq a\}$ .

Prstencovým (též redukováným) okolím bodu  $a$  rozumíme množinu  $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ , analogicky levým resp. pravým prstencovým okolím bodu  $a$  rozumíme množinu  $P^-(a, \varepsilon) = U^-(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$  resp.  $P^+(a, \varepsilon) = U^+(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ . Pravá a levá okolí bodu nazýváme souhrnně okolími jednostrannými, je-li to třeba k rozlišení, nazýváme okolí okolími oboustrannými. Stejnou konvenci užíváme u okolí prstencových. Je-li třeba rozlišit okolí od prstencového okolí (včetně jednostranných okolí), nazýváme jej úplným okolím.

Množinu všech okolí bodu  $a \in \mathbb{R}^*$  budeme značit  $\mathcal{U}(a)$ , množinu všech prstencových okolí  $\mathcal{P}(a)$ . Analogicky množiny jednostranných okolí  $a$  značíme  $\mathcal{U}^+(a)$ ,  $\mathcal{U}^-(a)$  a množiny jednostranných prstencových okolí  $\mathcal{P}^+(a)$ ,  $\mathcal{P}^-(a)$ .

Tedy tedy můžeme zavést jednotnou definici limity funkce.

**Definice 7.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  limitu  $L$  a píšeme  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ , pokud

$$\forall U \in \mathcal{U}(L) \exists P \in \mathcal{P}(x_0) : f(P) \subseteq U.$$

Nahradíme-li  $\mathcal{P}(x_0)$  množinou  $\mathcal{P}^-(x_0)$  resp.  $\mathcal{P}^+(x_0)$ , dostáváme definici limity funkce  $f$  v bodě  $x_0$  zleva resp. zprava.

Limita v  $\infty$  zleva představuje vzhledem k definici okolí totéž jako limita v  $\infty$ . Limita pro  $\infty$  zprava nemá smysl. Analogicky limita v  $-\infty$  zprava představuje totéž jako limita v  $-\infty$  a limita pro  $-\infty$  zleva nemá smysl.

Uvedená sjednocená definice vyjadřuje vlastní podstatu limity. Definujeme-li v libovolném prostoru korektně systém okolí každého bodu, máme tím podle uvedené definice definovánu i limitu zobrazení v tomto prostoru.

### 1.1.3 Spojitost

Pojem spojitost zde zavádíme především kvůli úzkému vztahu k limitě (viz Věta 11), který umožňuje podstatnou část limit řešit dosazováním.

**Definice 8** (Spojité funkce  $f(x)$  v bodě  $c$ ). (Jarník, 1984) Říkáme, že funkce  $f(x)$  je spojitá v bodě  $c$ , jestliže ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje kladné číslo  $\delta$  tak, že nerovnost

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

je splněna pro všechny hodnoty  $x$ , pro něž je

$$|x - c| < \delta.$$

Přičemž tyto hodnoty  $x$  jsou právě všechny hodnoty  $x$  z intervalu  $(c - \delta, c + \delta)$ .

**Definice 9** (Spojitost v bodě zprava a zleva). (Jarník, 1984) Říkáme, že funkce  $f(x)$  je spojitá zprava v bodě  $c$ , jestliže ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje kladné číslo  $\delta$  tak, že nerovnost  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$  platí pro všechna  $x$ , jež splňují nerovnosti  $c \leq x < c + \delta$ . Říkáme, že funkce  $f(x)$  je spojitá zleva v bodě  $c$ , jestliže ke každému kladnému číslu  $\varepsilon$  existuje kladné číslo  $\delta$  tak, že nerovnost  $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$  platí pro všechna  $x$ , jež splňují nerovnosti  $c - \delta < x \leq c$ .

**Definice 10** (Spojitost funkce  $f(x)$  na intervalu  $J$ ). (Jarník, 1984) Budeme říkat, že funkce  $f(x)$  je spojitá v intervalu  $J$ , jestliže má tyto vlastnosti:

- Je spojitá (tj. je spojitá zleva i zprava) v každém vnitřním bodě intervalu  $J$ .
- Patří-li počáteční bod intervalu  $J$  k intervalu  $J$ , je funkce  $f(x)$  též spojitá zprava v tomto bodě.
- Patří-li koncový bod intervalu  $J$  k intervalu  $J$ , je funkce  $f(x)$  též spojitá zleva v tomto bodě.

## 1.2 Věty používané při výpočtu limit

Definice limity není konstruktivní v tom smyslu, že nedává návod, jak zjistit hodnotu limity v daném bodě. Dává nám pouze podmínku, jak ověřit, zda dané číslo limitou je či není, což může být samo o sobě velmi obtížné. Pro výpočet hodnot limit proto používáme nejčastěji vět uvedených v této podkapitole. Ze stejného důvodu jsou tyto věty důležité při návrhu úloh na zjištění hodnoty limity funkce.

### 1.2.1 Základní vlastnosti limit

**Věta 1** (Věta o jednoznačnosti limity). (Jarník, 1984) Funkce  $f(x)$  má v bodě  $c$  nejvýše jednu limitu, a rovněž nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva.

**Věta 2.** (Jarník, 1984) Nechť  $c \in \mathbb{R}$ . Rovnice  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$  platí tehdy a jenom tehdy, je-li  $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = A$ . Tedy limita funkce v bodě  $c$  existuje tehdy a jen tehdy, existují-li v bodě  $c$  limity zprava i zleva a jsou-li si zároveň rovny. Potom tvrdíme, že limita je rovna společné hodnotě limit zprava i zleva.

**Věta 3.** Pokud jsou dvě funkce shodné na jistém prstencovém okolí limitního bodu, pak je existence jejich limit v tomto bodě ekvivalentní. Pokud obě limity existují, rovnají se.

### 1.2.2 Limita konstantní a identické funkce

**Věta 4.** Nechť  $c \in \mathbb{R}$  a  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ . Pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

### 1.2.3 Věta o aritmetice limit

**Věta 5** (První věta o aritmetice limit). (Škrášek, 1983) Vztahy

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ , kde  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

platí, pokud má pravá strana smysl.

Ilustrujme si nyní větu na konkrétní úloze. Mějme  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x - 2)$ . Při výpočtu stačí využít Věty 4, Věty 5 a faktu, že  $x^2 = x \cdot x$ . Výsledkem bude

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x - 2) \stackrel{V5}{=} \lim_{x \rightarrow 3} x \cdot \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 2 \stackrel{V4}{=} 3 \cdot 3 - 3 - 2 = 4.$$

Pomocí předchozích vět můžeme tutéž úlohu vyřešit i jinými způsoby. Například lze  $f(x)$  jako polynom rozložit na součin lineárních členů a pak opět dosadit.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x - 2) &= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1)(x - 2) \stackrel{V5}{=} \lim_{x \rightarrow 3} (x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) \stackrel{V5}{=} \\ &\stackrel{V5}{=} (\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 1) \cdot (\lim_{x \rightarrow 3} x - \lim_{x \rightarrow 3} 2) \stackrel{V4}{=} (3 + 1) \cdot (3 - 2) = 4 \end{aligned}$$

Mějme nyní limitu stejné funkce pro  $x \rightarrow \infty$ , tedy  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x - 2)$ . Zde již přímé dosazení podle věty 5 není možné, protože bychom se dostali k výrazu  $\infty \cdot \infty - \infty - 2$ , který nemá smysl. Druhý způsob, kterým jsme řešili předchozí úlohu, ovšem použít lze:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x - 2) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)(x - 2) \stackrel{V5}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2) \stackrel{V5}{=} \\ &\stackrel{V5}{=} (\lim_{x \rightarrow \infty} x + \lim_{x \rightarrow \infty} 1) \cdot (\lim_{x \rightarrow \infty} x - \lim_{x \rightarrow \infty} 2) \stackrel{V4}{=} (\infty + 1) \cdot (\infty - 2) = \infty. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že Větu 5 nelze vždy použít stejným způsobem. Ostatně i rozklad na součin, kterým jsme získali hodnotu limity v obou případech, by nebylo možné použít, kdyby polynom definující  $f$  nebyl rozložitelný v  $\mathbb{R}$  (například  $(x^2 - x + 1)$ ). Na první pohled nepříliš přirozený rozklad na součin vytknutím nejvyšší mocniny však umožňuje získat limitu polynomu v nevlastních bodech vždy.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x - 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{\infty^2} \right) = \infty^2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty^2} \right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

Použití Věty 5 jsou zde podmíněna a ospravedlněna až smysluplností výsledku. To si můžeme názorně demonstrovat pokusem o přímé dosazení v případě  $x \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x - 2) = (\lim_{x \rightarrow \infty} x^2) - (\lim_{x \rightarrow \infty} x) - 2 = \infty - \infty - 2$$

Levá strana, jak jsme ukázali, má hodnotu  $\infty$ , avšak pravá strana nemá smysl, neboť se v ní vyskytuje nedefinovaný výraz  $\infty - \infty$ . V takovém případě, kdy zjistíme, že výsledek dosazení podle Věty 5 nemá smysl, je celý výpočet od jejího použití neplatný. Tento problém řeší následující verze věty o aritmetice limit.

**Věta 6** (Druhá věta o aritmetice limit).

- Nechť alespoň jedna z limit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existuje a je vlastní. Pak vztahy a), b) z Věty 5 platí, pokud má alespoň jedna strana smysl.
- Nechť  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  existuje a je konečná nenulová. Pak vztahy d), e) z věty 5 platí, pokud má alespoň jedna strana smysl.

Základním rozdílem mezi první a druhou verzí věty o aritmetice limit je, že první je implikací, zatímco druhá je ekvivalencí. Platí tedy, že nemá-li pravá strana některé rovnosti smysl, pak podle první věty víme pouze to, že danou limitu nelze tímto způsob rozepsat; z druhé věty ve stejné situaci víme, že původní limita neexistuje.

Druhá věta má ovšem silnější předpoklady a nelze ji tedy použít ve všech případech, kde lze použít verzi první. Například  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + x)$  lze přímým dosazením řešit jenom první větou o aritmetice limit (protože  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2$  i  $\lim_{x \rightarrow \infty} x$  jsou nekonečné). Zatímco například dokázat neexistenci  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \sin x)$  z neexistence  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  lze jen pomocí druhé verze (neexistenci  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  si vysvětlíme v sekci 1.2.7).

**Věta 7.** Nechť  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  a  $f(x) > 0$  na jistém  $P \in \mathcal{P}(c)$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = \infty$ . Pokud  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  a  $f(x) < 0$  na jistém  $P \in \mathcal{P}(c)$ , pak  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

Věta platí analogicky pro jednostranné limity.

Skutečnost, že  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  a  $f > L$  na jistém  $P \in \mathcal{P}(c)$ , budeme značit  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_+$  (analogicky  $L_-$ ). Předchozí větu pak můžeme symbolicky vyjadřovat rovností  $\frac{1}{0_+} = \infty$ ,  $\frac{1}{0_-} = -\infty$ . Aritmetický význam však těmito výrazům přiřazovat nebudeme, budeme je chápat jako symbolický odkaz na Větu 7.

### 1.2.4 Věta o limitě složené funkce

**Věta 8.** (Veselý, 2001) Nechť existuje limita  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$  a nechť existuje  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ . Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B,$$

jestliže je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

- (1) funkce  $f$  je spojitá v  $A$ , nebo
- (2) existuje takové okolí bodu  $a$ , ve kterém  $g$  nenabývá hodnoty  $A$ .

Větu o limitě složené funkce můžeme využít nejen k výpočtu limity složené funkce, ale také k substituci v rámci limity. Zde si pro lepší porozumění uvedeme konkrétní úlohu. Mějme funkci  $f$  danou předpisem  $f(x) = x \cdot \ln x$ . Chceme zjistit její limitu v bodě  $0_+$ , tedy  $\lim_{x \rightarrow 0_+} (x \cdot \ln x)$ . Substituce  $y = \frac{1}{x}$  vede k přepsání limity na tvar  $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \cdot \ln \frac{1}{y}$ . Jednoduchou úpravou získáme tvar  $-\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y}$ , který s pomocí dominancí, zavedených v odstavci 1.2.9, dokážeme snadno vyřešit.

### 1.2.5 Věta o „dvou policajtech“

**Věta 9** (Věta o limitě sevřené funkce, též „věta o dvou policajtech“). (Škrášek, 1983) Nechť na určitém prstencovém okolí  $P(a, \varepsilon)$  platí nerovnosti

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Je-li přitom  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ , pak existuje také  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$  a platí  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$ .

Věta platí i v jednostranné verzi (tedy pro jednostranné okolí i limity). Důsledkem věty o limitě sevřené funkce je následující, často využívaná věta.

**Věta 10.** (Škrášek, 1983) Je-li na určitém prstencovém okolí  $P(a, \varepsilon)$  funkce  $y = f(x)$  omezená a je-li přitom  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ , pak je

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)h(x)] = 0.$$

Tuto větu ukážeme na úloze  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sin \frac{1}{x})$  (Kopáček, 2002). Funkce  $f(x) = x$  se v bodě 0 rovná nule. Funkce  $g(x) = \sin \frac{1}{x}$  je definována všude kromě počátku a ve svém definičním oboru je omezená (konstantou  $c = 1$ ), takže hledaná limita je rovna nule.

### 1.2.6 Věty o spojitosti funkce

**Věta 11.** (Jarník, 1984) Funkce  $f(x)$  je spojitá v bodě  $c$  tehdy a jen tehdy, je-li

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Slovy: funkce  $f(x)$  je spojitá v bodě  $c$  tehdy a jen tehdy, existuje-li limita funkce  $f(x)$  v bodě  $c$  a je-li tato limita rovna hodnotě, které funkce  $f(x)$  právě v bodě  $c$  nabývá.

**Věta 12.** Každá elementární funkce je spojitá v každém intervalu svého definičního oboru.

Tyto dvě věty nám společně s Větou 3 umožňují zjišťovat hodnotu limit elementárních funkcí pomocí dosazování, pokud je funkce definována v jistém prstencovém okolí limitního bodu a výsledek dosazení má smysl. Ukažme si příklad:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+2)} \stackrel{V3}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)}{(x+2)} = \frac{2}{3}.$$

Funkce  $\frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+2)}$  není v limitním bodě definována, ovšem funkce  $\frac{(x+1)}{(x+2)}$  už ano. Tyto dvě funkce mají v každém bodě stejnou hodnotu – ovšem kromě bodu 1, což znamená, že jsou shodné v každém prstencovém okolí bodu 1 a podle Věty 3 mají v tomto bodě stejnou limitu (pokud existuje). Samotná funkce  $\frac{x+1}{x+2}$  je funkcí elementární a je tedy spojitá v každém bodě svého definičního oboru (tedy ve všech bodech náležících do  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ), její limita je tudíž v bodě 1 rovna hodnotě dosazení, tedy  $\frac{2}{3}$ .

## 1.2.7 Vztah limity funkce k limitě posloupnosti

Důležitý vztah mezi limitou funkce a limitou posloupnosti plyne z Heineho definice limity funkce, kterou si zde uvedeme.

**Věta 13** (Heineho definice limity funkce v bodě). (Podle Škráška, 1983) Necht' funkce  $y = f(x)$  je definována v prstencovém okolí  $P(a; \varepsilon)$  (takže přímo v bodě  $a$  definována být nemusí). Pak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  právě tehdy, když pro každou posloupnost  $\{x_n\}$ , která má limitu  $a$ , přičemž žádné  $x_n$  není rovno  $a$ , má příslušná posloupnost  $\{f(x_n)\}$  limitu  $A$ .

Podle Heineho definice je tvrzení, že  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , konjunkcí tvrzení, že se hodnotě  $A$  rovnají limity určitých posloupností funkčních hodnot  $f$ . Protože dokázat o všech takových posloupnostech, že mají stejnou limitu, je obtížné, používáme Heineho definici zpravidla opačně, tedy buď k tomu, abychom ze znalosti limity funkce odvodili limitu posloupnosti, anebo k tomu, abychom pomocí limit vhodně zvolených posloupností dokázali neexistenci limity funkce. Pro první účel používáme nejčastěji následující větu:

**Věta 14.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim f(n) = L$ .

Tato věta nám umožňuje zjišťovat limity posloupností pomocí nástrojů určených pro limity funkcí, jako je L'Hospitalovo pravidlo (viz odstavec 1.2.11).

Důkaz neexistence limity funkce pomocí Heineho definice si ukážeme na příkladu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  (Kopáček, 2002). Zvolíme takové dvě posloupnosti čísel jdoucích k nekonečnu, že posloupnosti funkčních hodnot jejich členů budou mít různé limity. Položme  $x_n = 2n\pi$  a  $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ . Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \infty$ , ale  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \sin x'_n = 1$ , takže dle Heineho definice limita neexistuje.

Opačný postup, tedy zjišťování existující limity funkce z limity posloupnosti, je obtížnější. Zpravidla je třeba použít větu o limitě sevřené funkce (viz 1.2.5) tím způsobem, že (obvykle pomocí monotonie) sevřeme funkci, jejíž limitu hledáme, mezi funkce konstantní na každém  $\langle n, n+1 \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , které mají limity shodné s posloupnostmi funkčních hodnot v celých číslech. To nám umožňuje používat při zjišťování limit funkcí techniky určené pro limity posloupností, zvláště pak následující větu:

**Věta 15.** Necht'  $\{a_n\}$  je nezáporná posloupnost. Označme  $L_p = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$  a  $L_o = \lim \sqrt[n]{a_n}$ . Pak

a)  $L_o = L_p$ , pokud má pravá strana smysl,

b) je-li  $L_p > 1$  nebo  $L_o > 1$ , je  $\lim a_n = \infty$ ,

c) je-li  $L_p < 1$  nebo  $L_o < 1$ , je  $\lim a_n = 0$ .

Ukažme si použití na úloze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x}$ . Funkce  $y = x$  i  $y = 2^x$  jsou rostoucí, proto pro každé  $x \in \langle n, n+1 \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$  platí  $n \leq x < n+1$  a  $2^n \leq 2^x < 2^{n+1}$ . Je tedy zjevně

$$\frac{n}{2^{n+1}} < \frac{x}{2^x} < \frac{n+1}{2^n}.$$

Protože

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+2}}}{\frac{n}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1 \text{ a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1,$$

je podle Věty 15  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^n} = 0$  a funkce je tedy sevřena mezi po částech konstantní funkce se společnou limitou 0, což podle věty o limitě sevřené funkce znamená, že i její limita v nekonečnu je nulová. Poznamenejme, že v tomto konkrétním případě by stačilo provést omezení zdola konstantní nulovou funkcí, což ovšem předpokládá znalost limity horního omezení.

### 1.2.8 Bolzanova-Cauchyova podmínka

**Věta 16** (Bolzanova-Cauchyova podmínka). Funkce  $f$  má v bodě  $c$  konečnou limitu právě tehdy, když pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $P(c, \delta)$  takové, že pro každé  $x, y \in P(c, \delta)$  platí  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Tuto větu užíváme přednostně k důkazu neexistenci limit prostřednictvím následujícího důsledku:

Nechť existují  $A_1 < A_2 \in \mathbb{R}$  taková, že:

$$\forall P \in \mathcal{P}(c) \exists x_1, x_2 \in P : f(x_1) \leq A_1 \wedge f(x_2) \geq A_2.$$

Pak  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  neexistuje. Jinými slovy, pokud funkce nabývá v každém okolí limitního bodu hodnot menších nebo rovných  $A_1$  a zároveň větších nebo rovných  $A_2$ , její limita v daném bodě neexistuje.

Tento důsledek nám umožní zjednodušit důkaz neexistence limity funkce  $\sin x$  pro  $x \rightarrow \infty$ . Můžeme totiž říct, že v každém okolí nekonečna nabývá sinus například hodnot menších nebo rovných nule a zároveň větších nebo rovných jedné polovině. Z toho plyne, že podle výše zmíněného důsledku limita v tomto bodě neexistuje.

### 1.2.9 Dominance

**Definice 11.** Nechť  $f, g$  jsou definovány v nějakém prstencovém okolí bodu  $a$ . Říkáme, že funkce  $g$  je dominantní vůči funkci  $f$  pro  $x \rightarrow a$  (též „v okolí bodu  $a$ “ nebo jen „u bodu  $a$ “) a píšeme  $f(x) \ll g(x)$ , pokud  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

Opačný pojem k výrazu „ $g$  je dominantní vůči funkci  $f$ “ neexistuje. Často se ale používá vyjádření typu „ $f$  je podstatně menší než  $g$ “. Vztah dominance pak můžeme vyjádřit podobným způsobem, tedy „ $g$  je podstatně větší než  $f$ “.

**Věta 17.**  $\ln^k x \ll x^l \ll q^x$  pro  $x \rightarrow \infty$  pro každé  $k, l \in \mathbb{R}^+$  a  $q \in (1, \infty)$ .

Uspořádání funkcí pomocí dominancí budeme označovat jako dominantní řadu nebo též řadu dominancí<sup>(2)</sup>. V teorii limit posloupností se dominantní řada často uvádí v rozšířené podobě:

$$\ln^k n \ll n^l \ll q^n \ll n! \ll n^n.$$

---

<sup>(2)</sup>„Řada dominancí“ je pojem, který zde zavádíme na základě intuitivní představy o jakémsi uspořádání či seřazení. Řada má z pohledu matematiky jiný význam, než v jakém ho zde budeme chápat my – jako po sobě jdoucí funkce uspořádané na základě dominancí.

U funkcí však nemá smysl mluvit o  $x!$ <sup>(3)</sup> a  $n^n$  je v dominantní řadě pro posloupnosti zařazeno především kvůli  $n!$ , proto lze dominantní řadu pro funkce zredukovat na tvar uvedený ve Větě 17. Tuto řadu bychom mohli nazvat jakousi základní řadou, ze které budeme později vycházet, avšak je také možné určit vztah dominance i pro další funkce. S tím nám pomohou ekvivalence (oddíl 1.2.10).

Důležitou vlastností dominantní řady je tranzitivita, tedy pokud je jedna funkce dominantní vůči druhé a druhá vůči třetí, pak je zcela jistě i první funkce dominantní vůči třetí.

Dominance můžeme rozlišit i v rámci jednotlivých tříd funkcí z výše uvedeného dominantní řady:

$$\ln^{k_1} x \ll \ln^{k_2} x \text{ pro } x \rightarrow \infty, \text{ pro každé } k_1 < k_2,$$

$$x^{l_1} \ll x^{l_2} \text{ pro } x \rightarrow \infty, \text{ pro každé } l_1 < l_2,$$

$$(q_1)^x \ll (q_2)^x \text{ pro } x \rightarrow \infty, \text{ pro každé } q_1 < q_2.$$

### 1.2.10 Ekvivalence

**Definice 12.** (Kopáček, 2002) Necht' funkce  $f$  a  $g$  jsou definovány na nějakém prstencovém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ . Potom symboly

- 1)  $f \sim g$ , pro  $x \rightarrow a$  (funkce  $f$  a  $g$  jsou slabě ekvivalentní pro  $x \rightarrow a$ ),
- 2)  $f \cong g$ , pro  $x \rightarrow a$  (funkce  $f$  a  $g$  jsou silně ekvivalentní pro  $x \rightarrow a$ )

mají následující významy:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = 1$ .

Mají-li  $f$  a  $g$  v bodě  $a$  společnou nulovou nebo nevlastní limitu  $A$  a jsou splněny podmínky předchozí definice, pak říkáme, že

- 1)  $f$  jde k  $A$  stejně rychle jako  $g$ ,
- 2)  $f$  jde k  $A$  stejně rychle jako  $g$  s koeficientem 1.

Zavedení ekvivalencí a dominancí je základem vyšetřování tzv. asymptotického chování funkcí. Obecně umožňuje nahrazovat při výpočtu limit složité funkce jednoduššími se stejnými limitními vlastnostmi. Příkladem jsou ekvivalence základních elementárních funkcí v nulových bodech. Ty se často vyjadřují pouze jako množina konkrétních limit (např.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ , ...), ekvivalence však umožňují zapsat je v následující elegantnější podobě.

---

<sup>(3)</sup>Rozšíření faktoriálu na (kladná) reálná čísla je smysluplně možné až pomocí nástrojů integrálního počtu (funkce  $\Gamma$ ).

**Věta 18** (Asymptotické chování elementárních funkcí).

$$e^x - 1 \cong \ln x + 1 \cong \sin x \cong \arcsin x \cong \operatorname{tg} x \cong \operatorname{arctg} x \cong x \text{ pro } x \rightarrow 0,$$

$$1 - \cos x \cong \frac{x^2}{2} \text{ pro } x \rightarrow 0,$$

$$\arccos(1 - x) \cong \sqrt{2x} \text{ pro } x \rightarrow 0_+,$$

$$\operatorname{arccotg} x \cong \frac{1}{x} \text{ pro } x \rightarrow \infty.$$

Použitím těchto ekvivalencí je možné řešit některé úlohy, jinak řešitelné jen s použitím nástrojů diferenciálního počtu (L'Hospitalovo pravidlo a Taylorovy polynomy viz sekce 1.2.11 a 1.2.12), bez zavedení derivací. Fakticky totiž tyto ekvivalence vyjadřují buď přímo hodnotu derivace příslušných funkcí v nulových bodech (např.  $(\sin)'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$ ), nebo jsou z těchto derivací odvozeny. Znalost těchto čtyř ekvivalenčních řad<sup>(4)</sup> nám později umožní výrazně zjednodušovat na první pohled složité výrazy v argumentech limit.

### 1.2.11 L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo je jedním z nástrojů diferenciálního počtu pro řešení limit. Abychom mohli toto pravidlo využívat, je nezbytná znalost derivací a schopnost derivovat, což u předchozích metod nutné nebylo. Toto pravidlo je primárně určeno pro výpočet limit podílu, jejichž čitatel i jmenovatel má v limitním bodě limitu nulovou či nevlastní.

**Věta 19** (L'Hospitalovo pravidlo). (Škrášek, 1983) Nechť pro  $x \rightarrow a$  představuje podíl  $\frac{u(x)}{v(x)}$  neurčitý výraz typu  $0/0$ , popř.  $\infty/\infty$ . Existuje-li

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = A$$

(a to vlastní, popř. nevlastní limita), pak existuje též limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)}$$

a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{u'(x)}{v'(x)} = A.$$

Tato věta je implikací, nikoli ekvivalencí, tedy pokud použitím L'Hospitalova pravidla dojdeme k výsledku, že limita podílu derivací existuje, existuje i limita

---

<sup>(4)</sup>Ekvivalenční řadu či řadu ekvivalencí zde stejně jako u dominancí chápeme v přirozenějším významu – jako intuitivní pojem jistého uspořádání po sobě jdoucích funkcí, nikoli jako matematický pojem řada.

původní. Pokud ale dojdeme ke zjištění, že limita podílu derivací neexistuje, nemůžeme o původní zadané limitě nic říci, ta totiž existovat může. Ukažme si toto tvrzení na konkrétní úloze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

Pokud bychom měli tuto úlohu řešit pomocí L'Hospitalova pravidla, vypadal by postup následovně:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x).$$

Podle věty o aritmetice limit dostaneme limitu konstantní funkce s hodnotou 1 a limitu funkce  $\cos x$ . Funkce  $\cos x$  pro  $x \rightarrow \infty$  ovšem limitu nemá.

Pro úplnost si uveďme správné řešení této úlohy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)}{x} = 1.$$

Vytýkáme nejvyšší mocninu  $x$ , v tomto případě tedy přímo  $x$ . V čitateli i ve jmenovateli se nachází ve stejné mocnině, proto se zkrátí (to nám umožňuje Věta 3). Na zlomek v závorce aplikujeme znalost faktu, že omezená funkce násobená nulou má hodnotu nula (Věta 10).

## 1.2.12 Taylorovy polynomy

V následujícím odstavci vycházím z textu zdroje (Kopáček, 2002).

**Definice 13.** Pro funkci  $f$ , která má v bodě  $s_0 \in \mathbb{R}$  derivace do řádu  $n$  včetně, definujeme její Taylorův mnohočlen v bodě  $x = x_0$  předpisem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, x \in \mathbb{R}.$$

Pak také platí následující věta.

**Věta 20.** Má-li funkce  $f$  derivace v bodě  $x_0$  do řádu  $n$  včetně, pak pro výraz  $R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x)$  platí

$$R_n(x) \ll (x - x_0)^n.$$

Využití Taylorova vzorce při výpočtu limit si ukážeme na úloze z knihy (Kopáček, 2002):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

K výpočtu této limity je nezbytné znát Taylorův rozvoj pro funkci  $e^x$  a také rozvoj funkce  $\cos x$ . Z definice Taylorova mnohočlenu funkce není těžké odvodit, že

$$e^x = \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!} + R_n(x),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n(x).$$

Ve vzorci pro  $e^x$  nahradíme  $x$  výrazem  $\frac{-x^2}{2}$  a tím dostaneme

$$e^{\frac{-x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + R_4(x), x \rightarrow 0.$$

Vzorec pro  $\cos x$  se nám hodí v původním tvaru, stačí si pouze rozepsat první tři jeho členy. Tedy:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \tilde{R}_4, x \rightarrow 0.$$

Dosazením do původního tvaru získáme rovnici

$$\frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4} = \frac{-\frac{x^4}{12} + \tilde{R}_4(x) - R_4(x)}{x^4}.$$

Protože je  $R_4$  podstatně menší než  $x^4$  a zároveň  $\tilde{R}_4(x)$  podstatně menší než  $x^4$ , je určitě i rozdíl těchto výrazů  $\tilde{R}_4(x) - R_4(x)$  podstatně menší než  $x^4$ . Z toho nám plyne:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Taylorovy polynomy jsou nejobecnější a nejuniverzálnější metodou pro výpočet limit. Většina matematického softwaru využívá pro výpočet limit právě tuto metodu. Její efektivita však vede k silné algoritmizaci až mechanizaci řešení úloh na limity, a proto ji využívat nebudeme (blíže viz kapitola 3).

# Kapitola 2

## Metody výpočtu limit funkcí

### 2.1 Dosazovací limity

Jde o limity, kde je možné přímo dosazovat bez jakýchkoli dalších úprav. Věta o aritmetice limit (oddíl 1.2.3), věta o limitě složené funkce (Věta 8) společně s větou o spojitosti elementárních funkcí (Věta 12) nám umožňují řešit řadu úloh na zjištění hodnoty limity dosazením. Pro ilustraci si zde uvedeme tuto limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\operatorname{arctg}(x^2)).$$

K výpočtu této limity využíváme pouze dosazení a pravidla, která plynou z vět uvedených v podkapitole 1.2. Jde o větu o aritmetice limit ( $x^2 = x \cdot x$ , tedy když  $x \rightarrow \infty$ , je výsledkem  $\infty^2 = \infty$ ), větu o limitě složené funkce ( $\operatorname{arctg} x^2$ , kde  $x^2$  je vnitřní funkce,  $\operatorname{arctg} y$  je funkce vnější a její limita u  $\infty$  je  $\pi/2$ ) a jako poslední využijeme znalost spojitosti funkce  $\sin x$  společně s větou o limitě složené funkce (kde tentokrát bereme za vnější funkci  $\sin z$  a za vnitřní funkci  $\operatorname{arctg} y$ ). Výsledkem tedy po dosazení a aplikaci těchto vět bude číslo 1.

Ne vždy je však dosazení použitelnou metodou. Jeho výsledkem může být výraz, který nemá smysl (i v případech, kdy limita existuje). V některých případech dosazení smysl má, ale výsledek není skutečná limita. V dalších případech dosazení nebude mít smysl, ale limitu přesto bez dalších úprav určit lze.

Tyto problémové situace nastávají zejména ve dvou typických případech:

- dosazování do krajních bodů intervalu definičního oboru funkce
- čitatel vyjde nenulový, jmenovatel roven nule.

K první situaci si uveďme konkrétní úlohu  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ . Pokud jdeme po ose  $x$  k nule zprava (tedy z kladných čísel – značíme  $x \rightarrow 0_+$ ), je hodnota limity rovna nule. Pokud ovšem jdeme k nule po ose  $x$  zleva (tedy ze záporných čísel – značíme  $x \rightarrow 0_-$ ), limita nemá smysl.

Tato úloha nám naznačuje, že problémové funkce budou takové, které mají alespoň z jedné strany uzavřený interval definičního oboru, protože například s funkcí  $\ln x$  by takový problém nebyl (funkce  $\ln x$  totiž není v nule vůbec definována).

K vysvětlení řešení tohoto problému si uveďme další dvě úlohy:

$$(A) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{x}{x+1}$$

$$(B) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{x+1}{x}.$$

Vnitřní funkce obou uvedených funkcí jdou limitně k číslu jedna. Na první pohled by se tedy mohlo zdát, že obě limity budou mít stejnou hodnotu, ale není tomu tak. Hodnota vnitřní funkce v A bude vždy o něco menší než jedna – limitně se blíží k jedné zleva (značíme  $1_-$ ). Vnitřní funkce v úloze B oproti tomu bude vždy o něco málo větší než jedna – limitně se její hodnota blíží k jedné zprava (značíme  $1_+$ ). U úlohy A je tedy dosažení v pořádku, zatímco v úloze B dosažení selže, neboť  $\lim_{y \rightarrow 1_+} \arcsin y$  nemá smysl. Z toho nám plyne, že pokud má vnitřní funkce za limitu krajní bod definičního oboru vnější funkce, musíme kontrolovat průběh vnitřní funkce – zda se blíží k limitnímu bodu ze „správné strany“, tedy zda je složená funkce v okolí limitního bodu vůbec definována.

Druhý problematický případ nastane ve chvíli, kdy po dosažení vyjde číselník různý od nuly, zatímco jmenovatel je roven nule. V takovém případě je nutné zkoumat „znaménko nuly“, tedy zda se funkce ve jmenovateli limitně blíží nule pouze z kladných nebo pouze ze záporných čísel, nebo z kladných i ze záporných čísel (vyjímáme případ, kdy funkce ve jmenovateli nabývá v každém prstencovém okolí limitního bodu hodnoty nula; podíl pak není definován v žádném celém prstencovém okolí limitního bodu a tím pádem jeho limita nemůže existovat).

Mějme úlohu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

Správným řešením takové úlohy je:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_-} = -\infty$$

Tato limita tedy neexistuje, neboť hodnota limity v nule zleva je rozdílná od hodnoty limity v nule zprava.

Naproti tomu podobná úloha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

řešení má a je jím  $+\infty$ . Důvodem je sudá mocnina ve jmenovateli, která hodnotu  $0_+$  zachová a z hodnoty  $0_-$  udělá  $0_+$ .

U obou předchozích úloh jsme využili Větu 7.

Na chvíli odbočme od racionálních funkcí a poznamenejme, že na toto téma (nenulový číselník dělený nulovým jmenovatelem) lze formulovat nejrůznější příklady, od jednodušších až po velmi obtížné. Z jednodušších uveďme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\log_{\frac{1}{2}} \cos x},$$

kde si stačí uvědomit, jak se chová funkce  $\cos x$  v bodě nula – pokud  $x \rightarrow 0_-$  nabývá funkce  $\cos x$  hodnot jdoucích k  $1_-$ . Stejný výsledek ovšem dostaneme, pokud  $x \rightarrow 0_+$  (tato vlastnost plyne z toho, že je funkce  $\cos x$  sudá). Pro  $x \rightarrow 0_-$  i pro  $x \rightarrow 0_+$  dostaneme tedy stejnou limitu logaritmu  $0_+$ . A protože  $e^x$  má v nule hodnotu a tudíž i limitu jedna, je konečná hodnota limity  $+\infty$ .

Složitější úloha může vypadat takto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\operatorname{arctg} x - \sin x}.$$

Poznamenejme, že coby oboustranná limita by byla tato úloha výrazně jednodušší, neboť ve jmenovateli je rozdíl dvou lichých funkcí, a tedy lichá funkce – nutně je v tomto případě jedna jednostranná limita  $+\infty$ , zatímco druhá  $-\infty$ , můžeme tedy snadno rozhodnout, že oboustranná limita neexistuje. Tuto úlohu (tak, jak je zadána) a jí podobné už nelze řešit elementárně a je třeba využívat nástrojů diferenciálního počtu.

## 2.2 Racionální funkce

Racionální funkce jsou právě ty funkce, které lze vytvořit z funkce identické pomocí aritmetických operací. Lze je vždy vyjádřit jako podíl dvou polynomů. V této podkapitole rozlišíme tři základní případy. Nejjednodušším případem je racionální funkce, kde se ve jmenovateli vyskytuje polynom nultého stupně, a tedy racionální funkce má tvar polynomu. Následně ukážeme metody pro výpočet limity racionální funkce zvlášť v nevlastním a ve vlastním bodě, neboť tyto techniky jsou pro vlastní a nevlastní limitní body různé.

### 2.2.1 Polynomy

Jak už bylo řečeno, polynomy jsou speciálním případem racionálních funkcí, kdy je ve jmenovateli polynom nulového stupně. Jde o nejjednodušší případ racionální funkce. Mějme úlohu

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + x).$$

Pro  $x \rightarrow +\infty$  je situace jasná, stačí dosadit a výsledkem bude  $+\infty$ .

Pro  $x \rightarrow -\infty$  je výpočet komplikovanější. Dosadit zde nelze, neboť by vyšel nedefinovaný výraz  $\infty - \infty$ . Univerzální způsob, jak převést limitu polynomu v nevlastním bodě na použití věty o aritmetice limit, je vytknutí vedoucího členu. Provedeme to na naší úloze:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \cdot (1 + 0) = +\infty \cdot 1 = +\infty.$$

Tato metoda je stejně dobře použitelná při řešení netriviálních racionálních funkcí, kde budeme vytýkání provádět zvlášť v čitateli a zvlášť ve jmenovateli.

Řešením limity polynomu ve vlastním bodě je vždy hodnota vzniklá dosazením, problematické situace zde nenastávají.

### 2.2.2 Limita racionální funkce v nevlastním bodě

Předpokládejme, že polynom v čitateli i jmenovateli má stupeň větší nebo roven jedné. Z toho ale plyne, že každý z těchto polynomů bude mít nevlastní limitu. V těchto případech tedy nikdy nepůjde přímo dosadit, neboť výsledkem by byl nedefinovaný výraz  $\frac{\infty}{\infty}$ . Musíme tedy najít úpravu, která tento problém řeší. Jak

už bylo naznačeno dříve, jde o úpravu vytknutím nejvyšší mocniny. To můžeme vidět na následující úloze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Stejně řešení by v tomto případě platilo i pro  $x \rightarrow -\infty$ .

Zde je řešení problému jasné. V čitateli i ve jmenovateli vytýkáme stejnou mocninu, protože jsou v čitateli i jmenovateli polynomy stejného stupně. Zobecnění na případ, kdy je stupeň čitatele a jmenovatele odlišný, lze provést přinejmenším dvěma různými způsoby. Buď vytýkáme z čitatele i jmenovatele stejnou mocninu proměnné (konkrétně tu, která odpovídá vyššímu ze stupňů polynomů), nebo vytýkáme z čitatele i ze jmenovatele zvlášť mocninu odpovídající stupni daného polynomu. Tedy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

nebo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Opět bude platit stejný výsledek i pro  $-\infty$ .

V předchozích úlohách je tedy limita příslušné racionální funkce v obou nevlastních bodech stejná. Že tomu tak nemusí být vždy, demonstruje následující úloha, u které jsme pouze prohodili čitatele za jmenovatele a naopak.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Předchozí úlohy nám ukazují tři situace, které u limit racionálních funkcí v nevlastních bodech mohou nastat. Jde o případ, kdy je stupeň čitatele roven stupni jmenovatele, kdy je stupeň jmenovatele větší než stupeň čitatele a případ, kdy je stupeň jmenovatele menší než stupeň čitatele, který považujeme za nejsložitější z nich, neboť může vyjít odlišný výsledek v jednotlivých nevlastních bodech.

Nyní zavedeme zjednodušující pravidlo, které nám pomůže rozhodnout, jak se v které z daných tří situací zachovat:

- stupeň polynomu v čitateli je roven stupni polynomu ve jmenovateli – výsledkem je podíl koeficientů vedoucích členů
- stupeň polynomu ve jmenovateli je vyšší než stupeň polynomu v čitateli – výsledkem je nula
- stupeň polynomu v čitateli je vyšší než stupeň polynomu ve jmenovateli – výsledkem je vždy nevlastní limita, o jejímž znaménku rozhoduje podíl koeficientů u nejvyšších mocnin a parita rozdílu stupňů čitatele a jmenovatele.

V rámci oddílu racionálních funkcí ještě stojí za zmínku úlohy, které namísto polynomů v normálním tvaru obsahují součinnový tvar takových polynomů. Ilustrujme si to na následující úloze.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 4)^7(4x - 1)}{(3 - x^3)^5}$$

Na první pohled by se mohlo zdát, že řešením je úprava součinnového tvaru pomocí roznásobení a případně umocnění, ale takový postup může být v některých případech velice pracný a především není vůbec nutný. Můžeme totiž vytknout z každého polynomu zvlášť a pak už postupovat jako u klasické úlohy na racionální funkce. Ukažme si tento postup na druhé zmiňované úloze.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 - 4)^7 \cdot (4x - 1)}{(3 - x^3)^5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)^7 \cdot \left(2 - \frac{4}{x^2}\right)^7 \cdot x \cdot \left(4 - \frac{1}{x}\right)}{(x^3)^5 \cdot \left(\frac{3}{x^3} - 1\right)^5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)^7 \cdot 2^7 \cdot x \cdot 4}{(x^3)^5 \cdot (-1)^5} = -(2)^9 \end{aligned}$$

### 2.2.3 Limita racionální funkce ve vlastním bodě

Do limit racionálních funkcí ve vlastních bodech se vždy pokusíme dosadit. Podobně jako u limit racionálních funkcí v nevlastních bodech, i ve vlastních bodech mohou po dosazení nastat tři situace:

- jmenovatel je nenulový – výsledkem je podíl vzniklý dosazením
- čítec je nenulový, jmenovatel nulový – ze jmenovatele vytýkáme nejvyšší mocninu  $(x - c)$  (kde  $c$  je vlastní limitní bod), kterou je polynom ve jmenovateli dělitelný
- jmenovatel i čítec jsou nuloví – vytýkáme dle předchozího z čítele i ze jmenovatele.

První případ je triviální, ilustrujme si tedy popsané metody pouze na úlohách druhého a třetího typu.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{2(x - 1)^3} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^3}$$

Zde nastává problém, zmiňovaný v předchozí sekci. Pokud  $x \rightarrow 1_-$ , je hodnota limity  $-\infty$ , pokud ovšem  $x \rightarrow 1_+$ , je hodnota limity  $+\infty$ . Existují pouze jednostranné limity, které nejsou totožné – limita funkce v bodě jedna tedy neexistuje.

Následující úloha nám demonstruje situaci, kdy po dosazení vyjde jmenovatel i čítec nulový, a její následné řešení pomocí vytknutí.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{3}{1} = 3$$

Práci s polynomy nám velmi usnadní znalost Hornerova schématu a schopnost práce s ním. Díky této metodě můžeme polynom snadno převést na součinnový tvar, zjistit vícenásobný kořen a případně zjistit hodnotu polynomu, který limitní bod za kořen již nemá.

## 2.3 Iracionální funkce

Za iracionální funkce neformálně označujeme takové funkce, které vzniknou z funkce identické a funkcí odmocninných pomocí čtyř základních aritmetických operací a skládání, pokud zároveň nejsou funkcí racionální. Stejně jako u racionálních funkcí, i zde rozlišujeme zvlášť případy, kdy je limitní bod nevlastní a případy, kdy je vlastní.

### 2.3.1 Limita iracionální funkce v nevlastním bodě

V nevlastních bodech provedeme analogicky k racionálním funkcím vytknutí nejvyšší přítomné mocniny, což provedeme tak, že z každé odmocniny vytkneme nejvyšší v ní obsaženou mocninu a na závěr vytýkáme z celých součinitelů (resp. z čitatele a jmenovatele). Obecně lze tvrdit, že vytknout lze vždy, když mají výrazy, ze kterých se vytýká, buďto různý stupeň vedoucího členu, nebo stejný stupeň vedoucího členu, ovšem s různými koeficienty u těchto členů. Demonstrujme si to na úloze, ve které v čitateli nastává případ s různým stupněm a ve jmenovateli s rozdílnými koeficienty.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[4]{x^5 - x}}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - x^{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^5}}}{x^{\frac{1}{2}} \sqrt{2 + \frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{5}{4}} \left( \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{4}}} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x^5}} \right)}{x^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{2 + \frac{1}{x}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{4}} \cdot (-1)}{\sqrt{2} - 1} = -\infty\end{aligned}$$

Poznamenejme, že v případě  $x \rightarrow -\infty$  bychom obecně nemohli používat necelé mocniny a vytknuté výrazy bychom museli nechávat ve tvaru „odmocnina z mocniny“.

Problém tedy nastane ve třetím případě, kdy mají oba výrazy, ze kterých vytýkáme, nejen stejný stupeň vedoucích členů, ale i stejné koeficienty těchto členů. Jako příklad uvedeme ukázkovou úlohu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 2}.$$

Komplikace nastane při pokusu o vytknutí z čitatele. Vytknutí nejvyšší mocniny by vypadalo následovně:  $\sqrt{x^2 + 1} - x = x \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$ . Funkce  $x$  má limitu  $\infty$  a rozdíl v závorce má limitu 0. To ale není žádoucí, neboť takovou limitu nelze přímo vyčíslit (výsledkem by byl nedefinovaný výraz  $\infty \cdot 0$ ). Správné řešení takové úlohy je tedy pomocí rozšiřování. Odmocniny rozšiřujeme pomocí následujících vzorců:

$$\begin{aligned}a^2 - b^2 &= (a - b) \cdot (a + b) \\ a^3 - b^3 &= (a - b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2) \\ &\vdots \\ a^n - b^n &= (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-2}a + b^{n-1}),\end{aligned}$$

přičemž kombinované odmocniny rozšiřujeme pomocí vzorce pro takovou odmocninu, která je nejmenším společným násobkem obou odmocnin.

Řešitel by měl tedy postupovat následovně:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x + 2) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0. \end{aligned}$$

### 2.3.2 Limita iracionální funkce ve vlastním bodě

Ve vlastních bodech můžeme dosazovat. Pokud vychází ve jmenovateli nula, přichází na řadu postup podobný postupu u racionálních funkcí, a to vytýkání nejvyšší mocniny  $(x - c)$  (kde  $c$  je limitní bod), kterou je výraz dělitelný. V případě iracionálních funkcí tato mocnina nemusí být celá.

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{0_+(-1)} = -\infty$$

I ve vlastních bodech může nastat situace, kdy je zbytek nulový a po vytýkání je nutné tento zbytek rozšířit. To nám demonstruje následující úloha:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{\sqrt{x + x^2} - \sqrt{x - x^2}}.$$

Vytknutí vypadá následovně:  $\sqrt{x} \cdot (\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})$ , přičemž zbytek v závorce je nulový a musíme ho upravit pomocí rozšiřování. Následuje úplné řešení této úlohy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{\sqrt{x + x^2} - \sqrt{x - x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}) \cdot \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{\frac{\sqrt{x} \cdot (1+x-1+x)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{\frac{\sqrt{x} \cdot (2x)}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{\sqrt{x} \cdot x} = \infty \end{aligned}$$

## 2.4 Úlohy vedoucí na dominance

Nyní si ukážeme metody řešení postupně složitějších úloh testujících znalost dominancí.

Začneme upozorněním, že nejjednodušší úlohy vedoucí na řešení pomocí dominancí jsme již probrali v sekci 2.2.2 o limitě racionálních funkcí v nevlastních bodech, a také v rámci iracionálních funkcí v nevlastních bodech. Vytýkání nejvyšší mocniny v rámci limit těchto funkcí totiž není nic jiného než vytýkání dominantního členu. To nám ukazuje, jak se dominance typicky používají – zbytek po vytknutí dominantního členu je součet (resp. rozdíl) s konečnou limitou, která je ve většině případů nenulová (vyjma případů, kdy se odečítají dva stejně dominantní členy – viz úloha  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+2}$  v sekci 2.3) a lze jej podle věty o aritmetice limit (sekce 1.2.3) nahradit jeho limitní hodnotou.

U racionálních resp. iracionálních funkcí jsme využili dominanci v rámci třídy  $x^l$  z dominantní řady. Stejně tak lze využít dominance například z třídy  $q^x$ . Obecné pravidlo pro dominance této třídy je, že dominantní je ten člen, který má větší základ (viz poslední odstavec sekce 1.2.9). Demonstruje nám to následující řešená úloha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 2^{2x}}{5^x - 5^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 4^x}{5^x - 5^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \cdot \left(\frac{3^x}{4^x} - 1\right)}{5^x \left(1 - \frac{5^{-x}}{5^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \cdot (-1)}{5^x} = 0.$$

V čitateli jsme měli „schovaný“ vyšší základ:  $2^{2x} = (2^2)^x = 4^x$ , což se bude hodit při konstrukci úloh jako další procvičení schopnosti práce s mocninnými funkcemi. Ve jmenovateli tomu bylo podobně, neboť  $5^{-x}$  nemá jako základ číslo 5, jak by se mohlo na první pohled zdát, ale číslo  $\frac{1}{5}$ , neboť  $5^{-x} = (5^{-1})^x = \frac{1}{5}$ .

Následující úloha je ukázkou jednoduchého přímého využití dominantní řady.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^{14} x}{\sqrt{x}}$$

Je nutné si uvědomit, že odmocniny jsou speciálním případem z třídy  $x^l$ , a protože jsou mocninné funkce dominantní vůči funkcím logaritmickým, jsou i odmocninné funkce vůči funkcím logaritmickým dominantní a výsledkem naší úlohy je nula.

Dalším příkladem přímého použití dominantní řady, který je ovšem o něco komplikovanější, je následující úloha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^{14} x - 2^x}{\sqrt{x} + 7}.$$

Z čitatele vytkneme dominantní exponenciální funkci  $2^x$ , ze jmenovatele potom jistě  $\sqrt{x}$ , která je dominantní vůči konstantní funkci s hodnotou 7. Na závěr využijeme dominanci exponenciální funkce vůči funkci odmocninné. Řešení bude vypadat následovně:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \cdot \left(\frac{\ln^{14} x}{2^x} - 1\right)}{\sqrt{x} \cdot \left(1 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \cdot (-1)}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

Úloha, která následuje, může na první pohled působit jednoduše, neboť se zdá, že opět povede na přímé použití dominantní řady.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \cdot \ln x}{2^x}$$

Ale není tomu tak. Do této chvíle jsme se setkali pouze s případy, kdy jsme vytýkali ze součtu (resp. rozdílu), nyní ale nastala situace, kdy se v čitateli nachází součin, o kterém nemůžeme na první pohled rozhodnout, zda je či není dominantní vůči jmenovateli. Pomůžeme si drobnou úpravou – rozšířením. Celý výraz uvnitř limity vynásobíme podílem  $\frac{x}{x}$  – to jistě můžeme udělat, neboť takový podíl má hodnotu jedna a nezmění tedy hodnotu podílu uvnitř limity. Po této úpravě dostaneme limitu, která bude vypadat takto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{2^x} \cdot \frac{\ln x}{x}.$$

$2^x$  je coby exponenciální funkce jistě dominantní vůči mocninné funkci  $x^4$ , a stejně tak mocninná funkce  $x$  je zcela jistě dominantní vůči logaritmu  $\ln x$ . Z toho vidíme, že výsledkem bude  $0 \cdot 0 = 0$ .

Tato úloha nám ukázala jednu důležitou věc – že dominantní člen je vždy celý součin, nikoli pouze dominantní funkce v rámci součinu. Pro lepší představu si to ukažme ještě jednou na konkrétnější úloze, zaměřené přímo na tento problém.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \ln x + \sqrt{x}}{2^x}$$

Funkce  $x^3$  je jistě dominantní vůči  $\sqrt{x}$  (a také vůči  $\ln x$  – to nás ale nemusí zajímat, neboť víme, že vytknout musíme celý součin). Vytknutím  $x^3 \ln x$  dosáhneme převedení této úlohy na úlohu předchozí (zbytek po vytknutí je totiž  $(1 + \frac{\sqrt{x}}{x^3 \ln x})$  – tato závorka jde k číslu 1 a dle věty o aritmetice limit, viz sekce 1.2.3, můžeme celou závorku touto hodnotou nahradit).

Ukázkou toho, že se dominance dají použít, i když zadané funkce přesně neodpovídají funkcím z dominantní řady, je tato úloha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x^2}}{x^6}.$$

Čitatel i jmenovatel můžeme chápat jako složené funkce s vnitřní funkcí  $x^2$  (ve jmenovateli je tato funkce „schována“ a pro uvědomění si, že tomu tak je, je nutná znalost práce s mocninnými funkcemi – což se nám opět bude hodit u konstrukce úloh). Tuto funkci můžeme zasubstituovat ( $y = x^2$ ) a řešit tak úlohu, kterou známe – jen na základě přímého použití dominantní řady.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x^2}}{x^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x^2}}{(x^2)^3} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2^y}{(y)^3} = \infty$$

Dominance se v úlohách mohou vyskytovat v různých podobách. V předchozí úloze jsme viděli, že můžeme změnit vnitřní funkci složené funkce, a přesto lze dominance použít. V následující úloze uvidíme, že při správném zadání vnitřního výrazu limity není nutné, aby byl limitní bod nevlastní.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$$

Tuto úlohu budeme řešit opět pomocí substitute. Zasubstituujeeme tentokrát  $y = \frac{1}{x}$ . To nám výrazně změní zadání naší limity. Limitní bod bude  $\frac{1}{0^+} = \infty$ . V samotné limitě potom snadno nahradíme  $x$  za  $\frac{1}{y}$  a konečně  $\ln x$  nahradíme  $\ln \frac{1}{y} = \ln y^{-1} = -\ln y$ , což nám opět, jako nadstavbu, testuje znalost práce s logaritmickými funkcemi. Řešení tedy bude vypadat takto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{\ln y}{y} = 0.$$

Uveďme si nyní komplikovanější úlohu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + x^2)}{x}.$$

Logaritmus má takovou vnitřní funkci, že na ni jmenovatel nelze žádným způsobem upravit. Musíme hledat způsob, jak výraz upravit lze, abychom na něj mohli aplikovat dominance. Techniku, jak toho docílit, vytvoříme postupně. Začneme jednodušší úlohou:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{2^x}.$$

Zde se jmenovatel pomocí vnitřní funkce logaritmu přepsat dá ( $2^x = (\sqrt{2})^{2x}$ ), ale my to neuděláme, neboť budujeme obecnější metodu, která nás dovede až k úpravě součtu v argumentu logaritmu. Čítatel rozložíme pomocí vzorce pro logaritmus součinu na  $\ln 2 + \ln x$ . Následující řešení můžeme provést hned dvěma způsoby – výraz roztrhneme na dva zlomky, nebo vytkneme dominantnější funkci, což je lepší a univerzálnější postup. Proto ho aplikujeme.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2 + \ln x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x \cdot \left(\frac{\ln 2}{\ln x} + 1\right)}{2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{2^x} = 0$$

Vraťme se nyní k původní komplikovanější úloze, ve které se vyskytuje logaritmus s vnitřní funkcí ve formě součtu. Taková situace je složitější – pro logaritmus součtu neexistuje vzorec, a navíc sice můžeme v rámci vnitřní funkce logaritmu vytknout dominantní člen, ale zbytek po takovémto vytknutí nelze nahradit jeho limitní hodnotou (právě proto, že se vyskytuje uvnitř logaritmu). Správným řešením tedy bude vytknutí dominantního členu z vnitřní funkce logaritmu ( $2^x$ ), následné roztržení výrazu podle vzorce pro logaritmus součinu, úprava logaritmické funkce ( $\ln 2^x = x \cdot \ln 2$ ) a opětovné vytknutí dominantního členu – v tomto případě  $x \cdot \ln 2$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + x^2)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(2^x \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2^x}\right)\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^x + \ln\left(1 + \frac{x^2}{2^x}\right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x^2}{2^x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \ln 2 \cdot \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{2^x}\right)}{x \cdot \ln 2}\right)}{x} = \ln 2 \end{aligned}$$

Ukázalo se že čítatel je ekvivalentní s  $x \cdot \ln 2$ . I kdyby ve jmenovateli nebylo  $x$ , se kterým je možné tento výraz krátit, měli bychom čítatel ve tvaru konstantního násobku funkce z dominantní řady. Tohoto výsledku se však v případě nestandardní vnitřní funkce u funkce exponenciální většinou nedobereme. Zde obvykle vycházejí funkce, které nejsou členy dominantní řady a přímo na ně dominance nelze použít. V takových případech převádíme celou funkci na funkci exponenciální a dominance aplikujeme na exponent. Ukažme si to v následující úloze:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x} - \ln x}.$$

V čítateli se nám vyskytuje funkce  $e^{\sqrt{x}}$ , a proto si hned v prvním kroku převedeme výraz ve jmenovateli na exponenciálu pomocí vzorce  $u^v = e^{v \cdot \ln u}$ , tedy  $x = e^{\ln x}$ . Následnou úpravou jsme dostali výraz  $e^{\sqrt{x} - \ln x}$ . Budeme postupovat řešením limity exponentu. Vytkneme dominantní člen – v tomto případě jím jistě bude odmocninná funkce  $\sqrt{x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \infty$$

Nyní můžeme limitu exponentu zpátky dosadit.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^y = \infty,$$

kde  $y = \sqrt{x} - \ln x$ .

Tím jsme vlastně ukázali, že  $x \ll e^{\sqrt{x}}$ . Úplně stejně lze dokázat, že  $e^x \gg e^{\sqrt{x}}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\sqrt{x}-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0,$$

kde  $t = -y = \sqrt{x} - x = x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$ .

Nalezli jsme tedy funkci, která je svou velikostí ostře mezi členy nám známé základní dominantní řady, a která nám navíc dává návod, jak takové funkce konstruovat. Zároveň umožňuje nalézat funkce, které jsou podstatně větší (dominantní), nebo naopak podstatně menší než všechny členy dominantní řady.

Uveďme si některé příklady:

$$x^{k_1} = e^{k_1 \cdot \ln x} \ll x^{\ln x} = e^{\ln^2 x} \ll e^{\sqrt{x}} \ll e^{k_2 \cdot x} = e^{x \cdot \ln q} = q^x,$$

$$\text{kde } k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+, \text{ pro } x \rightarrow \infty,$$

$$\ln \ln x \ll \ln^k x, \text{ kde } k \in \mathbb{R}^+, \text{ pro } x \rightarrow \infty,$$

$$q^x \ll e^{x^2} \ll e^{e^x}, \text{ kde } q > 1, \text{ pro } x \rightarrow \infty.$$

Uveďme si ještě jednu důležitou transformaci dominantní řady, vyplývající z poznatku, že je-li  $f \ll g$  a  $f$  je nenulová v jistém prstencovém okolí limitního bodu, je  $\frac{1}{f} \gg \frac{1}{g}$ :

$$\ln^k x \gg x^l \gg q^x \text{ pro } k, l \in \mathbb{R}^-, \text{ pro } x \rightarrow \infty, \text{ tedy}$$

$$\frac{1}{\ln^k x} \gg \frac{1}{x^l} \gg \frac{1}{q^x} \text{ pro } k, l \in \mathbb{R}^+, \text{ pro } x \rightarrow \infty.$$

Je nezbytné si uvědomit, že nelze pouze porovnat exponenty s přihlédnutím k dominantní řadě (i když je stejný základ), protože při takovém postupu by například výpočet úlohy  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{e^x}$  sváděl ke konečnému výsledku jako třeba  $e^2$ , což není správně. Správným postupem je to, co jsme viděli u předchozí úlohy, tedy přepis zlomku na exponenciální funkci s rozdílem v exponentu:  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x-x}$ , z čehož už jasně vidíme výsledek  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ . Podobně úloha typu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{\ln x}$ . Funkce  $x^2$  je jistě dominantní vůči  $x$  – to často svádí k dojmu, že čítec je dominantní vůči jmenovateli a že tedy výsledkem bude nevlastní limita. Není tomu tak, neboť  $\ln x^2 = 2 \cdot \ln x$ . Logaritmy se zkrátí a výsledkem bude pouze číslo 2.

## 2.5 Úlohy vedoucí na ekvivalence

Následující sada gradovaných úloh demonstruje užití ekvivalencí na jednodušších i složitějších příkladech.

V první úloze, kterou si zde uvedeme, je jmenovatelem i čitatelem funkce přímo vybraná z ekvivalenční řady.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(x+1)}$$

V tomto případě můžeme přímo použít ekvivalenční řadu a rovnou rozhodnout, že je limita rovna jedné, neboť  $\sin x \cong \ln(x + 1)$  pro  $x \rightarrow 0$ .

V další úloze si ukážeme, jak postupovat, je-li jmenovatel i čítec funkcí vybranou z ekvivalenční řady s komplikovanější vnitřní funkcí, která je stejná u obou výrazů.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{\ln(x^2 + 1)}$$

U obou výrazů je vnitřní funkce změněna na složitější. Na místě  $x$ , jak je uvedeno v řadě ekvivalencí, se nachází  $x^2$ . To ovšem není problém: funkce  $x^2$  na žádném prstencovém okolí nuly nenabývá hodnoty nula, takže ze znalosti věty o limitě složené funkce (Věta 8) můžeme snadno odvodit, že  $\sin x^2 \cong \ln(x^2 + 1) \cong x^2$  u 0.

Následující úloha demonstruje situaci, kde vnitřní funkce je totožná u obou výrazů, ale změní se limitní bod.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\ln \left( \frac{1}{x} + 1 \right)}$$

Tato úloha nám ukazuje, že pro použití ekvivalence není podstatný limitní bod (zde  $\infty$ ), ale limita vnitřních funkcí těch funkcí, pro něž známe ekvivalence. Je tomu tak proto, že v původní řadě ekvivalencí máme  $x \rightarrow 0$  pro limitu, kde se ve výrazu vyskytuje  $x$ . To je ale totožné se situací, kdy  $x \rightarrow \infty$  a ve výrazu je  $\frac{1}{x}$ . Pomocí substituce bychom snadno mohli druhý případ převést na první. Jde vlastně opět o aplikaci věty o limitě složené funkce (Věta 8).

Další úloha nám ukazuje situaci, kdy jmenovatel obsahuje jinou vnitřní funkci než čítec.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(3x + 1)}$$

Tato úloha je komplikovanější v tom smyslu, že  $\sin 2x$  a  $\ln(3x + 1)$  jistě nejsou ekvivalentní, neboť jejich vnitřní funkce neodpovídají původní ekvivalenční řadě, ani se neshodují. To nám ovšem nemusí vadit, neboť dokážeme říct, že  $\sin 2x \cong 2x$  a  $\ln(3x + 1) \cong 3x$ . Metoda odpovídající řešení této a jí podobných úloh spočívá v rozšíření každé funkce jednodušším výrazem, o kterém víme, že je s ní ekvivalentní, a použití druhé věty o aritmetice limit na nahrazení podílu ekvivalentních funkcí jedničkou. Ukažme si to na řešení námi zadané úlohy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(3x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \frac{2x}{2x}}{\ln(3x + 1) \cdot \frac{3x}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Předchozí úlohy ukázaly, že znalost ekvivalencí lze použít kdekoli, kde má vnitřní funkce za limitu bod, ve kterém známe ekvivalenci pro vnější funkci. Zřejmě nejkomplikovanější z možností, které v rámci ekvivalencí mohou nastat, jsou situace, kdy jeden nebo oba výrazy obsahují složitější vnitřní funkce. To si ukážeme na úloze, kde je v čitateli zadána funkce z ekvivalenční řady, jejíž vnitřní funkce je také jednou z funkcí uvedených v rámci ekvivalencí. Takové úlohy jsou zrádné, neboť navádějí k nesprávnému užití ekvivalencí.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{x}$$

V tomto případě může znalost ekvivalence  $e^x - 1 \cong x$  svádět k jejímu užití uvnitř funkce  $\sin$ . To však žádná z vět využívaných při výpočtu limit neumožňuje. Je

nutné si uvědomit, že (vyjma mocninných a odmocninných funkcí) nelze nahrazovat uvnitř funkce. Postupovat musíme zvenčí – v tomto případě využít znalosti, že  $\sin x \cong x$  u nuly, neboť při dosazení vidíme, že  $(e^x - 1)$  jde v nule k nule. Správný postup tedy bude vypadat takto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) \cdot \frac{(e^x - 1)}{(e^x - 1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Jako poslední příklad v této sekci uvedeme překvapivě úlohu vedoucí na dominance, kde je ovšem nezbytné v rámci jednoho mezikroku využití ekvivalencí.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + \operatorname{arccotg} x) \cdot \ln(x^{\sqrt{x}} + x^2)$$

Zde by se nám jistě hodilo vědět, kterou funkci z první závorky vytknout, aby nám v dané závorce zbylo číslo jedna a výsledkem první části výrazu by tedy byl namísto součtu dvou funkcí pouze součin jedné funkce a zbytku, který půjde k číslu jedna – jde vlastně o rozhodnutí, která z daných dvou funkcí je dominantnější. Úlohu by nám to výrazně zjednodušilo. Pomůžeme si výpočtem limity  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{\operatorname{arccotg} x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{\operatorname{arccotg} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x \operatorname{arccotg} x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Při výpočtu jsme využili nejprve ekvivalenci  $\operatorname{arccotg} x \cong \frac{1}{x}$  a na závěr také dominance plynoucí ze základní dominantní řady. Stejnými úpravami bychom se při prohození počátečních výrazů ve zlomku dostali k výsledku  $\infty$ . Z tohoto výpočtu můžeme dojít k závěru, že  $\operatorname{arccotg} x$  je dominantní vůči  $e^{-x}$ .

Můžeme také vyjít z předpokladu, že pokud  $x \ll e^x$  u  $\infty$ , pak zcela jistě platí i tvrzení, že  $\frac{1}{x} \gg e^{-x}$  u  $\infty$  a zároveň víme, že  $\operatorname{arccotg} x \cong \frac{1}{x}$  u  $\infty$ . Z toho už zcela zjevně plyne, že  $\operatorname{arccotg} x \gg e^{-x}$  u  $\infty$ .

Je tedy znovu vidět, že ekvivalence nám umožní rozšířit dominantní řadu o další funkce a zjednodušit nám tak výpočty složitých výrazů (jak jsme již viděli v sekci 2.4).

Pro úplnost uvedeme řešení celé úlohy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + \operatorname{arccotg} x) \cdot \ln(x^{\sqrt{x}} + x^2) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} x \cdot \left( \frac{e^{-x}}{\operatorname{arccotg} x} + 1 \right) \cdot \ln \left( x^{\sqrt{x}} \cdot \left( 1 + \frac{x^2}{x^{\sqrt{x}}} \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} x \cdot \frac{1}{x} \cdot \left( \ln x^{\sqrt{x}} + \ln \left( 1 + x^{(2-\sqrt{x})} \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \left( \ln x^{\sqrt{x}} \right) \cdot \left( 1 + \frac{\ln \left( 1 + \left( 1 + x^{(2-\sqrt{x})} \right) \right)}{\ln x^{\sqrt{x}}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0. \end{aligned}$$

## 2.6 L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo nebudeme při konstrukcích úloh používat z důvodů uvedených v kapitole 3. Přesto je nezbytné zmínit metody výpočtu pomocí L'Hospitalova

pravidla a situace, které v rámci tohoto postupu mohou nastat, neboť je to důležitá a často využívaná pomůcka pro výpočet limit.

Jak už bylo řečeno v části 1.2.11, L'Hospitalovo pravidlo užíváme pro výpočet limity podílu, kde je čitatel i jmenovatel po dosazení nevlastní či nulový. Ne vždy, když takový případ nastane, se dá toto pravidlo použít. Někdy je to z principálních důvodů (viz sekce 1.2.11), jindy z důvodů technických. Uveďme si příklad takové úlohy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Jediné, čeho v takovém případě pomocí L'Hospitalova pravidla dosáhneme, je prohození výrazů v čitateli a jmenovateli, neboť derivace čitatele je  $(\sqrt{x^2 + 1})' = x \cdot (x^2 + 1)^{(-\frac{1}{2})}$  a derivace jmenovatele je  $(x)' = 1$ . Výsledkem tedy bude

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

To nám výpočet limity nevyřešilo, ani nikterak neusnadnilo. Při další aplikaci L'Hospitalova pravidla by nám vyšel původní výraz.

Pro úplnost uvedeme správné řešení této úlohy (pomocí vytýkání nejvyšší mocniny):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = 1.$$

Dále stojí za zmínku situace, kdy lze této pomůcky využít, ale je to příliš zdoluhavé nebo pracné. Jde o úlohy, kde se vyskytuje nějaká mocninná funkce vysokého stupně. Uveďme si jednoduchou úlohu, která nám takovou situaci ukazuje:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{17}}{e^x}.$$

Funkce  $e^x$  se při opakovaném derivování měnit nebude, ale výraz v čitateli budeme muset sedmáctkrát mechanicky zderivovat, což není efektivní. Pokud se však podíváme na tuto úlohu a budeme mít znalost dominancí, lze snadno určit, že výsledkem této limity bude nula, neboť  $e^x$  je jako exponenciální funkce jistě dominantní vůči mocninné funkci  $x^{17}$  (viz Věta 17).

L'Hospitalovo pravidlo lze naproti tomu použít i v případech, kdy se na první pohled může zdát, že použít nejde (výraz uvnitř limity není v podílovém tvaru). Jde především o případ, kdy nám jako výsledek po dosazení limitního bodu vyjde nedefinovaný výraz  $0 \cdot \infty$ . Jednoduchou úpravou lze každý takový výraz převést na námi požadovaný tvar  $\frac{\infty}{\infty}$  či  $\frac{0}{0}$ . Tato úprava je založena na převedení výrazu na složený zlomek a vychází z předpokladu, že  $\frac{1}{\pm\infty} = 0$  a  $\frac{1}{0_{\pm}} = \pm\infty$ . Tedy pokud  $f(x) \rightarrow 0$  a  $g(x) \rightarrow \infty$ , můžeme psát:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

čímž dostaneme požadovaný tvar pro použití L'Hospitalova pravidla.

Pokud nám po dosazení limitního bodu vyjde výraz  $1^{\infty}$ ,  $0^0$  nebo  $\infty^0$ , je nutné převést takový výraz na exponenciální funkci pomocí vzorce  $u^v = e^{v \cdot \ln u}$  a řešit aplikací L'Hospitalova pravidla na limitu exponentu.

Případy, kdy po dosazení do limity vychází nedefinovaný výraz  $\infty - \infty$ , převádíme do tvaru podílu vhodného k užití l'Hospitalova pravidla pomocí vzorce

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}.$$

# Kapitola 3

## Konstrukce úloh

V rámci této kapitoly se budeme zabývat tvorbou úloh nejprve zaměřených na jednotlivé metody výpočtů a na závěr komplikovanějšími úlohami, které kombinují více metod dohromady. Úlohy zaměřené na jednotlivé metody budou komplikovanější, než s jakými jsme se doposud setkali; je to proto, že v rámci metod (kapitola 2) jsme probrali nejjednodušší až středně složité úlohy. Nyní tedy uvedeme složitější úlohy z jednotlivých sekcí kapitoly 2 (vyjma sekce 2.6 – vysvětleno níže), ale především se zaměříme na úlohy, při jejichž řešení je potřeba kombinovat různé metody, neboť takové úlohy jsou nejkompikovanější a nejčastěji využívané při testování. Řešitel si u nich musí uvědomit další souvislosti a prokázat vhléd do problematiky řešení limit funkcí.

Při konstrukci úloh se zaměříme na úlohy, u kterých se k řešení využívají dominance a ekvivalence, dále na takové úlohy, které v sobě obsahují racionální či iracionální funkce, a také na úlohy, u nichž je nutná znalost nejrůznějších vzorců (vzorce pro logaritmické či goniometrické funkce, vzorec  $u^v = e^{v \cdot \ln u}$  a další). Všemi úlohami se prolíná testování znalosti vět, které nám říkají, jak s limitami pracovat (viz sekce 1.2). Z našich konstrukcí vynecháme úlohy vedoucí na L'Hospitalovo pravidlo a Taylorovy polynomy, či spíše zavedeme pravidlo, že těmito způsoby úlohy řešit nebudeme. Je to proto, že tyto dvě pomůcky k výpočtu limit vedou k mechanizaci řešení – řešitel často nemusí do hloubky rozumět tomu, co dělá, jen opakovaně aplikuje určité pravidlo, dokud nedojde k výsledku. Druhým důvodem, proč tato pravidla při řešení nebudeme užívat, je omezená možnost testování dalších znalostí.

Nalézání limit elementárními metodami (těmi, které nevyžadují poznatky z diferenciálního počtu) nemá oproti řešení limit pomocí metod vyžadujících znalosti diferenciálního počtu tak deterministický charakter. Kromě znalosti širší škály metod a situací, kdy je možno je použít, vyžaduje i další matematické znalosti a dovednosti, zvláště pak úpravy elementárních funkcí. Díky tomu je návrh úloh na řešení L'Hospitalovým pravidlem nebo pomocí Taylorova rozvoje a návrh úloh na řešení elementárními metodami podstatně odlišný. Rozhodla jsem se proto v této práci věnovat návrhu úloh řešitelných elementárně, protože procvičují dovednosti důležité pro budoucí středoškolské učitele.

Přehled znalostí a dovedností nezbytných k řešení dále navrhovaných úloh: přímo z limitního počtu:

- schopnost počítat na oboru  $\mathbb{R}^*$  včetně znalosti nedefinovaných výrazů,
- určování limit výrazů typu  $\frac{a}{0}$  pomocí znaménka jmenovatele,

- znalost asymptotického chování základních funkcí v krajních bodech definičního oboru a v nulových bodech a schopnost jeho korektního užití (dominance, ekvivalence),
- znalost práce s výrazy, které nemají limitu (Bolzanova-Cauchyova podmínka (viz Věta 16 a její důsledek), vybrané posloupnosti, věta „o dvou policajtech“),
- znalost substituční metody a jejího praktického využití

z elementární teorie funkcí:

- znalost vlastností (definiční obor, průběh, vzorce) základních funkcí (mocninné, odmocninné, logaritmické, exponenciální, goniometrické, cyklometrické, absolutní hodnota a funkce signum),
- práce s přibližnou hodnotou funkce

### 3.1 Racionální a iracionální funkce

Všechny případy, které mohou v rámci výpočtu limit racionálních či iracionálních funkcí nastat, jsme jednotlivě probrali v oddílu 2.2 a 2.3. Proto k nim už jednotlivě přistupovat nebudeme, ale tyto dva oddíly spojíme v rámci konstrukcí úloh v jeden.

Ukažme si nyní nejjednodušší metodu konstrukce úlohy na limitu racionální a iracionální funkce:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 8} - 1}{x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 3}.$$

Většina těchto úloh (limita racionální resp. iracionální funkce ve vlastním bodě) je založena na tom, že po dosazení dostaneme nedefinovaný výraz  $\frac{0}{0}$  resp.  $\frac{a}{0}$  (jinak je limita přímo výsledkem dosazení, je-li funkce na okolí limitního bodu definovaná). Rozhodli jsme se pro první nedefinovaný výraz, chceme tedy, aby ve jmenovateli i čitateli vyšla po dosazení nula. Nejprve vybereme prakticky libovolně limitní bod 3 (libovlnost výběru je omezena jen složitostí příslušných výpočtů), od kterého se následně bude odvíjet tvorba výrazů v čitateli i jmenovateli. Rozhodli jsme se pro iracionální funkci do čitatele a pro polynom do jmenovatele. Konstrukci čitatele můžeme začít odmocninou z libovolného polynomu, který má v limitním bodě kladnou hodnotu (pod lichou odmocninou může mít i zápornou či nulovou). Abychom dosáhli nulové hodnoty čitatele, odečteme nyní výraz se stejnou hodnotou v limitním bodě. Tímto výrazem může být přímo příslušná konstanta, polynom či další odmocnina z polynomu, i složitější iracionální funkce. V tomto případě jsme zvolili konstantu; pokud bychom se rozhodli pro polynom či odmocninu z polynomu, je nejjednodušší volit libovolně členy s kladnou mocninou proměnné a kýžené hodnoty dosáhnout volbou členu absolutního. Tímto způsobem také vytvoříme ve jmenovateli polynom s kořenem v limitním bodě. Řešením této úlohy testujeme schopnost rozšiřování a schopnost vytknout lineární člen z polynomu (nejlépe použitím Hornerova schématu).

Popsaný způsob tvorby této úlohy je sice technicky nejjednodušší, avšak neumožňuje kontrolu jiných parametrů úlohy než je nulovost jmenovatele, případně

i čitatele. Například nelze přímo ovlivnit, kolikanásobným kořenem polynomu ve jmenovateli a polynomu vzniklého rozšiřováním v čitateli je limitní bod, a tedy ani to, zda je výsledná limita vlastní či nevlastní, nebo zda vůbec existuje (existenci limity lze v tomto případě zajistit tím, že ji naformulujeme jako jednostrannou). Proto si nyní ukážeme obecnější metodu tvorby úlohy s plnou kontrolou nad všemi parametry. Tato metoda vychází z obráceného postupu řešení úlohy. Vycházíme z toho, co vyjde řešiteli v úplném závěru, a tento tvar různými způsoby komplikujeme až ke konečné podobě námi požadované limity.

Tuto metodu si tedy ukážeme na konstrukci následující úlohy:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^4 - 2x^3} + \sqrt{2x^2 - 8x + 8}}{\sqrt{x^4 + 3x^3 + 6x} - \sqrt{x^4 + x^3 + 7x^2}}.$$

- Zvolíme limitní bod – v našem případě číslo  $2_+$ . (Obecně lze říci, že snazší jsou ty úlohy, jejichž limitním bodem je  $0$ , resp.  $0_{\pm}$ . Stejně jako při tvorbě předchozí úlohy bychom měli vybírat vždy takové body, aby dosazení nedělalo problém – například u rovnice čtvrtého řádu nebudeme volit za limitní bod číslo 128.)
- Zvolíme racionální funkci takovou, že polynomy v čitateli ani ve jmenovateli po dosazení limitního bodu nenabývají nulové hodnoty (nemají limitní bod za kořen) – do čitatele jsme vybrali  $(x^3 + 2x - 4)$ , do jmenovatele potom  $(2x^2 - 3x)$  – podíl funkcí, které jsme v tomto kroku vybrali, zůstane řešiteli spolu se zbytky po rozšiřování na konci řešení úlohy po odseparování nulových členů, kterými jmenovatel a případně i čítec rozšíříme v dalším kroku.
- Jmenovatel je nutné rozšířit výrazem, který má za kořen limitní bod (jinak by byla úloha triviální, dosazovací). Protože zatím chceme, aby funkce zůstala racionální, znamená to rozšířit výrazem  $(x - c)$  (kde  $c$  je limitní bod), nebo jeho libovolnou přirozenou mocninou – my zvolíme první mocninu, budeme tedy rozšiřovat výrazem  $(x - 2)$ .
- Čítec rozšířit můžeme a nemusíme – záleží, jak komplikovanou úlohu chceme vytvořit (pokud rozšíříme čítec, bude úloha komplikovanější, než kdybychom ho nerozšířili, neboť bude nezbytné ho také upravovat). My jsme čítec rozšířili  $(x - 2)^1$  (viz následující bod).
- Pokud rozšíříme pouze jmenovatel, nebo ho rozšíříme vyšší mocninou  $(x - c)$  než čítec, budou jednostranné limity nevlastní – v případě, že rozdíl mocnin výrazu  $(x - c)$  bude lichý, budou jednostranné limity opačného znaménka (a oboustranná limita tedy nebude existovat), v případě sudého rozdílu budou jednostranné limity shodné. My jsme výraz rozšířili v čitateli i jmenovateli výrazem  $(x - 2)$  – to nám zajistí, že se řešiteli na konci zkrátí a výsledná limita bude vlastní nenulová. Pokud bychom čítec rozšířili vyšší mocninou  $(x - c)$  než jmenovatel, bude konečný výsledek nula.
- Po rozšíření výrazy roznásobíme.

Pokud tvoříme úlohu na limitu racionální funkce, zde skončíme. Výsledná úloha a její řešení je následující:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 8x + 8}{2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x^3 + 2x - 4)}{(x-2) \cdot (2x^3 - 3x)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Pokud chceme vytvořit úlohu na limitu funkce iracionální (konkrétně takovou, kterou jsme tuto část uvedli), pokračujeme následovně:

- Čítec i jmenovatel můžeme (teoreticky) nekonečně mnoha způsoby rozložit na rozdíl polynomů (viz následující bod). Tento rozdíl vyjde řešiteli z rozšíření podle vzorce pro  $a^n - b^n$ , viz sekce 2.3.2. Postupujeme-li tedy od výsledku k zadání, musíme nyní  $a^n - b^n$  nahradit  $a - b$ , což znamená nahradit příslušné polynomy jejich odmocninami.
- Nejjednodušším způsobem, jak polynom rozložit na rozdíl polynomů, je vložit některé jeho členy do menšence a ostatní do menšitele. Například pro náš rozšířený jmenovatel by takové rozklady mohly být:

$$2x^3 - 7x^2 + 6x = (2x^3 + 6x) - (7x^2) = (2x^3) - (7x^2 - 6x).$$

Samozřejmě ale můžeme i některé členy mezi menšence a menšitel rozdělit, například:

$$2x^3 - 7x^2 + 6x = (3x^3 - 5x^2 + x) - (x^3 + 2x^2 - 5x).$$

Navíc můžeme polynom obohatit o členy s mocninami proměnné, které se v něm původně nevyskytovaly:

$$2x^3 - 7x^2 + 6x = (x^4 + 3x^3 + 6x) - (x^4 + x^3 + 7x^2).$$

Tento poslední rozklad použijeme v naší úloze. V každém případě musíme mít při tvorbě rozkladů na paměti, že hodláme-li použít sudou odmocninu, musí být hodnota menšence i menšitele v limitním bodě nezáporná (pozor, je-li nulová, funkce nemusí být definována na žádném prstencovém okolí limitního bodu).

- Z hlediska metod potřebných při řešení úlohy je podstatné, zda hodnota menšence a menšitele v limitním bodě je nebo není nulová. V případě, že není, je třeba použít rozšiřování, v případě, že je nulová, je nejprve nezbytné vytýkání (a případně též rozšiřování v následujícím kroku).
- Při tvorbě iracionální funkce se při zvažování konečného výsledku limity musíme zamýšlet nad tím, jaké výrazy v čitateli a jmenovateli vytvoříme i z hlediska toho, jaká s nimi bude nutná následná úprava. Zde totiž neplatí, že pokud rozšíříme původní výraz stejnou mocninou  $(x - c)$  jak v čitateli, tak ve jmenovateli, získáme konečnou limitu. Pokud totiž budeme v jednom případě vytýkat a v druhém pouze rozšiřovat, nastane komplikace. To uvidíme i v naší úloze. Ačkoli jsme výrazy rozšiřovali pouze první mocninou polynomu  $(x - 2)$ , nevyjde konečná limita, jak bychom si mohli myslet. Kdybychom chtěli získat konečnou limitu, museli bychom při rozšiřování v našem konkrétním případě rozšířit čítec polynomem  $(x - 2)^2$ .

Pro úplnost ještě uvedme správný postup řešení námi zkonstruovaného příkladu:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^4 - 2x^3} + \sqrt{2x^2 - 8x + 8}}{\sqrt{x^4 + 3x^3 + 6x} - \sqrt{x^4 + x^3 + 7x^2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2) \cdot x^3} + \sqrt{(x-2)^2}}{(\sqrt{x^4 + 3x^3 + 6x} - \sqrt{x^4 + x^3 + 7x^2}) \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 3x^3 + 6x} + \sqrt{x^4 + x^3 + 7x^2}}{\sqrt{x^4 + 3x^3 + 6x} + \sqrt{x^4 + x^3 + 7x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)} \cdot (\sqrt{x^3} + \sqrt{(x-2)})}{\frac{x^4 + 3x^3 + 6x - x^4 - x^3 - 7x^2}{\sqrt{x^4 + 3x^3 + 6x} + \sqrt{x^4 + x^3 + 7x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{8}}{\frac{2x^3 - 7x^2 + 6x}{2 \cdot \sqrt{52}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{8} \cdot 2 \cdot \sqrt{52}}{(x-2) \cdot (2x^3 - 3x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 \cdot \sqrt{52} \cdot 8}{\sqrt{x-2} \cdot 2} = \infty.
\end{aligned}$$

V nevlastních bodech chceme po dosazení dostat výraz  $\frac{\infty}{\infty}$ , případně  $\infty - \infty$ . Mechanismus tvorby úloh na limity v nevlastních bodech je analogický tvorbě úloh v bodech vlastních, s tím, že místo násobení výrazem  $(x - c)$  používáme jednodušší přidávání členů s nejvyšší mocninou. Poznamenejme, že to lze snadno nahlédnout, když si uvědomíme, že takové úlohy (na limity ve vlastních a nevlastních bodech) na sebe dokážeme vzájemně převádět pomocí substituce.

## 3.2 Dominance

Tvorba složitějších úloh vedoucích pouze na řešení pomocí dominancí je komplikovaná. Většinou se dominance využívají v rámci kombinovaných úloh coby jeden z nutných postupů na cestě k výsledku. Je to proto, že dominantní řada je sama o sobě vcelku chudá (i když jsme schopni rozšířit ji o další funkce). Aby vzniklé úlohy byly zajímavější, obohacujeme je obvykle ekvivalencemi a dalšími postupy.

Abychom vysvětlili konstrukce úloh, ve kterých se dominance využívají, ukážeme alespoň jednu úlohu, kde je k řešení potřeba pouze dominantní řada. Další vysvětlení práce s dominancemi při konstrukci úloh uvidíme u kombinovaných úloh (viz sekce 3.4).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln x} - \ln \sqrt{x}}{e^{\sqrt{\ln x}} + e^{-\sqrt{x}}}$$

Do čitatele jsme se rozhodli vložit rozdíl dvou funkcí, aby po dosazení byl výsledkem nedefinovaný výraz  $\infty - \infty$  a aby nebylo na první pohled zřejmé, která z funkcí je dominantní, tedy kterou je nutné vytknout. Vybrali jsme třídu dominancí  $\ln^k x$  a zamysleli se, jak ji dále můžeme upravit. Vynásobení logaritmu libovolným nenulovým číslem z  $\mathbb{R}$  nebude mít na dominanci vliv. Můžeme tedy říct, že  $\ln x$  je stejně dominantní jako  $a \cdot \ln x = \ln x^a$  – což se hodí, neboť tím výraz můžeme zdánlivě zkomplikovat. Teď ale musíme vybrat takovou úpravu, která nám jasně určí, který logaritmus bude dominantní. Víme, že v rámci této třídy dominancí platí, že  $\ln^{k_1} \ll \ln^{k_2}$ , pokud  $k_1 < k_2$ . Za  $k_1$  zvolíme  $\frac{1}{2}$ , za  $k_2$  potom jedničku. Víme, že vynásobení číslem nebude mít vliv na dominanci a abychom ozvláštnili logaritmus umocněný na prvou, provedeme jeho vynásobení číslem  $\frac{1}{2}$ . Dostaneme tedy  $\ln^{\frac{1}{2}} x - \frac{1}{2} \cdot \ln x = \ln^{\frac{1}{2}} x - \ln x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ln x} - \ln \sqrt{x}$ . Z výrazu na začátku této rovnosti je zcela zjevné, která z funkcí je dominantní. Úpravami se ovšem dostaneme k výrazu, který předložíme řešiteli. Ten bude muset postupovat opačně a prokázat tak schopnost práce s logaritmickými funkcemi.

Ve jmenovateli vidíme zdánlivě komplikovanější situaci. Testujeme zde, zda je řešitel schopen v prvním kroku dosadit. Jmenovatel je v této úloze, co do řešení,

technicky výrazně jednodušší než čítenel. Pokud totiž dosadíme, zjistíme, že první funkce jde v daném limitním bodě do nekonečna, zatímco druhá k nule, je tedy zjevné, že první funkce je dominantní vůči druhé. Častým jevem je, že v případě, který nastává ve jmenovateli, řešitel nedosadí a namísto toho zkoumá dominance pomocí výpočtu. Nejde o chybu, řešitel se ke správnému výsledku dobere, ale úlohu si tím zkomplikuje. Dalším častým jevem je, že se řešitel zamyslí tímto způsobem:  $\sqrt{\ln x} \ll -\sqrt{x}$  a dojde k závěru, že druhá funkce je dominantní vůči první. V tomto případě už se ovšem o chybu jedná a nelze se tímto způsobem dobrat správného výsledku (tato problematika byla podrobně vysvětlena v závěru sekce 2.4).

Řešení, která funkce je ve jmenovateli dominantní, pokud řešitel nedosadí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{\ln x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\sqrt{x} - \sqrt{\ln x}} = 0.$$

Postup, jak zjistit, která z funkcí v čitateli je dominantní:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{\ln \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^{\frac{1}{2}} x}{\frac{1}{2} \ln x} = 0.$$

Úplné řešení námi vytvořené úlohy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\ln x} - \ln \sqrt{x}}{e^{\sqrt{\ln x}} + e^{-\sqrt{x}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x} \cdot \left( \frac{\sqrt{\ln x}}{\ln \sqrt{x}} - 1 \right)}{e^{\sqrt{\ln x}} \cdot \left( 1 + \frac{e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{\ln x}}} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{x} \cdot (-1)}{e^{\sqrt{\ln x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \cdot \ln x \cdot (-1)}{e^{\sqrt{\ln x}}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{2} \cdot y}{e^{\sqrt{y}}} = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln y}}{e^{\sqrt{y}}} = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{\ln y - \sqrt{y}} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow \infty} e^{\sqrt{y} \cdot \left( \frac{\ln y}{\sqrt{y}} - 1 \right)} = -\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow \infty} e^{-z} = 0, \end{aligned}$$

kde  $y = \ln x$  a  $z = \sqrt{y}$ .

### 3.3 Ekvivalence

V této sekci se budeme věnovat tvorbě úloh, které povedou na řešení pomocí ekvivalencí. Takových úloh se dá vytvořit mnoho, neboť ekvivalenční řada je sama o sobě bohatá a jejími různými úpravami můžeme vytvářet velké množství různých výrazů – například s komplikovanější vnitřní funkcí.

První konstrukce, kterou si zde uvedeme, bude mít tento výsledek:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{arccotg}^{-1} x^{-2}}.$$

Řekněme, že bychom chtěli dostat nedefinovaný výraz  $1^\infty$  (tento výraz je z nedefinovaných výrazů nejzrádnější kvůli silně zakořeněnému poznatku, že jedna na cokoli je jedna), abychom hned na začátku procvičili schopnost dosazení a převodu funkce na exponenciálu. Dále si zvolme za limitní bod číslo 0. Za základ zvolíme jednoduchou funkci, která má v nule limitu jedna a s jejímž logaritmem budeme později pracovat v exponentu. Vybereme  $\cos x$ . Těžko bychom pro tento účel hledali lepší funkci, neboť po použití ekvivalence na logaritmus nám vyjde

další výraz, jehož ekvivalenci známe, a po její aplikaci získáme výraz  $\frac{x^2}{2}$ . Nyní ještě musíme nalézt funkci, která jde v nule k nekonečnu, a na tu základ jdoucí k jedné umocníme. Nejjednodušší takovou funkcí je  $\frac{1}{x^2}$ . Druhá mocnina zde není nezbytná, stejně dobře bychom uspěli s jakoukoli sudou mocninou či s podobným výrazem v absolutní hodnotě (abychom nemuseli řešit znaménko nuly a otázku, zda jde funkce k  $+\infty$  či  $-\infty$ ). My jsme sem ale druhou mocninu zvolili kvůli tomu, aby řešiteli na konci úlohy vyšla konečná limita, neboť, jak můžeme nahlédnout, se mu na konci úlohy zkrátí výrazy obsahující  $x^2$ . Pro nalezení komplikovanější funkce, která by tomu odpovídala, se stačí zamyslet, s čím je funkce  $\frac{1}{x^2}$  pro  $x \rightarrow 0$  ekvivalentní. Takových funkcí můžeme pomocí ekvivalencí zkonstruovat více, například  $\frac{1}{e^{x^2}-1}$  či  $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x$  (zde vidíme hned dvě funkce, které lze použít). Stejně dobře můžeme vybrat převrácenou hodnotu cyklometrické funkce  $\operatorname{arccotg} y$  pro  $y \rightarrow \infty$ . Aby tomu tak bylo, zvolíme za jeho vnitřní funkci  $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ , kde  $x \rightarrow 0$ , což už odpovídá našim požadavkům. Poslední zmiňovanou situaci aplikujeme na naši úlohu a dostaneme tak kompletní zadání:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{arccotg}^{-1} x^{-2}}.$$

Řešitel si tedy v prvním kroku musí úlohu přepsat do tvaru:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{arccotg}^{-1} x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{arccotg}^{-1} x^{-2} \cdot \ln(\cos x)}$$

a následně řešit limitu exponentu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arccotg}^{-1} x^{-2} \cdot \ln(\cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{arccotg} x^{-2}}.$$

Měli bychom být schopni na první pohled vidět výsledek našeho počínání – v čitateli jím bude (poté, co dvakrát využijeme ekvivalence)  $-\frac{x^2}{2}$ , ve jmenovateli (kde stačí ekvivalence použít jednou)  $x^2$ . Tím dojdeme k výsledku, že limita exponentu je rovna  $-\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{arccotg} x^{-2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + 1 - 1) \cdot \frac{\cos x - 1}{\cos x - 1}}{\operatorname{arccotg} x^{-2} \cdot \frac{\frac{x^{-2}}{1}}{\frac{1}{x^{-2}}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1) \cdot (1 - \cos x) \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^{-2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nyní je nutné tuto limitu dosadit do původního zadání, čímž se dostaneme ke konečnému výsledku.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{arccotg}^{-1} x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\operatorname{arccotg}^{-1} x^{-2} \cdot \ln(\cos x)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Další úloha, jejíž konstrukci si ukážeme, vypadá následovně:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x - \cos x)^2}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

V prvním kroku zvolme za limitní bod nulu. Řekněme, že kromě ekvivalencí chceme procvičit, zda má řešitel znalosti o vztazích mezi goniometrickými funkcemi. Do čitatele vybereme ekvivalenci pro  $\ln y$ , kde za  $y$  zvolíme komplikovanější

goniometrickou funkci. Aby šla použít ekvivalence pro  $\ln y$ , musí  $y \rightarrow 1$ , čehož můžeme docílit různými způsoby. Vhodnější než hledání náhodných funkcí s hodnotou resp. limitou jedna, které by mohlo vést i k vytvoření úlohy elementárními metodami neřešitelné, je volit přímo funkce, které se dají převést do tvaru  $1 + v$ , kde  $v$  je výraz (s limitní hodnotou nula) zjednodušitelný ekvivalencí či jinou metodou. Přirozeným způsobem, jak dostat do argumentu logaritmu číslo jedna, aniž bychom použili přímo tuto konstantu, je například využití vzorce  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Tento součet kvadrátů získáme například umocněním dvojčlenu  $(\pm \sin x \pm \cos x)^2$ , které navíc zanechá člen  $\pm 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ , snadno zjednodušitelný dosazením a ekvivalencí  $\sin x \cong x$ . Výsledný tvar  $\ln(\sin x - \cos x)^2$  bývá pro řešitele zrádný. V podstatně většině případů, kdy se středoškolský či vysokoškolský student setká s logaritmem mocniny, se předpokládá užití vzorce  $\ln a^b = b \cdot \ln a$ . To však v tomto případě nejen není nutné, ale navíc to řešení úlohy zkomplikuje. Je totiž nezbytné zjednodušovat z ekvivalence vzniklý výraz  $\cos x - \sin x - 1$ , což vyžaduje rozdělení na dva známé ekvivalenční výrazy a vytýkání dominantního z nich, resp. funkce s ním ekvivalentní:

$$\begin{aligned} \cos x - \sin x - 1 &= -(1 - \cos x) - \sin x = -(1 - \cos x) \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} - \sin x \cdot \frac{x}{x} = \\ &= x \cdot \left( \frac{x}{2} \cdot \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} - \frac{\sin x}{x} \right) \cong -x. \end{aligned}$$

Úloha, která by obsahovala  $\ln(\cos x - \sin x)$ , by tak paradoxně byla snadněji řešitelná pomocí úpravy  $\ln(\cos x - \sin x) = \frac{1}{2} \ln(\cos x - \sin x)^2$ .

Do jmenovatele vybereme funkci přímo z ekvivalenční řady, která dá po dosazení nulu. Vybereme z ekvivalencí výraz obsahující opět goniometrickou funkci. Zvolili jsme  $1 - \cos x$ , ale lze vybrat i  $\sin x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\operatorname{tg} x$  či  $\operatorname{arctg} x$ , které ovšem na první pohled nevypadají tak složitě. Abychom výraz zkomplikovali, funkci odmocníme. Stejně tak bychom ji mohli umocnit, účelem je zjistit, zda řešitel ví, že ekvivalenci je v rámci mocninných funkcí možné použít, ale odmocnina nám navíc zajistí pozdější práci s absolutní hodnotou a tedy další znalost k procvičení. I zde bychom měli být schopni vidět výsledek ekvivalencí rovnou – bude jím  $\frac{|x|}{\sqrt{2}}$ . Zkonstruovali jsme tedy takový příklad, který nebude mít limitu  $-x$  se zkrátí a zůstane  $2\sqrt{2} \cdot \operatorname{sgn} x$ . Funkce  $\operatorname{sgn} x$  má ovšem pro nulu různou hodnotu zprava a zleva, proto budou existovat pouze jednostranné limity, které se budou znaménkově lišit.

Pokud bychom chtěli, aby limita existovala, musel by jmenovatel buď mít po použití ekvivalencí nižší stupeň než jedna (přesněji: musel by být dominantní vůči  $x$  pro  $x \rightarrow 0$ ), nebo alespoň mít stejně jako čítecel různá znaménka vpravo a vlevo od nuly. První možnost bude splněna například i tehdy, když za jmenovatel zvolíme funkci s konečnou nenulovou limitou, například  $\operatorname{arccotg} -x^{-2}$ , do které stačí dosadit a která má limitu  $\pi$ . Pokud bychom chtěli limitu nenulovou vlastní, stačilo by dát do jmenovatele funkci  $x$  nebo lépe  $\sin x$ , která je s  $x$  ekvivalentní. Tu můžeme dále zkomplikovat například použitím výše uvedené funkce s konečnou limitou, takže celý jmenovatel může být například  $\sin x \cdot \operatorname{arccotg} -x^{-2}$ . Tím se dostaneme k poměrně hezkému výsledku  $-\frac{2}{\pi}$ . Pokud bychom chtěli za výsledek konkrétní číslo – například číslo jedna – lze podle toho jmenovatel upravit například vynásobením převrácenou hodnotou původního výsledku, případně funkcí,

kteřá má v příslušném bodě stejnou limitu, třeba  $-\arccos x$ . Vraťme se nyní k původnímu zadání a ukaźme si úplný postup řešení této limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x - \cos x)^2}{\sqrt{1 - \cos x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(-2 \sin x \cos x + 1) \cdot \frac{-2 \sin x \cos x}{-2 \sin x \cos x}}{\sqrt{(1 - \cos x) \cdot \frac{x^2}{2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cdot \frac{x}{x} \cdot \cos x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sqrt{2} \cdot x \cdot 1}{|x|} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -2\sqrt{2} \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -2\sqrt{2} & \text{pro } x \rightarrow 0_+ \\ +2\sqrt{2} & \text{pro } x \rightarrow 0_- \end{cases} \end{aligned}$$

Poznamenejme, že výrazy před posledním rovnítkem ve výpočtu nemají smysl. Protože jsou jednostranné limity různé, oboustranná limita neexistuje; tímto však zavádíme úmluvu, že tento zápis bude nahrazovat dva nezávislé výpočty jednostranných limit, jejichž celý průběh je až na závěrečný výsledek shodný.

Čtenář si může povšimnout častého využití funkce logaritmus. Logaritmus je totiž jednou z nevhodnějších funkcí pro tvorbu takovýchto úloh. Jak jsme viděli, jeho vnitřní funkce se dají nejrůznějšími způsoby kombinovat a komplikovat tak, že později vedou na další úpravy, které dále testují řešitelovy schopnosti. Podobně je to s funkcí  $1 - \cos x$ .

### 3.4 Kombinované úlohy

Nyní se budeme zabývat kombinovanými úlohami, tedy těmi, u kterých řešitel musí využít více metod řešení, aby se dobral výsledku. Nebudeme se zabývat zvlášt tvorbou úloh na řešení limit ve vlastních či nevlastních bodech, spíše se budeme zamýšlet, jakých forem mohou úlohy nabývat při změně limitního bodu, jaký má taková změna vliv na podobu úlohy a funkce, které se v ní vyskytují, jak se tyto změny vzájemně ovlivňují a také na to, jaký mají vliv na konečný výsledek limity. Při výběru limitního bodu se soustředíme na to, aby prvotní krok, tedy dosazení, nebyl zbytečně a přehnaně komplikovaný.

Mějme tedy úlohu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1} \cdot (x + \sin x).$$

Následující řádky vysvětlí, jak jsme postupovali při její konstrukci. Řekněme, že v rámci první kombinované úlohy budeme chtít procvičit schopnost použít ekvivalenci na logaritmickou funkci. Zvolme nevlastní limitní bod  $\infty$ . Nyní se zamyslíme, jaký argument logaritmu zvolit. Aby bylo možné použít ekvivalenci, musí jít vnitřek logaritmu k jedné. Máme více možností, jak toho docílit. Například bychom mohli vybírat z cyklometrických funkcí  $-(1 + \operatorname{arccotg} x)$ ,  $\frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg}(-x)$ ,  $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x, \dots$  Další možností je exponenciální funkce se základem menším než jedna, resp. exponenciála s exponentem  $(-x)$ , například  $2^{(-x)}$ . My jsme vybrali racionální funkci  $\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1}$ . Z racionálních funkcí můžeme vybrat všechny takové, které mají shodný stupeň polynomu v čitateli i jmenovateli a zároveň shodné koeficienty vedoucích členů (jinak by vnitřek logaritmu nešel k jedné a nebylo

by možné použít ekvivalence). Stejně tak bychom mohli vybrat některé iracionální funkce. Můžeme se také zamýšlet nad tím, jaké funkce vybírat při změně limitního bodu. Pokud bychom například změnili limitní bod na  $x \rightarrow 2$ , mohli bychom zvolit za vnitřní funkci logaritmu například polynom, který po dosažení půjde k jedné, či podíl exponenciálních funkcí, jako třeba  $\frac{4^x}{2x^2}$ . Pro limitní bod  $x \rightarrow 1_-$  bychom za vnitřní funkci mohli vybrat například  $\frac{2}{\pi} \cdot \arcsin x$ . Pro  $x \rightarrow 0$  bychom mohli uvažovat  $\cos x$ ,  $\cos x \pm \sin x$ , polynom, racionální či iracionální funkci. Takto bychom mohli uvažovat mnoho dalších limitních bodů a funkcí. Při konstrukci úlohy je dobré zamýšlet se tímto způsobem, neboť nám to vytváří cestu k tvorbě dalších úloh. My jsme za vnitřní funkci logaritmu vybrali  $\frac{2x^2-x+1}{2x^2+x-1}$ , tedy takovou vnitřní funkci, která nám po použití ekvivalence na logaritmickou funkci dá výsledek  $\frac{2-2x}{2x^2+x-1} \left( = \frac{2x \cdot (\frac{2}{x} - 1)}{2x^2 \cdot (1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2})} \right)$ . Taková úloha by sama o sobě nebyla příliš komplikovaná, vedla by pouze na dominance a výsledkem by byla nula. Proto k ní pomocí součinu připojíme další funkci, která se bude řešit samostatně. Pokud bychom chtěli za výsledek nevlastní limitu, vybereme funkci, která nám po úpravách dá výsledek dominantní vůči  $x$ , například  $\frac{1}{e^{x-2}-1}$ . My jsme se ovšem rozhodli, že limita bude vlastní. Toho docílíme spojením s takovou funkcí, která je po úpravách ekvivalentní s výrazem  $k \cdot x$ , kde  $k \neq 0$ . Pro tento účel jsme vybrali jednoduchou funkci  $(x + \sin x)$ , kde stačí vytknout a uvědomit si, že omezená funkce násobená nulou je nula. Zbytek po vytknutí jde tedy k jedné a můžeme ho touto hodnotou nahradit. V celkovém výsledku tedy dostaneme  $\frac{-2x^2}{2x^2}$ , z čehož lze po zkrácení usoudit, že limita má hodnotu  $-1$ .

Pro úplnost uveďme úplný postup, jak dojít k výsledku námi vytvořené úlohy.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1} \cdot (x + \sin x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1} - 1 + 1 \right) \cdot \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1} - 1 \cdot x \cdot \left( 1 + \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1} - 1 \right) \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 - x + 1 - 2x^2 - x + 1}{2x^2 + x - 1} \right) \cdot x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2 - 2x}{2x^2 + x - 1} \right) \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x \cdot (\frac{2}{x} - 2)}{x^2 (2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})} \right) \cdot x = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Nyní vytvoříme úlohu, ve které budeme testovat schopnost práce s iracionálními funkcemi a také schopnost práce s funkcemi goniometrickými. Konečná podoba této úlohy bude následující:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

Tvorbu úloh na racionální a iracionální funkce jsme podrobně popsali v sekci 3.1, proto ji zde nebudeme popisovat, jen poznamenejme, že jsme do čitatele vybrali takovou funkci, kde nepůjde dosadit, bude potřeba rozšiřovat a výsledkem po této úpravě bude  $\frac{x^2}{2}$ . Dále budeme chtít otestovat řešitelovu znalost vztahů a vzorců pro goniometrické funkce. Řekněme, že to provedeme pomocí ekvivalencí. Vybereme ekvivalenci, která obsahuje goniometrickou funkci. Nám se velmi hodí  $1 - \cos x$ , neboť je ekvivalentní s  $\frac{x^2}{2}$  a  $x^2$  se nachází i v čitateli. Výraz

$1 - \cos x$  upravíme tak, aby ekvivalence nebyla na první pohled zjevná. Můžeme to udělat vynásobením funkcí  $\operatorname{tg} x$  – čímž ovšem zajistíme, že výsledná limita nebude existovat, neboť výsledná funkce bude slabě ekvivalentní s funkcí  $\operatorname{cotg} x$ , jejíž limity v nule zleva a zprava se liší. Platí vztahy  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , tedy:  $(1 - \cos x) \cdot \operatorname{tg} x = (1 - \cos x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \operatorname{tg} x - \sin x$ . Z toho vidíme, jak jsme došli k výrazu ve jmenovateli. Řešitel bude muset postupovat opačně a použít tak vzorce, které jsme použili i my při konstrukci. Podobně bychom mohli původní jmenovatel násobit funkcí  $\sin x$ , abychom ekvivalenci „schovali“. Ve jmenovateli bychom tak dostali výraz  $\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$  či elegantnější násobek takového výrazu  $2 \sin x - \sin 2x$ . Oboustranná limita by opět neexistovala, ale výsledkem jednostraných limit by byly nevlastní body. K existující limitě bychom mohli dojít, pokud bychom výraz ve jmenovateli násobili funkcí  $\cos x$  či jinou funkcí s nenulovou hodnotou. Ve jmenovateli by pak vzniklo (po dalších drobných úpravách)  $\sin^2 x + \cos x - 1$  a limita by měla hodnotu jedna.

Nyní si uvedeme úplný, správný postup řešení této limity:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\operatorname{tg} x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}}{\sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + 1 - 1}{2}}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \left((1 - \cos x) \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\operatorname{tg} x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{cotg} x = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x \rightarrow 0_+ \\ -\infty & \text{pro } x \rightarrow 0_- \end{cases} \end{aligned}$$

V následující úloze budeme testovat znalost ekvivalence v kombinaci se schopností práce s iracionální funkcí. Konečná podoba úlohy bude vypadat takto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{(3x + \sqrt{9x^2 - 2})^2}$$

Aby nebyla ekvivalence triviální, zvolíme tentokrát za limitní bod  $-\infty$ . Chceme-li nyní užít ekvivalence, musíme do zvolené funkce z ekvivalenční řady vložit takovou vnitřní funkci, která bude mít v bodě  $-\infty$  za limitu bod, v němž příslušná ekvivalence platí. Výsledný výraz může být například  $e^{x^{-2}} - 1$  nebo  $\operatorname{arccotg} -x$ , my jsme ovšem vybrali  $1 - \cos \frac{1}{x}$ . Tento výraz je pomocí ekvivalencí snadno zjednodušitelný, proto vytvoříme komplikovanější jmenovatel. Tvorbu iracionálních funkcí jsme podrobně viděli v sekci 3.1, proto zde jejich tvorbu detailně popisovat nebudeme, pouze poznamenejme, že komplikaci zde způsobuje kombinace odmocniny z polynomu druhého stupně a limitního bodu  $-\infty$ . U limitního bodu  $\infty$  by nám to žádnou potíže nepřineslo, zde je ovšem nutné si uvědomit, že  $x \rightarrow -\infty$  a dávat na to při vytýkání pozor. Pokud by na to řešitel zapomněl, vyšlo by mu, že lze ze jmenovatele snadno vytknout a zbytek bude nenulový. Není to ovšem pravda. Namísto výrazu  $x$  získáme vytknutím zpod odmocniny výraz  $-x$ . To nám jasně určuje další nutný postup, kterým bude rozšiřování. Zrádná je zde také kombinace odmocniny s mocninou. Řešitel vidí odmocninu, která je umocněná na druhou, a napadne ho umocňovat. Tento postup není vysloveně chybný, úlohu nám ovšem

zkomplikuje. Úplné, správné řešení této úlohy je následující:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{(3x + \sqrt{9x^2 - 2})^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - \cos \frac{1}{x}) \cdot \frac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{2x^2}}}{\left( (3x + \sqrt{9x^2 - 2}) \cdot \frac{3x - \sqrt{9x^2 - 2}}{3x - \sqrt{9x^2 - 2}} \right)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{(9x^2 - 9x^2 + 2)^2}{3x - \sqrt{9x^2 - 2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{(9x^2 - 9x^2 + 2)^2}{x^2 \cdot (3 + \sqrt{9 - \frac{2}{x^2}})^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{4}{36x^2}} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Pokračovat nyní budeme konstrukcí následující úlohy:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1 - \cos \pi x}}{\sin(3x^3 - 10x^2 + 4x + 8)}$$

V této úloze jsme pro testování vybrali znalost ekvivalencí a práce s racionální funkcí. Jako nadstavbu jsme zde vytvořili výraz, který ukáže, zda řešitel rozumí průběhu funkce  $\cos x$ . Do čitatele jsme vybrali výraz  $\sqrt{1 - \cos \pi x}$  a za limitní bod zvolili číslo dvě. Využíváme zde faktu, že funkce  $\cos x$  je periodická, a tedy  $\cos x$  pro  $x \rightarrow 0$  se chová slabě ekvivalentně s funkcí  $\cos \pi x$  pro  $x \rightarrow 2$  resp. pro  $x \rightarrow 2k$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ . V argumentu mocninných a odmocninných funkcí lze nahrazovat v součinu – že si tuto skutečnost řešitel uvědomuje, otestujeme tím, že „schováme“ ekvivalenci pod odmocninu. Tím úlohu zkomplikujeme a sami se nyní musíme zamyslet, jakým způsobem to ovlivní výsledek. Především je nezbytné, aby řešitel nepoužil ekvivalenci na výraz tak, jak je zadáný, neboť to ani není možné. Argument funkce  $\cos$  totiž musí jít k nule, abychom mohli ekvivalenci  $1 - \cos x \cong \frac{x^2}{2}$  použít. Právě proto je nezbytné uvědomit si periodicitu této funkce a fakt, že platí  $\cos \pi x = \cos(\pi x - 2\pi)$ . Pro funkci  $\cos(\pi x - 2\pi)$  už její vnitřek v bodě 2 k nule limitně jde. Po úpravách čitatele dojdeme k výsledku  $\frac{\pi|x-2|}{\sqrt{2}}$ .

Poznamenejme ještě, že pro testování ekvivalence bychom mohli pod odmocninu ukrýt i další funkce – při stejném limitním bodu a stejném druhu ekvivalence například  $1 - \cos(x - 2)^2$ .

Nyní se zamyslíme, jakou funkci vložit do jmenovatele. Vybrali jsme funkci  $\sin y$ , kde  $y$  je polynom, který jde po dosazení k nule, tedy taková vnitřní funkce, abychom na tuto goniometrickou funkci mohli použít ekvivalenci. Tento polynom má jako dvojnásobný kořen limitní bod 2. Po použití ekvivalence bude nutné upravit ho na součin vytknutím nejvyšší možné mocniny  $(x - 2)$ , konkrétně  $(x - 2)^2$ . Víme tedy, že po dalších úpravách vyjde jako konečný výsledek nevlastní limita (protože v čitateli je nižší mocnina  $(x - 2)$ ). Pokud bychom chtěli, aby vyšla limita vlastní, mohli bychom do argumentu funkce  $\sin$  vybrat takový polynom, který má limitní bod pouze za jednoduchý kořen. Aby šla na funkci  $\sin$  použít ekvivalence, je však nutné, aby šla vnitřní funkce limitně k nule. Toho bychom mohli docílit i dalšími způsoby, například vložit do funkce  $\sin$  jinou ekvivalenci. Výraz ve jmenovateli by mohl vypadat například následovně:  $\sin(e^x - 1)$ , či  $\sin(e^{x^2} - 1)$ , nebo  $\sin \frac{x^3 + 9x}{x^2 + 10}$  pro  $x \rightarrow 0$ . Dále také  $\sin \operatorname{arccotg} x$  pro  $x \rightarrow \infty$  a mnoho dalších.

Uveďme si nyní úplný postup řešení této úlohy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1 - \cos \pi x}}{\sin(3x^3 - 10x^2 + 4x + 8)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{\cos(\pi x - 2\pi)}}{\sin(3x^3 - 10x^2 + 4x + 8) \cdot \frac{3x^3 - 10x^2 + 4x + 8}{3x^3 - 10x^2 + 4x + 8}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{\cos(\pi(x-2)) \cdot \frac{(\pi(x-2))^2}{2}}}{3x^3 - 10x^2 + 4x + 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\pi \cdot |x-2|}{\sqrt{2}}}{(x-2)^2 \cdot (3x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi \cdot |x-2|}{\sqrt{2} \cdot (x-2)^2 \cdot 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi \cdot |x-2|}{\sqrt{2} \cdot 8 \cdot |x-2|^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot 8 \cdot |x-2|} = 0. \end{aligned}$$

Na závěr ještě poznamenejme, že lze konstruovat úlohy, ve kterých nebude předem daný limitní bod. Bude zadána funkce a prvním krokem v takové úloze bude nalezení definičního oboru. Následně budeme řešit limity pro krajní body definičního oboru. Primárně jde o testování schopnosti výpočtu limity, proto by určování definičního oboru nemělo být příliš komplikované – aby případně neznemožnilo samotné řešení limity. To můžeme zabezpečit buďto funkcemi, jejichž definiční obory nejsou na určení výrazně obtížné, či takovými funkcemi, které sice na určení definičního oboru obtížné jsou, ale v tom případě můžeme řešiteli nějakým způsobem napovědět. U těchto úloh je důležité, aby se lišily nejen výsledky limit v jednotlivých problémových bodech, ale především postupy, jak k těmto výsledkům dojít. Při předchozích konstrukcích jsme v prvním kroku vybírali limitní bod. Zde tomu nebude jinak, ovšem v tomto případě to znamená zvolit definiční obor a podle toho vybírat funkce, které tomu odpovídají. Typickým případem je definiční obor  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , kde budeme určovat čtyři limity – v  $\pm\infty$  a v  $0_{\pm}$ . Takový definiční obor se nám velmi hodí, neboť většina ekvivalencí, které známe, jsou platné v limitním bodě 0 a pro nevlastní body známe dominance. Pro ilustraci uveďme úlohu, která takovému postupu odpovídá, a její řešení.

$$f(x) = \frac{\sin e^x}{e^x - e^{2x}}$$

Jedinou podmínkou je zde  $e^x - e^{2x} \neq 0$ , tedy  $x \neq 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin e^x}{e^x - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 1}{-e^x(-1 + e^x) \cdot \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 1}{-x} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } x \rightarrow 0_+ \\ +\infty & \text{pro } x \rightarrow 0_- \end{cases}$$

Jak vidíme, v bodě nula nebude limita existovat, neboť jednostranné limity jsou sice obě nevlastní, ale znaménkově se liší dle toho, zda k nule „jdeme po ose  $x$ “ zprava či zleva. V této části úlohy testujeme řešitelovu schopnost vytýkání, použití ekvivalence a v neposlední řadě také to, zda je schopen dosazování do výrazů, do kterých je to možné. Je totiž častým jevem, že se namísto dosazení snaží řešitel o nějaké další úpravy, které nejsou nutné a často ani možné. Dále také testujeme řešitelovu schopnost práce s přibližnou hodnotou; to znamená, že není nutná znalost přesné hodnoty  $\sin 1$ , ale stačí pouze vědět, zda se jedná o kladné či záporné číslo (což se dá snadno odvodit, pokud známe průběh funkce  $\sin$ ).

Pro limitní bod  $\infty$  lze úlohu vyřešit pouze pomocí vytknutí, znalosti dominance a také znalosti faktu, že omezená funkce násobená nulou (resp. dělená nekonečnem) je ve výsledku nula.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin e^x}{e^x - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin e^x}{e^{2x} \left( \frac{e^x}{e^{2x}} - 1 \right)} = 0$$

Pro limitní bod  $-\infty$  jde argument funkce  $\sin$  v čitateli limitně k nule, lze na něj tedy použít znalost ekvivalence. Ve jmenovateli budeme opět vytýkat a užívat znalost dominantních vztahů pro třídu  $q^x$ . Poznamenejme, že oproti předchozímu se zde vytýká druhá funkce, protože je dominantnější, neboť  $e^x \ll e^{2x}$  u  $\infty$ , pak zcela jistě  $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \gg \frac{1}{e^{-2x}} = e^{2x}$  u  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin e^x}{e^x - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin e^x \cdot \frac{e^x}{e^x}}{e^x \left(1 - \frac{e^{2x}}{e^x}\right)} = 1$$

Více se těmito úlohami a jejich konstrukcemi zabývat nebudeme.

# Závěr

Cílem mé práce bylo přehledně uspořádat postupy při tvorbě úloh pro výpočet limit funkcí. Doufám, že práce bude přínosná nejen pro ty, kdo se chtějí konstrukcí úloh zabývat, ale i pro ty, kdo se zabývají řešením úloh již zkonstruovaných.

V první části jsem shrnula potřebnou teorii pro výpočet limit (definice limity i jednostranných limit, nevlastní limita, limita v nevlastním bodě, definice rozšířené reálné osy, okolí bodu, definice spojitosti, věta o jednoznačnosti limity, věty o aritmetice limit, věta o limitě složené funkce, věty o spojitosti, věta „o dvou polica.jtech“, Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce, věty o asymptotickém chování funkcí a další podstatné definice a věty).

V druhé části shrnuji standardní metody výpočtů limit funkcí (limita racionální a iracionální funkce, výpočet limit pomocí ekvivalencí, pomocí dominancí, pomocí L'Hospitalova pravidla), přičemž se věnuji jednoduchým úlohám i úlohám složitějším, ve kterých se vyskytují nějaké problémové situace.

Ve třetí části se zabývám samotnou konstrukcí úloh, přičemž jsem zvolila návrh úloh řešitelných elementárními metodami. Je to především proto, že tyto metody rozvíjejí schopnost práce s elementárními funkcemi, která je zvláště pro studenty učitelství matematiky zásadní. Nejprve se věnuji návrhu úloh řešitelných pomocí jedné konkrétní metody. Vyvrcholením mé práce je pak závěrečná sekce s kombinovanými úlohami, která obsahuje popis konstrukcí úloh, k jejichž řešení je nutná kombinace různých postupů a metod.

Metody pro tvorbu úloh, které jsem zde popisovala, jsem nenašla v žádné jiné práci či knize, a proto věřím, že pokud se někdo tímto tématem bude chtít zabývat, bude mu moje práce prospěšná.

Tímto tématem by bylo jistě možné zabývat se i dále, a to jak z matematického, tak z didaktického hlediska. Z matematického pohledu bychom mohli řešit například rozlišování úloh – které jsou řešitelné elementárními metodami a které ne. Dále by bylo možné formalizovat metodu návrhu úloh až do podoby algoritmu implementovatelného do softwarové podoby. Jak bylo zmíněno v závěru poslední kapitoly, mohli bychom se věnovat i konstrukci úloh na limity v krajních bodech definičního oboru, které jsou komplikovanější jak na řešení, tak na samotnou konstrukci. Z didaktického hlediska můžeme například zkoumat nejproblémovější úlohy, či spíše problémové jevy ze subjektivního pohledu studentů, anebo vytvořit testové úlohy, zadat je a řešit jejich obtížnost a úspěšnost studentů při výpočtech, tedy řešit problémové jevy z objektivního hlediska.

# Seznam použité literatury

- [1] ŠKRÁŠEK, Josef a Zdeněk TICHÝ. *Základy aplikované matematiky [Sv.] 1: Matematická logika, množiny, základy algebry, analytická geometrie, diferenciální počet, numerické a grafické metody*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1983.
- [2] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (I)*. Praha: Academia, 1984.
- [3] KOPÁČEK, Jiří a kolektiv. *Příklady z matematiky pro fyziky I*. Praha: Mat-fyzPress, 2002.
- [4] VESELÝ, Jiří. *Matematická analýza pro učitele, první díl*. Praha: Mat-fyzPress, 2001.