Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Miroslav Svoboda

Spojité procesy s kvadratickou variací

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Petr Dostál, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Poďakovanie:
Ďakujem svojmu školiteľovi za pomoc a cenné rady, ktoré mi poskytol, ako aj za čas a úsilie, ktoré vynaložil pri mojom písaní tejto práce. Ďalej ďakujem svojim rodičom a blízkym za podporu počas písania práce ako aj počas celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Spojité procesy s kvadratickou variací

Autor: Miroslav Svoboda

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zabývá vlastnostmi spojitých náhodných procesů s kompaktní indexovou množinou, které mají konečnou kvadratickou variaci. Je zavedený stochastický integrál v Riemannově smyslu a postupně popisovaná teorie k odvození Itôovy formule, přičemž pojmy stochastického integrálu a kvadratické variace jsou zavedené s využitím konvergence v pravděpodobnosti spojitých procesů. Aplikační úloha se zaměřuje na obchodování obchodníka investujícího do akcií. Pomocí Itôovy formule se dokáže, že Black-Scholesův a Bachelierův model modelují spravedlivou cenu evropské call vanilla opce na trhu s modelovanou cenou akcie pomocí geometrického, respektive aritmetického Brownova pohybu.

Klíčová slova: Wienerův proces, Kvadratická variace, Itôova formule, Black-Scholesův model, Bachelierův model.

Title: Continuous processes with quadratic variation

Author: Miroslav Svoboda

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The work is devoted to the properties of the continuous random processes with a compact index set that are having finite quadratic variation. In the thesis we define the stochastic Riemannn integral and then follow a development of a theory leading to deriving of Ito formula. The terms, concretely quadratic variation and Ito's formula and in the process are introduced using the konvergence in probability for the continuous random processes. The applied part of the thesis, starting in chapter 6, is considering an investor trading on the stock market. Using the Ito formula we will show that both the Black-Sholes and the bachelier models are modelling the fair price of the European call vanilla option, when the price of the share on the market is modelled by.

Keywords: Wiener process, Quadratic variation, Ito's formula, Black-Scholes model, Bachelier model.

Názov práce: Spojité procesy s kvadratickou variáciou

Autor: Miroslav Svoboda

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práca sa zaoberá vlastnosťami spojitých náhodných procesov s kompaktnou indexovou množinou, ktoré majú konečnú kvadratickú variáciu. Je zavedený stochastický integrál v Riemannovom zmysle a postupne popisovaná teória k odvodeniu Itôového vzorca, pričom pojmy stochastického integrálu a kvadratickej variácie sú zavádzané s využitím konvergencie v pravdepodobnosti spojitých procesov. Aplikačná úloha sa zameria na obchodovanie obchodníka investujúceho do akcií. Pomocou Itoového vzorca sa dokáže, že Black-Scholesov a Bachelierov model modelujú spravodlivú cenu európskej call vanilla opcie na trhu s modelovanou cenou akcie pomocou geometrického, respektíve aritmetického Brownovho pohybu.

Kľúčové slová: Wienerov proces, Kvadratická variácia, Itôov vzorec, Black-Scholesov model, Bachelierov model.

Obsah

Úvod

Náhodné procesy majú široké využitie v rôznych oblastiach bežného života. Pri pozorovaní bežných javov v živote sa často nedá dospieť k presnému odvodeniu daného stavu a je treba uvažovať aj s určitou náhodou.

V tejto práci bude popísaná teória stochastickej analýzy pre spojité náhodné procesy s kompaktnou indexovou množinou a konečnou kvadratickou variáciou.

Cieľom práce je odvodenie Itôového vzorca a jeho využitie v obchodovaní obchodníka na trhu.

Ako podklad práce je využívaný text k predmetu Stochastický kalkulus [4]. V 1. kapitole je zadefinovaný náhodný proces a uvedené príklady procesov, ktoré sa využívajú na modelovanie ceny akcie. V 2. kapitole je zadefinovaná metrika, ktorá metrizuje konvergenciu v pravdepodobnosti spojitých náhodných procesov pomocou ktorej je v kapitole 3 zavedený pojem kvadratickej variácie a v kapitole 4 stochastického integrálu v Riemannovom zmysle. Itôov vzorec je odvodený v kapitole 5 a následne v kapitole 6 využitý na dokázanie ohodnotenia spravodlivej ceny opcie pomocou Black-Scholesového a Bachelierového modelu.

Kapitola 1

Náhodné procesy

Definícia 1.1. Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ je pravdepodobnostný priestor, majme indexovú množinu $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ a pre každé $t \in \mathbb{T}$ majme $\mathcal{F}$ merateľnú reálnu náhodnú veličinu X_t. Potom systém náhodných veličín $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ nazývame *náhodný proces* na indexovej množine $\mathbb{T}$.

Hovoríme, že náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ je *(zľava) spojitý* ak pre každé $\omega \in \Omega$ je $X_t(\omega)$ (zľava) spojitá funkcia premennej $t \in \mathbb{T}$.

Definícia 1.2. Nech $W = \{W_t, t \in \mathbb{T}\}$ je náhodný proces, pre ktorý platí, že

1. $W_0 = 0$, W je spojitý,
2. W_t má nezávislé prírastky a pre každé s, $t \in \mathbb{T}$ platí, že $W_s - W_t \sim N(0,|s-t|)$.

Náhodný proces W sa potom nazýva *Wienerov proces.*

Tvrdenie 1.3. *Wienerov proces W existuje.*

Dôkaz: Dôkaz sa dá nájsť v [2] str. 235 III 5.10

❑

Pre naše potreby budeme v práci uvažovať Wienerov proces na kompaktnom intervale $\mathbb{T} = [0,T], T > 0$.

Náhodné veličiny majú široké využitie. My v práci využijeme teóriu k finančnému modelovaniu. Spravidla sa zvykne modelovať vývoj ceny akcie, k čomu sa využíva nasledujúci náhodný proces.

Príklad. Nech W je Wienerov proces, s_0, $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$. Pre $t \in \mathbb{T}$ položíme náhodnú veličinu

$$\mathcal{S}_t = s_0 + \mu t + \sigma W_t. \tag{1.1}$$

Náhodný proces $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{T}\}$, kde $\mathcal{S}_t$ je definované v (1.1), sa nazýva *aritmetický Brownov pohyb.*

Hoc sa aritmetický Brownov pohyb využíva ku krátkodobému modelovaniu ceny akcie, v praxi sa často predpokladá, že cena akcie nemôže nadobúdať záporných hodnôt. Z tohto dôvodu sa často preferuje nasledujúci proces.

Príklad. Nech W je Wienerov proces, μ, $s_0 \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$. Pre $t \in \mathbb{T}$ položíme náhodnú veličinu

$$S_t = s_0 \exp\left\{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t\right\}. \tag{1.2}$$

Náhodný proces $S = \{S_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ kde S_t je definované v (1.2) sa nazýva *geometrický Brownov pohyb.*

Je vidieť, že geomterický Brownov pohyb vďaka exponenciále nepripúšťa záporné hodnoty.

Definícia 1.4. Nech $\mathbb{T} = [0,T]$ je interval. Konečnú množinu $D \subset \mathbb{T}$ takú, že $T \in D$ budeme nazývať *delenie* intervalu $\mathbb{T}$.

V práci budeme symbolom $|D|$ značiť počet prvkov množiny D a pre prvky delenia budeme používať značenie $d_1, \ldots, d_{|D|}$ pre ktoré platí, že

$$d_1 \leq \cdots \leq d_{|D|}.$$

Ďalej definujeme $d_0 = 0$ a $D_0 = D \cup \{d_0\}$. Obecne budeme prvky označovať ako malý ekvivalent značenia pre delenie s príslušným indexom, teda napríklad

$$C_n = \left\{c_1^n, \ldots, c_{|C_n|}^n | c_1^n < \cdots < c_{|C_n|}^n = T\right\}.$$

Podobne zavedieme značenie pre C a D_n.

Definícia 1.5. Nech D je delenie intervalu $\mathbb{T}$. Povieme, že náhodný proces $H = \{H_t,\, t \in \mathbb{T}\}$ je *D-jednoduchý* ak

$$H_t = \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k} 1_{[d_{k-1} < t \leq d_k]}.$$

Poznámka 1.6. Nech D je delenie intrevalu $\mathbb{T}$ a H je $D-$jednoduchý proces. Potom pre každé $D \subset D_1$, delenie intervalu $\mathbb{T}$, je H D_1-jednoduchý proces.

Uvažujme spojitý náhodný proces $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$. Predpokladajme, že tento proces určuje cenu určitej obchodovateľnej akcie v čase. Nech $H = \{H_t, t \in \mathbb{T}\}$ je zľava spojitý proces, ktorý určuje množstvo týchto akcií, ktoré drží konkrétny obchodník v čase, pričom nevlastní žiadne iné akcie.

Predpoklad spojitosti X je prirodzený z faktu, že cena sa môže vyvíjať priebežne, spojito v čase, zatiaľ čo obchodník obchoduje len v určitých okamihoch, čo môže skokovo zmeniť množstvo akcií, ktoré drží H.V našom zjedodušenom prípade si je nutné uvedomiť, že obchodník môže obchodovať len v určitý daný okamih, pričom jeho rozhodnutie prichádza až na základe vyhlásenej ceny akcie. Uvažujme preto D delenie intervalu $\mathbb{T}$ ako množina okamihov, kedy sa obchodník rozhodne obchodovať.

Prírastok bohatstva obchodníka v čase $d_k \in D$ je preto

$$H_{d_k}(X_{d_k} - X_{d_{k-1}}),$$

pričom vývoj bohatstva obchodníka $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ v časovom úseku $[0,t]$ sa dá vyjadriť ako

$$Y_t = \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}). \tag{1.3}$$

Definícia 1.7. Nech D je delenie $\mathbb{T}$. Potom náhodný proces

$$Y = \left\{ Y_t = \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}), t \in \mathbb{T} \right\}$$

definovaný v (1.3) budeme nazývať *elementárny stochastický integrál* procesu H podľa X s delením D.

Poznámka 1.8. Suma vo výraze (1.3) vlastne znamená

$$\begin{aligned} Y_t &= \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}) \\ &= \sum_{k=1}^{|D \cap [0,t]|} H_{d_k}(X_{d_k} - X_{d_{k-1}}) + H_t(X_t - X_{d_{\lfloor t \rfloor_D}}). \end{aligned}$$

Kapitola 2

Metrizovateľnosť a konvergencia spojitých procesov

Definícia 2.1. Uvažujme priestor

$$\mathbb{C}_{\mathbb{T}} \;=\; \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{R},\ f \text{ je spojitá}\}$$

a na ňom zavedieme normu d predpisom $d(f) = \sup_{t\in\mathbb{T}}(|f(t)|)$, pre každé $f \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}$. Ďalej budeme uvažovať priestor

$$\mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},P) \;=\; \{X : (\Omega,\mathcal{F}) \to (\mathbb{C}_{\mathbb{T}},\mathcal{B}(\mathbb{C}_{\mathbb{T}}))\},$$

čo je vlastne priestor spojitých procesov a na ktorom definujeme zobrazenie $\rho : \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^2 \to \mathbb{R}^+$ predpisom

$$\rho(X,Y) = \mathsf{E}\left[1 \wedge d(X-Y)\right] \tag{2.1}$$

pre každé X, $Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$.

Definícia 2.2. Symbolom $\mathbb{C}^-_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ budeme označovať množinu všetkých zľava spojitých procesov na indexovej množine $\mathbb{T}$.

Vďalšom budú ukázané vlastnosti funkcie ρ.

Poznámka 2.3. Pre $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ platí, že má spojité trajektórie, teda

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t| = \sup_{t\in\mathbb{T}\cap\mathbb{Q}} |X_t|.$$

Z teorie miery vieme, že supremum spočetne mnoho merateľných zobrazení je merateľné a teda $\sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t|$ je náhodná veličina. V prípade, že $X \in \mathbb{C}^-_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ tak $\sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t|$ j zobecnená reálna náhodná veličina.

Lemma 2.4. *Funkcia $\rho(X,Y) = \mathsf{E}[1 \wedge d(X-Y)]$ je homogénna pseudometrika na $(\mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},P),\rho)$. Naviac pre postupnosť $X^{(n)} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ platí ekvivalencia*

$$d(X^{(n)},X) \to 0 \text{ v pravdepodobnosti } \Leftrightarrow \rho(X^{(n)},X) \to 0.$$

Dôkaz: To, že ρ splĺňa podmienky homogénnej pseudometriky je jasné. Následne ak $sup_{t\in\mathbb{T}}|X^{(n)} - X| \to 0$ v pravdepodobnosti pre $n \to \infty$ tak tiež $\sup_{t\in\mathbb{T}}\{|X^{(n)} - X| \wedge 1\} \to 0$ v pravdepodobnosti a keďže $\sup_{t\in\mathbb{T}}\{|X^{(n)} - X| \wedge 1\} < 1$, tak sa jedná o rovnomerne ohraničený proces, z čoho vyplýva, že $\rho(X^{(n)},X) \to 0$. Opačná imlikácia plynie triviálne z toho, že konvergencia v $L1$ implikuje konvergenciu v pravdepodobnosti.

$\square$

Poznámka 2.5. Pre $X,Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ rovnosť $X = Y$ skoro určite znamené, že pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí $X_t = Y_t$ skoro určite.

Poznámka 2.6. Priestor $(\mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})\,/_{\sim},\rho/_{\sim})$ je metrický priestor, kde $\sim$ je ekvivalencia skoro určite, teda pre X, $Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ platí, že $X \sim Y \Leftrightarrow X = Y$ skoro určite.

Keďže ρ je homogénna podľa Lemmy 2.4, tak pre $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}^{-}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ budeme v práci používať značenie

$$\rho(X) = \rho(X,0).$$

Poznámka 2.7. Z trojuholníkovej nerovnosti pre normy pre všetky funkcie f, $g \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}$ triviálne platí nerovnosť

$$d(g+f) \leq d(f) + d(g).$$

Pre všetky postupnosti $Y_n,X_n \subset \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a $Y,X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ teda platí implikácia

$$\rho(Y_n,Y) \to 0 \text{ a } \rho(X_n,X) \to 0 \Rightarrow \rho(Y_n + X_n, Y + X) \to 0.$$

Tvrdenie 2.8. *Ak $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a $\{Y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ sú také, že pre každé n je $|X^{(n)}| \leq Y^{(n)}$ a*

$$Y^{(n)} \to 0$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$, tak potom aj $X^{(n)} \to 0$ v metrike ρ pre $n \to \infty$.

Dôkaz: Z tvrdenia okamžite vyplýva z Lemmy 2.4 a definície konvergencie v pravdepodobnosti.

$\square$

Definícia 2.9. Pre potrebu práce zavedieme pre delenie D nasledujúce značenia

$$\begin{aligned} \lfloor t \rfloor_D &= \max\{D_0 \cap [0,t]\}, \\ \|D\| &= \max_{k=1,\ldots,|D|} |d_k - d_{k-1}|. \end{aligned}$$

$\lfloor t \rfloor_D$ budeme nazývať *dolná časť* t vzhľadom k deleniu D, $\|D\|$ budeme nazývať *norma delenia* D.

Definícia 2.10. Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a D je delenie intervalu $\mathbb{T}$. Náhodnú veličinu $|\Delta X|_D$ danú predpisom

$$|\Delta X|_D = \sup_{t \in \mathbb{T}} |X_t - X_{\lfloor t \rfloor_D}|$$

budeme nazývať *modul spojitosti* procesu X s delením D. Pre náhodný vektorový proces $X = (X^{(1)},\dots,X^{(m)})^\mathsf{T} \in \mathbb{C}_\mathbb{T}^-(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$ a D delenie intervalu $\mathbb{T}$ budeme symbolom $|\Delta X|_D$ rozumieť vektor modulov spojitosti jednotlivých zložiek vektora, teda

$$|\Delta X|_D = (|\Delta X^{(1)}|_D,\dots,|\Delta X^{(m)}|_D)^\mathsf{T}.$$

Poznámka 2.11. Pre $X \in \mathbb{C}_\mathbb{T}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a D delenie intervalu $\mathbb{T}$ platí, že $|X_t - X_{\lfloor t \rfloor_D}|$ je zľava spojitý náhodny proces s ohraničenými trajektóriamu a teda aj modul spojitosti $|\Delta X|_D$ je náhodná veličina.

Definícia 2.12. Nech $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť delení intervalu $\mathbb{T}$, kde

$$D_n = \{d_1^n,\dots,d_{|D_n|}^n | d_1^n < \dots < d_{|D_n|}^n = T\}$$

a $d_0^n = 0$. Hovoríme, že táto postupnosť sa *zjemňuje* ak pre každé $n < m$ platí, že $D_n \subset D_m$. Ak naviac platí, že $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$, potom hovoríme, že D_n *zahusťuje* interval $\mathbb{T}$.

Tvrdenie 2.13. *Nech $X \in \mathbb{C}_\mathbb{T}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť zahusťujúcich delení intervalu $\mathbb{T}$. Potom pre $n \to \infty$ $|\Delta X|_{D_n} \to 0$.*

Dôkaz: Keďže $\mathbb{T}$ je interval a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ zahusťuje $\mathbb{T}$ tak pre každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n > n_0$ je $|t - \lfloor t \rfloor_{D_n}| < \delta$. Keďže $\mathbb{T}$ je uzavretý a X je spojitý proces tak pre každé $\omega \in \Omega$ je $X(\omega)$ rovnomerne spojitá funkcia podľa času t. Teda pre každé $\omega \in \Omega$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že pre každé $n > n_0$ a každé $t \in \mathbb{T}$ je $|X_t(\omega) - X_{\lfloor t \rfloor_{D_n}}(\omega)| < \varepsilon$, teda $\sup_{t\in\mathbb{T}} |X_t(\omega) - X_{\lfloor t \rfloor_{D_n}}(\omega)| \leq \varepsilon$. Z toho už vyplíva tvrdenie vety.

❏

Poznámka 2.14. Nech $X \in \mathbb{C}_\mathbb{T}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je postupnosť zahusťujúcich delení intervalu $\mathbb{T}$. Potom pre $n \to \infty$ platí, že $|\Delta X|_{D_n} \to 0$ v každej zložke.

Kapitola 3

Kvadratická variácia

Definícia 3.1. Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},P)$ a D je delenie intervalu $\mathbb{T}$. Definujeme $[X]^D \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ predpisom

$$[X]_t^D = \sum_{k=1}^{|D|} (X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t})^2. \tag{3.1}$$

Náhodný proces $[X]^D$ nazývame *elementárna kvadratická variácia* procesu X odpovedajúca deleniu D.

Definícia 3.2. Nech $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(m)})^\mathsf{T} \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},P)^m$ a D je delenie intervalu $\mathbb{T}$. Pre každé $i,j = 1,\dots,m$ a $t \in \mathbb{T}$ definujeme $[X^{(i)},X^{(j)}]^D \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ *elementárnu kovarianciu* procesov $X^{(i)}$ a $X^{(j)}$ odpovedajúcu deleniu D vzťahom

$$[X^{(i)},X^{(j)}]_t^D = \frac{1}{4}\left([X^{(i)} + X^{(j)}]_t^D - [X^{(i)} - X^{(j)}]_t^D\right). \tag{3.2}$$

Ďalej definujeme $[\![X]\!]^D \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^{m\times m}$ *elementárnu tenzorovú kvadratickú variáciu* náhodného vektorového procesu X odpovedajúcu deleniu D ako

$$[\![X]\!]^D = \{[X^{(i)},X^{(j)}]^D\}_{i,j=1}^m. \tag{3.3}$$

Definícia 3.3. Nech $X,Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ také, že Y má neklesajúce trajektórie. Povieme, že X má *kvadratickú variáciu* Y, ak pre každú postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ zahusťujúcich interval $\mathbb{T}$ platí, že

$$[X]^{D_n} \to Y$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$.

V ďalšom budeme kvadratickú variáciu procesu X značiť ako $\langle X \rangle$.

Poznámka 3.4. V praxi sa často využíva iná definícia kvadratickej variácie, ktorá požaduje len konvergenciu v pravdepodobnosti v každom čase $t \in \mathbb{T}$ napríklad ako v [1]. V práci je teória zavádzaná v metrike ρ aby bola dosiahnutá metrizovateľná konvergencia. Konvergencia v metrike ρ triviálne implikuje konvergenciu suprémа cez všetky časy $t \in \mathbb{T}$ v pravdepodobnosti a tým pádom aj v jednotlivých časoch.

Definícia 3.5. Majme náhodný vektorový proces $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$ a maticový proces $Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^{m\times m}$ taký, že všetky prírastky procesu Y sú pozitívne semidefinitná náhodná matica. Povieme, že X má *tenzorovú kvadratickú variáciu* Y ak pre každú postupnosť zahusťujúcich delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ a každé $i,j = 1,\ldots,m$ platí

$$[X^{(i)},X^{(j)}]^{D_n} \to Y$$

v metrike ρ.

Tenzorovú kvadratickú variáciu procesu X budeme značiť $\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$.

Poznámka 3.6. Nech $X,Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ sú také, že existuje $\langle X+Y\rangle$ a $\langle X-Y\rangle$. Ak položíme

$$\langle X,Y\rangle = \frac{\langle X+Y\rangle + \langle X-Y\rangle}{4},$$

tak z definície elementárnej tenzorovej kvadratickej variácie a kvadratickej variácie okamžite vyplýva, že pre každú postupnosť delení $\{D_n\}$ zahusťujúcu interval $\mathbb{T}$ platí

$$[X,Y]^{D_n} \to \langle X,Y\rangle$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$.

Poznámka 3.7. Ak $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$ má tenzorovú kvadratickú variáciu $\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$, tak pre každe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ a postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťujúcu $\mathbb{T}$ platí

$$[\![\lambda^T X]\!]^{D_n} = \lambda^T [\![X]\!]^{D_n} \lambda \to \lambda^T \langle\!\langle X \rangle\!\rangle \lambda$$

v metrike ρ. Špeciálne ak $\lambda = e_j$ je kanonický vektor priestoru $\mathbb{R}^m$, tak okamžite dostávame, že

$$e_j^T \langle\!\langle X \rangle\!\rangle e_j = \langle X^{(j)}\rangle, \tag{3.4}$$

čo okamžite implikuje existenciu kvadratickej variácie $\langle X^{(j)}\rangle$ procesu $X^{(j)}$.

Definícia 3.8. Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$. Ak existuje $Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ také, že pre každé $t \in \mathbb{T}$ je

$$Y_t = \sup_{\{D \text{ delenie } \mathbb{T}\}} \Big(\sum_{k=1}^{|D|} |X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}|\Big), \tag{3.5}$$

tak Y nazývame *absolútna variácia* procesu X. Absolútnu variáciu procesu X budeme označovať $V(X)$.

Lemma 3.9. *Ak $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ má absolútnu variáciu $V(X)$, potom platí, že*

$$\sum_{k=1}^{|D_n|} |X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t}| \to V(X)_t$$

v metrike ρ vždy keď $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťuje interval $\mathbb{T}$.

Dôkaz: Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťuje interval $\mathbb{T}$. Pre každé $t \in \mathbb{T}$ a D delenie intervalu $\mathbb{T}$ označme

$$V(X,D)_t = \sum_{k=1}^{|D|} |X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}|.$$

Triviálne platí, že pridaním bodu do delenia D sa hodnota $V(X,D)$ zmení maximálne o hodnotu $2|\Delta X|_D$, z čoho pre všetky delenia D, C intervalu $\mathbb{T}$ vyplýva nerovnosť

$$|V(X,D)_t(\omega) - V(X,D \cup C)_t(\omega)| \leq 2N \cdot |\Delta X|_D(\omega), \tag{3.6}$$

kde $N = |C|$. Ďalej z definície absolútnej variácie pre každé $\omega \in \Omega$ a každé $\varepsilon > 0$ platí, že existuje D^ε delenie intervalu $\mathbb{T}$, také že

$$d\left(V(X)(\omega) - V(X,D^\varepsilon)(\omega)\right) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.7}$$

Je jasné, že pre každé delenie C také, že D^ε zjemňuje C platí, že

$$d\left(V(X,D^\varepsilon)(\omega) - V(X,C)(\omega)\right) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.8}$$

pretože $V(X)(\omega) \geq V(X,C)(\omega) \geq V(X,D^\varepsilon)(\omega)$. Označme $N^\varepsilon = |D^\varepsilon|$. Z tvrdenia 2.13 platí, že existuje n^ε, že pre všetky $m > n^\varepsilon$ je

$$|X|_{D_m}(\omega) < \frac{\varepsilon}{6 \cdot N^\varepsilon}.$$

Z trojuholníkovej nerovnosti, z (3.6), (3.7), (3.8) a voľbou $C = D^\varepsilon \cup D_m$ okamžite dostaneme, že

$$|V(X)_t(\omega) - V(X,D_m)_t(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Keďže D^ε ani n^ε nezávisí na $t \in \mathbb{T}$, tak $d(V(X)(\omega),V(X,D_n)(\omega)) \to 0$ pre $n \to \infty$. Platí to pre všetky trajektórie, tak aj

$$V(X,D_n) \to V(X)$$

pre $n \to \infty$, čo implikuje konvergenciu v pravdepodobnosti a z Lemmy 2.4 aj v metrike ρ.

❑

Tvrdenie 3.10. *Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ má absolútnu variáciu $V(X)$. Potom X má kvadratickú variáciu $\langle X \rangle$ a pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí*

$$\langle X \rangle_t = 0$$

skoro určite.

Dôkaz: Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení zahusťujúca $\mathbb{T}$. Potom

$$\begin{aligned}
[X]_t^{D_n} &= \sum_{k=1}^{|D|} (X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t})^2 \\
&\leq |\Delta X|_{D_n} \sum_{k=1}^{|D|} |X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t}| \\
&\leq |\Delta X|_{D_n} V(X)_t \leq |\Delta X|_{D_n} V(X)_T \\
&\to 0
\end{aligned}$$

v pravdepodobnosti, kde posledná nerovnosť vyplíva z toho, že trajektórie procesu Y sú neklesajúce a konvergencia plynie z tvrdenia 2.13. Keďže konvergencia nezávisí na $t \in \mathbb{T}$, tak podľa 2.8

$$[X]^{D_n} \to 0$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$, teda platí rovnosť $\langle X \rangle_t = 0$ skoro určite.

❑

Tvrdenie 3.11. *Nech W je Wienerov proces. Potom $\langle W \rangle_t = t$ skoro určite.*

Dôkaz: viz. apendix.

❑

Dôsledok 3.12. *Z tvrdení 3.11 a 3.10 vyplýva, že Wienerov proces W nemá konečnú absolútnu variáciu.*

Pre neskoršie použitie v práci sa bude hodiť nasledujúca veta, špeciálny prípad dvojrozmerného procesu.

Veta 3.13. *Nech $X,Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ také, že X má kvadratickú variáciu $\langle X \rangle$ a Y má absolútnu variáciu $V(Y)$. Potom náhodný vektorový proces (Y,X) má tenzorovú kvadratickú variáciu a*

$$\langle\!\langle Y,X \rangle\!\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \langle X \rangle \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

skoro určite.

Dôkaz: Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení zahusťujúca $\mathbb{T}$. Podľa tvrdenia 3.10 platí, že $\langle Y \rangle = 0$. Pre prvky na diagonále dostaneme, že

$$\begin{aligned} \langle Y,Y \rangle &= \langle Y \rangle = 0 \\ \langle X,X \rangle &= \langle X \rangle. \end{aligned}$$

Pre prvky na diagonále využijeme jednoducú algebraicku úpravu a caushyovu nerovnosť. Platí

$$\begin{aligned} |[X,Y]_t^{D_n}| &= |\sum_{k=1}^{|D_n|} (X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t})(Y_{d_k^n \wedge t} - Y_{d_{k-1}^n \wedge t})| \\ &\leq \sqrt{[X]_t^{D_n}[Y]_t^{D_n}} \\ &\to \sqrt{\langle X \rangle_t 0} = 0 \end{aligned}$$

v metrike ρ a z tvrdenia 2.8 vyplíva, že

$$\langle X,Y \rangle = \langle Y,X \rangle = 0$$

skoro určite. Tým bola dokázaná konvergencia pre každú zložku, teda aj existencia tenzorovej kvadratickej variácie a rovnosť (3.9)

❑

Kapitola 4

Interpretácia integrálu

Definícia 4.1. Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$ a $H \in \mathbb{C}^{-}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$. Ak existuje spojitý proces $Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ taký, že pre každú postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťujúcu interval $\mathbb{T}$ platí

$$\sum_{k=1}^{|D_n|} H^{\mathsf{T}}_{d^n_{k-1}} (X_{d^n_k \wedge t} - X_{d^n_{k-1} \wedge t}) \to Y_t \tag{4.1}$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$, tak proces Y nazývame *stochastický integrál v Riemanovom zmysle* procesu H podľa X. Proces Y budeme ďalej značiť ako $Y = \oint H^{\mathsf{T}} dX = \{\oint_0^t H^{\mathsf{T}} dX, t \in \mathbb{T}\}$ a v prípade, že $m = 1$, budeme používať značenie

$$Y = \oint H dX = \left\{ \oint_0^t H dX, t \in \mathbb{T} \right\}.$$

Poznámka 4.2. Keďže ρ je metrika na triedach ekvivalencie podľa rovnosti skoro určite, tak aj v prípade existencie stochastického integrálu v Riemanovom zmysle je jednoznačnosť až na rovnosť skoro určite.

Príklad. Majme $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ také, že X má kvadratickú variáciu $\langle X \rangle$. Potom pre každé D_n delenie intervalu $\mathbb{T}$ a pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí

$$\begin{aligned} X_t^2 - X_0^2 &= \sum_{k=1}^{|D_n|} (X^2_{d^n_k \wedge t} - X^2_{d^n_{k-1} \wedge t}) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{|D_n|} X_{d^n_{k-1}} (X_{d^n_k \wedge t} - X_{d^n_{k-1} \wedge t}) + \sum_{k=1}^{|D_n|} \left(X_{d^n_k \wedge t} - X_{d^n_{k-1} \wedge t} \right)^2 . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení zahusťujúca $\mathbb{T}$. Limitným prechodom (4.2) dostaneme rovnosť

$$X_t^2 - X_0^2 = 2 \oint_0^t X dX + \langle X \rangle_t \tag{4.3}$$

skoro určite. Stochastický ntegrál v Riemanovom zmysle v (4.3) existuje, pretože

$$2 \sum_{k=1}^{|D_n|} X_{d^n_{k-1}} (X_{d^n_k \wedge t} - X_{d^n_{k-1} \wedge t}) = X_t^2 - X_0^2 - \sum_{k=1}^{|D_n|} \left(X_{d^n_k \wedge t} - X_{d^n_{k-1} \wedge t} \right)^2$$

a pravá strana má limitu v metrike ρ, čo vyplýva z existencie kvadratickej variácie procesu X.

Niekedy nie je nutné skúmať všetky postupnosti delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťujúce $\mathbb{T}$, ktoré by splňovali konvergenciu (4.1). V nasledujúcom tvrdení ukážeme, že sa môžeme sústrediť len na také postupnosti D_n, ktoré budú zjemňovať určitú konečnú množinu $S \subset \mathbb{T}$.

Tvrdenie 4.3. *Nech $X,Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a $H \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}^{-}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ je zľava spojitý proces s ohraničenými trajektóriami. Nech $S \subset \mathbb{T}$ je konečná. Ak pre každú zahusťujúcu postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá zjemňuje S, platí, že*

$$\sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n}(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t}) \to Y_t \tag{4.4}$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$, tak Y je stochastický integrál v Riemanovom zmysle procesu H podľa X, teda $Y = \oint H dX$ skoro určite.

Dôkaz: Nech $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť zahusťujúcich delení intervalu $\mathbb{T}$. Definujme $D_n = C_n \cup S$. Podľa predpokladu pre každú takto vytvorenú postupnosť delení D_n platí (4.4) v metrike ρ pre $n \to \infty$. Ďalej označme

$$I_t^n = \sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n}(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t}),$$
$$J_t^n = \sum_{k=1}^{|C_n|} H_{c_{k-1}^n}(X_{c_k^n \wedge t} - X_{c_{k-1}^n \wedge t}),$$

a $N = |S|$ počet prvkov množiny S. Pre rozdiel $I^n - J^n$ v bode $t \in \mathbb{T}$ platí

$$\begin{aligned}
& |I_t^n - J_t^n| \\
= \;& |\sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n}(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t}) - \sum_{k=1}^{|C_n|} H_{c_{k-1}^n}(X_{c_k^n \wedge t} - X_{c_{k-1}^n \wedge t})| \\
= \;& |\sum_{k=1}^{|D_n|} (H_{d_{k-1}^n} - H_{\lfloor d_{k-1}^n \rfloor_{C_n}})(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t})| \\
\le \;& N|\Delta X|_{D_n} \cdot |\Delta H|_{C_n} \le 2N|\Delta X|_{D_n} \sup_{t \in \mathbb{T}} |H_t| \to 0
\end{aligned}$$

pre $n \to \infty$. Prvá nerovnosť vyplýva z faktu, že ak

$$H_{d_{k-1}^n} \neq H_{\lfloor d_{k-1}^n \rfloor_{C_n}} \Rightarrow d_{k-1}^n \neq \lfloor d_{k-1}^n \rfloor_{C_n} \Rightarrow d_{k-1}^n \in S$$

a konvergencia z toho, že H má ohraničené trajektórie a z tvrdenia 2.13.

Keďže horný odhad nezáleží na $t \in \mathbb{T}$, tak podľa tvrdenia 2.8 pre $n \to \infty$ platí, že $\rho(I^n,J^n) \to 0$. Z trojuholníkovej nerovnosti pre metriky priamo dostaneme, že

$$\rho(Y,J^n) \le \rho(Y,I^n) + \rho(I^n,J^n) \to 0$$

a tým je dokázané, že Y je stochastický integrál v Riemanovom zmysle procesu H podľa X.

❑

Veta 4.4. *Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a $H \in \mathbb{C}^{-}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ je $D-$jednoduchý proces. Potom pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí rovnosť*

$$\oint_0^t HdX = \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}) \tag{4.5}$$

skoro určite.

Dôkaz: Chceme použiť tvrdenie 4.3 s delením D. Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť zahusťujúca delenie $\mathbb{T}$ a zjemňujúca D. Z poznámky 1.6 vyplýva, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je H D_n-jednoduchý proces a platí rovnosť

$$\sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}) = \sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_k^n}(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t}).$$

Ďalej si uvedomme, že ak $H_{d_k^n} \neq H_{d_{k-1}^n}$ tak potom $d_{k-1}^n \in D$, pretože H je podľa predpokladu D- jednoduchý proces. Pre rozdiel teda platí

$$\begin{aligned} & |\sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}) - \sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n}(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t})| \qquad (4.6) \\ = & |\sum_{k=1}^{|D_n|} (H_{d_k^n} - H_{d_{k-1}^n})(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t})| \\ \leq & |D||\Delta X|_{D_n}|\Delta H|_{D_n} \leq 2|D||\Delta X|_{D_n} \sup_{t \in \mathbb{T}} |H_t| \to 0. \end{aligned}$$

pre $n \to \infty$, teda z tvrdenia 2.8 konverguje aj rozdiel (4.6) v metrike ρ k 0 a

$$\sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n \wedge t}(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t}) \to \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t})$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$. Rovnosť (4.5) potom vyplýva z toho, že jednoduchý proces má ohraničené trajektórie a môžeme použiť tvrdenie 4.3.

❑

Veta 4.5. *Nech $X,H \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a nech X má absolútnu variáciu $V(X)$. Potom existuje stochastický integrál v Riemanovom zmysle procesu H podľa X a pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí rovnosť*

$$\oint_0^t HdX = \int_0^t HdX \tag{4.7}$$

skoro určite, kde $\int_0^t HdX$ rozumieme ako Lebesgueov integrál.

Dôkaz: Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení zahusťujúca interval $\mathbb{T}$. Potom

$$\begin{aligned} & |\int_0^t HdX - \sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n}(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t})| \\ = & |\sum_{k=1}^{|D_n|} \int_{t \wedge d_{k-1}^n}^{t \wedge d_k^n} (H_s - H_{d_{k-1}^n}) dX_s| \\ \leq & |\Delta H|_{D_n} V(X)_T \to 0 \end{aligned}$$

pre $n \to \infty$ podľa tvrdenia 2.13, a keďže horný odhad nezávisí na $t \in \mathbb{T}$, tak z tvrdenia 2.8 aj

$$\left| \int_0^t H dX - \sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n}(X_{d_k^n \wedge t} - X_{d_{k-1}^n \wedge t}) \right| \to 0$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$. Tým je dokázaná rovnosť (4.7).

❑

Veta 4.6. *Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ je postupnosť spojitých náhodných procesov pre ktoré platí, že $X_t^{(n)} \to X_t$ v metrike ρ pre $n \to \infty$. Potom pre každý D-jednoduchý proces $H = \{H_t, t \in \mathbb{T}\}$ platí, že*

$$I_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t}^{(n)} - X_{d_{k-1} \wedge t}^{(n)}) \to \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}) \tag{4.8}$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$.

Dôkaz: Pre prehľadnosť označme

$$I_t = \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t}).$$

Ďalej označme $Z^{(n)} = X^{(n)} - X$. Potom platí, že $|Z_t^{(n)}| \to 0$ v metrike ρ pre $n \to \infty$ a podľa Lemmy 2.4 aj v pravdepodobnosti a

$$\begin{aligned} |I_t - I_t^{(n)}| &= |\sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(Z_{d_k \wedge t}^{(n)} - Z_{d_{k-1} \wedge t}^{(n)})| \\ &\leq 2|D| \sup_{s \in \mathbb{T}} |H_s| \sup_{s \in \mathbb{T}} |Z_s^{(n)}| \to 0 \end{aligned}$$

v pravdepodobnosti pre $n \to \infty$. Majoranta nezávisí na t a teda podľa tvrdenia 2.8 a Lemmy 2.4 aj

$$\sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k}^{(n)} - X_{d_{k-1}}^{(n)}) \to \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_k}(X_{d_k} - X_{d_{k-1}})$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$.

❑

Dôsledok 4.7. *Nech sú splnené predpoklady vety 4.6. Potom*

$$\oint H dX^{(n)} \to \oint H dX$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$.

Dôkaz: Dôkaz vyplíva okamžite z viet 4.4 a 4.6.

$\square$

Definícia 4.8. Nech $H \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}^{-}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a D nech je delenie intervalu $\mathbb{T}$, potom D-*aproximáciou* procesu H rozumieme D-jednoduchý proces definovaný pre každé $t \in \mathbb{T}$ ako

$$H_t^D = \sum_{k=1}^{|D|} H_{d_{k-1}} 1_{[d_{k-1}<t\leq d_k]}. \tag{4.9}$$

Nasledujúce tvrdenie ukáže, že postupným zahusťovaním intervalu $\mathbb{T}$ môžeme dostať postupnosť procesov, ktoré aproximujú nami pozorovaný proces.

Tvrdenie 4.9. *Nech $H \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť zahusťujúcich delení intervalu $\mathbb{T}$. Potom pre $n \to \infty$*

$$H^{D_n} \to H$$

v metrike ρ, kde H^{D_n} je D_n- aproximácia procesu H definovaná v (4.9)

Dôkaz: Uvažujme rozdiel procesu H a D_n-jednoduchého procesu H^{D_n} v akomkoľvek bode $t \in \mathbb{T}$. Dostaneme

$$|H_t - H_t^{D_n}| \leq |\Delta H|_{D_n} \to 0$$

pre $n \to \infty$ podľa tvrdenia 2.13. Pretože horný odhad $|\Delta H|_{D_n}$ nezávisí na $t \in \mathbb{T}$, tak z tvrdenia 2.8 vyplýva $H^{D_n} \to H$ v metrike ρ.

$\square$

Veta 4.10. *Nech $X,H \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ a X má kvadratickú variáciu $\langle X\rangle$. Potom pre každú postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťujúcu interval $\mathbb{T}$ platí, že pre $n \to \infty$*

$$\sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n}(X_{d_k^n\wedge t} - X_{d_{k-1}^n\wedge t})^2 \to \oint_0^t H d\langle X\rangle. \tag{4.10}$$

v metrike ρ.

Dôkaz: Majme postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pre prehľadnosť v tomto dôkaze zavedieme značenie $[X]^{(n)} = [X]^{D_n}$. Uvedomme si najprv, že pre prírastkovú funkciu platí

$$[X]_{d_k^n\wedge t}^{(n)} - [X]_{d_{k-1}^n\wedge t}^{(n)} = (X_{d_k^n\wedge t} - X_{d_{k-1}^n\wedge t})^2$$

a z definície kvadratickej variácie platí $\sup_{t\in\mathbb{T}} |[X]_t^{(n)} - \langle X\rangle_t| \to 0$ v pravdepodobnosti. Definujeme

$$H_t^{(n)} = H_t^{D_n} = \sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d_{k-1}^n} 1_{[d_{k-1}^n<t\leq d_k^n]}$$

postupnosť D_n-aproximácií procesu H. Uvažujme dva indexy $n \leq m$, kde najprv budeme uvažovať n zafixované a posielať $m \to \infty$. Následne pošleme aj $n \to \infty$. Je dobré si hneď teraz uvedomiť, že pre každé n a $k = 1, \ldots, |D_n|$ platia rovnosti

$$\begin{aligned} H^{(n)}_{d^n_k} &= H_{d^n_{k-1}} && (4.11) \\ \sum_{k=1}^{|D_m|} H^{(n)}_{d^m_k}([X]^{(m)}_{d^m_k \wedge t} - [X]^{(m)}_{d^m_{k-1}\wedge t}) &= \sum_{k=1}^{|D_n|} H^{(n)}_{d^n_k}([X]^{(m)}_{d^n_k \wedge t} - [X]^{(m)}_{d^n_{k-1}\wedge t}). && (4.12) \end{aligned}$$

Pretože $H^{(n)}$ je jednoduchý proces pre každé n, tak podľa tvrdenia 4.6 platí konvergencia v metrike ρ

$$I^{(m,n)}_t = \sum_{k=1}^{|D_n|} H^{(n)}_{d^n_k}([X]^{(m)}_{d^n_k \wedge t} - [X]^{(m)}_{d^n_{k-1}\wedge t}) \to \sum_{k=1}^{|D_n|} H^{(n)}_{d^n_k}(\langle X\rangle_{d^n_k \wedge t} - \langle X\rangle_{d^n_{k-1}\wedge t})$$

pre $m \to \infty$. Tu je dobré si uvedomiť, že ľavá strana (4.10) je to isté ako $I^{(n,n)}$. Následne vďaka rovnosti (4.11), vete 4.5 a z definície 4.1 okamžite vyplýva konvergencia v metrike ρ pre $n \to \infty$

$$J^{(n)}_t = \sum_{k=1}^{|D_n|} H^{(n)}_{d^n_k}(\langle X\rangle_{d^n_k \wedge t} - \langle X\rangle_{d^n_{k-1}\wedge t}) \to \oint_0^t H d\langle X\rangle.$$

Ďalej zo vzťahu (4.12), pre každé $m > n \in \mathbb{N}$, pre $I^{(m,m)}_t - I^{(m,n)}_t$ platí

$$\begin{aligned} & |I^{(m,m)}_t - I^{(m,n)}_t| && (4.13) \\ = & \ |\sum_{k=1}^{|D_m|} H_{d^m_{k-1}}([X]^{(m)}_{d^m_k \wedge t} - [X]^{(m)}_{d^m_{k-1}\wedge t}) - \sum_{k=1}^{|D_m|} H^{(n)}_{d^m_k}([X]^{(m)}_{d^m_k \wedge t} - [X]^{(m)}_{d^m_{k-1}\wedge t})| \\ = & \ |\sum_{k=1}^{|D_m|}(H_{d^m_{k-1}} - H^{(n)}_{d^m_k})([X]^{(m)}_{d^m_k \wedge t} - [X]^{(m)}_{d^m_{k-1}\wedge t})| \\ \leq & \ |\Delta H|_{D_n} \sum_{k=1}^{|D_m|}([X]^{(m)}_{d^m_k \wedge t} - [X]^{(m)}_{d^m_{k-1}\wedge t}) = |\Delta H|_{D_n}[X]^{(m)}_t. && (4.14) \end{aligned}$$

Pre posledný člen z definície kvadratickej variácie platí pre $m \to \infty$ konvergencia v metrike ρ

$$|\Delta H|_{D_n}[X]^{(m)}_t \to |\Delta H|_{D_n}\langle X\rangle_t. \qquad (4.15)$$

Z monotónie a trojuholníkovej nerovnostoi metriky ρ vyplýva pre $m \to \infty$, že

$$\begin{aligned} & \rho(I^{(m,m)}_t, I^{(m,n)}_t) \\ \leq & \ \rho(|\Delta H|_{D_n}\langle X\rangle_t) + \rho(|\Delta H|_{D_n}[X]^{(m)}_t, |\Delta H|_{D_n}\langle X\rangle_t) \\ \to & \ \rho(|\Delta H|_{D_n}\langle X\rangle_t) \end{aligned}$$

Následne z tvrdenia 2.13 plynie, že

$$|\Delta H|_{D_n}\langle X\rangle_t \to 0$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ teda z trojuholníkovej nerovnosti pre metriky platí, že

$$\begin{aligned}
& \lim_{m\to\infty} \rho(\sum_{k=1}^{|D_m|} H_{d^m_{k-1}}(X_{d^m_k \wedge t} - X_{d^m_{k-1}\wedge t})^2, \oint_0^t H d\langle X\rangle) \\
\leq \ & \limsup_{m\to\infty} \rho(\sum_{k=1}^{|D_m|} H_{d^m_{k-1}}(X_{d^m_k \wedge t} - X_{d^m_{k-1}\wedge t})^2, I_t^{(m,n)}) \\
+ \ & \limsup_{m\to\infty} \rho(I_t^{(m,n)}, J_t^{(n)}) + \rho(J_t^{(n)}, \oint_0^t H d\langle X\rangle) \\
\leq \ & \rho(|\Delta H|_{D_n}\langle X\rangle_t) + \rho(J_t^{(n)}, \oint_0^t H d\langle X\rangle) \to 0
\end{aligned}$$

pre $n \to \infty$, čo pre jednotlivé limity bolo dokázané v predchádzajúcej časti dôkazu. Z toho nám už vyplýva znenie vety.

❑

Dôsledok 4.11. *Nech $H \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^{r\times m}$ a $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$ také, že existuje tenzorová kvadratická variácia $\langle\langle X\rangle\rangle$. Potom pre každú postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťujúcu interval $\mathbb{T}$ platí*

$$\sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d^n_{k-1}}([\![X]\!]_{d^n_k\wedge t} - [\![X]\!]_{d^n_{k-1}\wedge t}) \to \int_0^t H d\langle\langle X\rangle\rangle \tag{4.16}$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$ v každej zložke matice.

Dôkaz: V tomto dôkaze pre jednoduchosť budeme uvažovať, že $r = 1$ a horným indexom v zátvorke budeme označovať zložku náhodného vektoru.

Pre $m = 1$ je dôsledok zhodný s tvrdením 4.10. Pre obecné m z polarizačnej vlastnosti (3.2) dostaneme pre každé $i,j = 1,\ldots,m$, že

$$\sum_{k=1}^{|D_n|} H^{(i)}_{d^n_{k-1}}([X^{(i)},X^{(j)}]_{d^n_k\wedge t} - [X^{(i)},X^{(j)}]_{d^n_{k-1}\wedge t}) \to \oint_0^t H^{(i)} d\langle X^{(i)},X^{(j)}\rangle$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$. Nech e_j je j-tý kanonický vektor priestoru $\mathbb{R}^m$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosť delení zahusťujúca interval $\mathbb{T}$. Z úpravy

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{|D_n|} H_{d^n_{k-1}}([\![X]\!]_{d^n_k\wedge t} - [\![X]\!]_{d^n_{k-1}\wedge t})e_j \\
= \ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{|D_n|} H^{(i)}_{d^n_{k-1}}([X^{(i)},X^{(j)}]_{d^n_k\wedge t} - [X^{(i)},X^{(j)}]_{d^n_{k-1}\wedge t}) \\
\to \ & \sum_{i=1}^{m} \oint_0^t H^{(i)} d\langle X^{(i)},X^{(j)}\rangle = \int_0^t H d\langle\langle X\rangle\rangle e_j
\end{aligned}$$

vyplýva konvergencia v metrike ρ pre $n \to \infty$ pre j-tú zložku. Poskladaním cez všetky kanonické vektory dostaneme dôsledok.

❑

Kapitola 5

Itôov vzorec

V tejto kapitole sa nám zídu znalosti z algebry. Ak A je reálna matica typu $m \times m$, $x \in \mathbb{R}^m$ je stĺpcový vektor a $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{m} A^{(k,k)}$ je *stopa matice* A, tak potom

$$x^{\mathsf{T}} A x = \mathrm{tr}(x^{\mathsf{T}} A x) = \mathrm{tr}(A x x^{\mathsf{T}}).$$

Pre jednoduchosť budeme označovať *tenzorovú druhú mocninu* ako

$$x^{\odot 2} \quad = \quad x x^{\mathsf{T}}$$

a *skalárnu druhú mocninu* ako

$$x^2 \quad = \quad x^{\mathsf{T}} x.$$

Nech B je matica typu $r \times m$. Symbolom $|B|$ budeme rozumieť

$$|B| = \max_{i=1,\dots r; j=1,\dots m} |B_{i,j}|.$$

Lemma 5.1. *Nech $x \in \mathbb{R}^m$ a $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Potom platí nerovnosť*

$$|x^{\mathsf{T}} B x| \leq m |B| x^2.$$

Dôkaz: Pre maticu B použijeme odhad maxima a dostaneme

$$|x^{\mathsf{T}} B x| \leq |B| \sum_{i,j=1}^{m} |x_i x_j| = |B| (\sum_{i=1}^{m} |x_i|)^2 \leq |B| \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} 1 = m |B| x^2,$$

kde druhá nerovnosť vyplýva zo Schwarzovej nerovnosti.

❑

Poznámka 5.2. Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})^m$. Potom pre každé delenie D intervalu $\mathbb{T}$ a každé $t \in \mathbb{T}$ platí rovnosť

$$[\![X]\!]^D_{d_k \wedge t} - [\![X]\!]^D_{d_{k-1} \wedge t} = (X_{d_k \wedge t} - X_{d_{k-1} \wedge t})^{\odot 2}.$$

V nasledujúcom predpoklade zavedieme vzťah množiny a náhodného procesu, ktorý budeme predpokladať vo vetách v tejto kapitole.

Predpoklad 5.3. Nech $m \in \mathbb{N}$. Majme $X \in \mathbb{C}_\mathbb{T}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$ a $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$ množinu pre ktorú platí, že ak pre $t_1,\ t_2 \in \mathbb{T}$ kde $t_1 \neq t_2$ a $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ je $X_{t_1}(\omega_1) \in \mathcal{M}$ a $X_{t_2}(\omega_2) \in \mathcal{M}$ tak pre každé $\lambda \in (0,1)$ $\lambda X_{t_1}(\omega_1) + (1-\lambda)X_{t_2}(\omega_2) \in \mathcal{M}$.

Veta 5.4 (Itôov vzorec)**.** *Nech $X \in \mathbb{C}_\mathbb{T}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^m$ má tenzorovú kvadratickú variáciu $\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$, $f \in C^2(\mathcal{M})$ kde X a $\mathcal{M}$ splňajú perdpoklad 5.3 a $X \in \mathcal{M}$ skoro určite. Potom pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí rovnosť*

$$f(X_t) = f(X_0) + \oint_0^t \nabla f(X_s)^\intercal dX_s + \frac{1}{2} tr \left\{ \int_0^t \nabla^2 f(X_s) d\langle\!\langle X \rangle\!\rangle_s \right\}$$

skoro určite.

Dôkaz:

Majme $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ postupnosť delení zahusťujúcu $\mathbb{T}$. Najprv si uvedomme konvergenciu vyplyvajúcu zo spojitosti procesu X a spojitosti druhých parciálnych derivácii funkcie f.

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |\nabla^2 f(X_t) - \nabla^2 f(X_{\lfloor t \rfloor_{D_n}})| \to 0 \tag{5.1}$$

skoro určite. Pre $k = 1, \ldots, |D_n|$ zadefinujme

$$X_{k,t}^n(\lambda) \;=\; (1-\lambda)X_{d_{k-1}^n \wedge t} + \lambda X_{d_k^n \wedge t}$$

a pre jednoduchosť označíme $g_{k,t}^n = f \circ X_k^n$. Ďalej v dôkaze pre prehľadnosť zanedbáme index t a budeme písať len $X_k^n(\lambda) = X_{k,t}^n(\lambda)$ a $g_k^n = g_{k,t}^n$. Na každom intervale $[d_{k-1}^n, d_k^n]$ rozvinieme funkciu g_k^n do Taylorového polynómu prvého rádu v bode 0 s Langrangeovým tvarom zvyšku a dostaneme

$$\begin{aligned} g_k^n(1) - g_k^n(0) &= [g_k^n]'(0) + \frac{1}{2}[g_k^n]''(\xi_k^n(t)) \\ &= [g_k^n]'(0) + \frac{1}{2}[g_k^n]''(0) + \frac{1}{2}([g_k^n]''(\xi_k^n(t)) - [g_k^n]''(0)) \end{aligned} \tag{5.2}$$

skoro určite kde $\xi_k^n(t) : \Omega \to (0,1)$ je nie nutne merateľné zobrazenie. Spočítaním derivácie na intervale $[0,1]$ dostaneme rovnosti v zmysle skoro určite

$$[g_k^n]'(\lambda) \;=\; \nabla f(X_k^n(\lambda))^\intercal (X_{t\wedge d_k^n} - X_{t \wedge d_{k-1}^n}) \tag{5.3}$$

$$[g_k^n]''(\lambda) \;=\; (X_{t\wedge d_k^n} - X_{t\wedge d_{k-1}^n})^\intercal \nabla^2 f(X_k^n(\lambda))(X_{t\wedge d_k^n} - X_{t\wedge d_{k-1}^n}). \tag{5.4}$$

Uvedomme si, že $g_k^n(1) = f(X_{d_k^n \wedge t})$ a $g_k^n(0) = f(X_{d_{k-1}^n \wedge t})$, teda po vysčítaní cez všetky k dostaneme

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=1}^{|D_n|} [g_k^n]'(0) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{|D_n|} [g_k^n]''(0) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{|D_n|} ([g_k^n]''(\xi_k^n(t)) - [g_k^n]''(0)). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Pre jednotlivé členy (5.5) po dosadení (5.3) a (5.4) dostaneme

$$\begin{aligned}
& |\sum_{k=1}^{|D_n|}([g_k^n]''(\xi_k^n(t)) - [g_k^n]''(0))| \\
= & |\sum_{k=1}^{|D_n|}(X_{t\wedge d_k^n} - X_{t\wedge d_{k-1}^n})^\mathsf{T}(\nabla^2 f(X_k^n(\xi_k^n(t))) - \nabla^2 f(X_k^n(0)))(X_{t\wedge d_k^n} - X_{t\wedge d_{k-1}^n})| \\
\leq & \sum_{k=1}^{|D_n|} |\operatorname{tr}\left\{(\nabla^2 f(X_k^n(\xi_k^n(t))) - \nabla^2 f(X_k^n(0)))(X_{d_k^n\wedge t} - X_{d_{k-1}^n\wedge t})^{\odot 2}\right\}| \\
\leq & m \sup_{t\in\mathbb{T}} |(\nabla^2 f(X_t) - \nabla^2 f(X_{\lfloor t \rfloor_{D_n}})| \operatorname{tr}\left\{\sum_{k=1}^{|D_n|}(X_{d_k^n\wedge t} - X_{d_{k-1}^n\wedge t})^{\odot 2}\right\} \to 0 \quad (5.6)
\end{aligned}$$

skoro určite pre $n \to \infty$, kde v poslednej nerovnosti bola využitá Lemma 5.1. Teda platí

$$|\sum_{k=1}^{|D_n|}([g_k^n]''(\xi_k^n(t)) - [g_k^n]''(0))| \to 0$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$. Využitím dôsledku 4.11 dostaneme, že

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{|D_n|}[g_k^n]''(0) &= \operatorname{tr}\left\{\sum_{k=1}^{|D_n|}\nabla^2 f(X_k^n(0))(X_{d_k^n\wedge t} - X_{d_{k-1}^n\wedge t})^{\odot 2}\right\} \\
&\to \operatorname{tr}\left\{\int_0^t \nabla^2 f(X) d\langle\langle X\rangle\rangle\right\} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

v metrike ρ pre $n \to \infty$, pretože stopa je konečná suma. Pre posledný člen Taylorového rozvoja

$$\sum_{k=1}^{|D_n|}[g_k^n]'(0) = \sum_{k=1}^{|D_n|}\nabla f(X_{d_{k-1}^n})^\mathsf{T}(X_{d_k^n\wedge t} - X_{d_{k-1}^n\wedge t})$$

už automaticky dostaneme konvergenciu v metrike ρ

$$\begin{aligned}
\oint_0^t \nabla f(X)^\mathsf{T} dX &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{|D_n|}\nabla f(X_{d_{k-1}^n})^\mathsf{T}(X_{d_k^n\wedge t} - X_{d_{k-1}\wedge t}) \\
&= f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{|D_n|}[g_k^n]''(0) \\
&- \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{|D_n|}([g_k^n]''(\xi_k^n(t)) - [g_k^n]''(0)) \\
&= f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\int_0^t \nabla^2 f(X) d\langle\langle X\rangle\rangle\right\}. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Limitným prechodom členov (5.5) a využitím (5.6), (5.7), (5.8) teda dostaneme znenie vety.

❑

Príklad. Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ také, že X má kvadratickú variáciu $\langle X \rangle$. Položme $f(x) = x^2$. Je vidieť, že $f \in C^2(\mathbb{R})$ a $P(X \in \mathbb{R}) = 1$. Podľa vety 5.4 dostaneme rovnosť

$$X_t^2 - X_0^2 = 2 \oint_0^t X dX + \langle X \rangle_t$$

skoro určite, čo odpovedá rovnici (4.3).

Veta 5.5. *Nech $X \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ je náhodný proces s kvadratickou variácou $\langle X \rangle$. Nech $\mathcal{M} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ je množina pre ktorú platí, že proces (t,X_t) a $\mathcal{M}$ splňajú predpoklad 5.3. Nech ďalej $f \in C^2(\mathcal{M})$ a pre každé $t \in \mathbb{T}$ je $(t,X_t) \in \mathcal{M}$ až na množinu miery 0. Potom pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí rovnosť*

$$f(t,X_t) - f(0,X_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \oint_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d\langle X \rangle_s \quad (5.9)$$

skoro určite.

Dôkaz: Veta je prakticky zjednodušením vety 5.4. Vezmeme náhodný proces $Y = \{(t,X_t),t \in \mathbb{T}\}$. Okamžite je vidieť, že $Y_t^{(1)} = t$ má konečnú absolútnu variáciu $V(Y^{(1)})_t = t$. Ďalej z predpokladu, že X má kvadratickú variáciu $\langle X \rangle$ a použitím vety 3.13 okamžite dostaneme vzorec (5.9) .

❑

V praktických príkladoch sa ešte bude hodiť veta o tom, ako vyzerá kvadratická variácia funkcie $f(X)$ z vety 5.4.

Veta 5.6. *Nech f, X sú definované ako v 5.4. Potom $f(X)$ má kvadratickú variáciu $\langle f(X) \rangle$ a pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí rovnosť*

$$\langle f(X) \rangle_t = tr\left\{ \int_0^t \nabla f(X) \nabla f(X)^\mathsf{T} d\langle\!\langle X \rangle\!\rangle \right\}. \quad (5.10)$$

skoro určite.

Dôkaz: Nech $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť delení zahusťujúca $\mathbb{T}$. Obdobne ako v dôkaze vety 5.4 pre každé delenie D_n zavedieme

$$X_k^n(\lambda) = (1-\lambda)X_{d_{k-1}^n \wedge t} + \lambda X_{d_k^n \wedge t}$$

a zadefinujeme funkciu $g_k^n(\lambda)$ predpisom

$$g_k^n(\lambda) = f(X_k^n(\lambda)).$$

Rozvinutím funkcie g_k^n do Taylorového polynómu s Lagrangeovým tvarom zvyšku v bode 0 dostaneme rovnosť

$$g_k^n(1) - g_k^n(0) = [g_k^n]'(0) + \frac{1}{2}[g_k^n]''(\xi_k^n(t))$$

skoro určite, kde $\xi_k^n(t) : \Omega \to (0,1)$ je nie nutne meratelné zobrazenie a pre derivácie $[g_k^n]'$ a $[g_k^n]''$ platí (5.3) a (5.4). Pre elementárnu kvadratickú variáciu procesu $f(X)$ s delením D_n ďalej platí rovnosť

$$
\begin{aligned}
[f(X)]_t^{D_n} &= \sum_{k=1}^{|D_n|}(g_k^n(1)-g_k^n(0))^2 = \sum_{k=1}^{|D_n|}\left([g_k^n]'(0)+\frac{1}{2}[g_k^n]''(\xi_k^n)\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{|D_n|}\left([g_k^n]'(0)\right)^2+\sum_{k=1}^{|D_n|}[g_k^n(0)]'[g_k^n(\xi_k^n(t))]''+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{|D_n|}\left([g_k^n(\xi_k^n(t))]''\right)^2 \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

skoro určite. Pre jednotlivé členy (5.11) dostaneme po úpravách

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{|D_n|}\left([g_k^n]'(0)\right)^2 &= tr\left\{\sum_{k=1}^{|D_n|}\nabla f(X_{d_{k-1}^n})\nabla f(X_{d_{k-1}^n})^\mathsf{T}(X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_k^n\wedge t}^{\odot 2})\right\} \\
&\to tr\left\{\int_0^t \nabla f(X)\nabla f(X)^\mathsf{T} d\langle\!\langle X\rangle\!\rangle\right\} \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

v metrike ρ pre $n\to\infty$,

$$
\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{|D_n|}[g_k^n(0)]'[g_k^n]''(\xi_k)| &= |\sum_{k=1}^{|D_n|}\nabla f(X_{d_{k-1}^n})^\mathsf{T}(X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_{k-1}^n\wedge t}) \\
&\quad (X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_{k-1}^n\wedge t})^\mathsf{T}\nabla^2 f(X_{d_k^n}^n(\xi_k^n(t)))(X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_{k-1}^n\wedge t})| \\
&\leq m^2[\sup_{t\in\mathbb{T}}|\nabla f(X_t)|^m]^\mathsf{T}|\Delta X|_{D_n} \\
&\quad \sup_{t\in\mathbb{T}}|\nabla^2 f(X_t)|\sum_{k=1}^{|D_n|}(X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_{k-1}^n\wedge t})^2\to 0 \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

skoro určite pre $n\to\infty$, keďže suma v (5.13) je konečná z predpokladu, že X má tenzorovú kvadratickú variáciu a $|\Delta X|_{D_n}\to 0$ v každej zložke pre $n\to\infty$ podľa tvrdenia 2.13. Nerovnosť vyplýva z Lemmy 5.1, tak podľa 2.8 máme aj konvergenciu v metrike ρ pre druhý člen (5.11).

Pre posledný člen Taylorového rozvoja (5.11) po úpravách dostaneme

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{|D_n|}\left([g_k^n]''(\xi_k^n(t))\right)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{|D_n|}\left((X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_{k-1}^n\wedge t})^\mathsf{T}\nabla^2 f(X_{d_k^n}^n(\xi_k^n(t)))(X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_{k-1}^n\wedge t})\right)^2 \\
&\leq m^2[\sup_{t\in\mathbb{T}}|\nabla^2 f(X_t)|]^2\sum_{k=1}^{|D_n|}\left((X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_{k-1}^n\wedge t})^2\right)^2 \\
&\leq m^2[\sup_{t\in\mathbb{T}}|\nabla^2 f(X_t)|]^2||\Delta X|_{D_n}^2\sum_{k=1}^{|D_n|}(X_{d_k^n\wedge t}-X_{d_{k-1}^n\wedge t})^2\to 0 \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

pre $n\to\infty$, keďže suma v (5.14) je konečná z predpokladu, že X má tenzorovú kvadratickú variáciu a skalárna druhá mocnina modulu spojitosti konverguje k 0 pre $n\to\infty$. Podľa vety 2.8 teda konverguje k 0 v metrike ρ aj tretí člen (5.11).

Limitným prechodom (5.11) v metrike ρ a využitím (5.12), (5.13), (5.14) teda dostaneme tvrdenie vety.

❑

Kapitola 6

Investovanie do akcií na finančnom trhu

Uvažujme, že obchodník investuje do akcií, ktorých tržná cena je popisovaná náhodným procesom $S = \{S_t, t \in \mathbb{T}\}$, kde $S_0 = s_0$ je deterministická hodnota. V tejto kapitole využijeme dosiaľ popísanú teóriu k dokázaniu ohodnotenia spravodlivej ceny portfólia obchodníka.

Definícia 6.1. Nech $S \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ popisuje tržnú hodnotu akcie s ktorou obchodník obchoduje. Usporiadanú dvojicu $(M,H)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^2$ nazývame *portfólium* obchodníka, ak existuje stochastický integrál v Riemannovom zmysle procesu H podľa S. Z hľadiska portfólia procesu M hovoríme *voľné finančné prostriedky* a procesu H *množstvo jednotiek akcií* ktoré drží obchodník.

Poznámka 6.2. Zo spojitosti procesu M vyplýva, že existuje $\int_0^t M_s ds$ v Lebesgueovom zmysle pre každé $t \in \mathbb{T}$. Pre úrokovú mieru r výraz $r \cdot \int_0^t M_s ds$ interpretujeme ako zisk z uložených finančných prostriedkov do času t a výraz $\oint_0^t H_s dS_s$ je zisk z držania akcií do času t. Pre jednoduchosť v práci uvažujeme, že úroková miera je nulová, teda $r = 0$.

Definícia 6.3. Náhodný proces $Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ budeme nazývať *cenou* portfólia $(M,H) \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^2$, ak platí rovnosť

$$Y_t = K_t + H_t S_t.$$

Ďalej hovoríme, že portfólium (M,H) je samofinancujúce, ak pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí rovnosť

$$Y_t = Y_0 + \oint_0^t H_s dS_s$$

skoro určite.

Nech Z je náhodná veličina. Hovoríme, že samofinancujúce portfólium (M,H) replikuje náhodnú veličinu Z ak Y_0 je deterministická veličina a $Y_T = Z$ skoro určite.

Veta 6.4. *Necht Z, Y_0 sú náhodné veličiny a $S \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ taký, že existuje $\langle S \rangle$ a nadobúda hodnoty z otvoreného intervalu G. Nech $f(t,x)$ je spojtá funkcia* *na* $\mathbb{T} \times G$ *pre ktorú platí, že* $f \in C^2(\mathbb{T} \times G \backslash \{T,K\})$, $f(0,S_0) = Y_0$ *a* $f(T,S_T) = Z$. *Ak* $S_T \neq K$ *skoro určite a*

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,S_s)ds = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,S_s)d\langle S\rangle_s,$$

tak existuje samofinancujúce portfólium $(M,H) \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})^2$ *také, že* $H_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t,S_t)$, $M_t = f(t,S_t) - H_t$ *a cena protfólia* $Y \in \mathbb{C}_{\mathbb{T}}(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$, *kde* $Y_t = f(t,S_t)$.

Dôkaz: Dôkaz okamžite vyplýva z tvrdenia 5.5

❑

Príklad. Nech W je Wienerov proces definovaný v 1.2, $S(t,W_t)$ je aritmetický brownov pohyb s parametrami μ, $s_0 \in \mathbb{R}$ a $\sigma \in \mathbb{R}$. Pre $t \in \mathbb{T}$ položíme funkciu

$$f(t,x) = s_0 + \mu t + \sigma x.$$

Pre derivácie funkcie f platí, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) &= \mu, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) &= \sigma. \end{aligned}$$

Funkcia f je lineárna, teda triviálne platí, že $f \in C^\infty$ a W má podľa 3.11 kvadratickú variáciu. Položením

$$S_t = f(t,W_t)$$

môžeme použiť 5.6. Dosadením do vzorca (5.10) dostaneme pre každé $t \in \mathbb{T}$, že

$$\langle S\rangle_t = \mathrm{tr}\left\{\int_0^t \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix}^{\odot 2} d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right\} = t\sigma^2. \tag{6.1}$$

Tvrdenie 6.5 (Bachelierov model)**.** *Nech sú parametre* μ, $s_0 \in \mathbb{R}$ *a* T, K, $\sigma > 0$. *Položíme funkciu*

$$F(t,x) = \begin{cases} (x-K)^+ & t = T \\ (x-K)\Phi(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}) + \sigma\sqrt{T-t}\varphi(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}) & t \in (0,T) \end{cases},$$

kde $\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(s)ds$ *je distribučná funkcia a* $\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\}$ *je hustota náhodnej veličiny s rozdelením* $N(0,1)$. *Ak aritmetický Brownov pohyb* $S = \{S_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ *určuje cenu akcie, tak*

$$Y_t = s_0 + \oint_0^t \Phi(\frac{S_s - K}{\sigma\sqrt{T-s}})dS_s$$

je spravodlivá cena samofinancujúceho sa portfólia replikujúceho veličinu $(S^T - K)^+$.

Dôkaz: Spočítame parciálne derivácie funkcie $F(t,x)$ a dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) &= \Phi(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}), &(6.2)\\
\frac{\partial F^2}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi(\frac{x-K}{\sqrt{T-t}}), &(6.3)\\
\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) &= -\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\varphi(\frac{x-K}{\sqrt{T-t}}) = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial F^2}{\partial x^2}(t,x). &(6.4)
\end{aligned}
$$

Zvyšné parciálne derivácie neuvádzame ale je vidieť, že F^* je zložením exponenciálnej a polynomiálnej funkcie na množine $\mathbb{T}\times(-\infty,\infty)\backslash(T,K)$. Keďže platí, že

$$P(\mathcal{S}_T \neq K) = P(W_T \neq \frac{K - s_0 - \mu T}{\sigma}) = 1,$$

tak môžeme použiť vetu 6.4 a dostaneme rovnosť

$$
\begin{aligned}
Y_t &= F(t,S_t) = s_0 + \oint_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)dS_s\\
&= s_0 + \oint_0^t \Phi(\frac{S_s - K}{\sigma\sqrt{T-s}})dS_s.
\end{aligned}
$$

❑

Príklad. Nech W je Wienerov proces definovaný v 1.2, $S(t,W_t)$ je geometrický brownov pohyb s parametrami μ, $s_0 \in \mathbb{R}$ a $\sigma \in \mathbb{R}$. Pre $t \in \mathbb{T}$ položíme funkciu

$$f(t,x) = s_0 \exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\}.$$

Spočítame derivácie funkcie f a dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)f(t,x),\\
\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) &= \sigma f(t,x).
\end{aligned}
$$

Je vidieť, že f je exponencálna funkcia, teda $f \in C^\infty$ a podľa 3.11 kvadratická variácia porcesu W existuje a $\langle W\rangle_t = t$. Položením

$$S_t = f(t,W_t)$$

môžeme použiť 5.6. Dosadením do vzorca (5.10) dostaneme pre každé $t \in \mathbb{T}$, že

$$\langle S\rangle_t = \operatorname{tr}\left\{\int_0^t S_s^2 \begin{pmatrix} \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \sigma \end{pmatrix}^{\odot 2} d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\right\} = \sigma^2\int_0^t S_s^2 ds. \qquad (6.5)$$

Tvrdenie 6.6 (Black-Scholesov model)**.** *Nech $T,K,\sigma > 0$, a $\mu \in \mathbb{R}$. Položíme funkciu*

$$F(t,x) = \begin{cases} (x-K)^+ & t = T \\ x\Phi\left(\frac{\ln(\frac{x}{K})+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - K\Phi\left(\frac{\ln(\frac{x}{K})+\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) & t \in (0,T) \end{cases}$$

kde $\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(s)ds$ *distribučná funkcia a* $\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{s^2}{2}\right\}$ *je hustota náhodnej veličiny s rozdelením* $N(0{,}1)$. *Potom ak geomtrický Brownov pohyb* $\{S_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ *určuje cenu akcie v čase tak*

$$Y_t = s_0 + \oint_0^t \Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_s}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}\right) dS_s$$

je spravodlivá cena samofinancujúceho sa portfólia replikujúceho náhodnú veličinu $(S_T - K)^+$.

Dôkaz: Pre parciálne derivácie funkcie $F(t,x)$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(t,x) &= \Phi\left(\frac{\ln(\frac{x}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), && (6.6) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{\ln(\frac{x}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right), && (6.7) \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) &= -\frac{x\sigma}{2\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{\ln(\frac{x}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) && (6.8) \end{aligned}$$

Zvyšné druhé parciálne derivácie pre prehľadnosť neuvádzam, ale je vidieť, že F je v každej premennej zložením exponenciály a polynómu, respektíve logaritmu, teda $F \in C^2((0,T) \times (0,\infty) \setminus \{T,K\})$.

Keďže

$$P(S_T \neq K) = P(W_T \neq \frac{1}{\sigma} ln\frac{K}{s_0} + T(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})) = 1,$$

tak sú splnené predpoklady vety 6.4 a pre spravodlivú cenu porfólia platí, že

$$\begin{aligned} Y_t &= F(t,S_t) = s_0 + \oint_0^T \frac{\partial F^*}{\partial x}(s,S_s)dS_s \\ &= s_0 + \oint_0^t \Phi\left(\frac{\ln(\frac{S_s}{K}) + \frac{\sigma^2}{2}(T-s)}{\sigma\sqrt{T-s}}\right) dS_s. \end{aligned}$$

skoro určite.

❑

Náhodná veličina $(S_T - K)^+$ kde S_T je cena akcie v čase T je výplata *európskej call vanila opcie*, ktorá umožnuje vlastníkovy tejto opcie v čase T kúpiť jednotku akcie za predom dohodnutú sumu K. Parameter K sa tiež nazýva *strike*.

Apendix

Definícia 1. Pre náhodný proces $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ definujeme $\left\{\mathcal{F}_t^X,\ t \in \mathbb{T}\right\}$ *kanonickú filtráciu* procesu X predpisom

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left\{\cup_{\{s\in\mathbb{T}\ \ s\leq t\}}\sigma(X_s)\right\}.$$

Definícia 2. Majme $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ integrovateľný náhodný proces. Hovoríme, že náhodný proces X je *martingal*, ak pre každé $s, t \in \mathbb{T}$ kde $s \leq t$ platí, že

$$\mathsf{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s^X\right] = X_s$$

skoro určite. Ak je náhodný proces naviac spojitý, tak hovoríme o *spojitom* martingale.

Definícia 3. Majme $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ a zobrazenie $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \infty$. Hovoríme, že τ je $\mathcal{F}_t^X$*-markovský čas* ak pre každé $t \in \mathbb{T}$ platí, že $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t^X$.

Ďalej definujeme náhodný proces $X^\tau = \{X_t^\tau, t \in \mathbb{T}\}$ *zastavenie v čase* τ procesu X predpisom $X_t^\tau = X_{t\wedge\tau}$ pre každé $t \in \mathbb{T}$.

Definícia 4. Nech $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ náhodný proces. Ak existuje postupnosť $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ X-markovských časov taká, že $\tau_n \to \infty$ pre $n \to \infty$ skoro určite a pre každé $n \in \mathbb{N}$ je proces $X^{\tau_n} - X_0 = \{X_t^n - X_0, t \in \mathbb{T}\}$ martingal, tak tvrdíme, že proces X je *lokálny martingal.* Ak náhodný proces X je naviac spojitý, tak hovoríme o *spojitom* lokálnom martingale.

Veta 5 (Optional Stopping Theorem)**.** *Buď $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{T}\}$ spojitý martingal a τ X-markovský čas. Potom X^τ zastavenie procesu X v čase τ je martingal.*

Dôkaz: [3] str. 249, 1.3.11.

❑

Veta 6 (Doob-Meyer)**.** *Nech $X = \{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ je spojitý lokálny martingal. Potom existuje náhodný proces $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ taký, že pre každú postupnosť $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ zahusťujúcu interval $\mathbb{T}$ platí, že pre každé $t \in \mathbb{T}$*

$$[X]_t^{D_n} \to Y_t$$

v pravdepodobnosti. Ďalej platí, že

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|[X]_t^{D_n} - Y_t\right| \to 0$$

v pravdepodobnosti.

Dôkaz: [3] str. 263, 1.6.1

❑

Dôkaz vety 3.11

1. Wienerov proces $W = \{W_t, t \in \mathbb{T}\}$ je martingal,

$$E[W_t \mid \mathcal{F}_s^W] = E[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s^W] + W_s = W_s$$

pre každé s, $t \in \mathbb{T}$ kde $s \leq t$.

2. Využijeme vlastnosť Wienerového procesu a to, že pre každé s, $t \in \mathbb{T}$ kde $t > s$ je $W_t - W_s \sim \sqrt{t-s}W_1$ a tiež, že $W_1^2 \sim \chi_1^2$. Pre postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťujúcu interval $\mathbb{T}$ teda platí

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\,[[W]_t^{D_n}] &= \mathsf{E}\,[\sum_{k=1}^{|D_n|}(W_{d_k^n \wedge t} - W_{d_{k-1}^n \wedge t})^2] \\
&= \sum_{k=1}^{|D_n|}(d_k^n \wedge t - d_{k-1}^n \wedge t) = t, \\
\mathrm{var}([W]_t^{D_n}) &= \mathrm{var}\left(\sum_{k=1}^{|D_n|}(W_{d_k^n \wedge t} - W_{d_{k-1}^n \wedge t})^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{|D_n|}\mathrm{var}\left(W_1^2(d_k^n \wedge t - d_{k-1}^n \wedge t)\right) \\
&= \mathrm{var}\left(W_1^2\right)\sum_{k=1}^{|D_n|}(d_k^n \wedge t - d_{k-1}^n \wedge t)^2 \\
&\leq 2t\|D_n\| \to 0,
\end{aligned}$$

teda $[W]_t^{D_n} \to t$ v pravdepodobnosti.

3. Podľa Optional Stopping Theoremu 5 sú pre každú postupnosť $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\mathcal{F}_t^W-$Markovských časov, náhodné procesy $W^\tau = \{W_{t\wedge\tau},\ t \in \mathbb{T}\}$ martingaly. Zvolením postupnosti $\tau_n = \infty$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostaneme, že W je lokálny martingal.

4. Podľa Doob-Meyerovej vety 6 teda platí, že

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |[W]_t^{D_n} - t| \to 0$$

v pravdepodobnosti, vždy keď $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ zahusťuje interval $\mathbb{T}$.

Tým je dokázané, že $\langle X\rangle_t = t$ pre každé $t \in \mathbb{T}$.

❑

Zoznam použitej literatúry

[1] D. Sondermann (2006): Introduction to Stochastic Calculus for Finance LN Econ. Math. Syst. 579, Springer.

[2] J. Štěpán (1987): Teorie pravděpodobnosti 1. vydanie Academia, Praha

[3] J. Dupačová, J. Hurt, J. Štěpán : Stochastic modeling in economics and finance 1. vydanie Springer, US

[4] P. Dostál: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dostal/SK.pdf