

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lucia Truksová

Modely kreditních rizik v závislosti na strmosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika, Finanční matematika

2006

KNIHOVNA MFF UK



2565052574

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať Doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc za podnetné rady a pripomienky, ktorými ma usmerňoval pri písaní mojej bakalárskej práce.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 9.8.2006

Lucia Truksová



Obsah

1 Základné pojmy	5
1.1 Kreditné riziko.	5
1.2 Riziko nesplatenia.	5
1.3 Miera návratnosti.	5
1.4 Pravdepodobnosť nesplatenia.	8
1.5 Ratingový systém.	8
2 Modely kreditného rizika	10
2.1 Prvá generácia štrukturálnych modelov.	10
2.2 Druhá generácia štrukturálnych modelov.	18
2.3 Redukované modely.	20
3 Credit Value-at-Risk modely	22
3.1 KMV.	22
3.2 CreditMetrics.	23
3.3 CreditPortfolioView.	24
3.4 CreditRisk+.	24
4 Vzťah medzi pravdepodobnosťou nesplatenia a mierou návratnosti	26
Literatúra	29

Názov práce: *Modely kreditných rizík v závislosti na strmosti*

Autor: *Lucia Truksová*

Katedra: *Katedra pravdepodobnosti a matematickej statistiky*

Vedúci bakalárskej práce: *Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., KPMS*

e-mail vedúceho: *hurt@karlin.mff.cuni.cz*

Abstrakt: *V predloženej práci študujeme tri hlavné prístupy v modelovaní kreditného rizika, ktorými sú štrukturálne, redukované modely a Value-at-Risk modely. Budeme zakladať na práci Mertona (1974). V štrukturálnych modeloch kreditného rizika je udalosť nesplatenia riadená kapitálovou štruktúrou, keď hodnota aktív dlžníka klesne pod hodnotu jeho finančnej obligácie. Miera návratnosti je endogénnou premennou a pravdepodobnosť nesplatenia je inverzne závislá na miere návratnosti. V redukovaných modeloch sa predpokladá exogénna miera návratnosti nezávislá na pravdepodobnosti nesplatenia. Podáme prehľad súčasných modelov kreditného rizika ako J. P. Morgan`s CreditMetrics, Credit Suisse CreditRisk+, KMV and CreditPortfolioView.*

Kľúčové slová: *kreditné riziko, miera návratnosti, pravdepodobnosť nesplatenia*

Title: *Models of Credit Risk and Recovery Rate*

Author: *Lucia Truksová*

Department: *Institute of Probability and Mathematical Statistics*

Supervisor: *Doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., KPMS*

Supervisor`s e-mail adress: *hurt@karlin.mff.cuni.cz*

Abstract: *In the present work we study three main approaches in credit risk modeling: structural form, reduced form approaches and credit Value-at-Risk models. We will be basing up our study on Merton (1974). In a structural credit risk model, a default event is triggered by the capital structure when the value of the obligor falls below its financial obligation. The recovery rate is therefore an endogenous variable and probability of default is inversely related to recovery rate. In the reduced form model we assume an exogenous recovery rate that is independent of the probability of default. We will give a review of current credit risk models like J. P. Morgan`s CreditMetrics, Credit Suisse CreditRisk+, KMV and CreditPortfolioView.*

Keywords: *credit risk, recovery rate, probability of default*

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Kreditné riziko

Riziko vyjadruje neistotu spojenú s očakávanými výnosmi. Kreditné riziko spôsobuje, že emitent dlhopisu nemusí byť schopný splatiť svoj dlh a úroky. Vyjadruje dôveryhodnosť, spoľahlivosť, schopnosť emitentov cenných papierov dostať svojich záväzkov. Merítkom kreditného rizika je najčastejšie hodnotenie špecializovaných agentúr, ktoré každej spoločnosti pridelujú konkrétny rating.

Dnešné finančné trhy sú na sebe navzájom závislé, to znamená, že kríza na ázijskom trhu ovplyvňuje aj trh európsky a americký. Bazilejská komisia odporúča bankám používať sofistikovanejšie techniky merania kreditného rizika. Hlavným dôvodom je vytvoriť bezpečnejší svet, predchádzať finančným krízam a kolapsom spoločností. K tomu sa používajú rozvinuté modely kreditného rizika.

1.2 Riziko nesplatenia

Riziko nesplatenia predstavuje nesplatenie záväzkov voči veriteľom v plnej výške v presne určený čas v dôsledku platobnej neschopnosti emitenta. Firma vyhlasuje bankrot pri pretrvávajúcom stave neschopnosti splácať dlh a z hodnoty aktív insolventnej spoločnosti môžu byť aspoň čiastočne uspokojené pohľadávky veriteľa. Dochádza k finančným stratám, ktoré môžu činiť až 100 % pôvodnej investície. Pravdepodobnosť udalosti nesplatenia však v skutočnosti nenabúda vysokých hodnôt, pričom pravdepodobnosť nesplatenia priemernej firmy je okolo 2% ročne. Rôzne firmy a ich jednotlivé dlhopisy majú odlišné pravdepodobnosti nesplatenia.

1.3 Miera návratnosti

Výška, ktorú držiteľ dlhopisu získa späť v prípade úpadku firmy, se nazýva miera návratnosti. Je vyjadrená ako percentuálny podiel z ceny pôžičky. Miera návratnosti sa zpravidla meria jeden mesiac od výskytu nesplatenia podľa ceny dlhopisu (Moody's). Vypočítava sa na základe historického výskytu nesplatení a výšky straty. Je podmienená výškou seniority (nadradenosti) a zabezpečenia dlhopisu, typu udalosti nesplatenia a rozdielnosťou vo firemných, priemyselných a makroekonomických špecifikách.

Dlhopis je nadradený, keď v prípade neschopnosti firmy splatiť svoje záväzky je splatený skôr než budú vyplatené splátky iným veriteľom. V prípade likvidácie má držiteľ nadradeného dlhopisu prednosť. Čím zabezpečenejší dlhopis je, tým vyššiu prioritu má v prípade neschopnosti splácania záväzkov firmy.

Podľa smerníc Bazilejskej kapitálovej dohody sú jednotlivé banky povinné vypočítavať kapitálové požiadavky ku kreditnému riziku, vypočítavať ich rizikový kapitál na základe jedného z dvoch prístupov. Prvým je štandardný postup založený na kapitálovej dohode Bazilejského výboru pre bankovný dohľad z roku 1988 a druhým je možnosť rozvíjania vnútorných ratingov.

Ako uvádza Schuerman [8] sú základnými parametrami vnútorného ratingu nevyhnutnými pre odhadovanie kreditného rizika: pravdepodobnosť nesplatenia (PD-pravdepodobnosť zlyhania dlžníka počas horizontu jedného roku), strata pri udalosti nesplatenia, ktorú predstavuje tzv. LGD (Loss Given Default), vypočítaný ako 1 mínus miera návratnosti a EAD (Exposure at default), čo je čiastka vyplatená v prípade nesplatenia. Očakávaná strata (EL) je potom daná ako pravdepodobnosť nesplatenia vynásobená stratou pri udalosti nesplatenia.

$$EL=PD \times LGD \times EAD . \quad (1)$$

Neočakávaná strata (UL) závisí takisto na pravdepodobnosti nesplatenia a veľkosti straty, ale určuje volatility očakávanej straty.

$$UL=LGD \times \sqrt{PD(1-PD)} . \quad (2)$$

Ohodnotenie spoločnosti, keď je zdravá je vyššie, než keď je v kríze pričom ohodnotenie firemných pohľadávok v kríze závisí na tom, kde v kapitálovej štruktúre firmy sa daná pohľadávka nachádza, ako stará alebo mladá je (senior, junior).

Podľa spôsobu zabezpečenia delíme dlhopisy na zabezpečené a nezbezpečené. Ak je dlhopis zabezpečený znamená to, že je krytý konkrétnym, alebo celým majetkom,

s ktorým môže spoločnosť disponovať až do termínu splatnosti. V prípade platobnej neschopnosti je tento majetok rozpredaný a z jeho výnosov sa vyplácajú dlhopisy. Nezabezpečené dlhopisy nie sú kryté žiadnymi aktívami, úverový veriteľ sleduje schopnosť firmy vytvárať zisk. Hlavným zdrojom krytia je povest' firmy. V prípade likvidácie akciových spoločností sa ich majitelia vyrovnajú až po vyrovaní držiteľov zabezpečených dlhopisov, ale pred držiteľmi prioritných akcií. Najstaršie zabezpečené dlhopisy sú najzabezpečenejšie, majú vyššiu prioritu v prípade nesplatenia.

Podriadené cenné papiere sú zabezpečené najmenej. Držiteľom nadradených zabezpečených dlhopisov je obligácia vyplatené ako prvá, pričom držiteľia menej zabezpečených podradených dlhopisov musia čakať, kým budú uspokojení držiteľia zabezpečenejších dlhopisov.

Tabuľky 1.1 a 1.2 ukazujú miery návratnosti nesplatených dlhopisov podľa agentúry Moody's v závislosti na triede seniority a miere zabezpečenia.

Tabuľka 1.1: Miera návratnosti nesplatených dlhopisov v Európe a USA v rokoch 1985-2001

	Európa	USA
Bankový úver	71,8%	66,8%
Nadradený zabezpečený dlhopis	55,0%	56,9%
Nadradený nezabezpečený dlhopis	20,8%	50,1%
Podradený zabezpečený dlhopis	24,0%	32,9%
Podradený nezabezpečený dlhopis	13,0%	31,3%
Všetky dlhopisy	22,0%	42,8%

Tabuľka 1.2: Miera návratnosti podľa triedy seniority (Moody's, 1970-2003)

Seniorita	Priemer	Štand. odchylka	25%	50%	75%	N
Nadradený zabezpečený dlhopis	54,26	25,82	33,0	53,5	75,0	433
Nadradený nezabezpečený dlhopis	38,71	27,80	14,5	30,75	63,0	971
Podradený zabezpečený dlhopis	28,51	23,41	10,0	23,0	42,25	260
Podradený nezabezpečený dlhopis	34,65	22,23	19,5	30,29	45,25	347

1.4 Pravdepodobnosť nesplatenia

K priradeniu pravdepodobnosti nesplatenia každej firme existujú dva hlavné prístupy. Prvé hľadisko odhaduje pravdepodobnosť nesplatenia z tržných dát. Najznámejším je koncept firmy KMV, v ktorom sa vypočítava z hodnoty aktív a bodu nesplatenia tzv. EDF (Expected Default Frequencies). Druhý spôsob odhadu pravdepodobnosti nesplatenia je spojený s tzv. ratingom.

Dôležitými aspektami, ktorými je pravdepodobnosť nesplatenia určovaná sú:

- Zaťaženosť dlhmi (Leverage), dlhodobé a krátkodobé záväzky
- Likvidita firemných aktív
- Situácia na trhu, v priemysle
- Budúce zisky

Miera nesplatenia určitých firiem je odhadovaná podľa priemerných mier nesplatenia podobných spoločností na základe historických pozorovaní. Nesplatenie je tým pravdepodobnejšie, čím dlhšia je splatnosť dlhu. Pre investora je dôležité poznať pravdepodobnosť zlyhania protistrany. Spoločnosti s nižším ratingom než iné musia ponúknuť investorovi vyšší výnos z dlhopisu. Na rozvinutých finančných trhoch sa často porovnáva výnos z dlhopisu s výnosom z bezrizikového vládneho dlhopisu. Tento rozdiel je tiež často označovaný ako credit spread. Dlhopis spoločnosti s vysokým spreadom je považovaný za rizikový.

1.5 Ratingový systém

Nezávislé agentúry hodnotia dôveryhodnosť a schopnosť spoločností, bánk, krajín (emitenta dlhopisu) splácať záväzky. Vyjadrujú nezávislý názor na finančnú stabilitu a silu dlžníka.

Hlavnou úlohou ratingových agentúr je poskytovať účastníkom transakcií na finančnom a kapitálovom trhu rôzne druhy finančných, nefinančných analýz a kategorizácie rizík.

Medzi najznámejšie ratingové agentúry patria Standard & Poor's, Moody's a Fitch.

Tie zaraďujú emitentov do určitých skupín podľa štandardizovaných systémov.

Jednotlivé ratingy sa v priebehu času menia, keď dochádza k zvýšeniu hodnotenia ide o tzv. upgrading a naopak pri znížení hodnotenia dochádza k tzv. downgradingu.

V druhom prípade nastáva vyššie riziko nesplatenia, stúpa miera nesplatenia a pravdepodobnosť nesplatenia a tým dlhopis stráca na cene.

Ratingové agentúry vyjadrujú u každého ohodnotenia aj pravdepodobnosť, že sa jednotlivé ratingy v priebehu jedného roka zmenia. Ratingové agentúry sa pri ohodnocovaní sústredia najmä na finančné ukazatele jednotlivých emitentov. Firmy sú kategorizované medzi spoločnosti na investičnom stupni a špekulatívnom stupni. Spoločnosti v oblasti špekulatívneho stupňa sú riskantnejšie ako na stupni investičnom, pravdepodobnosť nesplatenia stúpa a naopak klesá miera návratnosti.

Tabuľka 1.3: Ratingové symboly a kategórie vybraných ratingových agentúr (investovanie.poradenstvo.com)

Charakteristika	Standard and Poor's	Moody's	FITCH
Investičný stupeň			
Dlžník najvyššej kvality - extrémne silná schopnosť plniť finančné záväzky	AAA	Aaa	AAA
Silná schopnosť plniť finančné záväzky - malý rozdiel v porovnaní s AAA	AA+ AA AA-	Aa1 Aa2 Aa3	AA+ AA AA-
Silná schopnosť plniť finančné záväzky - môže však byť ovplyvnená konjuktálnym cyklom a okolím	A+ A A-	A1 A2 A3	A+ A A-
Dostatočná schopnosť plniť finančné záväzky konjunktúra a okolie ju však môžu značne ovplyvniť	BBB+ BBB BBB-	Bbb1 Bbb2 Bbb3	BBB+ BBB BBB-
Špekulatívny stupeň			
Táto kategória má špekulatívne elementy - schopnosť plniť záväzky je zaistená len keď je konjunkturálne okolie stabilné	BB+ BB BB- B+ B B-	Ba1 Ba2 Ba3 B1 B2 B3	BB+ BB BB- B+ B B-
Existuje akútne nebezpečenstvo, že dlžník bude plniť záväzky len s námahou	CCC+ CCC CCC-	Caa1 Caa2 Caa3	CCC+ CCC CCC-
Obligácie s vysokým stupňom špekulatívnosti	CC	CC	CC
Veľmi malá pravdepodobnosť včasného a úplného plnenia	C	C	C

Kapitola 2

Modely kreditného rizika

Existujú dva hlavné typy modelov kreditného rizika. Tými prvými sú *štrukturálne modely*, ktoré sa pokúšajú určiť čas nesplatenia pomocou štrukturálnych premenných firmy ako sú hodnota firemných aktív a pasív. Vytvárajú explicitné predpoklady o dynamike firemných premenných a situácii, ktorá je spúšťačom udalosti nesplatenia.

2.1 Prvá generácia štrukturálnych modelov

Základom pre prvú generáciu štrukturálnych modelov bola práca Mertona (1974), ktorý svoj model zakladá na tradičnej analýze účetných informácií spoločnosti.

Vyhodnotenie priemyselnej atmosféry, investičných plánov, rozvažných dát a dovedností manažmentu slúži ako primárny vstup pre stanovenie pravdepodobnosti prežitia spoločnosti počas určitého časového horizontu alebo počas doby trvania nezplateného záväzku. Je však známe, že finančná analýza môže prezentovať nesprávny obraz o pravdivej finančnej kondícii firmy a budúcej prosperite, pretože účtové princípy sú prevažne orientované spätne a informácie potrebné k predpovedaniu budúcej dynamiky firemnej hodnoty sú obsiahnuté v minulom vývoji.

Teória Mertona nadväzuje na teóriu oceňovania opcií podľa Blacka a Sholesa (1973). Týmto modelom sa zaoberá Altman, Brady, Resti a Stironi [2]. Predpokladom tohto modelu je dokonalý trh, to znamená, že neexistujú žiadne tranzakčné náklady ani dane, požičiavanie si a vypožičiavanie sa deje za danej rovnakej úrokovej miery. Prístup k predávaniu akcií je nelimitovaný a nedochádza k žiadnej nedeliteľnosti aktív. V tomto modeli nastáva čas neschopnosti splatenia dlhu, ak hodnota firemných aktív klesne pod hodnotu pasív a všetky dôležité súčasti kreditného rizika ako nesplatenie a miera návratnosti v prípade neschopnosti splatenia dlhu sú funkciou štrukturálnych charakteristík firmy. Kapitálová štruktúra firmy je zložená z hodnoty vlastného

majetku firmy a obligácie s nulovým kupónom a maturitou v čase t . Keďže dlhopis nemá splátky kupónu tak spoločnosť nemôže zlyhať pred jeho maturitou. Miera návratnosti je v tomto prípade endogénnou premennou, splatenie dlhu je funkciou zbytkovej hodnoty aktív firmy, ktorá nie je schopná splatiť svoje záväzky. Záväzky spoločnosti predstavujú potencionálny nárok investora na ich aktíva.

Pravdepodobnosť nesplatenia a očakávaná miera návratnosti sú závislé inverzne. Ak hodnota firmy vzrastá, tak klesá pravdepodobnosť nesplatenia a zároveň rastie výška miery návratnosti. V tomto modeli sa predpokladá, že záväzky pozostávajú jedine z jedného dlhu (obligácia s nulovým kupónom a nominálnou hodnotou X) a úroková miera je konštantná. Hodnota vlastného imania firmy je modelovaná ako call opcia (zmluvný kontrakt, ktorý dáva právo kúpiť dlhopis) na firemné aktíva s nominálnou hodnotou ako realizačnou cenou opcie a splatnosťou dlhu ako dobou do splatnosti opcie. Podobne hodnota dlhu môže byť modelovaná ako put opcia. Takže firemný vlastný majetok má podobu európskej call opcie (môže byť uplatnená jedine v deň splatnosti opce) na aktíva firmy vlastnené akcionármi so splatnosťou t a realizačnou cenou na burze opcií X a preto hodnota firemného dlhu je daná ako hodnota aktív mínus hodnota majetku.

Zisk kupca opcie call opce (strata predajcu call opcie) je definovaný ako

$$Z = \max(0, V_A - X) - c, \quad (3)$$

pričom c je cena call opce.

Zisk kupca put opce (strata predajcu put opcie) je daný.

$$Z = \max(0, X - V_A) - p, \quad (4)$$

kde p predstavuje cenu put opcie.

Tabulka 2.1: Splatenie dlhu v čase jeho splatnosti

	Aktíva	Dlhopis	Majetok
Zlyhanie	$V_A \geq X$	X	$V_A - X$
Nie zlyhanie	$V_A < X$	V_A	0

V Mertonovom modeli je podľa Almana, Bradyho, Restiho a Sironiho[1] majetková hodnota firmy daná Brownovým pohybom. Vo vzťahu

$$dV_A = \mu V_A dt + \sigma_A V_A dz, \quad (5)$$

kde μ predstavuje okamžitú mieru výnosu firmy za jednotku času a σ_A je miera volatility (okamžitá štandardná odchyľka výnosu firmy za jednotku času), z je Wienerov proces.

V práci Blacka a Sholesa je hodnota majetku teda daná

$$E_T = \max(0, V_T - X). \quad (6)$$

Je to výplatná funkcia investorov, kde V predstavuje hodnotu aktív firmy a X hodnotu dlhu. Podľa Itôovho lemma je stochastická diferenciálna rovnica definujúca rozdelenie E explicitne daná ako

$$dE = \mu_E E dt + \sigma_E E dz_E, \quad (7)$$

kde σ_E , μ_E a dz_E sú známe funkcie V_A , t , σ_A , μ a dz . Ak by sme poznali hodnoty σ_A , μ a V_A bolo by možné priamo vypočítať pravdepodobnosť nesplatenia.

Z rozdelenia náhodného procesu V_A vyplýva, že

$$\log V'_A = \log V_A + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A \sqrt{t} \varepsilon \quad (8)$$

predstavuje logaritmus hodnoty aktív v danom čase maturity t daný normálnym

rozdelením s priemerom $E(\log V'_A) = \log V_A + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t$ a rozptylom

$Var(\log V'_A) = \sigma_A^2 t$. Postupne bude hodnota aktív v čase t riadená logonormálnym

rozdelením s priemerom $E(V'_A) = V_A e^{\mu t}$ a rozptylom $Var(V'_A) = V_A^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma_A^2 t} - 1)$.

Udalosť nesplatenia nastáva len v čase splatnosti t , keď hodnota akív V'_A , nedosiahne výšku dlhu X_t a pravdepodobnosť nesplatenia firmy PD sa rovná:

$$\begin{aligned}
 PD &= p[V'_A < X_t] = p[\log V'_A < \log X_t] = p\left[\log V'_A + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_A \sqrt{t} \varepsilon < \log X_t\right] = \\
 &= p\left[\frac{\log \frac{V'_A}{X_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}} < -\varepsilon\right] = \phi\left(-\frac{\log \frac{V'_A}{X_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}}\right) = \phi(-d_2), \quad (9)
 \end{aligned}$$

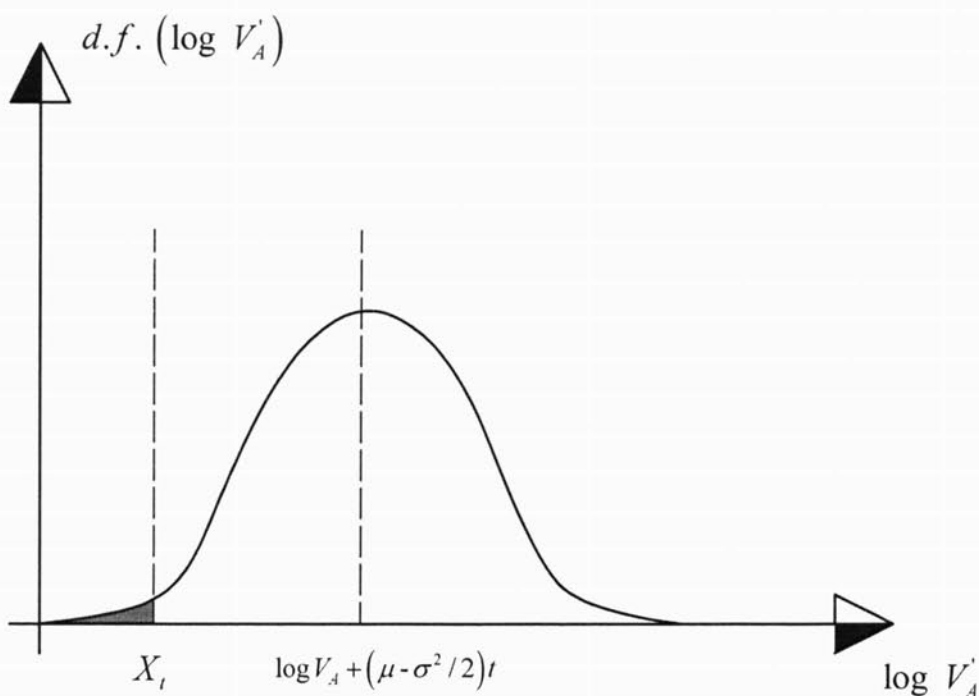
kde $d_2 = \frac{\log \frac{V'_A}{X_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}}$ sa nazýva vzdialenosť od nesplatenia (aplikácia Black-Scholes opčného hodnotenia, kde d_2 ukazuje o koľko štandardných odchylok je vzdialená očakávaná hodnota $\ln(V)$ od bodu nesplatenia $\ln(X)$). Čím menšia je vzdialenosť do bodu nesplatenia, tým väčšia je pravdepodobnosť udalosti nesplatenia. Platí rovnosť

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}, \quad (10)$$

kde $d_1 = \frac{\log \frac{V'_A}{X_t} + \left(\mu + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}}$. (11)

V grafe 2.1 je graficky naznačené normálne rozdelenie $\log V'_A$ s pravdepodobnosťou nesplatenia PD v šedej zóne.

Graf 2.1: Normálne rozdelenie pre $\log V'_A$



Pri výskyte nesplatenia je miera návratnosti daná percentom V'_A / X_t . Očakávaná miera návratnosti je $E(V'_A / X_t)$, takže $E(V'_A) / X_t$. Platí to však jedine pokiaľ $V'_A < X_t$.

Očakávaná miera návratnosti RR, je definovaná ako:

$$E\left(\frac{V'_A}{X_t} \mid V'_A < X_t\right) = \frac{1}{X_t} E(V'_A \mid V'_A < X_t). \quad (12)$$

$$E(V'_A \mid V'_A < X_t) = e^{\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{2}} \frac{\phi\left(\frac{(\log X_t - \mu_0) - \sigma_0}{\sigma_0}\right)}{\phi\left(\frac{\log X_t - \mu_0}{\sigma_0}\right)}, \quad (13)$$

kde $\mu_0 = \log V'_A + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t$ je priemer a $\sigma_0^2 = \sigma_A^2 t$ je rozptyl $\log V'_A$.

$$E(V'_A | V'_A < X_t) = e^{\log V_A + \mu t} \frac{\phi\left(-\frac{\log \frac{V_A}{X_t} + \left(\mu + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}}\right)}{\phi\left(-\frac{\log \frac{V_A}{X_t} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t}{\sigma_A \sqrt{t}}\right)} = V_A e^{\mu t} \frac{\phi(-d_1)}{\phi(-d_2)} = E(V'_A) \frac{\phi(-d_1)}{\phi(-d_2)} \quad (14)$$

a očakávaná miera návratnosti RR sa ukazuje ako

$$RR = E\left(\frac{V'_A}{X_t} | V'_A < X_t\right) = \frac{V_A}{X_t} e^{\mu t} \frac{\phi(-d_1)}{\phi(-d_2)} = E\left(\frac{V'_A}{X_t}\right) \frac{\phi(-d_1)}{\phi(-d_2)}. \quad (15)$$

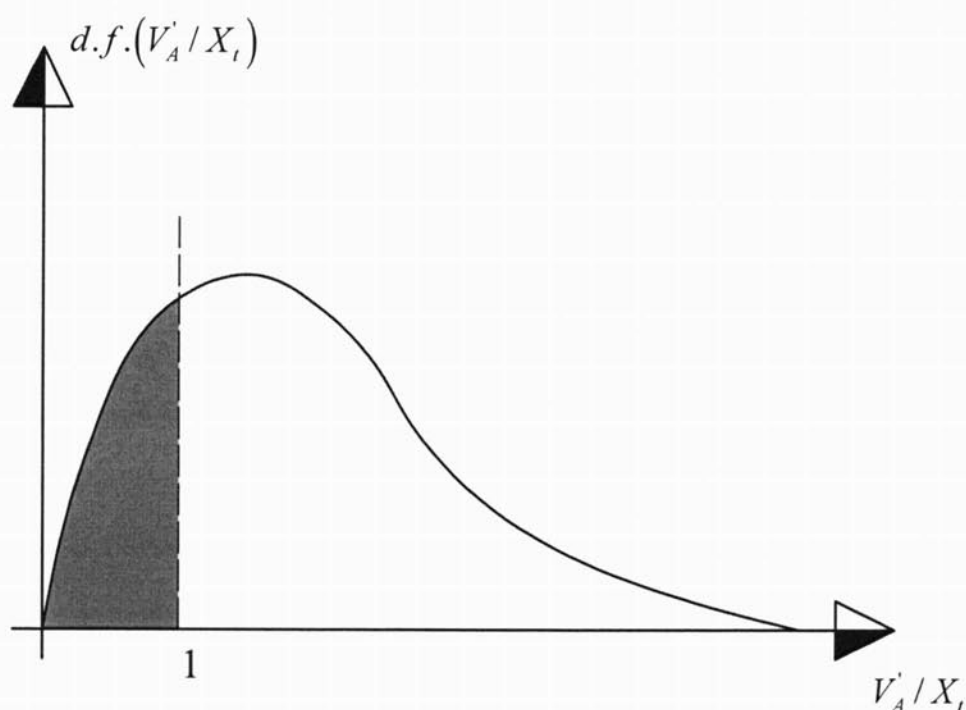
Očakávaná diskontovaná miera návratnosti $\frac{\phi(-d_1)}{\phi(-d_2)}$ nám dáva percento aktív ktoré

môže byť vyplatené držiteľovi dlhopisu v prípade udalosti zlyhania.

Očakávaný návrat daný nesplatením $V_A e^{\mu t} \frac{\phi(-d_1)}{\phi(-d_2)}$ nám dáva čiastku dlhu, ktorá bude

splatená držiteľovi dlhopisu v prípade udalosti zlyhania.

Graf 2.2 ukazuje logonormálne rozdelenie V'_A/X_t , kde očakávaná miera návratnosti RR je priemer hodnôt v šedej časti grafu tj. hodnôt menších než 1.



Ako uvádza Wehrspohn [9], môže byť zvyčajne v analýze potencionálneho nároku hodnota majetku vypočítaná z nasledujúcej parciálnej diferenciálnej rovnice:

$$dF = \left(\frac{\partial X}{\partial V} rV + \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X}{\partial V^2} \sigma_A^2 V^2 \right) dt + \frac{\partial X}{\partial V} \sigma_A V dz \quad (16)$$

kde t značí čas, r bezrizikovú úrokovú mieru a σ_A volatilitu hodnoty firemných aktív a hodnota firemného majetku je funkciou času a hodnoty aktív, teda platí $E = F(V, t)$.

Táto rovnica je riešená za pomoci Black- Sholesovej formule, kde môžeme zistiť hodnotu (cenu) vlastného majetku ako call opciu C :

$$E_0 = C(\sigma, t, X, r, V_0) = V_0 \phi(d_1) - e^{-rT} X \phi(d_2). \quad (17)$$

Podľa Itôovho lemma platí rovnosť

$$\sigma_0^E E_0 = V_0 \phi(d_1) \sigma. \quad (18)$$

Z historických dát cien majetku vypočítame σ_E nasledujúcim spôsobom:

Volatilita je meraná ako štandardná odchylka výnosov stanovená vlastným majetkom/aktívami v jednom roku, keď výnos je vyjadrený užitím spojitého úročenia.

Podľa Bilsel, Gülççek [4] použitím logonormálneho vlasníctva akcií/hodnoty vlastného imania, volatilita je vypočítaná nasledujúcim postupom.

Určíme $S(t)/S(t-1)$, kde $S(t)$ je hodnota majetku v čase t , a ďalej oznčíme $u(t)=\ln(S(t)/S(t-1))$, nájdením štandardnej odchylky $u(t)$ nájdeme volatilitu σ_E .

Vyriešením rovníc

$$E_0 = V_0\phi(d_1) - e^{-rT} X\phi(d_2), \quad (19)$$

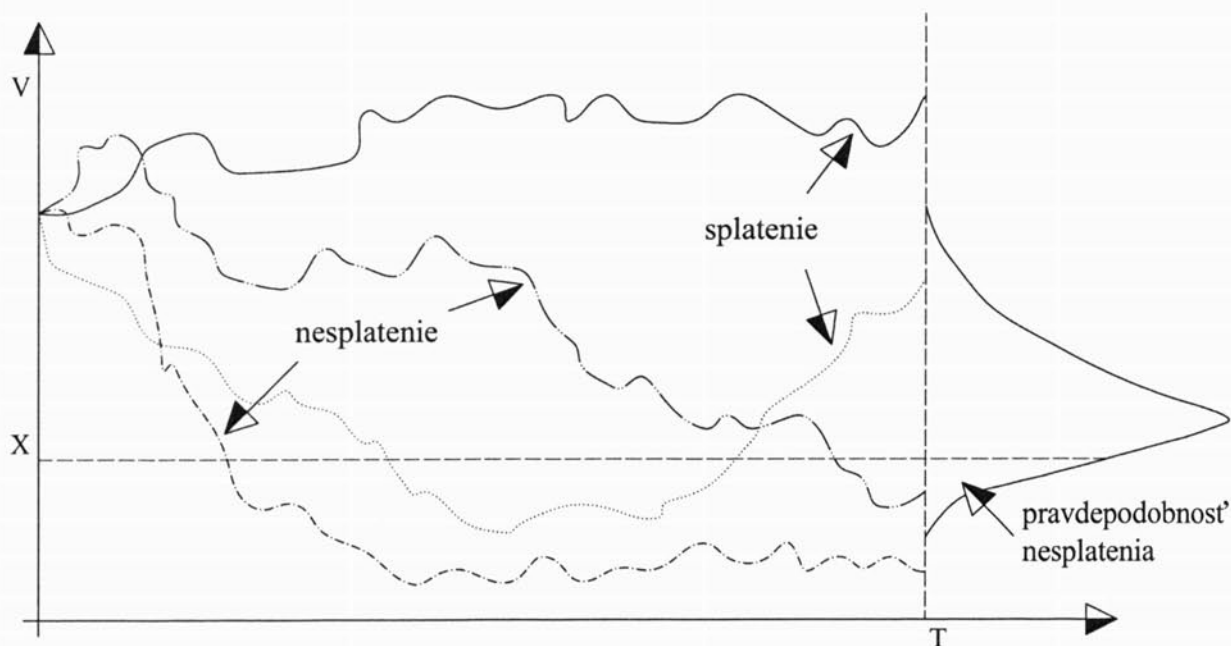
$$\sigma_E = \sigma_A \frac{V_A}{E} \phi(d_1) \quad (20)$$

dostávame hodnoty V_A a σ_A .

V praxi však Mertonov model nie je vždy úspešný vzhľadom na to, že počíta s nereálnymi predpokladmi. Firemné aktíva väčšinou nie sú ani pozorovateľné ani obchodovateľné.

Graf 2.3 popisuje graficky situáciu firmy v prvom štruktúrálnom modeli kreditného rizika, kde V reprezentuje trhovú hodnotu firmy, danú očakávanými diskontovanými budúcimi peňažnými tokmi, ktorá je financovaná majetkom a nulovým kupónom s nominálnou hodnotou X a maturitou v čase T .

Graf 2.3: Nesplatenie firmy v Mertonovom prístupe



2.2 Druhá generácia štruktúrálnych modelov

Druhá generácia štruktúrálnych modelov je reprezentovaná prácou Blacka a Coxa (1976), ktorí prepracovali Mertonov model. Narozdiel od prvej generácie štruktúrálnych modelov, kde je predpoklad, že nesplatenie sa môže vyskytnúť len v čase splatnosti dlhu, keď firemné aktíva nie sú schopné naďalej pokryť dlh, sa v druhej generácii štruktúrálnych modelov predpokladá, že nesplatenie sa môže objaviť kedykoľvek v dobe od emisie obligácie až do doby jej splatnosti, ak hodnota firemných aktív klesne pod prahovú hodnotu. V tomto prípade je miera návratnosti fixným percentom z nesplatenej hodnoty dlhu a daná exogénne a je nezávislá na hodnote firemných aktív a od pravdepodobnosti nesplatenia.

Ako uvádza Benito, Glaven a Jacko [3] je v štruktúrálnom modeli nesplatenie plne predpovedateľné, pretože je modelované pomocou ekonomickej teórie a cez reálny stav firmy. Ak vezmeme konštantný prah nesplatenia $K > 0$, a $V_t > K$,

(hodnota firemných aktív v čase t je vyššia než prahová hodnota K), sme v čase $t \geq 0$ a udalosť nesplatenia ešte nenastala tak nesplatenie nastane v čase τ (spojitá nahodná premená v intervale $(0, \infty)$) ktorý je daný:

$$\tau = \inf \{s \geq t | V_s \leq K\}. \quad (21)$$

A môžeme odvodiť pravdepodobnosť nesplatenia z času t do času T :

$$P[\tau \leq T | \tau > t] = N(h_1) + \exp \left\{ 2 \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) \ln \left(\frac{K}{V_t} \right) \frac{1}{\sigma_V^2} \right\} N(h_2) \quad (22)$$

kde

$$h_1 = \frac{\ln \left(\frac{K}{e^{r(T-t)} V_t} \right) + \frac{\sigma_V^2}{2} (T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}, \quad (23)$$

$$h_2 = h_1 - \sigma_V \sqrt{T-t}. \quad (24)$$

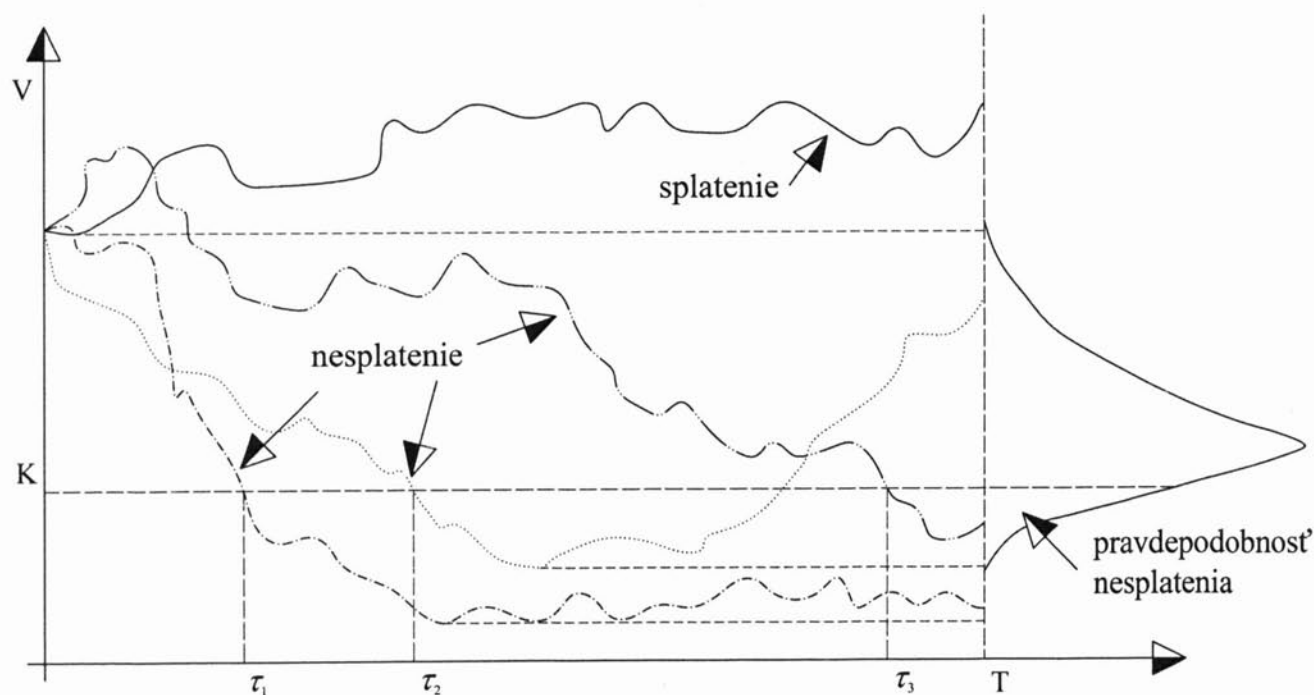
V tomto modeli sa odhadujú parametre hodnôt firemných aktív, ktoré nie sú pozorovateľné a nie je možné do výpočtov začleňovať zmeny v kreditných ratingoch, ktorých výskyty sú značne frekventované u rizikových dlhopisov.

Model predpokladá hodnotu firmy spojitú v čase a jeho výsledkom je, že čas nesplatenia je predpovedateľný predtým než k nemu dôjde a tým nedochádza k žiadnemu náhlemu momentu prekvapenia.

Napriek niektorým výhodám, ktoré má model druhej generácie štrukturálnych modelov oproti Mertonovmu modelu má však aj tento model niekoľko nevýhod, ktoré sú hlavnou príčinou slabých empirických implikácií. Hoci sú tieto modely reálnejšie, tým že sú rozšírené o niektoré predpoklady ako existenciu daní, nákladov, stochastických úrokových mier, bankrotu, skokoch v hodnotách aktív, zvýšila sa tým aj jeho analytická zložitosť.

V grafe 2.4 je graficky reprezentovaná situácia firmy modelovaná pomocou druhej generácie štrukturálnych modelov kreditného rizika. V tomto prípade V reprezentuje trhovú hodnotu firmy, danú očakávanými diskontovanými budúcimi peňažnými tokmi a K je konštantný prah nesplatenia.

Graf 2.4: Nesplatenie firmy v druhej generácii štrukturálnych modelov



2.3 Redukované modely

Redukované modely boli vytvorené Robertom Jarrowom a Stuartom Turnbullom (1992) a vznikli ako reakcia na nedostatky v štrukturálnych modeloch. Pracujú s dostupnými tržnými informáciami. V nich už nesplatenie nie je modelované pomocou reálneho stavu firmy a hodnoty jej aktív, ale sú zavádzané explicitné predpoklady na dynamiku pravdepodobnosti nesplatenia a miery návratnosti. Miera návratnosti je konštantná stochastická premenná daná exogénne a nezávislá na pravdepodobnosti nesplatenia. Obe premenné sú modelované nezávisle od štrukturálnych vlastností firmy a modelujú sa pomocou náhodného procesu. Sú to modely intenzity, kde je proces nesplatenia definovaný pomocou skoku zo stavu nesplatenia do stavu, kedy nie je nesplatenia. Miera nesplatenia je pravdepodobnosť skoku zo stavu nesplatenia do stavu kedy k nesplateniu nedôjde a naopak. Pravdepodobnosť nesplatenia v tomto modeli nie je predpovedateľná a miera návratnosti v prípade udalosti nesplatenia sa môže stochasticky meniť v priebehu času.

Redukované modely predpokladajú, že pravdepodobnosť nesplatenia v ktoromkoľvek časovom intervale je nenulová a sú rozdelené podľa spôsobov parametrizácie mier návratnosti. Miera návratnosti je podmienená senioritou, zaistením obligácie, priemyselnými špecifikami a makroekonomickými ukazovateľmi. Modely, ktoré sú spojené v čase ukazujú, že cena akejkoľvek pohľadávky môže byť vypočítaná ako podmienené matematické očakávanie s modifikovaným diskontným faktorom. To robí redukované modely vhodné hlavne na empirickú implementáciu používajúc obligácie a deriváty Credit Default Swaps (CDS). To dovoľuje nástrojom bezrizikových termínovaných kontraktov, aby boli používané empiricky ako aj teoreticky.

Redukovaným modelovaním s diskretným prístupom bol vyvinutý model, v ktorom sú oceňované nesplatené cenné papiere zaraďujúce stochastickú bezrizikovú úrokovú mieru, intenzitu nesplatenia a mieru návratnosti. Tento model oceňuje kreditné deriváty za predpokladu návratnosti trhovej hodnoty s konštantnou mierou návratnosti. Pre riskantné obligácie sú rôzne predpoklady návratnosti: nulová návratnosť, návratnosť nominálnej hodnoty a návratnosť trhovej hodnoty. Tradičný redukovaný model kreditného rizika predpokladá, že v čase nesplatenia model končí a miera návratnosti je známa (konštantná časť dlhu pred nesplatením). Tieto predpoklady však v skutočnosti v praxi nie sú vždy splnené. Uvažuje sa stochastický

model so stochastickou intenzitou λ_t a predpokladá, že v čase t je miera návratnosti R_t . Za predpokladu, že čas nesplatenia je $\tau > 0$, cena v čase nula nesplateného dlhopisu s maturitou v čase T je sumou recovery term a survival term, opisuje sa stredná hodnota množstva peňazí navrátených v prípade nesplatenia. Pre nulovú návratnosť platí $R_t = 0$ pre každé $t \geq 0$. Ak sa vyskytne nesplatenie a firma je likvidovaná až neskôr v čase maturity dlhopisu, držiteľovi dlhopisu je vyplatená čiastočná hodnota. Zbytková hodnota firmy, ktorá v splatení dlhu zlyhala, nenesie žiaden úrok počas periódy od času výskytu nesplatenia do doby splatnosti dlhopisu. Je takmer nemožné, aby firma mohla byť likvidovaná okamžite v čase výskytu nesplatenia, preto je čas likvidácie zvyčajne posunutý až do doby splatnosti dlhopisu. Pre mieru návratnosti platí $0 < R \leq 1$. Pri návratnosti nominálnej hodnoty, keď sa vyskytne udalosť nesplatenia a firma sa dostane do okamžitej likvidácie v čase nesplatenia, držiteľovi dlhopisu je vyplatená čiastočná splátka z nominálnej hodnoty. V tomto modeli je $R_t = R$, kde $0 < R < 1$, pre každé $t \geq 0$.

Ak v čase udalosti nesplatenia držiteľ dlhopisu obdrží časť tržnej hodnoty obligácie (pred výskytom nesplatenia) z firemnej likvidácie v čase nesplatenia je to model návratnosti trhovej hodnoty. Pre návratnosť trhovej hodnoty sa predpokladá, že v každom čase t , podmienené všetkými dostupnými informáciami (nie však včetně času t), L_t z tržnej hodnoty je strata ak sa nesplatenia vyskytne v čase t . Uvažuje sa $(1-L_t)$ ako miera návratnosti R_t v čase t .

Kapitola 3

Credit Value-at-Risk modely

V druhej polovici devedesiatych rokov začalo mnoho bánk a konzultačných spoločností vyvíjať modely merania kreditného rizika, miery potenciálnej straty a úrovne spoľahlivosti. V určitom časovom horizonte (najčasejšie jeden rok) sú odhadované rozdelenia pravdepodobností hodnôt portfólií. Zmeny v dôveryhodnosti dlžníka sa odrážajú na zmene hodnoty portfólia. Medzi modely merania hodnôt v riziku patria J.P. Morgan CreditMetrics®, McKinsey CreditPortfolioView®, a KMV CreditPortfolioManager®, kde je udalosť nesplatenia modelovaná ako v redukovaných modeloch, miera návratnosti je nezávislá na pravdepodobnosti nesplatenia, modelovaná pomocou beta rozdelenia a daná ako stochastická premenná. Rast rizika nesplatenia necháva rozdelenie miery návratnosti nezmenené. Ponúkame prehľad, ktorý uvádza Gertler [5].

3.1 KMV

Model KMV poskytuje odhady pravdepodobností nastatia stavu defaultu na základe Mertonovho modelu merania kreditného rizika, v ktorom je trhovú hodnotu imania podniku chápaná ako call opcia na hodnotu aktív podniku. Táto metóda sa najľahšie aplikuje na verejne obchodovateľné podniky, u ktorých je hodnota aktív determinovaná akciovým trhom. Informácie, ktoré sú obsiahnuté v trhovej cene akcie a súvahe daného podniku môžeme neskôr transformovať na odhad pravdepodobnosti nastatia neschopnosti splácania podľa nasledovných krokov. Odhadneme trhovú hodnotu a volatility aktív podniku, vypočítá sa vzdialenosť od stavu zlyhania, zostávajúci čas, ktorý predstavuje vlastne riziko nesplatenia. Odhad pravdepodobností rizika nesplatenia podľa databázy nesplatenia.

Pravdepodobnosť nastatia stavu nesplatenia je funkciou kapitálovej štruktúry podniku (ktorého úver alebo dlhopis sa nachádza v portfóliu), volatility výnosových aktív a súčasnej hodnoty aktív, t.j. na základe vopred vyšpecifikovanej kapitálovej štruktúry podniku, t.j. štruktúra pasív – imanie, záväzky, krátkodobý a dlhodobý dlh, a stochastického procesu vývoja hodnoty aktíva je možné odvodiť pravdepodobnosť nastatia stavu neschopnosti splácať v akomkoľvek časovom horizonte. Model KMV považuje pravdepodobnosť nesplatenia za individuálnu pre každého emitenta a rating neberie ako jediný ukazateľ spoľahlivosti emitenta.

3.2 CreditMetrics®

Metóda, ktorá bola publikovaná v roku 1997 J.P. Morganom s názvom CreditMetrics® bola prvým modelom merania kreditného rizika portfólia, ktorého základom sú budúce odhady zmien hodnôt portfólia aktív, ktoré sú nositeľmi kreditného rizika (úvery, dlhopisy), počas určitého obdobia, zpravidla jeden rok. Tieto zmeny hodnôt portfólia aktív sú vzťahované k zmenám v rizikovej klasifikácii. Jedným zo základných predpokladov tohoto modelu je, že všetky podniky klasifikované v rovnakej rizikovej kategórii majú rovnakú mieru pravdepodobnosti defaultu a rovnakú krivku úrokového spreadu. Tento predpoklad platí aj pre pravdepodobnosti presunu dlžníka v rámci rôznych rizikových kategórií. Rating sa mení v okamžiku zmeny pravdepodobnosti nesplatenia. Iným predpokladom je, že súčasná miera pravdepodobnosti nesplatenia je rovná historicky vypočítanej priemernej hodnote z rozdelenia pravdepodobnosti podľa jednotlivých rizikových kategórií. V modeli CreditMetrics® je beta rozdelenie pre každú triedu seniority. Miera návratnosti (modelované pomocou Montecarlo simulácie) je daná očakávanou hodnotou a jej štandardnou odchýlkou.

3.3 CreditPortfolioView®

V tomto modeli sa simuluje pravdepodobnosť nesplatenia vzhľadom na jednotlivé ratingy, priemyselné odvetvia a krajiny na základe niektorých vybraných makroekonomických ukazateľov, akými sú miera nezamestnanosti, miera rastu HDP, dlhodobé úrokové sadzby, vládne výdaje, miera agregátnych úspor. Pri tomto modeli sa pozoruje vzťah stavu ekonomiky, ktorý je dobre popísaný, a pravdepodobnosti nesplatenia.

3.4 CreditRisk+®

Model CreditRisk+ firmy Credit Suisse Financial Products je jednoduchým modelom pre výpočet očakávaných strát v stave defaultu (nezohľadňuje trhovú hodnotu aktív). Predpokladá, že existujú len dva stavy, default a nie default, pričom intenzita nastatia stavu defaultu je meniaci sa v čase a je modelovaná ako funkcia meniacich sa vybraných rizikových faktorov. Ak sú stavy defaultu nezávislé, rozdelenie pravdepodobností nesplatenia pôžičky nasleduje tzv. Poissonove rozdelenie. Na rozdiel od metódy CreditMetrics, tento model je zameraný na určenie objemu rizikového kapitálu aktív (na stanovenie opravných položiek pre úvery bez ohľadu na vývoj vonkajšieho trhového prostredia). Popri rozdelení očakávaných strát, výsledkom tejto metódy je aj odhad expozícií, hodnôt v riziku. Nie ako pri KMV, pri tomto modeli nie je cieľom vzťahovať riziko defaultu ku kapitálovej štruktúre podniku. Taktiež sa pri tomto modeli nevyjadrujú predpoklady o príčinách neschopnosti splácať dlh. Dlžník A je buď v defaulte s pravdepodobnosťou P , alebo nie je v defaulte s pravdepodobnosťou $1 - P$.

V modeli *CreditRisk+®* je miera návratnosti exogénny konštantný parameter a nesplatenie nemá spojitosť s kapitálovou štruktúrou firmy. Pojednáva návratnosť ako deterministickú zložku. Meria iba riziko nesplatenia a za predpokladu, že pravdepodobnosť udalosti nesplatenia za ľubovoľne dlhý časový úsek je rovnaká ako za nejaký krátky časový úsek, že pri veľkom počte dlžníkov je pravdepodobnosť nesplatenia jedného malá a množstvo nesplatení v určitej časovej perióde nie je závislé na počte nesplatení v periódách minulých.

Tabulka 3.1: Porovnanie niektorých súčasných modelov merania kreditného rizika

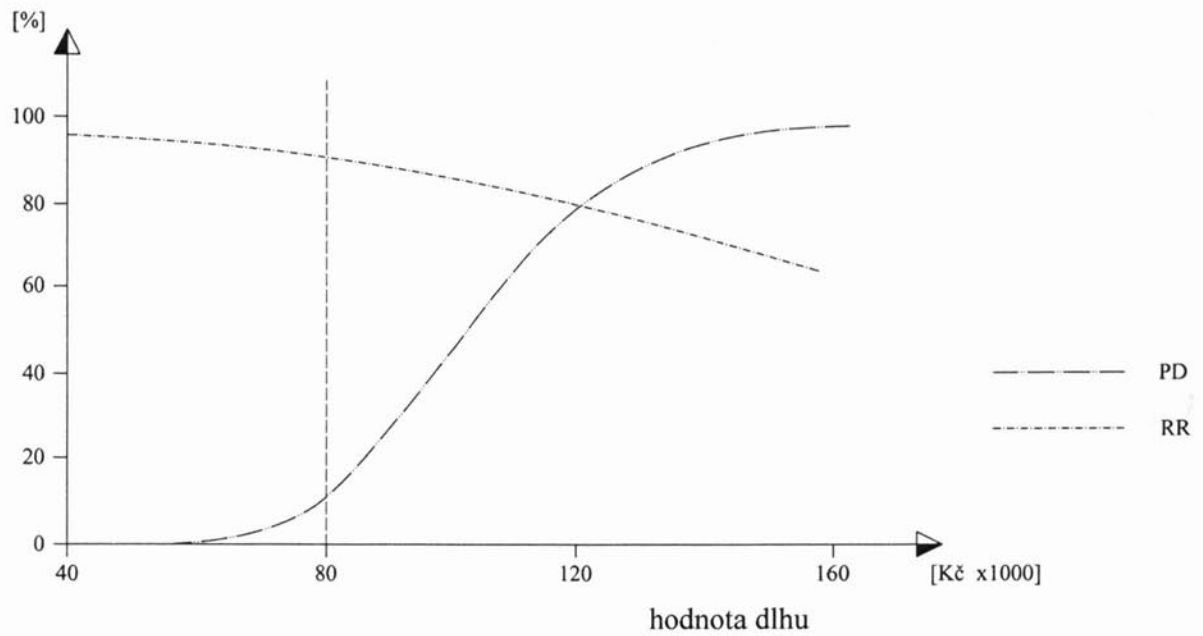
	CreditMetrics	CreditRisk+	KMV
Kto vyvinul model	JP Morgan	Credit Suisse	KMV
Definícia rizika	trhová hodnota aktív	straty zo stavu zlyhania	straty zo stavu zlyhania
Zdroj rizika	Aktíva ocenené na základe trhovej hodnoty	Pravdepodobnosť nesplatenia a miery nesplatenia	Hodnota aktív
Stavy	Zmena ratingu/nesplatenie	nesplatenie	Spojité miera pravdepodobnosti zlyhania
Pravdepodobnosť	nepodmienečná	nepodmienečná	podmienečná
Volatilita	konštantná	variabilná	variabilná
Korelácie rizikových faktorov	Vypočítané zo vzájomného pohybu aktív	Vypočítané z procesu resp. zo stavov zlyhania	Vypočítané zo vzájomného pohybu aktív
Miery ozdravenia	náhodné	Konštantné v rámci určitého pásma	náhodné
Prevedenie modelu	Simulácia/analytické	analytické	analytické

Kapitola 4

Vzťah medzi pravdepodobnosťou nesplatenia a miery návratnosti

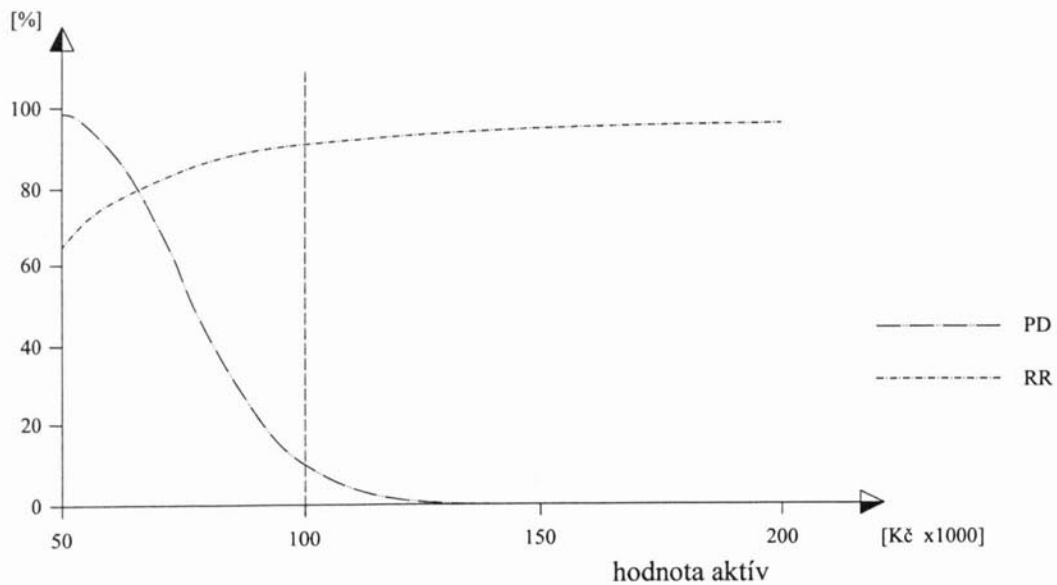
V posledných rokoch boli rozvíjané explicitné modely, ktoré skúmajú vzťah medzi pravdepodobnosťou nesplatenia (PD) a mierou návratnosti (RR). Podľa [1] je jedným z nich aj Fryeov model, v ktorom pravdepodobnosť nesplatenia nie je odhadovaná za pomoci množstva korelačných parametrov, ale je daná jediným faktorom a to stavom ekonomiky. Miera návratnosti a pravdepodobnosť nesplatenia sú stochastickými premennými. Ak sa ekonomika nachádza v recesii, tak miera návratnosti klesá, kým pravdepodobnosť nesplatenia má tendenciu stúpať a vzťah medzi týmito dvoma premennými je korelovaný negatívne. Miera návratnosti je odlišná v čase veľkej pravdepodobnosti nesplatenia od času, kedy je výskyt nesplatení menší a to čo ovplyvňuje mieru nesplatenia má vplyv aj na mieru návratnosti. V mikroekonomickom prístupe je vzťah miery návratnosti a miery nesplatenia podmienený stavom ponuky a dopytu po nesplatených cenných papieroch. V časovej perióde, kedy je miera nesplatenia vysoká dochádza k tomu, že ponuka nesplatených cenných papierov prevyšuje dopyt. S využitím výrazov pre výpočet pravdepodobnosti nesplatenia a miery návratnosti použitých v Mertonovom modeli, uvažujme prípad firmy, kde hodnota dlhu je rovna 80, firemné aktíva sú rovné 100, ročná volatilita aktív je 20% a očakávaný výnos na aktívach je 5%. Potom graf 4.1 ukazuje vzťah pravdepodobnosti nesplatenia a miery návratnosti v závislosti na výške dlhu. Nárast dlhu spôsobí zvýšenie v pravdepodobnosti nesplatenia pričom miera návratnosti klesá.

Graf 4.1: Vplyv hodnoty dlhu na PD a RR



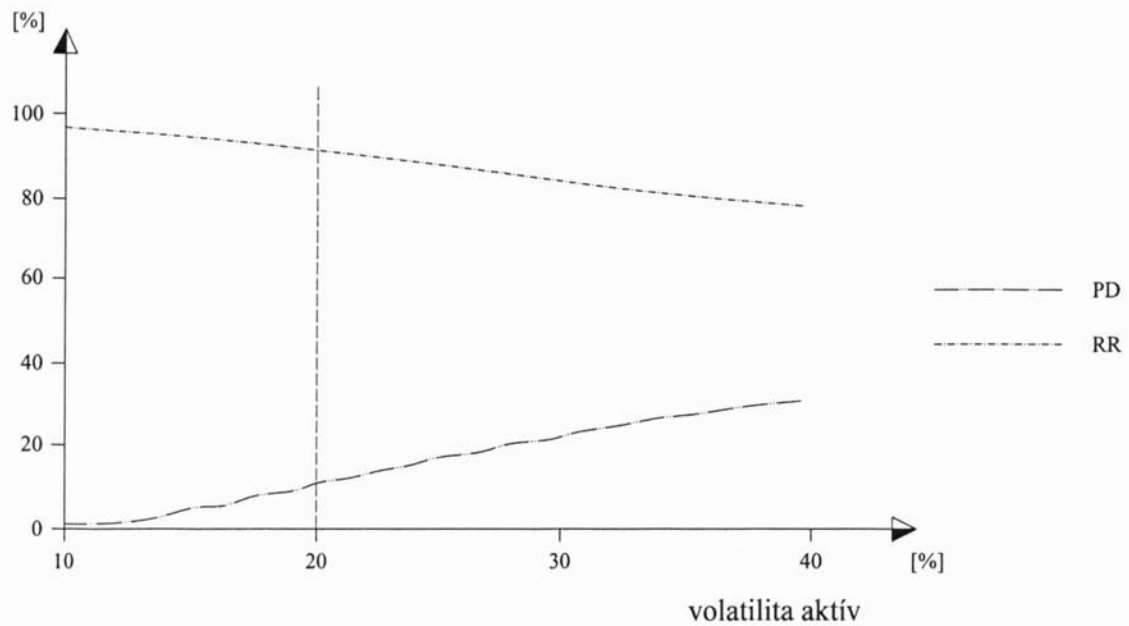
Graf 4.2 naopak ukazuje zníženie pravdepodobnosti nesplatenia a zvýšenie miery návratnosti při vzraste hodnoty firemných aktív.

Graf 4.2: Vplyv hodnoty aktív na PD a RR



V grafe 4.3 vidíme ako pôsobí zvýšenie volatility firemných aktív na pravdepodobnosť nesplatenia a mieru návratnosti. Pravdepodobnosť nesplatenia rastie pričom miera návratnosti klesá.

Graf 4.3: Vplyv volatility aktív na PD a RR



Zoznam literatúry

- [1] Altman, E., Brady, B., Resti, A., Sironi, A.: *Analyzing and Explaining Default Recovery Rates*, London, 2001, www.isda.org
- [2] Altman, E., Brady, B., Resti, A., Sironi, A.: The Link between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence and Implications, *Journal of Business*, 2003.
- [4] Benito, E., Glaven, S., Jacko, P.: Comparison of Credit Risk Models, 2005, www.strom.sk/~pj/phd.php
- [3] Bilsel, S., Gülçiçek, T.: Review of Two Main Approaches in Credit Risk Modelling Firm Value vs. Reduced Form Approaches, 2005, http://www.defaultrisk.com/ps_models.htm
- [5] Gertler, L.: Charakteristika vybraných modelov merania kreditného rizika založených na portfóliovom prístupe, *Auspica*, 2005, roč.2, č.2, s. 26.
- [6] Giesecke, K.: Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction, *Credit Risk: Models and Management*, Vol. 2, Riskbooks, London, 2002.
- [7] Pišková, A.: *Modelovanie portfólia dlhopisov s uvažovaním rizika defaultu: Diplomová práca*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, MFF, 2004.
- [8] Schuermann, T., What do we know about Loss Given Default? *Credit Risk Models and Management*, 2nd edition, Risk Books, 2004.
- [9] Wehrspohn, U.: *Credit Risk Evaluation: Modeling - Analysis – Management*, Center for Risk & Evaluation, 2002-2003, <http://ssrn.com/abstract=670884>

PŘIJATO K OBHAJOBĚ

10. 8. 06



PŘEDSEDA KOMISE PRO BSZZ
STUDIJNÍ PROGRAM MATEMATIKA