UNIVERZITA KARLOVA
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Žákovské obtíže při řešení úloh vyžadujících substituci

Diplomová práce

AUTOR PRÁCE: Bc. Jan Schánělec
VEDOUCÍ PRÁCE: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

PRAHA 2016

CHARLES UNIVERSITY
FACULTY OF EDUCATION
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL EDUCATION

Pupils‘ problems when solving problems requiring substitution

Diploma Work

AUTHOR: Bc. Jan Schánělec
SUPERVISOR: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Prague 2016

Prohlášení:

Tuto práci jsem vypracoval samostatně, veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Praze dne 15. 4. 2016

Jan Schánělec …………………………

Poděkování:

Rád bych poděkoval paní doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za cenné rady a čas, který věnovala vedení mé diplomové práce.

Název:

Žákovské obtíže při řešení úloh vyžadujících substituci

Abstrakt:

Práce se zabývá obtížemi a chybami žáků v úlohách vyžadující substituci u žáků osmého a devátého ročníku základního vzdělávání.

Teoretická část vymezuje potřebné pojmy a zabývá se vybranými výsledky mezinárodních srovnávacích výzkumů a zahraniční studií týkající se substituce.

Hlavním cílem práce je identifikovat obtíže a chyby žáků, kterých se dopouštějí v úlohách vyžadující substituci, a pokusit se najít jejich příčinu. K dosažení tohoto cíle je v praktické části nejdříve vypracována analýza třech řad učebnic, které používají žáci účastnící se výzkumu. Následuje popis realizace a analýzy patnácti klinických rozhovorů nad úlohami vyžadujícími substituci s žáky devátého ročníku základní školy a třetího ročníku osmiletého gymnázia. V závěrečném shrnutí poznatků jsou uvedeny nejčastější chyby a dány do souvislosti s výskytem úloh na substituci v učebnicích. Došel jsem k tomu, že žáci nemají problémy se samotnou substitucí při dosazování přirozených čísel za proměnnou v první mocnině. To však nelze říci o dosazování za proměnnou v druhé mocnině. Žáci mají problémy především při dosazování záporné hodnoty, a to zejména při dosazování záporné hodnoty za proměnnou se záporným koeficientem. Problémy přibývají, pokud je proměnná navíc v druhé mocnině. To přesně odpovídá tomu, jak se jednotlivé druhy substituce vyskytují v analyzovaných učebnicích. U substituce algebraického výrazu složeného z proměnné a čísla do výrazu s proměnnou mají žáci opět problém především s dosazením do proměnné se záporným koeficientem. Úspěšnost řešení úloh vyžadující substituci neovlivňuje jen samotná substituce, ale i problémy při úpravě číselných výrazů a neznalost konceptu uspořádané dvojice čísel.

Klíčová slova:

Substituce, dosazování, proměnná, chyby v substituci, analýza učebnic, TIMSS

Title:

Pupils´ problems when solving problems requiring substitution

Abstract:

The work focuses on 8th and 9th graders' difficulties and mistakes when solving problems using substitution.

The theoretical part defines the used concepts and discusses selected results from international comparative studies and studies focusing on substitution.

The main goal of the work is to identify pupils' difficulties and mistakes they make when solving problems using substitution and to discover their origin or cause. To achieve this goal the empirical part begins with an analysis of three sets of textbooks used by pupils involved in this research study. This is followed by a description of conducting and subsequent analysis of fifteen clinical interviews on problems with substitution with 14 to 15 year old pupils (9th graders from elementary schools and 3rd graders from lower secondary grammar schools). In the final part the most common mistakes are summarised and relations to their possible origin in the set of textbooks used looked for. The conclusion is that pupils do not have problems with substitution as such when substituting natural numbers into first power variables. However, this does not hold for substitution of variable in the second power. Pupils have problems when substituting for a variable with a negative coefficient. And this becomes even more difficult if the variable is in the second power. This conclusion clearly corresponds to the occurrence of different kinds of substitution in the analysed sets of textbooks. In case of substituting an algebraic expression with a variable and a number into an expression with a variable, the largest obstacle for pupils is when substituting for a variable with a negative coefficient. The success when solving problems that require substitution is not influenced only by the substitution itself but also by the difficulties in adjusting numerical expressions and by a lack of knowledge of the concept of ordered pair of numbers.

Key words:

Substitution, variable, mistakes in substitution, textbook analysis, TIMSS

OBSAH

ÚVOD

Z mezinárodních srovnávacích výzkumů TIMSS vyplývá, že se výkon českých žáků v matematických úlohách zhoršuje. Rendl a Vondrová identifikovali ve svém článku *Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007* obtížná místa učiva na 2. stupni základní školy prostřednictvím sekundární analýzy výsledů českých žáků při řešení úloh TIMSS 2007. Jednou ze slabších oblastí jsou podle nich úlohy vyžadující substituci, kterým je věnována předložená práce. Jejím hlavním cílem je identifikovat obtíže a chyby žáků 8. a 9. ročníku v úlohách zaměřených na substituci.

K dosažení tohoto cíle nejdříve v teoretické části vymezuji potřebné pojmy (např. substituce a proměnná) a popisuji související výsledky z mezinárodních srovnávacích výzkumů a zahraničních studií. V praktické části nejdříve analyzuji tři řady učebnic matematiky (oddíl 2.1) s cílem zjistit, jak je v nich zavedena proměnná a jaké druhy substituce se v nich vyskytují. Tyto řady učebnic používají školy, z nichž byli vybráni žáci účastnící se rozhovorů, jejichž popis tvoří jádro praktické části. Podkladem rozhovorů se stalo 9 úloh, které jsem vytvořil z úloh TIMSS. Rozhovory jsem provedl s jedenácti žáky devátého ročníku základní školy a čtyřmi žáky z tercie víceletého gymnázia s cílem zjistit, jaké obtíže se u nich projeví při řešení úloh na substituci. Tyto obtíže jsou identifikovány a popsány v oddíle 2.5. Možnou příčinu obtíží žáků u úloh na substituci lze spatřovat i v učebnicích, proto se touto problematikou zabývám v oddíle 2.1 a uvádím též doporučení pro výukovou praxi. V kapitole 3 jsou shrnuty nejčastější chyby, které se v jednotlivých úlohách vyskytly, je zde naznačená možná souvislost těchto chyb s učebnicemi, které žáci používají, a srovnání mých výsledů se studiemi z teoretické části.

Práce je doplněna dvěma přílohami: Příloha A – Zadání úloh a Příloha B – Přepis rozhovoru nad řešením úlohy č. 5 (Šimon).

1 Teoretická část

1.1 Vymezení pojmů

Substituce = nahrazení, dosazení čísel a proměnných do výrazů či rovnic. V sérii učebnic od autorů Odvárko a Kadleček a v sérii učebnic od Hermana a kol. se slovo „substituce“ vůbec nevyskytuje. V sérii učebnic od Coufalové a kol. se setkáváme se slovem „substituce“ jednou, a to u dosazovací metody při řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. V nadpise u dosazovací metody je uvedeno v závorce „dosazovací (substituční) metoda“.

Proměnná

Základním algebraickým prvkem je proměnná. Proměnná nabývá různých významů.

Např. N. Vondrová uvádí následující dělení (nepublikované materiály k předmětu Didaktika matematiky):

1. *Proměnná jako předmět.* Zde je proměnná chápána jako předmět sám. Např. *d* jako děti, *u* jako učitelé apod.
2. *Proměnná jako určitá neznámá.* Toto chápání je založeno na tom, že proměnná může nabývat právě jedné hodnoty (např. neznámá v lineárních rovnicích).
3. *Proměnná jako zobecněné číslo.* Zde může proměnná reprezentovat i více než jednu hodnotu. Například při obecném zápisu komutativního zákona násobení čísel $a \cdot b = b \cdot a$ nebo v algebraických výrazech.

Podle Z. Usiskina (1988, cit. v Žalská, 2015) existují čtyři koncepce algebraické činnosti a z nich se odvíjejí různé významy proměnné. Proměnná vystupuje jako:

1. zobecněné číslo,
2. zástupce množiny hodnot, kterých může nabýt daný referent (veličina, množství, míra atd.) při popisů vztahů,
3. neznámá (tj. hledaná odpověď na otázku, v podobě konkrétních hodnot),
4. součást systému, který podléhá pravidlům transformace a ekvivalence (tj. jde o prvek struktury), např. při provádění rozkladu mnohočlenu na součin.

Jak uvádí Žalská (2015), tato mnohotvárnost má samozřejmě vliv na potíže žáků, v neposlední řadě proto, že se role proměnné mění i v průběhu řešení jedné (slovní) úlohy – například nejdříve pomocí proměnných modelujeme (význam 2), pak upravujeme výraz, kde se objevují (význam 4), abychom dosazením konkrétních (známých) hodnot za nezávislé proměnné (význam 2) získali rovnici a z ní určili hodnotu neznámé (význam 3), kterou pak musíme opět interpretovat podle zadání slovní úlohy (význam 2) a vyjádřit tak řešení úlohy.

Hejný a kol. (1990) dělí práci s písmeny do třech hladin:

1. Nejnižší je *modelování* – vyjadřování slovního textu písmeny. Například „sudé číslo" zapíšeme „$2n$, $n \in Z$", nebo tvrzení „obsah obdélníka je součin dvou různých stran" zapíšeme „$S = a \cdot b$"
2. Vyšší hladinu představuje *standardní manipulace* s písmeny – úprava algebraických výrazů podle známých pravidel jako $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. V této hladině pracuje žák při řešení rovnic nebo při úpravě výrazů.
3. Nejvyšší hladinou je *strategická manipulace* s písmenky – zde jde o úpravy, ve kterých řešitel nevystačí s nacvičenými šablonami, ale potřebuje vymyslet strategii postupu, která vede k cíli.

Hejný a kol. uvádějí, že hladina mezi *standardní a strategickou manipulací* je pohyblivá, závisí na úrovni řešitele. Například rovnice $x^2 + 3x - 1 = 0$ může pro žáka devátého ročníku základní školy představovat náročnou úlohu na hladině *strategické manipulace*, pro vysokoškoláka jednoduchou úlohu na hladině *standardní manipulace*.

1.2 Výzkumy a studie týkající se substituce

Tento oddíl je věnován vybraným výsledkům mezinárodního srovnávacího výzkumu TIMSS a jednomu zahraničnímu výzkumu v oblasti substituce. Z nich vycházím v praktické části práce.

1.2.1 Mezinárodní srovnávací výzkum TIMSS

Výzkum TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je zaměřený na testování matematické gramotnosti devítiletých (4. ročník ZŠ) a třináctiletých žáků (8. ročník ZŠ). Probíhá ve čtyřletých cyklech od roku 1995. Česká republika se do něj zapojila v letech 1995, 1999[1], 2007 a 2011.

[1] V roce 1999 byli v České republice testováni pouze žáci 8. ročníku, v roce 2011 pouze žáci 4. ročníku.

Mezinárodní výzkumy nám poskytují možnost sledovat u velkého vzorku žáků různé ukazatele, kromě schopnosti řešit vybrané úlohy i vztah k matematice či matematické sebevědomí. Mezinárodní a národní zprávy ale přinášejí pouze základní informace o výsledcích těchto výzkumů, a to především výsledky českých žáků v porovnání s ostatními zúčastněnými zeměmi, porovnání s předchozími ročníky nebo genderové rozdíly. Téměř všechny dostupné články se zabývají pouze celkovými výsledky a přinášejí povšechná sdělení. Z hlediska didaktiky matematiky jsou však důležitější než celkové výsledky informace týkající se konkrétních oblastí učiva, jimž je možno přičítat pokles ve výsledcích TIMSS a PISA (Rendl & Vondrová, 2014: s. 25).

O sekundární analýzu dat TIMSS 2007, která se zabývá přímo jednotlivými úlohami testu a jejich charakteristikami v souvislosti s úspěšností českých žáků, se pokusili ve své práci M. Rendl a N. Vondrová (2014). K interpretaci možných příčin obtíží analyzovali data z tzv. almanachů TIMSS (což jsou výsledky našich žáků na úrovni konkrétních úloh a odpovědi učitelských dotazníků), analyzovali zřejmě u nás nejpoužívanější řadu učebnic a také pracovali s kurikulárními dokumenty. Autoři upozorňují, že pro získání většího vhledu do problematiky je nutné realizovat klinické rozhovory přímo se žáky. To je součástí předložené práce.

Vondrová a Rendl identifikovali tzv. *kritická místa v matematice* a snažili se určit pravděpodobné příčiny obtíží českých žáků. Vycházeli přitom z průměrné odchylky úspěšnosti českých žáků od úspěšnosti mezinárodního souboru v TIMSS 2007, která činí +9,4 %. Autoři vyhledali tzv. *slabé a velmi slabé úlohy* (Rendl & Vondrová, 2014: s. 29):

1. *Slabé* úlohy[2] – odchylka úspěšnosti českých žáků je v rozmezí 0 až +5 % oproti průměrné úspěšnosti mezinárodního souboru.
2. *Velmi slabé* úlohy – odchylka úspěšnosti českých žáků je záporná oproti průměrné úspěšnosti mezinárodního souboru.

Nejhorších výsledků – ve srovnání s mezinárodním průměrem – dosáhli čeští žáci v úlohách zaměřených na *funkce* a/nebo vyžadujících *substituci* (Rendl & Vondrová, 2014: s. 32). Přitom úlohy na substituci nejsou v TIMSS zvlášť vydělovány. Jako skupinu úloh, které byly pro naše žáky v TIMSS 2007 problematické, je vydělili Rendl a Vondrová. Z jejich práce budu vycházet při popisu úloh na substituci z TIMSS 2007.

[2]Přestože se jedná o úlohy, které jsou označeny jako *slabé,* čeští žáci v nich byli průměrní nebo lehce nadprůměrní vzhledem k mezinárodnímu průměru.

> Z celkového počtu 12 úloh dosáhli naši žáci svého standardu (+9,4 %) nebo výsledků jen mírně horších ve třech úlohách vyžadujících dosazení konkrétních kladných číselných hodnot za jednu či dvě proměnné do výrazu (M06-06, M09-06, M12-07). Vždy byla konkrétně zadána hodnota proměnné, která se měla dosazovat.
>
> (Rendl & Vondrová, 2014: s. 35)

Ostatní úlohy spadají do kategorie *slabé* nebo *velmi slabé* úlohy.

M06-08

Jedná se o úlohu, kde naši žáci dosáhli *slabých* výsledků (32,4 %; +4,8 %)[3]. Žáci měli zadaný součet dvou proměnných $a + b = 25$ a měli zjistit, kolik je $2a + 2b + 4$. „Podstatou řešení byla víceméně intuitivní identifikace násobku výrazu.“ (Rendl & Vondrová, 2014: s. 35). Podobně je tomu tak i v neuvolněné[4] úloze **M14-03** (66,4 %; +4,8 %).

M08-08

Jedná se o neuvolněnou úlohu s úspěšností (36,2 %; −1,2 %). V úloze je zadána dvojice neznámých např. $x = 3$ a $y = 8$ a čtyři rovnice o dvou neznámých. Žáci mají zjistit, která ze čtyř rovnic má jako řešení danou dvojici. Po dosazení hodnot je platná jen jedna z rovností.

> Nejpochopitelnější chybou je záměna x a y při dosazování (13,2 % žáků). Avšak nejčastější špatná odpověď (25,4 %) odpovídá tomu, kdy by jako správné řešení byla vybrána rovnice $8x + 3y = 24$. Zdá se, že žáci nejdříve dosazují zvlášť číslo x a pak zvlášť číslo y a druhý sčítanec ignorují.
>
> (Rendl & Vondrová, 2014: s. 40)

M14-07

Jedná se o úlohu podobnou předchozí úloze. Zde mají ale žáci naopak hledat řešení k zadané rovnici o dvou neznámých. Jako řešení jsou nabídnuty čtyři uspořádané dvojice přirozených čísel.

---

[3] První číslo označuje úspěšnost českých žáků v úloze. Druhé číslo značí odchylku v úspěšnosti od mezinárodního průměru.

[4] Neuvolněná úloha je úloha, kterou TIMSS nezveřejnil. Uvolněná naopak. Rendl a Vondrová pracovali i s neuvolněnými úlohami, v článku je jen obecně opisují.

Úspěšnost (52,8%, −1,2%) je vyšší než u M08-08, což je zřejmě dáno různou obtížností zadání – je těžší přiřadit jednu ze čtyř složitějších vztahových struktur (rovnic) zadaným číslům než najít čísla pro jedinou zadanou strukturu. Všechny tři varianty chybných odpovědí lze interpretovat jako záměnu hodnot x a y v uspořádané dvojici. Dospíváme tak k závěru jako, že tu totiž problém nespočívá primárně v substituci, ale v konceptu uspořádané dvojice.

(Rendl & Vondrová, 2014: s. 35, 36)

M04-03

V této uzavřené úloze mají žáci dosadit do daného výrazu se dvěma proměnnými hodnoty proměnných a a b. Úspěšnost úlohy je (33,8 %; −0,4 %). „Nejčastější špatná odpověď (téměř 45 %) odpovídá tomu, že žáci nesprávně dosazují do výrazu $-b$ hodnotu $b = -1$ a dostávají číslo -1 místo 1." (Rendl & Vondrová, 2014: s. 36)

M06-10

I v této úloze šlo o dosazování čísel do rovnic o dvou neznámých.

(0, −1), (1, 3)

Kterou z rovnic splňují OBĚ dvojice čísel (x, y)?

a) $x + y = -1$, b) $2x + y = 5$, c) $3x - y = 0$, d) $4x - y = 1$

Kromě dvou obtížných momentů (žáci dosazují jen jednu z uspořádaných dvojic a jedna z dvojic obsahuje záporné číslo), je úloha ztížena tím, že rovnice musí být splněna současně pro obě dvojice čísel. Podíváme-li se ovšem na zadání a výsledky blíže, je patrné, že k záměně pořadí v uspořádaných dvojicích vlastně nemohlo dojít, protože žádná z variant odpovědí takovou možnost nenabízí.[5] Všechny chybné odpovědi pak spočívají ve výběru rovnice, která vyhovuje pouze jedné dvojici čísel. Na druhou stranu si ovšem nemůžeme být jisti, že řešitelé nepoužili tutéž chybnou strategii. Ta by vedla k úspěchu víceméně náhodně.

(Rendl & Vondrová, 2014: s. 36)

[5] Podle mého názoru, i kdyby takovou variantu odpovědí, kde došlo k záměně pořadí, odpovědi nabízely, žáci by v tomto případě takovou chybu neudělali, protože mají rovnici ve tvaru, kde je první neznámá x a až druhá v pořadí y.

Rendl a Vondrová upozorňují na to, že obtíže českých žáků lze připsat také tomu, že příslušná látka se v době testování v 8. ročníku neprobírala.

> Dodejme, že čeští žáci se s velkou pravděpodobností setkali s pojmem rovnice jen u lineární rovnice s jednou proměnnou, ne se dvěma proměnnými. Lineární funkce se v programu Základní škola objevují až v 9. ročníku.
>
> (Rendl & Vondrová, 2014: s. 36)

Úspěšnost této úlohy je (25,0 %; + 0,2 %). 21 % žáků úlohu vynechalo.

M08-11A a M08-11B

V obou dvou neuvolněných úlohách je třeba dosadit do algebraického výrazu za každou z dvojic proměnných algebraický výraz složený z čísla a proměnné. Úspěšnost úloh byla výrazně pod mezinárodním průměrem: M08-11A (30,7 %; −2,7), M08-11B (8,8 %; −4 %). Úlohy vynechalo významné procento žáků (17 %, resp. 20 %). Bohužel obě úlohy jsou otevřené, a tak nevíme nic o povaze chyb, kterých se žáci dopouštěli.

> Dodejme, že výrazy a dosazování do výrazů bylo v programu Základní škola plánováno na 8. ročník. Podle učitelského dotazníku se s „dosazováním daných čísel do výrazů a výpočtem hodnoty" setkalo 99 % testovaných žáků (o dosazování výrazů s proměnnou se v dotazníku nemluví). V analyzované řadě učebnic[6] žádné úlohy, v nichž se do výrazu má dosadit jiný výraz, který obsahuje proměnnou, nejsou.
>
> (Rendl & Vondrová, 2014: s. 37)

1.2.2 Zahraniční studie

Problematikou substituce se žádný český výzkum, pokud se mi podařilo zjistit, nezabývá. Relevantní je však výzkum zahraniční (Christou & Vosniadou, 2012).

Autoři vycházeli z hypotézy, že u žáků existuje silná tendence nahrazovat písmenka jen přirozenými čísly. Provedli tedy tři experimenty, ve kterých zjišťovali, jaké druhy čísel si budou žáci volit při dosazování za písmenka. Výsledky jejich studie potvrdily jejich hypotézu a ukázaly, že žáci mají silnou tendenci dosazovat za písmenka pouze přirozená čísla. S tím souvisí

[6] Autoři analyzovali řadu učebnic od Odvárka a Kadlečka.

i tendence přiřazovat hodnotu výrazům podle znaménka před písmenkem (žáci vidí ve výrazu $-x$ pouze záporné číslo). Na všechny experimenty se podíváme blíže.

V prvních dvou experimentech bylo 91 řeckých žáků ve věku od 12,5 do 14,5 let požádáno, aby označili čísla, která by mohla a která by nemohla být použita jako náhrada proměnné v algebraických výrazech.

Experiment 1: Byl použit skupinový dotazník. Jednalo se o dva dotazníky: QR/A a QR/B. Oba dotazníky obsahovaly sedm algebraických výrazů *a; −b; 4g; 1/g; a/b; d + d + d; k + 3*. V QR/A měli žáci napsat čísla, která by mohla být dosazena do algebraických výrazů. Správná odpověď byla, že všechna čísla mohou být dosazena do všech algebraických výrazů. V QR/B měli žáci naopak napsat všechna čísla, která nemohou být dosazena do algebraických výrazů. Správnou odpovědí bylo, že tam žádné takové číslo není. Experimentu se účastnilo 36 žáků osmého ročníku a 21 žáků devátého ročníku, 29 žáků dělalo dotazník QR/A, 28 žáků QR/B. Žáci odpovídali na každý výraz zvlášť. Žáci měli napsat co nejvíce čísel, neměli možnosti, z kterých by vybírali.

V prvním dotazníku QR/A bylo správně[7] 23,6 % odpovědí, chybně 68 % a 8,4 % bez odpovědi. V druhém dotazníku bylo správně 32,7 % odpovědí, chybně 46,9 % a 20,4 % bez odpovědi. Zjištění, že asi 70 % žáků chybovalo, potvrdilo hypotézu, že žáci mají tendenci nahrazovat písmenka pouze přirozenými čísly. Zajímavý je rozdíl v přiřazování čísel výrazům *a* a *–b* (tabulka 1).

Tabulka 1

Druhy odpovědí	Dotazník QR/A		Dotazník QR/B	
	a	− *b*	*a*	− b
Přirozená čísla	19 (65,5 %)	2 (6,9 %)	1 (3,6 %)	14 (50,0 %)
Záporná celá čísla	1 (3,5 %)	21 (72,4 %)	13 (46,4 %)	1 (3,6 %)
Kladná racionální čísla	−	2 (6,9 %)	2 (7,1 %)	4 (14,3 %)
Záporná racionální čísla	−	−	3 (10,7 %)	2 (7,1 %)
Správně	9 (31,0 %)	4 (13,8)	8 (28,6 %)	5 (17,9 %)
Bez odpovědi	−	−	1 (3,6 %)	2 (7,1 %)

[7] Jako správná odpověď byla označena ta, kde se vyskytla přirozená i ne-přirozená čísla, nesprávná odpověď zahrnovala pouze přirozená čísla, nebo čísla určitého druhu (např. pouze kladná čísla, nebo zlomky).

Z tabulky 1 je vidět, že do výrazu *a* většina žáků dosadí pouze přirozená čísla, naopak do výrazu *–b* čísla záporná celá. Podle autorů studie se ale nejedná o to, že by žáci záporné číslo skutečně dosazovali, ale naopak dosazují přirozené číslo a za celým výrazem vidí zápornou hodnotu.

U zbylých výrazů *4g; 1/g; a/b; d + d + d; k + 3* uvádějí autoři procentuální zastoupení odpovědí žáků pouze u všech pěti výrazů najednou. Opět zde převažovala chyba, kdy žáci dosazují pouze přirozená čísla (59,3 %).

Experiment 2: Druhý experiment se lišil od prvního tím, že žákům bylo nabídnuto 11 čísel, mezi nimiž byly kladné i záporné zlomky, kladná i záporná desetinná čísla, kladná i záporná celá čísla. Žáci měli zakroužkovat všechny možnosti, které nemohou do daného výrazu dosadit. Správná odpověď byla vždy dvanáctá možnost „Ne, všechna čísla mohou být dosazena“. Experimentu se účastnilo 34 žáků osmého a devátého ročníku. Z nabízených výrazů byl vyloučen výraz *1/g*, protože v prvním experimentu měl obdobné výsledky jako výraz *a/b*.

Pouze 18,6 % odpovědí bylo správných, chybné odpovědi tedy převažovaly: 81,4 %. Autoři si tímto experimentem potvrdili hypotézu, že žáci nemusí vidět za písmenkem jakékoliv reálné číslo. Jak žáci odpovídali, je vidět z tabulky 2.

Tabulka 2

	algebraické výrazy		
Druhy odpovědí	*a*	*−b*	zbytek alg. výrazů
Přirozená čísla	7 (20,5 %)	2 (5,9 %)	36 (26,5 %)
Určitá kategorie	3 (8,8 %)	2 (5,9 %)	12 (8,8 %)
Závislost na znaménku	13 (38,2 %)	18 (52,9 %)	21 (15,4 %)
Bez systému	1 (2,9 %)	5 (14,7 %)	27 (19,9 %)
Správná odpověď	10 (29,4 %)	6 (17,6 %)	22 (16,2 %)
Bez odpovědi	0 (0,0 %)	1 (2,9 %)	18 (13,2 %)

Pozn.: Přirozená čísla: žáci škrtli všechny ostatní možnosti; Určitá kategorie: žáci škrtli nějaký druh čísel např. zlomky; Závislost na znaménku: žáci škrtli všechna záporná čísla, nebo naopak.

Experiment 3: Tohoto experimentu se účastnilo 8 žáků. Zde autoři zkoumali stejné hypotézy pomocí klinických rozhovorů s žáky, kteří měli zkušenosti s řešením nerovnic a s reálnými čísly u funkcí a rovnic. Žákům bylo dáno šest nerovnic $5d > 4/d$ ($d \neq 0$)*; $7a < 6/a$ ($a \neq 0$); $a + 1 > 1/a$ ($a \neq 0$)*; $9x < 3 + 1/x$ ($x \neq 0$); $-k - 1 > 2/k$ ($k \neq 0$); $-y < y + 1/y$ ($y \neq 0$)*. Výrazy označené hvězdičkou platily pro přirozená čísla, zbytek byl neplatný pro přirozená čísla. Měli rozhodnout, zda je nerovnost platná pro všechna čísla, která si za písmenka mohou dosadit. Žáci řešili nerovnice postupně. Nebylo cílem, aby žáci řešili rovnice pomocí ekvivalentních úprav, ale aby si zkoušeli dosazovat různá čísla. Správná odpověď byla ta, že nerovnice pro některá čísla platí a pro některá ne. Autoři předpokládali, že si žáci budou dosazovat pouze přirozená čísla, což povede ke špatné odpovědi. Když se tak stalo, zkusili ještě žákům napovědět:

- Rada 1: Jsi si jistý svojí odpovědí? Nechtěl bys zkusit ještě jiná čísla?
- Rada 2: Myslíš si, že je to pravda pro každé číslo, které známe? Nechtěl bys zkusit nějaký jiný typ čísel? Nenašel bys číslo, které by změnilo tvou původní odpověď?

Autoři předpokládali, že tyto dvě rady by mohly pomoci k tomu, že si žáci zkusí dosadit záporné číslo, ale ne že úplně odstraní zaměřenost na přirozená čísla. Rady byly použity, až když děti došly ke špatnému závěru.

Tabulka 3

	nerovnice					
Žáci	$5d > 4/d$	$7a < 6/a$	$a + 1 > 1/a$	$9x < 3 + 1/x$	$-k - 1 > 2/k$	$-y < y + 1/y$
Ž1	CC	CC	CC	CC	CC	CC
Ž2	PC	PC	PC	PC	PC	PC
Ž3	PC	PC	PC	PC	CC	CC
Ž4	RC	RC	RC	RC	RC	RC
Ž5	PC	PC	PC	PC	PC	CC
Ž6	PC	PC	PC	CC	CC	CC
Ž7	PC	PC	PC	PC	PC	CC
Ž8	PC	PC	PC	PC	PC	PC

Pozn.: PC: Přirozená čísla; CC: Celá čísla; RC: Racionální čísla

Jak je vidět z tabulky 3, pouze jeden žák (Ž4) dosadil do všech nerovnic alespoň jedno necelé číslo[8]. Tento žák dospěl k tomu, že platnost rovnosti závisí na druhu použitých čísel. V 60 % případů žáci dosazovali pouze přirozené číslo, ve 28 % nejméně jedno záporné. Pět z osmi žáků se po druhé nápovědě už pokusilo dosadit alespoň jedno záporné celé číslo. Druhý a osmý žák ani po druhé nápovědě nezkusili záporné číslo. Když se jich ale poté tazatel zeptal, zda by mohli zkusit číslo – 2 nebo ½, odpověděli, že ano. Z toho je vidět, že zřejmě věděli, že za písmenko mohou dosadit cokoliv, přesto je ale nenapadlo dosadit jiné než přirozené číslo. Je také vidět, že

8 Jednalo se o kladné desetinné číslo.

žáci přijdou spíš na záporná čísla než na zlomky nebo desetinná čísla. K záporným číslům jim ale mohly pomoci poslední dva výrazy, kde se objevuje znaménko mínus.

Autoři výzkumu shrnují výsledky tří experimentů takto:

- Žáci nahrazují písmenka především pouze přirozenými čísly, a to i přesto, že si uvědomují, že za písmenko mohou dosadit jakékoliv číslo.
- Žáci mají tendenci vidět výraz $-b$ jako záporný.

Autoři to přisuzují tomu, že děti jsou zpočátku omezeny na aritmetiku přirozených čísel. Při rozšíření přirozených čísel o desetinné dochází k rozporu v pravidlech, která u přirozených čísel platila, ale u desetinných už platit nemusí. Příkladem je například porovnávání čísel. U přirozených čísel je vždy větší to číslo, které má více cifer. U desetinných čísel už toto pro děti do té doby zakořeněné pravidlo platit nemusí. Autoři uvádějí, že je třeba stavět na předchozích znalostech, ale zaměřit se na jejich přebudování.

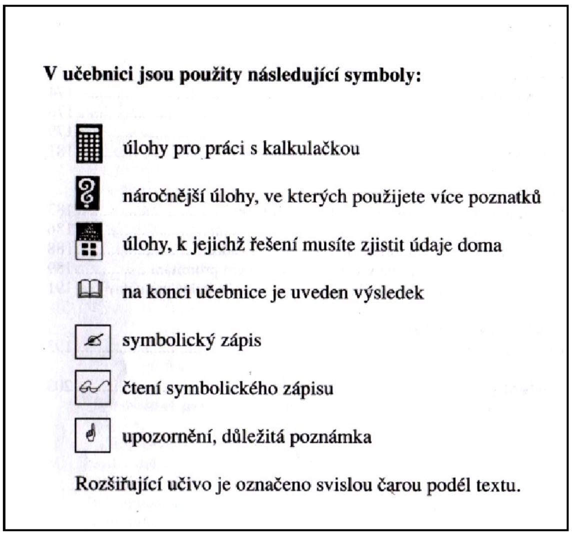
2 Praktická část

2.1 Analýza učebnic z hlediska úloh na substituci

Oddíl je zaměřen na analýzu třech řad učebnic s cílem vyhledat oblasti matematiky, v kterých se substituce vyskytuje, zjistit, jaké druhy substituce se v učebnicích vyskytují, v jakém ročníku, v jakých souvislostech apod., a porovnat přístupy autorů jednotlivých řad učebnic. Pro analýzu jsem vybral tři řady učebnic, které používají na školách, jejichž žáci se účastnili mého výzkumu.

2.1.1 Matematika 6. – 9. (Coufalová a kol.)

Tuto řadu učebnic pro šestý až devátý ročník od autorského kolektivu vedeného J. Coufalovou používají na ZŠ Poděbradova. Pro každý ročník je vydána jedna učebnice. Každá učebnice začíná kapitolou *Opakování*. V učebnici určené pro šestý ročník se jedná o opakování prvního až pátého ročníku. V ostatních učebnicích se úvodní kapitola věnuje opakování především předchozího ročníku. Poslední kapitola v každé učebnici se zase věnuje opakování, ale jedná se o opakování vědomostí, které žáci nabyli v ročníku, pro který je učebnice určená. Ostatní kapitoly se věnují nové látce, která je rozdělena na podkapitoly. Na konci každé kapitoly jsou úlohy pro zopakování celé kapitoly a „úlohy pro chytré hlavy“. Rozšiřující učivo je označeno svislou čarou podél textu. Na konci učebnice jsou výsledky pro některé úlohy, které jsou v textu označeny příslušným symbolem. V učebnicích se vyskytují i jiné symboly, které jsou vidět z obr. 1.



Obrázek 1: Symboly vyskytující se v sérii učebnic od J. Coufalové a kol.

V celé sérii učebnic jsou písmena, která zastupují zobecněné číslo, využity v poučkách a pravidlech. Společně s obecným pravidlem je ale vždy uveden konkrétní příklad s čísly. Pravidlo je ještě popsáno slovy. U těchto pravidel se v celé řadě učebnic setkáváme s písmeny ze začátku abecedy.

Matematika 6

Poprvé se žáci v této učebnici[9] setkávají s proměnnou a jejím nahrazením hned při opakování sčítání a odčítání přirozených čísel. V oddíle 1.1 *Přirozená čísla, sčítání a odčítání* je úloha[10] vyžadující nahrazení jedné proměnné alespoň třemi čísly, aby se zachovala platnost jednoduché nerovnosti. Písmenka zde žáci nahrazují přirozenými čísly. Nejedná se o řešený příklad ale o úlohu, což dokazuje, že autoři předpokládají, že se s písmenky žáci setkali již na prvním stupni. V úvodní kapitole se žáci také poprvé setkávají s písmeny zastupující zobecněné číslo v pravidlech pro sčítání a násobení přirozených čísel.

Po úvodní kapitole, která se věnovala opakování z prvního stupně, následuje kapitola 2 *Desetinná čísla*. Zde se žáci poprvé setkávají s tím, že písmenka nahrazují jiná čísla než přirozená, a to kladná desetinná čísla.

Co se týká typů úloh, kde se žáci se substitucí setkávají, tak se jedná o nerovnice, kde mají žáci vypsat několik čísel, aby nerovnost platila. Druhým typem úlohy jsou rovnice, které žáci řeší intuitivně. Jedná se o jednoduché rovnice, které jsou zadány „Řešte rovnice“ nebo „Řešte rovnice a proveďte zkoušku“. Rovnice žáci pravděpodobně řeší tak, že si zkouší za neznámou dosazovat, nebo využívají zkušeností ze zkoušky při sčítání, odčítání, násobení a dělení přirozených čísel (8 – 3 = 5; zk. 5 + 3 = 8). Ekvivalentní úpravy rovnic jsou vysvětleny až v učebnici určené pro osmý ročník. Dalším typem úlohy, kde žáci pracují s písmenky, je doplnění tabulky (obr. 2).

Doplňte tabulky.

x	40°			
$x + x$		50°		
$x + 30°$			112° 21'	
$x - 20°$				54° 51'

Obrázek 2: Úloha s tabulkou

[9] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro šestý ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Fortuna, 1998.
[10] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro šestý ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Fortuna, 1998, str. 11, úloha 11. Úloha se trochu podobá testové úloze 4, v které se ale předpokládal problém především v tom, že si žáci nedosadí záporná čísla. V této úloze si žáci vystačí pouze s přirozenými čísly.

S písmeny se žáci setkávají i v geometrii. Písmena označují úhly, strany, hrany atd. V oddíle 7.2 *Povrch krychle a kvádru* žáci dosazují do vzorce. Se substitucí v geometrii se pak žáci setkávají v celé sérii učebnic, jedná se vždy ale o substituci pouze kladných čísel.

Kromě písmen, která je třeba nahradit čísly, se setkáváme i s potřebou nahradit hvězdičku a otazník.

Matematika 7

V učebnici[11] určené pro 7. ročník se vyskytují typově stejné úlohy jako v předchozí učebnici (tabulky, rovnice, nerovnice), ale přirozená a desetinná čísla jsou postupně rozšířena o zlomky, celá čísla a racionální čísla. Žáci se v úlohách setkávají s novými druhy substituce. Nahrazují písmeno ve jmenovateli nebo v čitateli přirozeným číslem nebo písmeno zlomkem. U celých čísel žáci poprvé nahrazují písmeno záporným celým číslem. Avšak dosazení záporného čísla do proměnné se záporným koeficientem se zde vyskytuje pouze jednou, a to v doplnění tabulky, kde mají žáci v jednom řádku dány hodnoty proměnné a a v druhém řádku mají doplnit hodnotu výrazu $-a$. Tabulka ale patří do podkapitoly *Navzájem opačná čísla*, myslím, že si zde žáci za výraz $-a$ nedosazují, ale pouze mění znaménka před čísly z prvního řádku.

Žáci se také poprvé setkávají s uspořádanou dvojicí čísel $[x; y]$. Uspořádanou dvojicí jsou zde určeny body. Žáci bez nějakého vysvětlení řeší úlohy, v nichž mají zobrazit body v soustavě souřadnic. Autoři tedy tuto znalost předpokládají z prvního stupně základní školy. S tím, že první souřadnice v uspořádané dvojici je x a druhá y, se žáci setkávají také v kapitolách 7.5 *Přímá úměrnost* a 7.6 *Nepřímá úměrnost*[12], kde ověřují, zda dané body (např. A[0,2; 3]) leží na grafu úměrnosti dané rovnicí (např. $y = \frac{3}{x}$), nebo mají graf úměrnosti sestrojit. Jiný typ úlohy je doplnění tabulky, aby byla splněna úměrnost. Uspořádaná dvojice $[x; y]$ zde obecně popsána není. Žáci se poprvé setkávají s rovnicí se dvěma neznámými.

Matematika 8

V této učebnici[13] po první kapitole *Opakování ze 7. ročníku* následuje kapitola *Druhá mocnina a odmocnina*. Se zápisem mocniny už se žáci setkali ve vzorci pro objem krychle v předchozí učebnici, vedle zápisu $a \cdot a \cdot a$ byl uveden zápis a^3. Dál se mocnina ale nijak nerozebírala. Zde už se žáci přesně dozvídají, co dvojka nad číslem znamená, a poprvé se setkávají s odmocninou.

[11] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro sedmý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 1999.
[12] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro sedmý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 1999, str. 190 – 201.
[13] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro osmý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000.

Pomocí písmen jsou opět uvedená obecná pravidla pro počítání s mocninami s přirozeným koeficientem a druhou odmocninou. Žáci se tedy poprvé setkávají se substitucí za proměnnou s přirozenou mocninou a proměnnou v odmocnině. Převládá zde opět dosazování kladných čísel. Vyskytuje se pouze jedna úloha[14], kde je třeba dosadit za a^2 záporné číslo. V úloze je v tabulce zadáno několik hodnot pro $a = -0{,}6; \frac{3}{4}; 13; -\frac{6}{7}; -0{,}1; -8$. Úkolem je doplnit druhý řádek tabulky pro a^2. Není zde ale žádná úloha, ve které by žáci měli dosazovat záporné číslo do proměnné se záporným koeficientem (např. $a = -3$ do $-3a^2$).

Se substitucí se pak žáci setkávají ve třetí kapitole *Pythagorova věta*. Pythagorova věta je nejdříve vyslovena slovně v rámečku a pod ní je vztah zapsán pomocí písmen *a, b, c*. V příkladech a úlohách nezůstávají autoři pouze u písmenek *a, b, c,* ale využívají i jiná písmena. Pomocí písmen je uveden i vztah[15], jak najít pythagorejskou trojici, a tabulka s různými hodnotami, které mají žáci do vztahu dosadit. Zde je jasné, že se jedná opět pouze o dosazování kladných čísel.

Důležitá je kapitola 6 *Výrazy*. První podkapitola se věnuje číselným výrazům. V druhé podkapitole *6.2 Výrazy s proměnnými* je zavedena proměnná pomocí slovní úlohy. Jedna proměnná zastupuje počet gramů salátu, druhá proměnná počet rohlíků, co si postupně koupily tři dívky v obchodě. Nejdříve je vypočítána cena nákupu všech dívek jednotlivě pod sebou pomocí číselných výrazů a pod tím je napsán výraz s proměnnými, který platí pro všechny tři dívky. Písmenka ve výrazu jsou označena jako „proměnné“: „Jestliže v číselném výrazu nahradíme jedno nebo více konkrétních čísel písmenem, vznikne **výraz s proměnnými**.“ (Coufalová et al., 2000: s. 116)

Hned vzápětí je uvedena věta, jak dostaneme hodnotu výrazu:[16]„Jestliže do výrazu s proměnnými dosadíme za všechny proměnné konkrétní čísla, dostaneme hodnotu výrazu pro danou hodnotu proměnné.“ (Coufalová et al., 2000: s. 116)

[14] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro osmý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000, str. 40, úloha 4.
[15] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro osmý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000, str. 61.
[16] Což bylo vlastně zadání testové úlohy 2, i v testových úlohách 1, 3, 6 bylo úkolem zjistit hodnotu výrazu, akorát to bylo jinak napsané v zadání.

Výraz s proměnnými	Proměnné
$\sqrt{x+1}$	x
$3p+q$	p, q
$\dfrac{3a+4b}{c-1}$	a, b, c

Obrázek 3: Proměnné

Následují dvě úlohy, kde mají žáci určit hodnotu několika výrazů pro různá čísla, která mají do výrazu dosadit. Do výrazů mají žáci dosadit celá čísla, ale nevyskytuje se zde žádná proměnná, před kterou by bylo znaménko mínus.

Následuje řada úloh na počítání s mnohočleny, ale pouze jedna úloha[17], kde mají žáci zjednodušit výrazy a zjistit, u kterého výrazu dostanou po dosazení $x = -2$ největší číslo. Je to jediná úloha v kapitole, kde je třeba dosadit zápornou hodnotu do záporného výrazu. Po zjednodušení výrazů vyjdou výrazy $14x^2 - 2x + 3$; $39x$; $-13x^2 - 4$. Je třeba dosadit záporné číslo do proměnné se záporným koeficientem jak v první mocnině, tak v druhé mocnině. Jedná se o úlohu, která je označená symbolem „Náročnější úlohy, ve kterých použijete více poznatků." Domnívám se, že jediná úloha na tento typ dosazení je málo.

Neznámá je zavedená v kapitole 8 *Lineární rovnice*. S jednoduchými rovnicemi se už žáci setkali dříve, nicméně pojem rovnice je zde budován od začátku. Nejprve je zavedena rovnost pomocí vah. Následují úlohy, kde mají žáci rozhodnout, zda platí rovnost dvou číselných výrazů. Poslední úlohou před zavedením rovnice a neznámé je úloha 3 (obr. 4).

Dosazením za proměnnou zjistěte, pro která z čísel 3, –5, 0, $\frac{1}{3}$ jsou si dané dva výrazy rovny.

a) $2 \cdot (5 - 2 \cdot z)$, $\quad 65 + 7 \cdot z$

b) $2 \cdot x + \frac{1}{6}$, $\quad 2 \cdot (1 - x) - \frac{1}{2}$

c) $3 \cdot y - 4 - \frac{y}{3}$, $\quad \frac{5 \cdot y - 3}{3}$

Obrázek 4: Rovnost výrazů

Žáci dosazují za proměnnou číslo kladné, záporné, nulu i zlomek, a to i do záporného výrazu. Poprvé se vyskytuje dosazení zlomku za proměnnou v čitateli.

[17] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro osmý ročník základní školy.* 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000, str. 61, úloha 6.

> Rovnice obsahuje výraz s proměnnou. Proměnná v rovnici se nazývá neznámá. Označujeme ji písmenem. Řešit rovnici znamená najít všechna čísla, která po dosazení za neznámou změní rovnici na platnou rovnost.
>
> (Coufalová et al., 2000: s. 142)

Následuje ještě jedna úloha, kde je třeba ověřit, zda je zadané číslo kořenem rovnice. Poprvé se žáci mohou setkat s dosazením kladného zlomku za proměnnou ve jmenovateli. Poté už se řeší ekvivalentní úpravy rovnic, kde žáci využívají substituci ve zkoušce. Kořenem rovnic v učebnici jsou převážně přirozená čísla, vyskytují se ale i rovnice, jejichž kořeny jsou záporná celá čísla, zlomky i desetinná čísla. Při zkouškách se tedy procvičuje jejich substituce. Až na konci kapitoly v podkapitole 8.8 *Opakování* se vyskytují rovnice, které mají záporné kořeny a záporný koeficient před neznámou. Při zkouškách se tedy procvičuje dosazení záporného čísla do záporného výrazu. Ve čtyřech rovnicích jsou kořeny rovnic záporná celá čísla, v jedné rovnici záporný zlomek.

Se substitucí se žáci setkávají ještě v 10. kapitole *Statistika* při dosazování do vzorce pro aritmetický průměr. Podobně jako v geometrii je třeba ve všech úlohách dosadit pouze kladná čísla. Myslím si ale, že ve vzorci pro aritmetický průměr si žáci moc substituci neuvědomují a spíše si pamatují, že musí nejdříve sečíst všechny hodnoty a pak vydělit jejich počtem.

Matematika 9

Učebnice[18] opět začíná kapitolou věnující se opakování. Pomocí písmenek jsou tu zopakována pravidla pro počítání s výrazy. Je zde jedna úloha[19], kde je třeba vypočítat hodnotu výrazu, žáci musí dosadit kladné i záporné číslo, a to i do záporného výrazu.

V jedné z podkapitol 1.5 *Množiny čísel* jsou racionální čísla doplněná o iracionální, která jsou zde popsána jako čísla, která mají v desítkové soustavě neukončený periodický zápis. Iracionální čísla s racionálními pak tvoří množinu reálných čísel. Poté se objevuje úloha[20]na číselné obory, která je pro tuto řadu učebnic typická. Jsou zadány nerovnice (např. $-2 \le y < 7$; $y \in$ R), žáci mají najít množinu řešení, které vyhovují nerovnicím. Řešení je žákům ukázáno pomocí osy a poprvé nestačí k řešení pouze výčet prvků, ale je nutné najít interval. Pojem interval se vyskytuje v sérii učebnic také poprvé. Zajímavé je, že se tyto nové poznatky vyskytují v kapitole *Opakování*.

---

[18]COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro devátý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000.
[19] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro devátý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000, str. 15, úloha 2.
[20] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro devátý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000, str. 21, úloha 7, str. 22, úloha 8.

Opakování zahrnuje i několik úloh na řešení rovnic a nerovnic, kde jsou poprvé popsány ekvivalentní úpravy nerovnic. Pomocí nich mají žáci nerovnice řešit. Před popisem ekvivalentních úprav u nerovnic se vyskytuje úloha, kde jsou zadána čísla a žáci mají zjistit, zda nerovnici vyhovují. Ověřují celá čísla a kladné i záporné zlomky. Jednou je třeba dosadit záporné celé číslo do výrazu $-2x$.

První kapitola v učebnici věnující se nové látce je *Lomené výrazy*. V ní je řada úloh na krácení, rozšiřování, sčítání, odčítání, násobení, dělení lomených výrazů a zjednodušení složených lomených výrazů. V celé kapitole se vyskytují pouze dvě úlohy, ve kterých je třeba dosadit za proměnnou do výrazu. V jedné úloze[21] mají žáci zjistit hodnoty třech výrazů pro tři různé hodnoty. Je třeba dosadit jak kladná, tak záporná čísla i nulu, ale nevyskytuje se zde případ, kdy by bylo třeba dosadit zápornou hodnotu do záporného výrazu. Ve druhé úloze[22] je třeba sečíst dva lomené výrazy a správnost výpočtu se má ověřit dosazením uvedené hodnoty za proměnnou do původního výrazu a do výsledku. Hodnota, kterou je třeba dosadit, je zadána a jedná se vždy o přirozené číslo. Jeden výraz obsahuje pouze jednu proměnnou a pět výrazů obsahuje vždy dvě proměnné.

Další kapitola se věnuje řešení lineárních rovnic s neznámou ve jmenovateli a slovním úlohám o pohybu, o směsích a o společné práci, kde je třeba sestavit rovnici a pak rovnici vyřešit. Substituce zde žáci využívají opět při zkoušce u rovnic. Dochází opět k dosazování čísel za písmenko ve jmenovateli. Pouze v jednom případě se dosazuje záporná hodnota do záporného výrazu. V některých případech vychází kořeny rovnic jako zlomky, záporné i kladné. Pokud žáci provádějí zkoušku, procvičují dosazování zlomku za neznámou i ve jmenovateli.

Poprvé se setkávají žáci se slovem substituce v páté kapitole *Soustavy lineárních rovnic se dvěma neznámými,* a to při dosazovací metodě. Metoda je tu popisována jako metoda dosazovací (substituční). V jiné souvislosti se pojem „substituce“ v této sérii učebnic nevyskytuje.

Nejdříve je zaveden pojem Lineární rovnice se dvěma neznámými a uspořádaná dvojice čísel x, y. S oběma pojmy se žáci už setkali u přímé a nepřímé úměrnosti v učebnici určené pro 7. ročník, kde ještě nebyly popsány obecně.

> Rovnice, která má tvar $ax + by = c$, kde $a \neq 0$, $b \neq 0$, a, b, c jsou reálná čísla a x, y neznámé, se nazývá lineární rovnice se dvěma neznámými. Řešením lineární rovnice se dvěma

[21] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro devátý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000, str. 41, úloha 5.
[22] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro devátý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2000, str. 51, úloha 10.

neznámými je uspořádaná dvojice čísel x, y, která po dosazení do rovnice promění tuto rovnici na rovnost.

$[x, y]$
$[8, -3]$ je řešením rovnice $x + y = 5$.

(Coufalová et al., 2000: s. 96)

Následují úlohy, kde je třeba si za jednu neznámou do rovnice dosadit, a vypočítat tak druhou neznámou. Dosazuje se záporné číslo a dokonce i záporný zlomek do neznámé se záporným koeficientem. Vyskytuje se ještě jeden druh úlohy, kde je zadáno osm rovnic s neznámými u a v. U každé rovnice pak mají žáci určit alespoň čtyři uspořádané dvojice $[u, v]$, které jsou řešením dané lineární rovnice.

U soustav rovnic je žákům nejdříve sděleno, co je řešením soustavy dvou lineárních rovnic:

Řešením soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými jsou taková čísla x, y (taková uspořádaná dvojice $[x, y]$), která jsou řešením obou rovnic současně.

(Coufalová et al., 2000: s. 99)

Hned poté je popsán princip dosazovací metody:

Z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme ji do rovnice druhé. Dostaneme tak jednu rovnici o jedné neznámé, kterou vyřešíme.

(Coufalová et al., 2000: s. 99)

Následuje příklad s komentářem jednotlivých kroků. Poprvé se zde setkáváme s tím, že za jednu neznámou dosazujeme výraz s neznámou. Následuje ještě jeden vyřešený příklad, úkolem dětí je vysvětlit způsob řešení. Dále už jsou uvedeny úlohy, ve kterých mají žáci vyřešit soustavu dosazovací metodou.

Stejně je řešena v učebnici metoda sčítací, která ale není pro mou práci důležitá. Po ní následuje ještě řada úloh, kde si žáci mohou metodu vybrat.

S procvičováním substituce a pojmem uspořádaná dvojice se žáci hodně setkávají v následující kapitole *Funkce,* a to především u sestrojování grafů, kde je třeba si jednu neznámou zvolit a druhou dopočítat. Žáci počítají hodnotu funkce. Jsou uvedeny dvě úlohy, kde je zadána rovnice funkce a několik bodů zadaných uspořádanou dvojicí čísel. Žáci mají rozhodnout, které z nich vyhovují rovnici funkce. V jedné z nich je funkce dána rovnicí $y = -\frac{x^2}{4}$. Při sestrojování grafů se žáci poprvé setkávají i se substitucí, kde je třeba dosadit za proměnnou v druhé mocnině se záporným koeficientem záporné číslo.

2.1.2 Matematika 6. – 9. (Odvárko &Kadleček)

Jedná se o dvanáctidílnou řadu učebnic, pro každý ročník jsou určeny tři učebnice. Jeden ze tří dílů je vždy věnován geometrii. Každý díl série učebnic obsahuje několik kapitol, které jsou rozděleny na několik podkapitol. Poslední podkapitola je nazvána *Úlohy na závěr* a jsou v ní zopakovány nejdůležitější druhy úloh kapitoly. Každá učebnice obsahuje dvě kapitoly *Souhrnná cvičení*. Jedna tato kapitola je umístěna přibližně uprostřed učebnice a jedna na konci. Na konci učebnice jsou výsledky úloh z celé učebnice a rejstřík.

Učebnice obsahuje několik řešených příkladů, které jsou značeny velkými písmeny, za nimi následují rámečky s poučkami a pravidly. Poté jsou uvedeny procvičující úlohy, které jsou číslovány. Někdy jsou rámečky vloženy i mezi úlohy.

Matematika pro 6. ročník základní školy – Opakování z aritmetiky a geometrie

Celý první díl učebnice[23] určený pro 6. ročník se věnuje opakování z geometrie a aritmetiky prvního stupně základní školy. Hned v prvním díle se setkáváme s neznámou *x,* a to v rovnicích a nerovnicích, v nichž jsou pouze přirozená čísla. Součástí opakování jsou i desetinná čísla a jedna úloha s několika rovnicemi, kde je třeba neznámou nahradit kladným desetinným číslem. Jedná se o jednoduché rovnice a nerovnice, kde nejsou třeba žádné ekvivalentní úpravy. Žáci mají určit zpaměti číslo *x*, aby platila rovnost nebo nerovnost. Místo *x* je někdy použit otazník. Hned od prvního dílu se v učebnicích vyskytují rámečky s obecnými pravidly. Ve většině z nich se vyskytují písmena ze začátku abecedy, které zde zastupují zobecněné číslo. Pravidlo je popsáno pomocí písmen ($a \cdot b = b \cdot a$), vždy ale obecný zápis doprovází konkrétní příklad s čísly ($7 \cdot 5 = 5 \cdot 7$) a slovní popis pravidla („Když změníme *pořadí* činitelů, součin se *nezmění*. Násobení přirozených čísel je **komutativní**.“). Se substitucí se žáci setkávají také v geometrii při dosazování do vzorců pro obsah a obvod čtverce a obdélníku. Písmeny jsou označovány úsečky,

[23] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 1. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus.

body, kružnice atd. V celé učebnici se jedná o dosazování kladných čísel za proměnnou[24] s kladným ale i záporným koeficientem.

Matematika pro 6. ročník základní školy – Desetinná čísla, Dělitelnost

V druhém díle[25] určeném pro 6. ročník jsou od začátku budována desetinná čísla, přestože se s nimi setkali žáci v předchozí učebnici. Mezi řadou úloh na sčítání, odčítání, násobení a dělení desetinných čísel se vyskytují opět jednoduché rovnice a nerovnice, kde je třeba nahradit písmeno nebo otazník kladným desetinným číslem.

Matematika pro 7. ročník základní školy – Zlomky, Celá čísla, Racionální čísla

První díl učebnice[26] určený pro sedmý ročník se zabývá postupně zlomky, celými a racionálními čísly. Substituce je zde využívána v rovnicích podobného typu jako u přirozených čísel v předchozím ročníku. U zlomků se má neznámá x nahradit tak, aby platila rovnost. Za x je ale potřeba dosadit pouze přirozené číslo (do jmenovatele nebo čitatele) nebo nulu (do čitatele). Nevyskytuje se zde rovnice, kde by se za písmenko měl dosadit zlomek.

V kapitole *Celá čísla* je definována absolutní hodnota a úloha[27], kde se žáci poprvé setkávají s více než jedním řešením rovnice a poprvé nahrazují písmenko záporným číslem. Je zadáno, že absolutní hodnota neznámého čísla x se rovná 7, a žáci mají vybrat správnou odpověď (x je 7; x je –7; x je 7 nebo –7). S dosazením záporného čísla za x se setkávají opět u jednoduchých rovnic a nerovnic. Je třeba nahradit písmenko x zápornými čísly, ale nevyskytuje se zde žádná úloha, kde by před proměnnou x byl záporný koeficient.

V kapitole *Racionální čísla* je pouze jedna úloha[28], kde se vyskytuje neznámá v šesti rovnicích. Z nápovědy („Odhaduj a pak kontroluj správnost svého odhadu.“) je vidět, že autorům při řešení rovnic jde zatím o odhad kořene a následné dosazení pro kontrolu správnosti odhadu. Poprvé se zde setkáváme s tím, že je třeba nahradit výraz –x záporným číslem. Jedná se ale pouze o jeden případ ($1{,}3 - x = 1{,}5$).

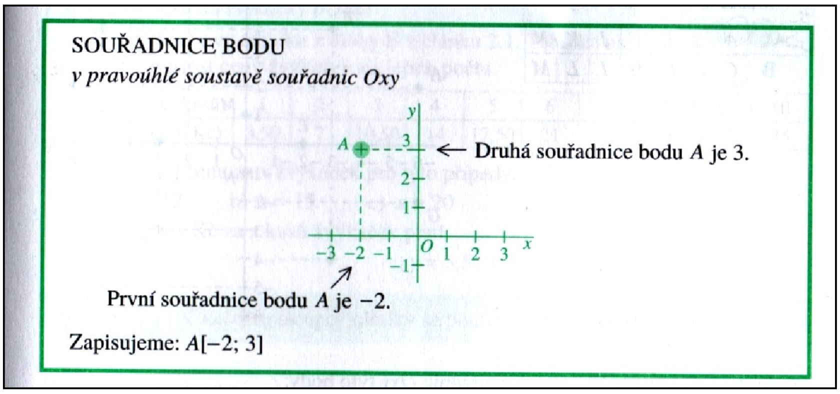
[24] Nahrazují i otazník „?“.
[25] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus.
[26] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus.
[27] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus, str. 43, úloha 5.
[28] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus, str. 72, úloha 11.

Matematika pro 7. ročník základní školy – Poměr, Přímá a nepřímá úměrnost, Procenta

Se substitucí kladného čísla za „kladnou“ proměnnou se v této učebnici[29] žáci nejdříve setkávají u rovnosti dvou poměrů (3 : x = 15 : 40).

V další kapitole[30] *Přímá a nepřímá úměrnost* se žáci poprvé setkávají se závislostí dvou proměnných. Setkávají se zde také poprvé s jiným písmenkem, než je x, a to y (mimo rámečky s pravidly, tam autoři používají písmenka a, b, c, ...). Neznámou y dopočítávají žáci v tabulkách, kde mají v jednom řádku danou hodnotu x, v druhém řádku mají doplnit hodnotu y, aby platila přímá, nebo nepřímá úměrnost, kterou si zjistí ze zadaných hodnot, nebo je dána rovnicí se dvěma neznámými. Tabulka se využívá i při sestrojování grafů přímé a nepřímé úměrnosti, kde si žáci nejdříve hodnoty x volí. Jedná se ale pouze o dosazování kladných čísel do proměnné s kladným koeficientem.

V této učebnici se žáci také poprvé setkávají s uspořádanou dvojicí [$x; y$], a to v podkapitole *Pravoúhlá soustava souřadnic v rovině*. Uspořádaná dvojice se zde vyskytuje ale pouze s čísly, ne s proměnnými. To, že první souřadnice označuje umístění vzhledem k ose x a druhá souřadnice k ose y, je vidět z rámečku[31] (obr. 5).



Obrázek 5: Souřadnice bodu

Matematika pro 8. ročník základní školy – Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, Výrazy

První polovina učebnice se zabývá druhou mocninou a druhou odmocninou, Pythagorovou větou a mocninami s přirozeným koeficientem. Žáci se poprvé setkávají se substitucí za proměnnou

[29] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 2. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus.
[30] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 2. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus, str. 27.
[31] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 2. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus, str. 39.

v druhé mocnině a za proměnnou pod odmocninou. Je zde řada číselných výrazů. Se substitucí za proměnnou v druhé mocnině se žáci setkávají především při dosazování do vzorce pro Pythagorovu větu, kde přirozeně dosazují pouze kladná čísla.

Druhá polovina učebnice se zabývá výrazy, nejprve číselnými výrazy a poté výrazy s proměnnými. U výrazů s proměnnými je hned na začátku kapitoly uvedena řešená slovní úloha, kde dvě proměnné (a, b) zastupují různý počet dospělých a počet dětí. Hned po slovní úloze je v rámečku popsáno:

Jak vypočítáš HODNOTU VÝRAZU $50 \cdot a + 30 \cdot b$

se dvěma proměnnými a, b pro $a = 16$ a $b = 23$?

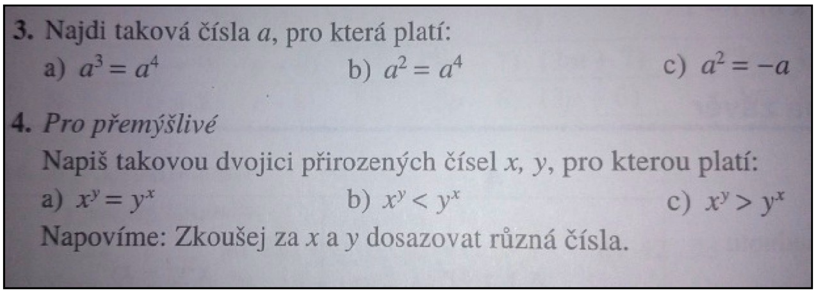
- Dosadíš do výrazu za a číslo 16 a za b číslo 23 $50 \cdot 16 + 30 \cdot 23$
- A vypočítáš hodnotu získaného číselného výrazu: $50 \cdot 16 + 30 \cdot 23 = 1490$

(Odvárko & Kadleček, 1999: s. 59)

Proměnná zde nijak dále popsána není. Pak následuje řada úloh na počítání hodnoty výrazu jak s jednou, tak se dvěma proměnnými. Ale pouze v jedné úloze se vyskytuje substituce, kde je třeba dosadit záporné číslo do proměnné se záporným koeficientem. Je třeba dosadit do výrazu $\frac{2 \cdot p^3 - r^3}{p^2 + 3 \cdot r^2}$; $p = 3$, $r = -3$. V úlohách se vyskytuje i dosazení záporného čísla do kladného výrazu, ale převládají úlohy na dosazování kladných čísel. Proměnná je už zastoupena různými písmenky. Dříve se jednalo většinou o proměnnou x.

Následuje kapitola *Mnohočleny*, v níž jsou úlohy převážně na úpravu mnohočlenů. Je zde 5 úloh, u kterých je kromě úpravy třeba vypočítat i hodnotu výrazu. Jedná se vždy ale bohužel jen o dosazování kladného čísla. V kapitole *Souhrnná cvičení* jsou dvě zajímavé úlohy[32](obr. 6), v nichž si žáci mají zkusit dosadit za dvě proměnné, aby platila rovnost, nebo nerovnost. Zajímavé je c) u třetí úlohy, kde žáci musí dosadit nulu nebo mínus jedničku, aby přišli na správné řešení[33].

[32] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus, str. 84, úloha 3, úloha 4.
[33] Úloha trochu připomíná testovou úlohu 4.



3. Najdi taková čísla a, pro která platí:
a) $a^3 = a^4$ b) $a^2 = a^4$ c) $a^2 = -a$

4. *Pro přemýšlivé*
Napiš takovou dvojici přirozených čísel x, y, pro kterou platí:
a) $x^y = y^x$ b) $x^y < y^x$ c) $x^y > y^x$
Napovíme: Zkoušej za x a y dosazovat různá čísla.

Obrázek 6: Dvě úlohy ze souhrnného cvičení.

Matematika pro 8. ročník základní školy – Lineární rovnice, Základy statistiky

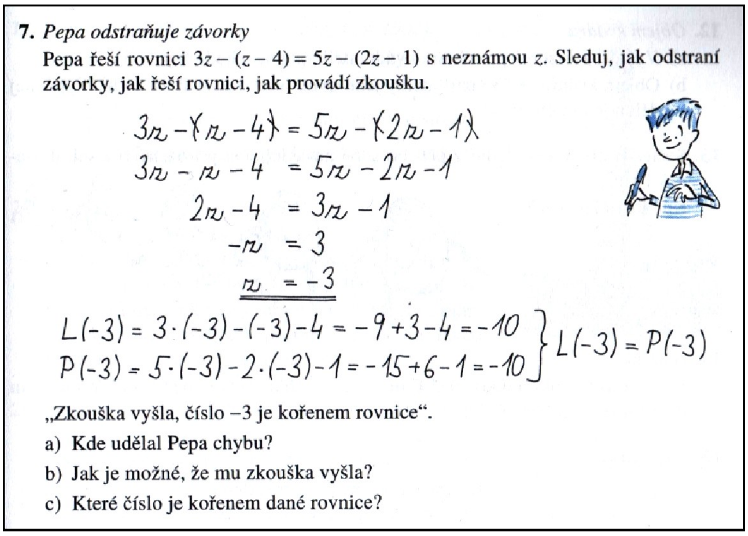
Druhý díl řad učebnic[34] pro osmý ročník se zabývá lineárními rovnicemi. Na úvod této kapitoly je několik úloh, v nichž se má vypočítat hodnota výrazu. Zajímavé je, že je poměrně často třeba dosadit záporné číslo do záporného výrazu (v předchozích kapitolách se tato substituce téměř nevyskytovala). Neznámou autoři nějak zvlášť nedefinují, konkrétní rovnici ($2x - 1 = 2$) popisují jako „rovnici s neznámou x“.

Ještě než jsou žákům popsány ekvivalentní úpravy, jsou v učebnici rovnice, které řeší žáci zpaměti dosazením, v některých úlohách[35] je zadáno několik čísel a úkolem je zjistit, která z čísel jsou řešením zadané rovnice. Žáci si tedy musí čísla do rovnice dosadit a řeší vlastně zkoušku rovnice.

Potom už jsou žákům vysvětleny ekvivalentní úpravy rovnic. V této kapitole je ale substituce stále hojně využívaná ve zkoušce. Objevují se i rovnice, kde je před neznámou záporný koeficient, převažují ale rovnice s kladným koeficientem před neznámou. Kořeny rovnice jsou záporná a kladná čísla i nula.

V souhrnných cvičeních je úloha[36], která upozorňuje na častou chybu s odstraňováním závorek (obr. 7).

[34] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus.
[35] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus, str. 7, úloha 6, úloha 7, úloha 8.
[36] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus, str. 37, úloha 7.



7. *Pepa odstraňuje závorky*

Pepa řeší rovnici $3z - (z - 4) = 5z - (2z - 1)$ s neznámou z. Sleduj, jak odstraní závorky, jak řeší rovnici, jak provádí zkoušku.

$$3z - (z - 4) = 5z - (2z - 1)$$
$$3z - z - 4 = 5z - 2z - 1$$
$$2z - 4 = 3z - 1$$
$$-z = 3$$
$$\underline{z = -3}$$

$$\left.\begin{array}{l} L(-3) = 3 \cdot (-3) - (-3) - 4 = -9 + 3 - 4 = -10 \\ P(-3) = 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) - 1 = -15 + 6 - 1 = -10 \end{array}\right\} L(-3) = P(-3)$$

„Zkouška vyšla, číslo –3 je kořenem rovnice“.

a) Kde udělal Pepa chybu?

b) Jak je možné, že mu zkouška vyšla?

c) Které číslo je kořenem dané rovnice?

Obrázek 7: Úloha s chybným odstraněním závorek

Matematika pro 9. ročník základní školy – Lomené výrazy, Rovnice, Soustavy rovnic

V první učebnici[37] určené pro 9. ročník se žáci nejdříve opět setkávají se substitucí u rovnic ve zkoušce nebo v úlohách, kde mají zadaná čísla a mají zjistit, která jsou řešením rovnic. U výrazů je několik úloh, kde mají žáci vypočítat hodnotu výrazu. V žádné úloze se ale nevyskytuje případ dosazení záporného čísla do proměnné se záporným koeficientem.

U rovnice se dvěma neznámými je na příkladu ukázáno, že má víc řešení a že jsou to dvojice čísel $[x;\ y] = [-4;\ -1]$. Následují úlohy, ve kterých žáci ověřují, zda je uspořádaná dvojice řešením rovnice se dvěma neznámými, dále mají uvést několik dvojic, které jsou řešením zadané rovnice, a netradičně i uvést dvojice čísel, které nejsou řešením rovnice. U soustav rovnic je úloha[38], kde jsou zadány dvě soustavy rovnic ($x + y = 5$; $x - y = 3$) a úkolem je zjistit, které ze čtyř zadaných dvojic $[x; y]$ jsou řešením soustavy rovnic. Neznámá x se vyskytuje v rovnici vždy před y.

Na příkladu je popsána dosazovací metoda, ve které se žáci poprvé setkávají se substitucí, kde dosazují za neznámou výraz s neznámou.

Matematika pro 9. ročník základní školy – Funkce, Podobnost, Goniometrické funkce

V této učebnici se substituce vyskytuje především v kapitole *Funkce.* Na začátku je připomenuto, že na ose x je první souřadnice bodu, na ose y druhá souřadnice bodu v uspořádané dvojici.

[37] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl.* 2. vyd. Praha: Prometheus,

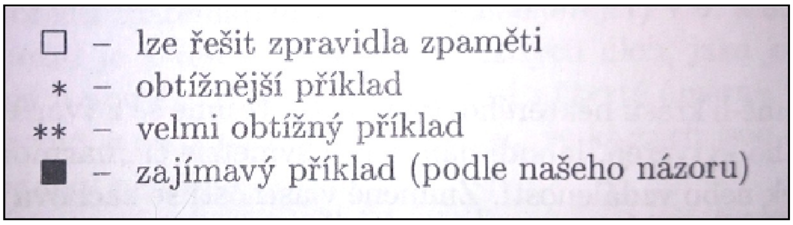
[38] Úloha je podobná testovým úlohám 5 a 7

Substituce se zde využívá především při dopočítávání druhé hodnoty, většinou y z hodnoty x, která je dána v tabulce, nebo si ji žáci volí při sestrojování grafů funkcí. Dochází zde často i k dosazování záporných hodnot do proměnné se záporným koeficientem. Při ověřování, zda jsou body [3; 4] součástí grafu funkce $y = \frac{8}{x}$, dochází k procvičení dosazování uspořádané dvojice do rovnice o dvou neznámých. Neznámá y se vyskytuje na prvním místě, neznámá x na druhém místě.

2.1.3 Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií (Herman a kol.)

Tuto řadu učebnic[39] používají na Gymnáziu Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze v nižších ročnících odpovídajících šestému, sedmému, osmému a devátému ročníku základní školy. Názvy učebnic téměř odpovídají jednotlivým tématům školního vzdělávacího plánu. Na začátku každé učebnice jsou dvě nečíslované kapitoly *Na vysvětlenou* … a *Úvod.*

V kapitole *Na vysvětlenou* jsou uvedeny cíle celé série učebnic a informace potřebné pro to, abychom se v učebnici vyznali. Je zde uveden způsob výkladu nového učiva a symboly, které označují úlohy určené k samostatné práci žáků (obr. 8).


□ – lze řešit zpravidla zpaměti
* – obtížnější příklad
** – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

Obrázek 8: Značení obtížnosti úloh

Důležité poznatky jsou v rámečcích. Autoři ale upozorňují na to, že jim nejde o to, aby se je žáci učili nazpaměť, ale aby se nad nimi pořádně zamysleli a správně je pochopili. To lze podle nich zkontrolovat průběžnými úkoly v textu značenými modrou šipkou. Ke kontrole zvládnutí větších celků autoři vytvořili *cvičení* uváděná za jednou či dvěma kapitolami.

Kapitola *Úvod* slouží jako motivace a ohlédnutí se do historie pro učební látku.

Na konci učebnice jsou kapitoly *Úlohy z matematické olympiády* a *Souhrnná cvičení.* Na samém konci jsou *Výsledky průběžných úkolů*, *Výsledky cvičení* a *Výsledky souhrnných cvičení*.

[39] Od autorů Herman, J.; Chrápová, V.; Jančovičová, E.; Šimša, J.

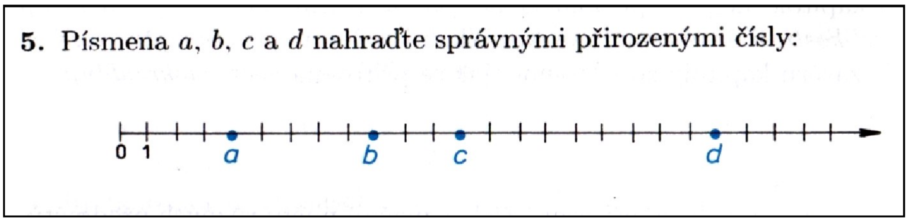
V celé sérii učebnic se opět vyskytují písmenka při popisu zobecněných vlastností nebo pravidel. Pravidlo je vždy nejdříve ukázáno na konkrétním příkladu se slovním komentářem, až poté je obecně popsáno pomocí písmenek ze začátku abecedy.

Substituce kladných čísel provází také celou řadu učebnic v geometrii, kde písmenka označují strany, hrany, úhly atd. Za písmenka dosazujeme pouze kladná čísla při počítání obvodů, obsahů, povrchů a objemů nebo například počítání výšky z obvodu trojúhelníku.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Úvodní opakování

Tato kniha je věnována opakování látky prvního stupně základního vzdělání. Jejím cílem je sjednotit znalosti žáků, kteří přešli na gymnázium z různých škol.

Poprvé se s písmenky, která nahrazují čísla, žáci setkávají ve třetí kapitole *Přirozená čísla* v úloze, kde mají nahradit písmenka na číselné ose přirozenými čísly (obr. 9). Jedná se o neřešenou úlohu, autoři tedy zřejmě předpokládají, že žáci se už s písmenky setkali na prvním stupni.



Obrázek 9: Písmena na číselné ose

S využitím písmenka jako proměnné se setkáváme o několik řádků níž při obecném zápisu komutativního a asociativního zákona sčítání přirozených čísel[40] (obr. 10).

Víte již, že sčítání je *komutativní* (pořadí sčítanců lze zaměňovat) i *asociativní* (sčítance lze libovolně sdružovat):

$$105 + 250 = 250 + 105$$
$$(17 + 32) + 23 = 17 + (32 + 23)$$

Obě pravidla symbolicky zapíšeme vzorci, které platí pro libovolná přirozená čísla a, b, c:

$$\boxed{\begin{aligned} a + b &= b + a \\ (a + b) + c &= a + (b + c) \end{aligned}}$$

Obrázek 10: Popis komutativního a asociativního zákona sčítání přirozených čísel

[40] Herman, J., et al. (2005a). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií– Úvodní opakování.* Praha: Prometheus.

Podobně jsou zapsána všechna pravidla, jak jsem psal už výše. Například u celých čísel proměnná zastupuje i záporná čísla. Takto zapsaná pravidla provázejí celou řadu učebnic, už je zde tedy nebudu zmiňovat.

O dvě stránky dál se objevuje neznámá v jednoduchých lineárních rovnicích. Ekvivalentní úpravy rovnic ale ještě žáci nemají probrané, tomu je také přizpůsobené zadání úlohy. Ve *Cvičení 3*[41] se objevuje úloha, kde je třeba vepsat do rámečku číslo podle určitých pravidel, aby platila nerovnost. Nejedná se přímo o dosazení čísla, za symbol (např. ?) nebo písmeno. Taková úloha ale může být dobrou průpravou, než se dá místo rámečku písmeno. Podobný typ úlohy se vyskytuje na konci učebnice v kapitole *Souhrnná cvičení*, kde jsou místo rámečku tři tečky a jedná se o rovnost. V další úloze, která se vyskytuje o několik řádků níž, je třeba nahradit otazník sčítancem, aby platilo písemné sčítání, zde už dochází k náhradě otazníku číslem. Tyto tři úlohy ukazují, že nemusí čísla zastupovat[42] jenom písmena. Úlohy, kde je třeba nahradit otazník, tři tečky, nebo vepsat číslo do rámečku, se vyskytují i v jiných kapitolách. V tomto cvičení se ještě vyskytuje úloha, ve které je třeba vypočítat hodnotu výrazu pro pět přirozených čísel (obr. 11). Zadání úlohy je opět přizpůsobeno znalostem žáků, nepředpokládá se, že by už věděli, co je hodnota výrazu.

□**10.** Pro každé $x \in \{30, 52, 78, 105, 421\}$ určete zpaměti:
a) $x + 29$ b) $x - 17$ c) $500 - x$

Obrázek 11: První výpočet hodnoty výrazu

Stejným typem úlohy, kde je třeba také vypočítat hodnotu výrazu, je doplnění tabulky (obr. 12). Tato úloha pořád spadá do *Cvičení 3.* Poprvé dochází k nahrazení písmenka desetinným číslem.

33. Určete, která čísla patří do prázdných políček tabulky:

a	6	0,4	0,09	0,27	3,5	8,07
$a \cdot 10$						
$a \cdot 100$						

Obrázek 12: Substituce v tabulce

[41] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií– Úvodní opakování, str. 45.
[42] I když u první úlohy se úplně o nahrazení nejednalo.

V 6. kapitole *Rovnice* autoři vymezují rozdíl mezi rovností a rovnicí. Poprvé zazní pojem *neznámá*.

> Zápis $x - 2 = 7$ je příkladem *rovnice*. Objevuje se zde neznámé číslo, které je třeba určit. Nazývá se neznámá; obvykle se označuje písmenem x. Užívají se však i jiná písmena.
>
> (Herman et al., 1997: s. 54)

Zazní, i co znamená řešit rovnici a co je výsledkem rovnice.

> Řešit rovnici znamená určit všechna čísla, která je možné dosadit za neznámou, aby se rovnice přeměnila v rovnost. Každé takové číslo nazýváme kořenem nebo řešením dané rovnice.
>
> (Herman et al., 1997: s. 54)

O ekvivalentních úpravách rovnic se zde zatím nemluví. Poté je ukázána na příkladu zkouška správnosti řešení, v níž se vlastně využívá substituce. Kromě samotných rovnic jsou zde i úlohy, ve kterých máme dosadit daná čísla do rovnice a zjistit tak, zda se jedná o kořen rovnice. K tomu, aby si čísla do rovnice žáci museli opravdu dosadit, autoři využívají kvadratické rovnice zapsané bez mocnin. Například v úloze z *Cvičení* 4 na stránce 57 mají žáci vybrat čísla z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, která jsou kořeny rovnice $x \cdot x + 2 = 3 \cdot x$.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Dělitelnost

Písmena v této učebnici[43] v některých úlohách zastupují cifry nebo přirozená čísla, vzhledem k substituci jsem zde ale nenašel nic nového.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Kladná a záporná čísla

Tato učebnice[44] obsahuje velké množství číselných výrazů. Písmenka se objevují především v zobecněných vlastnostech nebo pravidlech. Jediným typem úlohy, kde se vyskytuje proměnná, je doplnění tabulky (obr. 13). Tabulky se vyskytují s operacemi násobení, dělení, sčítání i odčítání.

[43] Herman, J., et al. (2003). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Dělitelnost*. Praha: Prometheus.
[44] Herman, J., et al. (2004a). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Kladná a záporná čísla*. Praha: Prometheus.

95. Doplňte tabulku:

a	2	−0,5	−0,3	0,2	6	−0,05
b	−0,1	−6	0,2	0,03	−0,7	20
c	0,3	−7	1,1	−0,4	−10	1.2
d	−4	−0,8	−0,5	0,5	−100	−1
$4 \cdot a$						
$-5 \cdot b$						
$c \cdot d$						

Obrázek 13: Úloha na doplnění tabulky

V jedné úloze v kapitole *Souhrnná cvičení* na stránce 122 se setkáváme i s novým znakem, který máme nahradit čísly, a sice s hvězdičkou *. Je dána řada čísel například 0,3; 1,2; 4,8; *; *; *. Úkolem je najít pravidlo pro číselnou řadu čísel a nahradit hvězdičky správnými čísly. Jedná se pouze o kladná čísla.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Racionální čísla. Procenta

Jedná se o první učebnici[45] pro sekundu; je zaměřena na racionální čísla a na jejich elementární aritmetiku. Druhá část se zaměřuje na procenta. Písmena se opět objevují v zobecněných vlastnostech některých operací. Poprvé se objevují písmenka ve zlomku, v úlohách se mají nahradit číslem tak, aby platila rovnost (např. $2 = \frac{b}{15}$ nebo $\frac{17}{20} = \frac{51}{x}$). Jedná se však jen o dosazení přirozeného čísla. Ve dvou úlohách na stránce 66 je zapotřebí dosadit za písmenka X a Y kladný i záporný zlomek, a to i do záporného výrazu (obr. 14).

12. **Vypočtěte oba rozdíly $(X - Y)$ a $(Y - X)$ a zkoumejte, jak spolu souvisejí:**

a) $X = \frac{1}{3}$, $Y = \frac{2}{5}$ b) $X = -\frac{2}{3}$, $Y = \frac{5}{6}$

c) $X = -\frac{5}{4}$, $Y = \frac{3}{8}$ d) $X = -\frac{6}{5}$, $Y = -\frac{2}{15}$

***13.** **Vypočtěte rozdíly $(X - Y) - Z$ a $X - (Y - Z)$:**

a) $X = \frac{1}{3}$, $Y = \frac{1}{4}$, $Z = \frac{1}{6}$ b) $X = \frac{5}{12}$, $Y = -\frac{5}{6}$, $Z = -\frac{3}{4}$

c) $X = \frac{3}{8}$, $Y = -\frac{1}{2}$, $Z = \frac{1}{4}$ d) $X = -\frac{3}{2}$, $Y = -\frac{4}{9}$, $Z = -\frac{1}{6}$

Obrázek 14: Dosazení zlomku za proměnnou

[45] Herman, J., et al. (2004b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií– Racionální čísla.* Procenta. Praha: Prometheus.

Na konci *Cvičení 5* je úloha (obr. 15) označená dvěma hvězdičkami (podle tabulky *„velmi obtížný příklad“*). Úloha je zadána obecně pomocí proměnných, nejdříve si mají žáci zkusit vyřešit úlohu s konkrétními zlomky a pak se pokusit zapsat řešení obecně.

**13. Dá se dokázat následující tvrzení:
Ke každému nenulovému zlomku $\frac{a}{b}$ existuje takové celé číslo y, že platí: Přičteme-li číslo y k čitateli tohoto zlomku a odečteme-li číslo y od jeho jmenovatele, dostaneme zlomek $\frac{b}{a}$ převrácený k původnímu zlomku.

a) Najděte takové číslo y pro zlomky $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{8}$.

b) Těžší je najít číslo y pro zlomky $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{-2}{7}$. Dokážete to?

c) Dokážete zapsat obecně, čemu se rovná y pro zlomek $\frac{a}{b}$?

Obrázek 15: Obtížná úloha se zlomky

Žáci tedy musí vymyslet obecné pravidlo, které bude platit pro všechny zlomky.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy [1]

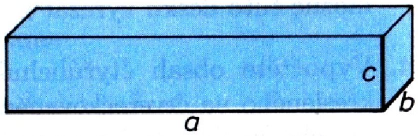
První polovina této učebnice[46] je věnována mocninám a odmocninám. S mocninou už se žáci setkali v učebnici *Dělitelnost*, přesto je tu tento pojem budován od začátku. Proměnná se opět objevuje v obecných pravidlech pro umocňování i odmocňování. Ve druhé kapitole *Druhá odmocnina* jsou racionální čísla doplněna o iracionální a jsou zde zavedena reálná čísla. Většina úloh pracuje pouze s číselnými výrazy. Jeden typ úlohy, kde se objevuje proměnná, je tabulka, kde máme zadány například hodnoty n v řádku nebo sloupci a v dalších řádcích máme doplnit hodnoty pro n^2, $\sqrt{n}$. Do mocnin se setkáváme i se substitucí záporného čísla do mocniny. Na stránce 49 je úloha 9, kde má žák popsat pomocí znamének $<$, $>$, $=$ vztahy mezi čísly x, x^2, a x^3, kde x je postupně 5; 0,4; 1; $\frac{9}{10}$. Žák se poprvé setkává s dosazením desetinného čísla a zlomku do proměnné v druhé mocnině. Měl by si také rozšířit představu, že nemusí být pravda, že vyšší mocnina čísla musí být vždy větší. Nutno ještě zmínit, že se tu objevuje neznámá, kterou je třeba nahradit přirozeným číslem i v mocnině, a to v úloze 9 na stránce 64. Žáci mají zjistit, pro která n platí rovnost, například $\frac{3^4}{3^9} = \frac{1}{3^n}$. V sedmé kapitole *Mocniny v geometrii* jsou příklady, kde se žáci poprvé setkávají se substitucí, kde je třeba nahradit proměnnou výrazem s proměnnou

46 Herman, J., et al. (2005b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií– Výrazy [1]*. Praha: Prometheus.

(obr. 16). Na ukázku uvedu příklad 7[47]. Žáci mají vypočítat rozměry kvádru, jestliže znají jeho objem a poměr stran kvádru, které si vyjádří pomocí jedné proměnné. V příkladu pak počítají s klasickým vzorcem pro objem kvádru $V = a \cdot b \cdot c$. Za proměnnou a dosazují výraz $5 \cdot b$ a za proměnnou c výraz $2 \cdot b$.

Příklad 7. Délka kvádru je pětkrát větší než jeho šířka, která je zase dvakrát menší než jeho výška. Objem tohoto kvádru je 270 dm^3. Vypočtěte jeho rozměry.

Řešení. Rozměry kvádru označíme podle obrázku. Podle zadání platí:



$$a = 5 \cdot b$$
$$c = 2 \cdot b$$

Takto vyjádřené rozměry dosadíme do vzorce pro objem kvádru:

$$V = a \cdot b \cdot c = \underbrace{5 \cdot b} \cdot b \cdot \underbrace{2 \cdot b} = 10 \cdot b^3$$

Obrázek 16: Příklad z geometrie

Druhá půlka učebnice se věnuje výrazům. Nejprve je jedna kapitola věnována opakování číselných výrazů. Následuje kapitola *Výrazy s proměnnými.* Co je výraz s proměnnou, k čemu jsou výrazy s proměnnou užitečné a co je proměnná, je ukázáno na vzorci pro obvod čtverce.

> Pravá strana předchozího vzorce, tj. zápis $4 \cdot a$, je příkladem *výrazu s proměnnou*. Písmeno se nazývá *proměnná*. Tento název napovídá, že hodnota se může *měnit* podle toho, s jakým čtvercem pracujeme.
>
> Nahradíme-li v číselném výrazu některé číslo písmenem (třeba i na několika místech), dostaneme **výraz s proměnnou**.
>
> (Herman et al., 1995: s. 106)

Co je hodnota výrazu a jak jí vypočítáme, je popsáno vzápětí.

> Jestliže proměnnou ve výrazu nahradíme konkrétním číslem, získáme číselný výraz. Této záměně říkáme dosazení za proměnnou. Výsledkem výpočtu číselného výrazu, který tak

47 Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy [1], str. 78.

vznikne, je konkrétní číslo. Toto číslo se nazývá hodnota výrazu pro danou hodnotu proměnné.

(Herman et al., 1995: s. 107)

Poté jsou uvedeny příklady, jak vypočítat hodnotu výrazu. Následují úlohy, kde už mají hodnotu výrazu určit sami žáci. Hned v první úloze je třeba dosadit přirozené číslo, záporné celé číslo, nulu, zlomek jak kladný, tak záporný, a to i do záporného výrazu $-x$. Vzápětí je ukázáno, že výraz může obsahovat více proměnných, a na příkladu je vidět, jak vypočítáme jeho hodnotu. Následuje výklad pojmů člen, jednočlen, mnohočlen, koeficient apod. U příkladu 2 na stránce 116 jsou sečteny dva mnohočleny a správnost výpočtu se má ověřit dosazením čtyř hodnot. Opět se zde setkáváme i s dosazením záporné hodnoty do záporného výrazu. Tento příklad ukazuje rovnost původního a upraveného výrazu. Následuje řada příkladů a úloh na úpravu mnohočlenů, mezi nimiž se vyskytuje několik úloh na vypočítání hodnoty výrazu. Opět se v nich vyskytuje substituce, ve které se dosazují přirozená čísla, záporná celá čísla a kladné i záporné zlomky, a to i do záporných výrazů.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a nerovnice

Na začátku učebnice[48] jsou zopakovány pojmy spojené s rovnicí a úlohy podobné úlohám z kapitoly *Rovnice* z první učebnice *Úvodní opakování*. Poté jsou na příkladech ukázány ekvivalentní úpravy rovnic. Následuje řada úloh, ve kterých je úkolem řešit rovnice, a to pomocí ekvivalentních úprav. Pro mou práci je ale důležitější zkouška, která, jak uvádí autoři, je součástí řešení rovnic. Jako kořeny rovnic v učebnici vycházejí přirozená čísla, záporná celá čísla, zlomky kladné i záporné (tedy i desetinná čísla). Ve zkoušce je žáci dosazují do výrazů s různými koeficienty. Poměrně často se setkáváme s dosazením záporného čísla do záporného výrazu.

Druhá polovina učebnice se věnuje nerovnicím. S nerovnicemi se už žáci dříve setkali, zde je ale zavádí od začátku. Nejdříve je řečeno, co je to nerovnost, a na základě toho, co je nerovnice (podobně jako u rovností a rovnic), jaké nerovnosti máme. Poté je zaveden interval. Následují úlohy, kde je zadána nerovnice, např. $-3 < x < -1$, a úkolem je zapsat příslušný interval. Úlohy jsou zadané i naopak. Poté je řečeno, co znamená řešit rovnice a co je výsledkem řešení nerovnice.

[48] Herman, J., et al. (2005c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a nerovnice*. Praha: Prometheus.

Řešit nerovnici znamená určit množinu všech takových čísel, které je možné dosadit za neznámou do nerovnice, aby se přeměnila v platnou nerovnost. Každé takové číslo se nazývá **řešení** dané nerovnice.

(Herman et al., 1997: s. 78)

Autoři oznamují, že písmenko u nerovnic se také nazývá neznámá.

Ještě před tím, než jsou vysvětleny ekvivalentní úpravy nerovnic, je uvedeno několik jednoduchých nerovnic, které žáci řeší bez ekvivalentních úprav. Je zde i úloha[49], kde je úkolem vybrat čísla z dané množiny $\{-1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \sqrt{2};\ \frac{3}{2};\ \sqrt{3};\ 2\}$, která jsou řešením nerovnice $2x < 3$. Dále už je pro mou práci zajímavá pouze úloha, kde mají žáci řešit nerovnici a správnost výsledku otestovat dosazením čísel –1, 0 a 2. V jedné z nerovnic dosazujeme číslo 1 do $-x$.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Úměrnosti

V této učebnici[50] se žáci setkávají se substitucí při rovnosti dvou poměrů ($x : 96 = 7 : 8$, nebo $\frac{15}{y} = \frac{5}{3}$), nebo při doplňování tabulek u přímé a nepřímé úměrnosti.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy [2]

Jedná se o poslední učebnici určenou tercii. Žáci účastnící se experimentu tuto učebnici teprve začali. Na začátku učebnice jsou zopakovány poznatky z učebnice *Výrazy [1],* a to mocniny, sčítání, odčítání, násobení a dělení mnohočlenů. Mezi úlohami na úpravu mnohočlenů se vyskytují dvě úlohy, kde je třeba zjistit hodnotu výrazu pro různá čísla stejně jako v předchozí učebnici věnované výrazům. Poprvé se zde ale vyskytuje dosazení záporného čísla, a to i desetinného, do záporného výrazu umocněného na druhou ($-x^2$; $-2a$). Jako nová látka v této učebnici je probíráno *Umocňování mnohočlenů, Rozklad na součin, Lomené výrazy, Sčítání a odčítání lomených výrazů, násobení a dělení lomených výrazů.* V celé učebnici je mnoho úloh na úpravu výrazů. Vzhledem k substituci jsou zde pouze dvě úlohy, kde je třeba dosadit do výrazu. V jedné úloze mají žáci za úkol zkrátit lomený výraz se dvěma neznámými a správnost ověřit dosazením kladných čísel. Ve druhé úloze je úkolem určit hodnotu lomeného výrazu se dvěma neznámými opět pouze pro kladné hodnoty.

[49] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a nerovnice, str. 79.

[50] Herman, J., et al. (2005c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Úměrnosti*. Praha: Prometheus.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a jejich soustavy

V první učebnici[51] určené pro kvartu jsou nejdříve zopakovány získané poznatky z předchozích učebnic. Mezi úlohami na opakování, kde se mají řešit rovnice především pomocí ekvivalentních úprav, se vyskytuje jedna úloha, v níž jsou zadány dvě poměrně složité rovnice a úkolem je zjistit, zda mají stejný kořen. Nemusí se řešit obě rovnice, ale stačí vyřešit jednu a do druhé dosadit. Vzhledem k substituci se ale nejedná o nic nového, jde vlastně o zkoušku. Nově jsou probrány rovnice s neznámou ve jmenovateli, u nichž se při zkoušce procvičuje dosazení za neznámou do jmenovatele. Řešením rovnic jsou opět přirozená čísla, ale i čísla záporná a kladné i záporné zlomky. Vyskytuje se zde tedy i dosazení zlomku do neznámé v čitateli i jmenovateli.

Další novou kapitolou je kapitola *Kvadratické rovnice.* Nejdříve se řeší kvadratické rovnice, které lze rozložit na součin, později je žákům ukázán i vzorec, jak vypočítat kvadratické rovnice. Při dosazování do vzorce se také využívá substituce, a to do výrazu s druhou mocninou i do záporného výrazu. Záleží na koeficientech kvadratické rovnice, jaká čísla dosazujeme. V této učebnici se jedná o celá čísla.

Důležitá je kapitola 7 *Rovnice s více neznámými.* Co je soustava rovnic a co je její řešení, je postupně ukázáno na slovní úloze, kde máme zjistit cenu jedné čokolády a cenu jednoho balíčku oříšků, jestliže víme:

- Tři čokolády a dva balíčky oříšků stojí 46 Kč
- Dvě čokolády a tři balíčky oříšků stojí 49 Kč

Na základě toho jsou zvoleny dvě neznámé x a y. X zastupuje cenu jedné čokolády, y cenu jednoho balíčku oříšků. A pomocí neznámých jsou sestaveny dvě rovnice o dvou neznámých.

$$3x + 2y = 46$$
$$2x + 3y = 49$$

Žákům je sděleno, že oběma rovnicím soustavy vyhovují čísla $x = 8$ a $y = 11$.

> Takovou *dvojici čísel* nazveme **řešením** dané soustavy. Hodnoty $x = 8$ a $y = 11$ proto nejsou dvě řešení naší soustavy, ale spolu nerozlučně tvoří *jedno řešení*. Řešením soustavy rovnic se dvěma neznámými je tedy dvojice čísel.
>
> (Herman et al., 1999: s. 78)

[51] Herman, J., et al. (2005c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a jejich soustavy*. Praha: Prometheus.

Poté následuje úloha, kde jsou dvě dvojice přirozených čísel a úkolem je rozhodnout, zda jsou řešením třech různých soustav. Ještě je ukázáno, jak vyjádříme jednu neznámou, a pak už je ukázán způsob řešení pomocí srovnávací metody a pomocí dosazovací metody. Autoři její způsob řešení ukazují na soustavě rovnic, kterou si sestavili ze slovní úlohy. U této metody dochází k procvičení substituce výrazu s proměnnou do výrazu se stejnou proměnnou, s čímž se žáci zatím téměř nesetkali (pouze v učebnici *Výrazy [1]* viz výše). Autoři se ale vůbec nezmiňují o tom, že řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x; y]$.

Je zde dokonce uveden příklad[52], jak řešit soustavu rovnic se složitějšími výrazy, které si pomocí substituce nahradíme (obr. 17).

Příklad 10. Řešte soustavu rovnic:

$$\frac{2}{x+2} + \frac{1}{y-3} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{1}{x+2} - \frac{3}{y-3} = -\frac{1}{2}$$

Řešení. Jistě bychom mohli nejprve z obou rovnic odstranit zlomky. Tak bychom ale dostali soustavu „složitých“ rovnic. Místo toho si pozorněji všimneme tvaru obou původních rovnic. Zjistíme, že obě rovnice jsou lineární pro neznámé $\frac{1}{x+2}$ a $\frac{1}{y-3}$. Proto označíme

$$u = \frac{1}{x+2}, \qquad v = \frac{1}{y-3}$$

a přejdeme k soustavě

$$2u + v = \tfrac{4}{3},$$
$$u - 3v = -\tfrac{1}{2}.$$

Tuto soustavu snadno vyřešíme např. sčítací metodou. Zjistíme, že má jediné řešení $u = \frac{1}{2}$ a $v = \frac{1}{3}$. Nyní určíme hodnoty původních neznámých. Z rovnic

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{y-3} = \frac{1}{3}$$

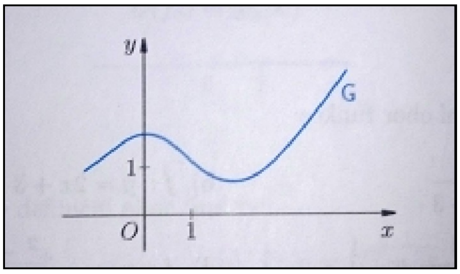
Obrázek 17: Soustava řešená substitucí za výraz

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií - Funkce

Na začátku učebnice[53] autoři připomínají, co se už žáci dozvěděli o závislostech v učebnici *Úměrnosti,* a pak postupně v učebnici budují pojem funkce. Se substitucí se zde setkáváme při

[52] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a jejich soustavy, str. 94.

výpočtu hodnot funkce, a to především při doplňování tabulek a sestrojování grafů funkcí. Ze začátku jsou uvedeny i úlohy, kde je třeba vypočítat pouze hodnotu funkce. Setkáváme se zde opět i s dosazením záporného čísla do záporného výrazu. Žáci pracují s body, které jsou zadány uspořádanou dvojicí čísel [*x; y*], ovšem místo písmenek jsou vždy konkrétní čísla. Žáci mají zjistit, zda body leží na grafu dané funkce, nebo pomocí nich zjistit vzorec funkce. Hodně zde tedy pracují s uspořádanou dvojicí čísel. Poprvé se s uspořádanou dvojicí setkáváme při popisu grafu funkce:



Obrázek 18: Graf funkce G

Vidíte modrou čáru G. Je to množina bodů v rovině, která je grafem jisté funkce

$$y = f(x), \qquad x \in \mathrm{D}.$$

Které body do množiny G patří? Právě ty body [*x, y*], pro které $x \in$ D, a zároveň $y = f(x)$.

Bod T z obrázku má *x*-ovou souřadnici rovnu číslu x_1, *y*-ovou souřadnici rovnu číslu $f(x_1)$. Bod T[x_1, $f(x_1)$] je tedy bodem grafu funkce *f*. Graf G této funkce má nekonečně mnoho bodů.

(Herman et al., 2000: s. 18, 19).

2.1.4 Shrnutí analýzy učebnic

Substituce je téma, kterému není ani v jedné řadě učebnic vymezená samostatná kapitola. Ve všech třech řadách učebnic autoři s písmenky pracují hned v opakování látky z prvního stupně. Předpokládá se tedy, že už se s písmenky žáci na prvním stupni setkali. Proměnná provází všechny učebnice v obecných poučkách a pravidlech, vždy je ale obecné pravidlo ukázáno na konkrétním příkladu a se slovním komentářem. Postupně jsou probírána čísla od přirozených přes desetinné, zlomky, celá čísla, racionální až někdy reálná čísla. S tím souvisí i substituce.

[53]Herman, J., et al. (2005c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Funkce*. Praha: Prometheus.

Nejdříve jde pouze o substituci přirozených čísel, přidají se desetinná čísla, celá čísla a racionální čísla. Jak se přidávají nové číselné obory, dochází k jejich dosazování za proměnnou nebo neznámou.

Řadu učebnic od Hermana a kol. považuji vzhledem k problematice proměnné a substituce za nejpropracovanější, čemuž asi odpovídá i to, že učebnice jsou určené pro gymnázia. Výhodou může být i to, že je zde většina pojmů zavedená dříve. Jako nedostatek této řady ale vidím v pojmu uspořádaná dvojice čísel [*x; y*], s kterým se příliš nepracuje ani u soustav rovnic. V dalších dvou řadách učebnic od Coufalové a kol. a od Odvárka a Kadlečka jsou podle mého názoru nedostatky především v tom, že některé druhy substituce se zde téměř nevyskytují. Pro zpřehlednění ještě přikládám tabulky 4, 5 a 6, které ukazují zastoupení druhů substitucí v jednotlivých řadách učebnic.

Tabulka 4: Druh substituce v učebnicích Coufalové a kol.

	Výraz, do kterého je třeba dosadit				
druhy čísel	$2x$	$-2x$	$2x^2$	$-2x^2$	$\frac{2x}{x+2}$
1; 2; 3	hodně	středně	středně	málo	středně
1/2; 0,8	středně	středně	málo	málo	vůbec
− 1; − 2; − 3	středně	hodně málo	málo	vůbec	středně
− 1/2; − 0,8	málo	výjimečně	vyjímečně	vůbec	vůbec

Tabulka 5: Druh substituce v učebnicích od Odvárka & Kadlečeka

	Výraz, do kterého je třeba dosadit				
druhy čísel	$2x$	$-2x$	$2x^2$	$-2x^2$	$\frac{2x}{x+2}$
1; 2; 3	hodně	středně	středně	málo	středně
1/2; 0,8	středně	středně	málo	málo	vůbec
− 1; − 2; − 3	středně	hodně málo	málo	málo	středně
− 1/2; − 0,8	málo	výjimečně	vůbec	vůbec	vůbec

Tabulka 6: Druh substituce v učebnicích Hermana a kol.

	Výraz, do kterého je třeba dosadit				
druhy čísel	$2x$	$-2x$	$2x^2$	$-2x^2$	$\frac{2x}{x+2}$
1; 2; 3	hodně	středně	středně	středně	středně
1/2; 0,8	středně	středně	středně	středně	málo
− 1; − 2; − 3	středně	středně	středně	málo	středně
− 1/2; − 0,8	středně	středně	středně	málo	málo

Nutno ještě dodat, že testování TIMMS se účastní žáci osmých ročníků. Podle našich bývalých i stávajících kurikulárních dokumentů se tedy ještě nesetkali s důležitou kapitolou soustavy rovnic, v níž se dosazení výrazu s proměnnou do výrazu především objevuje. U učebnic od Coufalové a kol. a Odvárka a Kadlečka se s tímto druhem substituce v učebnici žáci nesetkávají nikde. Všichni žáci testovaní v TIMSS se nedostali k ani funkcím, kde se substituce také hodně procvičuje.

2.2 Metodologie

Cílem mého výzkumu je identifikovat problémy a chyby žáků osmého a devátého ročníku základní školy v úlohách, kde je potřeba substituce. Tam, kde to bude možné, je mým cílem zjistit možnou příčinu chyb. Úlohy, které jsou podkladem pro můj výzkum, jsou vytvořeny na základě úloh z TIMSS 2007. Některé úlohy jsou doslova přebrány, některé jsou typově podobné, některé ještě o něco doplněné. Například testová úloha 5 má oproti úloze v TIMSS 2007 dvě správná řešení. Otázka zní: „**Které** dvojice čísel [*x; y*] jsou řešením rovnice?“ Chtěl jsem navíc zkoumat, zda se žáci spokojí s tím, že dojdou k jednomu správnému výsledku, nebo vyzkouší i další možnosti. Pouze úloha 4 nenavazuje na žádnou úlohu z TIMSS, ale na zahraniční studii uvedenou v oddíle 1.2.2.

Úlohy a hlavní jevy, které jsem u jednotlivých úloh testoval, jsou popsány v tabulce 5.[54]

[54] Číslování úloh odpovídá změněnému číslování u dvou úloh, které vyplynulo z pilotního testování (viz dále).

Tabulka 7: Zkoumané jevy u testových úloh

Zadání úlohy	Zkoumané jevy
1. Nechť $x = 2$. Kolik je $3x + 5 + 2x^2$?	Dosazení přirozeného čísla za proměnnou s kladným koeficientem v první a druhé mocnině.
2. Zjednoduš výrazy: *a)* $2x + 3 - 3x =$ *b)* $-x + 2 - x^2 + 1 =$ Najdi číselnou hodnotu výrazů pro $x = -5$.	Dosazení záporného čísla za proměnnou se záporným koeficientem v první a druhé mocnině, zjištění, zda žáci vidí rovnost mezi původním a upraveným výrazem, zda dosazují do původního nebo upraveného výrazu, u druhého výrazu: zda se nebudou snažit dál upravit výraz $-x-x^2$.
3. Nechť $a + b = 5$. Kolik je a) $2a + 2b + 4$? b) $a^2 + 2ab + b^2$?	Zjištění, zda žáci identifikují v zadaném výrazu výraz $a + b$, dosazení čísla 5 za výraz $a + b$.
4. Ověř nerovnost dosazením. *a)* $a > -a - 4$ *b)* $d + 1 > \frac{1}{d}$ $(d \neq 0)$	Zjištění, zda žáci budou dosazovat za proměnné záporná a desetinná čísla i zlomky, nebo pouze přirozená čísla a zda vidí za výrazem $-a$ záporné číslo.
5. Je dána rovnice $7y - 3x = 0$. Které dvojice čísel $[x, y]$ jsou řešením rovnice? [3, 7]; [0, 1]; [14, 6]; [1, 0]; [7, 3]	Zjištění zda dochází k záměně hodnot x a y v uspořádané dvojici, zda se žáci spokojí s jednou uspořádanou dvojicí a v úloze už dál nebudou pokračovat.
6. Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?	Dosazení za dvě proměnné, především čísla -1 do výrazu $-b$.
7. [0, −1], [1, 3]. Kterou z rovnic splňují OBĚ dvojice čísel $[x, y]$? $x + y = -1$; $2x + y = 5$ $3x - y = 0$; $4x - y = 1$	Samotné dosazení a zjištění, zda žáci ověří obě uspořádané dvojice.
8. $m = 1 + x$, $n = 2 - x$. Kolik je *a)* $2m + n$? *b)* $2m - n$?	Dosazení za každou z dvojic proměnných algebraického výrazu složeného z čísla a proměnné. Zjištění, jak si žáci poradí se znaménky při dosazování do výrazu $-n$.
9. Která rovnice má řešení $x = 3$, $y = 5$? $5x + 3y = 15$; $3x - 5y = 0$ $5x - 3y = 0$; $3x + 5y = 8$	Zjištění, zda žáci dosazují za obě proměnné.

Metodou sběru dat byly klinické rozhovory, protože při samotném písemném řešení by nebylo možné získat dostatečně podrobné informace o problémech žáků a jejich myšlenkových pochodech. Klinické rozhovory byly natáčeny na videokameru, aby je bylo možné později společně s písemným projevem analyzovat.

Nejdříve jsem provedl jeden pilotní rozhovor s žákem gymnázia, Vojtěchem. Už při tomto rozhovoru jsem se snažil držet rad vedoucí práce založených na její zkušenosti s vedením podobných rozhovorů v rámci projektu GA ČR:

- Zásadní věcí je zjistit, jak úlohy žák řeší, nikoli zda to dělá dobře (to až později při analýze úlohy). Cílem je zjistit, jak to myslí, jakou má jeho přístup logiku. Nelze tedy žáka opravovat hned při prvním chybném kroku, naopak měl by vysvětlit, jak to myslí.
- Při chybném kroku nechat úlohu žáka dokončit a až poté si nechat vysvětlit, jak postupoval. Je možné, že při vysvětlování svých kroků si žák chybu uvědomí a opraví se.
- Při tápání na začátku úlohy i v průběhu řešení je nutné nechat žákovi nejdříve dostatečný čas na přemýšlení a potom se mu snažit poskytnout nejlepší možnou nápovědu (dopomoc). Tou může být např. převyprávění zadání.
- V případě, že žák úlohu začne řešit i nesmyslně, nelze na to reagovat nesouhlasně, ale spíše se ho zeptat, co tím vlastně vypočítal, zda mu to nějak pomůže při dalším řešení.
- Když narazíme na neznalost konkrétního učiva, zkoušíme po malých krocích „couvat“ k jednodušším příkladům daného učiva. Zjišťujeme, zda se žák chytne, a pak ho případně dovedeme zpět ke zvládnutí místa, kde se neznalost objevila.
- Pokud u nějaké úlohy žák objeví nějaký princip řešení, můžeme mu ho v následující úloze připomenout (pokud bude znova tápat).
- Důležité je také navodit příjemné klima, aby se žák nebál něco říct, a ujistit ho, že test není na známky a že se jeho učitel nedozví, jak si s testem poradil.

Po pilotním rozhovoru jsem se rozhodl prohodit úlohu 9 s úlohou 4, protože úloha 9 je dost podobná úloze 7[55], a tedy by nebyl problém, pokud by ji žáci z důvodu nedostatku času nestihli. Pokud žáci test stihnou, pak úloha 9 doplní informace získané při řešení úlohy 7.

V pilotním rozhovoru se žádný větší problém nevyskytl, proto jsem dále zásadním způsobem neměnil průběh rozhovorů a pilotní rozhovor jsem zařadil do hlavní studie.

[55] Úlohy jsou značeny jako v testu (příloha A). Úloha 9 byla tedy nejdříve v testu jako čtvrtá úloha.

2.3 Přehled žáků účastnících se rozhovorů

Rozhovory jsem provedl s patnácti žáky. Chtěl jsem co nejpestřejší vzorek žáků, proto jsem zvolil jedno pražské víceleté gymnázium, jednu pražskou základní školu a jednu základní školu z menšího města, ze Strakonic.

Ve všech třech školách se snažili vyhovět mým požadavkům a byla s nimi výborná spolupráce.

Gymnázium Jiřího Gutha-Jarkovského jsem zvolil, protože jsem na něm absolvoval povinné praxe v rámci studia na Pedagogické fakultě. Domluva probíhala s paní učitelkou, u které jsem praxi absolvoval. Bylo mi poskytnuto 5 žáků z tercie. Rozhovor s jednou žákyní se však správně nenahrál, proto jsem do výzkumu zahrnul jen 4 žáky. Ke klinickým rozhovorům mi byla poskytnuta prázdná učebna. Žáci byli uvolňováni z hodin během vyučování. Pět klinických rozhovorů jsem provedl během dvou dní.

Dalších 5 klinických rozhovorů jsem natočil ve Fakultní základní škole Táborská, kde jsem také absolvoval povinné praxe. Domluva probíhala se zástupcem ředitele, který na škole matematiku vyučuje a u kterého jsem praxi vykonával. Zde se mi podařilo udělat všech pět klinických rozhovorů v jeden den. Opět mi byla přidělena prázdná učebna a rozhovory probíhaly během vyučování žáků. Žáky z jedné třídy[56] vybral a vše s nimi domluvil zástupce ředitele. Když jsem dokončil s žákem rozhovor, žák odešel zpět do své třídy a hned mi poslal dalšího vybraného žáka.

Základní školu Strakonice, Krále Jiřího z Poděbrad 882, jsem si vybral, abych otestoval i žáky mimo hlavní město. Výhodou bylo, že jsem tuto školu navštěvoval jako žák. Znal jsem zde většinu učitelů, domluva tedy probíhala bez problémů. Školu jsem navštívil třikrát a za každou návštěvu jsem udělal dva klinické rozhovory. Opět mi byla přidělena prázdná učebna a žáci byli uvolňováni přímo z vyučování.

V každé škole byli vybráni žáci učitelkou matematiky případně zástupcem ředitele. Byli vybíráni žáci s průměrnými nebo lehce nadprůměrnými výsledky v matematice. Jednalo se o žáky, kteří mají většinou z matematiky na vysvědčení dvojku nebo trojku. Při výběru žáků jsme se také zaměřili na to, aby se jednalo o žáky komunikativní. Seznam žáků s jejich částečnou charakteristikou je uveden v tabulce 6. Jména žáků byla změněna, aby byla zaručena jejich anonymita, přezdívky ale respektují pohlaví žáka.

[56] Jednalo se o třídu, kde vyučoval matematiku daný zástupce ředitele.

Tabulka 8: Jmenný seznam žáků účastnících se rozhovorů

Jméno	Škola	Ročník	Věk	Poslední známka z matematiky	Stav žáka v průběhu rozhovoru
Dagmar	G	Tercie (8.)	14	3	klidná, otevřená, snaživá
Vojtěch	G	Tercie (8.)	13	2	přemýšlivý, trochu zbrklý, klidný, upřímný
Anna Marie	G	Tercie (8.)	13	3	ze začátku trochu nervózní, moc si nevěřila, snaživá, sdílná
Kristýna	G	Tercie (8.)	14	2	komunikativní, snaživá, klidná
Šimon	ZŠ T	9.	15	3	trochu otrávený, samostatný, klidný, přemýšlivý
Linda	ZŠ T	9.	15	2	komunikativní, klidná, sebevědomá, ale pletla pravidla, ukvapená
Patrik	ZŠ T	9.	14	2	samostatný, komunikativní, trochu zbrklý, sebevědomý
Ilona	ZŠ T	9.	15	3	méně komunikativní, samostatná, soustředěná
Diviška	ZŠ T	9.	14	3	méně komunikativní, trochu nervózní, snaživá
Ondřej	ZŠ P	9.	14	3	klidný, slušný, přemýšlivý, snaživý, upřímný
Pavel	ZŠ P	9.	15	3	klidný, méně sdílný, nebyl do toho nějak nadšený
Josef	ZŠ P	9.	14	2	samostatný, snaživý, ze začátku méně komunikativní, ale spolupracující, přemýšlivý
Honza	ZŠ P	9.	14	3	klidný, trochu ukvapený, úplně se mu do toho nechtělo, ale snažil se spolupracovat
Dušan	ZŠ P	9.	15	2	samostatný, méně sdílný, snaživý
Matěj	ZŠ P	9.	14	2	klidný, snaživý, méně sdílný

Pozn.: Použité zkratky: G – Gymnázium Jiřího Gutha – Jarkovského; ZŠ T – ZŠ Táborská; ZŠ P – ZŠ Strakonice, Krále Jiřího z Poděbrad

Pro posouzení výkonu žáků při rozhovoru byla důležitá látka probíraná v průběhu rozhovorů (viz tab. 7).

Tabulka 9: Právě probírané učivo v jednotlivých školách

Škola	**Probíraná látka**
Gymnázium Jiřího Gutha-Jarkovkého	Dokončení úměrnosti a začátek práce s učebnicí *Výrazy* [2]
ZŠ Táborská	Soustavy dvou rovnic (už nějakou dobu probírány)
ZŠ Strakonice, Krále Jiřího z Poděbrad	Soustava dvou rovnic (právě začato)

2.4 Průběh a analýza rozhovorů

Každý z žáků dostal vytištěné zadání na dvou listech papíru A4 s devíti úlohami. Pod každou úlohou byl dostatek místa na její řešení. Žáci byli seznámeni s tím, že kdyby neměli dostatek místa, dostanou prázdný list papíru, na kterém pak mohou úlohy také řešit. Několik z nich tuto možnost využilo, ale většině z nich stačilo místo v zadáních. Žáky jsem nejdříve ujistil, že se nemusí ničeho bát, že je sice bude natáčet kamera, ale pouze papír a ruce, a že se tento test nepromítne nijak do jejich známky na vysvědčení a nebudou známkováni.

Na test měli žáci 45 minut. Snažil jsem se jejich řešení s žáky dostatečně rozebrat, ale zase se u jednotlivých úloh zbytečně nezdržovat, abych viděl, jak si poradí s co největším počtem úloh. U většiny žáků, myslím, byl čas dostačující. Celý průběh řešení testu byl natáčen na kameru, která zabírala zadání testu, které žák řešil, a žákovy ruce. Někteří žáci při některých úlohách už při jejich řešení popisovali své postupy. Většina z nich ale úlohu nejdříve vyřešila a až potom mi popisovala svůj postup. Pro snazší rozbor řešení jednotlivých úloh jsem záznam přepisoval do textu s občasným záznamem času. Ukázka přepisu průběhu řešení jedné úlohy je uvedena v příloze B.

Přepsané rozhovory jsem spolu s písemným záznamem analyzoval, s občasnými návraty k videozáznamu, pokud bylo třeba něco vyjasnit. Postupoval jsem tak, že jsem se snažil zjistit, jakým způsobem žák úlohu řešil, a pokud v ní neuspěl, kde asi mohla být příčina chyby. Současně jsem se zaměřil i na to, jaké nápovědy jsem žákům poskytl, a zda byly úspěšné.

Výsledky této analýzy shrnuje následující oddíl. Nejdříve bude představeno zadání úlohy a její charakteristiky. Následně shrnu řešení žáků se zaměřením na obtíže, které při řešení úlohy měli, a jejich možné příčiny.

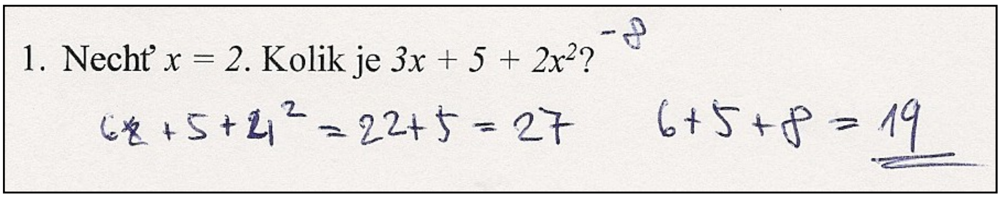
2.5 Výsledky hlavní studie

Úloha 1: Nechť x = 2. Kolik je 3x + 5 + 2x^2?

Úloha navazuje na úlohy M06-06, M09-06 a M12-07, v nichž naši žáci dosáhli svého standardu (+9,4 %). V úloze je třeba dvakrát dosadit do algebraického výrazu s jednou proměnnou přirozené číslo. Úloha zjišťuje, jak žáci dosadí malé přirozené číslo nejprve do členu, který se skládá z přirozeného koeficientu a proměnné v první mocnině, a pak do členu s přirozeným koeficientem a proměnnou v druhé mocnině. Mezi jednotlivými členy výrazu je pouze znaménko plus. Předpokládal jsem, že tato úloha nebude dělat žákům velké problémy, naváže u žáků určitý pocit jistoty a klidu, a bude tak ideální vstupní úlohou do testu.

Úlohu řešili všichni žáci a bez nápovědy ji vyřešilo 7 žáků. Pavel nejdřív úlohu přeskočil, že už si nepamatuje, jak to dělali. Když jsem mu řekl, že ví, že x je 2, a ptáme se kolik je 3x + 5 + 2x^2, úlohu správně vyřešil. Je tedy možné, že měl problém se slovem „necht“.

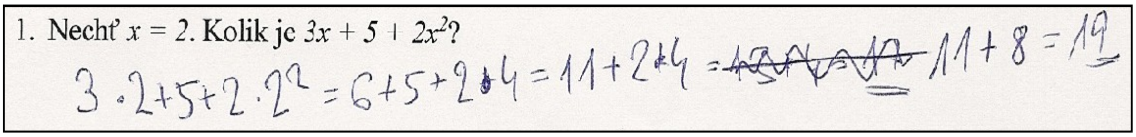
Všichni žáci dosadili správně do prvního členu a zjistili jeho hodnotu. Chybovali tedy v třetím členu 2x^2. Za nejzávažnější chybu považuji to, že žáci nejdříve vynásobili proměnnou s koeficientem a až pak součin umocnili. Této chyby se dopustili tři žáci: Honza, Kristýna a Dagmar. Žáci pravděpodobně neviděli rozdíl mezi výrazy 2x^2 a (2x)^2. Žáci číslo 2 za x sice správně dosadili, ale nevěděli, jaká operace má v daném členu přednost (obr. 20).



Obrázek 19: Chybné umocnění u Kristýny

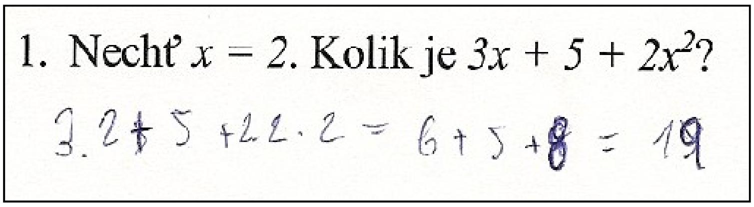
Překvapující chybou u třetího členu výrazu bylo, že žáci po dosazení čísla 2 toto číslo nejdříve umocnili, a potom místo toho, aby číslem 2 ještě násobili, tak číslo 2 přičítali. Této chyby se dopustili tři žáci: Ondřej, Honza a Diviška. Překvapující je, že v prvním členu výrazu použili všichni tři žáci operaci násobení. Všichni tři žáci si chybu při kontrole sami našli. Diviška a

Honza si dokonce i při dosazení do výrazu znaménko krát napsali, jak je vidět z obr. 20, a až při úpravě použili plus. Chybu tedy přikládám především nepozornosti. Stačilo se žáků zeptat, proč tam mají znaménko plus, a hned se opravili.



Obrázek 20: Chybné použití znaménka Divišky

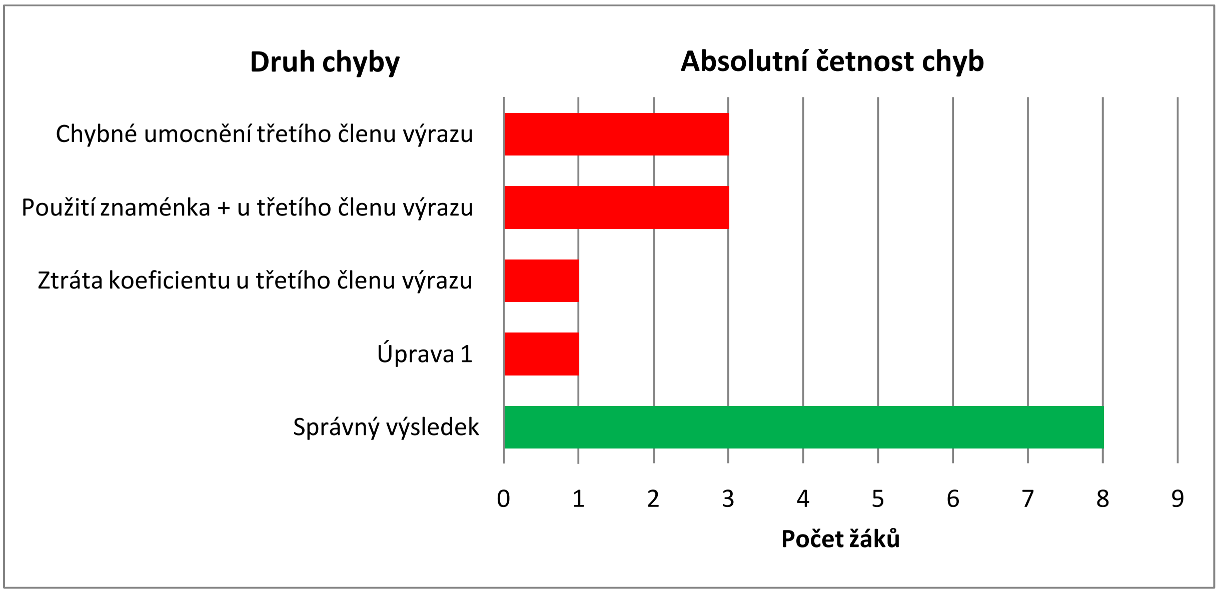
Pro mě méně překvapivou chybu udělal Patrik, který do třetího výrazu dosadil za x^2 jako $2 \cdot 2$ a zapomněl násobit ještě koeficientem. Při kontrole si chyby všimnul a ještě jednu dvojku dopsal. K chybě řekl, že se zaměřil na x^2 a na dvojku před tímto výrazem zapomněl (obr. 21).



Obrázek 21: Patrikovo řešení 1. úlohy

Některým žákům dělal problém otazník na konci úlohy. Ptali se, jestli to znamená „jako rovná se“.

Největší problém s úlohou měla Dagmar, která kromě chyby popsané výše dlouho tápala a nevěděla, co má dělat. Chtěla převádět x „na jednu stranu“ Je možné, že si úlohu spojovala s nedávno probíranou látkou ve škole, což byly rovnice. Pak ještě špatně sčítala $3x + 2x^2 = 3 \cdot 2x^2 = 6x^2$. Bez nápovědy by asi vůbec nevěděla, jak úlohu řešit. V grafu na obr. 22 je uvedena absolutní četnost jednotlivých chyb, které se vyskytly v první úloze.



Obrázek 22: Chyby, které se objevily v řešení první úlohy

Pozn.: Úprava 1: $3x + 2x^2 = 3 \cdot 2x^2 = 6x^2$.

Úloha 2: Zjednoduš výrazy:

a) $\mathbf{2x + 3 - 3x =}$

b) $\mathbf{-x + 2 - x^2 + 1 =}$

Najdi číselnou hodnotu výrazů pro $\mathbf{x = -5}$.

a)

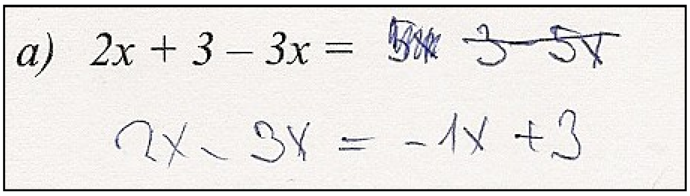
b)

Druhá úloha je rozdělena na dvě části. V první části měli žáci zjednodušit dva výrazy. V prvním výrazu stačilo mezi sebou odečíst pouze dva členy, ve kterých se vyskytovala proměnná v první mocnině. Druhý výraz testoval žáky především z toho, jestli se budou snažit nějak sečíst členy $-x$ a $-x^2$. V sečtení čísla 1 a 2 jsem problém nepředpokládal. Ve druhé části měli žáci dosadit do výrazů za proměnou zápornou hodnotu. Oproti první úloze dosazovali zápornou hodnotu a před proměnnou se vyskytovalo znaménko mínus. Zjišťoval jsem také, zda budou dosazovat za proměnnou do původního výrazu, nebo do upraveného a zda vidí rovnost mezi původním a upraveným výrazem.

Správně bez pomoci upravilo oba výrazy šest žáků. Čtyři žáci udělali chybu už při úpravě prvního výrazu. Diviška a Vojtěch zjednodušili výraz na $x + 3$. Jednalo se ale s největší pravděpodobností pouze o nepozornost, protože při kontrole si chybu našli. Diviška byla jediná, která udělala chybu v prvním výrazu a druhý výraz zjednodušila správně.

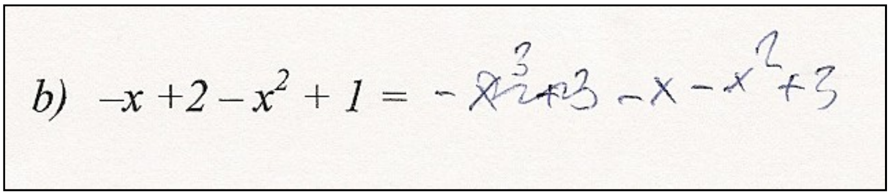
Anna Marie dlouho tápala. Říkala, že už si to nepamatuje. Nakonec ale úlohu vyřešila správně. Pomohl jsem jí tím, že jsem se jí zeptal, co tam mezi sebou můžeme sečíst a co ne.

Největší problém s úpravou výrazu měla Dagmar, která nejdřív upravila výraz na 3 – 5*x*, a když jsem jí řekl, jestli je to doopravdy tak, změnila výraz na 5*x* − 3. Říkala nejdřív, že „plus a mínus dá mínus“, a sečetla koeficienty před proměnnou. Myslím si, že se jedná o závažnou chybu, která ukazuje na to, jak se děti učí nazpaměť pravidla, které se pak snaží uplatnit. Dagmar chtěla použít pravidlo násobení celých čísel. Když se nad úlohou více zamyslela, vyřešila ji správně (obr. 23).



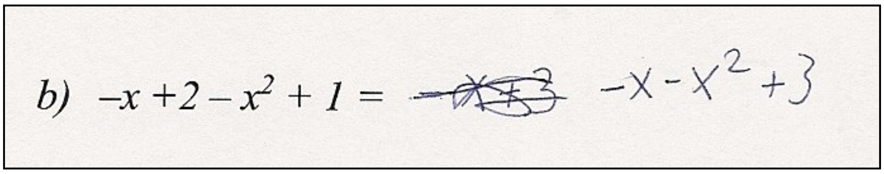
Obrázek 23: Dagmařino řešení

Největší problém při zjednodušení druhého výrazu byl, že se žáci snažili nějak sečíst členy –*x* a –x^2.Této chyby se dopustilo 8 žáků: Matěj, Pavel, Šimon, Linda,Vojtěch, Anna Marie, Kristýna a Dagmar. Matějovi, Pavlovi, Anně Marii a Kristýně vyšlo po sečtení těchto dvou členů člen –x^3 (obr. 24). Použili asi pravidlo pro násobení, ale kdyby členy v součinu byly, tak by měli špatně znaménko.



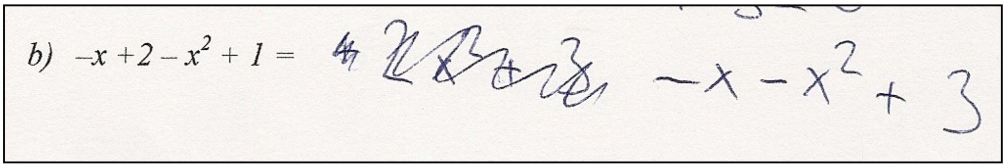
Obrázek 24: Úprava Matěje

Šimon a Linda zjednodušili výraz na –*x* + 3 (obr. 25). Zřejmě viděli x^2 jako 2*x* a ještě zapomněli na znaménko u prvního *x*.



Obrázek 25: Šimonovo řešení

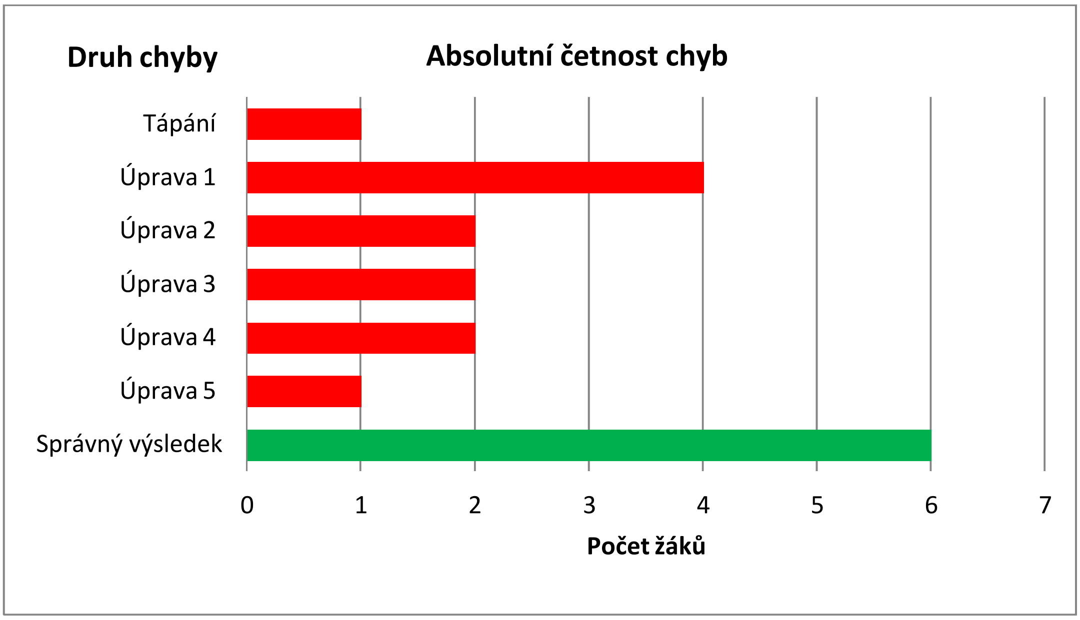
Vojtěchovi a Dagmar vyšlo po sečtení všech členů výraz $2x^2 + 3$ (obr. 26).



Obrázek 26: Vojtěchovo řešení.

Všech osm žáků se dopustilo podobné chyby. Myslím, že nevěděli, nebo že si nevzpomněli, že nemohou sčítat členy s různou mocninou u proměnné. Pak už asi jenom hádali pravidlo, jak bychom je mohli sečíst. Většina z nich se po nápovědě, zda členy můžeme opravdu sčítat, opravila a zjednodušila výraz správně.

Četnost chyb při zjednodušení obou výrazů jsou vidět v grafu na obr. 27.



Obrázek 27: Chyby, které se objevily při zjednodušování výrazů

Pozn.: Úprava 1: $-x - x^2 = -x^3$; Úprava 2: $-x - x^2 = \pm x$; Úprava 3: $-x - x^2 = 2x^2$; Úprava 4: $2x - 3x = x$; Úprava 5: $2x - 3x = -5x$.

Tabulka 10: Rozdíl chyb při úpravě prvního a druhého výrazu

Rozdíl chyb v prvním a druhém výrazu	
Počet chyb v prvním výrazu	3
Počet chyb v druhém výrazu	8

Pozn. Chyba v prvním výrazu se vždy týkala sečtení členů $2x - 3x =$. Chyba v druhém výrazu se týkala sečtení členů $-x - x^2 =$.

Druhou část úlohy, kde bylo třeba dosadit za proměnnou zápornou hodnotu, žádný žák nevyřešil sám správně. Do původních výrazů dosazovalo 12 žáků, pouze tři žáci dosadili do zjednodušeného výrazu. Po vyřešení úlohy jsem se žáků ptal, jestli by jim vyšel stejný výsledek, kdyby dosadili do původního, nebo zjednodušeného výrazu podle toho, do kterého výrazu žák dosazoval. Polovina žáků odpověděla, že ano, ale stejně si tím nebyli moc jistí. Druhá polovina si myslela, že ne.

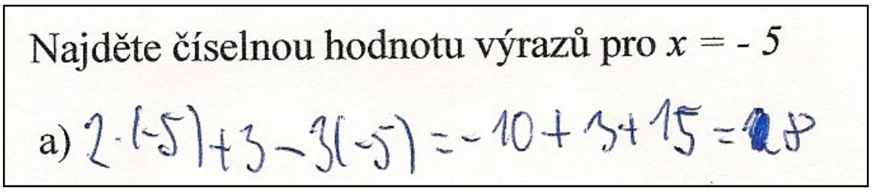
Tabulka 11: Do jakého výrazu žáci dosazovali

Výraz	Počet žáků
Původní výraz	12
Upravený výraz	3

Tabulka 12: Tabulka, která ukazuje, kolik žáků vidělo rovnost mezi původním a zjednodušeným výrazem

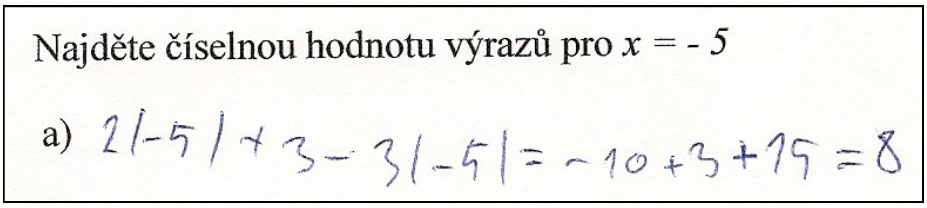
Počet žáků, kteří viděli rovnost výrazů	6
Počet žáků, kteří neviděli rovnost výrazů	6

Při dosazování udělalo chybu sedm žáků při dosazení do proměnné v první mocnině. Ondřej dosadil do zjednodušeného výrazu $-x + 3$ takto: $-5 + 3 = -2$. Když jsem mu řekl, ať se na to podívá, opravil se správně. Dušan správně dosadil za proměnnou a správně odstranil závorky, ale nakonec udělal chybu při sčítání celých čísel. Místo toho, aby trojku odečetl, tak ji přičetl (obr. 28).



Obrázek 28: Dušanova numerická chyba - přeškrtnutá

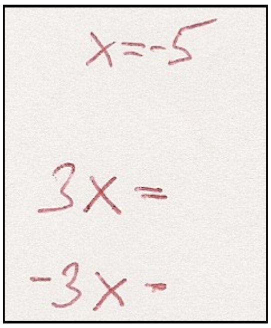
Pavel, Šimon a Ilona také dosadili správně za proměnnou se závorkami, ale špatně vynásobili $-3 \cdot (-5) = -15$ (obr. 29). Když jsem je upozornil, že v daném kroku mají chybu, chybu si sami našli a opravili.



Obrázek 29: Pavlova chyba. Nejdříve 15 odečítal, pak změnil mínus na plus.

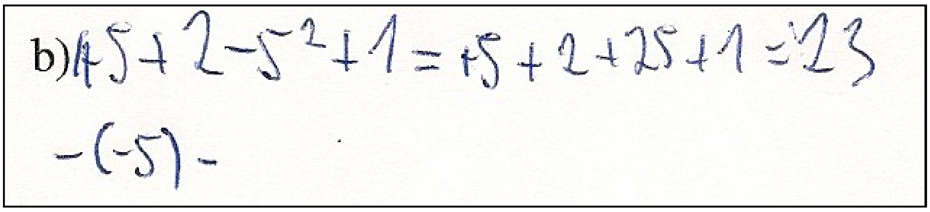
Vojtěchovi taky vyšel z členu $-3x$ výsledek -15. Nerozepisoval si ale výraz se závorkami. Když jsem mu řekl, že tam má chybu, opravil se, že tam má být plus, že „mínus a mínus dá plus“. Možná by mu pomohlo, kdyby si psal závorky a nepočítal zpaměti.

Anna Marie udělala stejnou chybu jako Vojtěch. Když si chybu opravila, chybovala ještě při sčítání celých čísel. Chybu si ale sama hned neopravila; zapomněla počítat se znaménkem mínus před trojkou. Řekla, že když má tři „mínus pětky“, tak jí to dá mínus patnáct. Napsala si to takto: $-3 \cdot -5 = -5 + -5 + -5$. Napsal jsem jí dva výrazy (obr. 30). Když je viděla, tak už si znaménko se slovy, že „mínus a mínus dá plus“, opravila.



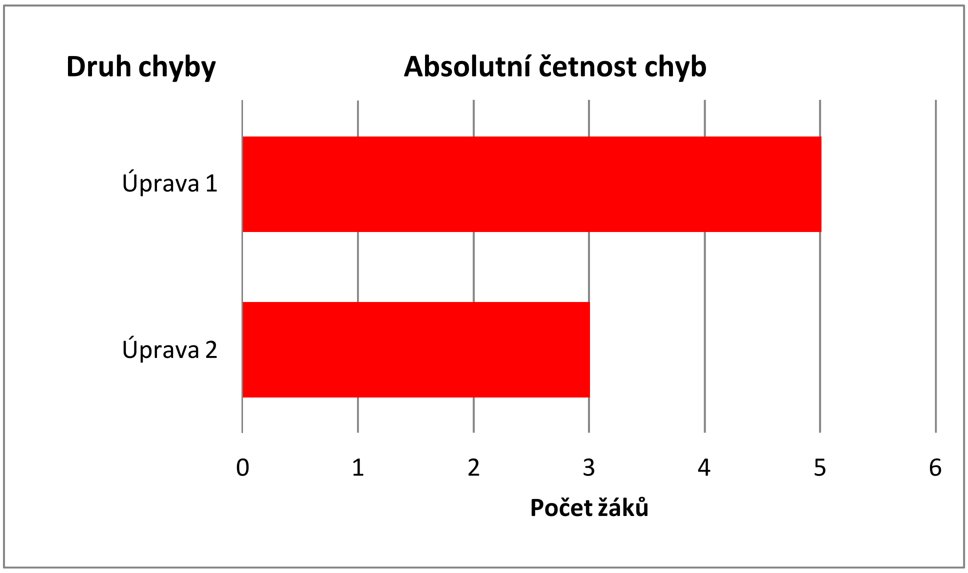
Obrázek 30: Výrazy, které pomohly Anně Marii ke správnému řešení

V druhém výrazu už při dosazení do výrazu $-x$ udělali chybu jenom Vojtěch a Dušan. Po dosazení jim vyšlo -5 (obr. 31).



Obrázek 31: Dušanovo řešení. Před pětkou škrtal znaménko mínus.

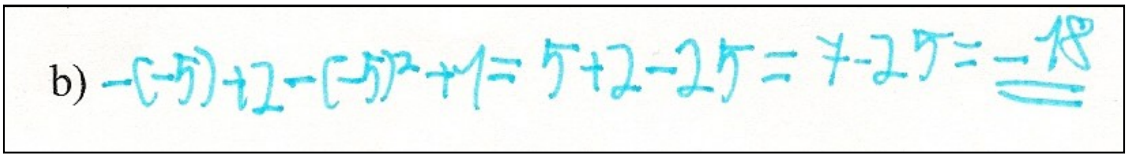
U úlohy tedy nebyl problém se samotným dosazením ale spíše s úpravou číselných výrazů.



Obrázek 32: Druh chyby při dosazování do proměnné v první mocnině.

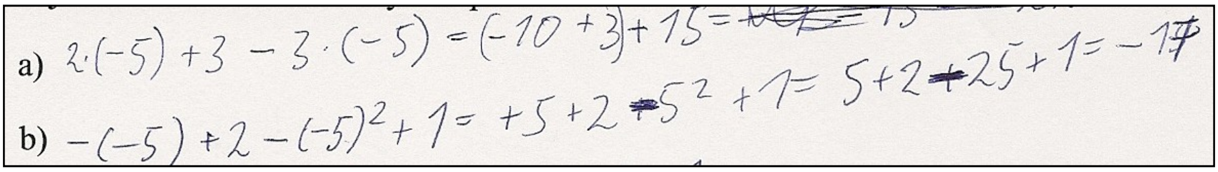
Pozn. Úprava 2: $-x = -5$; Úprava 1: $-3x = -15$

Druhou část úlohy za b) nevyřešil žádný žák správně. Josef si správně dosadil za proměnnou, správně odstranil i závorky, ale zapomněl přičíst jedničku. Jednalo se o chybu pouze z nepozornosti (obr. 33).



Obrázek 33: Josefovo dosazení

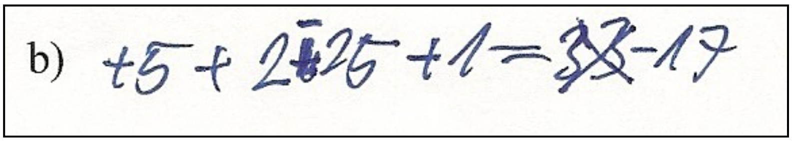
Všichni ostatní testovaní žáci udělali chybu v členu $-x^2$. Většina žáků udělala chybu v tom, že si nejdříve odstranili mínusy a až pak umocňovali na druhou. Potvrdily mi to komentáře žáků, že „mínus a mínus dá plus“, takže „pět na druhou je plus dvacet pět“. Čekal bych tedy, že si žáci neuvědomují, nebo nevědí, že umocnění má přednost, a řeší vlastně výraz $-x^2$ jako výraz $(-x)^2$. Překvapující ale bylo, že hodně žáků si přepsalo výraz nejdříve správně se závorkami a udělali chybu až ve výrazu $-(-5)^2 =$. Tam mi potom řekli, že „mínus a mínus dá plus“, takže „pět na druhou, a to je dvacet pět“ (obr. 34).



Obrázek 34: Šimonovo dosazení a chyba.

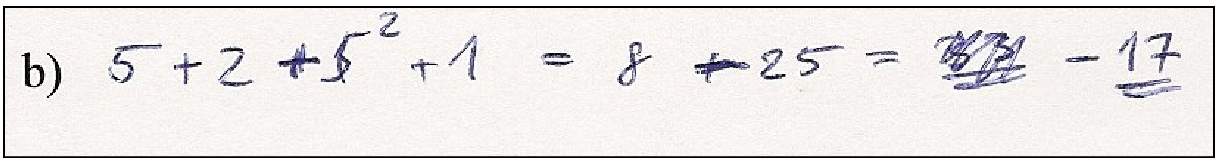
Takto si to se závorkami přepsali a pak udělali tuto chybu čtyři žáci (Matěj, Pavel, Šimon, Ilona). Chybují tedy spíše v práci s celými čísly.

Bez závorek a rovnou s +25 si úlohu přepsali čtyři žáci (Honza, Patrik, Vojtěch, Anna Marie, viz obr. 35). U Patrika se jednalo spíše o nepozornost a o to, že chtěl úlohu vyřešit co nejdříve. Při kontrole se hned sám opravil. Honza řekl, že „když je to na druhou, tak se mění znaménko, takže plus“. A mínus před x^2 už nijak neřešil. Podobnou chybu udělal Vojtěch, který řekl, že „mínus pět krát mínus pět je plus dvacet pět“. Anna Marie nejdříve odstranila znaménka se slovy „mínus a mínus dá plus pět“ a až pak umocňovala.

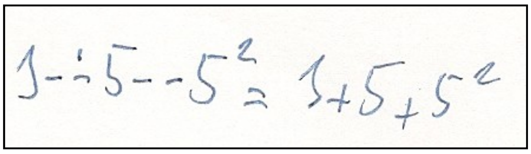


Obrázek 35: Honzovo řešení

Ondřej, Linda a Kristýna se dopustili chyby tím, že nejdříve odstraňovali znaménka a až pak mocnili. Řešili výraz $-x^2$ jako $(-x)^2$. Z obrázku 36 je vidět, jak si to přepsala Linda a Kristýna. Ondřej si tam nejdříve ještě dva mínusy napsal (obr. 37).

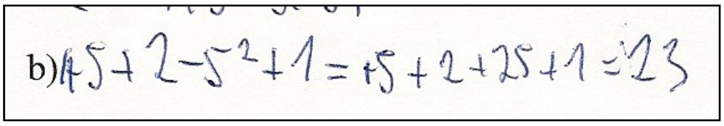


Obrázek 36: Lindino řešení



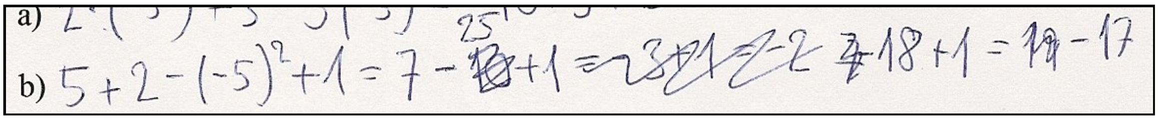
Obrázek 37: Ondřejovo řešení

Dušan se dopustil dvojí chyby (obr. 38). Nejdříve dosadil pouze číslo 5 a potom výraz -5^2 špatně umocnil. Umocňoval číslo 5 i s mínusem, a to mu změnilo znaménko.

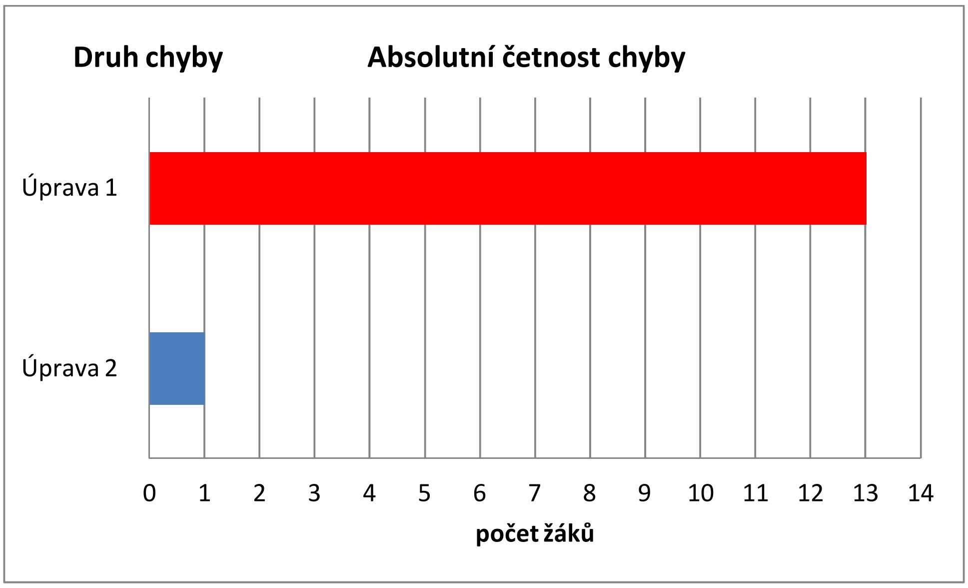


Obrázek 38: Dušanovo řešení

Úplně jiné chyby se dopustila Diviška, která použila správně znaménka, ale špatně umocnila číslo 5. Vyšlo jí 10. Spletla se a místo toho, aby dvakrát vynásobila číslo 5, tak vynásobila číslo 2 s číslem 5 (obr. 39).



Obrázek 39: Řešení Divišky



Obrázek 40: Druh chyby při dosazování do proměnné v druhé mocnině

Pozn. Úprava 1: $-x^2 = 25$; Úprava 2: $-(-5)^2 = -10$

Úloha 3: Nechť *a* + *b* = 5. Kolik je

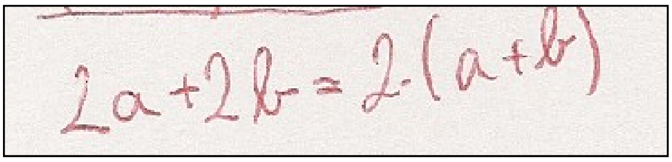
a) $2a + 2b + 4$?
b) $a^2 + 2ab + b^2$?

Třetí úloha kopíruje dvě úlohy TIMSS 2007, a sice M06-08 a M14-03. Úloha je specifická tím, že není známa hodnota jedné proměnné, ale víme, kolik je součet dvou proměnných. Výrazy šly jednoduše upravit, abychom mohli za součet proměnných dosadit. V prvním výrazu stačilo vytknout dvojku, v druhém výrazu si bylo třeba uvědomit, že se jedná o vzorec. Jak se žáci s úlohou vypořádali, je vidět z tabulky 11.

Tabulka 13: : Úspěšnost řešení žáků v třetí úloze

Úspěšnost v prvním výrazu	
	Počet žáků
Správné řešení	10
Nepřišli na výsledek samostatně	5
Úspěšnost ve druhém výrazu	
	Počet žáků
Správné řešení	5
Nepřišli na výsledek samostatně	10

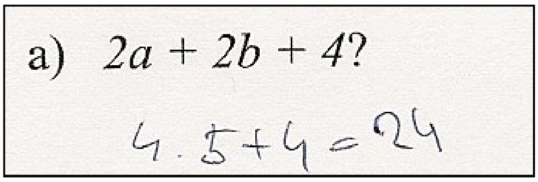
Deset žáků úlohu vyřešilo bez nápovědy. Pět žáků by úlohu samo nevyřešilo. Všech pět žáků (Pavel, Anna Marie, Josef, Dagmar a Kristýna) nevědělo, jak si mají s úlohou poradit. Pavlovi pomohla rada, aby si vytknul číslo 2, pak už úlohu vyřešil. Anna Marie po delším přemýšlení řekla, že neví. Měla velký problém s úpravou výrazů. Nakonec jsem jí přepsal část výrazu i s vytknutím čísla 2 (obr. 41). Nejdříve jí to moc nepomohlo. Pomohlo jí, když si výraz přepsala a dostala radu:„Když víme, kolik je *a* + *b*, nešlo by to tam nějak dosadit?“ Pak už si toho všimla a řešení provedla správně.



Obrázek 41: Nápověda pro Annu Marii

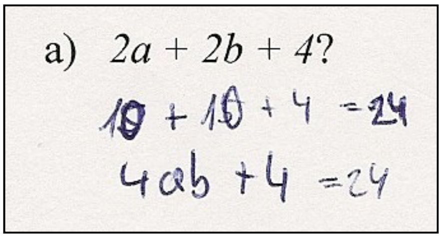
Pavlovi dělalo největší problémy to, že nevěděl, kolik je *a* a kolik je *b*. Snažil se hodnoty ze zadání nějak zjistit, i když si myslel, že to asi nepůjde. Potom úkol a) přeskočil. Když vyřešil b), tak už na vytknutí čísla 2 přišel a úlohu vyřešil.

Dagmar a Kristýna měly problém s výrazem $2a + 2b =$. Dagmar dvojky před proměnnými sečetla a vynásobila číslem 5 (obr. 42).



Obrázek 42: Dagmařino řešení

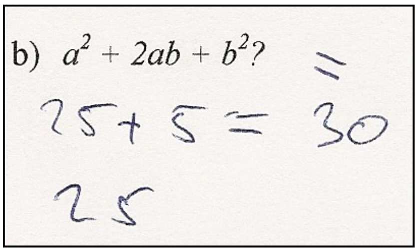
Kristýna si nejdřív dosadila číslo 5 za *a* i za *b*. Potom také sečetla koeficienty před proměnnými a navíc napsala místo součtu součin (obr. 43).



Obrázek 43: Kristýny řešení

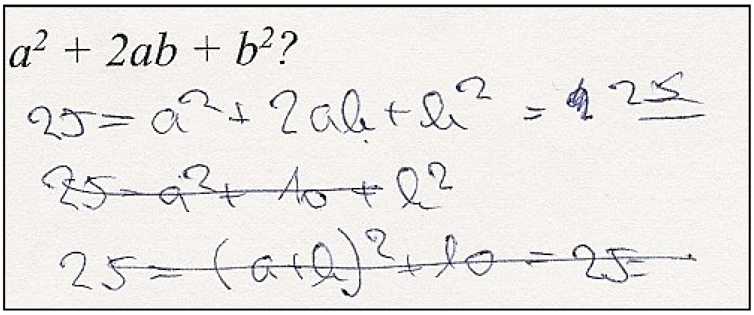
Oběma pomohlo to, že jsem jim přepsal výraz s vytknutím (obr. 41 výše).

Ve druhém výrazu byla úspěšnost menší. Pouze pět žáků ho vyřešilo bez nápovědy. Pavel, Ondřej, Patrik, Dagmar, Vojtěch, Anna Marie a Kristýna měli problém se vzorcem $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Patrik a Vojtěch viděli nesprávnou rovnost mezi výrazy $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Patrik potom nevěděl, co má udělat ještě s výrazem 2*ab,* a řekl, že „příklad nepůjde vypočítat“. Vojtěch nahradil výraz 2*ab* číslem 5 (obr. 44).



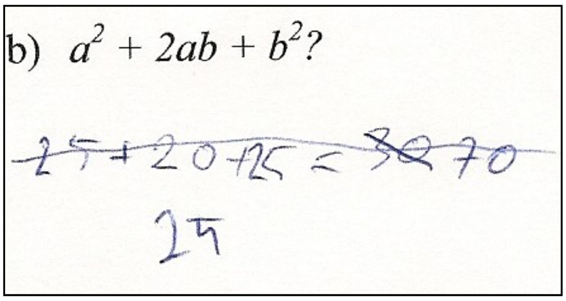
Obrázek 44: Vojtěchovo řešení výrazu

Ondřej, Anna Marie a Kristýna neznali, nebo si nevzpomněli na vzorec, a když jsem jim ho napsal, tak už úlohu vyřešili. Dagmar kromě neznalosti vzorce se po zjištění, že $(a + b)^2 = 25$, snažila ještě nějak vypočítat hodnotu proměnné a a b (obr. 45).



Obrázek 45: Dagmařin pokus o vypočítání hodnot proměnných *a* a *b*

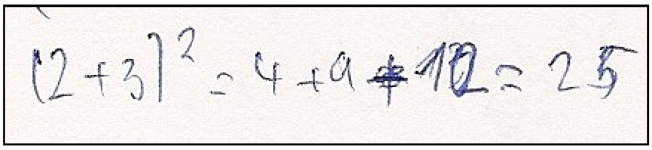
Pavel po napsání vzorce řekl, že „to bude 25“, ale asi nemyslel výsledek zadaného výrazu. Z obr. 46 je vidět, jak dál počítal.



Obrázek 46: Pavlovo řešení

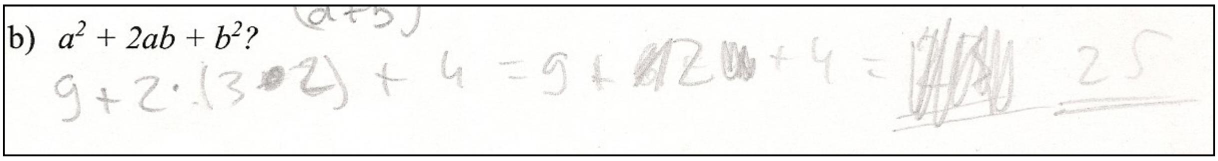
Josef, Matěj a Ilona udělali jinou chybu. Josef přišel na to, že se jedná o vzorec, ale dlouho tápal, jak by mu to mohlo pomoci. Dělalo mu problém dosadit za celý výraz $a + b$.

V této úloze mě překvapilo, jak někteří žáci úlohu řešili. Úlohu bych řešil a) vytknutím a za b) použitím vzorce. Potom bych použil substituci za celý výraz $a + b$. Šest žáků, ale použilo jiný způsob. Zvolili si za proměnnou a hodnotu od 0 do 5 a hodnotu b si potom dopočítali. Většinou si volili hodnoty 2 a 3. Matěj přišel na to, že se jedná o vzorec, ale nedosadil si za dvojčlen $a + b$ číslo 5, ale za a dvojku a za b trojku (obr. 47). Je to kreativní řešení, nevíme však, zda si uvědomuje, že by si mohl volit čísla za a a b za podmínky $a + b = 5$ libovolně. Šimon si zvolil hodnoty 2,5 a 2,5 a úlohu dořešil správně. Zajímavá byla jeho odpověď na otázku, jestli by si mohl zvolit hodnoty 2 a 3. Řekl, že ne, že by to nebylo „pravidelné“. Myslel si, že by to vyšlo jinak. Když si to ověřil výpočtem, už tomu věřil. Z toho je ale vidět, že si žáci obecnost tohoto řešení nemusí uvědomovat. Matěj v úloze udělal jinou chybu. Umocnil čísla 2 a 3 a sečetl, tedy zapomněl na člen 2*ab*. Zajímavé je i to, že to řešil takto. Čekal bych, že si nejdříve sečte čísla v závorce a až pak bude umocňovat.



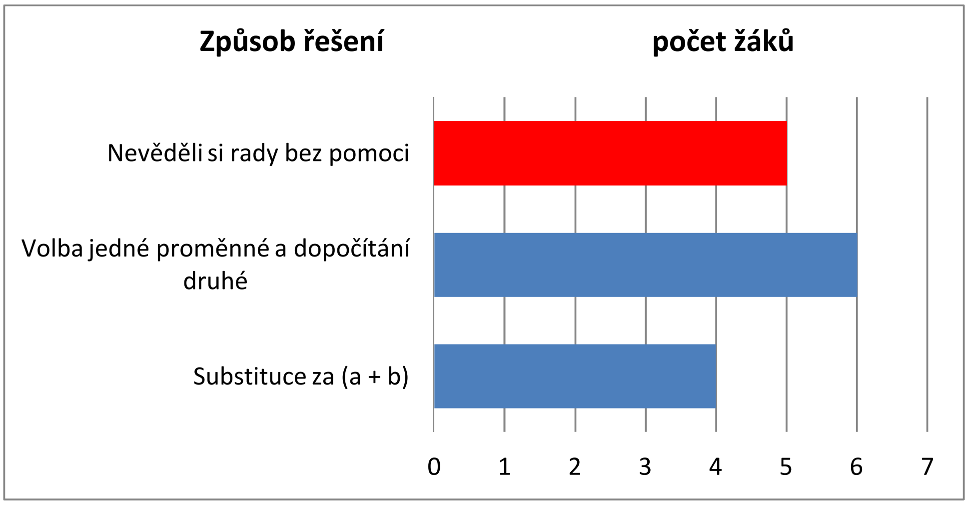
Obrázek 47: Matějovo řešení

Ilona si stejně jako Matěj za *a* dosadila číslo 3 a za *b* číslo 2. Udělala ale chybu v členu 2*ab*. Místo krát mezi proměnnými použila nejdříve znaménko plus. Jednalo se ale asi nejspíš o nepozornost. Když jsem se jí na to zeptal, proč tam má znaménko plus, hned se opravila (obr. 48).



Obrázek 48: Ilonino řešení

Kolik žáků takto postupovalo a kolik substituovalo za celý výraz $a + b$, je vidět z grafu na obr. 49.



Obrázek 49: Způsob řešení třetí úlohy

Za povšimnutí u této úlohy stojí i to, že mi Šimon řekl, že „to není příklad, když je tam otazník“.

Úloha 4: Ověř nerovnost dosazením.

a) $\boldsymbol{a > -a - 4}$

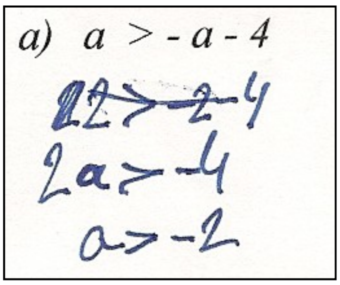
b) $\boldsymbol{d + 1 > \frac{1}{d}\ (d \neq 0)}$

Úloha navazuje na výzkum (Christou & Vosniadou, 2012), viz oddíl 1.2.2. Žáci měli zjistit, zda nerovnost platí vždy, tím, že do nerovnice dosadí libovolná čísla. U první nerovnice mi šlo především o to, zda si žáci dosadí za proměnnou také záporné číslo a zda si ho dosadí správně. Nerovnice může být trochu zavádějící tím, že se může zdát, že na levé straně vyjde vždy kladné číslo a na levé straně číslo záporné. Myslím, že žáci v mých rozhovorech měli trochu výhodu v tom, že už v úloze 2 dosazovali zápornou hodnotu do proměnné, před kterou měli znaménko mínus.

Při pohledu na druhou nerovnici může nastat podobný problém jako u první. Levá strana se zdá být větší než první. Opět jsem tedy zkoumal, jestli žáci udělají ukvapený závěr a řeknou, že rovnice platí vždy. Zde po zkušenosti z první nerovnice bylo snadnější odhalit, že nerovnice neplatí pro nějaké záporné číslo. Žáků jsem se ale také ptal, zda nerovnice platí pro všechna kladná čísla. Šlo mi tedy o to, zda si žáci dosadí zlomek nebo desetinné číslo menší než jedna, pro které nerovnost neplatí.

Zkoumal jsem tedy, jestli žáci za proměnnou – *a* vidí pouze záporné číslo a zda vidí za výrazem $\frac{1}{d}$ pouze zlomek menší nebo roven 1.

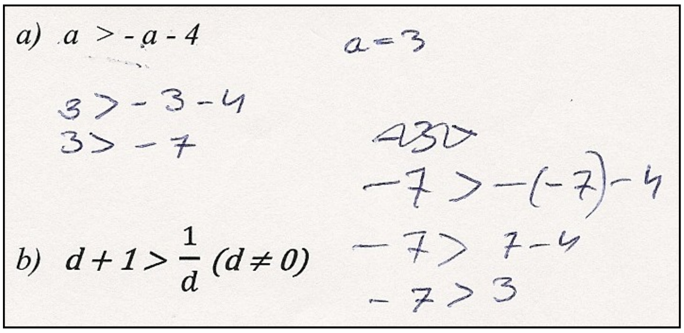
Správně první nerovnici vyřešili bez zaváhání jen 4 žáci (Honza, Dušan, Linda a Kristýna). Jediný Honza řešil nerovnici úpravami[57] (obr. 50).



Obrázek 50: Honzovo řešení

[57] Po žácích jsem chtěl, aby nerovnost ověřili dosazením. Když už jí ale Honza začal řešit ekvivalentními úpravami, nechal jsem ho. Většině žákům jsem ale řekl, ať si zkusí nějaká čísla dosadit.

Dušan, Linda a Kristýna si nejdřív dosadili celé kladné číslo, potom zkusili záporné, u kterého zjistili, že nerovnost neplatí.



Obrázek 51: Lindino řešení

Největší problém s úlohou měl asi Vojtěch. Bez dosazování konkrétních čísel řekl, že to platí pro všechna čísla. Zdůvodnil to tím, že na levé straně bude plus a na pravé mínus. Řekl jsem mu, že to není pravda, že existují čísla, pro která to neplatí, a ať zkusí nějaké najít. Dlouho tápal, potom jsem mu řekl, ať se podívá, jak jsme dosazovali v druhé úloze. To už mu pomohlo a našel číslo -5, pro které nerovnost neplatí.

Ondřej asi věděl, že pro kladná čísla nerovnost platit bude. Zkoušel tedy dosadit –4, ale měl s dosazením nejdříve problémy. Když už dobře dosadil a vyšlo mu $-4 > 0$, řekl, že to platí. Nastal tedy problém s určením nerovnosti. Sám by úlohu asi nevyřešil.

Ostatní žáci většinou dosadili pouze přirozené číslo a udělali ukvapený závěr, že nerovnost platí, nebo dosadili přirozené číslo, zjistili, že to platí, a šli na druhou nerovnici. Některých se stačilo zeptat, jestli to platí skutečně pro všechna čísla. Zamysleli se a záporné číslo je napadlo. Některým žákům jsem musel říct, že existují čísla, pro která to neplatí, a vyzvat je, ať na nějaké zkusí přijít. Potom všichni na záporné číslo přišli.

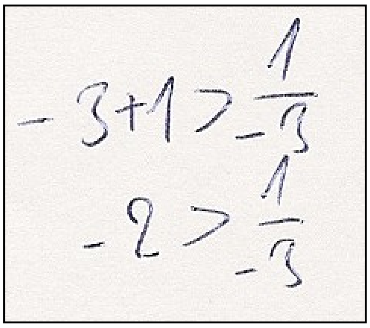
Tabulka 14: Jaká čísla dosazovali žáci u první nerovnice

	Počet žáků
Pouze přirozená čísla	10
Záporná celá čísla	5

Druhá nerovnice dělala ještě větší problémy. Ze zkušenosti z první nerovnice někteří žáci přišli na záporné celé číslo, pro které daná nerovnost neplatí. Žáků jsem se ale potom ptal, jestli to platí pro všechna kladná čísla. Jediný, kdo sám přišel na to, že pro všechna kladná čísla nerovnost neplatí, byl Patrik. Zkusil si dosadit číslo 0,2.

Lindu také napadlo, že by to nemuselo platit pro desetinné číslo nebo zlomek. Zkusila nejdřív 0,8, ale měla problémy s výpočtem hodnoty výrazu. Potom zkusila 0,5. To už dopočetla správně. Vůbec si ale v úpravách nevěřila a bez mé pomoci by to asi nedořešila. Matěj a Šimon, poté co jsem jim řekl, že existuje i kladné číslo, pro které nerovnost neplatí, na číslo přišli. Matěj na 0,5 a Šimon na 0,1. Ostatní na kladné číslo, pro které nerovnice neplatí, přišli až po mé radě, jestli existují ještě nějaká jiná kladná čísla menší než jedna, nebo zda by nemohli dosadit jiná než celá čísla. Pak už je zlomky nebo desetinná čísla napadly. Všichni ale raději pracovali s desetinnými čísly.

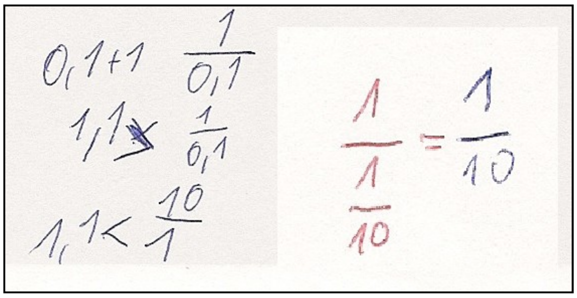
Sedm žáků mělo problém s určením nerovnosti u záporných čísel. Nerovnost na obrázku 52 viděli jako platnou.



Obrázek 52: Část řešení Divišky

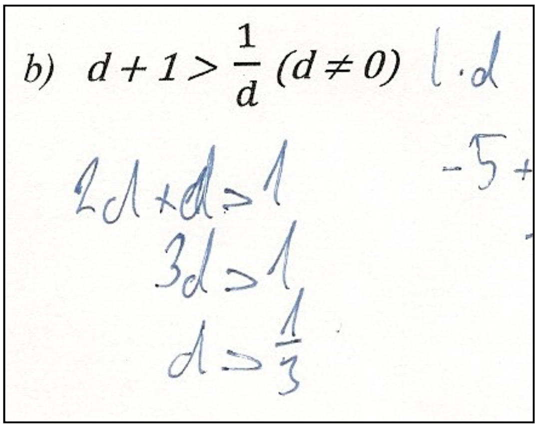
Podobnou chybu udělalo dalších šest žáků. Většinou se po mém upozornění a větším zamyšlení opravili. Ale v první chvíli nerovnost posuzovali, jako by tam byly absolutní hodnoty čísel $|-2| > \left|-\frac{1}{3}\right|$. Chyby se dopustila přibližně polovina žáků. Díky této chybě žáci nemuseli dojít ke správnému řešení úlohy, i když už si záporné číslo nebo zlomek dosadili.

Výsledky řešení úlohy hodně také ovlivňoval problém s počítáním složeného zlomku, nebo když si žáci dosadili do výrazu $\frac{1}{d}$ desetinné číslo (obr. 53). Žáci pak měli problém s dopočítáním a s představou, o jak velké číslo se jedná. Například Šimon řekl, že se jedná o strašně malé číslo ($\frac{1}{0,1}$).



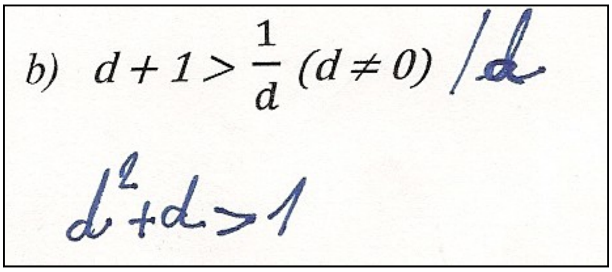
Obrázek 53: Vlevo Šimonovo řešení, vpravo Pavlovo

Ondřej se snažil druhou nerovnici řešit nejdříve pomocí ekvivalentních úprav. V úpravách ale udělal několik chyb, jak je vidět z obrázku 54.



Obrázek 54: Ondrovo úprava nerovnice

Honza došel při úpravě ke kvadratické nerovnici, kterou ještě ve škole neprobírali (obr. 55). Vyřešili jsme to tak, že jsem mu řekl, ať si zkusí dosadit nějaká čísla.



Obrázek 55: Honzovo úprava nerovnice

Diviška zkusila dosadit –1, ale pro tu nerovnost ještě platila. Řekla, že „tady to tedy platí“. Na číslo, pro které nerovnost neplatí, přišla až poté, co jsem jí řekl, že takové číslo existuje.

Úloha 5: Je dána rovnice $7y - 3x = 0$. Které dvojice čísel $[x, y]$ jsou řešením rovnice?

[3, 7]

[0, 1]

[14, 6]

[1, 0]

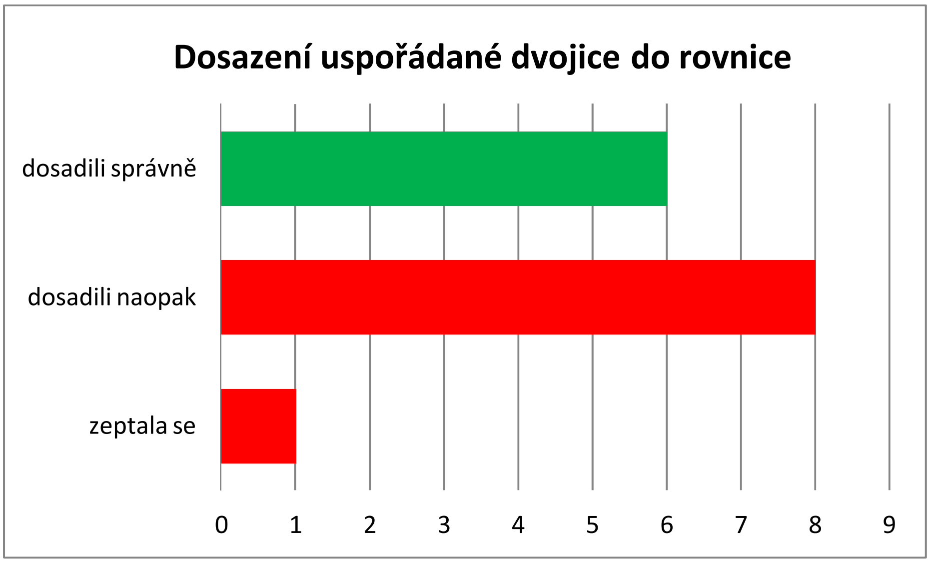
[7, 3]

Pátá úloha vznikla z úlohy M14-07 TIMSS. Úkolem žáků je najít řešení k zadané rovnici. Oproti úloze v TIMSS jsou nabídnuta dvě správná řešení. Zjišťuji tím, zda když žáci přijdou na jedno řešení, úlohu berou jako vyřešenou, nebo ještě prověřují zbylé uspořádané dvojice čísel. Úloha je záměrně postavená tak, že se v rovnici vyskytuje nejdříve neznámá *y* až pak *x*. V uspořádané dvojici je to naopak.

Všechny tři nabídnuté varianty chybných výsledků v TIMSS lze interpretovat jako záměnu hodnot *x* a *y* v uspořádané dvojici. Vypadá to tedy, že primární problém není v substituci, ale v konceptu uspořádané dvojice. V této úloze jsem se zaměřil, zda to tak doopravdy je a zda se žáci spokojí s nalezením jednoho správného výsledku.

Úlohu řešilo všech 15 žáků. Pěti žákům se ji podařilo vyřešit správně. Ani u jednoho žáka se nevyskytl problém se samotnou substitucí. Potvrdilo se tedy, že v této úloze není problém v substituci.

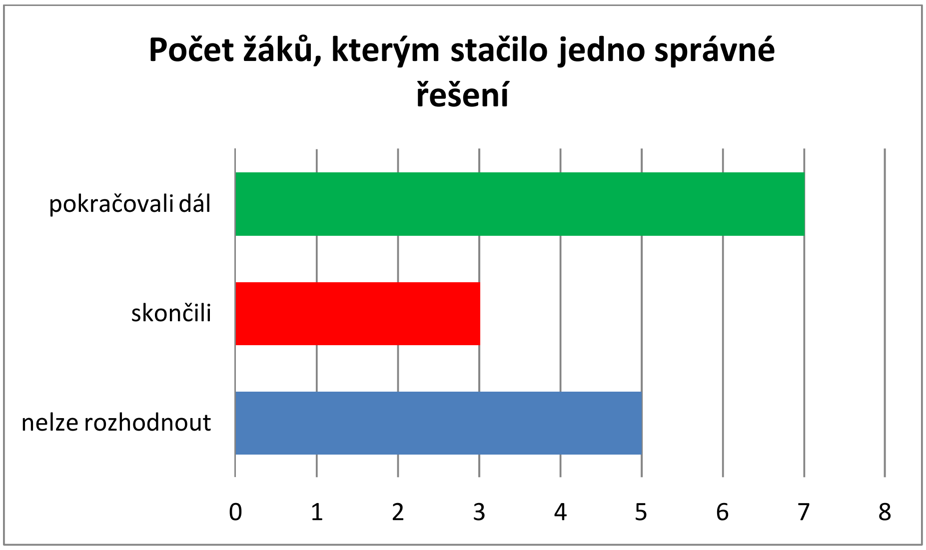
Osm žáků udělalo chybu v záměně hodnot *x* a *y*, šest žáků dosadilo správně a jedna žákyně (Ilona), se mě zeptala, jestli je to „levý *y* a pravý *x*“ v uspořádané dvojici. Ukázal jsem jí uspořádanou dvojici v zadání, což jí pomohlo, a pak už dosadila správně. U většiny žáků stačil dotaz, zda dosadili správně, nebo otázka, proč dosazovali za *y* toto číslo a za *x* toto číslo. Chybu si pak uvědomili a dosadili správně. Jediná, kdo nevěděl, co je v uspořádané dvojici *x* a *y*, byla Linda. Řekla, že si náhodně vybrala, co dosadí za *x* a co za *y*. (Dosadila naopak.) Myslím, že se ale nejedná o to, že by tomu žáci nerozuměli, ale že jsou spíše ukvapení. Stačila vždy malá nápověda a chybu si našli.



Obrázek 56: Graf, z kterého je vidět, kolik žáků dosadilo správně a kolik naopak

I když se jednalo především o nepozornost, tak by se této chybě měla věnovat pozornost, protože, jak je vidět z obr. 56, více jak polovina žáků dosadila čísla naopak. Kdyby se v rovnici vyskytovala nejdříve neznámá *x,* je možné, že by žáci dosadili správně.

Z obr. 57 je vidět, kolik žáků dosazovalo do rovnice další uspořádané dvojice, když už jedno řešení našli, a kolik s řešením skončilo.

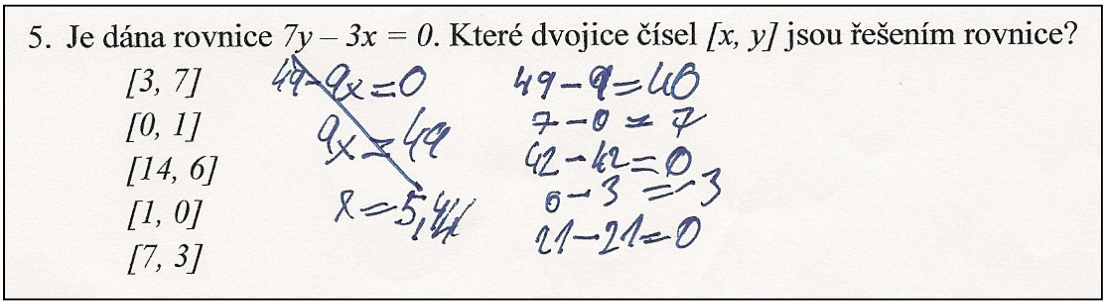


Obrázek 57: Graf ukazující, kolik žáků se spokojilo s jedním řešením a kolik žáků ověřovalo další uspořádané dvojice

Pozn. U některých žáků nešlo rozhodnout, zda by se spokojili s jedním řešením, nebo by ověřovali i zbylé dvojice. Důvodem bylo, že jsem se jich přímo zeptal, co ostatní uspořádané dvojice.

Také u této úlohy se vyskytla zajímavá řešení.

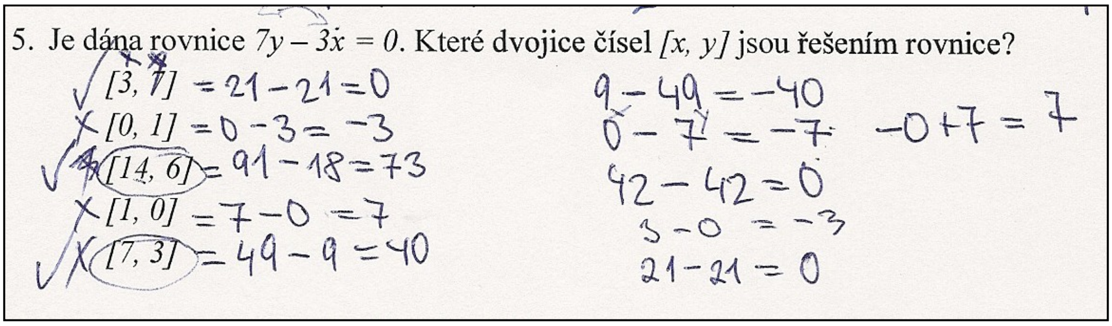
Honza začal úlohu nejdříve řešit tak, že si dosadil správně za *y*. Za *x* sice také správně dosadil, ale současně si *x* ještě napsal i do dalšího kroku. Poté se snažil rovnici o jedné neznámé dopočítat. Pozastavil se ale u toho, že mu nevyšlo celé číslo (obr. 58). Řekl jsem mu, aby se na zadání podíval ještě jednou. To mu pomohlo a úlohu už vyřešil správně.



Obrázek 58: Honzovo řešení úlohy

Kristýna nejdříve dosadila naopak, ale pak si sama všimla, že prohodila *x* a *y*. Úlohu tedy začala řešit znova. Jak je vidět z obr. 59, úloha už jí vyšla správně, ale udělala chybu při dosazování uspořádané dvojice [0;1] do rovnice. Dosadila sice správně za *x* jedničku a za *y* sedmičku, ale prohodila znaménka. Rovnici si nepřepsala, ale změnila si v duchu pořadí jednočlenů rovnice na $3x - 7y = 0$. Prohodila mnohočleny, ale neřešila už znaménka jednočlenů, ty nechala na stejném místě. Stejnou chybu udělala i u uspořádaných dvojic [3;7] a [1;0]. Když jsem se jí na to potom ptal, tak řekla:„V uspořádané dvojici je první *x* a až potom *y*, tak si to prohodím, ale to znaménko tam pořád zůstává.“ Trochu pomohlo, když jsem Kristýně napsal, zda by se rovnaly výrazy $7y - 3x = 3x - 7y$. Kristýna řekla, že by se nerovnaly, a pak už sama vymyslela, jak by šla rovnice správně se znaménky přepsat. Následně už dosadila uspořádanou dvojici [0;1] správně. Ostatní dvě upořádané rovnice jsme již neřešili.

Ačkoliv se jedná o závažnou chybu, v testu TIMSS by se chyba neukázala, protože uspořádané dvojice, pro které platí zadaná rovnice, zjistila správně.



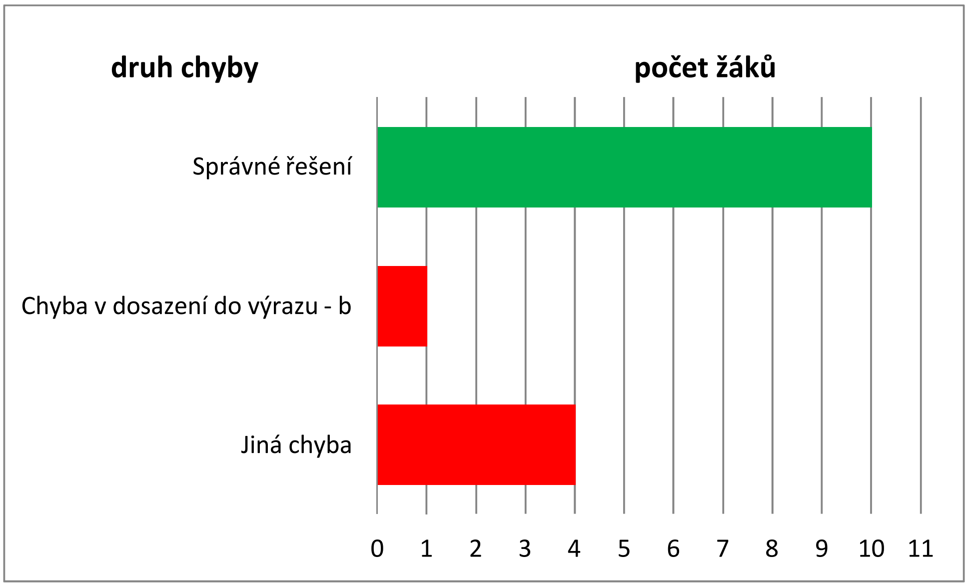
Obrázek 59: Kristýnino řešení úlohy 5

Úloha 6: Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

Úloha 6 navazuje na uzavřenou úlohu M04-03 z TIMSS 2007, v níž mají žáci do daného výrazu dosadit hodnoty proměnných a a b (úspěšnost 33,8 %, − 0,4 %). Nejčastější špatná odpověď (téměř 45 %) odpovídá tomu, že žáci nesprávně dosazují do výrazu $-b$ hodnotu $b = -1$ a dostávají číslo −1 místo 1.

V úloze jsem tedy sledoval, v jaké míře se tato chyba ukáže a jakých dalších chyb se žáci dopustí. Nutno dodat, že výsledky mohlo ovlivnit to, že se žáci s dosazováním záporné hodnoty za zápornou proměnnou už v tomto testu setkali.

Jak je vidět z obr. 60, úlohu vyřešilo správně 10 žáků a 5 žáků se dopustilo nějaké chyby.

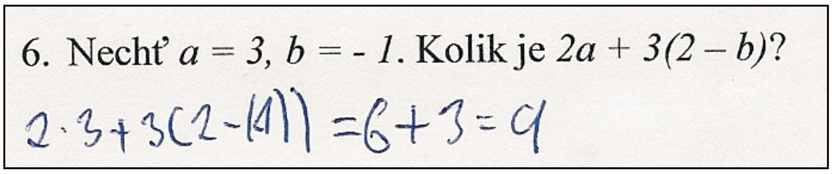


Obrázek 60: Chyby v úloze 6

V porovnání s výzkumem TIMSS měla úloha o dost lepší úspěšnost řešení. Výsledek je ale hodně ovlivněn předchozíma úlohami v testu, kde už se žáci setkali s dosazováním záporné hodnoty do záporného výrazu, a to v úloze 2 a úloze 4.

Pouze jeden žák se dopustil chyby v dosazení −1 do výrazu –*b*, a to Honza. Počítal zpaměti a výraz 3(2 – *b*) mu vyšel tři. Po rozebrání úlohy se potvrdilo, že udělal chybu při dosazení čísla −1 do – *b*, čímž mu vyšlo číslo –1. To odečetl od dvojky a jedničku pak vynásobil s trojkou.

Dušan použil správně závorky, ale jak je vidět z obrázku 61, napsal si mínus před číslo 1 v závorce nepřehledně, a potom si ho nevšiml.

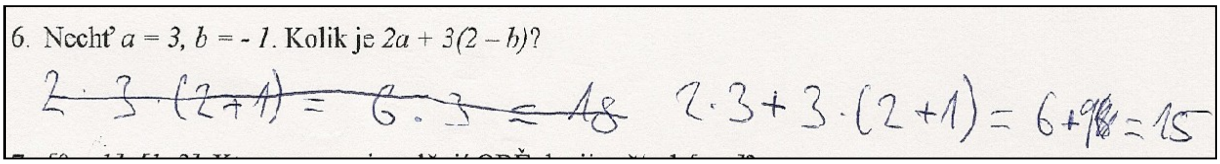


Obrázek 61: Dušanovo řešení úlohy 6

Tři žáci se dopustili jiné chyby. Matěj si za proměnné správně dosadil, ale udělal chybu při výpočtu 2 – (−1), což mu vyšlo 1. Problém byl tedy s počítáním s celými čísly. Chybu si ale sám při kontrole našel.

Diviška také správně dosadila, pak dospěla k výrazu 6 + 3(2 + 1), který dále upravila na výraz 9 + 3. Sečetla tedy nesprávně 6 s 3 a opomenula pravidlo, že násobení má přednost před sčítáním.

Vojtěch správně dosadil za výraz –*b* a nejspíš i za výraz 2*a,* ale jak je vidět z obr. 62, při dosazování se trochu ztratil. Dosadil si asi správně za *a* číslo 3, ale pak bral dosazenou 3 jako 3 před závorkou. Když jsem mu řekl, že tam má chybu, tak jí hned viděl chybně ve znaménku před číslem 1 v závorce. Úlohu jsme začali řešit spolu od začátku, chyby si sám všiml a úlohu správně dopočítal.



Obrázek 62: Vojtěchovo řešení úlohy 6

Úloha 7: [0, - 1], [1, 3]. Kterou z rovnic splňují OBĚ dvojice čísel [*x, y*]?

$$\boldsymbol{x + y = -1}$$

$$\boldsymbol{2x + y = 5}$$

$$\boldsymbol{3x - y = 0}$$

$$\boldsymbol{4x - y = 1}$$

Úloha 7 kopíruje uzavřenou úlohu M06-10 z TIMSS 2007 (úspěšnost 25,0 %; +0,2 %). Jedná se o úlohu podobnou úloze 5, kde byla zadána rovnice a žáci měli najít uspořádané dvojice čísel, které rovnici splňují. Zde je to naopak. Jsou zadány dvě uspořádané dvojice a žáci mají najít rovnici, kterou obě dvojice čísel splňují. Úloha je ulehčená tím, že by zde nemělo dojít k záměně proměnných x a y, ale ztížena tím, že rovnice musí platit pro obě dvojice uspořádané dvojice. Všechny chybné odpovědi v TIMMS spočívají ve výběru rovnice, která vyhovuje pouze jedné uspořádané dvojici čísel. V testech TIMSS se mohlo stát, že i přesto, že žáci vybrali správnou odpověď, mohli použít špatnou strategii a zkusit pouze jednu uspořádanou dvojici čísel. Ta by vedla k úspěchu víceméně náhodně. V této úloze jsem tedy zkoumal především to, zda žáci budou dosazovat obě uspořádané dvojice čísel do rovnice, nebo jim k označení správné rovnice bude stačit ověření pouze jedné uspořádané dvojice čísel.

Úloha měla v mých rozhovorech oproti TIMSS poměrně vysokou úspěšnost. Devět žáků úlohu vyřešilo úplně správně, 6 žáků v úloze nějak chybovalo. Všichni žáci šli postupně a začali dosazovat do první rovnice.

Tři žáci (Matěj, Šimon, Linda) měli problém s tím, že vyzkoušeli pouze první uspořádanou dvojici čísel a už označovali rovnici za správné řešení. Po upozornění na to, co ta druhá uspořádaná dvojice čísel, už všichni tři vyřešili úlohu bez problémů.

Větší problémy s úlohou měl Pavel, který chvilku přemýšlel, a pak řekl, že tohle neví. Úlohu by v testu pravděpodobně přeskočil. Pomohlo mu, když jsme si společně projeli zadání. Potom už věděl, jak má úlohu řešit, ale v poslední rovnici se dopustil chyby při dosazování čísla -1 do $-y$. Výraz mu vyšel -1. Dopustil se chyby v poslední rovnici i při dosazování druhé uspořádané dvojici čísel, kde mu vyšlo $4 - \mathbf{2} = 2$. Zde se ale asi jednalo jenom o nepozornost, dosadil místo čísla 3 číslo 2.

Vojtěch se také dopustil chyby při dosazení −1 do výrazu –*y* a výraz mu vyšel taky −1. V úloze se dopustil, ještě dalších tří numerických chyb:

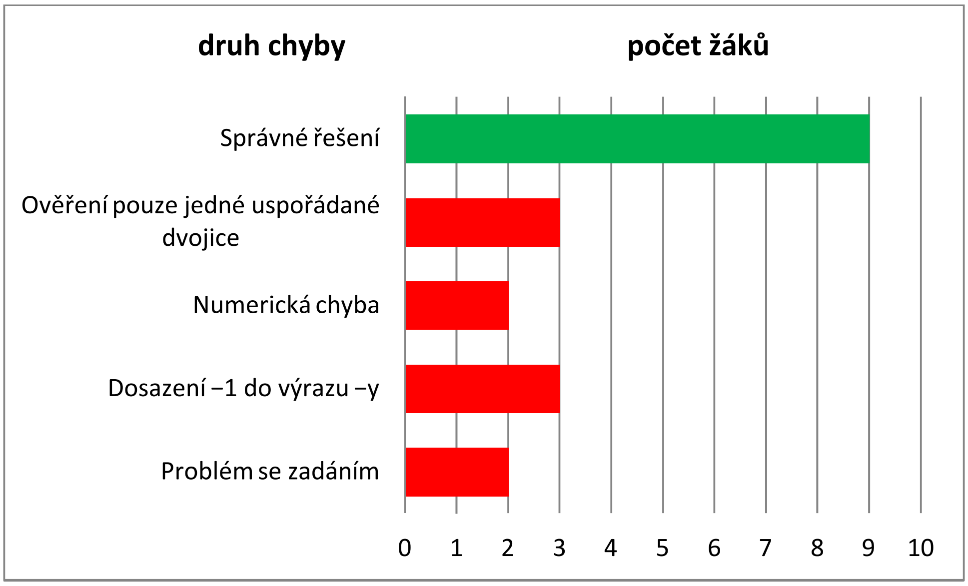
$2 \cdot 0 - 1 = 1$

$3 \cdot 1 - 3 = 6$

$4 \cdot 1 - 3 = 7$

Kristýna chvilku přemýšlela, a poté řekla, že to moc nechápe. Úlohu by také asi pravděpodobně přeskočila. Ukazuje se, že je pro žáky těžší vybrat rovnici pro uspořádanou dvojici čísel než naopak. Ukázal jsem jí, že je to podobné jako v úloze 5, akorát naopak. To jí pomohlo a úlohu už pak řešila správně. Trochu zaváhala při dosazování čísla −1 do výrazu –*y*, ale sama se při kontrole opravila.

Zajímavé je, že 4 žáci i přesto, že zjistili, že první uspořádaná dvojice čísel rovnici nevyhovuje, ověřovali zbytečně i druhou uspořádanou dvojici. Je možné, že si důkladně nepřečetli zadání, nebo o něm příliš nepřemýšleli.



Obrázek 63: Chyby v úloze 7

Úloha 8: $m = 1 + x$, $n = 2 - x$. Kolik je

c) **$2m + n$?**

d) **$2m - n$?**

Úloha 8 navazuje na dvě neuvolněné úlohy TIMSS: M08-11A (úspěšnost 30,7 %; −2,7 %) a M08-11B (úspěšnost 8,8 %; −4 %). V obou případech úlohu vynechalo značné procento žáků (17 % a 20 %). Výsledky českých žáků v těchto úlohách byly výrazně pod mezinárodním průměrem.

V úloze je třeba dosadit do algebraického výrazu za každou z dvojice proměnných algebraický výraz složený z čísla a proměnné. Obě úlohy byly v testech TIMSS otevřené, nevíme tedy nic o povaze chyb. Mým cílem bylo zjistit, jakých chyb se žáci v těchto úlohách dopouštějí.

Úloha má dvě části, které se od sebe liší pouze znaménkem u proměnné n, za kterou měli žáci dosazovat výraz $2 - x$.

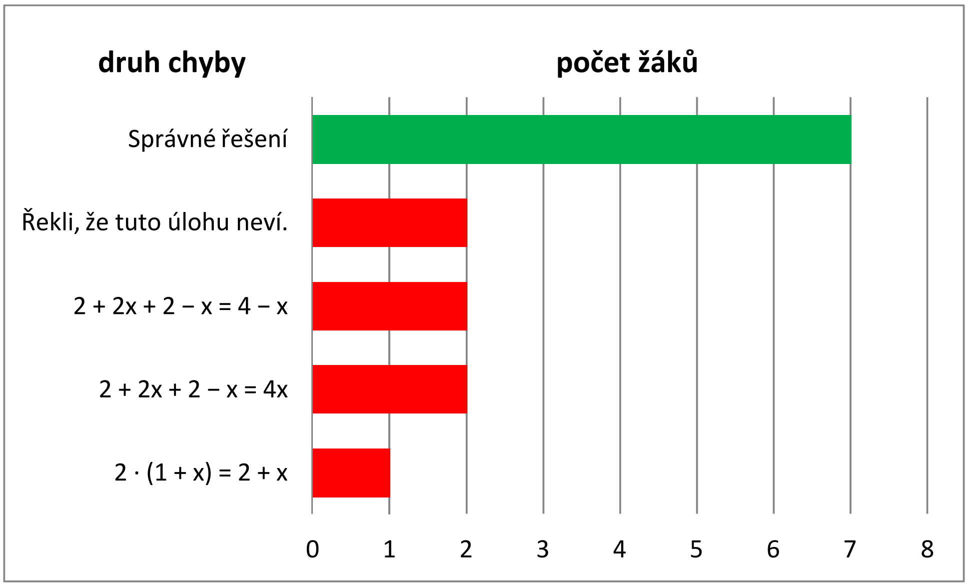
První část úlohy vyřešilo správně 7 žáků, dva žáci se k úloze kvůli času nedostali a šest žáků udělalo v první části úlohy nějakou chybu.

Ondřej a Pavel nad úlohou chvilku přemýšleli, a pak řekli, že tuto úlohu nevědí. Úlohu by v testu TIMSS pravděpodobně přeskočili. Stačilo jim ale říct, že je to podobná úloha úlohám, které už řešili, a že zde mají výraz a vědí, co je m a n. Ať tedy za ně do výrazu dosadí. Pavel pak už první část úlohy vyřešil správně. Ondřej se ještě dopustil chyby při úpravě výrazu $2 + 2x + 2 - x = 4 - x$. Stejné chyby se dopustila i Kristýna. Oba dva si chybu sami našli a opravili.

Honza a Dušan se dopustili také stejné chyby při úpravě výrazu $2 + 2x + 2 - x = 4x$.

Patrik si také správně dosadil a také udělal chybu při úpravě výrazu: $2 \cdot (1 + x) = 2 + x$. Napsal si správně závorku, ale pak jí špatně roznásobil. Chybu si sám našel.

Žáci, kteří řekli, že nevědí, jak vyřešit tuto úlohu, měli pravděpodobně problém se samotnou substitucí, ostatní žáci udělali chybu v úpravě výrazů s proměnnou.



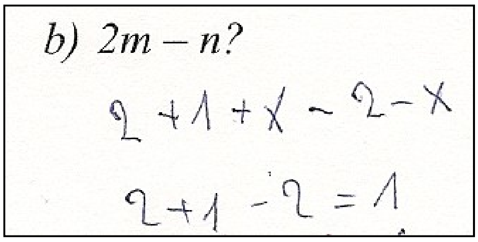
Obrázek 64: Graf chyb v první části úlohy 8

Druhou část úlohy vyřešilo správně 5 žáků, jedna žákyně druhou část úlohy už nestihla a devět žáků se dopustilo nějaké chyby.

Největší problém byl se znaménkem mínus před proměnnou n. Všem devíti žákům dělalo problémy právě toto. Osmi žákům po dosazení vyšel výraz $2 + 2x - 2 - x =$. Nezměnili tedy znaménko u výrazu $-x$. Někteří použili závorku při nahrazování m, u n už pak závorku ale nepoužili. Výraz si tedy přepsali na tvar $2(1 + x) - 2 - x =$. Zbytek žáků nepoužil závorky vůbec. Ve všech případech stačilo poradit, aby si závorky použili i při nahrazování proměnné n, a žáci úlohu vyřešili správně.

Vojtěch závorky použil, ale výraz $-(2 - x)$ upravil na výraz $2 + x$.

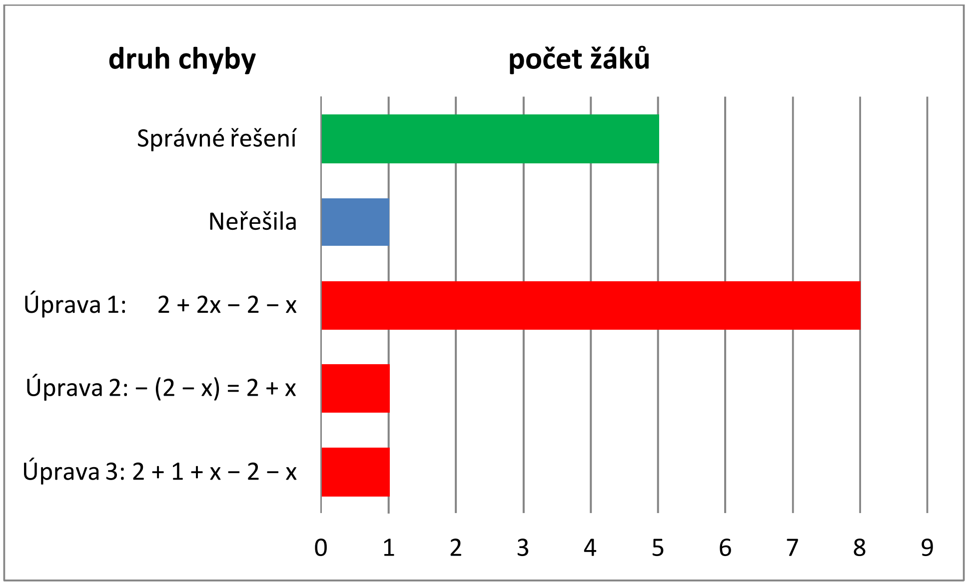
Dagmar kvůli nedostatku času šla řešit rovnou druhou část úlohy. Z obr. 65 je vidět, jak nahradila proměnné m a n.



Obrázek 65: Dagmařino řešení druhé části úlohy 8

Dagmar udělala stejnou chybu při dosazení za výraz $-n$ jako sedm žáků popsaných výše. Udělala chybu ale i při dosazení za výraz $2m$, kde jí vyšlo $2 + 1 + x$. V řešení úlohy jí pak pomohly opět závorky.

Všech pět žáků, kteří vyřešili druhou část úlohy správně, použilo při nahrazování závorky.



Obrázek 66: Chyby v řešení druhé části úlohy 8

Pozn. Úprava 1 a úprava 3 ukazuje, jak si žáci přepsali výraz po nahrazení proměnných m a n. Úprava 1 obsahuje i možnost, kdy si žáci přepsali výraz jako $2(1 + x) - 2 - x$. V úpravě 1 by mohlo být ještě o žáka více. Nezapočítal jsem tam Dagmar, která tuto chybu také udělala, ale je popsána v úpravě 3.

Úloha 9: Která rovnice má řešení $x = 3$, $y = 5$?

$5x + 3y = 15$

$3x - 5y = 0$

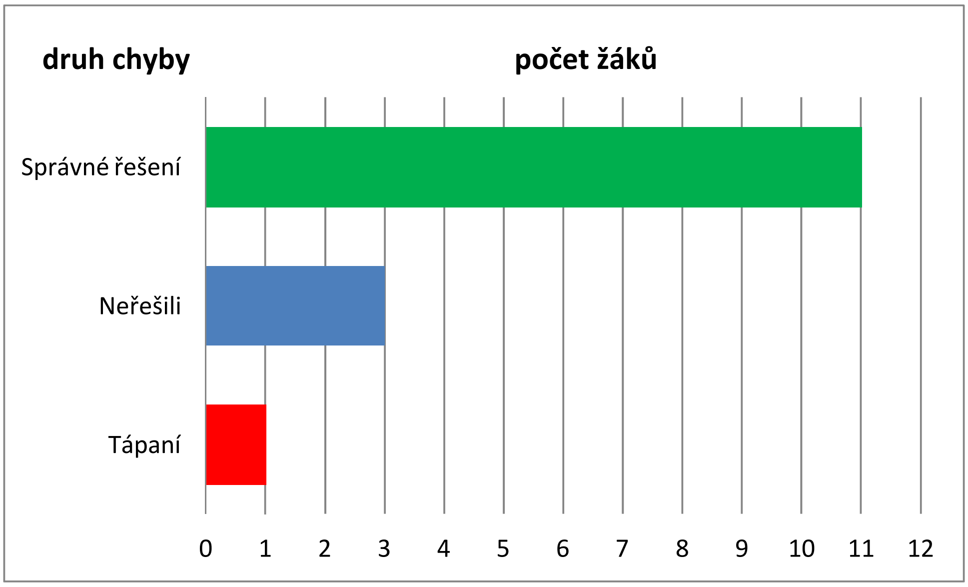
$5x - 3y = 0$

$3x + 5y = 8$

Tato úloha navazuje na neuvolněnou úlohu z TIMSS 2007 M08-08 (úspěšnost 36,2%; −1,2 %). V úloze mají žáci přijít na to, která z nabízených rovnic má jako řešení danou dvojici čísel. V testech TIMSS se dopustilo 13,2 % žáků chyby, že zaměnili při dosazování x a y, což se může zdát jako nejpochopitelnější chyba. Avšak nejčastější špatná odpověď (25,4 %) odpovídala tomu, kdy by jako správné řešení byla vybrána rovnice $5x + 3y = 15$. Zdá se, že žáci nejdříve dosazují zvlášť číslo x, pak zvlášť číslo y a sčítání ignorují (jako by ověřovali pouze jednu proměnnou), v obou případech zde dostanou číslo 15.

Myslím, že výsledky z této úlohy už jsou hodně ovlivněny zkušeností s předchozími úlohami, především úlohou 5 a úlohou 7. Tři žáci už se k úloze nedostali, jedenáct žáků vyřešilo úlohu správně. Jediná Linda měla s úlohou problémy.

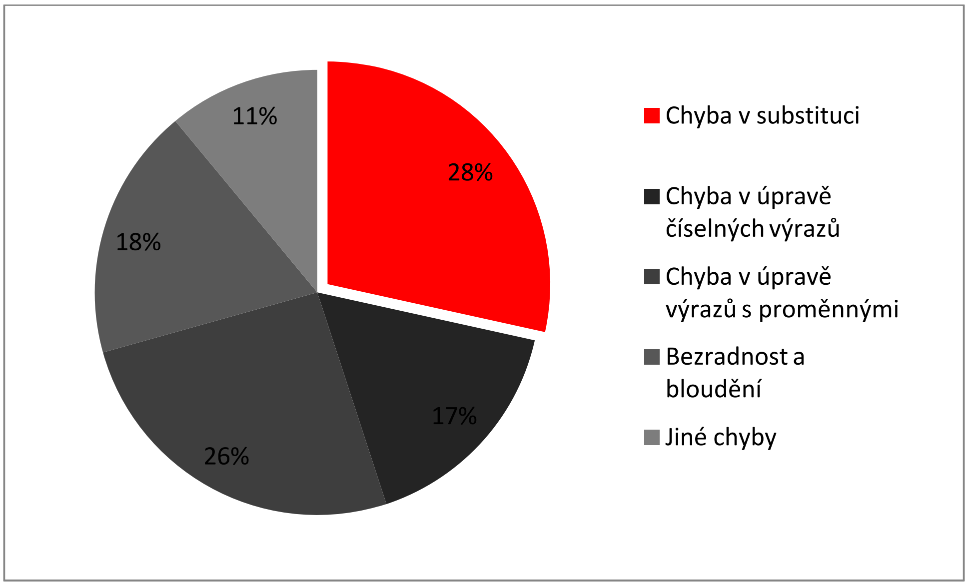
Linda vůbec nevěděla, jak úlohu řešit. Chtěla si spočítat hodnoty x a y, ale nevěděla jak. Věděla, že by na to potřebovala soustavu rovnic. Do první rovnice dosadila, řekla ale, že se to nemá, že musí nejdřív vypočítat hodnotu x. Pomohl jsem jí tím, že jsem jí napsal rovnici s jednou neznámou, u které jsme si udělali zkoušku. A pak jsem se jí zeptal, zda by nám ta zkouška nepomohla i u této úlohy. To už jí pomohlo a úlohu vyřešila. Sama by úlohu ale určitě nevyřešila. Říkala, že právě začali dělat soustavu dvou rovnic, a snažila se tuto látku na řešení aplikovat.



Obrázek 67: Graf chyb úlohy 9

3 Závěrečné shrnutí poznatků

V oddíle 2.5 jsem analyzoval problémy a chyby žáků při řešení jednotlivých úloh, při kterých byla zapotřebí substituce. V grafech jsem zaznamenal četnost chyb. Chyby jsem popsal a doplnil ilustrací reprezentativních žákovských řešení. Jednalo se mi především o to, zda byl problém v samotné substituci, nebo zda byla příčina chybného řešení někde jinde.



Obrázek 68: Relevantní četnost jednotlivých chyb

Pozn.: Do skupiny *Jiné chyby* jsem zařadil chybu, když žáci dosadili pouze jednu proměnnou v úloze 7, a problém v konceptu uspořádané dvojice v úloze 5. Žádné další chyby nebyly během analýzy zjištěny.

Přestože byl test zaměřený na úlohy vyžadující substituci, chyba v samotné substituci úplně nepřevládla. Naopak žáci chybovali spíše v úpravě výrazů, jak číselných, tak s proměnnými. Často se stalo, že si děti správně dosadily i se závorkami, ale pak závorky špatně odstranily nebo se dopustily jiné chyby při úpravě. Je ale dost možné, že pozdější úlohy už byly ovlivněny předchozími, kde již žáci za proměnnou dosazovali a úlohy jsme někdy společně dořešili. V testech TIMSS žáci řešili pouze některé úlohy na substituci, a když si se substitucí nevěděli rady, nikdo jim neporadil. Museli pak mít větší problém i v další úloze na substituci. Chyba *Bezradnost a bloudění* se vyskytla především v úloze 3, kde byl asi největší problém s tím, že žáky nenapadlo si vytknout dvojku nebo použít vzorec. Problém pak bude asi nejspíš v úpravě výrazů. U úlohy 8, když si žáci řekli, že tuto úlohu nevědí, bych přisuzoval chybu zase spíše substituci.

Cílem práce je odhalit chyby, blíže je popsat, pokusit se najít jejich možné příčiny a porovnat výsledky s výzkumy z oddílu 1.3. Vrátím se tedy ještě jednou k jednotlivým úlohám z předcházející kapitoly. Shrnu nejčastější a nejzávažnější chyby u jednotlivých úloh, porovnám úspěšnost s úspěšností v TIMSS a na základě používaných učebnic a vlastního uvážení uvedu možné příčiny chyb.

Úloha 1 – V úloze bylo třeba dosadit přirozené číslo do proměnné v první a druhé mocnině s kladným koeficientem. Jedná se o úlohu, v níž v TIMSS naši žáci dosáhli téměř svého standardu. Rendl s Vondrovou (2014) tedy tuto úlohu nijak nerozebírali. Přesto, že to byla první úloha, ani jeden žák neudělal chybu u prvního jednočlenu $3x$. Z toho usuzuji, že žákům nedělá problém dosazení kladného čísla do jednočlenu s proměnnou v první mocnině s kladným koeficientem. To se mi potvrdilo i v ostatních úlohách. V posledním jednočlenu už ale chybovalo sedm žáků. Je tedy vidět, že žákům dělá problém mocnina. V učebnicích se podobné typy úloh, kde je třeba dosadit do daného výrazu, vyskytují. Téměř se však nevyskytují úlohy, kde je třeba dosadit do výrazu $(2x)^2$, který žáci ve výrazu $2x^2$ viděli. Bylo by třeba, aby se žáci více setkávali s oběma typy výrazů, což by podle mého názoru přispělo k tomu, že by mezi nimi viděli rozdíl a tolik by nechybovali, když dostanou jeden z nich.

Úloha 2 – V první části úlohy bylo úkolem zjednodušit dva výrazy s proměnou x. V prvním výrazu měli čtyři žáci problém se sečtením jednočlenů s proměnnou. V druhém výrazu se snažilo nějak zjednodušit výraz $-x - x^2$ osm žáků, „zjednodušený výraz“ jim vyšel různě. Chybovali tedy v tom, že se snažili nějak sečíst proměnné s různou mocninou. Největší problém s úpravou výrazů měli žáci z gymnázia (druhý výraz se nepovedl správně upravit ani jednomu z nich). Už se sice setkali se sčítáním mnohočlenů v učebnici *Výrazy [1]*, ale teprve začali učebnici *Výrazy [2]*, kde se vyskytuje řada úloh na zjednodušení výrazů, s kterým se ještě nesetkali. To může být také důvodem neúspěchu žáků TIMSS.

V této úloze jsem zkoumal také to, zda žáci vidí rovnost mezi původním a upraveným výrazem. Dvanáct žáků z 15 dosazovalo do původního výrazu (což je složitější) a polovina[58] žáků mi na otázku, „zda by mi vyšlo stejné číslo, kdybych dosadil do upraveného výrazu“ odpověděla, že ne. Z toho soudím, že žáci mezi původním a upraveným výrazem rovnost většinou nevidí. To potvrzuje i studie A. Dembyové (1997). Autorka položila žákům ve věku 13 až 15 let, kteří úspěšně provedli algebraickou úpravu výrazů, otázku, zda jsou si původní a konečný výraz

[58] Ptal jsem se na to 12 žáků, 6 mi jich tedy odpovědělo, že ne.

rovny. Většina žáků nedokázala odpovědět nebo odpověděla záporně. Žáci také byli v naprosté většině přesvědčeni, že když dosadí do obou výrazů konkrétní hodnoty, výsledek nemusí být nutně stejný.

Příčinou chyb žáků může být i to, že s úlohami, v nichž je třeba ověřit správnost úpravy výrazu dosazením určitých čísel, jsem se setkal pouze v sérii učebnic od Hermana a kol. a pouze v jedné úloze v sérii učebnic od Coufalové a kol.

V druhé části úlohy měli žáci najít číselnou hodnotu výrazů z první části úlohy. Ukázalo se, že žákům dělá problém dosazení záporného čísla do proměnné se záporným koeficientem. Situaci ještě zhoršuje, když je proměnná v druhé mocnině. Při analýze učebnic jsem ale zjistil, že především v sérii učebnic od Coufalové a kol. a sérii od Odvárka a Kadlečka se tento druh substituce vyskytuje velice málo. Žáci tedy nemají moc zkušeností s dosazováním záporné hodnoty do proměnné se záporným koeficientem. Díky tomu mohou mít tendenci vidět proměnnou se záporným koeficientem pouze jako záporné číslo. To potvrzuje i výzkum (Christou, Vosniadou, 2012) uvedený v oddíle 1.2.2.

Úloha 3 – V této úloze bylo třeba nahradit číslem jednoduchý algebraický výraz složený ze dvou proměnných. V prvním výrazu byla překvapivě vysoká úspěšnost, 10 žáků vyřešilo první část úlohy správně (67 %). První část úlohy navazovala na úlohu M06-08, kde byla úspěšnost pouze 32,4 %. Výsledky se tedy značně liší. Úspěšnost může být ovlivněna tím, že žáci, kteří si nevěděli rady, nejdříve přeskočili první výraz a věnovali se druhému výrazu, který jsme někdy společně vyřešili. To jim pak pomohlo v prvním výrazu, a zvýšilo tak úspěšnost. Druhý výraz vyřešilo správně 5 žáků, tedy 33 %, což už odpovídá výsledkům v TIMSS. V úloze se vyskytly tři hlavní problémy. První z nich spočíval v samotné substituci čísla za dvě proměnné, druhým problémem byla úprava výrazů především pomocí vzorce[59] $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Na vzorec si žáci buď vůbec nevzpomněli, nebo ho špatně použili. Třetím problémem byla špatná substituce, například dosazení 5 za a i za b, nebo za výraz $2ab$.Hlavním účelem úlohy bylo zjistit, zda žákům bude dělat problémy dosadit číslo za jednoduchý výraz s dvěma proměnnými. Myslím, že tento druh substituce žáci nemají vůbec zažitý. To potvrzují i správná řešení žáků. Pouze čtyři žáci substituovali za celý výraz $a + b$. Šest žáků si zvolilo za jednu proměnnou konkrétní číslo (např. 3) a druhou proměnnou si dopočítali (5 – 3 = 2), to pak za jednotlivé proměnné do výrazu

[59] Žáci gymnázia tento vzorec ještě neprobírali, vzorec jsem jim tedy vždy napsal.

dosadili. Důvodem neúspěchu žáků v této úloze je určitě to, že se tento druh substituce v učebnicích vůbec nevyskytuje.

Úloha 4 – V této úloze měli žáci ověřit dosazením, zda platí dvě nerovnosti. Nerovnosti platili pro přirozená čísla, což mohlo vést u žáků k ukvapenému závěru, že platí pro všechna čísla. Zkoumal jsem především to, zda si žáci budou dosazovat i záporná a desetinná čísla i zlomky, nebo jen přirozená čísla a zda vidí za výrazem $-a$ jen záporné číslo a za výrazem $\frac{1}{d}$ číslo menší než číslo 1.

V úloze se ukázalo, že žáci mají tendenci dosazovat pouze přirozená čísla, a díky tomu tvrdili, že nerovnosti platí pro všechna čísla. Žáci nejvíce dosazovali jen přirozená čísla, pak celá čísla, po nichž následovala desetinná čísla a teprve pak zlomky. Potvrdilo se i to, že žáci vidí za výrazem $-a$ pouze záporné číslo a za výrazem $\frac{1}{d}$ zlomek s číslem 1 v čitateli a s přirozeným číslem ve jmenovateli.

Shodl jsem se tedy se závěry výzkumu (Christou, Vosniadou, 2012) uvedeného v oddíle 1.2.2. Navíc se ukázalo, že žáci mají problém s určením nerovnosti u celých čísel a úpravou lomených výrazů s desetinným číslem nebo zlomkem ve jmenovateli, což u nich může ovlivnit úspěšnost v řešení podobných nerovnic.

Úloha 5 – V této úloze byla dána rovnice a pět uspořádaných dvojic. Žáci měli najít dvojice čísel [*x, y*], které jsou řešením rovnice. Úloha navazovala na úlohu M14-07 z TIMSS 2007. Ve výzkumu (Rendl & Vondrová, 2014) autoři dospěli k závěru, že v úloze TIMSS nedošlo k problémům primárně v substituci, ale v konceptu uspořádané dvojice, tedy k záměně hodnot *x* a *y*. Tento závěr mohu potvrdit. V úloze se nevyskytl u nikoho problém v samotné substituci, ale především v prohození hodnot *x* a *y*. Pouze 6 žáků dosadilo správně, 8 žáků dosadilo naopak a jedna žákyně se mě zeptala, co je *y* a co je *x*. Většinou ale stačilo žákům ukázat uspořádanou dvojici [*x, y*] v zadání a chybu si opravili. Když porovnám úspěšnost této úlohy (33,3%) v mém výzkumu, je vidět, že je ještě horší než v úloze M14-07 (52,8 %).

Řešením rovnice byly dvě uspořádané dvojice z nabízených dvojic. Zkoumal jsem tedy, jestli se žáci spokojí s jednou uspořádanou dvojicí, nebo ověří i zbylé. Šlo především o to, jak žáci čtou pozorně zadání. Sedm žáků, poté co našli jednu uspořádanou dvojici, řešili i ostatní uspořádané dvojice. Jen 3 žáci tak neučinili.

S obecným zápisem uspořádané dvojice[x, y] se žáci setkávají v učebnicích od Coufalové a kol. a Odvárka a Kadlečka až v 9. ročníku u rovnic se dvěma neznámými a u funkcí. V sérii učebnic od Hermana a kol. se uspořádaná dvojice používá pouze jako souřadnice bodů. Obecný zápis [x, y]se vůbec nevyskytuje ani u soustav rovnic.

Úloha 6 – Úloha navazovala na úlohu M04-03 (33,8 %), kde nejčastější špatná odpověď odpovídala tomu, že žáci dosazovali nesprávně do výrazu $-b$ hodnotu $b = -1$. V porovnání s úlohou v TIMSS měla úloha v mých rozhovorech o dost lepší úspěšnost (66,7%), což určitě souvisí s tím, že už se žáci v předchozích úlohách setkali s dosazováním záporného čísla za proměnnou se záporným koeficientem. Pouze jeden žák měl problémy se samotnou substitucí do výrazu – b. Žádná jiná chyba se ve větší míře nevyskytla, ovšem úspěšnost byla hodně ovlivněna zkušeností, kterou žáci získali v předchozích úlohách.

Úloha 7 – Tato úloha kopíruje úlohu M06-10 z TIMSS 2007 (25,0 %). Byly zadány dvě uspořádané dvojice a čtyři rovnice. Úkolem bylo najít rovnici, kterou splňují obě dvojice čísel [x, y]. V testech TIMSS všechny chybné odpovědi spočívaly ve výběru rovnice, které vyhovuje pouze jedna uspořádaná dvojice čísel. V testech se ale mohlo stát, že i když žáci označili správnou odpověď, mohli použít tuto chybnou strategii. Zkoumal jsem tedy především to, zda žáci budou pro každou rovnici ověřovat obě uspořádané dvojice. Všichni žáci ověřovali rovnice postupně. V testech TIMSS 2007 i v mém výzkumu byla správná rovnice až jako poslední. Kdyby tedy ověřovali pouze jednu uspořádanou dvojici, tak by jim chybná strategii pravděpodobně nevyšla. Úloha měla oproti TIMSS lepší úspěšnost (56,3%), což mohly opět ovlivnit předchozí úlohy, hlavně úloha 5. Devět žáků vyřešilo úlohu správně, ověřovali obě uspořádané dvojice. Šest žáků chybovalo. Tři žáci ověřovali pouze jednu uspořádanou dvojici. Dva žáci nad úlohou poměrně dlouho přemýšleli a poté řekli, že úlohu nechápou. V testu TIMSS by ji pravděpodobně přeskočili. Úlohu v TIMSS vynechalo 21 % žáků, zde 2 žáci z 15, což znamená 13,3 %. Dva žáci se v této úloze opět dopustili chyby při dosazování záporné hodnoty do proměnné se záporným koeficientem. V učebnicích se setkávají žáci s dosazením pouze jedné uspořádané dvojice čísel do dvou rovnic u zkoušky u soustav rovnic a u funkcí až v devátém ročníku.

Úloha 8 – Úloha navazuje na dvě úlohy TIMSS: M08-11A (30,7 %) a M08-11B (8,8 %). Úloha testovala, jak si žáci poradí se substitucí, kde je třeba dosadit za proměnnou algebraický výraz se dvěma proměnnými. První část úlohy ($2m + n$) vyřešilo správně 7 žáků (úspěšnost 53,8 %)[60], v druhé části úlohy ($2m - n$) byla úspěšnost (35,7 %) podstatně horší. Žáci zde měli problém především s dosazením do proměnné se záporným koeficientem a s úpravou výrazů. Při dosazování se ukázalo jako výhodné použití závorek. V sérii učebnic od Coufalová a kol. a sérii od Odvárka a Kadlečka se tento druh substituce, kde je třeba dosadit za proměnou algebraický výraz s proměnnou, vyskytuje až v dosazovací metodě u soustav dvou rovnic v učebnicích pro devátý ročník. V sérii učebnic od Hermana a kol. se s touto substitucí setkávají už dříve v kapitole *Mocniny v geometrii* v učebnici pro sekundu. Substituce za zápornou proměnnou se vyskytuje ale až u dosazovací metody u soustav rovnic.

Úloha 9 – Úloha navazuje na úlohu M08-08 v TIMSS 2007 (úspěšnost 36,2 %). V úloze mají žáci přijít na to, které z nabízených rovnic má jako řešení danou dvojici přirozených čísel. Úloha byla ale ovlivněna předchozími úlohami, které jsme s žáky postupně procházeli. V úloze se nevyskytl žádný podstatný problém a všichni žáci až na jednu žákyni vyřešili úlohu správně.

[60] Dva žáci se k úloze nedostali.

4 Závěr

Hlavním cílem mé práce bylo identifikovat problémy a chyby žáků druhého stupně základního vzdělání v úlohách vyžadující substituci a pokusit se najít jejich možné příčiny. Při hledání těchto příčin jsem využil analýzy tří řad učebnic z hlediska výskytu úloh na substituci a jejich charakteru.

Stručně lze shrnout závěry z provedených rozhovorů následovně.

Žáci nemají problém se samotnou substitucí při dosazování přirozených čísel za proměnnou v první mocnině. To však nelze říci o dosazování za proměnnou v druhé mocnině.

Žáci mají problémy především při dosazování záporné hodnoty, a to zejména při dosazování záporné hodnoty za proměnnou se záporným koeficientem. Problémy přibývají, pokud je proměnná navíc v druhé mocnině. Největší problémy mají tedy žáci při dosazování záporné hodnoty do výrazu s proměnnou se záporným koeficientem (např. $x = -2$; do $-3x$). Je pravděpodobné, že žáci vidí za výrazem $-3x$ záporné číslo, což potvrzují výsledky rozhovorů nad úlohou 4 v oddíle 2.5 i výzkum (Christou, Vosniadou, 2012). Tabulka 13 ukazuje, s jakým typem substituce měli žáci problémy (označeny červeně).

Tabulka 15: Problémy se substitucí

Dosazovaná hodnota	Výraz, do kterého se dosazuje		
1; 3 ; 5	$2x$	$-2x$	$2x^2$
− 1; − 3; − 5	$2x$	$-2x$	$-2x^2$

Pozn.: V úlohách TIMSS se jednalo o dosazování pouze celých čísel, v mém výzkumu jsem vycházel z úloh TIMSS, proto je také zaměřený jenom na celá čísla. Myslím, že úspěšnost v substituci při dosazování záporných zlomků a desetinných čísel by byla ještě nižší než u záporných celých čísel.

Největší problémy měli žáci s dosazováním záporné hodnoty do $-2x^2$, dále záporné hodnoty do $-2x$ a pak kladné hodnoty do → $2x^2$. To přesně odpovídá tomu, jak se jednotlivé druhy substituce vyskytují v analyzovaných učebnicích (především u řad učebnic od Coufalové a kol. a od Odvárka a Kadlečka). V kapitole určené celým číslům se druh substituce, kde je třeba dosadit záporné číslo za proměnnou se záporným koeficientem, vůbec nevyskytuje.

U substituce algebraického výrazu složeného z proměnné a čísla do výrazu s proměnnou jsem zjistil, že žáci mají opět problém především s dosazením do proměnné se záporným koeficientem. Zde žákům hodně pomohlo použití závorek. V sérii učebnic od Coufalové a kol. a sérii od Odvárka a Kadlečka se tento druh substituce vyskytuje až v učebnicích pro devátý ročník při dosazovací metodě u soustav rovnic. Doporučil bych jeho zařazení už dříve, jako je tomu v sérii učebnic od Hermana a kol., kde tuto substituci vhodně zařadili v kapitole *Mocniny v geometrii* v učebnici určené pro sekundu.

Značné problémy měli žáci se substitucí čísla za jednoduchý algebraický výraz složený ze dvou proměnných. S tímto typem substituce jsem se v učebnicích vůbec nesetkal. Některým žákům se podařilo situaci vyřešit tak, že si jednu hodnotu určili a druhou dopočítali (viz oddíl 2.5). Pro žáky to byla zcela nová problematika. Myslím, že je škoda, že se podobné úlohy, jako je testová úloha 3, v učebnicích nevyskytují. Určitě by to zlepšilo úspěšnost žáků v TIMSS a porozumění samotné substituci.

V rozhovorech se ukázalo, že úspěšnost žáků neovlivňuje jen samotná substituce. Žáci si někdy správně dosadili, správně použili i závorky, ale pak měli problémy při úpravě výrazů s celými čísly. Jako překážka se také jeví neznalost konceptu uspořádané dvojice čísel.

Konečně zmíním i fakt, že v rozhovorech se ukázalo, že žáci někdy nevidí rovnost mezi původním a upraveným výrazem. Tento problém a problém se substitucí by podle mého názoru mohlo zmírnit zařazení takových úloh do učebnic, v nichž si mají žáci ověřit dosazením hodnot za proměnnou, zda výraz zjednodušili správně. V těchto úlohách by mělo být zadáno, aby to žáci ověřovali i pro záporná čísla.

Chtěl bych zde také zmínit, že výzkumu TIMSS se účastní žáci osmého ročníku. Nesetkali se tedy s učebnicemi určenými pro devátý ročník, kde především v kapitolách soustavy rovnic a funkce dochází k procvičení substituce. V některých řadách učebnic, zde Coufalová a kol. a Odvárko a Kadleček, se tak děje až u dosazovací metody u soustav rovnic. Kdyby se výzkumu TIMSS účastnili žáci devátého ročníku, troufám si tvrdit, že by dopadli lépe.

Na základě mých zjištění bych doporučil zaměřit se na dosazování záporných čísel za proměnnou se záporným koeficientem už v kapitole určené celým číslům. Při úpravě výrazů bych doporučil, aby si žáci v některých úlohách ověřovali platnost úprav dosazením hodnot do původního i upraveného výrazu, což by mohlo zlepšit i jejich představu o tom, že původní a upravený výraz se sobě rovnají. Měli by být také vedeni, aby si do výrazů dosazovali i záporná čísla, nejlépe pak i záporné zlomky a desetinná čísla. Dále je třeba do výuky zařadit úlohy podobné testové úloze 3, kde je třeba nahradit výraz $a + b$ číslem 5. Myslím, že by také bylo dobré, kdyby se žáci setkali se substitucí, kde mají nahradit proměnnou algebraickým výrazem složeným z proměnné a čísla (např. $2a - 3$) již dříve než v kapitole dosazovací metoda u soustav rovnic určené pro devátý ročník.

Seznam použité literatury

COUFALOVÁ, Jana a kol. (1998). *Matematika pro šestý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-588-7.

COUFALOVÁ, Jana a kol. (1999). *Matematika pro sedmý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-678-6.

COUFALOVÁ, Jana a kol. (2000). *Matematika pro devátý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-731-6.

COUFALOVÁ, Jana a kol. (2000). *Matematika pro osmý ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-722-7.

DEMBEY, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-15-year-olds. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 45-70.

HEJNÝ, Milan. (1990). *Teória vyučovania matematiky*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. ISBN 80-08-01344-3.

HERMAN, Jiří a kol. (1994). *Matematika: dělitelnost*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-85849-41-0.

HERMAN, Jiří a kol. (1995). *Matematika: hranoly*. 1. vyd. Ilustrace Lucie Václavíková. Praha: Prometheus. ISBN 80-85849-97-6.

HERMAN, Jiří a kol. (1995). *Matematika: racionální čísla, procenta*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-85849-49-6.

HERMAN, Jiří a kol. (1995). *Matematika: trojúhelníky a čtyřúhelníky*. 1. vyd. Ilustrace Lucie Václavíková. Praha: Prometheus. ISBN 80-85849-86-0.

HERMAN, Jiří a kol. (1995). *Matematika: výrazy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-013-3.

HERMAN, Jiří a kol. (1997). *Matematika: kruhy a válce*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-023-2.

HERMAN, Jiří a kol. (1997). *Matematika: rovnice a nerovnice*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-014-0.

HERMAN, Jiří a kol. (1997). *Matematika: úměrnosti*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-056-0.

HERMAN, Jiří a kol. (1997). *Matematika: úvodní opakování*. 2. přeprac. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-080-5.

HERMAN, Jiří a kol. (1997). *Matematika: Výrazy [2]*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-064-5.

HERMAN, Jiří a kol. (1998). *Matematika: kladná a záporná čísla*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-098-5.

HERMAN, Jiří a kol. (1999). *Matematika: rovnice a jejich soustavy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-137-6.

HERMAN, Jiří a kol. (2000). *Matematika: funkce*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-182-6.

HERMAN, Jiří a kol. (2000). *Matematika: podobnost a funkce úhlu*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-206-9.

HERMAN, Jiří a kol. (2001). *Matematika: jehlany a kužely*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-225-0.

CHRISTOU, Konstantinos P. a Stella VOSNIADOU. (2012). What Kinds of Numbers Do Students Assign to Literal Symbols? Aspects of the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematical Thinking and Learning*. **14**(1), 1-27. DOI: 10.1080/10986065.2012.625074. ISSN 1098-6065. Dostupné také z: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10986065.2012.625074

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (1999). *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-148-5.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (1999). *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-167-1.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (2000). *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-183-3.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (2004). *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-285-4.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (2004). *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-286-1.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-276-7.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (2011). *Matematika pro 7. ročník základní školy*. 3., přeprac. vyd. Ilustrace Martin Mašek. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-423-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (c1997). *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-144-2.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (c1999). *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-143-7.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (c2000). *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-282-1.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (c2000). *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-281-3.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (c2001). *Matematika pro 9. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-283-X.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. (c2002). *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 2. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-142-6.

RENDL, Miroslav a Naďa VONDROVÁ. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, 2014, *24*(1), 22–57.

TOMÁŠEK, Vladislav. (2008). *Výzkum TIMSS 2007: obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?*. 1. vyd. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání. ISBN 978-80-211-0565-2.

TOMÁŠEK, Vladislav. (2009). *Výzkum TIMSS 2007*. 1. vyd. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání. ISBN 978-80-211-0591-1.

ŽALSKÁ, Jana. (2015). Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. VONDROVÁ, Naďa, RENDL, Miroslav a kol. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Vydání první. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 319-400. ISBN 978-80-246-3234-6.

Příloha A – Zadání úloh hlavní studie

Substituce

1. Nechť $x = 2$. Kolik je $3x + 5 + 2x^2$?

2. Zjednoduš výrazy:
   a) $2x + 3 - 3x =$

   b) $-x + 2 - x^2 + 1 =$

   Najděte číselnou hodnotu výrazů pro $x = -5$.

   a)

   b)

3. Nechť $a + b = 5$. Kolik je

   a) $2a + 2b + 4$?

   b) $a^2 + 2ab + b^2$?

4. Ověř nerovnost dosazením.
   a) $a > -a - 4$

   b) $d + 1 > \frac{1}{d}\ (d \neq 0)$

5. Je dána rovnice $7y - 3x = 0$. Které dvojice čísel $[x, y]$ jsou řešením rovnice?

   [3, 7]

   [0, 1]

   [14, 6]

   [1, 0]

   [7, 3]

6. Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

7. [0, - 1], [1, 3]. Kterou z rovnic splňují OBĚ dvojice čísel $[x, y]$?

   $x + y = -1$

   $2x + y = 5$

   $3x - y = 0$

   $4x - y = 1$

8. $m = 1 + x$, $n = 2 - x$. Kolik je
   a) $2m + n$?

   b) $2m - n$?

9. Která rovnice má řešení $x = 3$, $y = 5$?

   $5x + 3y = 15$

   $3x - 5y = 0$

   $5x - 3y = 0$

   $3x + 5y = 8$

Příloha B – Přepis rozhovoru nad řešením úlohy 6 (Šimon)

Úloha 5 – 09:51 – druhé video

Z178: (čte zadání, píše) „No to je řešením rovnice."

U179: „Ta první?"

Z180: „Hmmm tahle." (ukazuje)

U181: „Tak mi zase řekni, jak si postupoval."

Z182: „No že jsem dosadil."

U183: „A jak?"

Z184: „No za y trojku a za x sedmičku, a pak se to násobí mezi sebou podstatě."

U185: „A proč si za to y dával trojku a za to x sedmičku?"

Z186: „Jo no jo ono je to zase obráceně. Tak tím pádem tohle." (kroužkuje)

U187: „Hmmm výborně. To první teda ne?"

Z188: „No."

U189: „A co ty ostatní tři?"

Z190: „Ty ostatní … ne."

U191: „Žádná jo?"

Z192: „Ne ještě tenhle. (ukazuje) Čtrnáctka a šestka."

U193: „Hmmm, zkus to tam jenom ještě dosadit. Jak to tam dosazuješ?"

Z194: (píše)

U195: „Můžu se podívat? Koukni se ještě jednou, jestli si to tam dosadil správně."

Z196: (přepisuje) „Mě zmátlo…" (ukazuje)

U197: „Hmmm.“

Z198: (píše) „čtyřicet dva… tohle to je taky čtyřicet dva.“

U199: „Hmmm takže?“

Z200: „Takže tyhle ty dvě jsou.“

U201: „A ty dvě nula jedna, jedna nula ty už si zkoušel?“

Z202: „… Ne ty jsem nezkoušel, ale podle mě by to nevyšlo.“

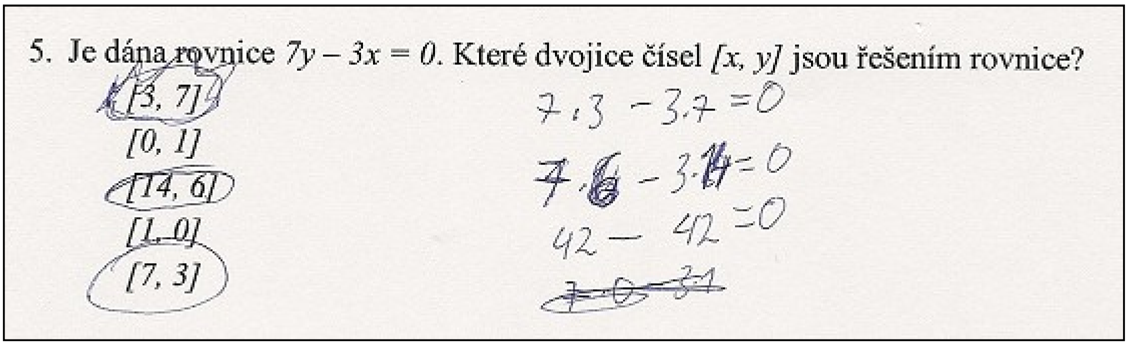
U203: „Proč?“

Z204: „Protože vlastně to by muselo být… kdybych si to vynásobil třeba tímhle. Sedm krát nula mínus tři krát. To nevyjde.“

U205: „Hmmm, takže jenom ty dvě?“

Z206: „No jenom ty dvě.“

U207: „Tak tu šestku zkus.“



5. Je dána rovnice *7y – 3x = 0*. Které dvojice čísel *[x, y]* jsou řešením rovnice?

[3, 7] $\quad 7 \cdot 3 - 3 \cdot 7 = 0$

[0, 1]

[14, 6] $\quad 7 \cdot 6 - 3 \cdot 14 = 0$

[1, 0] $\quad 42 - 42 = 0$

[7, 3] $\quad \cancel{7 \cdot 0 - 3 \cdot 1}$