Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Jevy, které mají vliv na úspěšnost žáka při řešení úloh s algebraickými výrazy

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Autor: Mgr. Bc. Jana Benešová

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy – matematika

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2015

Charles university in Prague

Faculty of education

Department of Mathematics and Mathematical education

Phenomena influencing learners' success when solving problems with algebraic expressions

MASTER´S THESIS

Author: Mgr. Bc. Jana Benešová

Study programme: Secondary School Teacher Education

Branch of study: Training Teachers of General Subjects of Lower and Higher Secondary Schools – Mathematics

Supervisor: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Prague 2015

NÁZEV:

Jevy, které mají vliv na úspěšnost žáka při řešení úloh s algebraickými výrazy

ABSTRAKT:

Tato diplomová práce je věnována problematice chyb a obtížím žáků při řešení úloh s algebraickými výrazy při výuce matematiky na střední odborné škole. Cílem práce bylo popsat faktory, které ovlivňují úspěch žáka při práci s algebraickými výrazy, provést jejich klasifikaci na základě některé používané klasifikace chyb žáků v matematice a zjistit, v čem mají žáci největší obtíže. Práci tvoří teoretická a experimentální část.

V teoretické části se zabývám faktory, které ovlivňují úspěch žáka v procesu učení. Jejich přehled uvádím na základě informací získaných z literatury a doplňuji jej vlastními zkušenostmi získanými při výuce matematiky na střední škole. Dále se v této části zabývám pojmem chyba, klasifikací chyb a jednou z nejdůležitějších fází procesu učení, kterou je popis postupu práce učitele s chybou žáka (opět na základě získaných informací z literatury). Na závěr teoretické části uvádím potřebné definice základních pojmů z odborné literatury o algebraických výrazech.

V experimentální části se zabývám vlastním experimentem při výuce matematiky na střední odborné škole, který vychází ze samostatné písemné práce žáků 1. ročníku a z dotazníkového šetření u stejných žáků a u učitelů matematiky. Získaná data ze samostatné písemné práce žáků jsem kvalitativně rozebrala po jednotlivých úlohách a poté zpracovala do přehledných tabulek. Další získaná data z dotazníků od žáků a učitelů jsem zpracovala (opět po jednotlivých otázkách) do sloupcových grafů.

V závěru diplomové práce popisuji vlastní postřehy z experimentu a navrhuji různé úpravy v učebních materiálech, které se věnují práci s algebraickými výrazy.

KLÍČOVÁ SLOVA:

Algebraické výrazy, mnohočleny, lomené výrazy, početní operace s algebraickými výrazy, řešení úloh, žákovy chyby při řešení úloh s algebraickými výrazy

TITLE:

Phenomena influencing learners' success when solving problems with algebraic expressions

ABSTRACT:

This thesis focuses on errors and difficulties that students face when solving problems with algebraic expressions in mathematics at secondary school. Its aim was to describe the factors that affect pupils´ achievement while dealing with algebraic expressions, classify them on the basis of a classification of pupils´ errors used in mathematics and identify the biggest pupils´ difficulties. The thesis consists of theoretical and experimental parts.

The theoretical part focuses on the factors that influence the success of pupils in their learning process. I present their summary based on information gained from literature and I complete them with my own teaching experience of mathematics at secondary school. Next I deal with the concept of error, error classification and one of the most important phases of learning process, which is a description of teacher's work with pupil´s error (again on the basis of information gained from the literature). The theoretical part ends with definitions of basic concepts from specialized literature on algebraic expressions at the end of the theoretical part.

In the experimental part I deal with my own experiment during teaching of mathematics at secondary school, which is based on individual written work of students in the first year of their study and on the questionnaire investigation of the same students and teachers of mathematics. I analyzed qualitatively all obtained data from pupils independent written work and I wrote them up in tables. The data obtained from questionnaires are summarized in the form of bar charts.

At the end of the thesis I have described my own observations in the experiment and I have suggested various modifications in teaching materials concerning work with algebraic expressions.

KEYWORDS:

Algebraic expressions, polynomials, algebraic fractions, arithmetic operations with algebraic expressions, problem solving, pupil errors in solving problems with algebraic expressions

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Jevy, které mají vliv na úspěšnost žáka při řešení úloh s algebraickými výrazy* vypracovala pod vedením Prof. RNDr. Jarmily Novotné, CSc., samostatně na základě vlastních zjištění a za použití uvedené literatury.

V Praze dne 17. 7. 2015

……………………………………..

podpis

Ráda bych touto cestou poděkovala vedoucí své diplomové práce Prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., hlavně za její cenné rady a trpělivost při vedení mé diplomové práce. Dále pak kolegyni Mgr. Naděždě Vojtíkové-Dvořákové za pomoc s překladem článku z anglického jazyka, manželovi a rodičům za velkou podporu nejen při tvorbě této diplomové práce, ale i v průběhu celých studií na Univerzitě Karlově v Praze.

……………………………………..

podpis

OBSAH

1. ÚVOD

Ve vyučování matematice je podle mé zkušenosti potřeba klást značný důraz na to, aby žáci byli schopni řešit úlohy spjaté s algebraickými výrazy jak na základní, tak i na střední škole. Úpravy algebraických výrazů jsou důležité například při řešení rovnic a nerovnic nebo v kombinatorice (při úpravě výrazů s faktoriály), ale i při řešení úloh z jiných oborů, při zobecňování, dokazování aj. Proto je hlavním cílem mé diplomové práce experimentálně ověřit, jakých nejčastějších chyb se žáci dopouštějí při práci s algebraickými výrazy, v čem mají největší obtíže, jaké faktory ovlivňují výsledek jejich práce a jak lze tyto chyby a obtíže zmírnit.

Pro splnění stanoveného cíle jsem vybrala **kvantitativní metodu experimentu**, založenou na samostatné písemné práci žáků a na její analýze. Dále jsem zvolila dotazníkové šetření, které lze použít pro širší okruh osob. Těmito osobami byli v mém případě vybraní žáci 1. ročníku střední odborné školy a vybraní učitelé matematiky ze základních a středních škol. Cílem dotazníkového šetření bylo zjistit přímo od žáků a učitelů matematiky, jak tyto chyby a obtíže zmírnit či částečně odstranit.

Mezi žáky střední odborné školy v dotazníku zjišťuji:

- zda žáci učivu o algebraických výrazech rozumí,
- jaký způsob výkladu jim nejvíce vyhovuje,
- na koho se nejčastěji obracejí, pokud probíranému učivu nerozumí

  a
- jaké největší problémy jim učivo způsobuje.

Mezi učiteli matematiky na základních a středních školách v dotazníku zjišťuji:

- jakým způsobem učivo o algebraických výrazech zavádějí a vykládají,
- jaké výukové strategie, učebnice či jiné zdroje a modely používají,
- jakým způsobem ověřují míru pochopení žákem,
- do jaké míry je dle jejich zkušenosti pro žáky učivo srozumitelné a s čím mají dle nich žáci největší problémy (nejen při výkladu, ale i při práci s algebraickými výrazy),

- jakých chyb se dle jejich zkušenosti žáci při práci s algebraickými výrazy nejčastěji dopouštějí a jak lze dle nich tyto chyby u žáků alespoň částečně odstranit

  a

- jaké jevy dle jejich přesvědčení působí na žáka a ovlivňují výsledek jeho práce při řešení úloh s algebraickými výrazy.

Diplomovou práci jsem rozdělila do 2 částí, na část teoretickou a část experimentální.

V **teoretické části** se věnuji především faktorům, které mají vliv na žáka v hodině matematiky nejen při práci s algebraickými výrazy. Vycházím hlavně z (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2014) a z vlastní zkušenosti. Dále pak se zabývám pojmem chyba tak, jak je zpracován v (Hejný, 2004), klasifikací 2 základních chyb žáků (Novotná, 2014), tříděním chyb dle Astolfiho (1997), Hejného, Kuřiny (2001) a Brousseaua (2001) a klasifikací typů chyb dle Bílka (2014). Dále uvádím 1 z nejdůležitějších fází procesu učení, tj. popis postupu práce učitele matematiky s chybou, tzv. analýzu chyb (její identifikaci, interpretaci a opravu) dle Kuliče (1971). V závěru se věnuji výkladu potřebných pojmů na středoškolské úrovni, které souvisí s algebraickými výrazy (algebraický výraz, definiční obor, hodnota a početní operace). V práci též zmiňuji i speciální typy algebraických výrazů, *mnohočleny* a *lomené výrazy*, a početní operace s nimi.

V **experimentální části** je podrobně představen *vlastní experiment*, v němž jsem použila samostatnou písemnou práci žáků v 1. ročníku u 2 různých maturitních oborů na střední odborné škole. Při ní žáci řešili testové úlohy týkající se algebraických výrazů.

Samostatné písemné práci předcházela skupinová práce. Pro skupinovou práci jsem vytvořila 2 sbírky úloh, Sbírku řešených úloh a Sbírku cvičných úloh, se kterými jsem pracovala v praxi. Obdobné úlohy z těchto sbírek jsem poté též použila pro samostatnou písemnou práci žáků, abych mohla následně provést analýzu získaných dat, tj. klasifikaci chyb v jednotlivých úlohách.

Experiment byl doplněn dotazníkovým šetřením. Vytvořila jsem 2 dotazníky, z nichž 1 byl určen pro žáky a 1 pro učitele matematiky.

Na základě zjištěných dat jsou v závěru experimentální části dále uvedeny různé návrhy na reedukaci chyb při práci s algebraickými výrazy a návrhy na úpravu použitých učebních materiálů, které se věnují práci s algebraickými výrazy.

Úlohy z obou uvedených sbírek čtenář nalezne v příloze této diplomové práce (v případě 1. sbírky i dílčí kroky postupu výpočtu, v případě 2. sbírky pouze výsledky uvedených úloh). Do přílohy jsem též připojila dotazník pro žáky a pro učitele.

2. TEORETICKÁ ČÁST

„**Matematiku chápeme především jako specifickou lidskou aktivitu, tedy nikoli jen jako její výsledek, který se obvykle formuluje do souboru definic, vět a důkazů.**“

(Hejný & Kuřina, 2001: str. 160)

Diplomová práce je zaměřena na jevy, které ovlivňují úspěch žáka v matematice při řešení úloh s algebraickými výrazy. Proto v této teoretické části práce nejprve představuji **faktory, které ovlivňují úspěch žáka v matematice**, a to nejen při řešení úloh s algebraickými výrazy. Při popisu těchto faktorů vycházím z (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2014) a z vlastní zkušenosti.

Dále se zamýšlím nad **pojmem chyba**, uvádím **klasifikaci chyb u žáků** opět nejen při práci s algebraickými výrazy a naznačuji **postup práce učitele matematiky s chybou žáka** v procesu učení na základě analýzy chyb.

V závěru teoretické části práce shrnuji potřebné **definice z oblasti algebraických výrazů**, které budu potřebovat v experimentální části práce, a to definice:

1. algebraického výrazu,
2. definičního oboru algebraického výrazu,
3. mnohočlenu,
4. početních operací s mnohočleny,
5. rozkladu mnohočlenů,
6. lomeného výrazu

   a

7. početních operací s lomenými výrazy.

Již 7. rokem učím na střední odborné škole, proto ze svých zkušeností vím, že žákům dělají při práci s algebraickými výrazy značné potíže i mnohočleny a lomené výrazy. Proto jsem do teoretické části své diplomové práce zařadila také informace o mnohočlenech a lomených výrazech.

2.1. Faktory ovlivňující úspěch žáka v matematice

Faktorů, které mají výrazný vliv na úspěch žáka v matematice, existuje podle mé zkušenosti celá řada. Do této kapitoly jsem zařadila informace z literatury, doplněné mými vlastními zkušenostmi z práce učitelky matematiky na střední odborné škole.

2.1.1. Popis faktorů z literatury ovlivňujících úspěch žáka v matematice

Faktory, které mají vliv na úspěch žáka v matematice, nazývají Eisenmann, Novotná & Přibyl (2014) „Kulturou řešení úloh“.

Pro Kulturu řešení úloh považují autoři za rozhodující tyto složky:

- ✓ **inteligenci**,
- ✓ **kreativitu**,
- ✓ **čtení textu s porozuměním**,
- ✓ **schopnost využít předcházející znalosti**.

Článek (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2014) se zabývá klíčovými otázkami ve vzdělávání v matematice, a to:

- o zda má učitel řídit vyučování žáků směrem k dobrému zvládnutí algoritmů pro řešení problémových úloh

  nebo
- o zda má učitel řídit vyučování žáků směrem k rozvoji kreativity žáka.

Autoři článku se domnívají, že vyučování žáků není postavené pouze na zvládnutí příslušných algoritmů pro řešení problémových úloh, nýbrž také na kreativním myšlení žáka. Kreativní myšlení žáka je podstatné pro řešení problémových úloh v matematice. Klíčovou roli zde má individuální schopnost

---

Kreativní myšlení žáka je založeno na kvantitě nápadů, ze kterých vybírá kvalitu. Pomocí něj objevuje různé paradoxy, nesoulady, nové překážky a výzvy, které se následně snaží spojovat do souvislostí.

Pokud nejsou při kreativním myšlení kladeny nějaké překážky, je žák schopen generovat velké množství nápadů. Dostupné na: <http://www.probermeto.cz/clanky/kreativni-reseni-problemu-o-kreativite-cps-1-dil>

každého žáka, neboť každý žák disponuje jinými matematickými vlohami, jiným vrozeným stupněm *inteligence*. To, zda žáci řeší úlohy *kreativně*, značně závisí na osobnosti a výukových strategií jejich učitele matematiky. Důležitou roli ve vyučování hraje to, jaké metody a formy práce při výuce učitel matematiky užívá, jak žáky motivuje, jaká je jeho vlastní zkušenost s kreativním přístupem k řešení problémových úloh a zda má dostatek matematických informací a materiálů pro práci se žáky v hodině.

Jádrem pozornosti mnoha výzkumů (např. PISA a TIMSS) je hledání nejrůznějších cest, které vedou žáky ke *„čtení textu s porozuměním*", které je klíčovou dovedností k úspěšnému řešení problémů.

Pokud mají žáci řešit nějakou nestandardní úlohu, uspějí pouze tehdy, když *využijí své přecházející znalosti*. Nestandardní úlohou rozumím úlohu, jejíž zadání neobsahuje prvky, které slouží jako signály pro volbu řešitelské strategie.

V článku (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2014) je představen výzkum, jehož cílem bylo vytváření nástrojů na testování Kultury řešení slovních úloh a zjišťování vlivu využití heuristických strategií na žáka při řešení slovních úloh.

Tento článek byl pro mne přínosný a zajímavý. Spatřuji zde totiž souvislost řešení slovních úloh s řešením úloh, které souvisí s algebraickými výrazy, na něž se v této diplomové práci zaměřuji. Je všeobecně známo, že problematika slovních úloh představuje pro značnou část našich žáků „bariéru", které se obávají, a troufám si říci, že se ji ani nesnaží překonat. A podle mé zkušenosti stejnou „bariéru" pro naše žáky představují i úlohy o algebraických výrazech, protože algebraický výraz je pro ně něco „neuchopitelného", „nesmyslného". Zadání slovní úlohy musí žák rozumět, aby byl schopen z něj vybrat to podstatné a vhodnou volbou efektivní strategie řešení úlohu vyřešil. Při řešení úloh s algebraickými výrazy musí opět žák porozumět zadání úlohy (například, jaká početní operace se od něj očekává) a musí vybrat vhodnou efektivní strategii řešení úlohy.

Kreativní řešení úloh je pro spoustu lidí (ne jen žáků) nedosažitelný cíl, a to v jejich hlavě, ne v realitě. Každý z nás kreativně myslí a stejně tak umí i kreativitu využít při řešení problémů. Dostupné na: <http://www.probermeto.cz/clanky/kreativni-reseni-problemu-o-kreativite-cps-1-dil>

Článek mě zaujal především proto, že se zabývá využitím heuristických strategií při řešení slovních úloh. Heuristické strategie přispívají k lepší „kultuře řešení úloh“, jak sám název článku od Eisenmanna, Novotné & Přibyla (2014) napovídá.

Než se budu věnovat výzkumu, který autoři v článku popisují, představím nejprve pojmy „Heuristika“, „heuristické řešení“ a „heuristická strategie“.

Heuristika[1] je pojem, který se do našeho jazyka dostal z řečtiny („heuriskó“, „*εὑρίσκω*“ = nalézt, objevit), v překladu znamená „*zkusmé řešení problémů, pro něž neznáme algoritmus nebo přesnější metodu*“. V žádném případě neručí za „nejlepší“ řešení nějakého problému, i když ji lze použít jednoduše, rychle a univerzálně. **Heuristické řešení**[1] *je založené nejen na odhadu a intuici, ale i na zkušenosti řešitele nějakého problému*, jednoduše řečeno „na jeho zdravém rozumu“. **Heuristická strategie**[1] označuje, „*jak lidé i stroje mohou řešit problémy s použitím dostupných* – i když jen volně aplikovaných – – *informací*“.

Použití heuristických strategií považuji za příznivý faktor, který má pozitivní dopad na úspěch žáka v hodině matematiky při řešení mnoha úloh, tedy například i zmiňovaných úloh o algebraických výrazech.

V článku (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2014) se jedná o krátkodobý výzkum (po dobu 3 měsíců), který byl aplikován na 3 českých školách, a to na 2. stupni základní školy (v Ústí nad Labem) a na 2 středních školách (v Mostě a v Lovosicích), za asistence vybraných učitelů těchto škol. Výzkum tvořil vstupní test, fáze přípravy a procvičování slovních úloh na základě použití heuristických strategií (formou ukázek řešení podobných slovních úloh, které měli žáci vyřešit ve vstupním testu) a výstupní test. Na vypracování testů měli žáci stanoven časový limit 40 minut a řešili v nich problematiku 4 až 5 slovních úloh, které jim zadali jejich vyučující. Žáci měli k dispozici pouze kalkulačky a stolní počítače. Ve fázi přípravy a procvičování učitelé se žáky využívali heuristické strategie pro řešení podobného typu úloh (cca 30), které byly uvedeny

[1] http://cs.wikipedia.org/wiki/Heuristika

ve vstupním testu. Organizace této fáze práce se slovními úlohami probíhala tak, že žáci ve skupinách hledali vhodnou heuristickou strategii pro řešení dané úlohy.

Eisenmann, Novotná & Přibyl (2014) očekávali, že po skončení krátkodobého výzkumu žáci budou schopni nalézt vhodnou strategii řešení slovní úlohy. Pokud se žáci naučí najít a použít tuto strategii, velmi se zlepší jejich „kultura řešení úloh“. Výzkum ukazuje, že i tato krátkodobá práce přinesla pozitivní výsledky, co se přístupu žáků k řešení slovních úloh týče. Při závěrečném shrnutí získaných výsledků z výzkumu byla porovnávána jednak frekvence použití heuristických řešitelských strategií před a po skončení výzkumu, jednak úspěšnost žáků při nalézání řešení slovních úloh.

Po přečtení článku zaměřeného na Kulturu řešení úloh (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2014) a na základě zkušeností ze svých hodin matematiky jsem stanovila následující faktory, které ovlivňují úspěch žáka v matematice.

1. Faktory, které jsou na straně žáka (vnitřní faktory):
   - *Kreativní myšlení žáka*, které je nezbytnou součástí k úspěšnému vyřešení mnoha matematických úloh. Kreativní myšlení[2] (obecně člověka) je založeno na nalezení nových možností řešení. Lze jej definovat jako schopnost člověka vytvořit nové kulturní, technické, duchovní či materiální hodnoty, a to ve všech oborech lidské činnosti. Jedná se o aktivitu, která s sebou přináší dosud neznámé společenské výtvory. Kreativní myšlení[3] není člověku vrozené, může jej však neustále rozvíjet, a to v nejrůznějších životních situacích.
   - *Vizuální představivost žáka* je pro řešení matematických úloh velmi důležitá. Opírá[4] se o jeho fotografickou paměť. Žák, který disponuje představivostí, potřebuje prezentované informace vnímat zrakem či si je pojit se zrakovými podněty (například ústní výklad doplnit o různé obrázky či nákresy).

---

[2] http://www.mamnapad.cz/encyklopedie-kreativity/rozcestnik/uvod-a-definice-kreativity/

[3] http://www.fsps.muni.cz/~tvodicka/data/reader/book-29/02.html

[4] https://www.google.cz/?gfe_rd=cr&ei=u55VcqnEsWk8wfY8YHQCQ&gws_rd=ssl#q=o%09Vizu%C3%A1ln%C3%AD+p%C5%99edstavivost+%C5%BE%C3%A1ka

Žák s vizuální představivostí je schopen si zapamatovat například tváře osob, předměty, různé obrázky nebo mapy, co je kde napsané a jak, aj.

- *Schopnost žáka najít vhodný postup pro řešení nové úlohy*, kterou autoři článku Kultura řešení úloh (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2014) popisují jako schopnost, kterou lze od žáka očekávat, lze ji od něj požadovat, ale v žádném případě ji nelze vyučovat, neboť této schopnosti učitel žáka naučit nikdy nemůže, žák na ni musí přijít sám.

2. Faktory, které souvisí s tím, jak učitel učí (vnější faktory):

- Vhodné je *zadávat úlohy od jednodušších typů (nejlépe z běžného života) k úlohám typově složitějším*. Mám vyzkoušeno, že při řešení jednodušších úloh žáci reprodukují poznatky, které si již dříve osvojili, a při řešení úloh typově složitějších již musí využít své kreativní myšlení. Vím, že žák potřebuje ve svém vzdělávacím procesu nalézt nějaký „záchytný bod“, na kterém může dále stavět. Pokud tento záchytný bod nenajde, následují již jen fáze procvičování podobných úloh a fáze neustálého opakování, při kterých se v matematice rozvíjí nejen matematické schopnosti žáka, ale na základě jeho předchozích zkušeností se zlepšuje i jeho výkon.
- *Dostatečné matematické vědomosti učitele*,
- *zkušenosti učitele v matematice* (délka praxe učitele v jeho oboru),
- *přístup učitele k žákovi* (má být pozitivní, učitel má žákovi usnadnit a zjednodušit práci, pomoci mu najít místo, ve kterém se dopustil chyby a ukázat žákovi správný směr, který vede ke správnému výsledku),
- *volba vhodné výukové strategie*, kterou učitel v hodině používá,
- *dostatek výukových materiálů*, které má učitel v hodině k dispozici,
- *pozitivní vliv výukového prostředí*

  a

- *použití heuristických strategií*.

2.1.2. Vlastní zkušenost s faktory ovlivňujícími úspěch žáka v matematice z pozice učitele

Problematiku jevů, které ovlivňují výsledek práce žáka v matematice a mají vliv na jeho úspěch při práci (nejen s algebraickými výrazy), rozdělím ze svého pohledu učitelky matematiky na střední odborné škole do 2 skupin faktorů:

- **vnitřní faktory**

  a

- **vnější faktory**.

<u>Za vnitřní faktory považuji:</u>

- inteligenci žáka,
- aktuální rozpoložení žáka (jeho nálada, únava),
- zdravotní stav žáka (bolest hlavy, nevolnost, viróza aj.),
- nesoustředěnost žáka (jeho myšlenky jsou zcela jinde, než by měly být),
- neschopnost žáka rozčlenit si zadané úlohy do jednotlivých podúloh tak, abych stihl včas všechny úlohy vypracovat,
- vztah žáka k matematice (ať už kladný či negativní vztah k matematice si žák s sebou na střední školu přináší již ze základní školy – příkladem negativního vztahu uvedu mou žákyni Janu, která si prý v hodinách matematiky představí svou učitelku ze základní školy a má „jakýsi blok“, není schopna se při samostatné práci plně soustředit a při řešení úlohy většinou zmatkuje, i když vím, že v hodině dávala pozor a látce rozuměla),
- motivaci žáka (motivačním faktorem, který vychází z vnitřku organismu žáka je jeho cílevědomost, žák se učí kvůli své vlastní potřebě),
- specifické poruchy učení – diagnostika na základě zprávy z pedagogicko-psychologické poradny (jedná se konkrétně o dysgrafii, dyslexii a dyskalkulii).

Na úroveň *inteligence* žáka mají dle mé zkušenosti bezesporu vliv také jeho genetické předpoklady, tj. dědičnost. Zde se domnívám, že pokud je výkon žáka v matematice velmi slabý, je v 1. řadě nutné zjistit, zda je jeho výkon stejně tak slabý i v jiných předmětech, nebo jen právě v matematice. Mám vypozorováno, že většinou mají žáci problémy i v jiných předmětech (jen malé procento mých bývalých žáků mělo problém pouze v matematice).

Z nejrůznějších informací uvedených v Učitelských novinách, ve zprávách z mezinárodních výzkumných projektů PISA (Programme for International Student Assesment) a TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) či z různých diskusí na portálech vyplývá, že matematická gramotnost českých žáků v posledních letech klesá. Proto si myslím, že je potřeba změnit náš školní systém od samého počátku.

Matematická gramotnost je ve výzkumu PISA definována následovně:[5]

„**Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, jakou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana**.“

Metodologie PISA[5] nám umožňuje sledovat matematickou gramotnost našich žáků (jejich schopnost řešit matematické úlohy, vztah k matematice aj.) a tvůrcům školské politiky poskytuje řadu informací o fungování vzdělávacích systémů. Zároveň mapuje například i vliv školních faktorů na výsledky žáků, sleduje rozdíly ve výsledcích mezi chlapci a děvčaty nebo jejich socioekonomické zázemí. Vývoj žáků (nejen našich, ale ve všech sledovaných zemích) lze díky této metodologii sledovat v čase. Šetření probíhá v cyklech, a to každé 3 roky.

Zde uvádím změny ve výsledcích u 15letých žáků **mezi roky 2003** až **2012**, protože v experimentální části této práce vycházím z experimentu v 1. ročníku střední odborné školy, tedy většinou u 15letých žáků.

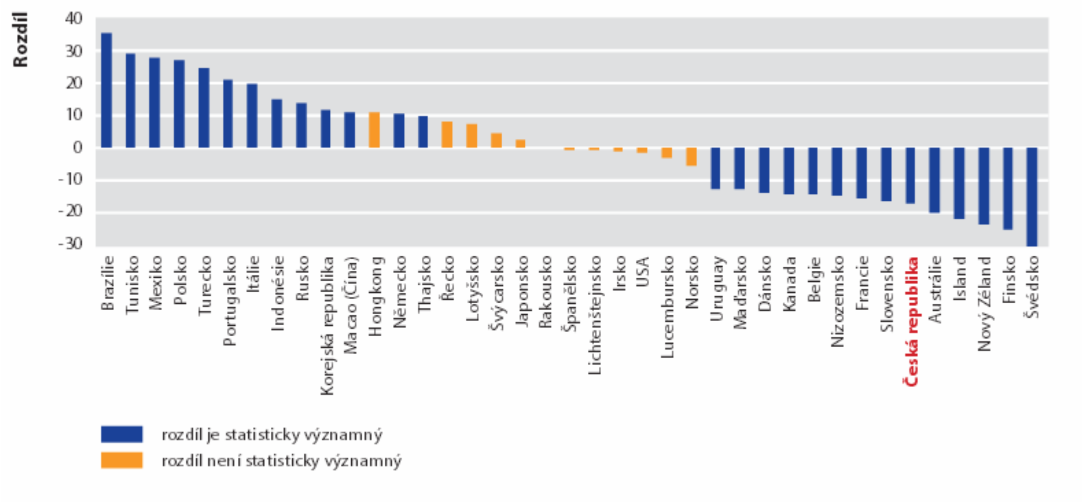
---

[5] http://www.pisa2012.cz/articles/files/Hlavni_zjisteni_PISA2012.pdf

Čeští žáci[6] v roce **2003** dosáhli v matematice nadprůměrných výsledků, v roce **2012** již výsledků průměrných. Česká republika se tak zařadila do skupiny 11 zemí OECD[7] (Organisation for Economic Co-operation and Development = Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj), jejichž nadprůměrný výsledek v roce 2003 se oproti roku 2012 za 9 let statisticky významně zhoršil. Zhoršení[6] průměrného výsledku v matematice od roku 2003 je doprovázeno „statisticky významným zhoršením průměrné hodnoty indexu charakterizujícího vztah žáka ke škole“, a to u všech typů škol.

Na následujícím obrázku je znázorněna změna ve výsledcích matematické gramotnosti žáků ve vybraných zemí mezi roky 2003 a 2012.

Změny[6] ve výsledcích zemí mezi roky 2003 a 2012



Obrázek 1: **PISA 2012 – Matematická gramotnost**

Důležitým zjištěním[6] bylo, že oproti předchozím cyklům (v letech 2006 a 2009, kdy byla matematická gramotnost vedlejší oblastí a kdy se výsledky našich žáků výrazně zhoršovaly) došlo v roce 2012 k mírnému zlepšení těchto výsledků. Nejedná se o zlepšení statisticky nijak významné, ale je nutné jej zmínit, protože u žáků došlo k zlepšení o 6 bodů.

---

[6] http://www.pisa2012.cz/articles/files/Hlavni_zjisteni_PISA2012.pdf

[7] https://cs.wikipedia.org/wiki/Organizace_pro_hospod%C3%A1%C5%99skou_spolupr%C3%A1ci_a_rozvoj

Lepší úspěšnosti[8] dosáhli chlapci než dívky. Na dílčím zlepšení průměrného výsledku našich žáků v matematice měli podíl především žáci ze základních škol. Tito žáci dokázali vykompenzovat další zhoršení výsledků v matematice u žáků z víceletých gymnázií a nematuritních oborů středních škol.

Žáci v naší republice vykazují, co se práce a výsledků v matematice týče, podprůměrnou míru sebedůvěry. Jejich sebedůvěra bohužel velmi výrazně negativně ovlivňuje výsledky jejich práce v matematice.

Protože v experimentální části této práce se zabývám experimentem na střední odborné škole v Jihočeském kraji, poznamenávám ještě, že jihočeští[8] žáci v roce 2009 dosáhli v oblasti matematické gramotnosti výrazně nejslabších výsledků ze všech našich dalších krajů. V roce 2003 byla však jejich úspěšnost, opět ve srovnání s dalšími kraji, průměrná.

Aktuální náladu, *nesoustředěnost* a *zdravotní stav* žáka nelze dle mého názoru nijak z pozice učitele ovlivnit, neboť se jedná o jev náhodný, který nelze korigovat.

V případě dalšího uvedeného faktoru, tj. *neschopnosti žáka rozčlenit si zadané úlohy do podúloh* tak, aby práci stihl včas celou vypracovat, mohu doporučit jen neustálé připomínání a upozorňování žáků na tento postup práce. Na nic jiného jsem doposud nepřišla.

<u>Za vnější faktory považuji:</u>

- v 1. řadě práci žáka pod časovým tlakem, tzv. *práce na čas*, kdy žák zaměří svou pozornost na hodinky či na mobilní telefon místo toho, aby ji zaměřil na svůj pracovní výkon,
- *tempo práce učitele se žáky v hodině* – zde mám na mysli tempo učitele při výkladu nové látky, zadávání úkolů, kontrole práce žáků atd. (jsem si však vědoma, že při vysokém počtu žáků ve třídě je

[8] http://www.pisa2012.cz/articles/files/Hlavni_zjisteni_PISA2012.pdf

obtížné dohromady sjednotit tempo práce učitele s různými tempy práce žáků tak, aby vyhovovala oběma stranám),

- *přestup žáka* ze 2. stupně základní školy do 1. ročníku střední školy (zde si myslím, že 1. ročník na střední škole je pro některé žáky nejobtížnější ze všech ročníků, pokud samozřejmě opomenu jejich přípravu na maturitní zkoušku, a to například z hlediska jiného stylu vyučování, tempa a přístupu učitelů, než na které mohli být žáci na základní škole zvyklí) nebo i v rámci všeobecných či odborných středních škol,
- *kvalitu prostředí*, ve kterém se žák pohybuje (hluk a atmosféra ve třídě),
- *sociální klima třídy* (strach žáků z neúspěchu či ze sociálních vztahů ve třídě),
- *pocit nudy* u žáka,
- *osobní a rodinné problémy*,
- *kolektiv ve třídě*,
- *sociální zázemí* žáka,
- *vztah mezi žákem a učitelem* (důležitá je důvěra mezi nimi),
- *úspěšnost* žáka v matematice (zde si myslím, že by učitel neměl šetřit chválou směřující k žákům, neboť pokud žák v hodině zažije pocit úspěchu – byť i malého, pozvedne jej to a nabudí pro jeho další práci),
- *motivace* žáka (motivačním faktorem, který přichází z vnějšku organismu žáka, není jeho vlastní potřeba – cílevědomost, ale vidina nějaké odměny, například získání dobré známky z matematiky).

<u>Uvedené vnější faktory rozděluji na:</u>

✓ *ovlivnitelné*

a

✓ *neovlivnitelné.*

Za ovlivnitelné vnější faktory považuji:

- **samostatnou práci žáka na čas** (navrhuji zde pomalejším žákům zařadit do samostatné práce například méně úloh, aby výsledek jejich práce nebyl ovlivněn časovým tlakem, nebo zařadit některé jednodušší úlohy),
- **tempo a styl práce učitele se žáky v hodině** při výkladu nové látky, zadávání úkolů, kontrole práce atd. (učitel by měl neustále sledovat, zda žáci tempo, které nastolí v úvodu a v průběhu hodiny, stíhají, a přizpůsobit žákům svůj styl práce),
- **kvalitu prostředí ve třídě** (aktuální atmosféra) a **sociální klima třídy**,
- **pocit nudy u žáka**,
- **vztah učitel – žák** (jedná se o důvěru mezi nimi: pokud je vztah pozitivní, žák pracuje v hodině rád, pokud je naopak vztah negativní, žák je v hodině nešťastný),
- **úspěšnost žáka v matematice** (radost z vykonané práce žáka, nechat jej častěji zažít pocit úspěchu)

  a
- **vnější motivaci žáka**.

Za neovlivnitelné vnější faktory považuji:

- **přestup žáka na jinou školu**,
- **osobní a rodinné problémy žáka**,
- **kolektiv žáků ve třídě**

  a
- **sociální zázemí žáka**.

2.2. Pojem chyba

V této kapitole se zamýšlím nad pojmem, který je ve společnosti nežádoucí, a proto se ho každý z nás snaží vyvarovat a předjít mu. Mám na mysli pojem „**chyba**“. Bylo by vhodné, kdyby k chybám vůbec nedocházelo, ale jak české přísloví praví: [9] „Chybami se člověk učí.“

Nalezení chyby ve vyučovacím procesu a její následná oprava pomáhá žákům jednak porozumět probírané látce, jednak přispívá k upevňování jejich získaných poznatků.

Pojmem chyba se zabývá M. Hejný (2004, str. 63). Dle něj „Chyba hraje v životě žáka důležitou, někdy dokonce osudovou roli. V naší škole je chyba často vnímána jako jev nežádoucí, jako něco, čeho je nutno se vystříhat, jako něco, čeho se bojí nejen žáci, ale i učitelé“.

Cílem jeho studie je zamyslet se nad chybou, které se dopustí žák či učitel, a nad chybou, které se dopustí učitel při vzájemné práci se třídou či jen se žákem. Tento 2. typ chyby Hejný nazývá „*didaktická chyba*“. Chybou, která vznikne mimo školu, se příliš nezabývá. Studie je zaměřena hlavně na učitele.

<u>Hejný zkoumá, jak se učitel:</u>

- staví k chybě žáka,
- staví ke své chybě,

dále jak dovede

- pomoci žákům překonat frustrující účinek chyby,
- pomoci sám sobě překonat frustrující účinek chyby,
- tlumit strach z chyby,
- využít chyby žáka k urychlení jeho rozvoje (kognitivního i osobnostního),
- naučit žáka poučit se z chyb (z vlastních či z cizích),
- naučit i sebe samého se poučit z chyb (opět z vlastních či z cizích)
- a vést žáky k tomu, aby byli schopni nejen ze svých chyb, ale i z chyb svých spolužáků vyvodit cenná ponaučení.

---

[9] http://chi.cz/prislovi/ceska-prislovi

Tento výčet schopností chápe jako „*učitelovu kompetenci*“ a nazývá ji „*práce učitele s chybou*“ (Hejný, 2004: str. 63). O práci učitele matematiky s chybou více v kapitole 2.4.

Hejný (2004) se dále zabývá výzkumem (na základě dotazníkového šetření u žáků a na základě kritického zamyšlení učitelů nad vlastní pedagogickou prací), ve kterém zjišťuje, jak svou chybu i jiné chyby žáci a učitelé vnímají.

U vzniklé chyby zkoumal 3 hladiny:

1. *jaké je chování žáka, který se dopustil chyby* (zde hledal příčiny, které k dané chybě vedly, snažil se odhadnout její následky – především, zda se žák z chyby poučil),
2. *jaké je chování dospělého, který na chybu žáka reaguje,*

   a
3. *jaký je dopad této reakce na další jednání žáka* (zda se s chutí opět pustí do práce, či upadne do stavu lhostejnosti, méněcennosti).

Výsledky z analýzy dotazníkového šetření u žáků (Hejný, 2004):

- **všichni žáci považují chybu za nežádoucí jev** (ani 1 žák v dotazníku neuvedl, že by chyba pro něj mohla být užitečná, což bylo pro autora výzkumu velké překvapení),
- **většina žáků je ochotna chybu učitele tolerovat** (především tehdy, pokud se učitel chybu nesnaží zastírat či podceňovat),
- **většina žáků se ke své chybě a k chybám svých spolužáků staví velice kriticky** a tolerují pouze chyby, které vznikly při probírání nové látky,
- **ne všem žákům záleží na získané známce**, kvůli které by se chyby obávali,
- zejména **dívky se obávají zesměšňování od svého učitele** (toto zesměšňování pro ně představuje největší možný trest, který jim může učitel udělit),

- **z některých odpovědí žáků vyšlo najevo, že až při tomto šetření měli poprvé možnost zamyslet se, jaký význam má vůbec chyba v našem životě**.

Z provedené analýzy dotazníků vyšly najevo některé očekávané odpovědi, ale i některé odpovědi, které očekávány nebyly. Pozitivní však bylo, že téma chyby žáky zaujalo.

<u>Výsledky z analýzy pedagogických chyb (Hejný, 2004):</u>

- **nedostatečná komunikace se žákem** (v hodině většinou mluví pouze učitel, například: „Jsem upovídaná. Odpovídám za žáka. Skáči žákovi do řeči. Jsem netrpělivá, když žák nešikovně rýsuje na tabuli; raději rýsuji sama. Příliš rychle vykládám (instruuji).“ aj.),

  (Hejný, 2004: str. 79)
- **odsouvání slabých žáků** (například: „Nemám dost trpělivosti se slabými žáky. Rychlost výkladu určuji podle dobrých žáků. Pozdě eviduji, že slabí žáci nechápou, a pak opakovaně vysvětluji. Zapomínám pracovat se slabými žáky. Nevěnuji se vůbec slabým žákům.“ aj.),

  (Hejný, 2004: str. 79)
- **upřednostňování slabých žáků** (například: „Více času věnuji slabým žákům; rozptyluji se opakovaným instruováním slabých žáků. Mám výčitky svědomí, že nechám slabé žáky projít.“ aj.),

  (Hejný, 2004: str. 79)
- **kontrola a hodnocení práce žáků** (například: „Zadávám příliš rozsáhlé domácí úkoly. Při kontrole domácích úkolů se nedívám, co žák napsal. Nedůsledná kontrola žáků. Vím, že žáky nehodnotím v souladu se svým svědomím.“ aj.).

  (Hejný, 2004: str. 79)

Z provedené analýzy pedagogických chyb vyšlo najevo, že si učitelé „své pedagogické chyby uvědomují, a přesto se jich dopouštějí“ (Hejný, 2004: str. 79).

Důvody jsou následující (Hejný, 2004):

- **učitel je zaměřen na matematiku, nikoli na žáka**,
- **tradice** (učitel se při své práci řídí vzory, které on sám poznal v roli žáka, než podle pouček, které mu byly předkládány při studiu na pedagogické fakultě),
- **tlaky, které na učitele působí z vnějšku** (například osnovy).

Chybu Hejný (2004) popisuje také jako „kulturně-společenskou hodnotu“, kterou rozebírá na základě tzv. 4 hodnotových proudů:

- starozákonní proud,
- novozákonní proud,
- židovský proud

  a

- antický proud.

Ve starozákonním proudu popisuje 2 typy chyb:

- chybu, která se týká lidské pospolitosti,

  a

- chybu, která se týká božích příkazů, zákazů a nařízení.

„Chyba, jíž se člověk dopustí v této oblasti, není vnímána jako omyl, ale jako závažný přestupek, jako hřích.“

(Hejný, 2004: str. 66)

A trest za tento hřích bere člověku veškerou energii.

Novozákonní proud osudovost hříchu tlumí a hříšníkovi dává naději v odpuštění, která mu dodává potřebnou energii. „Nový zákon žádá vzájemné tolerování chyby.“

Další hodnotový proud, tj. židovský proud „Vnímá chybu (nikoli hřích) jako přirozenou součást života. Chyba nebo neúspěch je zde dodavatel a ne spotřebitel lidské energie.“

Poslední proud, tj. antický proud „Vnímá chybu člověka jako součást lidského bytí.“

2.3. Klasifikace chyb

Cílem této kapitoly je uvést klasifikaci chyb žáků v matematice, a to nejen při práci s algebraickými výrazy.

S chybami se většina z nás denně setkává na různých místech, nejen v prostředí školy. Víme, že z každé chyby v našem životě se většinou poučíme, a proto se snažíme v budoucnu chyby vyvarovat, abychom předešli případnému nezdaru. Při hledání příčiny nezdaru je vždy důležité hledat „místo“, ve kterém k chybě došlo, a poté zjistit, co bylo její příčinou.

Chyba nemusí být vždy pouze důsledkem neznalosti, nejistoty či náhody. „Může být také důsledkem nějaké předchozí znalosti, která byla správná v podmínkách, za nichž ji žák původně používal, ale v nových podmínkách se může ukázat jako nesprávná nebo nevhodná.“

(Novotná, 2014: str. 23)

Učitelé nejen základních, ale i středních škol se s takovými případy chyb často opětovně setkávají. „Například při přechodu od uspořádání přirozených čísel podle velikosti k uspořádání celých čísel žáci zapíší $-2 < -3$ a odůvodňují to tím, že přeci $2 < 3$.“

(Novotná, 2014: str. 23)

„Chybující žák signalizuje, že informaci dobře nepochopil nebo si ji nepřesně zapamatoval.“

(Hejný & Kuřina, 2001: str. 149)

Astolfi (1997) popisuje problematiku chyb takto:

„**Učit se, to znamená riskovat, že se zmýlíme. Když na tento fakt škola pozapomene, lidová moudrost ho ráda připomene rčením, že pouze ten, kdo nic nedělá, nikdy nepáchá chyby.**“

(Astolfi, 1997: str. 7)

2.3.1. Typy chyb a jejich třídění

V hodinách matematiky se u žáků mohou objevit různé typy chyb.

Rozlišujeme 2 základní typy chyb (Novotná, 2014):

1. **Jednorázové chyby**

   = chyby, které nejsou závažné a není třeba jim věnovat mimořádnou pozornost.
2. **Opakující se chyby**

   = chyby, které se pravidelně opakují v odpovědích na určité otázky.

- Příklad: vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu, tj. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - b^2$ nebo $0 \cdot a = a$, $\sqrt{a^2} = a$, $(0{,}2)^2 = 0{,}4$, $-2^2 = 4$, $-1-2=3$ aj.,
- zde je třeba hledat nejen příčinu vzniku těchto chyb, ale i možný způsob, jak je odstranit.

Třídění chyb:

- **Podle Astolfiho** (Novotná, 2014)

  Astolfi (2006) rozděluje chyby do skupin podle způsobu jejich vzniku a zaměřuje se na:
  - *příčiny chyb učitele a žáka*,
  - *příčiny chování učitele a žáka*.

  Mezi hlavní příčiny chyb u učitele a žáka dle Astolfiho patří:
  - ✓ „porozumění (nebo spíše neporozumění) zadání;
  - ✓ školní návyky (zvyky);
  - ✓ žákovy představy (obecně přetrvávající představy);
  - ✓ rozdíly v logickém uvažování učitelů a žáků;
  - ✓ neočekávané způsoby řešení ze strany žáků;
  - ✓ zahlcení,‚stav přetížení‘;
  - ✓ problém transferu, příčina v jiné oblasti, disciplíně;
  - ✓ příliš složitý obsah.“

(Novotná, 2014: str. 18)

- **Podle Hejného a Kuřiny**

  Hejný a Kuřina (2001) k problematice chyb přistupují jiným způsobem.

  Chyby rozdělují do 2 základních skupin:

  - **chyby, které vycházejí z formální znalosti žáka**

    = chyby, jejichž základem jsou znalosti, které se žák naučil nazpaměť a příliš jim nerozumí,

  - **ostatní chyby**

    = chyby, jejichž příčinou není chybné myšlení žáka, ale něco jiného,

    – autoři je řadí mezi tzv. „**zdánlivé chyby**".

    – Zařazují mezi ně následující typy chyb, ke kterým uvádějí i ukázky:

    ✓ *Interpretační nesoulad* (žák danou úlohu, pojem, problém či situaci chápe zcela odlišným způsobem než jeho vyučující).

      Ukázka: „Například slovo ‚lichoběžník' chápe jako mnohoúhelník s lichým počtem stran."

    ✓ *Neukončený vývoj* (žák dané problematice rozumí jen částečně, ale správně).

      Ukázka: „Například jedno šestileté dítě nám místo ‚sto třicet šest' řeklo: ‚Je to šest a třicet a ještě sto.'."

    ✓ *Chyba vzniklá při komunikaci* (žák správně uvažuje, ale neví, jak má vysvětlit či zapsat své řešení; jeho úvaha je správná a dané úloze rozumí, ale jeho zápis výsledku správného uvažování může být chybný).

      Ukázka: „Například rovnici $4x+8=36$ řeší žák 7. třídy řetězcem tří rovností: $x=36-8=28:4=7$.

      První dvě z těchto rovností jsou nepravdivé, ale přesto je postup řešení žáka korektní a výsledek je správný.

Je pouze nekorektně zapsán."

(Hejný & Kuřina, 2001: str. 152)

- **Podle Brousseaua** (Novotná, 2014)

  Z jiného pohledu klasifikuje chyby Brousseau (2001), a to podle několika kritérií:

  - **Podle didaktické reakce na žákovu chybu**

    – „Žák udělal chybu, ale nemůže to vědět, protože mu buď chybí potřebná znalost, nebo mu situace neumožňuje vidět důsledky jeho rozhodnutí."

    – „Učitel může žákovo rozhodnutí kritizovat, odmítnout, položit otázku, něco navrhnout, vznést námitku, upozornit na chybu, prokázat, že došlo k chybě, atd. On také ručí za správnost dobré odpovědi, ať už svou autoritou, vysvětlením apod., a také navrhuje prostředky k odstranění chyby."

    (Novotná, 2014: str. 20)

    K popisu zdroje chyby může učitel používat různé prostředky, například: „nedával jsi pozor", „ty ses to nenaučil", „nedostatečně jsem to vysvětlil", „příště si dávej pozor" apod.).

  - **Podle možností jejího dalšího didaktického využití**

    – chyba je:

    - *častá a rozšířená mezi velkou skupinou žáků*

      – „má velký dopad na průběh výuky a je možné ji vhodně využít při výuce",

      (Novotná, 2014: str. 20)

    - *specifická*

      – má malý dopad na průběh výuky

      nebo je

    - *někde mezi* těmito 2 krajními možnostmi.

Pokud učitel vidí, že ve výuce některý z žáků udělal chybu, která se vyskytuje jen zřídka a ani úzce nesouvisí s probíranou látkou, ve výuce ji nevyužije (neboť tato chyba není pro ostatní žáky zvlášť přínosná, navíc by je zdržovala od práce).

- **Podle počtu subjektů, kterých se týká**

– chyby žáků mohou být:

- *společné pro větší skupinu žáků*

  nebo

- *týkající se pouze jedince,*

- *specifické pro probíranou otázku(y)*

  nebo

- *nespecifické pro probíranou otázku(y),*

- *systematické*

  nebo

- *ojedinělé,*

- *u jedince přetrvávající*

  nebo

- *u jedince nestálé.*

Těmito rozdíly u chyb jsou rozhodnutí učitele značně ovlivněna, neboť s reakcí na chybu se učitel obrací buď **na celou třídu**, nebo jen **na okruh těch, u kterých se chyba objevila**. V obou případech se obrací na žáky buď *veřejně*, nebo pouze omezeně promluvou k jednotlivci.

- **Podle toho, jaké matematické činnosti se chyba týká**

– chyba žáka může být:

- ✓ *specifická chyba pro daný úkol,*
- ✓ *technická chyba*

– například při použití nějaké operace nebo při jejím provedení,

- ✓ *chyba v použití prostředků*,
- ✓ *chyba použité teorie*

– většinou je vyvolána samotným učitelem

– „Žák se např. rozhodne řešit úlohu postupem, který neodpovídá tomu, který vyžaduje učitel. I když žákův postup může být správný, v interakci s učitelovým požadavkem může dojít k tomu, že žák udělá chybu.“

(Novotná, 2014: str. 21)

2.3.2. Typy chyb při práci s algebraickými výrazy

Nyní se budu zabývat příklady typů chyb, které se mohou objevit přímo při práci s algebraickými výrazy. Příklady chyb jsem objevila při hledání materiálů pro svou práci v diplomové práci V. Bílka (2014), který tyto chyby třídí do 7 různých skupin.

<u>Klasifikace chyb při úpravách algebraických výrazů (Bílek, 2014):</u>

- ✓ **Numerické chyby**

Jejich příčinou je „nedostatečná automatizace nižších úkonů, žák je soustředěn na vyšší, pro něj složitější úkon; na nižší úkon je vyhrazena jenom malá část jeho soustředění, a jelikož tento úkon ještě není plně automatizován, vznikne chyba“.

(Bílek, 2014: str. 54)

<u>Příklady numerické chyby:</u> $2a-3b+5a-b=7a-\mathbf{5}b$

numerická chyba

nebo

žák nezná násobilku, vynásobí $5\cdot 6=\mathbf{36}$ ← numerická chyba

nebo

se žák soustředí, aby správně umocnil výraz podle vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu, tj. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, ale při výpočtu prostředního členu, tj. členu $-2ab$ do vzorce dosadí $-2 \cdot a \cdot \mathbf{(-b)}$, tedy druhý člen i se znaménkem, které je již ve vzorci zahrnuto, aj.

Ze svých hodin matematiky vím, že numerické chyby se většinou dopouštějí ti žáci, kteří se na svou práci plně nesoustředí. Může se jednat o žáky se špatným zdravotním stavem (v případě nemoci či únavy) nebo i o žáky, kteří pracují pod časovým tlakem a nebo v hlučném prostředí.

Bílek (2014) ve své diplomové práci uvádí, že numerické chyby jsou jednou podskupinou chyb z nepozornosti.

- ✓ **Úkonové chyby**

Příčin existuje mnoho. „Nejčastější příčinou úkonových chyb je selhání paměťového záznamu."

(Bílek, 2014: str. 54)

Pokud je záznam v paměti žáka uchován pouze *v podobě formálního poznatku*, který žák získal transmisí z libovolného zdroje, je tento poznatek pouze povrchní a neopírá se o žákovy předchozí zkušenosti (představy) a většinou se z žákovy paměti časem vytratí. Bílek (2014) uvádí, že s odstupem času může začít tento formální poznatek degenerovat.

Poznatek v paměti žáka nemusí být uchován pouze v podobě formálního poznatku, ale i v podobě izolovaného modelu. Izolované modely jsou „reprezentanty obecného pojmu (např. izolovanými modely čísla 3 jsou 3 jablka, 3 knoflíky, …)".

(Ulrychová, 2010: str. 14)

Autorem pojmu „izolovaný model" je Milan Hejný. Tímto pojmem[10] se zabývá ve své teorii pro zkvalitnění vyučovacího procesu, tj. v Teorii generických modelů.

[10] http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_generick%C3%BDch_model%C5%AF

Milan Hejný v této teorii vychází z poznatků svého otce Víta Hejného a ze své vlastní zkušenosti.

Vztahem izolovaných a generických modelů a schématu se zabývá dále Stehlík (2010). Ve své práci nazývá generické modely „opěrnými sloupy schématu“ a izolované modely dle něj „vystupují jako informace, shlukují se do celků a jsou základem pro vznik schématu“.

Z tohoto plyne, že pokud je záznam v paměti žáka uchován *v podobě izolovaných modelů* (neboli dosud oddělených modelů), má uchovaný poznatek v paměti žáka trvalejší hodnotu a je abstraktní.

Bílek (2014) uvádí 2 následující poznatky:

1. Poznatek, který vznikl jako generický model konstruovaný pomocí izolovaných modelů, by měl úkonovým chybám více předcházet, než poznatek formální.
2. Trvalost poznatku uchovaného v podobě izolovaného modelu značně závisí na emocích žáka, které při svém objevování prožívá.

Příklady úkonové chyby:

Při odčítání mnohočlenů $(2a-3b)-(5a-b)$ žák správně odstraní závorky, ale chybně zapíše znaménko u proměnné *b*, tzn. $2a-3b-5a\boldsymbol{-}b$

úkonová chyba

nebo

žák není schopen vybavit si vzorec pro třetí mocninu dvojčlenu, tj. $(a+b)^3 = a^3+3\boldsymbol{ab}+3ab^2+b^3$

úkonová chyba

nebo

žák má určit absolutní člen mnohočlenu $3x^3-2x^2+x-1$, on si však nemůže vzpomenout, který člen je absolutní aj.

Mám vyzkoušeno, že úkonové chyby se dopouštějí většinou žáci, kterým nejde o to, aby se v matematice něčemu naučili, poznali něco nového, ale jen o to, aby daným ročníkem prošli a nepropadli. Proto volí co nejsnazší cestu (dle mě zcela nesprávnou) a učí se matematiku nazpaměť. S tímto přístupem jsem se doposud setkala pouze u dívek.

- ✓ **Grafické chyby**

„Jedná se o chyby způsobené nekvalitním matematickým zápisem.“

(Bílek, 2015: str. 57)

Grafické chyby se nemusí vždy dopustit jen žáci se stanovenou specifickou poruchou učení (s poruchou grafického projevu – s dysgrafií, a s poruchou čtení – s dyslexií), ale i běžní žáci. Běžnými žáky zde myslím ty, kterým příliš nezáleží na tom, jak si svůj postup výpočtu úlohy zapíší, ale záleží jim pouze na hledaném výsledku. Dále mám na mysli pomalejší žáky. Ti při své práci pracují pod časovým tlakem, který jim zápis postupu úlohy z hlediska úpravy značně ztíží.

Dle Bílka (2014) by měl učitel zdůrazňovat (od samého počátku) důležitost kvality matematického zápisu žáka. Jako důvod uvádí, že žákovy výsledky se mohou značně zhoršit špatnou grafickou úpravou, i když jeho znalosti mohou být kvalitní.

Příklady grafické chyby:

Místo dané hodnoty 96 se žákovi při řešení úlohy náhle objeví hodnota 9**0**,

↑

grafická chyba

dojde tedy kvůli nečitelnosti k záměně čísel 6 za 0, zbylý postup výpočtu je poté chybný

nebo

místo $\sqrt{4+9}$ žák při přepisu získá $\sqrt{4}$ **+ 9** nebo naopak, aj.

↑ grafická chyba

Z vlastní zkušenosti vím, že grafická chyba vůbec nesouvisí s inteligencí žáka, ale s jeho důsledným přístupem k vykonávané práci.

- **Chyby velkých skoků**

Chyby velkých skoků se dopustí žák, pokud se „snaží udělat více početních úkonů najednou v jednom kroku“.

(Bílek, 2014: str. 58)

Zvolený postup žáka mezi jednotlivými kroky výpočtu však postrádá matematický zápis. Protože se žák snaží úlohu vyřešit zpaměti, může udělat v zápise následujícího kroku chybu.

<u>Příklad chyby velkých skoků:</u>

Při výpočtu výrazu $\left(\frac{x}{2}-4\right)^3$ žák zapíše jeho výsledek, aniž by si rozepsal jednotlivé kroky výpočtu (chybu udělá při výpočtu 2. a 3. členu daného výrazu, tj. při výpočtu členu $-3a^2b$ a členu $3ab^2$ ze vzorce pro 3. mocninu dvojčlenu, tj. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$), aj.

Všimla jsem si, že této chyby se dopouštějí například žáci, kteří se chtějí „vytáhnout“ před svými spolužáky, nebo pomalejší žáci, které při práci „tlačí“ čas a chtějí stihnout vypracovat všechny zadané úkoly.

- **Strategické chyby**

Strategické chyby se dopustí žák, který „se při řešení úlohy nedívá vpřed, nemyslí na následující dva či tři kroky a cestu, kterou by se měl při řešení ubírat. Soustředí se na úkon, který zvládá a může ihned udělat. Tím se ale může dostat do slepé uličky.“

(Bílek, 2014: str. 59)

Pokud žák udělá strategickou chybu, chybí mu nejen potřebný vhled do dané problematiky, ale i potřebná zkušenost pro další postup práce.

<u>Příklad strategické chyby:</u>

Výraz $\frac{3a}{(a+b)^2}+\frac{3a}{a+b}$ žák upraví následovně: $\underbrace{\frac{3a}{a^2+2ab+b^2}}_{\text{strategická chyba}}+\frac{3a}{a+b}$, provede úkon, který zná, ale dále neví, jak postupovat, dostal se nyní do tzv. výše uvedené „slepé uličky“.

Nebo například žák součin výrazů upraví následujícím způsobem: $\frac{2}{3x^2 - x} \cdot \frac{3x-1}{x^2} = \frac{6x-2}{3x^4 - x^3}$ aj.

Z vlastní zkušenosti vím, že této chyby se žáci dopouštějí velmi často. Denně se setkávám s žáky, jejichž celá práce ztroskotá na volbě vhodné strategie řešení.

✓ **Bezradnosti a bloudění**

„Žákovi se může stát, že v jistém kroku najednou neví, jak pokračovat.“

(Bílek, 2014: str. 59)

K této situaci může dojít, pokud žák pro zadanou úlohu například zvolí nevhodnou strategii řešení nebo nezná potřebný matematický úkon, za pomoci kterého by mohl v řešení úlohy dále pokračovat. „Žák je bezradný a úlohu nedokončí.“

(Bílek, 2014: str. 59)

Bílek (2014) ve své práci uvádí ještě další příklad této chyby. Při řešení úlohy se žák může dostat po několika krocích zpět do bodu, ve kterém se již dříve nacházel (viz ukázka příkladu bezradnosti a bloudění). Tento bod při své práci v hodině nazývám „bludný kruh“.

Příklad bezradnosti a bloudění:

Výraz $\frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{(x-y)^2}$ žák upraví takto:

$\frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{(x-y)\cdot(x-2y)}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{(x-y)^2}$ a tím se dostane zpět na začátek úlohy.

bezradnost a bloudění

Žák se zde nedopustil chyby „v tom pravém slova smyslu“.

(Bílek, 2014: str. 59)

Z vlastní praxe vím, že zde žák postrádá především potřebný vhled do dané problematiky a nemá zkušenosti s touto problematikou.

✓ **Jiné chyby**

Do jiného typu chyb patří všechny ostatní chyby, které se u žáků mohou objevit, ale nelze je zařadit do předcházejícího výčtu chyb. „Jedním typem může být například chybný zápis dobře myšleného postupu.“

(Bílek, 2014: str. 59)

<u>Příklady jiných chyb podle mé zkušenosti mohou být následující chyby:</u>

- žák chybně opíše zadání úlohy (například při otáčení listů své práce),
- žák ztrácí čas nepotřebnými výpočty (například pokud řádně nečte zadání úlohy),
- žák chybně pracuje s kalkulačkou

a

- žák svou odpověď tipne, aniž by se snažil o výpočet (například v případě zadání úlohy s uzavřenými otázkami), aj.

S těmito chybami se nejčastěji setkávám ve své praxi, proto jsem zde jejich klasifikaci podrobně rozepsala.

V experimentální části práce využiji klasifikaci pro analýzu vzniklých chyb žáků v jejich samostatné písemné práci, kterou jsem vytvořila pro svůj vlastní experiment na střední odborné škole.

2.4. Postup práce učitele s chybou žáka

Chyba je nedílnou součástí procesu učení, a tudíž i v hodině matematiky s ní učitel musí počítat. Měl by ji aktivně využít pro svou další práci v hodině, zejména pak při rozvíjení osobnosti žáka.

Žák může, ale také nemusí chybu odhalit. A proto je součástí práce učitele s chybou žáka chvála ve chvíli, kdy si žák svou chybu uvědomí a dokáže sám opravit chybný krok. Tato chvála může totiž žáka kladně motivovat při další práci. Pokud si však žák svou chybu neuvědomuje, nebo pokud se mu nedaří chybu odhalit, musí učitel zasáhnout, žáka na chybu upozornit nebo mu ji ukázat. Tím posune jeho práci k dalšímu kroku.

„Analýza chyby je jednou z nejdůležitějších fází procesu učení. Samotné objevení chyby, její interpretace a korekce mohou být velice přínosné nejen pro žáka, ale i pro další pedagogickou činnost učitele.“

(Novotná, 2014: str. 30)

Učiteli může chyba žáka mnoho odhalit, neboť to není pouze informace o jeho chybném výkonu, ale i ukazatel způsobu jeho myšlení a kvality jeho představ (Novotná, 2014).

Mezi podmínky informační funkce chyby v učení, jak ukazuje následující schéma, patří:

- ✓ identifikace chyby,
- ✓ interpretace chyby

    a

- ✓ následná oprava.

[podnět úkol] → [proces řešení] → [odpověď řešení] → [identifikace výsledku] →

→ [interpretace výsledku] → [korekce činnosti]

(Kulič, 1971: str. 100)

Učitel musí tedy umět chybu žáka nejprve identifikovat. Identifikaci chyby lze rozdělit do 2 následujících základních fází, které mohou probíhat i souběžně (Kulič, 1971):

- ✓ *detekce chyby* (na chybu může žák přijít sám, pokud mu nevyjde zkouška správnosti, nebo na ni může učitel žáka upozornit)

  a

- ✓ *vlastní identifikace chyby* (oproti detekci chyby je tato fáze náročnější, neboť pokud učitel sdělí k dané úloze žákovi pouze správný výsledek, neznamená to, že žák svou chybu identifikoval; nebo také může nastat situace, že žák dojde sice ke správnému výsledku, ale špatným postupem, v takovém případě nemusí být opět chyba vždy identifikována a Kulič ji nazývá „skrytá chyba").

Po správné identifikaci chyby musí učitel chybu dále interpretovat (hledat příčiny chyby, zda chyba vznikla z důvodu absence nějaké znalosti žáka či chybné výukové strategie učitele) a následně chybu opravit. Interpretaci chyby Kulič (1971) nazývá „interpretací chybného výkonu".

Opravu chyby nazývá Kulič (1971) „korekce chybného výkonu" a uvádí možnosti, jak může učitel při opravě vzniklé chyby postupovat:

- ✓ pomoci žákovi s řešením úlohy,
- ✓ sdělit žákovi správnou odpověď,
- ✓ požadovat po žákovi, aby se k úloze vrátil a znovu ji vyřešil,
- ✓ přeformulovat zadání celé úlohy nebo pouze její dílčí část,
- ✓ rozčlenit žákovi úlohu na dílčí úkoly (pro něj méně obtížné),
- ✓ pomoci žákovi identifikovat a interpretovat chybu aj.

O dalším způsobu práce učitele s chybou hovoří Hejný (2004: str. 63), který vymezuje zkoumání chyby za pomoci 2 cílů:

„1. Popsat různé přístupy učitele k chybě žáka i své vlastní a najít kořeny těchto přístupů v historických souvislostech.

2. Hledat cesty, jimiž může učitel změnou vnímání chyby a následnou změnou své edukační strategie zvýšit efektivitu své práce (na hodinách matematiky)."

Hejný (2004: str. 72) hovoří o práci s chybou u zdatného žáka v matematice. Uvádí, že takovému žákovi stačí „dát jinou úlohu, v níž by stejný postup vedl k dobře viditelné chybě, a pak jej nechat, aby sám objevil chybu v původním řešení".

Ve své praxi jsem získala stejnou zkušenost, tento postup se mi již několikrát osvědčil. Může ale nastat situace, kdy tento postup práce stačit nebude.

U mě doposud tato situace nenastala, ale Hejný (2004: str. 72) hovoří o tom, že učitel může žákovi poskytnout odstupňovanou pomoc (samozřejmě s přihlédnutím ke schopnostem žáka):

„1. Projevením nejistoty upozorňuje učitel žáka na přítomnost chyby.

2. Když žák již o přítomnosti chyby ví, ale nedovede zjistit její lokalitu, může mu učitel naznačit, kde se asi chyba nachází, nebo jej na ni přímo upozornit.

3. Když žák ví, ve kterém kroku udělal chybu, ale přesto ji nevidí, může mu učitel dát návaznou úlohu, která mu poradí.

4. Jestliže žák chybu nedokáže odstranit, pak je potíž v neznalosti, které leží v nižší úrovni poznání, a je třeba tuto situaci diagnostikovat a až pak přistoupit k reedukaci.

5. Opravou chyby učitelova práce nekončí. Naopak, teď přichází to hlavní: vést žáka k určení příčiny chyby.

6. Žák, který dobře popíše, jak k chybě došlo, již vlastně říká i to, jak se chyby v budoucnu vyvarovat."

Kulič (1971) se na chybný výkon žáka v učení a na následné řešení problémů dívá následujícím způsobem:

„**Rozpornost názorů na místo a funkce chybného výkonu v učení a řešení problémů je zřejmě podmíněna nejen neúplností psychologického poznání, ale především velikou složitostí a mnohotvárností studovaného jevu, na jehož průběhu i výsledku se podílí množství fyziologických, psychologických a sociálních faktorů i různorodých typů vnějších podmínek a učebních i úkolových situací.**"

(Kulič, 1971: str. 51)

2.5. Potřebné pojmy z oblasti algebraických výrazů

V diplomové práci jsem se zaměřila na oblast algebraických výrazů na střední škole. Tomu jsem přizpůsobila výběr zdrojů, ze kterých jsem čerpala přehled definic uvedených v této části.

Seznam vybraných knih a zdrojů:

- ✓ **Matematika pro gymnázia** (základní poznatky z matematiky) – Bušek, Boček & Calda (1992)
- ✓ **Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť** (1. část) – Calda, Petránek & Řepová (1984)
- ✓ **Přehled středoškolské matematiky** – Polák (2008)
- ✓ **Odmaturuj! z matematiky 1** – Čermák & Červinková (2004)
- ✓ **Přehled učiva k maturitní zkoušce z matematiky** – Halouzka (2002)
- ✓ **Matematika pro střední školy (**2. díl): Výrazy, rovnice a nerovnice – – Cizlerová, Krupka, Polický & Škaroupková (2013)
- ✓ **Webová aplikace pro výuku základních poznatků z matematiky na střední škole** (Bakalářská práce) – Pavlicová (2010)
- ✓ **Výuka matematiky** (skripta)[11] – Martišek

---

[11] http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka.htm

2.5.1. Algebraický výraz

Pro definici algebraického výrazu nejprve definuji 2 potřebné pojmy, tj. proměnnou a konstantu.

Pojem **proměnná** označuje „libovolné písmeno, které zastupuje čísla z určitého oboru. Tento obor nazýváme **obor proměnné**“.

(Pavlicová, 2010)

Pokud obor proměnné není zřejmý z textu úlohy či není ani uveden, považujeme za něj „množinu všech reálných čísel takových, pro něž má smysl za proměnné dosazovat“.

(Calda, Petránek & Řepová, 1984: str. 64)

Za proměnné má smysl dosazovat tehdy, pokud[12] „nedochází například k dělení nulou, odmocňování záporného čísla v reálném výrazu apod.“ Jinak řečeno: „nedochází k jakékoli nepřípustné operaci“.

Pojem **konstanta** označuje nejen v matematice[13], ale i ve fyzice a dalších přírodních a technických vědách nějaké pevně dané číslo (nebo neměnnou veličinu), jehož hodnota nemusí být vždy známá. Konstanty tedy nemění svou hodnotu (hodnota je stále stejná, tj. konstantní). Je zřejmé, že *konstanta je opakem proměnné*.

Ve své praxi na střední odborné škole definuji **algebraický výraz** následovně:

Algebraický výraz s proměnnou je takový výraz, ve kterém se kromě konstant, závorek a algebraických operací vyskytuje alespoň jedna proměnná.

Například ve výrazu $3x+4y-2$ jsou 2 proměnné označené písmeny *x*, *y*, které náleží do určitého oboru proměnných, poté 3 konstanty (čísla 3, 4, −2), a 3 algebraické operace (násobení, sčítání a odčítání).

[12] http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka\Prij\skripta3.pdf

[13] http://cs.wikipedia.org/wiki/Konstanta

Pro označení algebraický výraz s proměnnou používáme většinou jen označení „algebraický výraz“.

Příkladem zápisu, který naopak výrazem není, je například zápis typu (10−)2 . Na první pohled je zřejmé, proč tomu tak je.

V odborné literatuře nebo na webu (ve webových aplikacích či ve skriptech pro výuku matematiky) lze dále nalézt různé definice algebraického výrazu ze středoškolské matematiky.

Autoři vybraných knih a zdrojů algebraický výraz definují následovně:

„**Algebraický výraz je výraz** (zápis) **skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, popř. obsahuje též závorky, které určují pořadí provádění naznačených operací**.“

(Polák, 2008: str. 120)

„**Algebraický výraz je každý matematický zápis, který je tvořen z konstant a z proměnných, mezi nimiž jsou pomocí algebraických operací** (tj. sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocnění, odmocnění) **a závorek vytvořeny smysluplné vztahy**.“

(Pavlicová, 2010)

Algebraickým výrazem[14] „**rozumíme zápis, ve kterém se vyskytují konstanty**, které nemění svou hodnotu a které jsou vyjádřeny čísly, **dále proměnné a operace sečítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování prováděné s konstantami a proměnnými**“.

(Martišek)

„**Výraz je smysluplný zápis matematických symbolů vyjadřujících početní operace a pořadí, v němž mají být tyto operace provedeny**.“

(Cizlerová, Krupka, Polický & Škaroupková, 2013: str. 6)

[14] http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka\Prij\skripta3.pdf

Cizlerová, Krupka, Polický & Škaroupková (2013) člení výrazy následovně:

výrazy
- *číselné výrazy*
- *algebraické výrazy*
  - *mnohočleny*
  - *racionální lomené výrazy*
  - *iracionální výrazy*
- *nealgebraické výrazy*

Autoři Čermák & Červinková (2004) nejprve definují početní výraz, až poté výraz algebraický, který člení odlišným způsobem než autoři Cizlerová, Krupka, Polický & Škaroupková (2013).

„**Početní výrazy jsou výrazy, jimiž vyjadřujeme početní operace s čísly s určením pořadí, ve kterém mají být provedeny** (jako výrazový prostředek slouží různé typy závorek).“ „**Algebraické výrazy jsou výrazy skládající se z čísel a písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací, příp. závorkami**.“

(Čermák & Červinková, 2004: str. 32)

Algebraické výrazy člení na *racionální algebraické výrazy* = výrazy, které neobsahují odmocniny proměnných, a *iracionální algebraické výrazy* = výrazy, které obsahují odmocniny proměnných.

Číselný výraz ve své praxi definuji následovně:

Číselný výraz je takový výraz, ve kterém se vyskytují pouze čísla a algebraické operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování). Jako příklad číselného výrazu uvádím $10^3 - 5 \cdot 25 + 99$.

V uvedené odborné literatuře jsem definici číselného výrazu našla pouze v učebnici: Matematika pro střední školy (2. díl): Výrazy, rovnice a nerovnice.

„**Číselným výrazem rozumíme smysluplný zápis, ve kterém se vyskytují čísla, znaky početních operací (včetně zlomků, mocnin a odmocnin) a závorky**.“

(Cizlerová, Krupka, Polický & Škaroupková, 2013: str. 6)

2.5.2. Definiční obor

„Kromě oboru proměnné existuje i **definiční obor proměnné**. Do definičního oboru proměnné patří pouze taková čísla, pro která má daný výraz smysl.“

(Pavlicová, 2010)

Z předchozí kapitoly již víme, že nesmí vzniknout jakákoli „nepřípustná operace“, aby měl daný výraz smysl. Někdy také říkáme: „Výraz je definován pro …“ místo „má smysl pro …“. Definiční obor obvykle označujeme *D*(*f*).

Pokud má daný výraz smysl, můžeme určit jeho konkrétní hodnotu proměnné.

„**Hodnotou výrazu** pro dané hodnoty proměnných rozumíme výsledek získaný po dosazení daných hodnot z definičního oboru za všechny proměnné a provedení veškerých operací.“

(Pavlicová, 2010)

2.5.3. Mnohočlen

Mnohočlen je speciálním případem algebraického výrazu. Někdy jej také označujeme jako **POLYNOM**. Podle toho, kolik proměnných mnohočlen obsahuje, rozlišujeme dva typy – *mnohočlen s jednou proměnnou* a *mnohočlen s více proměnnými*.

„Mnohočlen *n*-tého stupně o proměnné *x* je výraz

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0},$$

kde *x* je proměnná, a_k jsou konstanty, *n* je celé nezáporné číslo a $a_n \neq 0$. Číslo *n* udává stupeň mnohočlenu.“

(Calda, Petránek & Řepová, 1984: str. 66)

Mnohočlen v definici je uspořádán sestupně, tj. podle klesajících mocnin proměnné *x*. V případě vzestupného uspořádání, tj. podle rostoucích mocnin proměnné *x*, jej zapíšeme ve tvaru $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.

Výrazy[15] $a_k x^k$ nazýváme **členy mnohočlenu**. Platí zde $0 \le k \le n$ a $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ nazýváme **koeficienty mnohočlenu**, které patří do množiny reálných čísel. Koeficientu a_0 říkáme <u>absolutní člen</u> mnohočlenu, členu $a_1 x$ <u>lineární člen</u> mnohočlenu a členu $a_2 x^2$ <u>kvadratický člen</u> mnohočlenu.

Mnohočlen 1. stupně nazýváme <u>lineární mnohočlen</u>, mnohočlen 2. stupně <u>kvadratický mnohočlen</u> a mnohočlen 3. stupně <u>kubický mnohočlen</u> atd.

„Podle počtu nenulových členů mnohočlenu mluvíme o *jednočlenu* ($3x^2$), *dvojčlenu* ($2x-2$), *trojčlenu* (například $3x^5 - 4x^2 - \frac{5}{3}$) apod. Mnohočleny mohou obsahovat i více proměnných, např. $3x^2 y - 2xy^2 - xy + 5x - 3$, $6x^2 y^2 - 5xy^2 z^3 + 5xy - 3x + 3z + 2$, kde *x*, *y*, *z* jsou proměnné.“

(Calda, Petránek & Řepová, 1984: str. 66)

Pro operaci „odčítání mnohočlenů“, kterou definuji v kapitole 2.5.4., uvedu ještě další pojem, tzv. **opačný mnohočlen.**

„Opačný mnohočlen k danému mnohočlenu je mnohočlen, který má tytéž členy, ale s opačnými znaménky; například dvojčlen $x-2$ je opačný k dvojčlenu $-x+2$, trojčlen $-3x^2 + 2x - 1$ je opačný k trojčlenu $3x^2 - 2x + 1$ apod.“

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 85)

[15] Bušek, I; Boček, L. & Calda, E. (1992). *Základní poznatky z matematiky (matematika pro gymnázia).* Praha: Prometheus

2.5.4. Početní operace s mnohočleny

V této části práce se budu věnovat operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení mnohočlenů.

Součet mnohočlenů určíme tak, že „sečteme všechny členy obou mnohočlenů; takto vzniklý mnohočlen je jejich součet“.

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 86)

Definici lze zobecnit na součet libovolného konečného počtu mnohočlenů (jejich součtem je opět mnohočlen).

Rozdíl mnohočlenů určíme tak, že k prvnímu zadanému mnohočlenu přičteme mnohočlen opačný k druhému zadanému mnohočlenu.

Definici lze zobecnit na rozdíl libovolného konečného počtu mnohočlenů (jejich rozdílem je opět mnohočlen).

Součin mnohočlenů určíme tak, že „každý člen jednoho mnohočlenu vynásobíme každým členem druhého a všechny takto vzniklé součiny sečteme; vzniklý mnohočlen je součinem daných mnohočlenů“.

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 86)

Definici lze zobecnit na součin libovolného konečného počtu mnohočlenů (jejich součinem je opět mnohočlen).

Poznámka:

Součet, rozdíl a součin libovolných mnohočlenů je opět mnohočlen.

Podíl mnohočlenů získáme po:

- *dělení mnohočlenu jednočlenem*

  nebo

- *dělení mnohočlenu mnohočlenem*.

Podíl mnohočlenu a jednočlenu určíme tak, že „jednočlenem vydělíme každý člen mnohočlenu a vzniklé podíly sečteme“.

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 88)

Pokud dělitel mnohočlenu není jednočlenem, postačí pro potřeby střední školy, abychom se omezili pouze na „**dělení mnohočlenů s jednou proměnnou**, a to ještě takových, že **stupeň mnohočlenu, který je dělitelem, je nejvýše roven stupni mnohočlenu, který je dělencem**“.

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 89)

Při dělení mnohočlenů postupujeme následujícím způsobem:

a) oba mnohočleny uspořádáme sestupně podle klesajících mocnin zadané proměnné,
b) 1. člen dělence vydělíme 1. členem dělitele,
c) získaným jednočlenem vynásobíme všechny členy dělitele

   a

d) vzniklý mnohočlen odečteme od dělence.

Uvedený postup dělení opakujeme stále dokola do té doby, než „dojdeme k mnohočlenu, který je nulový nebo má stupeň menší, než je stupeň dělitele“. Pokud je dělení mnohočlenu mnohočlenem „**beze zbytku**, je podílem obou mnohočlenů mnohočlen“.

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 90)

Pokud je dělení mnohočlenu mnohočlenem **se zbytkem**, „podílem daných mnohočlenů není mnohočlen“. „O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou.“

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 91)

Poznámka:

Podíl mnohočlenů nemusí být vždy mnohočlen.

2.5.5. Rozklad mnohočlenů

Rozkladem mnohočlenu se rozumí jeho „vyjádření ve tvaru součinu několika mnohočlenů, které jsou zpravidla už nerozložitelné“. „Provádí se nejčastěji:

- vytýkáním před závorku

  nebo

- užitím vhodných vzorců.“

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 92)

„Vytýkání před závorku používáme k převedení součtu $xy + xz$ na součin $x \cdot (y + z)$; rovnost těchto výrazů vyplývá z distributivního zákona:

$$x \cdot (y + z) = xy + xz,$$

který platí pro všechna *x*, *y*, *z* reálná.

Při úpravách tohoto typu nemusíme samozřejmě vytýkat jen ‚jednočlen‘, např. $a \cdot (b+1) + c \cdot (b+1) = (b+1) \cdot (a+c)$.“

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 92)

Rozklad pomocí vzorce provádíme na základě následujících důležitých vzorců pro 2. a 3. mocninu dvojčlenu:

„$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$“

(Halouzka, 2002: str. 27)

Speciálním případem rozkladu mnohočlenů je **rozklad kvadratického trojčlenu v součin celočíselných lineárních dvojčlenů,** který má velký význam ve středoškolské matematice například při řešení kvadratických rovnic.

„Předpokládejme, že je dán trojčlen $x^2 + px + q$ s celočíselnými koeficienty p, q a že existují celá čísla r, s tak, že platí:

$$x^2 + px + q = (x - r) \cdot (x - s);$$

tato celá čísla r, s chceme určit.

Protože je $x^2 + px + q = (x - r) \cdot (x - s) = x^2 - (r + s) \cdot x + r \cdot s$, musí pro hledaná čísla r, s platit: $r \cdot s = q$ a zároveň $r + s = -p$.

Z těchto podmínek hledaná čísla r, s určíme, pokud ovšem existují.“

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 94)

<u>Poznámka:</u>

Kvadratický trojčlen nemusí jít vždy v součin lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty rozložit.

2.5.6. Lomený výraz

Lomený výraz je speciálním případem algebraického výrazu, který je zapsán ve tvaru zlomku. Neznámá se v lomeném výrazu vyskytuje ve jmenovateli zlomku. Příklad lomeného výrazu: $\dfrac{9a^2 - 25b^2}{a+b}$.

Čermák & Červinková (2004) lomený výraz definují a rozdělují následovně.

„**Lomené výrazy jsou výrazy zapsané ve tvaru podílu dvou výrazů, přičemž jmenovatel** (dělitel) **musí být nenulový**. Pokud lomený výraz neobsahuje odmocniny, nazývá se *racionální lomený výraz*, pokud odmocniny obsahuje, nazývá se *iracionální lomený výraz*."

(Čermák & Červinková, 2004: str. 32)

„S lomenými výrazy pracujeme podobně jako se zlomky; protože jmenovatel žádného zlomku nemůže být roven nule, musíme u lomených výrazů dbát na to, aby byly vyloučeny ty hodnoty jednotlivých proměnných, po jejichž dosazení nabývá jmenovatel lomeného výrazu nulové hodnoty."

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 97)

Jinými slovy: „Při práci s lomenými výrazy musíme vždy vědět, kdy mají tyto výrazy smysl."

Již víme, že pokud chceme zjistit, za jakých podmínek má daný výraz smysl, chceme stanovit *definiční obor* tohoto výrazu (viz kapitola 2.5.2.).

Při práci s lomeným výrazem se výraz snažíme co nejvíce upravit neboli zjednodušit. Chceme dosáhnout toho, aby lomený výraz po zjednodušení obsahoval co nejméně algebraických operací, co nejmenší počet závorek, co nejnižší stupeň proměnných aj.

Pojmy společný dělitel mnohočlenů a společný násobek mnohočlenů jsou „zobecněním pojmů společný dělitel a společný násobek celých čísel".

„**Společný dělitel mnohočlenů** je mnohočlen, kterým je každý z daných mnohočlenů beze zbytku dělitelný."

„**Společný násobek mnohočlenů** je mnohočlen, který je každým z daných mnohočlenů beze zbytku dělitelný."

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 97)

2.5.7. Početní operace s lomenými výrazy

Mezi početní operace s lomenými výrazy patří nejen operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, ale i operace krácení a rozšiřování.

„**Krátit lomený výraz** znamená dělit jeho čitatele i jmenovatele týmž výrazem. **Rozšířit lomený výraz** znamená vynásobit jeho čitatele i jmenovatele týmž výrazem.“

Souhrnně můžeme zapsat:

„Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, platí:

krácení

$$\xrightarrow{\qquad}$$

$$\frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

rozšiřování

$$\xleftarrow{\qquad} .\text{“}$$

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 99)

„**Součet lomených výrazů** je lomený výraz, jehož čitatel je součet čitatelů sčítaných výrazů **převedených na společného jmenovatele** a jehož jmenovatel je tento společný jmenovatel.“

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 101)

„Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} + \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_4 + V_2 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4} .\text{“}$$

„Společného jmenovatele se snažíme určit vždy tak, aby to byl výraz co nejjednodušší; během výpočtu (a většinou i ve výsledném výrazu) ho ponecháme ve tvaru součinu.“

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 102)

Poznámka:

Podobně je definováno i odčítání lomených výrazů.

„**Součin lomených výrazů** je lomený výraz, jehož čitatel je součin čitatelů a jmenovatel součin jmenovatelů násobených lomených výrazů.“

„Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}.“$$

„Při násobení jednotlivé výrazy ‚neroznásobujeme‘, naopak, **snažíme se je vhodně rozložit a podle možnosti i krátit**. Tato zásada platí obecně, nejen pro násobení.“

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 103)

Při **dělení lomených výrazů** využíváme poznatek ze základní školy: „Dělit nějakým výrazem znamená násobit výrazem převráceným.“

„Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}.“$$

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 106)

V rámci dělení lomených výrazů se někdy také můžeme setkat s jiným zápisem než je znak **:** pro dělení.

Pokud nahradíme „v podílu dvou lomených výrazů znak **:** pro dělení *zlomkovou čárou*, dostáváme **složený lomený výraz**, tj. lomený výraz, v jehož čitateli i jmenovateli jsou lomené výrazy; tuto zlomkovou čáru nazýváme **hlavní zlomková čára**.

Z toho, co víme o dělení lomených výrazů, plyne:“

„Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}\text{.“}$$

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 108)

Poznámka:

Podmínky, za nichž mají úpravy s lomenými výrazy smysl, je vhodné určit až po úpravě daného výrazu do součinového tvaru, než je určovat před jeho úpravou.

3. EXPERIMENTÁLNÍ ČÁST

V experimentální části této diplomové práce představuji svůj vlastní experiment, který jsem provedla na střední odborné škole v Jižních Čechách, kde 6. rokem vyučuji matematiku.

Cílem experimentu bylo zjistit, jakých chyb se žáci na střední škole nejčastěji dopouštějí při úpravách algebraických výrazů a v čem mají při jejich řešení největší obtíže.

K identifikaci a klasifikaci chyb při úpravách algebraických výrazů je použita „klasifikace typů chyb při práci s algebraickými výrazy“, kterou uvádím v kapitole 2.3.2.

3.1. Metodologie

Pro experiment jsem zvolila kvantitativní metodu experimentu, a to **samostatnou písemnou práci žáků** a **dotazníkovou metodu**. Data jsem sbírala od žáků 1. ročníků 2 studijních maturitních oborů, které mají různou týdenní hodinovou dotaci, různý počet žáků ve třídě a i různou skladbu pohlaví.

Jednalo se o tyto obory:

- Přírodovědné lyceum spojené s oborem Ekonomika podnikání (hodinová dotace je 4 hodiny za týden, celkový počet žáků ve třídě je 20, z toho 14 dívek a 6 chlapců)

  a

- Sociální činnost (hodinová dotace je 3 hodiny za týden, celkový počet žáků ve třídě je 31, pouze dívky).

Při experimentu vycházím z úloh 2 sbírek, které jsem nazvala **Sbírka řešených úloh** a **Sbírka cvičných úloh**. Obě sbírky jsem vytvořila částečně z vlastních zdrojů a částečně z úloh uvedených v knihách jiných autorů. Sbírky úloh včetně výsledků uvádím v příloze na konci této diplomové práce.

3.2. Průběh experimentu

3.2.1. Popis postupu práce při skupinové práci žáků

Se **Sbírkou řešených úloh** jsem se žáky obou maturitních oborů pracovala ve 2 vyučovacích hodinách v rámci skupinové práce. Cílem těchto 2 vyučovacích hodin bylo upevnění poznatků žáků a potřeba získání podkladů pro můj vlastní experiment.

Před skupinovou prací jsem žákům látku o algebraických výrazech uvedenou v závěru teoretické části této práce frontálně vyložila a celkovou problematiku výpočtů jsem s nimi postupně probrala.

Skupinové práci žáků jsem nemohla věnovat více času, neboť jsem ještě potřebovala další 2 vyučovací hodiny ke zjištění, do jaké míry si žáci osvojili úpravy algebraických výrazů. K tomu jsem zvolila formu samostatné písemné práce, kterou uvádím v příloze na konci této diplomové práce.

Skupinová práce žáků s algebraickými výrazy probíhala v hodinách tak, že jsem jim postupně promítla na interaktivní tabuli zadání všech úloh (bez řešení). Žáci si měli popořadě vždy úlohu opsat, vyřešit ji do svého školního sešitu ve spolupráci se sousedem v lavici a poté ještě zkontrolovat se sousedy v lavici za nimi, případně prodiskutovat, či se domluvit na nějaké další strategii řešení, která by vedla k cíli.

Pokud v hodinách procvičuji, preferuji většinou spíše kolektivní práci. Proto jsem ji zvolila i nyní pro svůj experiment. Z mých zkušeností vyplývá, že tato organizační forma výuky je pro žáky více přínosná. Při skupinové práci žáci posilují sociální interakci. Práce ve skupině posiluje (Trotzer, 1977): [16]

- vzájemnou důvěru mezi členy,
- vzájemné akceptování,
- vřelé chování,
- komunikaci
- pochopení.

---

[16] http://is.muni.cz/el/1423/jaro2004/PSY443/um/Stud_text_prace_se_skupinou.txt

Dle Trotzera práce ve skupině vytváří pro své členy prostor „bezpečí“.

Očekávala jsem, že při skupinové práci se žáci setkají s úlohami, které jim budou dělat problémy. Opravdu si s řešením některých úloh mnohdy neporadili ani ve skupině. Proto jsem ke každé úloze měla připravené řešení krok po kroku, které jsem žákům v případě potřeby (též na interaktivní tabuli) postupně odkrývala. Většinou stačilo žáky pouze navést správným směrem a oni si zase sami našli cestu, jak mají dále postupovat. Pokud si nebyli třeba ještě jistí, odkryla jsem jim další krok výpočtu. Na závěr si žáci mohli svůj výsledek každé úlohy zkontrolovat s výsledkem uvedeným na tabuli.

Se **Sbírkou cvičných úloh** jsem se žáky v hodině nepracovala. Úlohy jsem žákům zadala po skupinové práci v hodině za domácí úkol. Mým cílem byla jejich samostatná domácí příprava na následnou samostatnou písemnou práci.

3.2.2. Očekávané chyby, obtíže a problémy při skupinové práci žáků

Při tvorbě řešených úloh jsem dle mých předchozích zkušeností již předpokládala výskyt možných chybných postupů a chyb ve výsledcích žáků. Za tímto účelem jsem si proto vytvořila následující přehled problematiky daného učiva. Pro lepší názornost jsem zvolila 2 tabulky, které jsem označila Tabulka 1 a Tabulka 2. V těchto tabulkách shrnuji *očekávané chyby*, *obtíže a problémy* při skupinové práci žáků s algebraickými výrazy.

V úlohách, které nejsou v Tabulce 1 a v Tabulce 2 uvedené, jsem nepředpokládala, že udělají žáci zvlášť závažnou početní chybu, a ani jsem neočekávala větší obtíže při jejich řešení.

3.2.2.1. Očekávané chyby žáků při skupinové práci

Tabulka 1:

Úloha	Cvičení	Očekávané chyby
č. 1	**c)**	Žák stanoví správně podmínku pro algebraický výraz (výraz ve jmenovateli je vždy různý od nuly). Zapomene však poté při odmocnině z čísla 64 na hodnotu –8. Napíše pouze 8.
	d)	Žák opět stanoví správně podmínku pro algebraický výraz (výraz $y^2 - y$ různý od nuly). Při úpravě podmínky však zapomene vytknout z mnohočlenu společného dělitele (proměnnou *y*). Neuvědomí si, že se jedná o kvadratický mnohočlen a získá pouze 1 výsledek (hodnotu 1). Na 2. výsledek (na hodnotu 0), zapomene.
	f)	Žák se dopustí stejné chyby jako ve cvičení c). Zapomene při odmocnině z čísla $\frac{1}{4}$ na hodnotu $-\frac{1}{2}$.
	g)	Stejná chyba jako ve cvičení c) a f). Žák opět zapomene při odmocnině z daného čísla na zápornou hodnotu.
	h)	V tomto cvičení je jednak zadána u algebraického výrazu neznámá pod odmocninou, jednak ve jmenovateli zlomku. Žák stanoví podmínku, že uvedený výraz pod odmocninou musí být vždy nezáporný, a vynechá 2. podmínku o nenulovosti jmenovatele.
	i)	Žák se zde dopustí hned 2 již zmíněných chyb. Udělá stejnou chybu jako ve cvičení c), f) a g) (ve výpočtu

		odmocniny) a jako ve cvičení h) (v podmínce).
č. 2	**d)**	Žák si neuvědomí, že požadovaný koeficient musí brát i se znaménkem uvedeným před hledaným členem (zde je u lineárního členu uvedena hodnota –6, ne pouze 6).
č. 9	**a)**	Žák zapomene na opačný výraz. Ve výsledku poté bude chybět znaménko –.
č. 10		Žák v rozdílu zadaných výrazů chybně zkrátí stejné výrazy. Zapomene na pravidlo, kterým by se měl při práci s výrazy řídit. Pravidlo zní: „Vždy krátíme stejné členy pouze při operaci násobení!“
č. 11	**a)**	Žák si opět neuvědomí, že může nejprve před násobením lomených výrazů zkrátit stejné výrazy. Místo toho, aby si zjednodušil práci a zkrátil je, tak je roznásobí. Poté již neví, jak má dále se vzniklým lomeným výrazem pracovat.
	b), c)	Žák zde nevidí vzorce pro 2. mocninu. Opět nezkrátí stejné výrazy, ale roznásobí je. Tím se dostává „do bludného kruhu“ a potřebuje se z něj dostat ven.
	d)	I zde žák nevidí vzorec pro 2. mocninu dvojčlenu, proto nezkrátí stejné výrazy. Navíc chybně odstraní složený zlomek, neboť vynásobí čitatele horního zlomku s čitatelem dolního zlomku (místo správného součinu čitatele horního zlomku a jmenovatele dolního zlomku), a poté vynásobí jmenovatele horního zlomku jmenovatelem dolního zlomku (místo správného součinu jmenovatele horního zlomku a čitatele dolního zlomku).

3.2.2.2. Očekávané obtíže a problémy u žáků při skupinové práci

Tabulka 2:

<table>
<tr><th>Úloha</th><th>Cvičení</th><th>Očekávané obtíže a problémy</th></tr>
<tr><td>č. 1</td><td></td><td>Žák si musí uvědomit, že pokud má za úkol určit definiční obor algebraického výrazu, hledá podmínku, pro jaká čísla je daný výraz vlastně definován (má smysl) a proč jej vůbec taková podmínka zajímá.
Musí být schopen určit, o jakou podmínku se jedná:
o Neznámá se vyskytuje ve jmenovateli zlomku (žák musí zapsat podmínku, že výraz ve jmenovateli je různý od nuly, a upravit ji, poté musí získanou hodnotu vynechat z množiny všech reálných čísel).
o Neznámá se vyskytuje pod odmocninou (žák musí zapsat podmínku, že výraz pod odmocninou je vždy nezáporný, neboť odmocnina ze záporného čísla není definována). Poté je definičním oborem (oproti předchozí možnosti) uzavřený interval (zleva nebo zprava).
o Neznámá se vyskytuje pod odmocninou a navíc ve jmenovateli zlomku, žák musí tentokrát stanovit 2 podmínky:
1) výraz ve jmenovateli různý od nuly,
2) výraz pod odmocninou kladný.
Pokud žák správně stanoví obě podmínky, získá podmínku, že zadaný výraz musí být pouze větší než nula. Definičním oborem je poté otevřený interval.
Na základě mých zkušeností s učivem o algebraických</td></tr>
</table>

		úlohách vím, že hledání podmínky, ať už u zmíněných algebraických výrazů, nebo například i při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli, dělá žákům vždy problémy. Proto si myslím, že je této části potřeba věnovat více hodin, problematiku důsledně procvičovat, žákům vše stále zdůrazňovat a opakovat.
č. 2	**c)**	Žák musí rozumět pojmům, které jsou v zadání cvičení použity (člen kubický, kvadratický, lineární a absolutní).
	d)	Žák musí porozumět zadání cvičení, co je zde myšleno pojmem „koeficient“.
č. 4		Žák si musí uvědomit, jak probíhá algoritmus pro dělení mnohočlenu mnohočlenem.
č. 5		Žák musí umět pracovat se vzorci pro 2. mocninu dvojčlenu (díky řešení, které je ke sbírce připojeno, na ně bude však upozorněn, proto by v následujících úlohách č. 6, 8 a 10, již tento problém nastat neměl).
č. 9		Žák musí vědět: 1) co je v zadání úlohy myšleno vhodným výrazem (ze zadání je pouze zřejmé, že má rozšířit zlomkem, který má ve jmenovateli požadovanou hodnotu), 2) co má zapsat do čitatele tohoto zlomku.
č. 11	**d)**	Žák musí umět zjednodušit složený zlomek.

3.2.3. Chyby, obtíže a problémy, které u žáků při skupinové práci nastaly

V Tabulce 3 uvádím přehled chyb a obtíží, které při práci se žáky skutečně nastaly. Jedná se nejen o přehled chyb, které jsem předem očekávala, ale i o chyby, které se objevily v průběhu skupinové práce žáků.

Tabulka 3:

Úloha	Vyhodnocení
č. 1	Chyby žáků, které jsem očekávala: o ve cvičení c) žák zapomněl při odmocnině z čísla 64 na číslo –8, o ve cvičení h) žák napsal podmínku $z \geq 0$, poté definiční obor $D(f) = \langle 0; \infty)$, který je dle něj shodný s definičním oborem ve cvičení f), nevšiml si rozdílného zadání (podmínku měl správně zapsat $z > 0$ a definiční obor $D(f) = (0; \infty)$). Jiné chyby žáků: o ve cvičení f) žák zapsal stejnou podmínku jako v předchozích cvičeních (výraz různý od nuly) a zapsal $D(f) = \boldsymbol{R} - \{0\}$ místo správného řešení $D(f) = \langle 0; \infty)$.
č. 2	Chyby žáků, které jsem očekávala: o ve cvičení d) žák nevěděl, který člen je absolutní, proto tedy nemohl určit ani jeho koeficient, o jiný žák určil koeficient u lineárního členu 6 místo správné hodnoty –6. Jiné chyby žáků: o ve cvičení e) si žák nebyl jistý, zda je výsledek po umocnění čísla –4 na čtvrtou 256 nebo –256,

	o jiný žák nevěděl, jak umocní odmocninu z čísla 3.
č. 3	Chyby žáků: o ve cvičení a) žák nevěděl, zda má pracovat s desetinnými čísly nebo se zlomky – raději si vybral desetinná čísla. Řekl: „Zlomky mi nejsou sympatické…“, o ve cvičení d) žáci zapomínali určit podmínku ($x, y, z \neq 0$).
č. 4	Chyby žáků: o žák zapomněl při podílu 2 mnohočlenů na zbytek, o většina žáků i zde (jako v předchozí úloze č. 3) zapomněla určit, kdy mají dané výrazy smysl (v 1. cvičení pro $a \neq -1$, ve 2. cvičení pro $t \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$).
č. 8, 9, 10 a 11	Chyby, které jsem očekávala: o v úloze č. 10 několik žáků v lomeném výrazu zkrátilo čitatele se jmenovatelem při operaci odčítání mnohočlenů v čitateli. Jiné chyby žáků: o žáci zapomínali určit podmínku, kdy mají dané algebraické výrazy smysl.
č. 11	Chyby žáků: o ve cvičení c) měl žák vydělit 2 lomené výrazy, 1. výraz pouze opsal, 2. správně upravil do součinového tvaru (pomocí operace vytýkání a vzorce pro 2. mocninu dvojčlenu), poté chybně zkrátil „křížem“ tyto lomené výrazy, protože nepřevedl operaci děleno na operaci násobení (žák si neuvědomil, že křížem krátíme pouze při násobení zlomků nebo lomených výrazů).

3.2.4. Očekávané obtíže a problémy u žáků při domácí přípravě

Při tvorbě Sbírky cvičných úloh jsem i zde dle mých předchozích zkušeností u žáků očekávala řadu obtíží. Do této cvičné sbírky jsem zadala úlohy podobné úlohám uvedeným v řešené sbírce, ale i úlohy zcela jinak formulované, neboť jsem chtěla, aby se žáci setkali s více typy úloh.

Mým cílem bylo, aby se žáci ještě společně ve třídě nad operacemi s algebraickými výrazy (před samostatnou písemnou prací) naposled zamysleli. Na řešení úloh měli žáci 1 týden. Žákům jsem též navrhla, že pokud by potřebovali s něčím pomoci, mohou za mnou přijít v době stanovené konzultace, ať už individuálně nebo kolektivně. U úloh, které jsem formulovala zcela stejně (jen jsem například změnila stupeň mnohočlenu, či koeficienty mnohočlenu aj.), jsem chyby neočekávala.

Během týdne za mnou chodili žáci i mimo stanovené konzultační hodiny. U žáků se objevila 2 hlavní úskalí. Tím 1. byla hned úloha č. 1 b), do kterého jsem úmyslně zařadila (kromě neznámé v čitateli, ve jmenovateli a pod odmocninou) i *logaritmus*, konkrétně: log $(2x+4)$, a to ze 2 důvodů:

- ✓ žáci musejí sami zjistit, pro jaká čísla je logaritmus definován, nebo přijít na konzultaci (očekávala jsem, že bystřejší žáci sami odvodí podmínku na základě připojeného výsledku a slabší žáci se s nimi poradí),
- ✓ použít na kalkulačce (doposud pro ně neznámé) tlačítko pro výpočet logaritmu a splnit tím 2. část úkolu.

2. úskalím bylo *nalezení nejmenšího společného násobku*, na který jsme společně při práci s algebraickými výrazy doposud nenarazili. Postup nalezení jak nejmenšího společného násobku, tak největšího společného dělitele pro zadaná čísla, by měl mít každý žák zvládnutý již ze základní školy.

Ostatní úskalí uvádím v Tabulce 4.

Tabulka 4:

Úloha	Cvičení	Očekávané obtíže a problémy
č. 1	a), c)	Cíleně jsem nezadala neznámou do jmenovatele zlomku, ale do jeho čitatele. Žák určí podmínku (pro cvičení a) $x \neq 0$, pro cvičení c) $z \neq 0$). Následně zapíše definiční obor zadaného výrazu a zjistí, že se jeho výsledek neshoduje s uvedeným výsledkem. Očekávám, že pokaždé proběhne u těchto problematických úloh diskuse (buď se spolužákem v kmenové třídě, s kamarádem z vyššího ročníku aj.), nebo konzultace se mnou.
	e)	Žák ve výrazu $\sqrt{\frac{1}{16}z^2}$ stanoví podmínku $z \geq 0$ a zapíše $D(f) = \langle 0; \infty)$. Výsledek se i tentokrát liší od správně uvedeného výsledku. Žák se musí nad cvičením znova zamyslet, proč tomu tak je. Měl by si všimnout, že pokud daný výraz upraví (odmocní), dostane $\pm\frac{1}{4}z$, kde $D(f) = \boldsymbol{R}$.
č. 3	c)	Žák nezvládne odstraňování závorek. Musí si uvědomit správnou posloupnost jejich odstranění. Pokud ve cvičení odstraní složenou závorku, nahradí ji hranatou závorkou, a pokud odstraní hranatou závorku, nahradí ji kulatou závorkou.
	f)	Žák má nejprve odstranit hranaté závorky, až poté vynásobit $-\frac{1}{4}$.
	i), j), k)	Před dělením mnohočlenu mnohočlenem by měl žák vidět, že má nejprve sestupně či vzestupně uspořádat

		členy obou mnohočlenů (dělence i dělitele). Pokud toto nevidí, bude mít rozdílný výsledek od správného výsledku.
č. 4		Žák by měl vidět v zadání úlohy vzorec pro 2. mocninu dvojčlenu. Pokud vzorec nevidí a dané závorky roznásobí, ztíží si svou práci.
č. 5		Žák by si měl uvědomit, že pro dané mocniny má použít operaci násobení mnohočlenu mnohočlenem, neboť vzorec pro umocnění trojčlenu nezná.
č. 6		Žák by měl umět použít vzorce pro 2. mocninu dvojčlenu.
č. 7	**c), e)**	I zde (v rámci celé úlohy) by žák měl umět pracovat se vzorci. Tentokrát nevystačí pouze se vzorci pro 2. mocninu dvojčlenu, ale bude potřebovat i vzorce pro 3. mocninu. Některý žák ve cvičení c) vytkne ze zadaného dvojčlenu $(-4i-j)$ hodnotu -1 a bude pracovat se vzorcem $(a+b)^2$. Některý žák na úpravu nepřijde a bude pracovat se vzorcem $(-a-b)^2$. Podobnou úpravu může žák provést i ve cvičení e). Pokud vymění pořadí členů dvojčlenu $(-3+2l)$, může i zde použít vzorec, který zná, tj. $(a-b)^3$ místo vzorce $(-a+b)^3$. Ten použije v případě, že pořadí členů zadaného dvojčlenu nevymění.
č. 8		Žákovi může činit potíže nalezení nejmenšího společného násobku daných výrazů. Bude se muset buď s někým poradit, sám vyhledat pomoc z nějakého zdroje, či přijít na konzultaci.

č. 9		Žákovi může činit potíže nalezení největšího společného dělitele daných výrazů.
č. 10		Žák by si zde měl uvědomit, že pokud má výraz rozšířit nějakým výrazem, musí tímto požadovaným výrazem vynásobit nejen jeho čitatele, ale i jmenovatele. Navíc po operaci násobení nesmí tyto výrazy zjednodušit (zkrátit), neboť by se dostal zpět k zadanému výrazu.
č. 11		Do zadání úlohy jsem přidala určení podmínky, kdy mají dané výrazy smysl. Mým cílem bylo žákům podmínku připomenout. Žák by v této úloze měl použít pravidlo pro krácení výrazů: „Vždy krátíme stejné členy pouze při operaci násobení!“, dále pak vzorce pro 2. a 3. mocninu dvojčlenu.
č. 12		Žákovi může činit potíže získání čísla *A*. Měl by si uvědomit, čím má zadaný výraz rozšířit.
č. 13		I zde jsem do zadání úlohy přidala podmínku, kdy mají dané výrazy smysl (cíl byl shodný s cílem v úloze č. 11). Očekávala jsem, že někteří žáci na podmínku zapomenou.
č. 14		Žákovi může činit potíže zjednodušení složeného zlomku a vzorce pro 2. mocninu dvojčlenu. Dále může zapomenout určit podmínku, kdy mají dané výrazy smysl.
č. 15		Zde může opět žákovi činit potíže zjednodušení složeného zlomku a opět může zapomenout určit podmínku, kdy mají dané výrazy smysl.

Většina žáků se přípravě na samostatnou písemnou práci věnovala a poctivě se připravovala. Úlohy žáci konzultovali většinou ve třídě, v domově mládeže, se svými kamarády a někteří po předchozí dohodě i se mnou (v rámci konzultací, na které chodili většinou hromadně nebo i mimo ně). Mnohdy žákům stačilo pouze naznačit, jak mají dále postupovat, či je odkázat na některou vhodnou literaturu.

Během týdne, který jsem žákům stanovila pro domácí přípravu na samostatnou písemnou práci, chodili na konzultaci více žáci ze sloučené třídy (Ekonomika podnikání a Přírodovědné lyceum). Zde bylo vidět, že žáci z tohoto oboru mají větší zájem o studium a chtějí mít dobré školní úspěchy. Z obou tříd přišli většinou ti bystřejší žáci (žáci s nejhorší známkou z matematiky dobře). Ze slabších žáků na konzultaci přišlo pouze 9 žáků (3 žáci z oboru Ekonomika podnikání, 2 žáci z Přírodovědného lycea a 4 žáci z oboru Sociální činnost).

V 5 případech se jednalo o 3 žákyně a 2 žáky, kteří jsou z matematiky velmi slabí (dokonce propadají). V dalších 3 případech se jednalo o 2 žákyně a 1 žáka, kteří se v hodinách velmi snaží, doma si počítají, ale všichni mají z Pedagogicko-psychologické poradny stanovenu specifickou poruchu učení (2 dysgrafii, 3. dyslexii). A v 9. případě se jednalo o žákyni, která studuje podle individuálního vzdělávacího plánu.

Čekala jsem, že na konzultaci přijde více žáků, neboť samostatnou hodnocenou práci jsme měli naplánovanou hned po pololetních prázdninách. Vzhledem k tomu, že v pololetí měla z matematiky největší četnost známka dostatečně, očekávala jsem od žáků důslednější přípravu na samostatnou písemnou práci.

3.2.5. Samostatná písemná práce žáků

Do **samostatné písemné práce žáků** jsem vybrala hlavně ty úlohy ze Sbírky cvičných úloh, kvůli kterým žáci přicházeli na konzultaci. Chtěla jsem ověřit, do jaké míry si žáci učivo osvojili, dále zjistit chyby, kterých se dopustili, a obtíže, které ovlivnily úspěšnost jejich práce.

Na vypracování samostatné písemné práce měli žáci 2 vyučovací hodiny, které následovaly za sebou, s 5minutovou přestávkou. Při práci mohli žáci používat kalkulačku, matematické tabulky či Souhrn matematiky pro střední školy. Výsledky k samostatné písemné práci opět uvádím v příloze.

V den konání samostatné písemné práce nebyli všichni žáci ve škole přítomni. <u>Proto jsem otestovala pouze:</u>

- ✓ 15 žáků – spojen obor Ekonomika podnikání a Přírodovědné lyceum (místo původního počtu 20)

  a

- ✓ 26 žáků z oboru Sociální činnost (místo původního počtu 31).

Obor Ekonomika podnikání a Přírodovědné lyceum navštěvuje 1 hoch se specifickou poruchou čtení (dyslexií) a 1 dívka s individuálním plánem učiva (důvodem je svalová atrofie). Oba nebyli v den testování ve škole přítomni. Obor Sociální činnost navštěvují 2 žákyně se specifickou poruchou psaní (dysgrafií). Obě písemnou práci psaly.

Dohromady jsem získala 41 písemných prací, které jsem opravila a oznámkovala. Úspěšnost žáků (pro oba maturitní obory) jsem zaznamenala do sloupcových grafů, které uvádím v kapitole 3.2.5.4.

3.2.5.1. Analýza chyb žáků při samostatné písemné práci dle klasifikace typů chyb (Bílek, 2014)

Při opravě samostatných písemných prací jsem zaznamenávala chyby, kterých se žáci dopustili. Tyto chyby jsem jednotlivě pak rozdělila podle klasifikace typů chyb při práci s algebraickými výrazy podle V. Bílka (2014) uvedené v kapitole 2.3.2. Uvádím je v tabulkách 5, 6 a 7.

Tabulka 5:

Úloha č.	**1**	**2**	**3**	**4**
Typ chyby	**Žák/žákyně**			
Numerická chyba	v podmínce zaměnila znak nerovnosti za rovnost	nečetla pozorně zadání úlohy a členy mnohočlenu uspořádala zcela naopak	zapomněla znaménko	X
	zapomněla znaménko	špatně opsala zadání mnohočlenu	X	X
	zaměnila závorky v intervalu	X	X	X
	zapomněla při odmocnění na záporný kořen	X	X	X
	zaměnila množinové závorky za závorky kulaté	X	X	X
Úkonová chyba	neuměla pracovat s odmocninami	neuměla umocnit mocninu a zlomek	X	neuměla pracovat se závorkami
	X	X	X	neuměla vynásobit mnohočleny

Grafická chyba	zaměnila proměnnou *y* za číslo 4	X	X	X
Chyba velkého skoku	nesplnil všechny zadané úkoly	X	X	X
	zapomněla vydělit pravou stranu nerovnice číslem -5	X	X	X
Strategická chyba	chybně stanovila podmínku, kdy má daný algebraický výraz smysl	X	X	X
	nevěděla, jakou podmínku stanovit pro existenci logaritmu	X	X	X
	chybně zahrnula množinu všech ***R***	X	X	X
Bezradnost a bloudění	X	X	X	X
Jiná chyba	chybně zapsala svou myšlenku	nevěděla, co je sestupné uspořádání	tipla odpověď, aniž by úlohu vypočetla	místo zlomkové čáry napsal odmocninu
	X	k zápisu absolutního členu použila nezvyklý zápis, zapsala $\lvert -3 \rvert$ místo -3	neznala pojem koeficient	X
	X	neznala pojem koeficient	X	X
	X	chybně pracovala s kalkulačkou	X	X

Tabulka 6:

Úloha č.	**5**	**6**	**7**	**8**
Typ chyby	**Žák/žákyně**			
Numerická chyba	udělala chybu ve znaménku	vzniklé mnohočleny již neupravila	použila špatné znaménko před závorkou	při vytýkání zapomněla na vytknutou hodnotu ze druhé závorky
	X	neupravila výsledek	X	X
	X	X	X	X
Úkonová chyba	X	odmocnila rozdíl dvou mnohočlenů místo, aby ho umocnila	nevěděla, čemu se rovná 3. mocnina čísel 2 a 3	X
	X	X	neuměla provést základní početní operace	X
	X	X	neuměl dosadit do vzorce	X
	X	X	nevybavil si vzorec (dělal chyby ve znaménkách)	X
	X	X	chybně umocnil dvojčlen (zapomněl na prostřední člen)	X
Grafická chyba	X	při přepisu mnohočlenu změnila znaménko + na –	X	X

Chyba velkého skoku	X	X	použila špatná znaménka ve vzorci, který však měla nad úlohou správně napsaný	X
Strategická chyba	X	nebyla schopna najít správný postup řešení	X	X
Bezradnost a bloudění	X	X	X	X
Jiná chyba	nepřečetla si zadání úlohy	X	X	X

Tabulka 7:

Úloha č.	**9**	**10**	**11**	**12**
Typ chyby	**Žák/žákyně**			
Numerická chyba	X	zapomněla při odmocňování na záporný kořen	X	při krácení opačných výrazů zapomněla na záporné znaménko
	X	X	X	v daném lomeném výrazu 2x použila kulaté závorky místo vnějších složených závorek a vnitřních kulatých závorek

Úkonová chyba	neuměla rozšířit lomený výraz	chybně zapsal vzorec	X	X
	X	nevěděla, že krátíme pouze při operaci násobení	X	ve cvičení a) použila opačné znaménko
	X	X	X	chybně zapsala vzorec
Grafická chyba	při přepisu úlohy přidala k odmocnině z čísla 13 ještě další číslo, které pod ni nepatřilo	X	X	X
Chyba velkého skoku	neupravila jmenovatele zlomku	nesplnila všechny zadané úkoly	X	ve cvičení a) použila opačné znaménko
	při roznásobování vynásobila číslem 13 pouze 1. člen mnohočlenu	X	X	chybně zapsala vzorec
Strategická chyba	X	provedla nesmyslnou operaci	neporozuměla zadání	neuměla nalézt společného jmenovatele pro zadané výrazy
Bezradnost a bloudění	X	X	X	X
Jiná chyba	nečetla zadání úlohy	špatně zapsal myšlenku	X	X
	X	zbytečně ztrácel čas nepotřebnou podmínkou	X	X

3.2.5.2. Komentář k jednotlivým úlohám

Abych zjistila, který žák/žákyně udělal(a) opakovaně stejné nebo různé chyby, zakódovala jsem pro přehlednost 41 testovaných žáků následujícím způsobem: „ž1“ – „ž41“.

<u>Úloha č. 1</u>

Žákyně „ž3“, „ž6“, „ž10“, „ž16“ a žák „ž5“ správně stanovili $D(f)$ uvedených výrazů, ale přehlédli v zadání úlohy ještě další úkol, tj. určit hodnotu každého uvedeného výrazu pro $x = 0$ a $y = -\frac{1}{2}$.

Žákyně „ž12“ ve **cvičení a)** správně určila definiční obor pro funkci logaritmus ($2x + 4 > 0$), ale pak chybně vyřešila lineární nerovnici, protože ji upravila do tvaru $2x > -4$ a vydělila číslem 2, jejíž výsledek zapsala $x = -2$. Definiční obor již zapsala správně. Žákyně „ž32“ naopak při úpravě podmínky přehlédla znaménko mínus, napsala $2x + 4 > 0$, po úpravě $2x > -4$ a po další úpravě napsala $x > 2$ (místo správného zápisu $x > -2$). Určila tedy špatně $D(f)$. Žák „ž35“ a žákyně „ž40“ správně sestavili podmínku pro funkci logaritmus, tedy $2x + 4 > 0$, správně upravili, ale chybně zapsali definiční obor, ve kterém zaměnili kulatou závorku za lomenou závorku, i když v podmínce nebyla uvedena rovnost. Žákyně „ž4“, „ž29“ a „ž41“ chybně zapsaly $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Ve **cvičení b)** žákyně „ž1“ stanovila pro celý výraz podmínku: $\frac{6}{2y^2 - 2y - 12} > 0$. Nerovnici dále, bez jakékoliv diskuse, vynásobila společným jmenovatelem, tj. $2y^2 - 2y - 12$, a získala další nerovnici $6 > 0$. Poté zapsala $D(f) = \boldsymbol{R}$ (tj. sice správná úvaha na základě poslední nerovnice, ale v této úloze definičním oborem celá množina reálných čísel není). Žákyně „ž12“ naopak správně stanovila podmínku pro zadaný výraz ($2y^2 - 2y - 12 \neq 0$), ale při úpravě této nerovnice udělala 3 chyby. Nerovnici upravila následujícím způsobem:

$$2y^2 - 2y - 12 \neq 0 \qquad / + 12$$

$$2y^2 - 2y \neq 12 \quad / :2$$

$y^2 - y \neq 12$ → zapomněla vydělit číslo na pravé straně nerovnice číslem 2 (**1. chyba**),

poté pokračovala

$$y^2 - y \neq 12 \quad / +4$$

↓

díky nečitelnému písmu zaměnila proměnnou y za číslo 4, které následně přičetla k číslu 12 (**2. chyba**),

$$y^2 \neq 16 \quad / \sqrt{\ }$$

$y \neq 4$ → zapomněla na záporný kořen – 4 (**3. chyba**).

Žákyně „ž3“, „ž16“ a „ž38“ stejnou podmínku správně zapsaly, upravily a vyřešily, ale chybně napsaly definiční obor $D(f) = \boldsymbol{R} - (-2;3)$. Složené závorky nahradily kulatými závorkami.

Ve **cvičení c)** žákyně „ž2“ stanovila následující podmínku, kdy má výraz smysl: $\sqrt{1+3y} \geq \sqrt{\frac{1}{3}+y}$. Myšlence v podmínce vůbec nerozumím. Je zvláštní, kde se vzal pod odmocninou zápis $1+3y$, když v zadání úlohy je $1-5y$. Poté zapsala $D(f) = \left\langle \frac{1}{3};\infty \right)$. Žákyně „ž40“ stanovila podmínku, kdy má výraz smysl: $\sqrt{1-5y}+7y$ > 0. Celou nerovnici umocnila na druhou a získala: $1-5y+49y^2$ > 0, ještě naznačila úpravu nerovnice (-1), u které skončila. Na 1. pohled je zde zřejmé, že žákyni chybí vhled do této problematiky, neboť neví, že pouze výraz pod odmocninou musí být nezáporný, tedy pouze $1-5y$ (dále zde postrádám jiný znak nerovnosti, a to $\geq$). Navíc i úprava nerovnice je chybná.

Úloha č. 2

Žákyně „ž2“ ve **cvičení a)** chybně uspořádala členy, když je chtěla uspořádat sestupně, napsala: $2a^2$, a^3, $-\frac{1}{3}a$, -3. Žákyně „ž1“, „ž10“ a „ž11“ členy naopak uspořádaly vzestupně místo sestupného uspořádání.

Ve **cvičení c)** žákyně „ž17“ použila nezvyklý zápis pro absolutní člen: $-|3|$ místo -3. Ve **cvičení d)** žákyně „ž11“, „ž12“ a žák „ž35“ napsali koeficient u kvadratického členu roven $2a^2$. Soudím, že neznají pojem koeficient, ale ví, který člen je kvadratický.

Ve **cvičení e)** žákyně „ž15“ provedla výpočet hodnoty $P(\sqrt{3})$ následujícím způsobem: $\sqrt{3}^3 - \frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}^2 - 3 = 9 - 3 + 6 - 3 = \underline{\underline{9}}$ (dopustila se 3 číselných chyb pro 1. 3 členy). Žákyně „ž31“ chybovala ve 2. výpočtu hodnoty $P\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Dle ní je: $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 = -1 + 3 + 6 - 3 = \underline{\underline{5}}$ (dopustila se také 3 číselných chyb pro 1. 3 členy). Další žákyně „ž38“ chybně opsala mnohočlen $P(a)$, když chtěla za proměnnou a dosadit požadované hodnoty. Zaměnila zde při otáčení listů samostatné práce absolutní člen -3 za absolutní člen -5 (z mnohočlenu $Q(b)$ v následující úloze č. 3). Žákyně „ž16“, „ž39“ a „ž41“ do mnohočlenu $P(a)$ správně dosadily požadovanou hodnotu $-\frac{1}{3}$, ale soudím, že při výpočtu 2. mocniny udělaly chybu při výpočtu 2. mocniny proměnné a, když na kalkulačce zadaly pouze $-\frac{1}{3}^2$ (místo správné hodnoty $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$, protože ve svém výsledku měly místo kladného znaménka znaménko záporné).

Úloha č. 3

Ve **cvičení b)** žákyně „ž2“, „ž6“, „ž8“, „ž17“, „ž22“, „ž23“ a žák „ž28“ neměli v práci uvedený výpočet požadované hodnoty, přesto zakroužkovali odpověď NE. O žácích soudím, že odpověď pouze tipli (bohužel jejich tip nebyl správný).

Žákyně „ž2“, „ž4“, „ž15“, „ž22“, „ž29“, „ž39“ a „ž41“ ve **cvičení c)** zapomněly na znaménko mínus u lineárního členu, proto uvedly chybnou odpověď.

Žák „ž24“ a žákyně „ž33“, „ž38“ **cvičení d)** vůbec nevypracovali. Nejspíše nevěděli, co je zde myšleno pojmem *koeficient* u kvadratického členu (vzhledem k tomu, že předchozí úlohu vypracovali správně – věděli, který člen je absolutní, soudím, že v této úloze znali i lineární člen, ale ne již koeficient).

Úloha č. 4

Žákyně „ž4“ ve **cvičení a)** zcela ignorovala zadané závorky, podtrhala stejné členy a mnohočleny sečetla. Žákyně „ž21“ chybně odstranila závorky. Její postup byl následující:

$$e^2 - 2e - \{-5\mathrm{e} - [2\mathrm{e} - (2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^2 - 5) - 1] + 2\} = \mathrm{e}^2 - 2e + 5e + [2e - (\dots) + 2].$$

Ve **cvičení b)** žákyně „ž33“ roznásobila mnohočleny jednočlenem následujícím způsobem:

$$(m + 2n) \cdot (-n^2) \cdot (m - 11) = \underline{\underline{-2mn^2 + m^2 + 9n^2 - 11m + 2mn - 22n}}.$$

Z tohoto zápisu neumím odhadnout, jak postupovala.

Ve **cvičení c)** žák „ž25“ udělal při dělení mnohočlenu jednočlenem v posledním kroku chybu. Podíl zapsal jako $-9\sqrt{p}$ místo správné hodnoty $-\dfrac{9}{p}$. Soudím, že se přepsal, když zaměnil zlomkovou čáru za druhou odmocninu.

Ve **cvičení d)** žákyně „ž12“, „ž16“, „ž30“, „ž34“ a žák „ž5“, „ž18“ uspořádali správně členy dělence i dělitele sestupně, ale nepoužili algoritmus pro dělení mnohočlenu mnohočlenem. Soudím, že si nemohli vybavit, jak potřebný algoritmus probíhá.

Úloha č. 5

Žákyně „ž2“, „ž6“, „ž15“, „ž17“, „ž20“ a „ž29“ přečetly chybně zadání úlohy, které vyžadovalo použití vhodného vzorce. Žákyně roznásobily každý člen každým a upravily. Výsledek měly správný, nesplnily však zadání úlohy. Soudím, že některé z nich vzorce neznaly. Žákyně „ž6“ a „ž30“ napsaly výsledek $-21a^2-25$ (bez uvedeného výpočtu) místo správného výsledku $-21a^2+7$. Soudím, že požadované vzorce umí, ale udělaly chybu ve znaménku, tj. $-9-16$ místo správného výpočtu $-9-$ (-16).

chybné znaménko

Úloha č. 6

Ve **cvičení a)** žákyně „ž29“ správně použila vzorec pro 2. mocninu dvojčlenu, do kterého i správně dosadila, ale členy již neupravila. Dle ní je výsledek roven $\underline{\underline{(p-q+2r-2p+q+r)\cdot(p-q+2r+2p-q-r)}}$. Žákyně „ž2“ úlohu řešila následujícím způsobem:

$$(p-q+2r)^2-(2p-q-r)^2=\underline{\underline{p^2-q^2+2r^2-2p^2+q^2+r^2}}.$$

V úloze se dopustila 4 chyb:

1. nezná vzorec $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$,
2. zadání úlohy hovoří o rozkladu v součin, který však v jejím výsledku není,
3. umocnila každý člen zadaných výrazů a ještě chybně, napsala $(2r)^2=2r^2$ místo $(2r)^2=4r^2$,
4. ve výsledku, ke kterému došla, nesečetla stejné členy.

Žákyně „ž33“ použila pro výpočet následující postup:

$(p-q+2r)^2-(2p-q-r)^2=(p-q-2r)-(2p-q-r)$, místo umocnění mnohočleny v zadání odmocnila, navíc při přepisování byla nepozorná a změnila znaménko v 1. mnohočlenu u jednočlenu $2r$. Poté u vzniklých mnohočlenů $(p-q-2r)-(2p-q-r)$ odstranila závorky a provedla další chybnou úpravu:

$p-q-2r-2p+q+r=-2r-2p+p+r=\underline{\underline{-2\cdot(r+p)+p+q}}$.

Ve **cvičení b)** žákyně „ž2“, „ž32“ a „ž37“ rozložily trojčlen $3z^2-2+5z$ v součin následujícím způsobem: $3z^2-2+5z = \underline{\underline{z\cdot(3z+5)-2}}$. Jejich úprava je chybná, neboť výraz v součin správně nerozložily.

chybné znaménko

Úloha č. 7

Žákyně „ž1“ a „ž6“ výraz ve **cvičení a)** upravily: $(-4i-j)^2=-(4i+j)^2$. Dvojčlen v závorce správně umocnily dle vzorce, ale ve výsledku udělaly chybu ve znaménku. Žákyně „ž39“, žák „ž25“ a „ž28“ výraz upravili správně: $(-4i-j)^2=(4i+j)^2$, ale dvojčlen podle vzorce $(a+b)^2$ již správně neumocnili. Napsali výsledek: $...=\underline{\underline{16i^2+j^2}}$, ve kterém chybí prostřední člen (člen $8ij$).

Ve **cvičení b)** žákyně „ž20“ správně v zadaném dvojčlenu prohodila členy, aby zaměnila znaménka, použila správný vzorec pro 3. mocninu dvojčlenu, ale udělala číselnou chybu ve výpočtu 3. mocnin. Dle ní je: $(2l)^3=\underline{\underline{16l^3}}$ a $3^3=\underline{\underline{81}}$. Ve stejném cvičení udělal chybu žák „ž28“, protože neuměl do daného vzorce dosadit. Dle něj je 2. člen ze vzorce pro 3. mocninu dvojčlenu roven $-3\cdot 4l\cdot(-3)$ místo $-3\cdot 4l^2\cdot 3$. Žák „ž28“ zde udělal hned 2 chyby: zapomněl umocnit l a dosadil do vzorce -3, tedy i znaménko mínus, které je již ve vzorci zahrnuto. Žákyně „ž31“ ve stejném cvičení udělala numerickou chybu. Dle ní je $3\cdot 4\cdot l^2\cdot 3=\underline{\underline{18l^2}}$ a $3\cdot 2\cdot l\cdot 9=\underline{\underline{14l}}$. Jedná se o výpočet 2. a 3. členu při umocnění dvojčlenu dle vzorce. Jak žákyně k číslu 18 dospěla, nevím. V případě čísla 14 předpokládám, že hodnoty sečetla, místo aby je vynásobila. Žák „ž35“ napsal: $(2l-3)^3=8l^3+3\cdot 8l^2\cdot(-3)+3\cdot 2l\cdot(-27)-27$. Členy mnohočlenu $(-3+2l)$ správně prohodil, aby mohl použít vzorec $(a-b)^3$, ale ten si nejspíše nemohl správně vybavit, neboť udělal chyby ve znaméncích. „Ž35“ dále špatně umocnil číslo 2 (dle něj je výsledek 8). Poté použil 2. člen zadaného mnohočlenu i se znaménkem mínus, a to -3 (znaménko je však již ve vzorci zahrnuto). Žákyně „ž40“ prohodila členy zadaného mnohočlenu, nad ně správně napsala vzorec pro 3. mocninu dvojčlenu, ale v upraveném výrazu zapsala 2. a 4. člen se znaménkem plus, i když měla být (dle vzorce) znaménka mínus.

Úloha č. 8

Dle žákyně „ž1“, „ž4“, „ž33“ a žáka „ž35“ je $9x^2 - 144 = (3x - 12)^2$, dle žákyně „ž1“, „ž4“, „ž33“ a žáka „ž35“ je $x^2 + 8x + 16 = (x - 4)^2$. V obou případech chybí prostřední člen vzorce, a to $-2ab$. Další žákyně „ž6“, „ž11“, „ž12“ a „ž39“ vzorec pro kvadratický trojčlen $x^2 + 8x + 16$ správně použily, ale udělaly chybu při vytýkání v 1. uvedeném výrazu $9x^2 - 144$, který řešily následovně:

$9x^2 - 144 = (3x - 12) \cdot (3x + 12) = 3 \cdot (x - 4) \cdot (x + 4)$.

Zapomněly, že vytýkají číslo 3 z obou závorek, proto musí být před výslednými závorkami číslo 9.

Úloha č. 9

Žákyně „ž6“, „ž16“, „ž21“ a „ž41“ rozšířily zadaný výraz následujícím způsobem: $\frac{13}{\sqrt{13} - 1} \cdot (\sqrt{13} + 1) = \underline{\underline{\frac{13\sqrt{13} + 13}{\sqrt{13} - 1}}}$ (dle nich výsledek). Žákyně „ž8“ rozšířila výraz správně, ale poté zapsala výsledek: $\underline{\underline{\frac{13\sqrt{13} + 1}{13 - 1}}}$, ve kterém správně neroznásobila čitatele výrazu (chybí ještě $13 \cdot 1 = 13$, ne pouze 1), a neupravila jmenovatele výrazu (13 – 1 = 12). Další žákyně „ž22“ a „ž29“ udělaly v průběhu správného postupu výpočtu v čitateli výrazu grafickou chybu.

pod odmocninu přidaly i další hodnotu (číslo 1)

Napsaly: $\ldots = \frac{13 \cdot (\sqrt{13} + 1)}{\left(\sqrt{13}\right)^2 - 1} = \frac{13 \cdot (\sqrt{13 + 1})}{13 - 1} = \ldots$

Úloha č. 10

Žák „ž5“ chybně zapsal vzorec v čitateli lomeného výrazu, dle něj je: $8-p^3=(8-p)\cdot(4-2p+p^2)$. V 1. uvedené závorce si neuvědomil, že číslo 8 je 3. mocnina čísla 2 (2. člen již zapsal správně). Ve 2. uvedené závorce však číslo 2 správně umocnil, ale zase spletl znaménko u prostředního členu. Žákyně „ž6“, „ž15“, „ž16“, „ž20“, „ž29“, „ž33“, „ž36“ a „ž40“ zapomněly určit podmínku, kdy má zadaný výraz smysl. Žákyně „ž23“ úlohu řešila následujícím způsobem: $\frac{8-p^3}{p^2-4}=\frac{2-p^3}{p^2-1}=\underline{\underline{\frac{2-p}{-1}}}$ (dle ní výsledek). Žákyně „ž29“ použila následující postup: $\frac{8-p^3}{p^2-4}=\frac{-2p\cdot(-4+p^2)}{-4+p^2}=\underline{\underline{-2p}}$ (v čitateli výrazu provedla chybnou operaci, a to vytýkání místo použití vzorce pro 3. mocninu dvojčlenu). Vzniklý výraz zkrátila 4 a p^2. Poté zapsala chybný výsledek $-2p$. Žák „ž35“ zapsal chybně podmínku, kdy má lomený výraz smysl ($p-2=0$) a upravil na tvar $p=2$ místo správné podmínky $p\neq\pm2$. Žákyně „ž6“, „ž17“, „ž20“, „ž23“ a „ž36“ potřebnou podmínku správně zapsaly, správně upravily, ale zapomněly při odmocnině z čísla 4 na zápornou hodnotu -2. Žákyně „39“ v úloze stanovila ještě 1 podmínku, která zde však není potřebná: $8-p^3\neq0$, neboť výraz $8-p^3$ se nevyskytuje ve jmenovateli zadaného výrazu.

Úloha č. 12

Žákyně „ž2“, „ž10“, „ž16“, „ž17“, „ž21“, „ž29“, „ž33“, „ž36“ a žák „ž24“ zapomněli určit podmínky, kdy mají zadané výrazy smysl.

Ve **cvičení a)** nalezli správně žákyně „ž1“, „ž6“, „ž12“, „ž15“, „ž22“, „ž26“, „ž30“, „ž32“, „ž36“ a žák „ž35“ společného jmenovatele pro 1. zadanou závorku $\left(1-\frac{1-2j^2}{1-j}+j\right)$, ale v čitateli chybně zapsali znaménko před členem $2j^2$. Uvedli znaménko mínus místo správného znaménka plus (neuvědomili si, že mínus před zlomkem se vztahuje k celé hodnotě čitatele, ne jen k 1. členu). Žákyně „ž23“ zjednodušila cvičení správným postupem, ale v posledním kroku udělala chybu, když zkrátila opačné výrazy a zapomněla na znaménko mínus. Napsala: $\ldots = \frac{j^2}{\cancel{1-j}} \cdot \frac{\cancel{j-1}}{j-2} = \underline{\underline{\frac{j^2}{j-2}}}$ (místo správného výsledku $-\frac{j^2}{j-2}$). (−1)

zapomenuté znaménko

Žák „ž18“ cvičení rozumí, pouze chybně zapsal posloupnost použitých závorek při úpravě 1. zadaného lomeného výrazu na společného jmenovatele: $\left(\frac{1\cdot(1-j)-1+2j^2+j\cdot(1-j)}{1-j}\right)$. Použil 2x za sebou kulaté závorky, místo vnějších hranatých závorek a vnitřních kulatých závorek.

Ve **cvičení b)** žákyně „ž6“ zapsala chybný společný jmenovatel pro oba zadané výrazy v čitateli i jmenovateli složeného zlomku, dle ní: $\dfrac{\frac{c}{c+1}-\frac{c-1}{c}}{\frac{c}{c-1}-\frac{c+1}{c}} = \dfrac{\frac{c-(c-1)}{c+1}}{\frac{c-(-c-1)}{c-1}} = \ldots$ Správný společný jmenovatel měl být: $\ldots = \dfrac{\frac{\ldots}{c\cdot(c+1)}}{\frac{\ldots}{c\cdot(c-1)}} = \ldots$ Další chybu udělala ve jmenovateli složeného zlomku, když napsala $c-(-c-1)$ místo $c-(c+1)$.

Ve **cvičení b)** a **c)** žákyně „ž20“ nestanovila podmínky, kdy mají zadané výrazy smysl. Soudím, že asi zapomněla nebo nestihla, neboť v předchozí úloze podmínky uvedla.

Ve **cvičení c)** žákyně „ž1“, „ž3“, „ž4“, „ž33“ a „ž38“ správně upravily jmenovatele složeného lomeného výrazu na společného jmenovatele, ale chybně napsaly vzorec pro 3. mocninu dvojčlenu. Dle nich: $x^3-y^3=(x-y)\cdot(x^2-xy+y^2)$. Poté zkrátily čitatele (x^2+xy+y^2) i jmenovatele (x^2-xy+y^2) a zapsaly rovná se 1. Získaly správný výsledek, který však neodpovídá předchozímu výpočtu. Žák „ž18“ cvičení c) nedopočetl. Výrazy vhodně upravil dle vzorců, ale již stejné hodnoty nezkrátil. Žákyně „ž41“ chybně rozepsala vzorec pro 3. mocninu dvojčlenu. Dle ní: $x^3 - y^3 = x - y \cdot (x^2 + xy + y^2)$. Postup je chybný, neboť si nezapsala 1. 2 členy do kulatých závorek a chybně roznásobila členy v závorce pouze jednočlenem y místo dvojčlenem $(x - y)$. Žák „ž35“ také nezapsal dvojčlen $(x - y)$ do kulatých závorek a zkrátil trojčlen $(x^2 + xy + y^2)$ „křížem“ se stejným trojčlenem v čitateli lomeného výrazu. Po této úpravě získal správný výsledek $\underline{\underline{\dfrac{x^2 y^2}{x - y}}}$, který však neodpovídá předchozímu zápisu, neboť krátit můžeme pouze při násobení, a to právě zde žák nemohl (kvůli nezapsané závorce).

Poznámka 1:

V samostatné písemné práci měla největší četnost chyb žákyně pod kódem „ž6“. U této žákyně se opakovaly vícekrát stejné chyby. Jednalo se o tyto chyby: nečetla správně zadání úlohy (co je úkolem úlohy), pokud měla úloha více úkolů – podúkolů, nesplnila je, chybovala ve znaménku, ve společném jmenovateli zadaných výrazů, v operaci vytýkání a rozšiřování, ale i v uzavřené úloze. V této úloze bez výpočtu tipla odpověď (pro správný tip byl však výpočet potřebný).
Podobné výsledky měli i ostatní žáci, jen se u nich chybné operace a postupy příliš často neopakovaly (byly různého charakteru).

Poznámka 2:

Zcela zde opomíjím žáky, kteří odevzdali prázdné pracovní sešity. U tohoto typu žáků nešla ani analýza chyb provést. Jednalo se o žáky, kteří se na práci nepřipravili a ani se nechtějí připravovat. Naši školu navštěvují jen kvůli svým rodičům a nemají zcela žádnou snahu se něco nového v hodinách naučit. V některých pracích jsem nějakou snahu zaznamenala, ale byly v nich uvedené zcela nesmyslné postupy, úpravy a výsledky, proto jsem je (spolu se žáky, kteří odevzdali prázdné pracovní listy) ani do předchozích tabulek a komentářů nezahrnula.

3.2.5.3. Obtíže a problémy u žáků při řešení samostatné písemné práce

Dílčím cílem mého experimentu bylo zjistit, jaké obtíže a problémy mají žáci při řešení algebraických výrazů.

Přehled obtíží a problémů, které se u vybraných žáků v samostatné písemné práci v jednotlivých úlohách vyskytly:

- ✓ *Čtení textu bez porozumění:*
  - žák (žákyně) si nepřečetl(a) zadání úlohy, začal(a) jej ihned řešit,
  - žák(yně) ze zadání neodhalil(a) potřebné informace,
  - žák(yně) v úloze nerozuměl(a) nabízeným možnostem.
- ✓ *Žákovi(žákyni) chybí znalost základních pojmů:*
  - definiční obor algebraického výrazu,
  - absolutní, lineární, kvadratický a kubický mnohočlen,
  - pojem koeficient.
- ✓ *Žákovi(žákyni) chybí znalost základních poznatků:*
  - práce se znaménky – žák(yně) opomněl(a) znaménko mínus před závorkou, tím pádem opomněl(a) i opačný mnohočlen,
  - žákovi(yni) činil potíže zápis definičního oboru pomocí intervalu,
  - žákovi(yni) činila potíže práce se závorkami (s hierarchií jejich odstranění).
- ✓ *Žákovi(žákyni) chybí znalost základních početních úkonů:*
  - žák(žákyně) neví, že výraz $\frac{1}{3} \cdot a$ je totožný se zápisem $\frac{1}{3}$ z a.
- ✓ *Žák(žákyně) není schopen(schopna) uchopit a zapsat vzorec:*
  - pro 2. mocninu

    a
  - pro 3. mocninu.

- ✓ *Žák(yně) zaměňuje vzorce* (například vzorce pro $a^2 - b^2$ s $a^2 + b^2$),
- ✓ *žák(yně) úlohu řeší strategií „pokus – omyl*“.

Výše uvedené obtíže a problémy se u žáků stále opakovaly. Největší problém měli se čtením textu (zadáním úloh), s nedostatkem předchozích základních poznatků a dovedností (nejčastěji to bylo správné uchopení vzorce nebo chybné dosazení hodnot). Předpokládala jsem, že základní poznatky a dovednosti mají žáci již zautomatizované ze základní školy a nebudou mít v zadaných úlohách s nimi problém. Situace však byla zcela jiná.

Obtíže měli žáci i v úloze č. 3 s nabízenými možnostmi ANO/NE, kterou jsem považovala za velmi jednoduchou. Navíc jsem ji zařadila cíleně, neboť podoba současné maturitní zkoušky z matematiky je koncipována formou otevřených a uzavřených úloh. Proto se snažím žákům tyto typy úloh zařazovat do výuky již od 1. ročníku. V učebnicích, které v hodinách používám, se takovéto typy úloh objevují pouze zřídka. V této úloze žáci stále zapomínali na znaménko u lineárního členu (navíc soudím, že odpověď většinou pouze tipovali, určitě ve cvičení b), protože jsem zde při opravě samostatných prací většinou postrádala výpočet).

Některé úlohy žáci ani neřešili (například úlohu č. 4 d)). Soudím, že důvodem byl algoritmus pro dělení mnohočlenu mnohočlenem, který je pro většinu žáků obtížně zapamatovatelný a dělá jim stále problémy.

Pokud se v úloze objevilo více dílčích úkolů (například v úloze č. 1), udělali žáci většinou pouze 1. část úkolu – stanovili definiční obor výrazu. 2. část úkolu, ve kterém bylo požadováno stanovení hodnoty každého výrazu pro zadané hodnoty proměnných, již přehlédli. Dále pak v úloze č. 10 opět ve 2. části přehlédli, že musí stanovit podmínku, kdy mají dané výrazy smysl, i když jim ji zadání úlohy připomnělo.

Obtížná byla dále úloha č. 6 b), kdy žáci chybně rozkládali v součin pouze vytknutím proměnné z z kvadratického a lineárního členu. Úloha č. 7 byla pro žáky obtížná jednak z hlediska vzorců, které musí znát z paměti, jednak z hlediska základních početních operací, které by měli mít již osvojeny. Ve cvičení a) většina žáků chybně vytkla z celé závorky znaménko mínus místo znaménka plus. Ve cvičení b) měli naopak žáci problém s výpočtem prostředních členů výrazu dle vzorce pro 3. mocninu (stále zaměňovali člen $3a^2b$ se členem $3ab^2$, prohazovali znaménka, nebo dokonce i dosazovali do daného vzorce za proměnnou b hodnotu -3 místo správné hodnoty 3). Dále pak v úloze č. 12 často zapomínali před členem $2j^2$ změnit znaménko mínus na znaménko plus.

3.2.5.4. Porovnání výsledků samostatné písemné práce žáků u obou oborů

Samostatné písemné práce žáků jsem opravila následujícím způsobem:

- každou úlohu jsem klasickým způsobem oznámkovala v rozmezí 1 až 5

  a

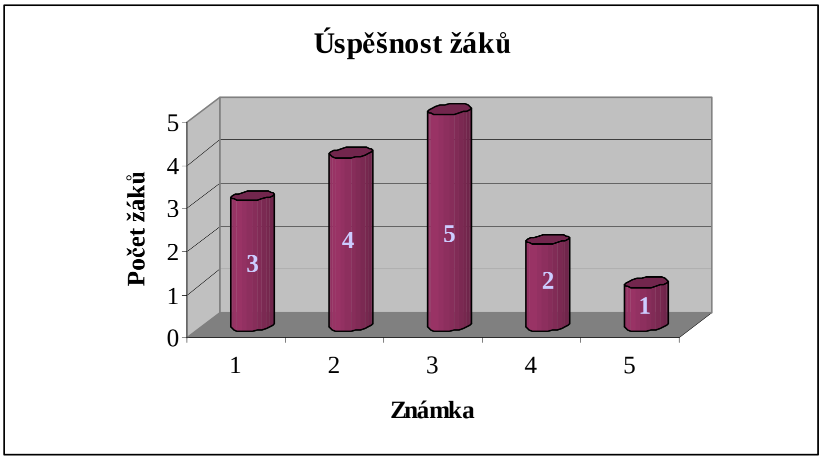
- výslednou známku jsem spočítala pomocí aritmetického průměru (celkový počet úloh byl 12).

Pokud se jednalo o úlohu s více dílčími úkoly, oznámkovala jsem je a výslednou známku opět vypočítala na základě aritmetického průměru. Získané známky žáků pro vybrané maturitní obory jsem zpracovala do Grafů 1 a 2.

Provedla jsem tak vyhodnocení úspěšnosti obou maturitních oborů.

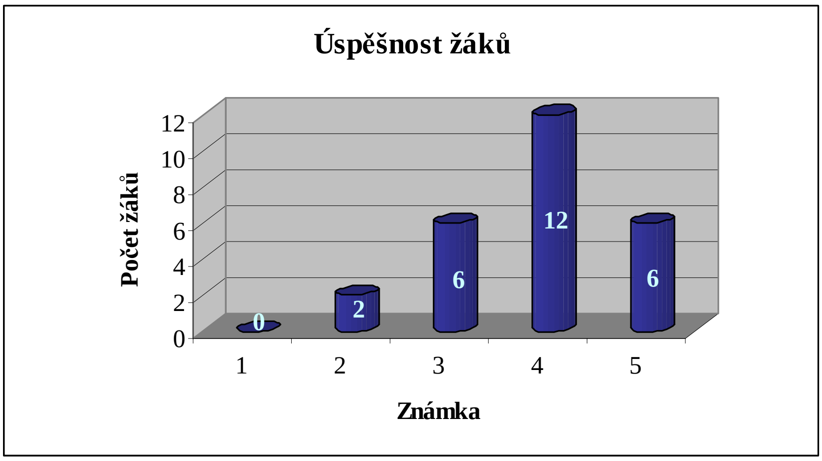
Graf 1:

První maturitní obor (spojený) – **Ekonomika podnikání a Přírodovědné lyceum**



Graf 2:

Druhý maturitní obor – **Sociální činnost**



Z Grafu 1 vidíme, že u žáků uvedeného oboru měla největší četnost známka 3. Poté hned následovala známka 2, 1 a 4. Známkou 5 jsem ohodnotila pouze práci 1 žákyně, která odevzdala zcela čistý pracovní list (pouze se podepsala a ani se o žádnou úlohu nesnažila).

Z Grafu 2 vyčteme, že u žáků dalšího uvedeného oboru byla četnost známek značně odlišná. V souboru výsledků výrazně převažovala známka 4. Poté počtem vyrovnaně následovaly známky 3 a 5. (Počet žáků s tímto hodnocením byl o $\frac{1}{2}$ nižší než u známky 4). Pouze 2 žákyně získaly známku 2. Známku 1 jsem v této třídě žádné z žákyň nepřidělila. Co se týče udělené známky 5, přesně $\frac{1}{2}$ těchto prací tvořily prázdné pracovní listy a 2. $\frac{1}{2}$ pracovní listy žákyň, které se alespoň o nějaké výpočty snažily. Jejich snaha ale bohužel nebyla dostačující (1 z žákyň má stanovenu dysgrafii).

Pokud se zamyslím nad rozdílností získaných výsledků žáků obou experimentálních tříd, spatřuji ji předně v *hodinové dotaci matematiky* v jednotlivých oborech. V 1. spojeném oboru mám sice jen o 1 vyučovací hodinu za týden více, ale právě díky ní zde mám čas i na důslednější procvičování látky. Naopak u 2. oboru na procvičování látky příliš času není.

Další důvod rozdílů spatřuji pak v *počtu žáků ve třídě*. Pokud jich je ve třídě méně, vystřídají se někteří v hodině u tabule i vícekrát. Při větším počtu žáků to bohužel reálné není.

Další příčinu rozdílnosti ve výsledcích spatřuji v *oborovém zaměření*. Žákyně z oboru Sociální činnost matematika vůbec nebaví, stále mi kladou otázky: „K čemu my tohle budeme v životě potřebovat…“ Naopak u žáků spojeného oboru Ekonomika podnikání a Přírodovědné lyceum je vidět o něco větší zájem, samozřejmě ale ne u všech žáků. Většinu z nich matematika baví, mají zájem o konzultace a účastní se nejrůznějších matematických soutěží.

Posledním důvodem rozdílnosti výsledků by mohli být *žáci se specifickými poruchami učení*. 1. studijní obor navštěvuje již zmíněný student s dyskalkulií a dívka s individuálním plánem učiva, která trpí svalovou atrofií. Oba práci nepsali. Soudím, že pokud by v den konání byli ve škole přítomni a práci psali, zvětšil by se počet prací hodnocený známkou 4 nebo 5, neboť v obou případech se jedná o slabé žáky. 2. obor navštěvují 2 žákyně s dysgrafií, obě práci psaly, jak již bylo zmíněno.

3.2.6. Jak zmírnit chyby, obtíže a problémy žáků při práci s algebraickými výrazy

Kvůli zjištění, jak nejvhodněji zmírnit, či v nejlepším případě zcela odstranit nejen chyby, ale i obtíže žáků při práci s algebraickými výrazy, jsem si vytvořila 2 následující typy dotazníků:

- ✓ **dotazník pro žáky**

  a

- ✓ **dotazník pro učitele matematiky**.

Oba dotazníky jsou přílohou této diplomové práce.

DOTAZNÍK PRO ŽÁKY

1. typ dotazníku jsem rozdala žákům hned tu vyučující hodinu, která následovala po vypracování předchozí samostatné písemné práce. Ne všichni žáci, kteří práci ve škole psali, byli nyní přítomni. Naopak byli přítomni někteří, kteří tuto práci nepsali. Ze spojeného oboru Ekonomika podnikání a Přírodovědné lyceum dotazník vyplnilo 17 žáků, z 2. oboru Sociální činnost 21 žáků.

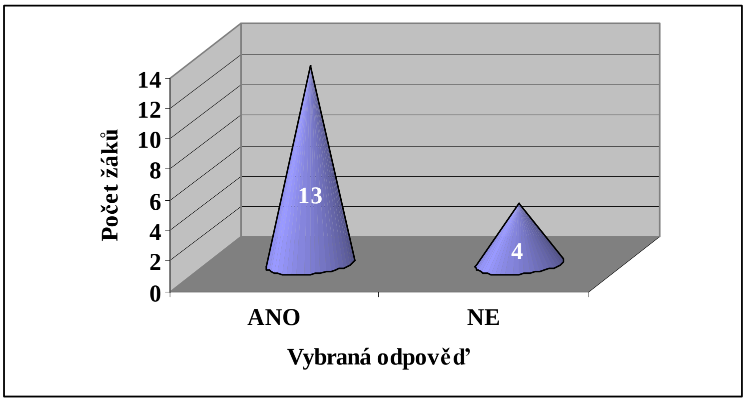
Na vyplnění dotazníku jsem žákům stanovila časové rozmezí 5 až 10 minut, většina z nich ho odevzdala již před stanoveným časem. Následující informace jsem získala ze 17 dotazníků od třídy se spojenými obory. V dotazníku měli žáci vybrat správnou odpověď, pro ně nejvíce vyhovující (v případě otázek č. 1 až č. 6). Poslední otázka č. 7 měla otevřenou odpověď.

Odpovědi žáků jsem pro přehlednost zpracovala do následujících grafů, které jsem označila Graf 3 až Graf 8.

Rozbor otázek

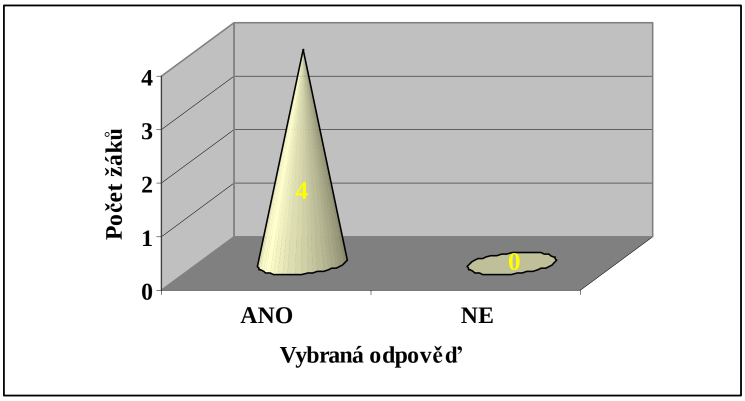
Otázka č. 1 – Při probírání učiva s algebraickými výrazy jsem učivu rozuměl(a)

<u>Graf 3:</u>



Otázka č. 2 – V případě, že ne, měl(a) jsem možnost dodatečného vysvětlení vyučujícím?

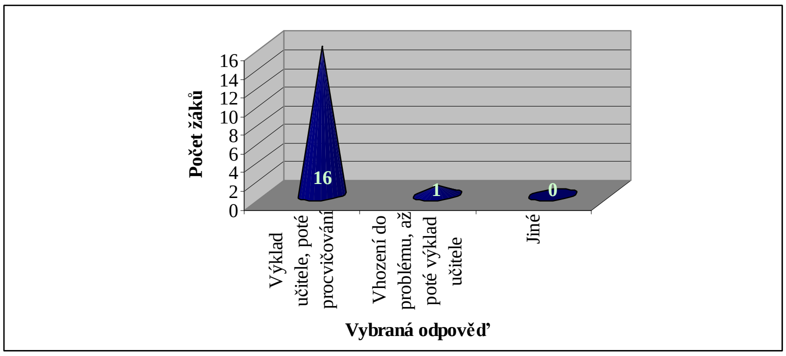
<u>Graf 4:</u>



U této otázky mi spousta žáků (konkrétně 11 žáků ze 13), kteří odpověděli v otázce č. 1 ANO, opět vybrala odpověď ANO. Tyto žáky do grafu však nezahrnuji. Důvodem je, že se jedná o žáky, kteří si otázku č. 2 důkladně nepřečetli. Otázku měli vyplnit pouze ti žáci, kteří v otázce č. 1 vybrali odpověď NE.

Otázka č. 3 – Vyhovuje ti spíše

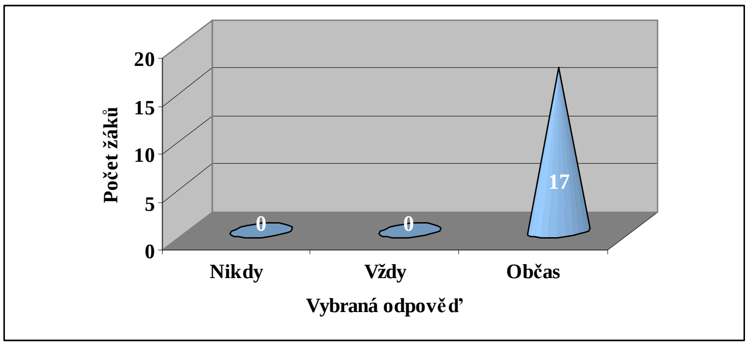
Graf 5:



Z grafu je vidět, že mým žákům spíše vyhovuje nejprve výklad a až poté procvičování dané problematiky.

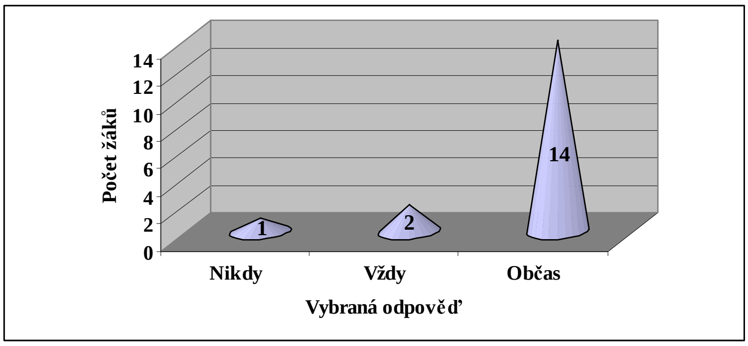
Otázka č. 4 – Používáte při hodině (při výkladu) učebnici?

Graf 6:



Otázka č. 5 – Při procvičování používáte učebnici?

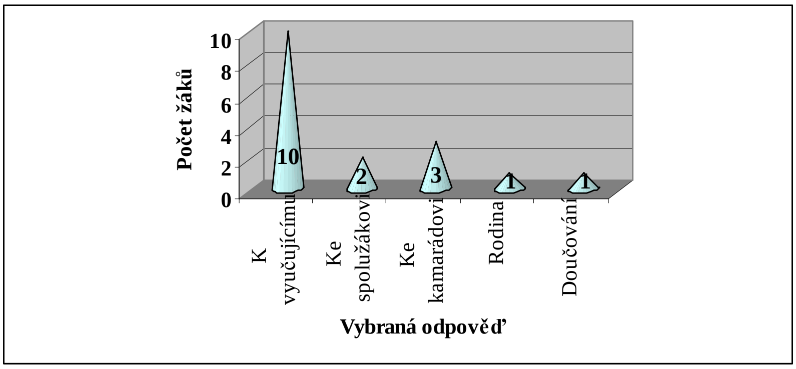
Graf 7:



3 odpovědi u této otázky mě překvapily, neboť učebnici při procvičování opravdu využíváme jen občas, jak správně odpověděla většina studentů. Vůbec však nevím, jak k odpovědi „Nikdy“ a „Vždy“ žáci dospěli.

Otázka č. 6 – Pokud probírané látce nerozumíš, jdeš raději na konzultaci k příslušnému vyučujícímu nebo ke spolužákovi, kamarádovi, někomu z rodiny či na doučování?

Graf 8:



Této otázky jsem využila k ověření, na koho se žáci v případě neporozumění obracejí. Potěšilo mě, že na mě. Jen malá část se poohlíží po jiném zdroji.

Otázka č. 7 – Jaké největší problémy ti přinášejí algebraické výrazy a jaké problémy konkrétně s nimi máš?

V této otázce (s otevřenou odpovědí) mohli žáci uvést libovolný počet důvodů. Více než 1 důvod uvedlo 5 žáků (tyto případy jsem do výsledného přehledu zahrnula tak, že u každého důvodu uvádím, kolikrát se odpověď opakovala). 3 žáci vůbec na otázku č. 7 neodpověděli. Ostatních 14 žáků uvedlo:

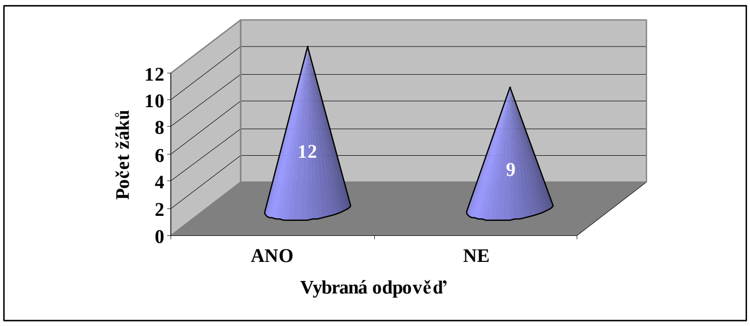
- žádné problémy s algebraickými výrazy nemám (odpověď se opakovala 7x),
- algebraické výrazy mi vyučující vyložil dostačujícím způsobem, proto mě žádné problémy nenapadají,
- většině operací s algebraickými výrazy rozumím,

- matematice bohužel vůbec nerozumím, proto ani algebraickým výrazům,
- matematika mě nebaví, proto se nesnažím pochopit ani algebraické výrazy,
- problém se vzorečky – mám problém si je zapamatovat (pletou se mi písmenka, znaménka a mocniny),
- nejsem schopna do vzorce správně dosadit, vždy udělám chybu, i když tomu rozumím (odpověď se opakovala 2x),
- problém mám se závorkami (odpověď se opakovala 2x),
- problém mám nejčastěji se znaménky (odpověď se opakovala 2x),
- problém mi dělaly početní operace s lomenými výrazy, je v nich na mě moc písmenek a čísel,
- mám problém s tím, že se nad algebraickými výrazy musím více zamyslet, a to mi ubírá čas,
- nevím, co mám počítat dříve, jsem z toho zmatena,
- vždy zapomenu stanovit podmínky, kdy mají dané výrazy smysl (odpověď se opakovala 2x).

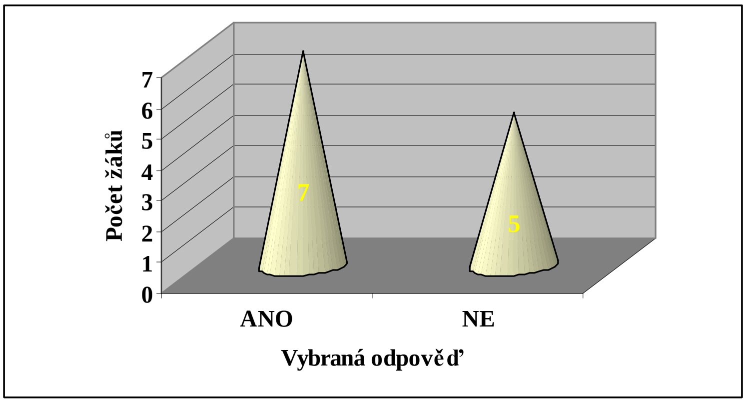
Další informace jsem získala z 21 dotazníků, které vyplnila 2. experimentální třída. Odpovědi žákyň jsem opět pro přehlednost zpracovala do následujících grafů, které jsem označila Graf 9 až Graf 14. Zadání stejných otázek zde již neuvádím.

Rozbor otázek

Otázka č. 1 – Graf 9:



Otázka č. 2 – Graf 10:

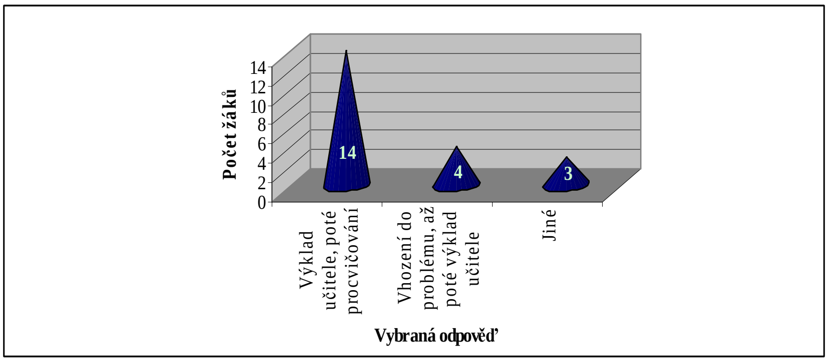


I v této třídě 6 žákyň z 9 odpovědělo na otázku, i když v otázce č. 1 odpověděly ANO. Opět si otázku důkladně nepřečetly. Zde je též vidět, že žáci neumí číst zadaný text.

5 žákyň zde odpovědělo, že jim vyučující (tedy já) látku dostatečně nevysvětlila. Důvod je následující:

- žákyně o konzultaci požádaly, domluvily jsme se na termínu, ale ony buď nepřišly (bez řádné omluvy), nebo se omluvily telefonicky, že se nemohou dostavit z důvodu nemoci,
- žákyně o konzultaci vůbec nepožádaly.

Otázka č. 3 – Graf 11:

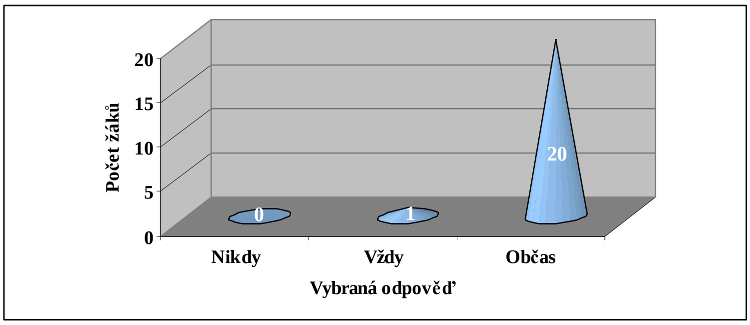


I zde je z grafu vidět, že žákyním spíše vyhovuje nejprve výklad od učitele, až poté procvičování dané problematiky. Jiný styl výuky vyhovuje 3 žákyním. Uvedly následující důvody:

- látku mi vysvětlí kamarádka,
- od učitelky tomu nerozumím, seženu si doučování,

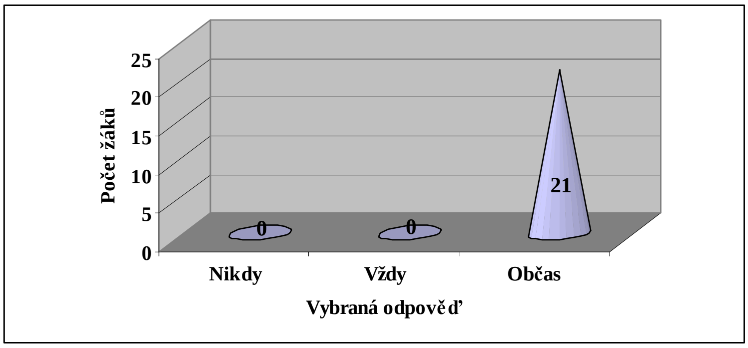
* učivo mi vysvětlí starší bratr, který studuje na vysoké škole.

Otázka č. 4 – <u>Graf 12:</u>

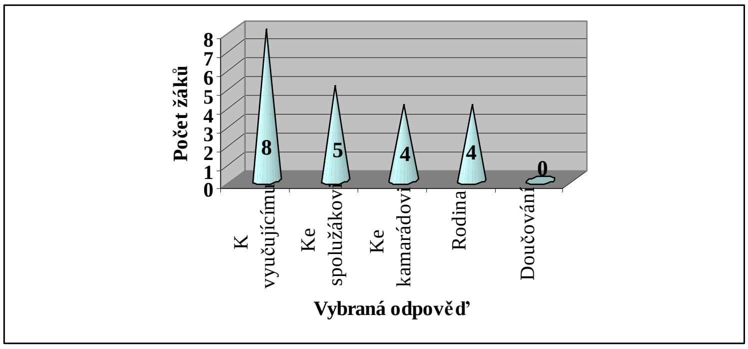


Zde mě 1 žákyně překvapila svou odpovědí, která se výrazně liší od ostatních. Dle ní v hodině vždy při výkladu používáme učebnici. Soudím, že nepozorně četla zadání otázky.

Otázka č. 5 – <u>Graf 13:</u>



Otázka č. 6 – <u>Graf 14:</u>



Z grafu je vidět, že i žákyně této třídy upřednostňují moji pomoc, ale ne tak často jako v předchozí třídě. Obrací se také na své spolužáky, kamarády a rodinu. Zde si myslím, že ne vždy je takováto forma pomoci vhodná. Myslím si, že by spíše měly využít nějakého kompetentního doučování. Z grafu je vidět, že jej vůbec nevyhledávají, i když mají v matematice (ve srovnání s předchozí třídou) obtíže.

Otázka č. 7

Více než 1 důvod uvedlo 5 žákyň (tyto případy jsem do výsledného přehledu i zde zahrnula tak, že u každého důvodu uvádím, kolikrát se odpověď opakovala). 8 žákyň na otázku č. 7 vůbec neodpovědělo. Ostatních 13 žákyň uvedlo:

- žádné problémy s algebraickými výrazy nemám (odpověď se opakovala 4x),
- algebraickým výrazům vůbec nerozumím,
- matematika mě vůbec nebaví,
- ztrácím se v algoritmu pro dělení mnohočlenu mnohočlenem,
- mám problém se vzorci, s jejich zapamatováním,
- algebraické výrazy jsou pro mě španělská vesnice,
- neumím pracovat se závorkami (odpověď se opakovala 3x),
- problém mám nejčastěji se znaménky (odpověď se opakovala 5x),
- ztrácím se v lomených výrazech,
- mám problém se znaménky a s mocninami,
- zapomínám určit, kdy mají dané výrazy smysl (odpověď se opakovala 4x),
- algebraickým výrazům rozumím, ale udělám vždy chybu z vlastní nepozornosti (odpověď se opakovala 2x),
- nevím, jak s výrazem pracovat.

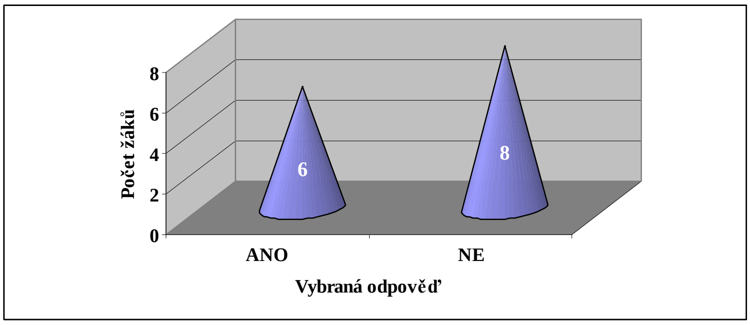
Z uvedených grafů je vidět, že žákyně oboru Sociální činnost algebraickým výrazům při výkladu příliš neporozuměly (na rozdíl od 1. oboru, kde většina žáků látce rozuměla). Navíc pro to, aby dané látce rozuměly, většina z nich příliš nedělá.

Pro získání dalších informací jsem stejné dotazníky rozdala ještě v dalším maturitním oboru na naší škole, kde matematiku nevyučuji. Jedná se o 1. ročník oboru Veřejná správa (hodinová dotace matematiky je 3h/týden). Vyučuji zde předmět Základy společenských věd. Nebyl tedy problém žákům dotazník v hodině ZSV zadat.

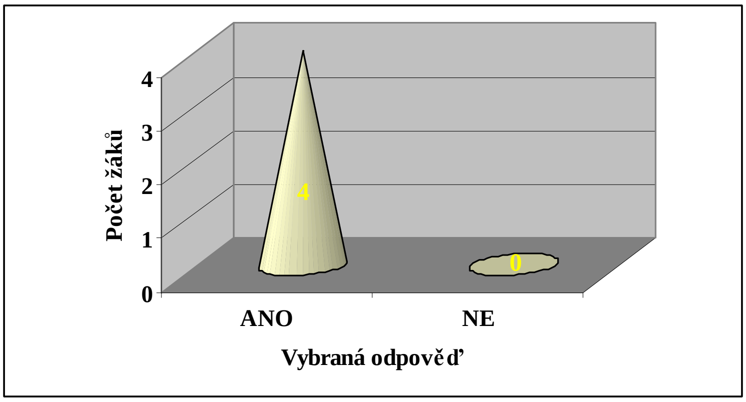
Chtěla jsem totiž získat další informace od jiné třídy, ve které matematiku vyučuje zkušená vyučující matematiky. Zajímal mě její styl práce a také jaké obtíže spatřují její žáci s algebraickými výrazy a zda je zde situace zcela stejná, či jiná. Získala jsem 14 dotazníků a odpovědi jsem opět zpracovala do následujících grafů, které jsem označila Graf 15 až Graf 20 (zadání stejných otázek opět neuvádím).

Rozbor otázek

Otázka č. 1 – Graf 15:

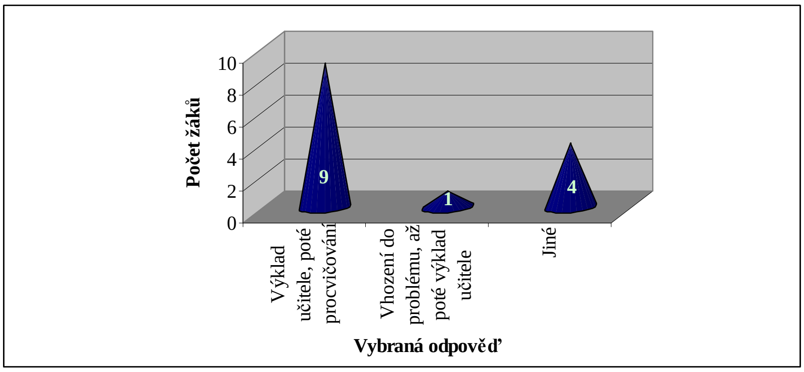


Otázka č. 2 – Graf 16:



Ani v této třídě neumějí žáci dostatečně číst s porozuměním. I zde 4 žákyně, které v předchozí otázce odpověděly ANO, odpověděly i na otázku č. 2, která se týkala pouze těch žáků, kteří v 1. otázce odpověděli NE.

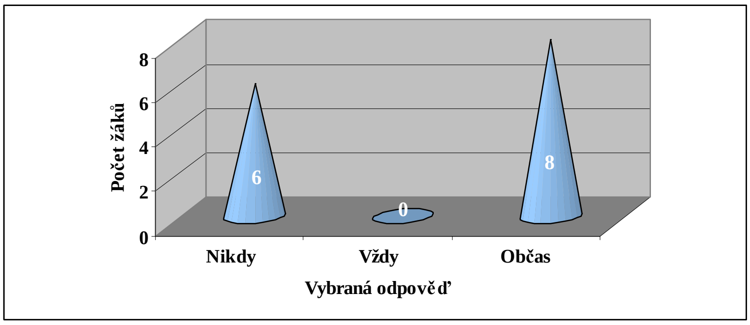
Otázka č. 3 – Graf 17:



4 žákyně v této otázce uvedly, že jim nevyhovuje výklad od jejich učitele, ani tzv. vhození do problému. Pojmem „vhození do problému" mám v dotazníku na mysli situaci, při které jsou žákům předloženy dosud pro ně neznámé úlohy, se kterými se sami musejí poprat, a až poté následuje výklad od učitele. Žákyně uvedly, že jim vyhovuje:

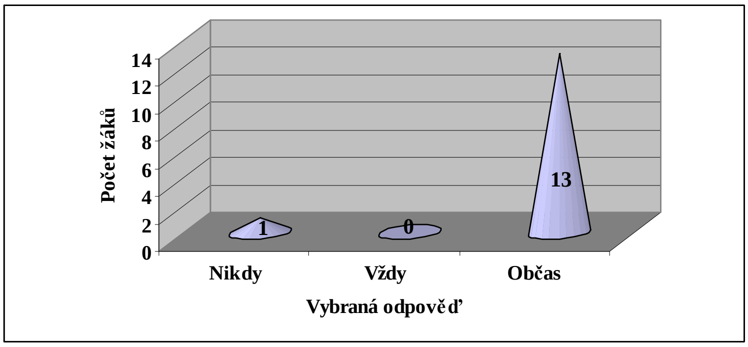
- vysvětlení od učitele, který látku umí vysvětlit a hlavně jí on sám rozumí,
- vysvětlení od spolužačky či jiné kamarádky,
- vysvětlení od někoho jiného, rozhodně ne od mé matikářky,
- vysvětlení od kamaráda.

Otázka č. 4 – Graf 18:



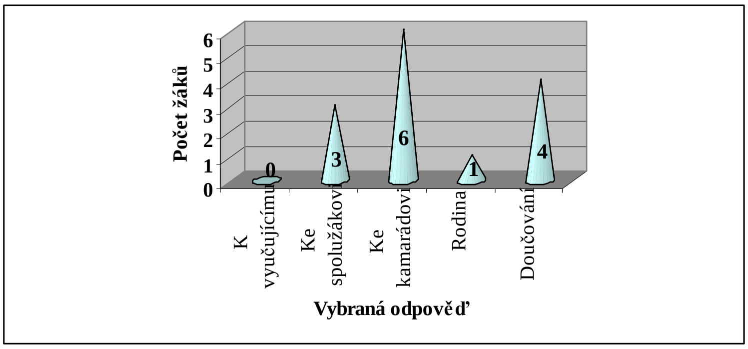
I v této třídě jsou odpovědi žáků v rozporu s děním v hodině (stejně jako ve 2 předchozích třídách). Nerozumím tomu, jak část žáků může odpovědět, že učebnici při výkladu nikdy nepoužívá, a část ji občas používá. Žáci zřejmě neumějí číst zadání otázky.

Otázka č. 5 – Graf 19:



U této otázky nerozumím jedné odpovědi, a sice, že žáci učebnici nikdy nepoužívají, když zbývající část třídy ji používá občas. Žák i zde neporozuměl, na co konkrétně má v dané otázce odpovědět.

Otázka č. 6 – Graf 20:



Pokud žáci probírané látce v této třídě nerozumí, obrací se spíše ke svým kamarádům a spolužákům, či vyhledávají adekvátní doučování. K vyučujícímu se zde žádný žák neobrací, tj. obráceně, než u mých žáků.

Otázka č. 7

Více než 1 důvod uvedli 3 žáci (tyto případy jsem do výsledného přehledu opět zahrnula tak, že u každého důvodu uvádím, kolikrát se odpověď opakovala). 4 žáci na otázku vůbec neodpověděli. Ostatních 10 žáků uvedlo:

- algebraické výrazy nechápu, mám s nimi velké problémy (odpověď se opakovala 5x),
- vůbec jsem je nepochopila, stále nevím, o co se jedná,
- nechápu početní operace s algebraickými výrazy (odpověď se opakovala 2x),
- jsou na mě příliš složité, rozumím jen pár početním operacím,
- mám problém si zapamatovat vzorečky (odpověď se opakovala 2x),
- mám problém s výpočtem mocnin,
- vůbec nevím, k čemu mi to v životě bude (myslím si, že je hlavní vědět, kolik je 2 + 2, a algebraické výrazy k životu nepotřebuji),
- algebraické výrazy nechápu, neboť mi nebyly dostatečně vysvětleny, nechápu je, matematika je přeci o číslech, ne o písmenech,
- algebraické výrazy mi nic neříkají, slyším poprvé v životě.

Některé problémy jsou v této třídě shodné s předchozími třídami. Co se týče například problémů s početními operacemi, se vzorci či s mocninami.

Některé problémy jsou zcela jiné. Žáci například uvádějí „velké problémy“ s výrazy, nerozumějí jim či jsou nespokojeni s vysvětlením od svého učitele.

Překvapující pro mě bylo, že žádný žák z této třídy neuvedl problém se stanovením podmínky, kdy má daný výraz smysl. Ze své zkušenosti vím, že na ni žáci stále zapomínají nebo ji chybně zapíší, proto zde odpověď postrádám.

DOTAZNÍK PRO UČITELE MATEMATIKY

2. typ dotazníku jsem rozdala na naší škole svým kolegyním, dále jsem oslovila své bývalé spolužáky z Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích, o kterých vím, že také učí matematiku (na základní či střední škole). Ještě jsem kontaktovala i další vyučující matematiky okolních škol prostřednictvím e-mailu s prosbou o vyplnění přiloženého dotazníku.

Z celkového počtu 17 odevzdaných a odeslaných dotazníků se mi jich vrátilo pouze 10 (včetně mého). Získala jsem je od 4 mužů a 6 žen. 5 z nich v současné době učí na 2. stupni základní školy a zbývajících 5 na střední škole (z toho 2 učitelky na gymnáziu, další 2 učitelky a 1 učitel na střední odborné škole). Délka praxe oslovených učitelů se pohybuje od 2 do 43 let (konkrétně: 2, 7, 7, 8, 25, 25, 25, 26, 30 a 43 let). Aprobace učitelů jsou následující: MAT + FYZ, BI, VT, DEG, ZT, ZPV (1 oslovený učitel je doposud bez aprobace, magisterské studium nyní dokončuje).

Někteří kolegové se mi omluvili, že jsou nyní časově velmi vytížení a že vyplní dotazník později, někteří vůbec na mou prosbu nereagovali. V případě pozdějšího vyplnění se mi doposud žádný dotazník nevrátil.

Z vrácených dotazníků jsem získala následující informace:

Otázka č. 1 – Jakým způsobem zavádíte žákům algebraické výrazy?

- Práce s číselnými výrazy, pořadí operací, názvy operací, dále popis reálných situací pomocí výrazů s proměnnými, určování hodnoty výrazu, zapisování výrazu, matematizace reálných situací, nakonec operace s výrazy,
- pojem výraz → práce s čísly → početní operace s čísly → algebraický výraz,
- přes geometrii (obsahy, obvody a objemy),
- pojem výraz (slovní a číselný), základní početní výkony, vzorce,
- nejprve číselné výrazy, poté výrazy s proměnnou, dále mnohočleny a počítání s nimi, na závěr vzorce,
- vysvětlením pojmu algebraický výraz a navázání na učivo základní školy,
- žáci mají algebraické výrazy zavedeny již ze základní školy, rozšiřuji s nimi pouze jejich poznatky,
- na konkrétních matematických úlohách,
- nejprve číselný výraz → proměnná → algebraický výraz.

Má odpověď:

- nejprve žákům zavedu pojem výraz, poté jednotlivé typy výrazů (číselné a s proměnnou), dále speciální typy výrazů – mnohočleny (počet proměnných, stupeň mnohočlenu), následně jednotlivé operace s nimi (včetně umocnění dvojčlenu za použití vzorců), na závěr lomené výrazy a operace s nimi.

Otázka č. 2 – Jakým způsobem učivo vykládáte?

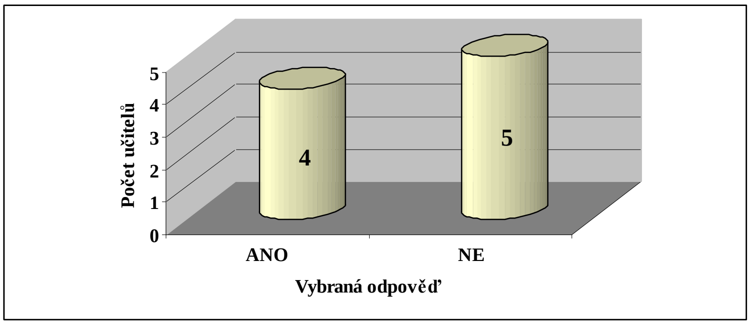
- Krátký výklad + praktické ukázky + společná práce žáků ve skupinách: nastolení problému → matematické algoritmy → řešení,
- tradičně – transmisivně,
- frontálně – uvádění vzorových úloh,
- snažím se dávat žákům otázky, aby sami vyvodili dané učivo,
- názornými úlohami,
- výklad u tabule, konkrétní úlohy, poté zobecnění,
- seznámení se základními definicemi, výpočet ukázkových úloh a následné procvičování,
- výklad, ukázkové úlohy, procvičování,
- řídím se učebnicí, propojuji s úlohami z praxe.

Má odpověď:

- žákům nejprve definuji potřebné pojmy dle učebnice a ukáži několik vzorových úloh, poté procvičujeme (nejprve společně u tabule a následně ve skupině).

Otázka č. 3 – Používáte nějaké didaktické praktiky?

Graf 21:

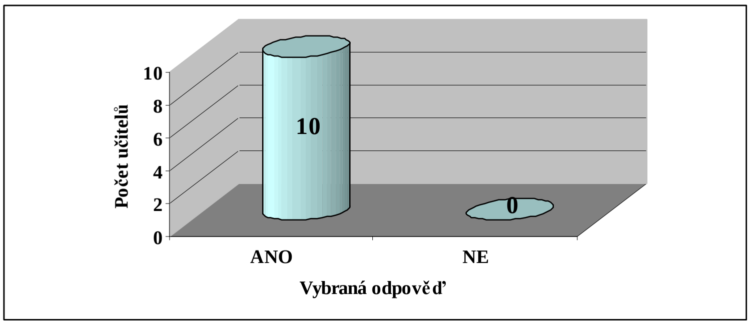


1 paní učitelka zde odpověděla, že otázce nerozumí, proto není její odpověď v grafu zachycena.

Má odpověď je ANO (ve vyučovacích hodinách vždy seznamuji žáky se strukturou vyučovací hodiny, novou látku zavádím tak, že se snažím stavět na předchozích znalostech žáků, a pro procvičování upřednostňuji skupinovou práci a interaktivní tabuli). Kolegové, kteří vybrali stejnou odpověď, uvedli, že používají následující didaktické praktiky: soutěže, hlavolamy, interaktivní tabuli a práci s prekoncepty (navazování na to, co již žáci znají).

Otázka č. 4 – Využíváte při výkladu nějaké učebnice?

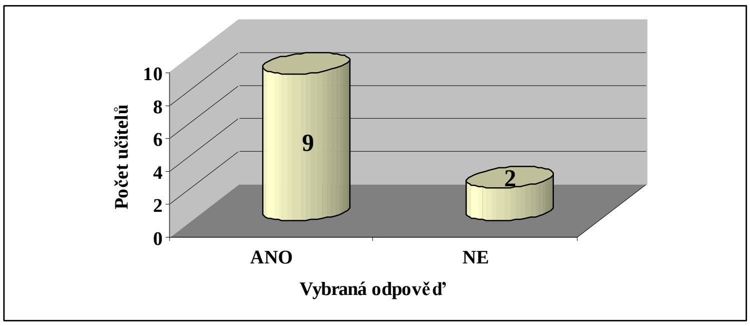
<u>Graf 22:</u>



Z grafu je názorně vidět, že každý oslovený učitel (včetně mě) při svém výkladu využívá nějakou učebnici, která se v dotazníku samozřejmě lišila pro základní a střední školu. V případě střední školy se ještě dále lišila pro gymnázia a pro střední odborné školy.

Otázka č. 5 – Využíváte jiného zdroje než učebnice?

<u>Graf 23:</u>

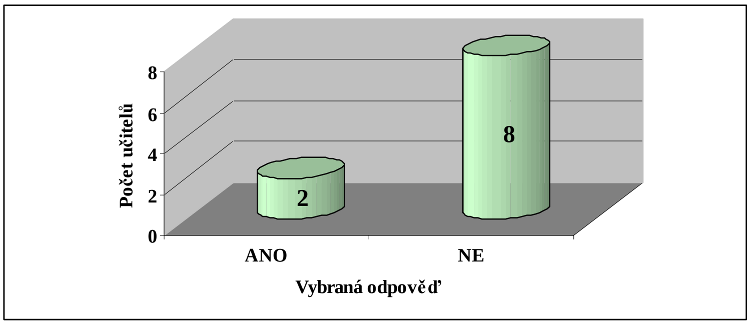


Jiným zdrojem měli učitelé na mysli: různé sbírky úloh, DUMy, internet – webové stránky (především na procvičování), různé testy (příprava na přijímací zkoušky na střední školu), různé rébusy, hlavolamy a vlastní prezentace.

Má odpověď je vlastní DUMy (pro výklad i pro procvičování), dále pro procvičování používám různé internetové učebnice, sbírky úloh, rébusy a didaktické testy k maturitě z matematiky.

Otázka č. 6 – Využíváte při výkladu nějaké modely či doporučení?

Graf 24:



Učitelé, kteří při výkladu využívají nějaké modely či doporučení, uvedli: různé geometrické interpretace na vzorce, sčítání a odčítání mnohočlenů pomocí hmotných objektů (například jablka a hrušky).

Má odpověď je, že využívám model jablka a hrušky.

Otázka č. 7 – Jaká úskalí dle Vás dělají žákům největší problémy při výkladu a následně i při práci s algebraickými výrazy? Jakých chyb se žáci při řešení nejčastěji dopouštějí?

Učitelé odpověděli:

- naučit se zpaměti vzorce pro počítání s mocninami (pletou je dohromady), dále sčítání a odčítání mnohočlenů (odstranění závorek), násobení mnohočlenů (dvojčlen dvojčlenem),

---

Matematický model **jablka a hrušky** je pro žáky vhodný například při součtu (nebo rozdílu) mnohočlenů. Pokud mají žáci obtíže s těmito operacemi, je dobré, aby proměnné v daném mnohočlenu nahradili nějakými zástupnými objekty, které znají z běžného života (na které si mohou sáhnout) a umí s nimi pracovat (v tomto případě sčítat či odčítat jablka a hrušky).

- problémy mají žáci již s pochopením při zavádění proměnné, zapamatováním si vzorců a jejich následném použití v úlohách, často si pletou $(a+b)\cdot(a-b)$ s $(a+b)\cdot(a+b)$,
- špatné používání vzorců či chybný výpočet mocniny, nepozornost,
- laxní přístup žáků při práci se znaménky,
- špatné odstranění závorek a špatné provádění početních výkonů,
- znaménko před závorkou, více neznámých ve výrazu (neumí si představit),
- znaménka, zlomky,
- bezradnost,
- vnímat práci s proměnnou jako operaci s číslem (abstraktní myšlení),
- nezájem, nepochopení, málo procvičování, pochopit pojem proměnná, matematizace slovní úlohy,
- numerické chyby, složitější výrazy (více početních operací, závorky) a orientace v nich,
- násobení součinu, krácení v součtu (rozdílu), vytýkání (-1), postupné vytýkání, vzorce (jejich zapamatování a aplikace).

Má odpověď:

- numerické chyby, práce se znaménky, závorkami (mínus před závorkou), zlomky a odmocninami, nepozornost, vzorce pro druhou a třetí mocninu (neumí do nich dosadit), vytýkání, krácení v součtu a rozdílu, záměna operací, bezradnost a bloudění v úloze (viz kapitola 2.3.2 Typy chyb při práci s algebraickými výrazy) a stanovení podmínky, kdy má daný výraz smysl.

Otázka č. 8 – Jakým způsobem lze dle Vás tato úskalí zvládnout, či alespoň částečně odstranit?

Učitelé odpověděli:

- neustálým procvičováním a opakováním v hodině a v rámci domácí přípravy,

- drilem,
- práce ve skupinách, kde je vždy 1 schopný žák a ten vysvětluje ostatním,
- motivovat žáky pro práci s výrazy a odbourat jejich strach z výrazů.

Má odpověď:

- učivo stále opakovat a procvičovat různé typy úloh nejen v hodině, ale i doma (požadovat po žácích domácí úkoly), zpestřit hodinu praktickými ukázkami, motivovat žáky a pracovat s nimi ve skupině.

Otázka č. 9 – Do jaké míry je dle Vás učivo o algebraických výrazech pro žáka srozumitelné?

1 paní učitelka na otázku neodpověděla. Zbývajících 8 učitelů odpovědělo:

- je obtížné (příliš operací najednou), musí se stále opakovat,
- je průměrné,
- náročnější jsou pro ně logické úlohy,
- co si žák dokáže představit, to umí, s ostatním má problém,
- nejedná se o nejtěžší učivo, pro žáky jsou mnohem náročnější úlohy (například slovní úlohy na rovnice či soustavy rovnic),
- pro většinu představují jen nácvik a zapamatování pravidel, pochopení poté hledá málokterý žák.

Má odpověď:

- učivo je pro žáky značně obtížné (abstraktní), většina se jej nesnaží ani pochopit.

Otázka č. 10 – Jakým způsobem (metodami, praktikami, …) ověřujete míru pochopení žáka?

Učitelé odpověděli:

- ústní opakování základních pojmů na začátku každé hodiny,
- testy,

- písemné práce,
- výpočet u tabule,
- řešení úloh,
- domácí úkoly.

Má odpověď:

- samostatná práce žáků, pozorování žáků v hodině – jejich aktivita, domácí úkoly a domácí aktivita.

Otázka č. 11 – Jaké jevy dle Vás ovlivňují výsledek práce žáka při řešení úloh s algebraickými výrazy?

Učitelé odpověděli:

- motivace, jak ze strany učitele, tak vlastní žákova,
- nedostatečná domácí průprava, málo napočtených úloh, nechuť věnovat se matematice ve volném čase,
- nedostatečné osvojení dovedností při úpravách výrazu (projeví se zde i problémy s výpočty záporných čísel),
- pozornost, pečlivost zápisu, systematičnost,
- domácí příprava,
- zda se žák v hodině soustředí, zda pochopil význam,
- úroveň znalosti ze základní školy,
- častá otázka: „K čemu to budu potřebovat?“,
- malá koncentrovanost na daný problém,
- žáci nemají motivaci, kde danou látku v praxi využijí.

Má odpověď:

- úroveň získaných poznatků žáka v matematice ze základní školy, nízká motivace žáka (nejen ze strany učitele, ale i ze strany žáka), nedůsledná domácí příprava (neochota žáka obětovat svůj volný čas domácí přípravě) a nepozornost žáka.

3.3. Návrhy na reedukaci chyb při práci s algebraickými výrazy

V samostatné písemné práci žáků měla (dle Tabulek 5, 6 a 7 uvedených v kapitole 3.2.5.1.) největší četnost **numerická chyba**. Hned po této chybě měla četné zastoupení **úkonová chyba** a **jiná chyba**. Dále následovala **chyba velkého skoku** a **strategická chyba**. Velmi malou četnost měla **grafická chyba** a poslední typ chyby **bezradnost a bloudění** se u žáků vůbec neobjevil.

U jednotlivých chyb jsem se zamyslela, jakým způsobem je co nejefektivněji zmírnit, či odstranit. Proto v následujícím přehledu uvádím návrhy na reedukaci těchto chyb při práci s algebraickými výrazy.

Numerická chyba

Žák by si měl vždy svou práci rozdělit do časových intervalů tak, aby mu zbyl ještě nějaký čas pro závěrečnou kontrolu práce. Je dobré toto žákům připomenout hned v úvodu hodiny po rozdání pracovních listů, aby si například vyčlenili cca 10 minut před koncem práce na kontrolu svých výpočtů, aby včas případnou numerickou chybu stihli ještě opravit nebo případně i úlohu přepočítat (v případě špatně opsaného zadání, ke kterému došlo například při otáčení jednotlivých listů).

Úkonová chyba

Úkonová chyba je způsobena nedostatečnými nebo chybnými předchozími znalostmi žáka. Pokud žák předchozí znalosti postrádá nebo jsou jeho znalosti chybné, má učitel žáka učivo doučit. Bez těchto znalostí nemá žák šanci zvládnout učivo nové (v tomto případě práci s algebraickými výrazy). Předchozím učivem mám na mysli hlavně práci se závorkami, mocninami a odmocninami a se zlomky. V případě nového učiva má být žák schopný pracovat se vzorci. Pokud není schopný si vzorec zapamatovat, nebo si není jistý jeho správností, či mu zrovna vzorec vypadl z paměti, má vědět, jak si jej může sám odvodit. Pro tento účel žákům ukazuji, proč například $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a to tak, že jim rozepíši vzorec následujícím způsobem: $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$. Jedná se o operaci násobení mnohočlenu mnohočlenem, kterou žáci již znají. Jejich úkolem je roznásobit závorky a sečíst stejné členy.

Grafická chyba

I zde by si měl žák vyčlenit určitý čas pro závěrečnou kontrolu své práce a případnou grafickou chybu opravit.

Chyba velkého skoku

S chybou velkého skoku se musí vypořádat žák sám. On sám si musí uvědomit, že je pro něj lépe pracovat pomaleji, důsledně a správně, než rychleji a chybně.

Strategická chyba

Pro eliminaci strategické chyby se domnívám, že je potřeba se žáky neustále procvičovat, procvičovat a procvičovat stále dokola různé typy úloh. U žáků je nutné časem vypěstovat jistou zkušenost při práci s algebraickými výrazy (samozřejmě ne jen při nich).

Bezradnost a bloudění

I když se tento typ chyby při mém experimentu nevyskytl, ve své praxi jsem se s touto chybou setkala již několikrát. Zde mohu doporučit též procvičování různých typů úloh, které vedou k získání zkušenosti při práci v hodině matematiky.

Jiné chyby

Je dobré, pokud učitel při samostatné práci žáka kontroluje celý postup jeho výpočtu, protože výsledek mohl například žák opsat od svého souseda v lavici (v případě stejné varianty), nebo mohl správně uvažovat, ale špatně si svou úvahu zapsal a jeho výsledek, i když je správný, neodpovídá předchozímu zápisu. Pro žáky zde doporučuji důsledné čtení zadání úloh. Žáci v současné době neumějí číst text s porozuměním, proto je důležité jim stále připomínat: „Zadání úlohy si pozorně přečtěte a nezapomeňte vypracovat všechny úkoly!“

3.4. Shrnutí získaných postřehů z experimentu

Když jsem si důkladně pročetla veškeré odpovědi žáků a zkušených učitelů matematiky z rozdaných dotazníků a zamyslela se, jak by se nejvhodněji daly zmírnit, či v nejlepším případě odstranit chyby a obtíže žáků při řešení algebraických výrazů, došla jsem po opakované analýze k následujícímu závěru.

Z dotazníků je zřejmá shoda učitelů v tom, že se musí daná látka stále procvičovat. Kritická místa při úpravách algebraických výrazů se jak z pohledu žáků, tak i z pohledu učitelů v dotaznících většinou shodovala. Dospěla jsem tedy k závěru, že pokud se celkově nezmění přístup našich žáků k matematice (již od počátku, tzn. od 2. stupně základní školy), neexistuje příliš reedukací, které by poté žáky na střední škole nabudily pro práci s algebraickými výrazy (samozřejmě nejen s nimi). Je nutné změnit celý systém, a to nejen z hlediska uvedeného přístupu žáka, ale i přístupu učitelů matematiky na základní škole.

Každým rokem pociťuji stále větší úbytek žáků v maturitních oborech. Je samozřejmé, že k tomuto úbytku nedochází pouze na naší škole, ale bohužel na všech středních školách. Každá škola je v současné době ráda, že obsadí alespoň částečně jednotlivé obory, a přijme tudíž všechny žáky, kteří se na školu hlásí. Část těchto žáků by však měla spíše navštěvovat nějaký učební obor, na kterém by byli více spokojeni. Maturitní obor si část z nich zvolí například kvůli rodičům.

V loňském roce se po dlouhé době opět dělaly na některých středních školách přijímací zkoušky do 1. ročníku. Přijímací zkoušku tedy konali i moji žáci. V případě 1. experimentální třídy (2 spojených oborů) dělali žáci přijímací zkoušky ze všeobecného přehledu (obor Ekonomika podnikání) a biologie (Přírodovědné lyceum). Žákyně z 2. experimentální třídy (obor Sociální činnost), vypracovávaly pouze test všeobecných znalostí. A právě díky tomu, že se dělají přijímací zkoušky jen z všeobecného přehledu či biologie, dostávají se na maturitní obor žáci s velmi špatnými studijními předpoklady pro matematiku. Většina těchto žáků pak netvoří vhodnou půdu pro vzdělávání na střední škole a jejich příprava k maturitě z matematiky je velmi obtížná. Proto se domnívám, že by se měly na středních školách zavést přijímací zkoušky z matematiky.

3.5. Návrhy na úpravu použitých učebních materiálů

V použitých učebních materiálech jiných autorů navrhuji vhodnější úpravu zadání některých úloh v nich uvedených, které jsem použila pro svoje sbírky řešených a cvičných úloh a pro samostatnou písemnou práci žáků. Shledávám zde například v zadání úlohy v učebnici možnou souvislost absence podmínek, kdy mají dané výrazy smysl s kompletním řešením úlohy žákem.

<u>Jedná se o následující knihy:</u>

- ✓ **Sbírka úloh pro střední školy** (Maturitní minimum) – Kubát, Hrubý & Pilgr (1996)

  Sbírka řešených úloh

  Aby žáci nezapomínali určit v následujících úlohách podmínku, kdy mají dané výrazy smysl, navrhuji zadání těchto úloh formulovat následovně.

  - **Úloha 3 d)** – autoři úlohu (na str. 20) zadali: „Upravte: …“ Můj návrh: „Upravte a v případě potřeby určete podmínku, kdy mají dané výrazy smysl: …“
  - **Úloha 8** – autoři úlohu (na str. 21) zadali: „Upravte: …“ Navrhuji formulaci: „Upravte a určete podmínku, kdy mají dané výrazy smysl: …“ Zcela stejné pro **úlohu 11** (viz učebnice str. 22).

- ✓ **Matematika pro gymnázia** (základní poznatky z matematiky) – Bušek, Boček & Calda (1992)

  Sbírka řešených úloh

  I zde navrhuji jiné zadání úloh.

  - **Úloha 4 –** autoři úlohu (na str. 91) zadali: „Určete podíl mnohočlenů: …“ Navržená formulace: „Určete podíl mnohočlenů a určete podmínku, kdy mají dané výrazy smysl: …“
  - **Úloha 9 –** autoři ji (na str. 101) zadali: „Rozšiřte vhodným výrazem a vyjádřete: …“ Navrhuji: „Rozšiřte vhodným výrazem, určete podmínku, kdy mají dané výrazy smysl, a vyjádřete: …“ **Úlohu 10** autoři (na str. 105) zadali: „Vypočtěte: …“ Navrhuji: „Vypočtěte a určete podmínku, kdy mají dané výrazy smysl: …“

- ✓ **Sbírka úloh z matematiky –** pro SOŠ a pro studijní obory SOU (1. část) – – Jirásek, Braniš, Horák & Vacek (1986)

Sbírka cvičných úloh

Navrhuji následující úpravy.

- **Úloha 4 –** autoři úlohu (na str. 59) zadali: „Vypočtěte pomocí vzorců a pak sečtěte: …“ Přitom se mají dané mnohočleny (v tomto případě tj. $(2a-3)\cdot(2a+3)-(5a-4)\cdot(5a+4)$) odečíst). Zadání jsem pro svou potřebu (do mé sbírky a samostatné písemné práce žáků) přeformulovala: „Vypočtěte pomocí vzorců a pak odečtěte: …“
- **Úloha 8** – autoři úlohu (na str. 62) zadali: „Určete nejvhodnější společný násobek daných výrazů: $x^2+8x+16$; $9x^2-144$“. Nepochopila jsem, co autoři myslí „nejvhodnějším společným násobkem“. Ale dle výsledků, které jsou uvedeny, si myslím, že by mělo být zadání úlohy spíše formulováno: „Určete nejmenší společný násobek daných výrazů: …“, proto jsem zadání úlohy opět pro svou potřebu (do sbírky a samostatné práce) přeformulovala (navíc hned v následující úloze, kterou autoři v učebnici uvádějí, se hledá největší společný dělitel, proto soudím, že se opravdu jedná o nejmenší společný násobek).
- **Úloha 15** – zadání úlohy (na str. 69) jsem i zde přeformulovala, abych žákům připomněla, za jaké podmínky mohou složené zlomky zjednodušit. Autoři uvádí: „Zjednodušte složené zlomky: …“ Navrhuji: „Zjednodušte složené zlomky a určete podmínku, kdy mají smysl: …“

Ve většině učebních materiálů, které jsem pro diplomovou práci použila nejen v rámci praktické části, ale i části teoretické, postrádám dále úlohy na určení definičního oboru algebraického výrazu. Několik úloh jsem našla pouze na straně 21 v knize Sbírka úloh z matematiky pro střední školy od autorů Kubát, Hrubý & Pilgr (1996).

4. ZÁVĚR

Hlavním cílem mé diplomové práce bylo experimentálně ověřit u žáků 1. ročníku střední odborné školy (u 2 různých maturitních oborů), *jakých chyb se žáci nejčastěji dopouštějí při práci s algebraickými výrazy, v čem mají největší obtíže a jaké faktory ovlivňují výsledek jejich práce* (to vše na základě skupinové a domácí práce žáků, po nichž následovala pro experiment „klíčová analýza“ samostatné písemné práce žáků). Dále jsem chtěla zjistit *možné reedukace chyb u žáků* při práci s algebraickými výrazy (na základě dotazníku pro žáky a učitele matematiky).

Pro uvedený experiment jsem vytvořila 2 elektronické sbírky úloh, které určitě využiji i v budoucnu. Domnívám se, že ve výuce algebraických výrazů neusnadní práci pouze mně, ale i žákům a učitelům matematiky na všech typech středních škol (nejen v 1., ale i ve 4. ročníku při závěrečném opakování učiva z matematiky k maturitě). Mám vyzkoušeno, že žáci v hodině raději pracují s interaktivní tabulí, než s tištěnou učebnicí.

Z této diplomové práce lze použít nejen sbírky úloh, ale i různá doporučení, jak se žáky v hodině matematiky pracovat a jak eliminovat jejich obtíže. V práci jsem též popsala faktory, které ovlivňují výsledek práce žáka.

Po zpracování výsledků experimentu jsem dospěla k následujícím závěrům: **Četnost a závažnost chyb** při samostatné písemné práci žáků s algebraickými výrazy **byla u spojeného maturitního oboru Ekonomika podnikání a Přírodovědné lyceum značně nižší než u maturitního oboru Sociální činnost**. Podle mého názoru je to na našem typu školy důsledkem *různé hodinové dotace matematiky*, *různým počtem žáků ve třídě* a *různým oborovým zaměřením* u uvedených oborů. Po vyhodnocení dotazníků jsem zjistila, že **názory žáků a názory zkušených učitelů matematiky na obtíže při práci s algebraickými výrazy se většinou shodovaly**.

Při přípravě sbírek úloh a aktivit se žáky jsem vycházela nejvíce ze zdrojů, které běžně ve výuce používám. Pro tyto zdroje jsem se rozhodla proto, že je mám stále k dispozici a mohu do nich kdykoliv nahlédnout.

Úplným závěrem konstatuji, že můj experiment byl pro mne velmi přínosný a poučný vzhledem k mé další pedagogické činnosti.

5. SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK A GRAFŮ

6. SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

6.1. Literatura

ASTOLFI, Jean-Pierre (1997). *L´erreur, un outil pour enseigner*. In FIALOVÁ, L., *Práce s chybou* (pp. 2) [Diplomová práce]. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Husitská teologická fakulta. Dostupné z
https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/8000826303/14817365/?q={%22______search form___search%22%3A%22lucie+fialov\u00e1%22%2C%22______searchform___butsearch%22%3A%22Vyhledat%22%2C%22______facetform___facets___work Type%22%3A[%22DP%22]%2C%22PNzzpSearchListbasic%22%3A1}&lang=cs

ASTOLFI, Jean-Pierre (2006). *L´erreur, un outil pour enseigner*. In NOVOTNÁ, J., *Chyby, překážky a výuka matematiky* (příručka k projektu OPPA) – Podpora vzdělávání studentů středních škol v přírodovědných předmětech a matematice (pp. 18). Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-745-8

BÍLEK, Vladimír (2014). *Žákovské obtíže a chyby při úpravách algebraických výrazů* (pp. 54 – 60) [Diplomová práce]. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.
Dostupné z https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120175756

BROUSSEAU, Guy (2001). *Les erreurs des élèves en mathématiques*. In NOVOTNÁ, J., *Chyby, překážky a výuka matematiky* (příručka k projektu OPPA) – Podpora vzdělávání studentů středních škol v přírodovědných předmětech a matematice (pp. 20 – 21). Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-745-8

BUŠEK, Ivan; BOČEK, Leo; CALDA, Emil (1992). *Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky* (pp. 85 – 108). Praha: Prometheus. ISBN 80-85849-34-8

CALDA, Emil; PETRÁNEK, Oldřich; ŘEPOVÁ, Jana (1984). *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*, 1. část (pp. 64 – 66). Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-041-1

CIZLEROVÁ, Michaela; KRUPKA, Peter; POLICKÝ, Zdeněk; ŠKAROUPKOVÁ, Blanka (2013). *Matematika pro střední školy: výrazy, rovnice a nerovnice*, 2. díl (pp. 6). Brno: Didaktis. ISBN 978-80-7358-208-1

ČERMÁK, Pavel; ČERVINKOVÁ, Petra (2004). *Odmaturuj! z matematiky 1* (pp. 32). Brno: Didaktis. ISBN 80-7358-014-4

EISENMANN, Petr; NOVOTNÁ, Jarmila; PŘIBYL, Jiří (2014) „*Culture of Solving Problems – one approach to assessing pupils' culture of mathematics problem solving*". In SZARKOVÁ, D.; RICHTÁRIKOVÁ, D.; ZÁHONOVÁ, V. (Eds.), *13th Conference on Applied Mathematics Aplimat 2014* (pp. 115 – 122), STU, Bratislava

HALOUZKA, Alois (2002). *Přehled učiva k maturitní zkoušce z matematiky* (pp. 27). Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-808-8

HEJNÝ, Milan; KUŘINA, František (2001). *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování* (pp. 149 – 160). Praha: Portál. ISBN 80-7178-581-4

HEJNÝ, Milan (2004). *Chyba jako prvek edukační strategie učitele*. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J.; STEHLÍKOVÁ, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*, 1. díl (pp. 63 – 80). Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. ISBN 80-7290-189-3

JIRÁSEK, František; BRANIŠ, Karel; HORÁK, Stanislav; VACEK, Milan (1986). *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*, 1. část (pp. 59 – 69). Praha: Prometheus. ISBN 80-85849-55-0

KUBÁT, Josef.; HRUBÝ, Dag; PILGR, Josef (1996). *Sbírka úloh pro střední školy*: *Maturitní minimum* (pp. 20 – 22). Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-030-6

KULIČ, Václav (1971). *Chyba a učení: Funkce chybného výkonu v učení a v jeho řízení* (pp. 51 – 135). Praha: Státní pedagogické nakladatelství. ISBN 14-299-71

NOVOTNÁ, Jarmila (2014). *Chyby, překážky a výuka matematiky (příručka k projektu OPPA): Podpora vzdělávání studentů středních škol v přírodovědných předmětech a matematice* (pp. 17 – 30). Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-745-8

PALEČKOVÁ, Jana; TOMÁŠEK, Vladislav a kol. (2013). *Matematická gramotnost patnáctiletých žáků* (pp. 19). Praha: Česká školní inspekce. ISBN 978-80-905632-0-9.
Dostupné z
http://www.pisa2012.cz/articles/files/Hlavni_zjisteni_PISA2012.pdf

PAVLICOVÁ, Vladimíra (2010). *Webová aplikace pro výuku základních poznatků z matematiky na základní škole*. [Bakalářská práce]. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Matematicko-fyzikální fakulta.
Dostupné z
http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/vladimira_pavlicova_bp/Vyrazy.php

POLÁK, Josef (2008). *Přehled středoškolské matematiky* (pp. 120). Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-356-1

STEHLÍK, Martin (2010). *Teorie mechanismu poznávacího procesu: edukační technologie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.
Dostupné z http://it.pedf.cuni.cz/strstud/edutech/2009_Stehlik/

ULRYCHOVÁ, Michaela (2011). *Konstrukce poznatků žáky v matematice: na příkladu Pythagorovy věty* (pp. 14). [Dizertační práce]. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.
Dostupné z http://www.vyzkum-mladez.cz/zprava/1339579633.pdf

6.2. Elektronické zdroje

http://chi.cz/prislovi/ceska-prislovi

http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_generick%C3%BDch_model%C5%AF

http://www.probermeto.cz/clanky/kreativni-reseni-problemu-o-kreativite-cps-1-dil

http://cs.wikipedia.org/wiki/Heuristika

http://www.mamnapad.cz/encyklopedie-kreativity/rozcestnik/uvod-a-definice-kreativity/

https://www.google.cz/?gfe_rd=cr&ei=u55VcqnEsWk8wfY8YHQCQ&gws_rd=ssl#q=o%09Vizu%C3%A1ln%C3%AD+p%C5%99edstavivost+%C5%BE%C3%A1ka

https://cs.wikipedia.org/wiki/Organizace_pro_hospod%C3%A1%C5%99skou_spolupr%C3%A1ci_a_rozvoj

http://www.fsps.muni.cz/~tvodicka/data/reader/book-29/02.html

http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka\Prij\skripta3.pdf

http://cs.wikipedia.org/wiki/Konstanta

http://is.muni.cz/el/1423/jaro2004/PSY443/um/Stud_text_prace_se_skupinou.txt

7. PŘÍLOHY

7.1. Příloha A – Sbírka řešených úloh

DEFINIČNÍ OBOR A HODNOTA ALGEBRAICKÉHO VÝRAZU

1. Určete definiční obory následujících algebraických výrazů a zjistěte hodnotu každého z nich pro zadané hodnoty proměnných:

a) $\frac{7}{5x}$, $x = -7$

b) $\frac{x}{4-x}$, $x = 2$

c) $\frac{1}{x^2-64}$, $x = 9$

d) $\frac{2-y}{y^2-y}$, $y = -3$

e) $\frac{3y}{y^2-y-6}$, $y = -1$

f) $\sqrt{y}$, $y = \frac{1}{4}$

g) $\sqrt{2+2z}$, $z = 7$

h) $\frac{4}{\sqrt{z}}$, $z = 121$

i) $\frac{z+15}{\sqrt{-4-4z}}$, $z = -\frac{50}{5}$

Řešení:

Nejprve zjistíme podmínku, kdy mají dané algebraické výrazy smysl, poté zapíšeme jejich definiční obor ($D(f)$) a vypočteme požadovanou hodnotu.

a) $\frac{7}{5x}$ $\rightarrow$ Podmínka: $5x \neq 0 \;/ :5$

$$\underline{x \neq 0}$$

Definiční obor: $D(f) = \boldsymbol{R} - \{0\}$

Hodnota výrazu po dosazení za $x = -7$ je $\underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$.

Výpočet: $\frac{7}{5 \cdot (-7)} = \frac{7}{-35} = -\frac{1}{5}$

b) $\frac{x}{4 - x}$ $\rightarrow$ Podmínka: $4 - x \neq 0 \ / -4$

$-x \neq -4 \ / \cdot (-1)$

$\underline{x \neq 4}$

Definiční obor: $D(f) = \boldsymbol{R} - \{4\}$

Hodnota výrazu po dosazení za $x = 2$ je $\underline{\underline{1}}$.

Výpočet: $\frac{2}{4 - 2} = \frac{2}{2} = 1$

c) $\frac{1}{x^2 - 64}$ $\rightarrow$ Podmínka: $x^2 - 64 \neq 0 \ / +64$

$x^2 \neq 64 \ / \sqrt{\ }$

$\underline{x \neq \pm 8}$

Definiční obor: $D(f) = \boldsymbol{R} - \{\pm 8\}$

Hodnota výrazu po dosazení za $x = 9$ je $\underline{\underline{\frac{1}{17}}}$.

Výpočet: $\frac{1}{9^2 - 64} = \frac{1}{17}$

d) $\frac{2 - y}{y^2 - y}$ $\rightarrow$ Podmínka: $y^2 - y \neq 0$

vytýkání před závorku

$y \cdot (y - 1) \neq 0$

$\underline{y_1 \neq 0}$ $y - 1 \neq 0 \ / +1$

$\underline{y_2 \neq 1}$

Definiční obor: $D(f) = \boldsymbol{R} - \{0;1\}$

Hodnota výrazu po dosazení za $y=-3$ je $\underline{\underline{\frac{5}{12}}}$.

Výpočet: $\frac{2-(-3)}{(-3)^2-(-3)}=\frac{5}{9+3}=\frac{5}{12}$

e) $\frac{3y}{y^2-y-6}$ $\rightarrow$ Podmínka: $y^2-y-6\neq 0$

rozklad v součin kořenových činitelů

$(y-3)\cdot(y+2)\neq 0$

$y-3\neq 0 \;/\; +3$ $\qquad$ $y+2\neq 0 \;/\; -2$

$\underline{y_1\neq 3}$ $\qquad$ $\underline{y_2\neq -2}$

Definiční obor: $D(f)=\boldsymbol{R}-\{-2;3\}$

Hodnota výrazu po dosazení za $y=-1$ je $\underline{\underline{\frac{3}{4}}}$.

Výpočet: $\frac{3\cdot(-1)}{(-1)^2-(-1)-6}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

f) $\sqrt{y}$ $\rightarrow$ Podmínka: $\underline{y\geq 0}$

Definiční obor: $D(f)=\langle 0;+\infty)$

Hodnota výrazu po dosazení za $y=\frac{1}{4}$ je $\underline{\underline{\pm\frac{1}{2}}}$.

Výpočet: $\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}$

g) $\sqrt{2+2z}$ $\rightarrow$ Podmínka: $2+2z\geq 0 \;/\; -2$

$2z\geq -2 \;/\; :2$

$\underline{z\geq -1}$

Definiční obor: $D(f)=\langle -1;+\infty)$

Hodnota výrazu po dosazení za $z=7$ je $\underline{\underline{\pm 4}}$.

Výpočet: $\sqrt{2+2\cdot 7}=\sqrt{16}=\pm 4$

h) $\dfrac{4}{\sqrt{z}}$ $\rightarrow$ Podmínka: $z \geq 0 \quad \wedge \quad z \neq 0$

obě podmínky spojíme dohromady

$\Rightarrow \quad \underline{z > 0}$

Definiční obor: $D(f)=(0;+\infty)$

Hodnota výrazu po dosazení za $z=121$ je $\underline{\underline{\pm\dfrac{4}{11}}}$.

Výpočet: $\dfrac{4}{\sqrt{121}}=\dfrac{4}{\pm 11}=\pm\dfrac{4}{11}$

i) $\dfrac{z+15}{\sqrt{-4-4z}}$ $\rightarrow$ Podmínka: $-4-4z \geq 0 \quad \wedge \quad -4-4z \neq 0$

i zde obě podmínky spojíme dohromady

$\Rightarrow \quad -4-4z > 0 \;/\; +4$

$-4z > 4 /:(-4)$

$\underline{z < -1}$

Definiční obor: $D(f)=(-\infty;-1)$

Hodnota výrazu po dosazení za $z=-\dfrac{50}{5}$ je $\underline{\underline{\pm\dfrac{5}{6}}}$.

Výpočet: $\dfrac{-\dfrac{50}{5}+15}{\sqrt{-4-4\cdot\left(-\dfrac{50}{5}\right)}}=\dfrac{5}{\sqrt{-4+40}}=\dfrac{5}{\sqrt{36}}=\pm\dfrac{5}{6}$

MNOHOČLEN

2. Je dán mnohočlen $Q(x)=7-x^4+2x^2-6x$:

a) určete stupeň
b) vypište členy mnohočlenu
c) napište kubický, kvadratický, lineární a absolutní člen

d) určete koeficient u lineárního a absolutního členu

e) vypočtěte $Q(-4)$, $Q(2)$, $Q(0)$, $Q\left(\frac{2}{5}\right)$, $Q(\sqrt{3})$ a $Q(-\sqrt{5})$

Řešení:

a) 4. stupeň

b) 7, $-x^4$, $2x^2$, $-6x$

c) kvadratický člen je roven $2x^2$, lineární člen je roven $-6x$, absolutní člen je roven 7 a kubický člen není uveden

d) koeficient u lineárního členu je -6 a u absolutního členu 7

e) $Q(-4) = \underline{\underline{-193}}$, $Q(2) = \underline{\underline{-13}}$, $Q(0) = \underline{\underline{7}}$, $Q\left(\frac{2}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{3059}{625}}}$, $Q(\sqrt{3}) = \underline{\underline{4-6\sqrt{3}}}$ a $Q(-\sqrt{5}) = \underline{\underline{6\sqrt{5}-8}}$

Výpočet:

$$Q(-4) = 7-(-4)^4+2\cdot(-4)^2-6\cdot(-4) = 7-256+2\cdot 16+24 = -249+32+24 = \underline{-193}$$

$$Q(2) = 7-2^4+2\cdot 2^2-6\cdot 2 = 7-16+2\cdot 4-12 = -9+8-12 = \underline{-13}$$

$$Q(0) = 7-0^4+2\cdot 0^2-6\cdot 0 = 7-0+2\cdot 0-0 = 7+0-0 = \underline{7}$$

$$Q\left(\frac{2}{5}\right) = 7-\left(\frac{2}{5}\right)^4+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2-6\cdot\left(\frac{2}{5}\right) = 7-\frac{16}{625}+2\cdot\frac{4}{25}-\frac{12}{5} = 7-\frac{16}{625}+\frac{8}{25}-\frac{12}{5} = \frac{4375-16+200-1500}{625} = \underline{\frac{3059}{625}}$$

$$Q(\sqrt{3}) = 7-\left(\sqrt{3}\right)^4+2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-6\cdot\sqrt{3} = 7-9+2\cdot 3-6\sqrt{3} = -2+6-6\sqrt{3} = \underline{4-6\sqrt{3}}$$

$$Q(-\sqrt{5}) = 7-(-\sqrt{5})^4+2\cdot(-\sqrt{5})^2-6\cdot(-\sqrt{5}) = 7-25+2\cdot 5+6\sqrt{5} = -18+10+6\sqrt{5} = \underline{6\sqrt{5}-8}$$

POČETNÍ OPERACE S MNOHOČLENY

3. Upravte:

a) $0{,}7b^2c-\frac{1}{2}bc-1{,}3bc^2+0{,}5bc+0{,}3bc^2-0{,}75b^2c$

b) $(2a^2-3b-1)\cdot(-4ab)$

c) $(2x^2-3x+4)\cdot(x+5)$

d) $(2x^2yz^3-2{,}4x^3y^2z+0{,}6x^2yz^2)\div 0{,}6x^2yz$

(Kubát, Hrubý & Pilgr, 1996: str. 20)

Řešení:

a) $0{,}7b^2c-\frac{1}{2}bc-1{,}3bc^2+0{,}5bc+0{,}3bc^2-0{,}75b^2c=0{,}7b^2c-0{,}5bc-$

$-1{,}3bc^2+0{,}5bc+0{,}3bc^2-0{,}75b^2c=\underline{\underline{-0{,}05b^2c-bc^2}}$

b) $(2a^2-3b-1)\cdot(-4ab)=\underline{\underline{-8a^3b+12ab^2+4ab}}$

c) $(2x^2-3x+4)\cdot(x+5)=2x^3+10x^2-3x^2-15x+4x+20=\underline{\underline{2x^3+7x^2-}}$

$\underline{\underline{-11x+20}}$

d) $(2x^2yz^3-2{,}4x^3y^2z+0{,}6x^2yz^2):0{,}6x^2yz=\underline{\underline{3{,}\overline{3}z^2-4xy+z}}$

Podmínka: $0{,}6x^2yz\neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{x,y,z\neq 0}$

4. Určete podíl mnohočlenů:

a) $(a^7+2):(a+1)$

b) $(14t^5+4t^4-t^3+2t^2+3t+5):(2t^2-1)$

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 91)

Řešení:

Ani v 1 úloze není potřeba uspořádat členy sestupně.

a) $(a^7+2):(a+1)=\underline{\underline{a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1+\frac{1}{a+1}}}$

$-\,(\underline{a^7+a^6})$

$-a^6+2$ nově vzniklý mnohočlen (již 6. st., místo 7.)

$-\,(\underline{-a^6 - a^5})$ postup stále opakujeme

$a^5 + 2$

$-\,(\underline{a^5 + a^4})$

$-a^4 + 2$

$-\,(\underline{-a^4 - a^3})$

$a^3 + 2$

$-\,(\underline{a^3 + a^2})$

$-a^2 + 2$

$-\,(\underline{-a^2 - a})$

$a + 2$

$-\,(\underline{a + 1})$

1 (neúplný podíl $\Rightarrow$ zbytek je roven hodnotě 1)

<u>Podmínka:</u> $a + 1 \neq 0 \ / \ -1$

$\underline{a \neq -1}$

b) $(14t^5 + 4t^4 - t^3 + 2t^2 + 3t + 5) : (2t^2 - 1) = \underline{\underline{7t^3 + 2t^2 + 3t + 2 + \dfrac{6t + 7}{2t^2 - 1}}}$

$-\,(\underline{14t^5 - 7t^3})$

$4t^4 + 6t^3 + 2t^2 + 3t + 5$ nově vzniklý mnohočlen (již 4. st., místo 5.)

$-\,(\underline{4t^4 - 2t^2})$ postup stále opakujeme

$6t^3 + 4t^2 + 3t + 5$

$-\,(\underline{6t^3 - 3t})$

$4t^2 + 6t + 5$

$-\,(\underline{4t^2 - 2})$

$6t + 7$ (neúplný podíl $\Rightarrow$ zbytek je roven hodnotě $6t + 7$)

<u>Podmínka:</u> $2t^2 - 1 \neq 0 \ / \ +1$

$2t^2 \neq 1 \ / \ :2$

$$t^2 \neq \frac{1}{2} \;/\; \sqrt{\ }$$

$$t \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Podmínku upravíme, abychom odstranili odmocninu ze jmenovatele zlomku (*usměrníme* jej): $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Poté dostáváme: $\underline{t \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$

5. Rozložte v součin:

a) $x \cdot (a-1) - y \cdot (1-a)$

b) $3x^2 + 12xy + 12y^2$

c) $x^3 - 9x$

(Kubát, Hrubý & Pilgr, 1996: str. 21)

Řešení:

a) $x \cdot (a-1) - y \cdot (1-a) = x \cdot (a-1) - y \cdot (-1) \cdot (-1+a) = x \cdot (a-1) + y \cdot (a-$
$-1) = \underline{\underline{(a-1) \cdot (x+y)}}$

b) $3x^2 + 12xy + 12y^2 = 3 \cdot (x^2 + 4xy + 4y^2) = \underline{\underline{3 \cdot (x+2y)^2}}$

c) $x^3 - 9x = x \cdot (x^2 - 9) = \underline{\underline{x \cdot (x-3) \cdot (x+3)}}$

6. Rozložte mnohočleny:

a) $xr - yr - x^2 + 2xy - y^2$

b) $(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2$

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 96)

Řešení:

a) $xr - yr - x^2 + 2xy - y^2 = r \cdot (x-y) - 1 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = r \cdot (x-y) -$
$-(x-y)^2 = (x-y) \cdot [r - (x-y)] = \underline{\underline{(x-y) \cdot (r - x + y)}}$

V úloze nejprve vytkneme z 1. 2 členů společného dělitele a ze zbývajících členů hodnotu -1. Po této úpravě vidíme, že můžeme použít vzorec pro 2. mocninu dvojčlenu, a to:

$(a^2 - 2ab + b^2) = (a-b)^2$. Na závěr ještě vytkneme společný výraz $(x-y)$.

b) $(x^2-2x+3)^2-(x^2-2x-3)^2 = [x^2-2x+3-(x^2-2x-3)]\cdot(x^2-2x+$
$+3+x^2-2x-3) = (x^2-2x+3-x^2+2x+3)\cdot(2x^2-4x) = 6\cdot 2x\cdot(x-2) =$
$= \underline{\underline{12x\cdot(x-2)}}$

V úloze jsme použili tentokrát vzorec $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$, kde člen $a=x^2-2x+3$ a člen $b=x^2-2x-3$. Poté jsme pouze upravili.

ROZKLAD KVADRATICKÉHO TROJČLENU V SOUČIN

7. Rozložte v součin:

a) x^2-5x+6

b) x^2-2x-8

c) $2x^2-4x-6$

(Kubát, Hrubý & Pilgr, 1996: str. 21)

Řešení:

a) Podmínka: $r\cdot s=6 \quad \wedge \quad r+s=-5$

$\Rightarrow$ rozklad v součin: $x^2-5x+6=\underline{\underline{(x-2)\cdot(x-3)}}$

b) Podmínka: $r\cdot s=-8 \quad \wedge \quad r+s=-2$

$\Rightarrow$ rozklad v součin: $x^2-2x-8=\underline{\underline{(x-4)\cdot(x+2)}}$

c) Kvadratický trojčlen nejprve upravíme, vytkneme z celého výrazu číslo 2 a získáme: $2\cdot(x^2-2x-3)$

Podmínka: $r\cdot s=-3 \quad \wedge \quad r+s=-2 \quad \Rightarrow$ rozklad v součin: $2x^2-4x-6=2\cdot(x^2-2x-3)=\underline{\underline{2\cdot(x-3)\cdot(x+1)}}$

POČETNÍ OPERACE S LOMENÝMI VÝRAZY

8. Upravte:

a) $\dfrac{2x^2+4x}{x^2-4}$

b) $\dfrac{1-x^2}{(1-x)^2}$

c) $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$

(Kubát, Hrubý & Pilgr, 1996: str. 21)

Řešení:

a) $\dfrac{2x^2+4x}{x^2-4}=\dfrac{2x\cdot\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cdot\cancel{(x+2)}}=\underline{\underline{\dfrac{2x}{x-2}}}$

Podmínka: $x-2\neq 0 \;/\; +2$ $\qquad$ $x+2\neq 0 \;/\; -2$

$\underline{x\neq 2}$ $\qquad$ $\underline{x\neq -2}$

$\Rightarrow \quad x\neq \pm 2$

b) $\dfrac{1-x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{\cancel{(1-x)}\cdot(1+x)}{(1-x)^{\cancel{2}}}=\underline{\underline{\dfrac{1+x}{1-x}}}$

Podmínka: $1-x\neq 0 \;/\; -1$

$-x\neq -1 \;/\; \cdot(-1)$

$x\neq 1$

c) $\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}=\dfrac{\cancel{x-3}}{(x-2)\cdot\cancel{(x-3)}}=\underline{\underline{\dfrac{1}{x-2}}}$

Podmínka: $x-2\neq 0 \;/\; +2$ $\qquad$ $x-3\neq 0 \;/\; +3$

$x\neq 2$ $\qquad$ $x\neq 3$

Ve všech 3 uvedených cvičeních jsme provedli operaci krácení lomeného výrazu za pomoci jednoduché vytýkání společného dělitele, rozkladu mnohočlenu v součin pomocí vzorce pro 2. mocninu, tj. $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ a rozkladu kvadratického trojčlenu v součin.

9. Rozšiřte vhodným výrazem a vyjádřete:

a) $\dfrac{t}{1-a}$ jako lomený výraz se jmenovatelem $a-1$;

b) $\dfrac{x+3}{2-x}$ jako lomený výraz se jmenovatelem x^2-4.

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 101)

Řešení:

a) $$\frac{t}{1-a}=\frac{t}{1-a}\cdot\frac{a-1}{a-1}=\frac{t\cdot\overset{(-1)}{\cancel{(a-1)}}}{\cancel{(1-a)}\cdot(a-1)}=\underline{\underline{-\frac{t}{a-1}}}$$

Podmínka: $1-a\neq 0\ /\ -1$ $\qquad$ $a-1\neq 0\ /\ +1$

$-a\neq -1\ /\ \cdot(-1)$ $\qquad$ $\underline{a\neq 1}$

$\underline{a\neq 1}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ stejné, proto pouze: $a\neq 1$

b) $$\frac{x+3}{2-x}=\frac{x+3}{2-x}\cdot\frac{x+2}{x+2}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)}{(2-x)\cdot(x+2)}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)}{(-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=$$

$$=-\frac{x^2+2x+3x+6}{x^2-4}=\underline{\underline{-\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}}}$$

Podmínka: $2-x\neq 0\ /\ -2$ $\qquad$ $x+2\neq 0\ /\ -2$

$-x\neq -2\ /\ \cdot(-1)$ $\qquad$ $\underline{x\neq -2}$

$\underline{x\neq 2}$ $\qquad \Rightarrow \qquad$ $x\neq \pm 2$

V obou cvičeních jsme použili operaci násobení a krácení mnohočlenů.

10. Vypočtěte:

a) $$\frac{4}{3x-3y}-\frac{3x-4y}{2x^2-4xy+2y^2}$$

b) $$\frac{1}{t-1}+\frac{t-1}{t+1}-\frac{4t}{t^2-1}-1$$

(Bušek, Boček & Calda, 1992: str. 105)

Řešení:

a) $$\frac{4}{3x-3y}-\frac{3x-4y}{2x^2-4xy+2y^2}=\frac{4}{3\cdot(x-y)}-\frac{3x-4y}{2\cdot(x-y)^2}=\underline{\underline{\frac{4y-x}{6\cdot(x-y)^2}}}$$

Podmínka: $x-y\neq 0\ /\ +y$

$x\neq y$

Ve cvičení jsme využili předchozích znalostí žáka (jednoduché vytýkání společného dělitele a vzorec pro 2. mocninu dvojčlenu, tj. $(a-b)^2$). Poté jsme zapsali dané lomené výrazy na společného jmenovatele a upravili (pomocí operací s mnohočleny).

b) $$\frac{1}{t-1}+\frac{t-1}{t+1}-\frac{4t}{t^2-1}-1=\frac{1}{t-1}+\frac{t-1}{t+1}-\frac{4t}{(t-1)\cdot(t+1)}-1=$$

$$=\frac{t+1+(t-1)^2-4t-1\cdot(t-1)\cdot(t+1)}{(t-1)\cdot(t+1)}=\frac{t+1+(t-1)^2-4t-1\cdot(t^2-1)}{(t-1)\cdot(t+1)}=$$

$$=\frac{1-3t+(t-1)^2-t^2+1}{(t-1)\cdot(t+1)}=\frac{2-3t+t^2-2t+1-t^2}{(t-1)\cdot(t+1)}=\underline{\underline{\frac{3-5t}{t^2-1}}}$$

Podmínka: $t-1\neq 0\ /\ +1$ $\qquad$ $t+1\neq 0$

$\underline{t\neq 1}$ $\qquad$ $\underline{t\neq -1}$

$\Rightarrow \quad t\neq \pm 1$

I zde jsme vyšli z předchozích znalostí žáka (vzorce pro 2. mocninu dvojčlenu, tj. a^2-b^2). Poté jsme opět zapsali dané lomené výrazy na společného jmenovatele a upravili (pomocí operací s mnohočleny).

11. Upravte:

a) $\dfrac{5a-5b}{4a+4b}\cdot\dfrac{8a+8b}{15a-15b}$

b) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a}{(a+b)^2}$

c) $\dfrac{c+d}{c-d}:\dfrac{c^2+cd}{c^2-d^2}$

d) $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}}{\dfrac{8}{4-x^2}}$

(Kubát, Hrubý & Pilgr, 1996: str. 22)

Řešení:

a) $$\frac{5a-5b}{4a+4b}\cdot\frac{8a+8b}{15a-15b}=\frac{\cancel{5}\cdot(\cancel{a-b})}{\cancel{4}\cdot(\cancel{a+b})}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot(\cancel{a+b})}{\underset{3}{\cancel{15}}\cdot(\cancel{a-b})}=\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Podmínka: $a+b\neq 0\ /\ -b$ $\qquad$ $a-b\neq 0\ /\ +b$

$\underline{a \neq -b}$ $\qquad$ $\underline{a \neq b}$ $\qquad \Rightarrow \qquad a \neq \pm b$

Ve cvičení jsme provedli jednoduché vytýkání společných dělitelů a zkrátili stejné výrazy. Poté jsme vynásobili.

b) $$\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\frac{a}{(a+b)^2}=\frac{(a-b)\cdot\cancel{(a+b)}}{\cancel{a^2}}\cdot\frac{\cancel{a}}{\cancel{(a+b)^2}}=\frac{a-b}{a\cdot(a+b)}=\frac{a-b}{a^2+ab}$$

$a \qquad a+b$

Podmínka: $\quad a \neq 0 \qquad a+b \neq 0 \;/\; -b$

$a \neq -b$

Ve cvičení jsme použili vzorec pro 2. mocninu dvojčlenu a^2-b^2, poté jsme zkrátili stejné výrazy a na závěr vynásobili.

c) $$\frac{c+d}{c-d}\div\frac{c^2+cd}{c^2-d^2}=\frac{c+d}{c-d}:\frac{c\cdot(c+d)}{(c+d)\cdot(c-d)}=\frac{c+\cancel{d}}{c-\cancel{d}}\cdot\frac{(c+d)\cdot\cancel{(c-d)}}{c\cdot\cancel{(c+d)}}=$$

$$=\frac{c+d}{c}$$

Podmínka: $\quad c-d \neq 0 \;/\; +d \qquad c+d \neq 0 \;/\; -d$

$\underline{c \neq d} \qquad \underline{c \neq -d} \qquad \Rightarrow \qquad c \neq \pm d$

$c \neq 0$

Ve cvičení jsme nejprve v čitateli druhého zadaného lomeného výrazu použili operaci jednoduché vytýkání společného dělitele a ve jmenovateli téhož výrazu vzorec pro 2. mocninu dvojčlenu, tj. a^2-b^2. Poté jsme převedli operaci dělení na násobení, zkrátili stejné výrazy a na závěr vynásobili.

d) $$\frac{\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}}{\frac{8}{4-x^2}}=\frac{\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x-2)\cdot(x+2)}}{\frac{8}{(2+x)\cdot(2-x)}}=\frac{x^2+4x+4-(x^2-4x+4)}{(x-2)\cdot(x+2)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(2+x)\cdot(2-x)}{8}=\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4}{\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+2)}}\cdot\frac{\cancel{(2+x)}\cdot\cancel{(2-x)}}{8}=-\frac{\cancel{8}x}{\cancel{8}}=$$

$$\underline{\underline{-x}}$$

(-1)

Podmínka: $x-2 \neq 0 \;/+2$ $\quad x+2 \neq 0 \;/-2$

$$\underline{x \neq 2} \qquad \underline{x \neq -2} \qquad \Rightarrow \qquad x \neq \pm 2$$

Čitatele složeného zlomku jsme nejprve uvedli na společného jmenovatele a v jeho jmenovateli jsme použili stejný vzorec pro 2. mocninu dvojčlenu jako v předchozím cvičení. Následně jsme v čitateli použili další dva vzorce, tj. $(a \pm b)^2$. Poté jsme převedli operaci dělení na násobení, sečetli a odečetli vzniklé členy a zkrátili stejné výrazy. Podmínka je zde stejná i pro výrazy $2+x$ a $2-x$, proto ji již neuvádíme.

7.2. Příloha B – Sbírka cvičných úloh

1. Stanovte definiční obor *D*(*f*) uvedených výrazů a zjistěte hodnotu každého z nich pro zadané hodnoty proměnných:

a) $-2x^2 + \frac{2}{7}x$, $\quad x = 0$

b) $\log\;(2x+4)$, $\quad x = 0$

c) $z^2 - \frac{9}{\sqrt{3}}z$, $\quad z = \sqrt{3}$

d) $\frac{6}{2y^2 - 2y - 12}$, $\quad y = -\frac{1}{2}$

e) $\sqrt{\frac{1}{16}z^2}$, $\quad z = \sqrt{3}$

f) $\sqrt{1-5y} + 7y$, $\quad y = -\frac{1}{2}$

g) $\frac{4x}{\sqrt{2-2x}}$, $\quad x = 0$

2. U mnohočlenu $P(a) = a^3 - \frac{1}{3}a + 2a^2 - 3$:

a) uspořádejte členy sestupně

b) vypište členy mnohočlenu

c) určete stupeň

d) napište kubický a absolutní člen

e) určete koeficient u kvadratického a lineárního členu

f) vypočtěte $P(-3)$, $P(0)$, $P(\sqrt{3})$, $P\left(\frac{1}{3}\right)$ a $P\left(-\frac{1}{3}\right)$

3. Upravte:

a) $-c+b^4-2a^2+b^2+\frac{1}{2}c-3b^4-a^2=$

b) $(d^5-4d+5d^3-11)-(6d-11+d^5-5d^3)=$

c) $e^2-2e-\{-5e-[2e-(2e-2e^2-5)-1]+2\}=$

d) $(f^2+2fg+g^2)\cdot(g-3)=$

e) $(m+2n)\cdot(-n^2)\cdot(m-11)=$

f) $\left[o\cdot(o+o^2-2)-o^2\cdot(1+o)\right]\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=$

g) $(9p^2qr-27p^3q^2+0{,}6qr^2):0{,}3pq^2r=$

pro $p,q,r\neq 0$

h) $(64p^5-p^3-\frac{1}{8}p^2+36p):(-4p^2)=$

pro $p\neq 0$

i) $(5s-6-s^2):(2-s)=$

pro $s\neq 2$

j) $(6-4t+t^5-3t^2):(2-t^2)=$

pro $t\neq\pm\sqrt{2}$

k) $(10+2u^2-6u):(u-2)=$

pro $u\neq 2$

4. Vypočtěte pomocí vzorců a pak odečtěte:

$(2a-3)\cdot(2a+3)-(5a-4)\cdot(5a+4)=$

(Jirásek, Braniš, Horák & Vacek, 1986: str. 59)

5. Vypočtěte dané mocniny a proveďte zkoušku pro daná čísla:

a) $(x-2y+2)^2$, $x=3$, $y=3$

b) $(x^2+2x-2)^2$, $x=0{,}4$

(Jirásek, Braniš, Horák & Vacek, 1986: str. 59)

6. Rozložte v součin:

a) $f^6 - f^9 =$

b) $48g^3h^2 - 56g^2h^4 =$

c) $(k-l)^3 - 1\cdot(k-l)^2 =$

d) $(m+n)\cdot o + o^2 + mn =$

e) $(p-q+2r)^2 - (2p-q-r)^2 =$

f) $y^2 - 1 + 4y =$

g) $3z^2 - 2 + 5z =$

h) $(3u-v)^2 - w^2 =$

7. Umocněte podle vhodného vzorce pro druhou a třetí mocninu:

a) $(0{,}1e^2 + 3f)^2 =$

b) $\left(g - \frac{1}{5}h\right)^2 =$

c) $(-4i - j)^2 =$

d) $\left(0{,}3k + \frac{1}{2}l\right)^3 =$

e) $(-3+2l)^3 =$

8. Určete nejmenší společný násobek daných výrazů:

$x^2 + 8x + 16$; $9x^2 - 144$

(Jirásek, Braniš, Horák & Vacek, 1986: str. 62)

9. Určete největší společný dělitel daných výrazů:

$x^3 + y^3$; $x^2 + 2xy + y^2$; $x^2 - y^2$

(Jirásek, Braniš, Horák & Vacek, 1986: str. 62)

10. Rozšiřte dané výrazy hodnotou uvedenou v závorce a určete podmínku, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{x-10}{10+x}$ $\quad (x-10)$

b) $\dfrac{3}{2y+6}$ $\quad (-3y^2)$

c) $\dfrac{x}{2\sqrt{x}}$ $\quad (\sqrt{x})$

d) $\dfrac{13}{\sqrt{13}-1}$ $\quad (\sqrt{13}+1)$

11. Zkraťte dané výrazy a určete podmínku, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{144x^4y^2z}{24xyz^3} =$

b) $\dfrac{81-u^2}{u^2-9u} =$

c) $\dfrac{125w-5w^3}{w^2-10w+25} =$

d) $\dfrac{8-p^3}{p^2-4} =$

12. Úpravou jmenovatelů zlomků v dané rovnici určete číslo A tak, aby platila rovnost: $\dfrac{2x-3y}{5x-y} = \dfrac{A}{25x^2-y^2}$, pro $x \neq \pm\dfrac{y}{5}$.

(Jirásek, Braniš, Horák & Vacek, 1986: str. 66)

13. Upravte dané výrazy a určete podmínku, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{2c-1}{2c} + \dfrac{1}{2c-4c^2} =$

b) $\dfrac{6f}{e^2-f^2} + \dfrac{3}{e+f} =$

c) $\dfrac{g-1}{g+g^2} - \dfrac{g+2}{2g+2g^2} - \dfrac{g-3}{g^2-1} =$

d) $\dfrac{h^3}{3h-i}\cdot\left(\dfrac{1}{h}-\dfrac{3}{i}\right)=$

e) $\left(1-\dfrac{1-2j^2}{1-j}+j\right)\cdot\left(\dfrac{j-1}{2-j}\right)=$

f) $\dfrac{5-5k+5k^2}{k^2-25}:\dfrac{1+k^3}{5k^2-25-20k}=$

g) $\left(1+l-\dfrac{1-2l^2}{l+1}\right):\left(-1+\dfrac{1-l}{1+l}\right)=$

14. Zjednodušte dané výrazy a určete podmínku, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{16}{\dfrac{2a}{4}-\dfrac{4}{a}}\cdot\left(2a^2-8\right)=$

b) $\dfrac{\dfrac{15a}{b}+\dfrac{6b}{a}}{\dfrac{3}{b}-\dfrac{9}{a}}=$

c) $\dfrac{\dfrac{c^2-49}{12-4c}}{\dfrac{c^2-7c}{(c-3)^2}}=$

d) $\dfrac{\dfrac{c}{c+1}-\dfrac{c-1}{c}}{\dfrac{c}{c-1}-\dfrac{c+1}{c}}=$

e) $\dfrac{\dfrac{12}{d-4}+4+d}{3-\dfrac{d+d^2-8}{d-4}-2}=$

f) $\left(d^2+e^2-2de\right)\cdot\left(\dfrac{2-\dfrac{e}{d}}{-\dfrac{e}{d}+2}\right):\dfrac{1}{d-e}=$

15. Zjednodušte složené zlomky a určete podmínku, kdy mají smysl:

a) $\dfrac{\dfrac{6x}{yz}}{\dfrac{8xz}{y}} =$

b) $\dfrac{x^2 + \dfrac{1}{x}}{x + \dfrac{1}{x} - 1} =$

c) $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}} =$

(Jirásek, Braniš, Horák & Vacek, 1986: str. 69)

Výsledky

1.a) $D(f) = \boldsymbol{R}$, hodnota je 0; b) $D(f) = (-2; \infty)$, hodnota je přibližně 0,6; c) $D(f) = \boldsymbol{R}$, hodnota je -6; d) $D(f) = \boldsymbol{R} - \{-2; 3\}$, hodnota je $-\dfrac{4}{7}$; e) $D(f) = \boldsymbol{R}$, hodnota je $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; f) $D(f) = \left(-\infty; \dfrac{1}{5}\right\rangle$, hodnota je $\sqrt{\dfrac{7}{2}} - \dfrac{7}{2}$ (přibližně $-1{,}6$); g) $D(f) = (-\infty; 1)$, hodnota je 0

2.a) $P(a) = a^3 + 2a^2 - \dfrac{1}{3}a - 3$; b) a^3, $2a^2$, $-\dfrac{1}{3}a$, -3; c) 3. stupeň (tj. kubický mnohočlen); d) a^3, -3; e) 2, $-\dfrac{1}{3}$; f) $P(-3) = -11$, $P(0) = -3$, $P(\sqrt{3}) = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} + 3$, $P\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{77}{27}$ a $P\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{73}{27}$

3.a) $-2b^4 + b^2 - 3a^2 - \dfrac{1}{2}c$; b) $10d^3 - 10d$; c) $3e^2 + 3e + 2$; d) $g^3 - 3g^2 - 3f^2 +$ $+ f^2g + 2fg^2 - 6fg$; e) $22n^3 - 2mn^3 - m^2n^2 + 11mn^2$; f) $\dfrac{o}{2}$; g) $\dfrac{30p}{q} - \dfrac{90p^2}{r} +$

$+\dfrac{2r}{pq}$; h) $-16p^3+\dfrac{1}{4}p+\dfrac{1}{32}-\dfrac{q}{p}$; i) $s-3$; j) $-t^3-2t+3$; k) $2u-2+\dfrac{6}{u-2}$

4. $-21a^2+7$

5.a) 1; b) 1,0816

6.a) $f^6\cdot(1-f)\cdot(f^2+f+1)$; b) $8g^2h^2\cdot(6g-7h^2)$; c) $(k-l)^2\cdot(k-l-1)$; d) $(m+o)\cdot(n+o)$; e) $(3p-2q+r)\cdot(3r-p)$; f) $(y+2-\sqrt{5})\cdot(y+2+\sqrt{5})$; g) $\left(z-\dfrac{1}{3}\right)\cdot(z+2)$; h) $(3u-v+w)\cdot(3u-v-w)$

7.a) $0{,}01e^4+0{,}6e^2f+9f^2$; b) $g^2-\dfrac{2}{5}gh+\dfrac{1}{25}h^2$; c) $16i^2+8ij+j^2$; d) $0{,}027k^3+0{,}135k^2l+0{,}225kl^2+0{,}125l^3$; e) $8l^3-36l^2+54l-27$

8. $9\cdot(x^2-16)\cdot(x-4)$

9. $x+y$

10.a) $\dfrac{(x-10)^2}{x^2-100}$, $x\neq\pm10$; b) $\dfrac{9y^2}{6y^3+18y^2}$, $y\neq0$, $y\neq-3$; c) $\dfrac{x\sqrt{x}}{2x}$, $x\neq0$, $x>0$; d) $\dfrac{13\sqrt{13}+13}{12}$

11.a) $\dfrac{6x^3y}{z^2}$, $x,y,z\neq0$; b) $-\dfrac{9+u}{u}$, $u\neq0$, $u\neq9$; c) $-\dfrac{25w+5w}{w-5}$, $w\neq5$; d) $-\dfrac{p^2+2p+4}{p+2}$; $p\neq\pm2$

12. $10x^2-13xy-3y^2$

13.a) $\dfrac{2-2c}{1-2c}$, $c\neq0$, $c\neq\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{3}{e-f}$, $e\neq\pm f$; c) $\dfrac{4+g-g^2}{2g^3-2g}$, $g\neq0$, $g\neq\pm1$; d) $-\dfrac{h^2}{i}$, $h\neq0$, $i\neq0$, $h\neq\dfrac{1}{3}i$; e) $-\dfrac{j^2}{2-j}$, $j\neq1$, $j\neq2$; f) $\dfrac{25k^2-100k-125}{k^3+k^2-25k-25}$; $k\neq\pm5$, $k\neq-1$, $k^2-k+1\neq0$; g) $-\dfrac{3l+2}{2}$, $l\neq-1$, $l\neq0$

14.a) $64a+128$, $a \neq 0$, $a \neq 2$; b) $\frac{5a+2b}{a-3b}$, $a,b \neq 0$, $a \neq 3b$; c) $-\frac{c^2+4c-21}{4c}$, $c \neq 0$, $c \neq 3$, $c \neq 7$; d) $\frac{c-1}{c+1}$, $c \neq 0$, $c \neq \pm 1$; e) -1, $d \neq \pm 2$, $d \neq 4$; f) $(d-e)^3$, $d \neq 0$, $d \neq e$, $d \neq \frac{e}{2}$

15.a) $\frac{3}{4z^2}$, $x,y,z \neq 0$; b) $x+1$, $x \neq 0$, $x^2-x+1 \neq 0$; c) $\frac{x^2y^2}{x-y}$, $x,y \neq 0$, $x \neq y$, $x^2+xy+y^2 \neq 0$

7.3. Příloha C – Samostatná písemná práce žáků

Autor: ………………………………………..

Obor/ročník: …………………………………

1. Stanovte definiční obor *D*(*f*) uvedených výrazů a zjistěte hodnotu každého z nich pro zadané hodnoty proměnných:
   a) $\log(2x+4)$, $x=0$
   b) $\frac{6}{2y^2-2y-12}$, $y=-\frac{1}{2}$
   c) $\sqrt{1-5y}+7y$, $y=-\frac{1}{2}$

2. U mnohočlenu $P(a)=a^3-\frac{1}{3}a+2a^2-3$:
   a) uspořádejte členy sestupně
   b) určete stupeň
   c) napište absolutní člen
   d) určete koeficient u kvadratického členu
   e) vypočtěte $P(\sqrt{3})$ a $P\left(-\frac{1}{3}\right)$

3. Je dán mnohočlen $Q(b)=9b^5-b^3+5b^2-\sqrt{5}b$.

Vyberte správnou odpověď:

a) Mnohočlen Q se nazývá **kubický mnohočlen**. **ANO / NE**

b) $Q(\sqrt{2}) = 34\sqrt{2} - \sqrt{10} + 10$ **ANO / NE**

c) **Lineární člen** je roven $\sqrt{5}b$. **ANO / NE**

d) **Koeficient u kvadratického členu** je 5. **ANO / NE**

4. Upravte:

a) $e^2 - 2e - \{-5e - [2e - (2e - 2e^2 - 5) - 1] + 2\} =$

b) $(m + 2n) \cdot (-n^2) \cdot (m - 11) =$

c) $(64p^5 - p^3 - \frac{1}{8}p^2 + 36p) : (-4p^2) =$

pro $p \neq 0$

d) $(6 - 4t + t^5 - 3t^2) : (2 - t^2) =$

pro $t \neq \pm\sqrt{2}$

5. Vypočtěte pomocí vzorců a pak odečtěte:

$(2a - 3) \cdot (2a + 3) - (5a - 4) \cdot (5a + 4) =$

6. Rozložte v součin:

a) $(p - q + 2r)^2 - (2p - q - r)^2 =$

b) $3z^2 - 2 + 5z =$

7. Umocněte podle vhodného vzorce pro druhou a třetí mocninu:

a) $(-4i - j)^2 =$

b) $(-3 + 2l)^3 =$

8. Určete nejmenší společný násobek daných výrazů:

$x^2 + 8x + 16$; $9x^2 - 144$

9. Rozšiřte výraz hodnotou uvedenou v závorce: $\frac{13}{\sqrt{13} - 1}$ $(\sqrt{13} + 1)$

10. Zkraťte daný výraz a určete podmínku, kdy má smysl: $\frac{8 - p^3}{p^2 - 4} =$

11. Úpravou jmenovatelů zlomků v dané rovnici určete číslo A tak, aby platila rovnost pro $x \neq \pm\frac{y}{5}$: $\frac{2x-3y}{5x-y} = \frac{A}{25x^2-y^2}$.

12. Zjednodušte dané výrazy a určete podmínku, kdy mají smysl:

a) $\left(1-\frac{1-2j^2}{1-j}+j\right)\cdot\left(\frac{j-1}{2-j}\right)=$

b) $\dfrac{\frac{c}{c+1}-\frac{c-1}{c}}{\frac{c}{c-1}-\frac{c+1}{c}}=$

c) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}=$

Výsledky

1.a) $D(f)=(-2;\infty)$, hodnota je přibližně 0,6; b) $D(f)=\boldsymbol{R}-\{-2;3\}$; hodnota je $-\frac{4}{7}$; c) $D(f)=\left(-\infty;\frac{1}{5}\right\rangle$; hodnota je přibližně $-1{,}6$

2.a) $P(a)=a^3+2a^2-\frac{1}{3}a-3$; b) 3. stupeň (tj. kubický mnohočlen); c) -3; d) 2;

e) $P(\sqrt{3})=\frac{8\sqrt{3}}{3}+3$ a $P\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{73}{27}$

3.a) NE; b) ANO; c) NE; d) ANO

4.a) $3e^2+3e+2$; b) $22n^3-2mn^3-m^2n^2+11mn^2$; c) $-16p^3+\frac{1}{4}p+\frac{1}{32}-\frac{q}{p}$;

d) $-t^3-2t+3$

5. $-21a^2+7$

6.a) $(3p-2q+r)\cdot(3r-p)$; b) $\left(z-\frac{1}{3}\right)\cdot(z+2)$

7.a) $16i^2 + 8ij + j^2$; b) $8l^3 - 36l^2 + 54l - 27$

8. $9 \cdot (x^2 - 16) \cdot (x - 4)$

9. $\frac{13\sqrt{13} + 13}{12}$

10. $-\frac{p^2 + 2p + 4}{p + 2}$, $p \neq \pm 2$

11. $10x^2 - 13xy - 3y^2$

12.a) $-\frac{j^2}{2 - j}$, $j \neq 1$, $j \neq 2$; b) $\frac{c - 1}{c + 1}$, $c \neq 0$, $c \neq \pm 1$; c) $\frac{x^2 y^2}{x - y}$, $x, y \neq 0$, $x \neq y$, $x^2 + xy + y^2 \neq 0$

7.4. Příloha D – Dotazník pro žáky

VÝZKUMNÉ OTÁZKY – ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Obor/ročník: ………………………/………..

Vyberte správnou odpověď:

1. Při probírání učiva s algebraickými výrazy jsem učivu rozuměl(a):
   - ☐ Ano
   - ☐ Ne
2. V případě, že ne, měl(a) jsem možnost dodatečného vysvětlení vyučujícím?
   - ☐ Ano
   - ☐ Ne
3. Vyhovuje ti spíše:
   - ☐ Výklad učitele, poté procvičování

- Vhození do problému, až poté výklad učitele
- Jiné? Jaké: ……………………………………………………….

4. Používáte při hodině (při výkladu) učebnici?

- Nikdy
- Vždy
- Občas

5. Při procvičování používáte učebnici?

- Nikdy
- Vždy
- Občas

6. Pokud probírané látce nerozumíš, jdeš raději na konzultaci k příslušnému vyučujícímu nebo ke spolužákovi, kamarádovi, někomu z rodiny či na doučování?

- K vyučujícímu
- Ke spolužákovi
- Ke kamarádovi
- Rodina
- Doučování

7. Jaké největší problémy ti přinášejí algebraické výrazy a jaké problémy konkrétně s nimi máš?

7.5. Příloha E – Dotazník pro učitele matematiky

VÝZKUMNÉ OTÁZKY – ALGEBRAICKÉ VÝRAZY

Aprobace/počet let praxe/žena (muž): …………………/………./……………

1. Jakým způsobem zavádíte žákům algebraické výrazy?

……………………………………………………………………………..……

…..

....

2. Jakým způsobem učivo vykládáte?

……………………………………………………………………………………...

…...…………………………………………………………………………..……...

………..………………………………………………………………………………

3. Používáte nějaké didaktické praktiky?

- ☐ Ano
- ☐ Ne

Pokud ano, prosím, uveďte jaké.

……………………………………………………………………………………..…

…..……………………………………………………………………………………

………..………………………………………………………………………………

4. Využíváte při výkladu nějaké učebnice?

- ☐ Ano
- ☐ Ne

Pokud ano, prosím, uveďte jaké.

……………………………………………………………………………………….

5. Využíváte jiného zdroje než učebnice?

- ☐ Ano

☐ Ne

Pokud ano, prosím, uveďte jakého.

…………………………………………………………………………………….

6. Využíváte při výkladu nějaké modely či doporučení?

☐ Ano

☐ Ne

Pokud ano, prosím, uveďte jakých.

…………………………………………………………………………………….

7. Jaká úskalí dle Vás dělají žákům největší problémy při výkladu a následně i při práci s algebraickými výrazy? Jakých chyb se žáci při řešení nejčastěji dopouštějí?

…………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………...……

…………………………………………………………………………………...……

8. Jakým způsobem lze dle Vás tato úskalí zvládnout, či alespoň částečně odstranit?

…………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………..…

…………………………………………………………………………………...……

9. Do jaké míry je dle Vás učivo o algebraických výrazech pro žáka srozumitelné?

…………………………………………………………………………………….

…………………………………………..……………………………….……

…………………………………………..……………………………….……

10. Jakým způsobem (metodami, praktikami, …) ověřujete míru pochopení žáka?

…………………………………………………………………………………….

11. Jaké jevy dle Vás ovlivňují výsledek práce žáka při řešení úloh s algebraickými výrazy?

…………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………..…………