# Univerzita Karlova v Praze
## Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky


# GeoGebra jako pomocník při řešení úloh s parametrem

# GeoGebra as a tool for solving problems with parameters


Autor: Anna Kudělková

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.



Praha 2014

*Prohlašuji, že jsem zadanou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením vedoucí bakalářské práce a za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Práce nebyla využita k získání stejného nebo jiného titulu.*

*V Praze dne 10. dubna 2014*

.......................................................

*Anna Kudělková*

*Děkuji vedoucí mé bakalářské práce, prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za velmi vstřícný přístup a konstruktivní připomínky, kterými přispěla k tvorbě této práce. Děkuji svým rodičům za cenné rady a trpělivou podporu při studiu.*

ABSTRAKT:
Vyvíjející se technologie poskytují učitelům matematiky mnoho různých možností, jak podpořit a zpestřit výuku. Tato bakalářská práce je zaměřena na využití GeoGebry ke grafickému řešení vybraných úloh s parametrem. Jako podklady pro tuto práci sloužily učebnice matematiky a jako inspirace další, zejména internetové zdroje. Text obsahuje stručnou informaci o programu GeoGebra, jeho možnostech, historii a komunitě, která ho využívá. Hlavní náplní práce je řešení úloh konstrukční a analytické geometrie v prostředí GeoGebry, a to tak, aby byly ukázány hlavní výhody ve srovnání s klasickým řešením. Celkem je v textu podrobně zpracováno pět úloh a ke každé úloze je přiložena sada příkladů zpracovaných v programu GeoGebra.

KLÍČOVÁ SLOVA:
GeoGebra, úlohy s parametrem, grafické řešení

ABSTRACT:
Teachers of mathematics can use modern technology to improve lessons and make them more interesting. The present work focuses on the usage of GeoGebra as a graphical solution for selected parametric problems. Data for this work was collected from mathematics textbooks, and internet sources, among others, were used as an inspiration. The work briefly describes GeoGebra software, its features, history and also the community that uses it. The main purpose of the work is to use GeoGebra to solve problems from the domain of geometric constructions and analytic geometry in such a way that shows the main advantages in comparison with the classical solution. In the present work, five mathematical problems are thoroughly analyzed and, for each problem, a set of illustrative examples solved in GeoGebra is provided.

KEYWORDS:
GeoGebra, parametric problems, graphical solutions

# Obsah

# Úvod

V několika posledních letech se technologický pokrok natolik urychlil, že nové technologie vstupují do našich životů prakticky každý den. V dnešní době se počítače, ať už ve formě mobilů nebo notebooků, vyskytují všude kolem nás a internet a počítačové programy se staly běžnou součástí naší každodenní práce, ale i zábavy. Tyto technologie pronikají i do školní výuky a mohou tak ulehčit práci učitelům i žákům. V této práci se budeme zabývat konkrétně výukou matematiky.

V oblasti výuky matematiky lze počítačové technologie využívat mnoha různými způsoby. Ve většině škol už dnes můžeme najít interaktivní tabule, které jsou určené k tomu, aby usnadňovaly učitelům práci v hodinách. Další možností jsou počítačové učebny, kde si žáci mohou pomocí výukových programů sami zkoušet různá řešení nejrůznějších druhů úloh. Nezanedbatelnou součástí využití počítačových technologií je možnost práce s internetem, který umožňuje snadné a rychlé hledání informací. Jedny z nejvhodnějších využití mají počítačové technologie v těch oblastech matematiky, kde lze řešené problémy vizualizovat. Mezi takové oblasti patří například geometrie nebo grafická řešení početních úloh.

Využívání počítačových technologií ve výuce matematiky přináší mnoho různých výhod [13]. Například u interaktivních tabulí mohou učitelé žákům zadávat úlohy otevřením předem připravených souborů a vyhnout se tak potřebě zdlouhavého psaní zadání na tabuli. Kromě zadání mohou mít připravené i samotné řešení úlohy, a to i s doplňujícími vizualizacemi. Ušetřený čas je tak možné strávit hlubším vysvětlením problému a umožnit tak žákům jeho lepší pochopení. Učitel se může například vrátit k již probranému učivu a ukázat žákům, které jeho části lze použít k vyřešení úlohy. K pochopení učiva pomáhá také množství výukových programů, které žákům umožňují podívat se na řešené problémy podrobněji. Učitelé se často potýkají s tím, že žáci mají obtíže s představivostí a vysvětlované učivo je tudíž nebaví, protože se musejí učit spoustu postupů, které vlastně nechápou. Použití počítačových technologií jim může pomoci si řešené úlohy lépe představit a tím tak nejen ulehčit jejich pochopení, ale i zvýšit pozornost žáků.

Programů pro podporu výuky matematiky existuje už dnes mnoho. Pro konkrétní typy úloh existují specializované aplikace a mnoho z nich se zabývá zpracováním grafických řešení úloh nebo geometrií [14]. Mezi tyto programy patří například KALgebra, která řeší grafické znázornění funkcí, a to jak v rovině, tak v prostoru, GEONExT, který se specializuje na geometrické úlohy v rovině nebo Cabri Geometrie, která modeluje geometrické úlohy v rovině i v prostoru. V práci se budeme zaměřovat na program GeoGebra, který umožňuje provádět nejen geometrické konstrukce, ale také početní operace.

Počítače lze ve výuce matematiky mimo jiné využít například u těch úloh, které nějakým způsobem pracují s grafickými zobrazeními. Jejich použití je vhodné například v konstrukčních úlohách, při řešení úloh na vzájemnou polohu dvou přímek, při zkoumání vlastností kuželoseček, při vyšetřování průběhů funkcí a v mnoha dalších částech matematiky (viz například Pomykalová. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*, 1995 nebo Bušek. *Řešené úlohy z matematiky*, 1988). V této práci se zaměřujeme na ty úlohy, které umožňují práci s parametrem. Ať už za parametr považujeme vzdálenost dvou geometrických objektů nebo některý z koeficientů rovnice, může GeoGebra v tomto směru posloužit k názorné vizualizaci, jak daný parametr ovlivňuje výsledné řešení.

První část práce je věnována přehledu zdrojů, které sloužily jako podklad a inspirace pro využití GeoGebry při řešení úloh. Jedná se o knihy a internetové zdroje. Ve druhé části práce je popsán program GeoGebra, jeho historie, uživatelské rozhraní, nástroje a možnosti jejich využití, dostupná podpora uživatelů a výhody, které jeho použití přináší do řešení úloh s parametrem. Další část textu je hlavní částí této práce. Jedná se o pět podrobně rozpracovaných úloh, tři z nich jsou úlohy konstrukční a dvě patří do oblasti analytické geometrie. Pro každou úlohu je nejprve popsán klasický postup řešení. Dále je připravena sada podúloh, které slouží pro pochopení postupu konstrukce, nalezení závislosti počtu řešení na parametrech, porozumění dílčím úlohám apod. Poslední částí práce je závěr, ve kterém jsou shrnuty cíle práce a zhodnoceny výsledky, kterých se dosáhlo.

# 1. Dostupné materiály

V této části práce jsou prezentovány zdroje, které souvisí s cílem bakalářské práce, tedy s řešením matematických úloh s parametrem. Jsou tu stručně popsány a ohodnoceny vybrané učebnice, ve kterých se dané téma vyskytuje. Dále se zmiňujeme o on-line zdrojích (webových stránkách), které obsahují úlohy s parametrem.

## 1.1 Literatura

V této části jsou uvedeny stručné informace o vybrané literatuře. Jednotlivé knihy byly zvoleny na základě doporučení učitelů matematiky a obsahu, který souvisí se zpracovávanými tématy. Nejprve uvádíme stručnou charakteristiku zpracovaní každé knihy, a poté uvádíme, kde a jakým způsobem jsou řešeny úlohy s parametrem, kterým se věnujeme v této práci.

V učebnici *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice* (Charvát, 2001) nalezneme kompletní výklad učiva z oblasti rovnic a nerovnic. Kniha je určena pro výuku na gymnáziích a středních odborných školách. První část je věnována lineárním rovnicím a nerovnicím s jednou nebo více neznámými a jejich soustavám. V následující části se nalézají kvadratické rovnice a nerovnice a rovnice vyšších stupňů. V poslední části této učebnice nalezneme rovnice a nerovnice, které lze převést na kvadratické a lineární, a rovnice a nerovnice s parametry. Každá kapitola obsahuje úvod a motivaci k dané oblasti učiva, vzorový příklad, několik řešených úloh a množství úloh k procvičení. V textu se často vyskytují zvýrazněná místa s důležitými pojmy a poznatky. Učebnice je přehledně strukturována a obsahuje převážně početní a v menší míře i grafická řešení úloh. Úlohy s parametrem jsou řešeny početně a neobsahují žádná grafická řešení.

*Metody řešení matematických úloh* (Odvárko a kol., 1990) je učebnice určená studentům učitelského studia matematiky. Obsahuje sedm kapitol, které mají poskytnout nadhled na problematiku řešení úloh, a to z hlediska odborného i didaktického, zejména však procvičit uplatňování jednotlivých metod. V textu lze najít tabulky s důležitými poznatky, množství řešených i neřešených úloh a doplňujících obrázků. K úlohám s parametrem se zde váže celá kapitola, která je rozdělena na osm částí, z nichž dvě jsou věnovány konstrukčním úlohám a jedna rovnicím a nerovnicím. Jsou zde uvedeny metody řešení těchto úloh, a to jak početně, tak graficky.

Kniha *Opakování z matematiky* (Burjan a Maxian, 2001) je určena k samostudiu při přípravách k maturitní zkoušce a přijímacím zkouškám na vysokou školu. Ve třiceti kapitolách obsahuje všechny oblasti matematiky, které jsou vyučovány na středních školách. Každá kapitola obsahuje přehled definic a vět, několik řešených příkladů a samostatná cvičení k procvičení, kde se nachází i několik těžších úloh pro schopnější řešitele označených hvězdičkou. V kapitolách lineární rovnice a nerovnice a nelineární rovnice a nerovnice nalezneme několik příkladů a cvičení s parametrem, které jsou řešeny pouze početně. Kapitoly věnované geometrii v rovině obsahují množství konstrukčních úloh, ale velmi málo grafických znázornění.

Skripta *Metody řešení matematických úloh I* (Herman a kol., 1996) jsou určena pro učitelské studium matematiky a jako pomůcka k přípravám do hodin matematiky. Jsou zaměřena na oblasti elementární matematiky, a to především na metody řešení, kterých se v těchto oblastech využívá. Text je rozdělen do tří kapitol, které jsou dále rozčleněny do menších tematických celků. V každé podkapitole je krátký úvod do teorie, další informace jsou popsány při řešení vzorových příkladů. Některé příklady jsou řešeny více možnými způsoby. Lze zde nalézt několik řešených příkladů na soustavy lineárních rovnic s parametrem a další úlohy k procvičení. Všechny příklady jsou řešeny početně, bez doplňujících obrázků.

V učebnici *Matematika pro gymnázia: Planimetrie* (Pomykalová, 1995) se nachází učivo geometrie v rovině pro střední školy. Je rozdělena do tří částí: rovinné útvary, konstrukční úlohy a zobrazení v rovině. V každé kapitole nalezneme přehled teorie spolu s řešeným příkladem a velké množství úloh k procvičení. Téměř na každé stránce se nachází obrázky k učivu a text je doplněn o úlohy označené otazníkem, které obsahují problémy, které je potřeba vyřešit k hlubšímu porozumění probírané látce. V části konstrukční geometrie lze najít několik úloh s parametrem, většinou mezi neřešenými úlohami k procvičení.

*Řešené úlohy z matematiky* (Bušek, 1988) je sbírka úloh určená pro studenty všech typů středních škol k opakování učiva před maturitní zkouškou a přijímacími zkouškami na vysokou školu. Sbírka je rozdělena do šedesáti tematických okruhů, které obsahují úlohy ze všech částí matematiky, probíraných na střední škole. Jednotlivé kapitoly obsahují několik řešených typových příkladů a zadání dalších úloh k procvičení učiva. Výsledky úloh obsahují stručné návody k jejich řešení. Úlohy jsou zde spíše složitější, počítají s předchozími znalostmi daného učiva. Sbírka obsahuje kapitoly zaměřené na lineární rovnice a soustavy rovnic s parametrem, na kvadratické rovnice s parametrem řešené pouze početně a kapitoly zabývající se konstrukčními úlohami, doplněné o obrázky u jednotlivých příkladů.

Kniha *Přehled středoškolské matematiky* (Polák, 1977) je přehledem o jednotlivých oborech matematiky a jejich vztazích. Obsahově navazuje na středoškolské učebnice matematiky. Obsahuje čtyřicet čtyři kapitol, které jsou rozděleny do osmi tematických částí. V kapitolách je podrobný výklad pojmů a definic, velké množství řešených příkladů a mnoho doplňujících obrázků. Na konci knihy nalezneme rejstřík, který usnadňuje vyhledávání neznámých pojmů. Kapitoly *Rovnice a nerovnice s jednou neznámou* a *Rovnice a nerovnice o několika neznámých a jejich soustavy* obsahují několik početně řešených úloh s parametrem. V části knihy věnované planimetrii lze nalézt množství podrobně vysvětlených konstrukčních úloh a několik doplňujících obrázků.

## 1.2 On-line zdroje

Vzhledem k dnešním možnostem hypertextových technologií v prostředí webu a vysoké dostupnosti internetu se také zaměříme na oblast webových učebnic a aplikací, které souvisí s tématy této práce. Z existujících webů byly vybrány ty, které mohou svou přehledností a obsahem sloužit k podpoře výuky matematiky a obsahují úlohy s parametrem nebo aplety vytvořené v GeoGebře.

*Apolloniovy úlohy* [12] jsou webové stránky věnované historii, popisu a konstrukcím Apolloniových úloh. Stránky byly vytvořeny pro studenty středních škol, které tyto úlohy zaujaly. Předpokládá se, že čtenář má středoškolské znalosti planimetrie a deskriptivní geometrie a tyto znalosti rozšiřuje. Web osahuje klasické Apolloniovy úlohy z planimetrie, několik úloh prostorových a vysvětluje některá související témata. Všechny úlohy jsou zpracovány v programu GeoGebra formou interaktivních Java apletů s možností krokování konstrukce a změny zadaných parametrů. Stránky jsou zajímavou ukázkou možností využití programu GeoGebra.

Stránky *Matematika* [9] jsou pomůckou při studiu na střední odborné škole, k opakování učiva nebo doplnění zameškané látky. Nalézají se zde výukové materiály ve formě *pdf* dokumentů nebo apletů vytvořených v programu GeoGebra. Materiály obsahují teorii k probranému učivu, řešené příklady i úlohy k procvičení. Nalezneme zde pracovní listy: *„Čas, který bychom v hodině strávili zápisem teorie je neefektivně strávený. Proto je veškerá teorie včetně vzorců, grafů a pomocných obrázků na pracovních listech připravena. V hodině takto získaný čas věnujeme spíše řešení problémů, prohlubování učiva a opakování.“ (*[9]*, http://matematika.primmat.cz/2-rocnik).* Učivo je rozděleno podle ročníků, ve kterých je probíráno. Nalezneme zde několik úloh s parametrem, určených k procvičení učiva. Na těchto stránkách lze vidět, jak mohou počítačové technologie přispět k výuce matematiky.

*Diplomová práce - Apolloniovy úlohy* [11] byla vytvořena jako učebnice, zabývající se řešením Apolloniových úloh. Obsahuje kapitoly věnované eukleidovských konstrukcím všech Pappových a některých Apolloniových úloh. Kapitoly obsahují historii těchto úloh a jejich kompletní řešení, se všemi jeho fázemi (tj. zadání, rozbor, zápis konstrukce, konstrukce, diskuze). Konstrukce jsou vytvořeny pomocí programu Cabri Geometrie II ve formě obrázků nebo Java apletů. V práci lze nalézt tabulky s přehledem vzájemných poloh vstupních prvků, které obsahují systematický přehled všech možných řešení, postupy jejich konstrukcí a jejich počet. Lze zde také nalézt kapitolu věnovanou pomocným konstrukcím. Kapitola *Interaktivní cvičení* obsahuje úlohy k procvičení vytvořené v programu Cinderella, který umožňuje rýsovat v okně prohlížeče pomocí předdefinovaných nástrojů. Ačkoliv jsou příklady zpracovány v jiném dynamickém softwaru, jsou vytvořeny obecně s možností změny zadaných parametrů podobně, jako to je možné v GeoGebře.

*E-matematika.cz* [8] jsou webové stránky, které obsahují velmi rozsáhlou sbírku podrobně řešených a vysvětlených příkladů. Příklady jsou rozděleny do sekcí pro základní, střední a vysoké školy. Každá sekce obsahuje příklady, které jsou rozděleny nejen podle témat, do kterých patří, ale také podle metod, jakými se řeší. U konstrukčních úloh nalezneme u každého kroku postupu samostatný obrázek. Na těchto stránkách lze nalézt velké množství zadání neřešených úloh vybraných pro domácí úkoly, písemné a čtvrtletní práce nebo k procvičení do hodin, mezi nimi i úlohy s parametrem. Ne všechna tato zadání však obsahují výsledky. Velká část na tomto webu je poskytována zdarma a lze připlatit za rozšíření nabídky příkladů.

Na webových stránkách *Priklady.eu* [7] lze nalézt sbírku příkladů z matematiky a fyziky pro střední školy. Obsahují množství řešených příkladů, které jsou rozdělené do tematických sekcí. Nalezneme zde několik rovnic a nerovnic s parametrem. Všechny příklady jsou řešené, nejsou ovšem doplněné o žádné komentáře nebo vysvětlení jednotlivých kroků. Z oblasti planimetrie se tu nachází pouze příklady konstrukcí trojúhelníků, které obsahují aplety s krokováním konstrukce a postup konstrukce, a nenachází se zde žádný rozbor.

Stránky *realisticky.cz* [10] lze považovat za on-line učebnici. Byly vytvořeny učitelem Martinem Krynickým jako učební materiál pro jeho studenty. Pro velkou oblíbenost nejen studenty, ale i dalšími učiteli byly rozšířeny do aktuální podoby. Nalezneme zde řešené příklady doplněné o pedagogické poznámky a dokumenty s úlohami k procvičení. Celá učebnice je koncipována jako pomůcka pro přípravu učitele do hodin a v jednotlivých dokumentech lze kromě pedagogických poznámek nalézt také doporučení, v jakém pořadí je vhodné daná témata probírat. Lze zde nalézt deset dokumentů s řešenými příklady i úlohami k procvičení z oblasti rovnic a nerovnic s parametrem a několik dokumentů věnovaných konstrukčním úlohám s doplňujícími obrázky u každého řešeného příkladu.

# 2. GeoGebra

Tato část práce se zabývá velmi stručným popisem programu Geogebra. Jsou zde informace o vzniku a rozvoji této aplikace, možnostech jejího využití a dostupnosti uživatelských materiálů. Také je zde tento program popsán z hlediska uživatelského rozhraní a jsou vysvětleny základní principy a funkce, které jsou potřebné pro pochopení úloh, zpracovávaných v dalších částech práce. V této kapitole je čerpáno z následujících zdrojů: (Havelková, 2010) [5], (Havelková, 2012) [6], GeoGebra [1], GeoGebraTube [2], GeoGebraWiki [4].

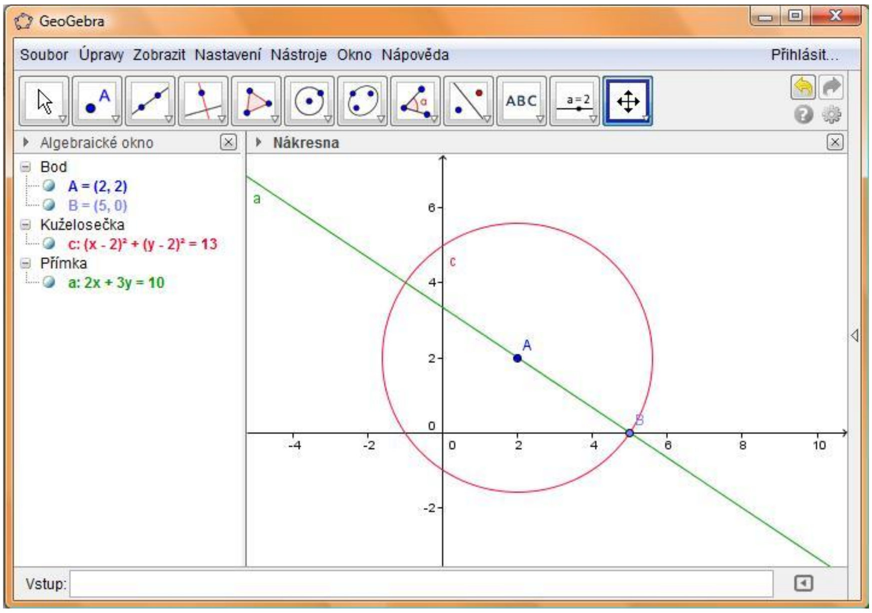
## 2.1 Vývoj a základní vlastnosti GeoGebry

GeoGebra je dynamický software pro všechny úrovně vzdělávání. Spojuje geometrii, matematickou analýzu i algebru. Lze v ní vytvářet tabulky, grafy, ale i určovat integrály a derivace, umožňuje použití statistiky či matic. Tento program byl vytvořen pro účely názorného vyučování matematiky. Jeho autorem je Markus Hohenwarter, který GeoGebru vytvořil v roce 2001 pro svou bakalářskou práci na Univerzitě v Salzburgu. Od toho roku se GeoGebra neustále vyvíjí a jsou k ní vytvářeny nové a nové funkce. Je také průběžně překládána do mnoha jazyků celého světa. Jako vyučovací software byla GeoGebra oceněna v několika evropských zemích a rakouské ministerstvo školství jí několikrát udělilo grant na další vývoj programu.

## 2.2 Uživatelské rozhraní

Hlavní okno programu je rozděleno na jednotlivé náhledy. V levé části nalezneme algebraické okno, ve kterém se zobrazují algebraické výrazy jednotlivých geometrických objektů. Vedle něj najdeme nákresnu, na které jsou tyto objekty zobrazeny graficky. Nad těmito dvěma okny se nachází lišta pro menu a lišta s předdefinovanými nástroji. Na spodní straně hlavního okna programu leží lišta *Vstup*, kam lze zadávat speciální funkce a algebraické výrazy (viz obr. 1).

Náhled v nákresně lze zmenšovat či zvětšovat, případně měnit jeho polohu. Tím lze dané objekty zkoumat s různou mírou detailu. Pomocí voleb nákresny lze také skrýt nebo zobrazit osy souřadnic.




**Obr. 1 - Uživatelské rozhraní programu GeoGebra**

## 2.3 Principy práce

GeoGebra patří mezi takzvaný dynamický software. Takto nazýváme ty programy, které umožňují s jednotlivými objekty interaktivně pracovat. Tyto programy dovolují uživateli vytvářet geometrické objekty (body, kružnice, přímky…) a definovat mezi nimi geometrické vztahy (kolmost, rovnoběžnost, shodné zobrazení…) stejně, jako by je nanášel na papír pomocí tužky, kružítka a pravítka. Pokud zvolíme správné nástroje, budou na sobě jednotlivé geometrické objekty závislé a změnou jednoho objektu se změní tvar či poloha jiného. Tato dynamičnost je užitečným nástrojem k modelování úloh s parametrem.

### Zadávání objektů

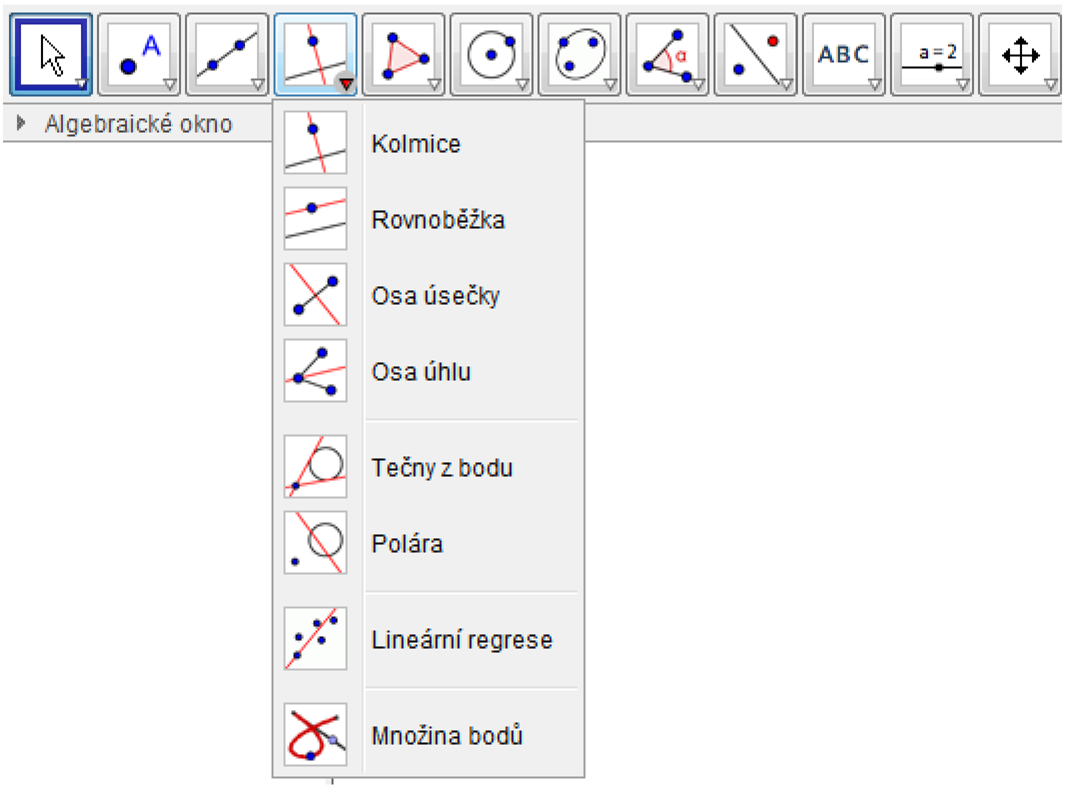
Geometrické objekty můžeme v GeoGebře zadávat dvojím způsobem. Z lišty nástroje vybereme požadovaný nástroj a přímo v nákresně vytvoříme požadovaný geometrický objekt. Algebraický výraz vytvořeného objektu se automaticky zobrazí v algebraickém okně. Druhou možností vytvoření objektu je vložení algebraického výrazu do vstupního řádku (viz obr. 2). Po stisknutí klávesy Enter, se tento výraz zobrazí v algebraickém okně a zároveň se objekt automaticky vykreslí do nákresny.


**Obr. 2 –Vstupní řádek**

*Komentář: Zápis algebraického výrazu ve vstupním řádku pro kružnici o poloměru* 3 cm *a středu v bodě o souřadnicích* [1, 2].

## Nástroje

Nástrojová lišta je rozdělena na sady nástrojů, z nichž každá nabízí několik možných variant výběru. Nalezneme v ní základní objekty, jako například body, přímky, kuželosečky nebo úhly. Dalšími nástroji lze vytvářet kolmice, rovnoběžky nebo například osové souměrnosti. Kliknutím na šipku, která se nachází v levém dolním rohu tlačítek, otevřeme okno dalších možností (viz obr. 3), ze kterých můžeme vybírat kliknutím myši.

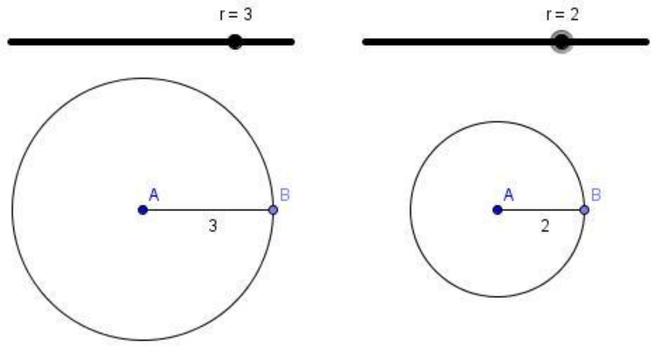



**Obr. 3 - Další možnosti nástrojů**

Pokud najedeme myší na některé tlačítko, zobrazí se nápověda, jak daný nástroj použít (viz obr. 4). Tato vlastnost značně usnadňuje práci s jednotlivými nástroji.


**Obr. 4 - Nápověda k nástroji *Střed***

Důležitým nástrojem pro naši práci je *posuvník* (viz obr. 5). Posuvník reprezentuje parametr, jehož hodnotu můžeme měnit, a tím ovlivňovat na něm závislé objekty.

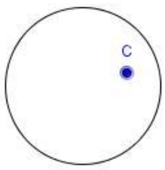



**Obr. 5 - Posuvník**

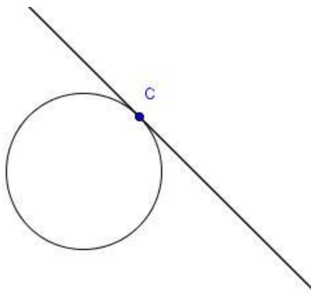
*Komentář: Pomocí posuvníku jsme na obr. 5 změnili poloměr kružnice.*

## Závislost

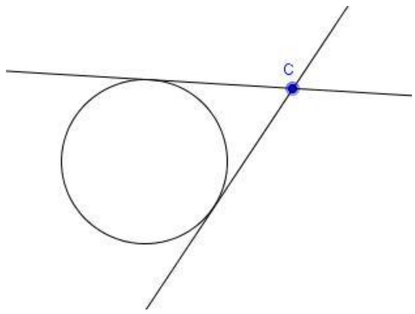
Jednotlivé objekty jsou v GeoGebře definovány jako volné nebo závislé. Pokud nový objekt vytvoříme bez použití již vytvořených objektů, bude označen jako volný objekt. Pokud k vytvoření nového objektu použijeme některý z existujících, bude tento nový objekt zapsán jako závislý. Pokud změníme velikost nebo polohu některého objektu, změní se i vlastnosti objektů na něm závislých (viz obr. 6a, 6b, 6c). Volné objekty zůstanou nezměněny.




**Obr. 6a - Bez tečny**




**Obr. 6b - Jedna tečna**




**Obr. 6c – Dvě tečny**

*Komentář: Na obr. 6a, 6b, 6c jsou přímky definovány pomocí závislostí tak, že přímka je tečnou kružnice procházející bodem C. Pokud se změní poloha bodu C, změní se i poloha nebo počet přímek.*

## Vlastnosti objektů

Každému objektu lze navolit unikátní vlastnosti. Mezi tyto vlastnosti patří například barva či styl čar a bodů nebo zobrazení názvu objektu v nákresně. Objektům lze nastavit viditelnost, tedy to, zda se v nákresně budou zobrazovat nebo budou skryty. Tyto vlastnosti ulehčují orientaci v nákresu. Další zajímavou vlastností je možnost *Stopa.* Pokud je objektu nastavena vlastnost *Stopa zapnuta,* je při takové změně konstrukce, která změní jeho pozici, zanechávána stopa. Tato stopa není trvalá, zmizí například při pohybu nebo změně velikosti nákresny.

### Export

Materiály vytvořené v programu GeoGebra jsou standardně ukládány ve formátu *ggb.* GeoGebra umožňuje export těchto souborů do různých formátů. Lze je exportovat do grafického souboru, a to buď jako obrázek (*png, eps,…*), nebo jako animaci (*gif*). Další možností je vytvoření dynamického pracovního listu jako webové stránky. Tento dynamický list je automaticky nahrán na web GeoGebry a zobrazen ve složce *Materiály.*

Další funkce a nástroje lze najít na stránkách www.geogebra.org, kde se nachází podrobné návody a pomocné materiály.


**Obr. 7 - Vyhledávání**

*Komentář: Na obr. 7 jsou výsledky vyhledávání v materiálech na webu GeoGebry na dotaz podle klíčového slova „kružnice" s parametry: pracovní listy, věková skupina 15-18 let, jazyk-česky.* [3]

## 2.4 Knihovny úloh

GeoGebra poskytuje množství již zpracovaných úloh, které se nacházejí na stránkách www.geogebratube.org. Všechny úlohy jsou vytvářeny uživateli tohoto programu, kteří mají možnost poskytovat své materiály ostatním. Nacházejí se zde zdrojové soubory, pracovní listy nebo odkazy na webové stránky, které se GeoGebrou zabývají. V těchto materiálech lze vyhledávat podle různých kritérií, například podle typu materiálu, klíčových slov, jazyka, ve kterém jsou vytvořeny, nebo podle věkové skupiny, pro kterou jsou určeny (viz obr. 7). Nalezneme zde úlohy jednoduché, jako například různé konstrukce trojúhelníků, ale i úlohy velmi složité, s množstvím popisů a funkcí. Tyto stránky mohou sloužit přímo k získání již hotových materiálů nebo pouze k inspiraci, co všechno je možné v GeoGebře zkonstruovat.

## 2.5 Výhody programu GeoGebra

Výhod používání programu GeoGebra je mnoho, a to nejen pro učitele při výuce, ale také pro žáky při samostatné práci. Rozmanité funkce tohoto programu lze využít v mnoha oblastech matematiky, proto zde popíšeme výhody, které GeoGebra vnáší do témat týkajících se této práce.

**Dostupnost:** GeoGebra je výukový software, který je všem uživatelům poskytován zcela zdarma. Je tedy k dispozici nejen pro učitele, kteří s jeho pomocí mohou v hodinách vizualizovat výklad učiva, ale také pro žáky, kteří mohou s programem experimentovat v hodinách nebo doma. Právě pro žáky je velkou výhodou možnost spuštění programu v okně prohlížeče, bez potřeby instalace do počítače. Tato možnost je k dispozici na stránkách http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html a jediné, co je potřeba ke spuštění, je instalace Javy, která je dnes už velmi rozšířená a na většině počítačů používaná i jinými programy.

**Přesnost konstrukcí:** Častým problémem při konstruování grafických objektů je pro žáky nepřesnost nákresu. Ať už z důvodu špatně ostrouhané tužky nebo špatné polohy pravítka vznikají nákresy, kde kružnice opsaná neprochází vrcholy trojúhelníku, rovnoběžné přímky se rozbíhají a čtverec nemá všechny úhly pravé. To může být pro žáky nepříjemnou komplikací, pokud je ke konstrukci úlohy potřeba hledat dotyk dvou objektů, které se při nepřesném rýsování vůbec nedotknou, ale i v mnoha jiných situacích. V GeoGebře můžeme jednotlivé objekty vytvářet, jako bychom je rýsovali na papír, a přitom ušetřit spoustu práce a času s kontrolou přesnosti.

**Pružnost nákresny:** Při rýsování na papír jsme omezení jeho velikostí. Musíme dát pozor, abychom nezačali rýsovat příliš blízko okraji papíru, protože by se některé objekty na papír nemusely vejít. Snadno se může stát, že hledaný objekt leží v jiné poloze vůči zadaným prvkům, než jsme předpokládali a vzhledem k nedostatku místa je potřeba vše narýsovat znovu v jiné části papíru. Při rýsování na papír si také některých detailů, které bychom potřebovali rozeznat, nemusíme kvůli jejich velikosti všimnout. Výhodou GeoGebry je pružnost nákresny. Můžeme pohled na vytvořené objekty přibližovat nebo oddalovat, případně posunovat na všechny strany.

**Postup konstrukce:** Další výhodou GeoGebry je možnost krokování konstrukce. To ulehčí práci učiteli, který se místo samotného rýsování na tabuli může věnovat vysvětlování, proč a jak se který krok dělá. Také je možné poskytnout vytvořené konstrukce žákům, aby je mohli lépe prozkoumat při samostatné práci doma. Takto připravené konstrukce mohou stát učitele více času při jejich vytváření, ale vzhledem k možnosti jejich opakovaného použití v různých třídách a hlubšího porozumění na straně žáků, mohou v celkovém měřítku čas ušetřit.

**Parametry:** Zatímco na papíře bychom při rýsování úlohy s jinými hodnotami museli narýsovat úplně nový nákres, v GeoGebře lze libovolné parametry měnit průběžně. Ať už jde o polohu nebo velikost objektů, všechny tyto vlastnosti lze změnit přepsáním jejich algebraické reprezentace, posunutím v nákresně nebo zavedením parametru, jehož hodnotu měníme na posuvníku.

**Zanechávání stopy:** Možnost, kdy zvolený objekt zanechává při pohybu stopu, je velkou výhodou pro názornost některých výkladů. Vhodná je pro názornost výkladu množin bodů daných vlastností, například při vysvětlování vlastností kuželoseček, kdy sestrojíme jeden bod daných vlastností a při jeho pohybu stopa vykreslí hledanou kuželosečku.

**Přehlednost:** Velmi často nastává u složitějších konstrukcí problém s množstvím pomocných objektů. Výsledný nákres je pak nepřehledný, některé objekty mohou splývat a nelze jednoduše rozeznat výsledný objekt od těch zadaných nebo pomocných. Konstrukce realizované v GeoGebře umožňují libovolnému objektu nastavit vlastní styl nebo barvu, případně jej úplně skrýt, a tím usnadňují orientaci v nákresu.

**Experimentování:** Největší výhodou, kterou GeoGebra do hodin matematiky přináší, je možnost zkoumat danou úlohu s využitím výhod zmíněných výše. Aniž by se každá změna zadání musela pracně rýsovat, lze měnit parametry, zkoumat podrobné detaily přiblížením náhledu nebo pozorovat změnu ostatních objektů, při pohybu některého dalšího. Všech těchto možností lze využít například při zjišťování počtů možných řešení u obecně zadaných úloh.

# 3. Řešení modelových úloh

Tato kapitola je nejdůležitější částí celé práce. Jsou zde popsány ty části matematiky, ze kterých jsou vybrány a řešeny úlohy. Jde o analytickou a konstrukční geometrii. Dále uvedené příklady jsou jednotně zpracovány. U každého příkladu je popsána motivace k jeho zařazení do této práce a popis klasického postupu jeho vyřešení. Dále jsou ukázány možnosti použití programu GeoGebra při řešení těchto příkladů. Ke každému příkladu je k dispozici také sada podpůrných jednodušších příkladů zpracovaných v GeoGebře, která slouží k lepšímu pochopení složitějšího příkladu. Nedílnou součástí těchto příkladů je také popis výhod, které do nich použití GeoGebry přineslo. Vzhledem k počtu těchto podúloh budou použity pouze jejich vybrané výstupy. Všechny úlohy zpracované v GeoGebře jsou součástí příloh této práce.

GeoGebra je oblíbeným nástrojem pro grafické zpracování úloh a komunita uživatelů, kteří vytvářejí nové úlohy, je velmi rozsáhlá. Různých úloh zpracovaných v GeoGebře nebo jiných dynamických softwarech je na různých webových stránkách velké množství a nelze proto s jistotou říci, které úlohy ještě nebyly zpracovány. Inspirací pro příklady vybrané do této práce byly knihy zmíněné výše (Burjan a Maxian, 1991, Polák, 1977, Odvárko a kol., 1990) a každý příklad byl zvolen i s ohledem na to, že ještě nebyl zpracován. Pokud lze některou z vybraných úloh nalézt zpracovanou v libovolném GeoGebře podobném programu, je to u ní zmíněno a je u jejího popisu postupováno jiným způsobem, než v nalezeném případě.

Metodická poznámka: I přes to, že je v GeoGebře možné skrytí zvolených objektů a je možné všechny podúlohy ukázat v celkově zpracované úloze, jsou pro přehlednost vytvořeny jako samostatné soubory.

**Úlohy s parametrem**: Parametr je obecně zadaná veličina, která ovlivňuje vlastnosti matematických výrazů nebo geometrických objektů. Úlohy s parametrem jsou řešeny stejně, jako by byly zadány konkrétně s tím rozdílem, že v krocích, které závisí na hodnotě parametru, se řešení rozděluje na příslušné části. Na konci každé úlohy s parametrem je diskuze o možných řešeních v závislosti na parametru. V této práci se parametry vyskytují v konstrukčních úlohách, jako vlastnosti geometrických objektů a v rovnicích a nerovnicích jako jejich koeficienty.

## 3.1 Konstrukční geometrie

Konstrukční geometrie je ta část geometrie, která se zabývá řešením geometrických úloh. V této práci jsou řešeny konstrukční úlohy z oblasti planimetrie. Planimetrie je oblast geometrie, která se zabývá zkoumáním rovinných útvarů a vztahů mezi nimi. Základními pojmy jsou zde bod, přímka a množiny bodů, ze kterých se skládají další rovinné útvary, například kuželosečky. Úlohy, které jsou zpracovány v další části práce, vycházejí z konstrukčních úloh, které lze řešit pomocí kružítka a pravítka.

Konstrukční úlohy dělíme na polohové a nepolohové. U polohových úloh jsou zadané prvky určeny konkrétní polohou v rovině. V nepolohových úlohách není dána poloha žádného prvku. V práci jsou úlohy zadány jako polohové a poté rozšířeny na úlohy nepolohové. Konstrukční úloha je řešena v těchto krocích:

- Rozbor: načrtneme ilustrační obrázek vyřešené úlohy a hledáme vztahy mezi zadanými prvky a hledanými útvary.
- Postup konstrukce: sestavíme stručný symbolický zápis kroků konstrukce. V každém kroku uvádíme, jaký útvar sestrojujeme a jakých jeho vlastností k jeho konstrukci využíváme.
- Konstrukce: podle postupu konstrukce provedeme grafické řešení.
- Zkouška: zkontrolujeme, zda všechny vzniklé útvary splňují zadané vlastnosti. Pokud se rozbor opírá o ekvivalentní tvrzení, není potřeba zkoušku provádět.
- Diskuze: v této části úlohy se diskutují podmínky řešitelnosti úlohy a počty řešení pro možné vzájemné polohy zadaných prvků.

Konstrukční úlohy lze řešit pomocí různých metod. Mezi tyto metody patří například využití shodných zobrazení, dilatace kružnic, kruhové inverze nebo množiny bodů dané vlastnosti. V konstrukčních úlohách vybraných do této práce jsou využívány množiny bodů daných vlastností.

Množina bodů dané vlastnosti

*„Množina M všech bodů roviny ρ, které mají danou vlastnost, je množina bodů, pro kterou současně platí:*

1. *Každý bod množiny M má danou vlastnost.*
2. *Každý bod roviny, který má danou vlastnost, patří do množiny M.“ (*Pomykalová, 1995, s. 88*)*

Druhou podmínku lze nahradit podmínkou ekvivalentní: každý bod, který nemá danou vlastnost, do množiny $M$ nepatří. Pokud vyšetřujeme množinu bodů dané vlastnosti, je nutné splnění obou těchto podmínek. Příkladem množiny bodů dané vlastnosti je kružnice se středem v bodě $S$ a reálným poloměrem $r$, což je množina bodů, které mají od středu $S$ vzdálenost $r$. Všechny body kružnice mají od středu $S$ vzdálenost $r$ a zároveň všechny body, které mají od středu $S$ vzdálenost jinou než $r$, do kružnice nepatří. Dalšími příklady mohou být osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice nebo středy kružnic o poloměru $r$, dotýkající se dané kružnice.

Metodická poznámka: Konstrukce a diskuze o počtu řešení, které by měly být v části *Klasický postup řešení*, jsou komentovány až v části *Využití GeoGebry.*

### 3.1.1 Konstrukční úlohy

**Úloha 1** (Složka *Uloha_1* v příloze)

**Zadání:** Jsou dány kružnice $k_1(S_1,\ 2\text{ cm})$, $k_2(S_2,\ 4\text{ cm})$, $|S_1S_2| = 7$ cm. Sestrojte všechny kružnice, které mají poloměr $r = 1{,}5$ cm a dotýkají se obou kružnic. (Davidová, 2005, s. 51)

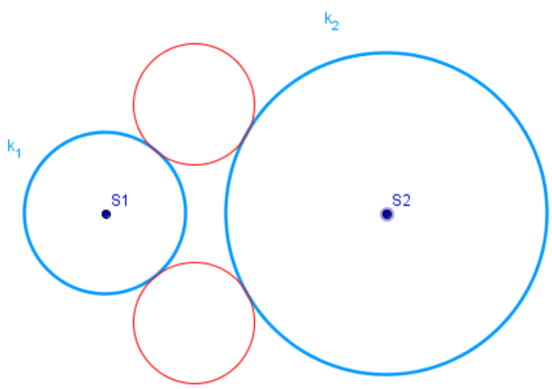
**Parametry úlohy:** Tato úloha je zadána konkrétně, ale my ji rozšíříme o dva parametry. Prvním bude vzdálenost středů kružnic $|S_1S_2| = d$ a druhým poloměr $r$ hledané kružnice.

**Cíl úlohy:** Vzhledem k daným parametrům má úloha mnoho možných řešení, která nemusí být na první pohled zřejmá. Je potřeba tuto úlohu rozdělit na několik klíčových podúloh, které jednotlivá řešení objasní. Cílem úlohy je vysvětlit postupy řešení těchto podúloh a jejich následná aplikace na výslednou úlohu s parametrem a zjištění všech možných řešení.

**Klasický postup řešení**:

Rozbor:

- První část řešení této úlohy by v klasickém řešení obsahovala náčrtek odpovídající výslednému řešení bez parametru (obr. 8). V závislosti na parametru může existovat několik různých řešení.




**Obr. 8 - Náčrtek**

- V rámci rozboru úlohy dojdeme k tomu, že k sestrojení středů hledaných kružnic bude potřeba použít množiny bodů dané vlastnosti. Hledáme množiny středů kružnic, které mají poloměr $r$ a dotýkají se kružnic $k_1$ a $k_2$. Pro jednu kružnici $k(S, r_1)$ jsou těmito množinami středů kružnice $m$, $n$, $l$ soustředné s kružnicí $k$. Jejich poloměry jsou $r_m = r + r_1$, $r_n = r_1 - r$ a $r_l = r - r_1$. Z uvedených rovností je patrné, že v závislosti na poloměrech $r$ a $r_1$ nemusí kružnice $n$ a $l$ existovat. Vzájemná poloha kružnice hledané a kružnice $k$ je dána tím, na které z kružnic $m$, $n$, $l$ leží střed hledané kružnice. Mohou tedy nastat tři případy:

1. Pokud hledaná kružnice leží vně kružnice $k$, pak její střed leží na kružnici $m$.
2. Pokud hledaná kružnice leží uvnitř kružnice $k$, pak její střed leží na kružnici $n$.
3. Pokud kružnice $k$ leží uvnitř hledané kružnice, pak střed hledané kružnice leží na kružnici $l$.

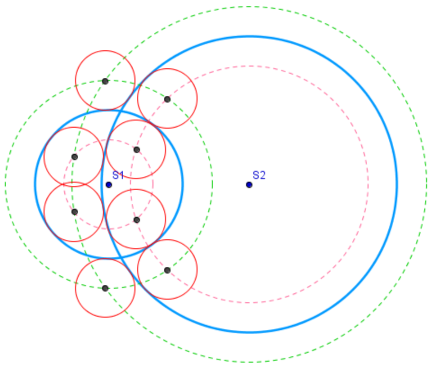
- Nalezení středů hledaných kružnic je další částí rozboru. Každá ze zadaných kružnic $k_1$ a $k_2$ má až tři soustředné kružnice popsané výše, na kterých musí ležet středy hledaných kružnic. S $k_1$ jsou to soustředné kružnice $m_1$, $n_1$ a $l_1$, s $k_2$ jsou to soustředné kružnice $m_2$, $n_2$ a $l_2$.
  Každá z kružnic $m_1$, $n_1$ a $l_1$ může mít nejvýše dva průsečíky s každou z kružnic $m_2$, $n_2$ a $l_2$. Proto v závislosti na poloměru hledané kružnice a na vzdálenosti středů zadaných kružnic může existovat až osmnáct těchto průsečíků (viz obr. 9a, 9b-pro různé parametry).

Postup konstrukce pro průsečíky $m_1$ a $m_2$:

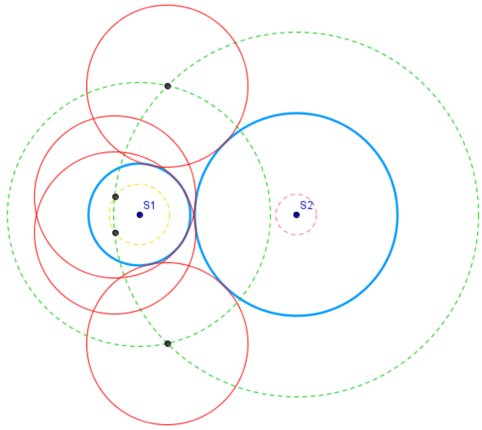
1. $k_1$; $k_1 (S_1, 2 \text{ cm})$
2. $k_2$; $k_2 (S_2, 4 \text{ cm})$, $|S_1S_2| = 7 \text{ cm}$
3. $m_1$; $m_1 (S_1, 3{,}5 \text{ cm})$
4. $m_2$; $m_2 (S_2, 5{,}5 \text{ cm})$
5. $A$; $A \in (m_1 \cap m_2)$
6. $o$; $o (A_1, 1{,}5 \text{ cm})$

**Využití GeoGebry:**

**Komentář ke konstrukci:** Dvě možná řešení s parametry jsou ukázána na obr. 9a, 9b. Pokud bychom se tuto úlohu pokoušeli konstruovat na papír, museli bychom jednotlivá řešení konstruovat do samostatných nákresů. Výhodou GeoGebry je to, že můžeme konstrukci úlohy provést obecně pro zadání s parametry, to umožní funkce *posuvník*. Řešitel může libovolně měnit parametry $d$ a $r$ pomocí posuvníku a hledat řešení pro různé hodnoty parametrů. Všechny objekty je v GeoGebře možné barevně rozlišit, což značně usnadňuje orientaci v nákresu. Vzhledem k tomu, že se při změně parametrů jednotlivé pomocné kružnice mění, mizí nebo přibývají, může být nákres nepřehledný a tato nepřehlednost může ztěžovat zkoumání počtu hledaných kružnic.



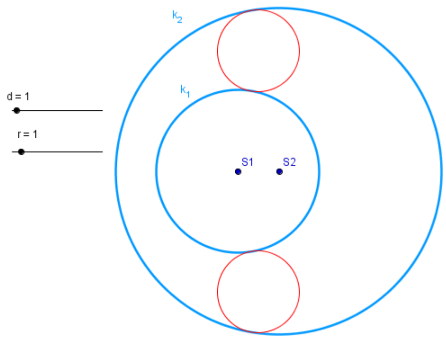

**Obr. 9a – Osm řešení**



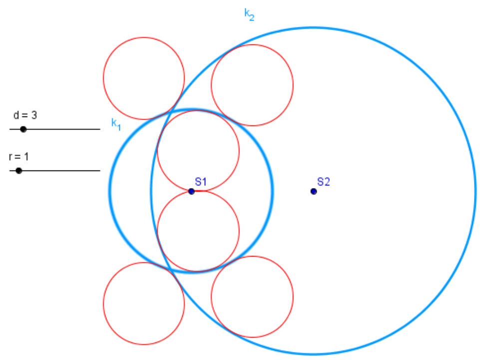

**Obr. 9b – Čtyři řešení**

*Komentář: Modře jsou vyznačeny kružnice zadané, červeně kružnice hledané. Žlutě, zeleně a růžově jsou vyznačeny kružnice možných středů hledaných kružnic.*

**Podpora diskuze:** Mnohem lepší orientaci v hledání možných řešení bychom získali, pokud bychom měli zobrazeny pouze ty objekty, které k hledání řešení potřebujeme. V GeoGebře můžeme využít volby *Zobrazit objekt*, díky které můžeme skrýt pomocné kružnice a ponechat pouze kružnice zadané a kružnice hledané (obr. 10a, 10b). V tomto případě pak není cílem zkoumat postup konstrukce, ale pouze usnadnit diskuzi k počtu možných řešení vzhledem k parametrům *d* a *r*.



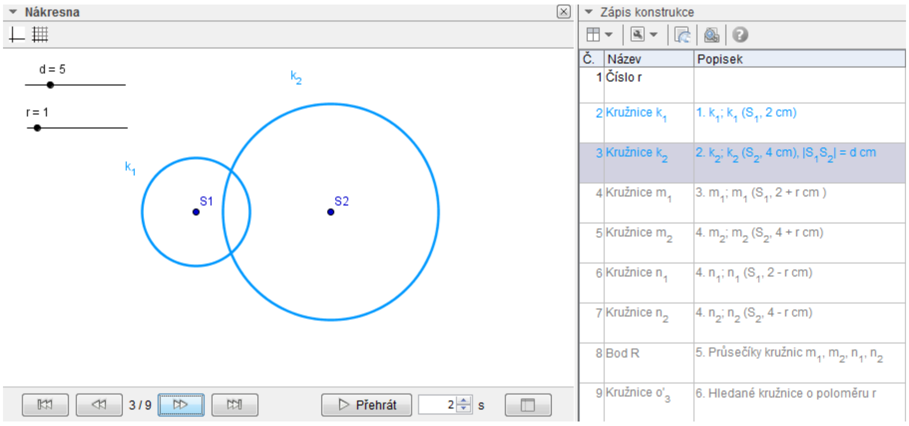

**Obr. 10a – Dvě řešení**




**Obr. 10b – Šest řešení**

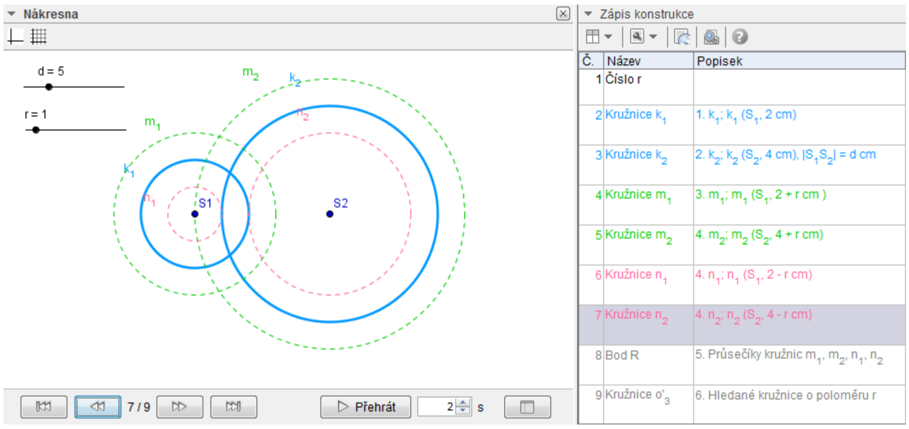
*Komentář: Na obrázcích lze snadno rozeznat, že pro velikost hledané kružnice* $r = 1$ cm *existují při vzdálenosti středů* $d = 1$ cm *dvě řešení (obr. 10a) a při vzdálenosti středů* $d = 3$ cm *existuje* 6 *možných řešení (obr. 10b).*

**Postup konstrukce:** Pokud se na tuto úlohu budeme dívat z hlediska postupu konstrukce, opět nám GeoGebra usnadní práci. Záznam konstrukce je možné sledovat jako animaci, a to buď automaticky od začátku do konce, nebo konstrukci odkrokovat manuálně (viz obr. 11, 12, 13). Tato možnost se vyplatí zejména ve chvílích, kdy je potřeba se k jednotlivým krokům vracet.



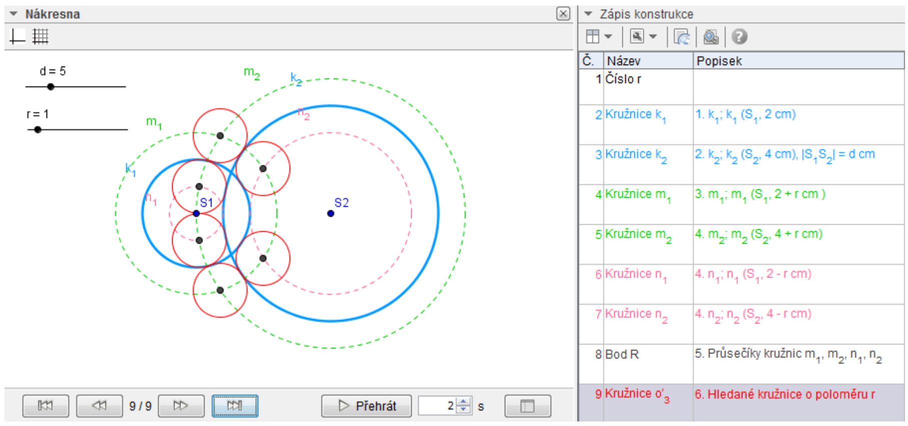

**Obr. 11 – Krok 3**

*Komentář: V pravé části obrázku je označen aktuální konstrukční krok – sestrojení kružnice $k_2$. Na liště tlačítek pro krokování na spodní straně obrázku je vidět zastavení na třetím kroku z devíti.*




**Obr. 12 – Krok 7**

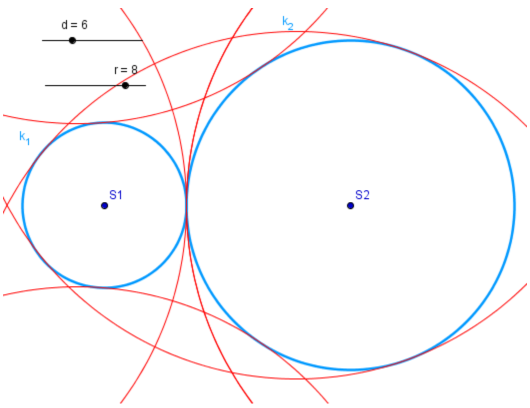
*Komentář: Krok 7- sestrojení kružnic středů $m_1$, $m_2$, $n_1$, $n_2$.*



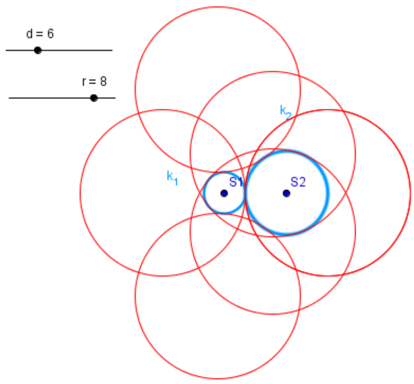

**Obr. 13 – Krok 9**

*Komentář: Krok 9- sestrojení hledaných kružnic.*

**Pružnost nákresny:** Výhodou řešení této úlohy v programu GeoGebra je možnost přiblížení, oddálení či posunutí náhledu. Některá řešení mohou být realizovatelná pouze pro velké hodnoty parametrů. Například pokud chceme zobrazit ta řešení, kdy hledaná kružnice obsahuje obě kružnice zadané, bude její poloměr větší než součet poloměrů těchto kružnic. Pokud bychom tuto úlohu řešili na papír, museli bychom pracovat s velkými rozměry nákresu. V GeoGebře je možné pohled na nákresnu oddálit a tím zmenšit náhled na zkoumané objekty (obr. 14a, 14b).




**Obr. 14a - Normální náhled**

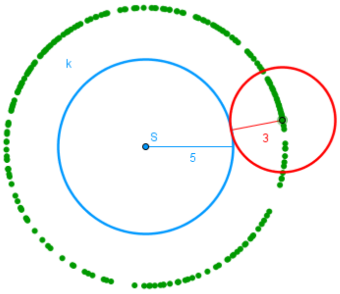



**Obr. 14b – Oddálený náhled**

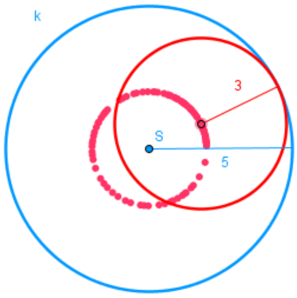
*Komentář: V obr. 14a se můžeme detailněji podívat na místa dotyku kružnic. Na obr. 14b nevidíme všechny detaily, ale můžeme hledané kružnice vidět celé.*

**Základní znalosti:** Ke konstrukci hledaných kružnic se používají množiny bodů dané vlastnosti. Je tedy nutné porozumět tomu, jak takové body vznikají, a k tomu můžeme opět využít GeoGebru. S její pomocí je možné tuto látku vysvětlit názorně, a to například takto: Pokud hledáme všechny kružnice o poloměru *r*, které se dotýkají kružnice zadané, budou všechny jejich středy ležet na soustředné kružnici ke kružnici zadané. Pomocí volby *Stopa zapnuta* je možné toto tvrzení názorně ukázat. Narýsujeme jednu kružnici, která splňuje podmínky zadání, a jejím pohybem vytvoříme stopu jejího středu (viz obr. 15a, 15b, 15c). Vznikne množina středů hledaných kružnic. Tyto množiny existují tři, pro tři možné polohy hledané kružnice.

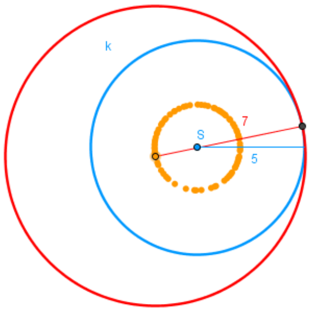
- Hledaná kružnice může ležet vně kružnice zadané (obr. 15a),
- uvnitř kružnice zadané (obr. 15b)
- nebo může zadaná kružnice ležet uvnitř hledané kružnice (obr. 15c).




**Obr. 15a – Vnější dotyk**



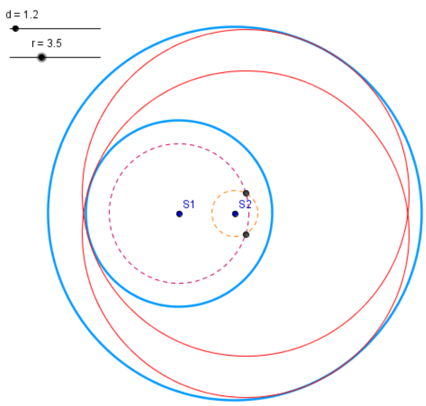

**Obr. 15b – Vnitřní dotyk**



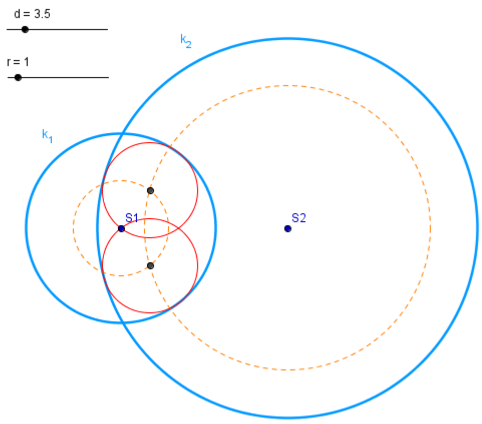

**Obr. 15c – Zadaná uvnitř hledané**

*Komentář: Vytvoříme jednu kružnici, která splňuje dané podmínky. Množinu středů hledaných kružnic pak vytváří stopa, která vzniká pohybem této kružnice. Jak spočítáme poloměr kružnice středů lze odvodit z obr. 15a, 15b, 15c, kde úsečky s číslem označují poloměr kružnice k a kružnice hledané. Poloměr kružnice středů vznikne jejich součtem nebo rozdílem.*

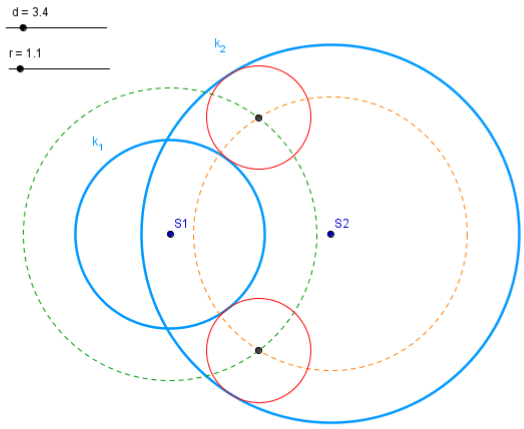
**Specifické situace:** V naší úloze jsou zadané kružnice dvě. Každá má tři soustředné kružnice množin středů hledané kružnice. Středy všech hledaných kružnic tedy budou ležet na průsečících těchto množin středů. Protože takových průsečíků může existovat až osmnáct, je pro jejich hledání lepší rozdělit úlohu na několik úloh jednodušších a omezených na menší počet řešení. Proto bylo zpracováno šest menších příkladů, které ukazují jednotlivé typy dotyku hledané kružnice. Pomocí parametrů lze měnit vzdálenost středů hledaných kružnic a poloměr kružnice hledané, abychom byli schopni rozlišit, kdy hledané kružnice existují a v jakém počtu (obr. 16a-f). Jednotlivé množiny středů hledaných kružnic jsou barevně rozlišeny stejně jako na obr. 15a,15b,15c.



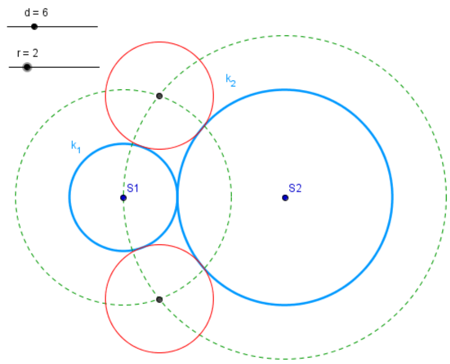

**Obr. 16a**



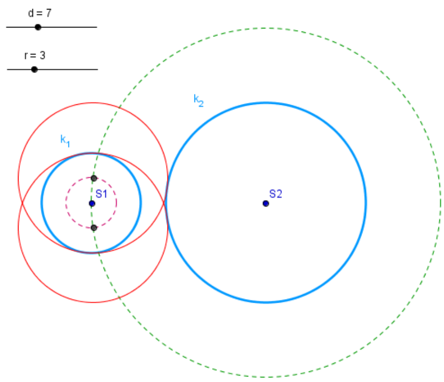

**Obr. 16b**



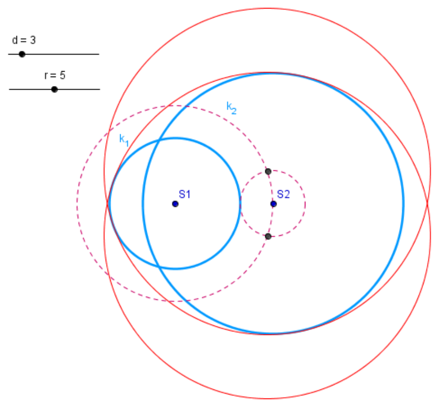

**Obr. 16c**




**Obr. 16d**




**Obr. 16e**




**Obr. 16f**

*Komentář: Na obr. 16a-f jsou různé možnosti dotyků hledaných kružnic s kružnicemi zadanými.*

## Úloha 2 (Složka *Uloha_2* v příloze)

**Zadání:** Je dána kružnice $k$ o středu $S$ a poloměru $r = 4$ cm a přímka $p$ ve vzdálenosti $d = 6$ cm od středu kružnice $k$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník $ABC$, jehož vrchol leží na přímce $p$ a kružnice $k$ je trojúhelníku vepsaná.

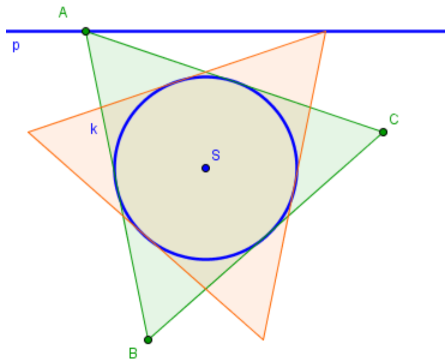
**Parametry úlohy:** Konkrétní zadání úlohy bylo pro potřeby této práce rozšířeno o parametry $d$ a $n$. Parametr $d$ je vzdálenost přímky $p$ od středu kružnice $k$ a parametr $n$ je počet vrcholů pravidelného $n$-úhelníku (dále jen $n$-úhelníku).

**Cíl úlohy:** Úloha má v závislosti na parametrech různé počty řešení a jejím cílem je prozkoumat, za jakých podmínek daná řešení nastávají. Dalším cílem úlohy je vizualizovat vztahy mezi $n$-úhelníkem a jeho kružnicí opsanou a kružnicí vepsanou.

**Klasický postup řešení:**

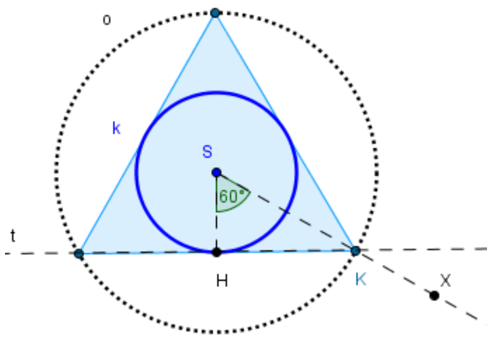
<u>Rozbor:</u>

- V klasickém řešení by byl nejprve proveden náčrtek hotové úlohy s konkrétními hodnotami. (obr. 17) Pro úlohu s parametry bychom diskutovali o možnostech vzniku různých řešení.




**Obr. 17 -Náčrtek**

- Pří analýze podmínek ze zadání úlohy zjistíme, že vrcholy trojúhelníku *ABC* jsou průsečíky přímky *p* a kružnice trojúhelníku opsané. Všechny rovnostranné trojúhelníky, jimž je vepsána kružnice *k,* mají stejnou kružnici opsanou, proto najdeme jeden vrchol libovolného rovnostranného trojúhelníku *KLM*, jemuž je kružnice *k* vepsaná (trojúhelník *KLM* zmiňujeme pouze pro ilustraci, prakticky hledáme pouze vrchol *K*), a to takto: Zvolíme libovolný bod *H* kružnice *k*, vedeme jím tečnu ke kružnici *k*, a dále sestrojíme polopřímku *SX*, přičemž úhel *HSX* = 60° (viz obr. 18). Průsečík *K* tečny a polopřímky *SX* je jeden vrchol hledaného trojúhelníku. Pak už lze sestrojit kružnici opsanou trojúhelníku *ABC*, se středem v bodě *S* a procházející bodem *K*.




**Obr. 18 – Úhel *HSX***

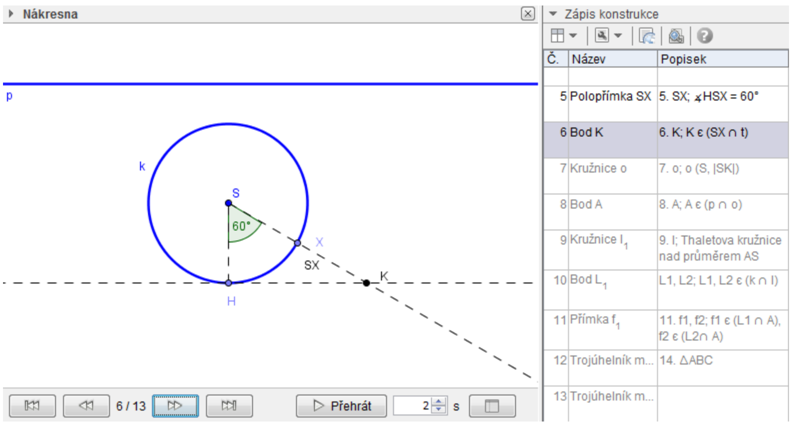
- Poslední částí rozboru je hledání postupu, jak sestrojit hledaný trojúhelník *ABC*. Průsečíky *A* a *A'* kružnice trojúhelníku opsané a přímky *p* jsou vrcholy dvou možných trojúhelníků. Sestrojením tečen ke kružnici *k* z těchto průsečíků nalezneme další vrcholy trojúhelníku *ABC*.

Postup konstrukce:

1. $k$; $k(S, 4\text{ cm})$
2. $p$; $v(S; p) = 6\text{ cm}$
3. $H$; $H \in k$
4. $t$; $t \in H \wedge t \perp SH$
5. $SX$; $\measuredangle HSX = 60°$
6. $K$; $K \in (SX \cap t)$
7. $o$; $o(S, |SK|)$
8. $A$; $A \in (p \cap o)$
9. $l$; Thaletova kružnice nad průměrem $AS$
10. $L_1, L_2$; $L_1, L_2 \in (k \cap l)$
11. $f_1, f_2$; $f_1 \in (L_1 \cap A)$, $f_2 \in (L_2 \cap A)$
12. $B$; $B \in (f_1 \cap o)$
13. $C$; $C \in (f_2 \cap o)$
14. $\triangle ABC$

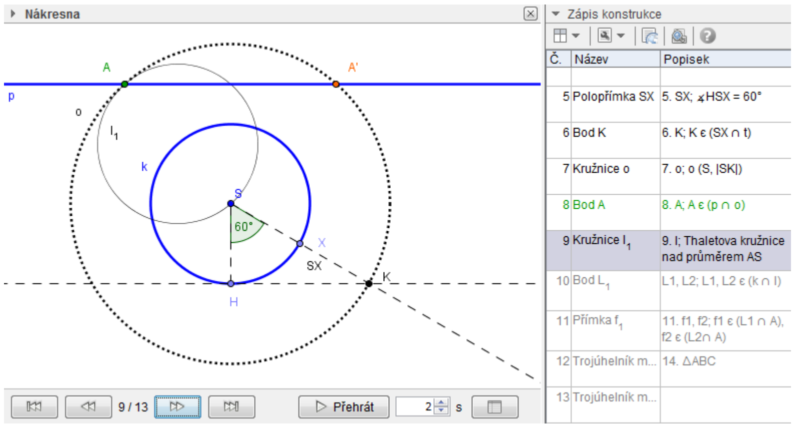
**Využití GeoGebry:**

**Postup konstrukce:** Pokud by měl být postup popsaný výše proveden v hodině, ztrácel by se konstruováním na tabuli čas, který by bylo možné využít pro vysvětlení jednotlivých kroků. Proto je vhodné vytvořit konstrukci v GeoGebře a využít možnosti jejího krokování. Na obr. 19, 20, 21 jsou některé důležité kroky konstrukce.



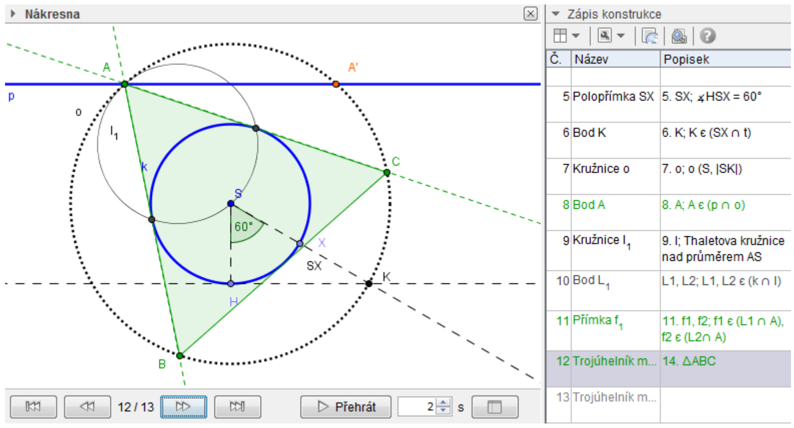

**Obr. 19 – Krok 6**

*Komentář: V pravé části obrázku je zvýrazněn aktuální krok – sestrojení bodu K.*




**Obr. 20 – Krok 9**

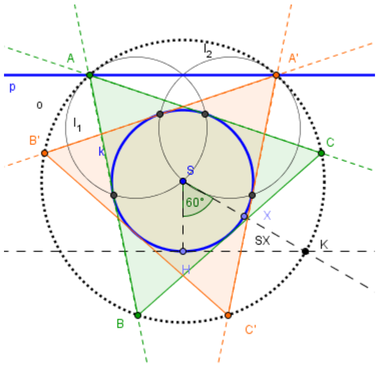
*Komentář: 9. krok konstrukce, narýsování Thaletovy kružnice nad průměrem AS.*




**Obr. 21 – Krok 12**

*Komentář: Předposlední krok konstrukce – sestrojení trojúhelníku ABC. Posledním krokem je konstrukce dalšího řešení.*

**Komentář ke konstrukci:** Na obr. 22 nalezneme zkonstruovaný příklad pro trojúhelník podle postupu popsaného výše. Obsahuje Thaletovy kružnice a všechny pomocné přímky. Tato možnost je vhodná, pokud je zapotřebí zopakování jednodušších postupů, jako například tečny z bodu ke kružnici. Pokud bychom chtěli tento způsob konstrukce aplikovat na úlohu s parametry, bylo by její řešení komplikované. Výhodou GeoGebry je, že lze některé postupy zjednodušit a využít nástrojů, které nabízí. Tečny lze sestrojit nástrojem *Tečny z bodu,* pomocí nástroje *Mnohoúhelník* lze vytvořit mnohoúhelník zadáním dvou bodů a počtu vrcholů. Výhodou tohoto nástroje je možnost zadání parametru $n$ pro počet vrcholů $n$-úhelníku, jehož hodnoty lze měnit. Dále je možné zadat velikost úhlu, jehož pomocí hledáme kružnici opsanou, také obecně jako $\frac{360°}{2n}$, což opět umožní vytvořit objekty závislé na parametru $n$ a jeho změnou dynamicky zkoumat celý příklad. Při klasické konstrukci by nebylo možné této dynamičnosti dosáhnout.

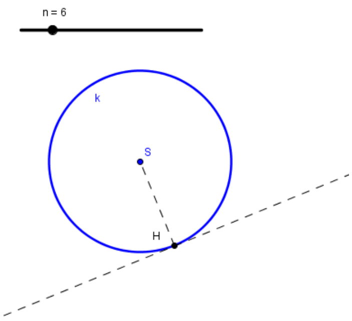



**Obr. 22– Celá konstrukce**

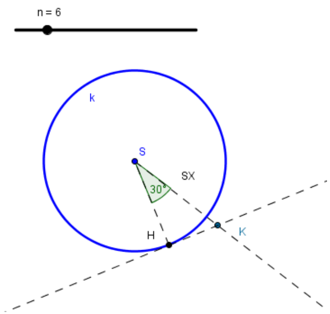
**Základní znalosti:** Ke zvládnutí konstrukce úlohy s parametry bez použití nástrojů GeoGebry je zapotřebí dvou základních znalostí, a to jak sestrojit kružnici *n*-úhelníku opsanou, pokud známe kružnici vepsanou, a jak sestrojit *n*-úhelník, pokud známe jeden jeho vrchol a kružnici opsanou a vepsanou. Pro vysvětlení těchto konstrukcí jsou vytvořeny dvě podúlohy, obsahující konstrukci s možností krokování postupu.

<u>Konstrukce kružnice opsané</u>: Konstrukce kružnice *n*-úhelníku opsané se konstruuje velmi podobným způsobem, který byl popsán v rozboru pro kružnici opsanou trojúhelníku. Vytvoříme tečnu ke kružnici *k* v libovolně zvoleném bodě *H* této kružnice. Bod *H* je středem jedné strany hledaného *n*-úhelníku. Protože velikost středového úhlu *n*-úhelníku je $\frac{360°}{n}$, je velikost úhlu, který svírá úsečka *SH* s úsečkou spojující hledaný vrchol a střed *S*, rovna polovině středového úhlu, tedy $\frac{360°}{2n}$. Sestrojíme-li polopřímku *SX*, svírající tento úhel s úsečkou *SH*, pak je průsečík této přímky a tečny v bodě *H* hledaným vrcholem *n*-úhelníku.

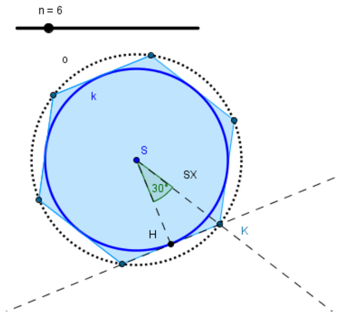
Poznámka: výsledný *n*-úhelník je vytvořen pomocí nástrojů GeoGebry a je součástí konstrukce, aby bylo zjevné, že bod *K* je jeho vrcholem.




**Obr. 23a – Tečna z bodu *H***




**Obr. 23b – Bod *K***

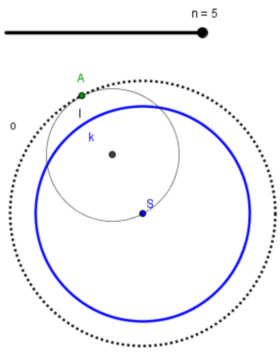



**Obr. 23c - Šestiúhelník**

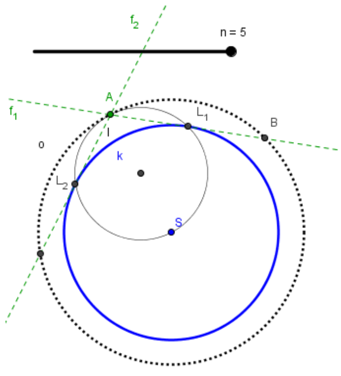
*Komentář: Na obr. 23a, 23b, 23c jsou konstrukční kroky pro šestiúhelník.*

<u>Hledání vrcholů *n*-úhelníku</u>: Abychom nalezli další vrcholy *n*-úhelníku, potřebujeme získat tečny ke kružnici *k* z vrcholu *A*. Body, ve kterých se tečny dotýkají kružnice *k*, nalezneme pomocí Thaletovy kružnice (obr. 24a). Průsečíky těchto tečen s kružnicí opsanou jsou dalšími dvěma vrcholy hledaného *n*-úhelníku (obr. 24b). Vzdálenost od bodu

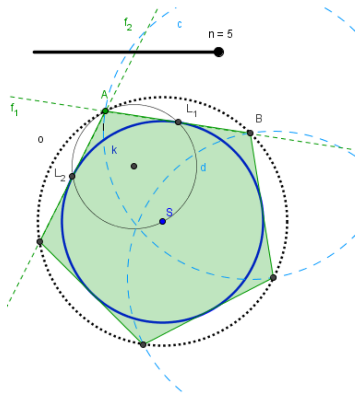
*A* k některému z těchto průsečíků je délka strany *n*-úhelníku. Z nalezeného průsečíku naneseme délku strany *n*-úhelníku na kružnici opsanou, a tím získáme další vrchol. Tento krok opakujeme, než nalezneme všechny vrcholy *n*-úhelníku (obr. 24c). Vzhledem k tomu, že je v této podúloze potřeba vytvořit *n*-úhelník bez pomoci nástrojů GeoGebry a zbývající vrcholy jsou tedy vytvářeny ručně, je parametr *n* nastaven pouze na hodnoty 3, 4 a 5.




**Obr. 24a – Thaletova kružnice**



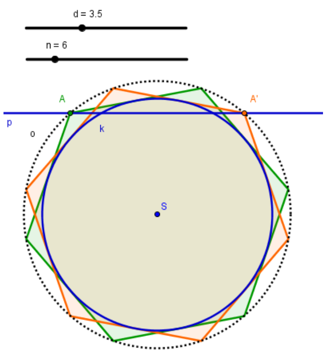

**Obr. 24b - Tečny**



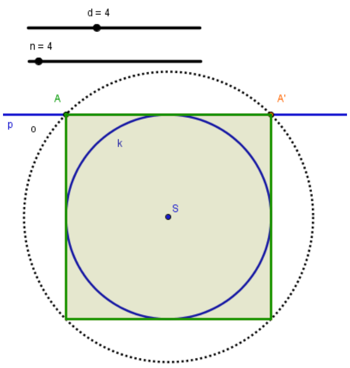

**Obr. 24c - Pětiúhelník**

*Komentář: Obr. 24a: sestrojení Thaletovy kružnice, 24b: sestrojení tečny z bodu A, 24c: hledaný pětiúhelník.*

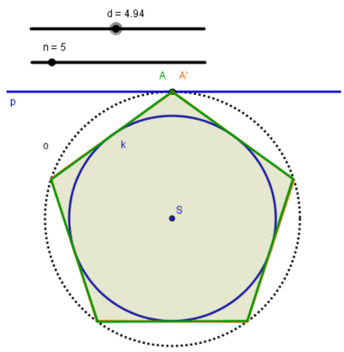
**Podpora diskuze:** Kromě zjednodušení konstrukce lze také měnit styl a barevnost čar, což výsledný nákres zpřehlední. Protože úloha s parametry je koncipována primárně na hledání možných řešení vzhledem k parametrům, je vhodné pomocné objekty skrýt a ponechat pouze zadanou přímku, kružnici mnohoúhelníku opsanou, zadanou kružnici a výsledné *n*-úhelníky. Na obr. 25a, 25b a 25c lze vidět některá možná řešení v přehledné formě.




**Obr. 25a – Šestiúhelník**




**Obr. 25b – Čtverec**



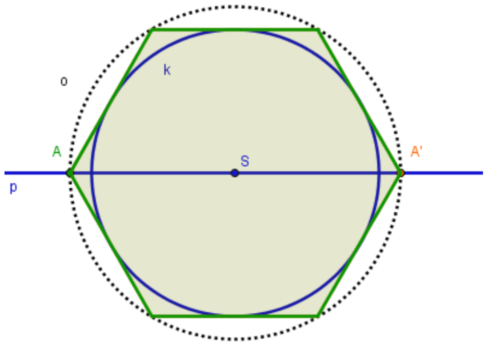

**Obr. 25c - Pětiúhelník**

**Specifické situace:** Aby bylo možné lépe porozumět, jaká možná řešení mohou vzniknout, rozebereme je podle vzájemné polohy přímky *p* a kružnice *k*.

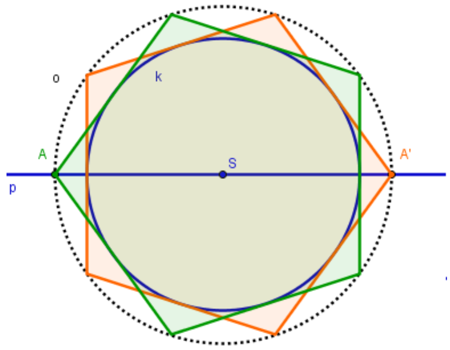
<u>Přímka protíná kružnici</u>: Tato situace může mít jedno nebo dvě řešení.

- Pokud je parametr $d = 0$, prochází přímka *p* středem kružnice *k*. V tomto případě záleží na počtu vrcholů *n*-úhelníku.

- ○ Pokud je $n$ sudé, je $n$-úhelník souměrný podle přímky $p$ a existuje pouze jedno řešení (obr. 26a).
- ○ Pokud je $n$ liché, $n$-úhelník souměrný podle přímky $p$ není a řešení jsou dvě (obr. 26b).

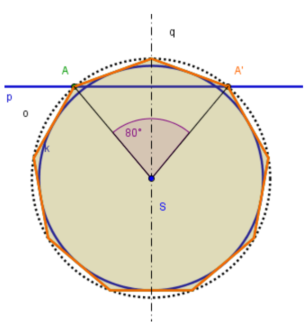



**Obr. 26a – Šestiúhelník**

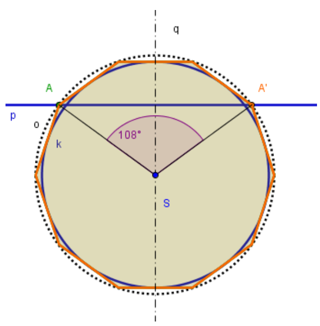



**Obr. 26b – Pětiúhelník**

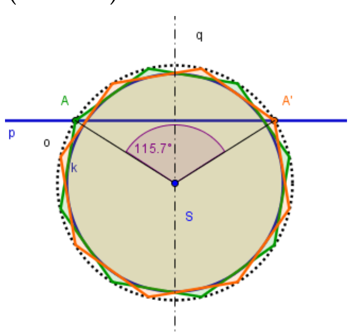
- Pokud přímka $p$ neprochází středem $S$, mohou existovat opět jedno nebo dvě řešení.
  - ○ Jedno řešení vznikne v případě, že je $n$-úhelník souměrný podle přímky $q$ kolmé k přímce $p$ a procházející středem $S$. Kdy tato situace nastává, lze vysvětlit v podúloze *Uloha_2_Poduloha_3.ggb*. Souměrný podle přímky $q$ je $n$-úhelník tehdy, když na přímce $p$ leží dva jeho vrcholy (viz obr. 27a, 27b). Průsečíky kružnice $o$ a přímky $p$ budou tedy oba náležet stejnému $n$-úhelníku. Středový úhel pravidelného $n$-úhelníku je roven $\frac{360°}{n}$, proto musí být středový úhel náležící tětivě mezi libovolnými dvěma vrcholy $i$-násobkem tohoto úhlu, kde $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$. Z toho plyne, že jedno řešení má v tomto případě úloha tehdy, pokud je úhel $ASA' = i\frac{360°}{n}$, kde $i = 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ (pro $i = 1$ je přímka $p$ tečnou kružnice $k$ a pro $i = \frac{n}{2}$ prochází přímka $p$ středem $S$ a oba tyto případy jsou řešeny samostatně).
  - ○ Ve všech ostatních případech jsou řešení dvě (obr. 27c).




**Obr. 27a – Devítiúhelník**



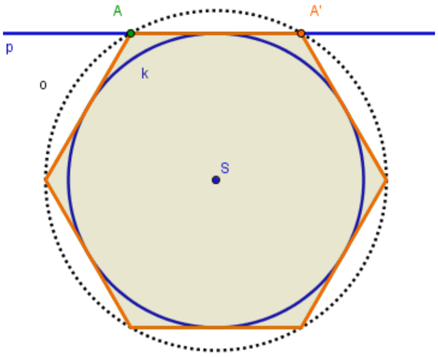

**Obr. 27b – Desetiúhelník**



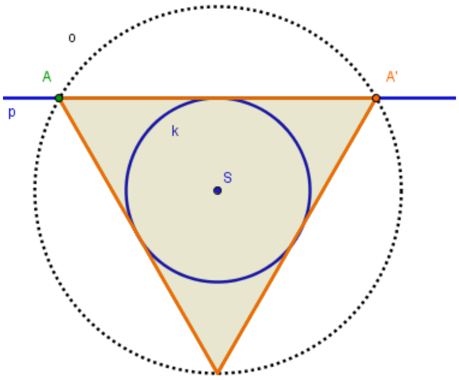

**Obr. 27c – Osmiúhelníky**

*Komentář: Na obr. 27a je devítiúhelník souměrný podle přímky q s úhlem* $ASA' = 2 \times 40°$*, na obr. 27b je desetiúhelník souměrný podle přímky q s úhlem* $ASA' = 3 \times 36°$*. Na obr. 27c jsou dva osmiúhelníky, úhel 115,7° není dělitelný 45°.*

- Pokud je přímka $p$ tečnou kružnice $k$, má tato úloha vždy právě jedno řešení, protože jedna strana $n$-úhelníku leží na přímce $p$ (viz obr. 28a a 28b).

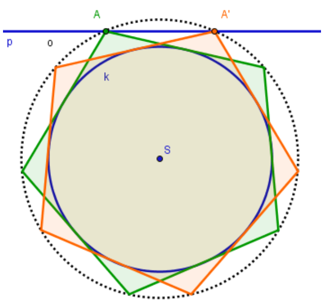



**Obr. 28a - Šestiúhelník**

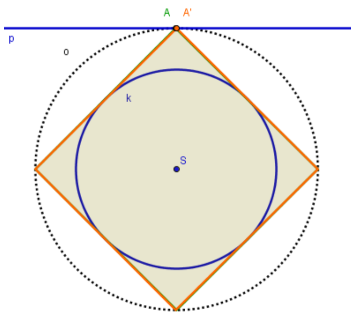



**Obr. 28b - Trojúhelník**

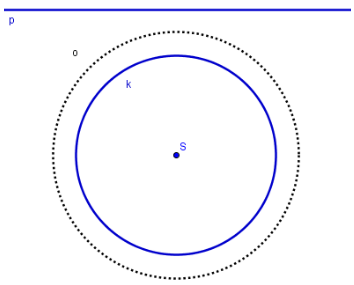
- Pokud leží přímka $p$ mimo kružnici $k$, mohou existovat dvě, jedno nebo žádné řešení.
    - V případě, že přímka $p$ protíná kružnici $o$ ve dvou bodech, existují dvě možná řešení (obr. 29a).
    - Pokud je přímka $p$ tečnou kružnice $o$, existuje jedno možné řešení (obr. 29b).
    - Žádné řešení nebude mít úloha v případě, že přímka $p$ kružnici $o$ neprotíná (obr. 29c).




**Obr. 29a – Pětiúhelník**

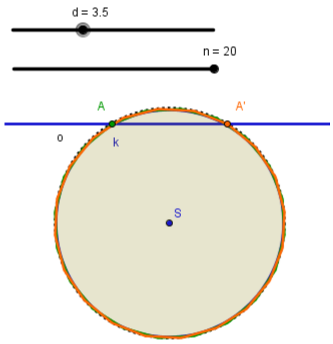



**Obr. 29b – Čtverec**

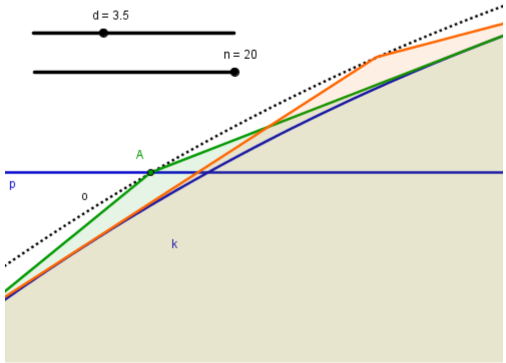



**Obr. 29c – Žádné řešení**

**Pružnost nákresny:** Při hledání možných řešení úlohy si lze povšimnout, že pro větší hodnoty parametru $n$ přestává být nákres přehledný, jelikož některé objekty začínají splývat a možná řešení nejsou viditelná. Výhodou GeoGebry je možnost přiblížení náhledu, ze kterého je zřejmé, že mezi kružnicemi opsanou a vepsanou zůstává prostor a $n$-úhelník zůstává mezi nimi, což by při ukázce konstrukce na papír nemuselo být žákům zřejmé. Žáci by si v tomto případě měli všimnout, že s přibývajícími počty vrcholů se $n$-úhelník blíží tvaru kružnice a kružnice vepsaná i opsaná se vzájemně přibližují (viz obr. 30a, 30b).




**Obr. 30a – Normální náhled**




**Obr. 30b – Detail**

*Komentář: Na obr. 30a je dvacetiúhelník a objekty téměř splývají. Na obr. 30b je přiblížený pohled na stejnou situaci.*

## Úloha 3 (Složka *Uloha_3* v příloze)

Zajímavými konstrukčními úlohami jsou tzv. Apolloniovy úlohy, které se zabývají konstrukcí kružnice, která se dotýká tří zadaných útvarů. Těmito útvary jsou kružnice, bod a přímka, jejichž kombinací vzniká deset různých Apolloniových úloh, které lze dále dělit podle vzájemné polohy zadaných útvarů. Speciálními případy Apolloniových úloh jsou úlohy Pappovy, kde jsou zadanými útvary kružnice nebo přímky a jeden bod, který leží na některé z nich. Těchto úloh je šest.

Apolloniovy a Pappovy úlohy jsou často řešeny s využitím dynamických softwarů včetně GeoGebry a jsou v mnoha podobách dostupné prostřednictvím internetu (např. [2]). Většinou jsou ovšem řešeny pouze obecně bez podrobnějšího rozboru možných vzájemných poloh zadaných útvarů. Dále je řešena jedna z Pappových úloh.

**Zadání:** Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice $k(S, r = |SM|)$ v daném bodě $M$ a přímky $p$.

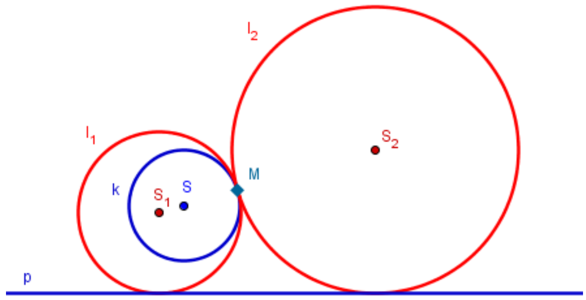
**Parametry úlohy:** V této úloze za parametry považujeme vzdálenost přímky $p$ od středu $S$ kružnice $k$ a polohu bodu $M$ na kružnici $k$.

**Cíl úlohy:** Cílem této úlohy je zkoumat vliv vzájemné polohy zadaných útvarů na počet a polohu možných řešení, s podrobnějším rozebráním specifických situací.

**Klasický postup řešení:**

Rozbor:

- První část rozboru obsahuje náčrtek hotové úlohy (obr. 31), kde zvolíme některou z možných vzájemných poloh přímky a kružnice.




**Obr. 31 – Náčrtek**

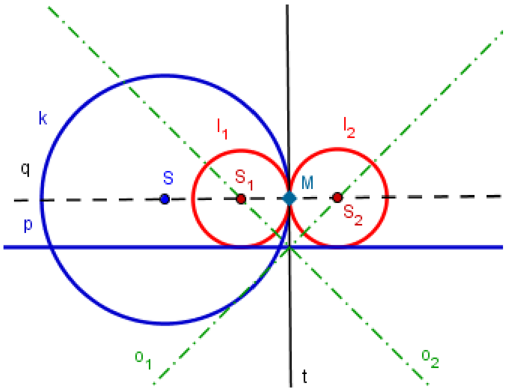
- Středy hledaných kružnic musí ležet na přímce *q*, která je množinou středů všech kružnic, které se dotýkají kružnice *k* v daném bodě *M*. Tato přímka prochází body *S* a *M*.
- Kružnice, které se dotýkají v jednom bodě, mají společnou tečnu *t*, která prochází daným bodem. Protože přímka *q* prochází středy kružnic, musí být k ní tečna *t* kolmá.
- Vzhledem k tomu, že tečna *t* i přímka *p* jsou tečnami hledaných kružnic, mají obě stejnou vzdálenost od středu hledané kružnice. Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou různoběžných přímek, je osa úhlů těchto přímek. Průsečíky os úhlů přímek *t* a *p* a přímky procházející body *S* a *M* jsou středy hledaných kružnic.

<u>Postup konstrukce:</u>

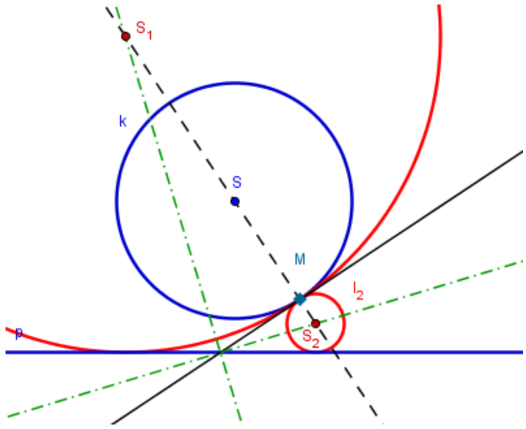
1. $q$; $q \in S \wedge q \in M$
2. $t$; $t \in M \wedge t \perp q$
3. $o$; osy úhlů určených přímkami $p$, $t$
4. $S_1$; $S_1 \in (o \cap q)$
5. $l$; $l(S_1, |SM|)$

**<u>Využití GeoGebry</u>:**

**Komentář ke konstrukci:** Pokud bychom danou úlohu rýsovali na papír, bylo by potřeba pro různé vzájemné polohy zadaných objektů rýsovat různé nákresy. GeoGebra umožňuje vytvořit zadané objekty obecně tak, že je možné měnit polohu přímky *p* vzhledem ke kružnici *k* a bodem *M* po této kružnici pohybovat. V jednom příkladu lze tedy zpracovat všechny možné situace vzájemné polohy zadaných objektů. Na tomto příkladu lze sledovat, jak změna polohy zadaných objektů ovlivňuje nejen výsledná řešení, ale také objekty pomocné. Dvě možné situace jsou na obr. 32a, 32b.




**Obr. 32a**

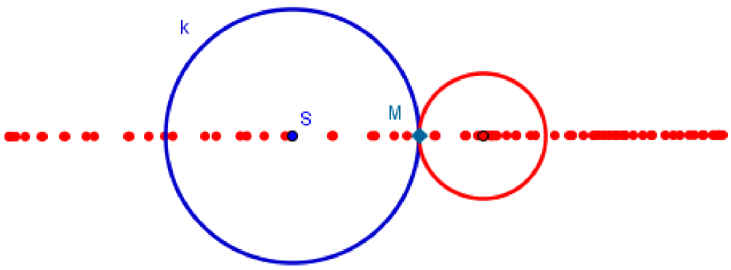



**Obr. 32b**

*Komentář: Na obr. 32a je řešení pro přímku p protínající kružnici k, na obr. 32b je řešení pro přímku p mimo kružnici k.*

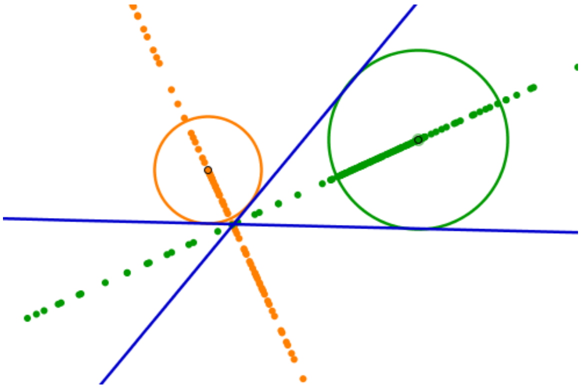
**Základní znalosti:** Aby bylo možné provést konstrukci této úlohy, je potřeba mít některé základní znalosti. Ke konstrukci využíváme množiny bodů dané vlastnosti, a to konkrétně množinu středů všech kružnic, dotýkajících se dané kružnice v daném bodě, a množinu středů všech kružnic, dotýkajících se dvou různoběžných přímek. K názornému vysvětlení, jak tyto body vznikají, lze využít GeoGebry a volby *Stopa zapnuta.*

- Množina středů všech kružnic, dotýkajících se dané kružnice v daném bodě, tvoří přímku, která prochází tímto bodem *M* a středem *S* zadané kružnice. Toto tvrzení lze znázornit pomocí příkladu *Uloha_3_Poduloha_1.ggb*. Sestrojíme jednu kružnici, která se dotýká dané kružnice v daném bodě, a jejímu středu zapneme stopu. Při pohybu tohoto bodu vznikne stopa, která odpovídá přímce procházející body *S* a *M* (viz obr. 33).

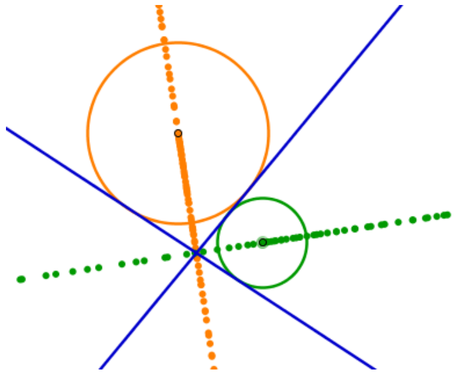



**Obr. 33 – Množina středů**

- Množina středů všech kružnic, které se dotýkají dvou různoběžných přímek, tvoří osy úhlů těchto přímek. V příkladu *Uloha_3_Poduloha2.ggb* jsou vytvořeny dvě různoběžné přímky a dvě kružnice, které se přímek dotýkají. Pokud zapneme stopu u středů těchto kružnic a budeme jimi pohybovat, vznikne názorná ukázka, že středy všech těchto kružnic leží na osách úhlů zadaných přímek (viz obr. 34a, 34b). Na tomto příkladu lze také předvést, že osy úhlů dvou různoběžných přímek jsou k sobě kolmé, bez ohledu na polohu těchto přímek.

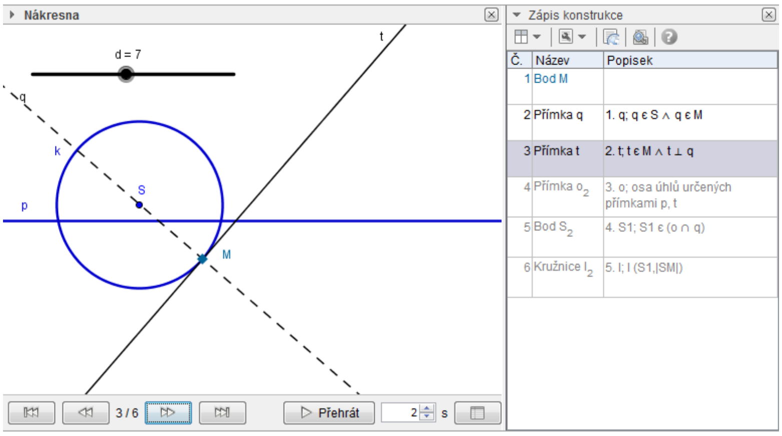


**Obr. 34a – Osy úhlů dvou různoběžných přímek**



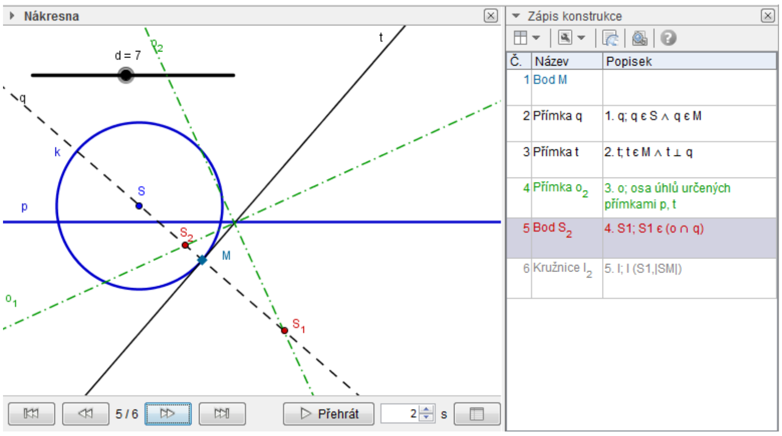
**Obr. 34b**

**Postup konstrukce:** V případě, že chceme sestrojit tuto úlohu v hodině, je možné vytvořit konstrukci v GeoGebře. Jednotlivé části konstrukce je pak možné pomocí tlačítek krokovat nebo se k některým částem vracet.



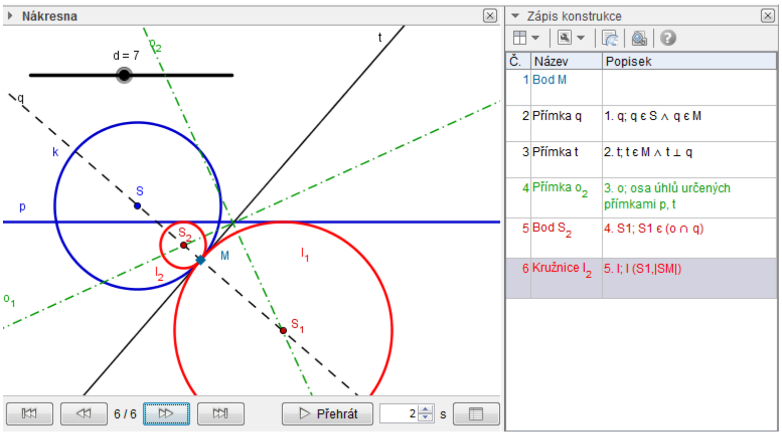

**Obr. 35 – Krok 3**

*Komentář: Vpravo na obrázku je označen* 3. *krok konstrukce – sestrojení tečny ke kružnici k z bodu M.*




**Obr. 36 – Krok 5**

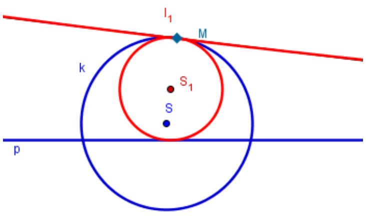
*Komentář: Vpravo na obrázku je označen* 5. *krok konstrukce – sestrojení středů hledaných kružnic.*



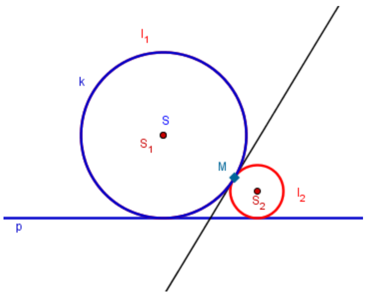

**Obr. 37 – Krok 6**

*Komentář: Vpravo na obrázku je označen poslední krok konstrukce – sestrojení hledaných kružnic.*

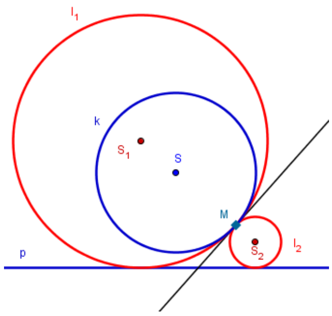
**Podpora diskuze:** Jedním z cílů příkladu je zkoumat možná řešení (viz obr. 38a, 38b, 38c) v závislosti na vzájemné poloze zadaných útvarů. Pro diskuzi o možných situacích, které mohou vzniknout, můžeme pomocí vypnutí volby *Zobrazit objekt* skrýt všechny pomocné objekty a ponechat pouze objekty, které budeme v tomto případě potřebovat.




**Obr. 38a – Dvě řešení**




**Obr. 38b – Jedno řešení**



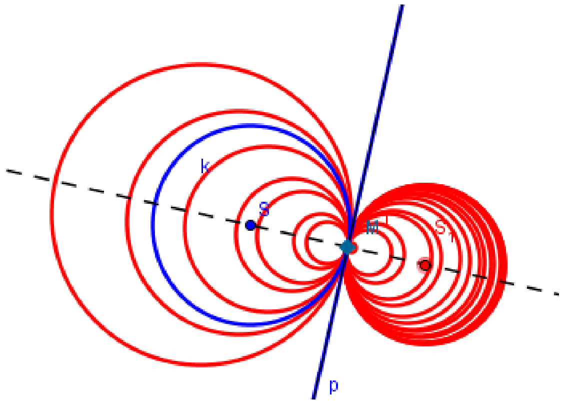

**Obr. 38c – Dvě řešení**

*Komentář: Na obr. 38a je jedna hledaná kružnice uvnitř kružnice k a druhá vně. Na obr. 38b je hledaná kružnice vně kružnice k, druhá je totožná s kružnicí k. Na obr. 38c je jedna hledaná kružnice vně kružnice k, druhá hledaná kružnice kružnici k obsahuje.*

**Specifické situace:** Abychom lépe porozuměli, jaká řešení a za jakých situací mohou existovat, rozdělíme příklad podle vzájemné polohy přímky *p* a kružnice *k*.

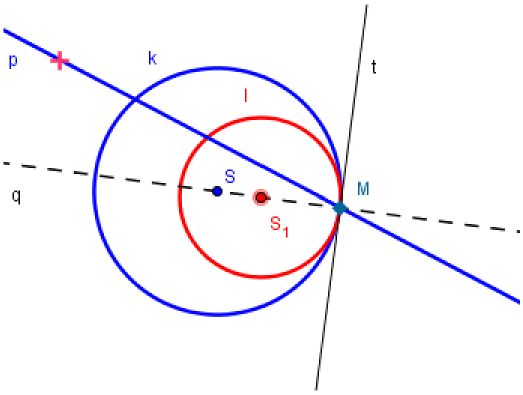
<u>Přímka *p* prochází bodem *M*</u>: Mohou nastat dvě možnosti, přímka *p* je tečnou kružnice nebo přímka *p* protíná kružnicí ve dvou bodech.
Poznámka: Tento případ je zpracován do samostatné podúlohy (*Uloha_3_Poduloha_3.ggb*), ve které je sestrojená kružnice *k*, kružnice *o*, jež se kružnice *k* dotýká v bodě *M*, a přímka *p*, která bodem *M* prochází. Pomocí červeného bodu lze měnit polohu přímky *p* a pohybem středu kružnice *o* lze měnit její poloměr.

- Pokud je přímka *p* tečnou kružnice *k* a prochází bodem *M*, existuje nekonečně mnoho řešení, jejichž středy leží na přímce procházející body *S* a *M*. GeoGebra bohužel v tomto případě zklame a v obecné úloze nevytvoří řešení žádné. V podúloze (*Uloha_3_Poduloha_4.ggb*) vytvořené k vysvětlení této možnosti lze při zapnutí stopy hledané kružnice vytvořit názornou ukázku možných řešení (viz obr. 39).

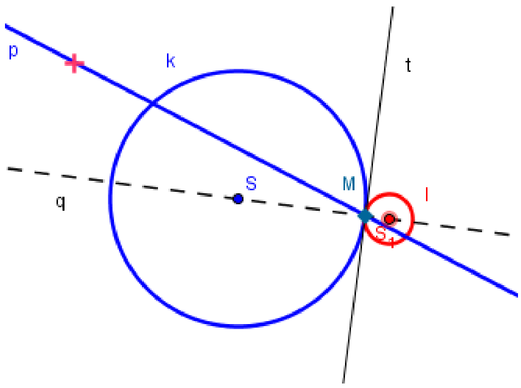



**Obr. 39 – Nekonečně mnoho řešení**

- Pokud přímka *p* prochází bodem *M*, ale není tečnou kružnice *k*, musí být její sečnou. V tomto případě hledaná kružnice *o* neexistuje, protože přímka *p* nebude nikdy její tečnou a nebudou mít tedy společný dotyk. V podúloze si lze povšimnout, že bez ohledu na polohu přímky *p* a velikost hledané kružnice bude přímka *p* vždy její sečnou (obr. 40a, 40b).



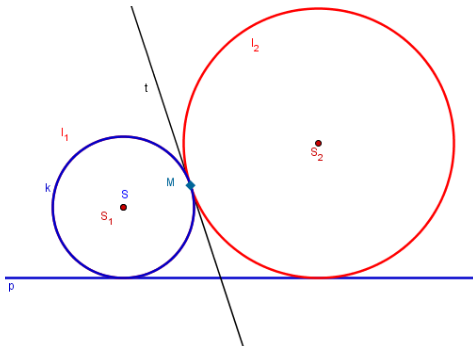

**Obr. 40a – Hledaná kružnice je uvnitř *k***



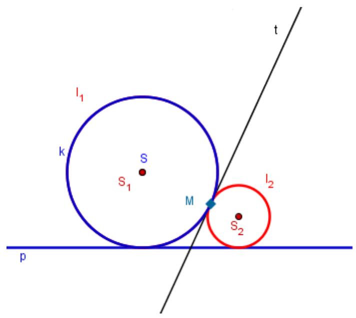

**Obr. 40b - Hledaná kružnice je vně *k***

*Komentář: Na obr. 40a, 40b vidíme, že přímka p vždy protíná hledanou kružnici.*

<u>Přímka *p* je tečnou kružnice *k* a neprochází bodem *M*</u>: Protože jedna z hledaných kružnic bude totožná s kružnicí *k*, může existovat vždy pouze jedno řešení (viz obr. 41a, 41b).




**Obr. 41a – Jedno řešení**



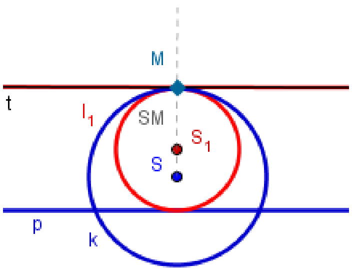

**Obr. 41b – Jiné řešení**

Tečna *t* je rovnoběžná s přímkou *p*: (Poznámka: *t* je tečna kružnice *k* procházející bodem *M*). V tomto případě hledáme kružnici, která se dotýká dvou rovnoběžných přímek v bodě *M* ležícím na jedné z nich, a takové řešení je pouze jedno.

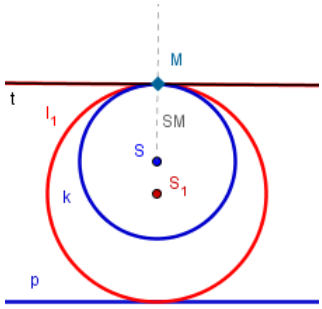
Mohou nastat tři situace vzájemné polohy hledané a zadané kružnice:

- Pokud přímka *p* kružnici *k* protíná, pak leží hledaná kružnice uvnitř kružnice *k*. (obr. 42a)
- Pokud přímka *p* leží mimo kružnici *k* a polopřímka *SM* neprotíná přímku *p*, pak kružnice *k* leží uvnitř hledané kružnice. (obr. 42b)
- Pokud přímka *p* neprotíná kružnici *k* a polopřímka *SM* protíná přímku *p*, pak hledaná kružnice leží mezi kružnicí *k* a přímkou *p*. (obr. 42c)

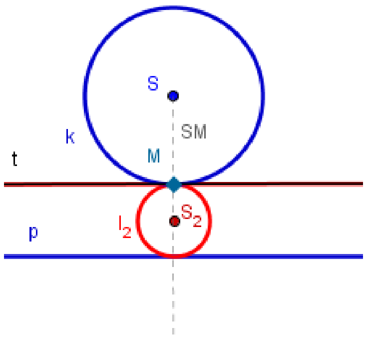
Poznámka: V této úloze pracujeme pouze s vlastními útvary. Pokud bychom předpokládali, že střed hledané kružnice může být v nevlastním bodě, pak by byla druhým řešením přímka totožná s tečnou *t*.




**Obr. 42a**



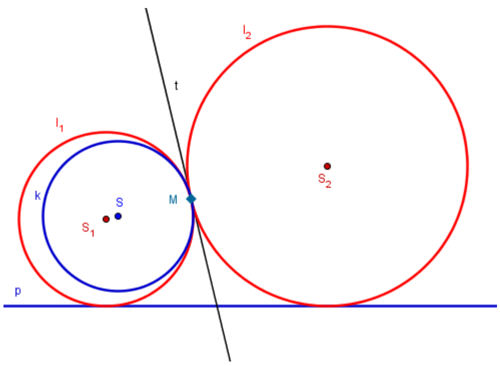

**Obr. 42b**



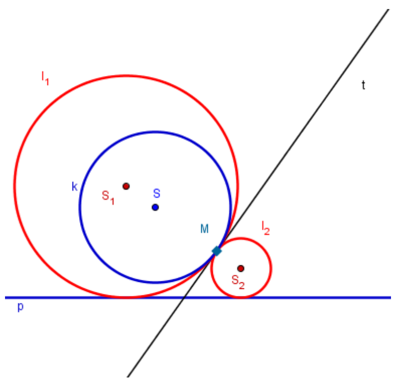

**Obr. 42c**

*Komentář: Tři situace vzájemné polohy zadané a hledané kružnice.*

Přímka *p* leží mimo kružnici *k*: V tomto případě vzniknou vždy dvě řešení (kromě případu, kdy je tečna *t* rovnoběžná s přímkou *p*). Jedna kružnice bude ležet na vnější straně kružnice *k*, druhá kružnice bude kružnici *k* obsahovat (viz obr 43a, 43b).



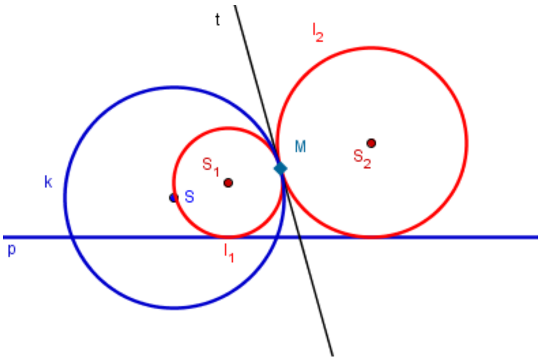

**Obr. 43a**



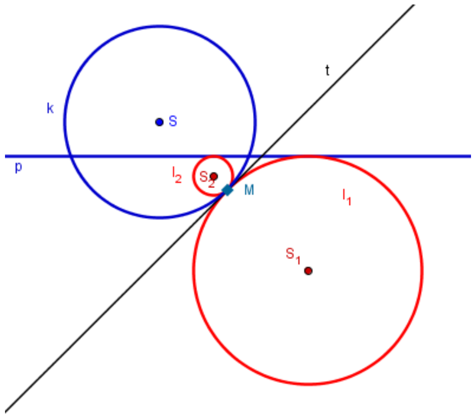

**Obr. 43b**

*Komentář: Dvě různá řešení, kdy přímka p leží mimo kružnici k.*

<u>Přímka *p* protíná kružnici *k*</u>: Kromě případů, které byly popsány výše, budou v této situaci vždy dvě řešení. Jedna hledaná kružnice bude uvnitř kružnice *k*, druhá bude vně (obr. 44a, 44b).



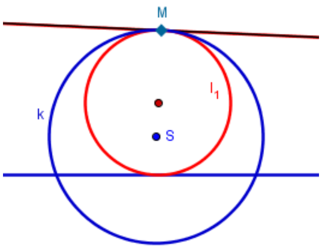

**Obr. 44a**



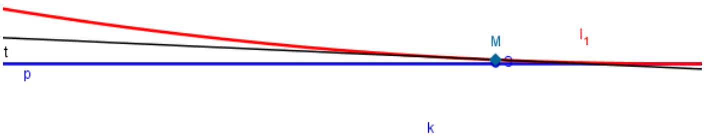

**Obr. 44b**

*Komentář: Dvě řešení pro různé polohy bodu M.*

**Pružnost nákresny:** Vhodným nástrojem GeoGebry je v tomto příkladu oddálení pohledu na nákresnu. V některých situacích může mít jedna z kružnic příliš velký poloměr a nemusí být zřejmé, zda jde ještě o kružnici nebo už o přímku totožnou s tečnou *t*. Oddálením pohledu jsou sice některé objekty příliš malé, ale lze názorně ukázat, zda se ještě jedná o kružnici (viz obr. 45a, 45b).




**Obr. 45a – Normální pohled**




**Obr. 45b – Detail**

## 3.1.2 Zhodnocení

V oblasti konstrukční geometrie byly zpracovány tři příklady, které byly zvoleny tak, aby v nich byly parametry použity různým způsobem. V prvním příkladu reprezentují parametry velikost a vzdálenost objektů a byly použity k modelování množin bodů dané vlastnosti. Druhý příklad využívá parametr ke změně počtu vrcholů *n*-úhelníku. Třetí příklad byl vybrán, protože Apolloniovy a Pappovy úlohy patří mezi typické konstrukční úlohy a bylo možné zde použít parametr ke změně polohy objektů.

U každého příkladu je popsáno řešení bez použití GeoGebry a poté s jejím využitím, přičemž je oblast zabývající se využitím GeoGebry rozdělena do šesti částí. Každá část popisuje specifické možnosti využití GeoGebry k řešení příkladu.

V *Komentáři ke konstrukci* jsou rozebrány způsoby, kterými lze ke konstrukci pomocí GeoGebry přistupovat, a jsou zde popsány výhody konstrukčních nástrojů, které

GeoGebra nabízí. *Podpora diskuze* se zaměřuje pouze na hledání možných řešení a je uzpůsobena jako pomůcka pro žáky, k samostatnému zkoumání možných situací. *Postup konstrukce* popisuje možnosti použití GeoGebry k tvorbě konstrukcí, které mají možnost krokování a jsou vhodné k předvedení v hodinách nebo k samostudiu. Příklady ukázané v *Základních znalostech* jsou určeny k samostatné práci a mají pomoci při pochopení postupů řešení, které jsou potřebné ke konstrukci úlohy. V části *Specifické situace* je úloha pomocí samostatných podúloh rozebrána podle možných situací, ovlivňujících výsledná řešení. *Pružnost nákresny* popisuje, v kterých částech úlohy zpracované v GeoGebře je vhodné využít možnosti přiblížení, oddálení nebo posunutí náhledu na nákresnu.

## 3.2 Analytická geometrie

Analytickou geometrií nazýváme ty oblasti matematiky, které se zabývají řešením geometrických úloh algebraickými metodami. Za zakladatele této matematické disciplíny jsou považováni René Descartes a Pierre de Fermat [15]. Na rozdíl od konstrukční geometrie, která pracuje s body, přímkami, trojúhelníky a dalšími objekty pouze graficky, analytická geometrie řeší úlohy početně. Například poloha dvou přímek se řeší početně jako společné řešení soustavy lineárních rovnic. Lze takto zkoumat i složitější křivky, aniž bychom potřebovali znát jejich vzhled, a lze se pohybovat i v prostorech o více dimenzích. V analytické geometrii jsou objekty reprezentovány pomocí rovnic nebo nerovnic, které popisují jejich tvar a polohu v prostoru dané dimenze. My se v této práci budeme zabývat analytickou geometrií v rovině, konkrétně úlohami na vzájemnou polohu útvarů, reprezentovanými soustavami rovnic a nerovnic. Soustava rovnic se v analytické geometrii používá k hledání průsečíků dvou nebo více křivek. Každá rovnice reprezentuje jednu křivku a řešením soustavy jsou souřadnice hledaných průsečíků. Podobně se soustavy lineárních nerovnic využívají k hledání průniků dvou nebo více polorovin. Každá nerovnice reprezentuje polorovinu, do které patří body o souřadnicích, které splňují danou nerovnost.

### 3.2.1 Soustavy rovnic

**Úloha 4** (Složka *Uloha_4* v příloze)

**Zadání:** Řešte soustavu rovnic pro neznámé $x$, $y$ a reálný parametr $b$:

$$\begin{aligned} x + y &= b, \\ -2x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

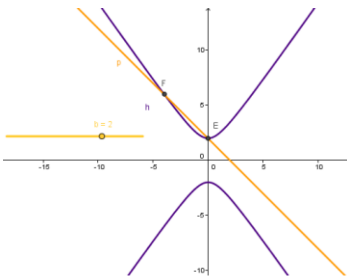
**Parametry úlohy:** Zadání obsahuje jeden parametr, pro který bude úloha řešena nejdříve. V další části pak tuto úlohu rozšíříme o více parametrů.

**Cíl úlohy:** Výše zadaná úloha bude vyřešena v Geogebře pro parametr $b$. Rozšířením úlohy o další dva parametry ukážeme, jak koeficienty u některých neznámých ovlivňují vlastnosti daných křivek a možná řešení úlohy. Úloha bude rozdělena na několik podúloh, které možné problémové části vysvětlí podrobněji.

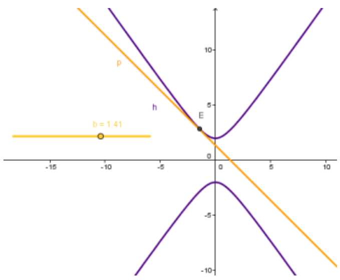
**Klasický postup řešení:** Pokud budeme úlohu řešit početně, dospějeme k výsledkům:

- Pro $b \in (-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ nemá soustava rovnic řešení.
- Pro $b = \sqrt{2}$ je řešením soustavy rovnic $[x, y] = \left[-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]$.
- Pro $b = -\sqrt{2}$ je řešením soustavy rovnic $[x, y] = \left[\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right]$.
- Pro $b \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup (\ \sqrt{2}, \infty)$ jsou řešením zadané soustavy rovnic body $[x, y]$, pro které platí: $x = -b \pm \sqrt{2b^2 - 4}$, $y = 2b \pm \sqrt{2b^2 - 4}$

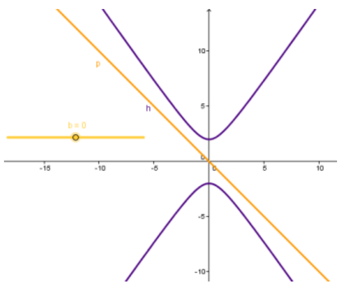
<u>**Využití GeoGebry**</u>:
Úlohu lze řešit graficky. Při grafickém řešení musíme vědět, že dané rovnice reprezentují přímku a hyperbolu a pro různé hodnoty parametru vznikají odlišné situace. V GeoGebře je grafické řešení jednodušší, protože můžeme mít parametr zadán obecně a změnou parametru měníme umístění přímky. (viz obr. 46a, 46b, 46c)



**Obr. 46a**



**Obr. 46b**

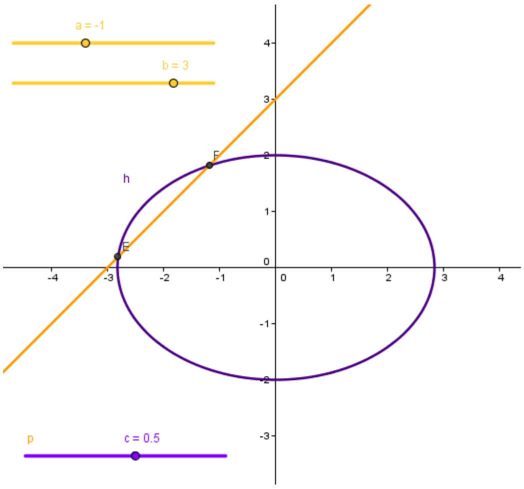


**Obr. 46c**

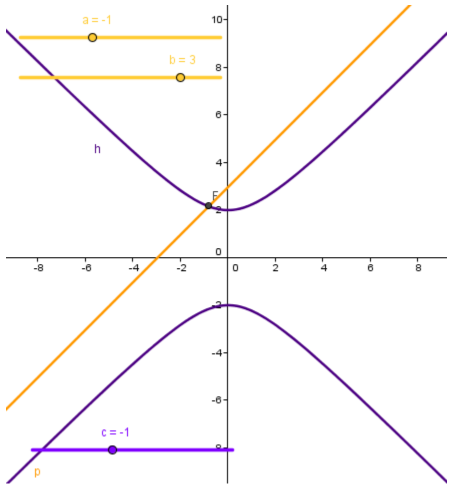
*Komentář: Na obrázcích vidíme, že pro b =* 2 *(obr. 46a) mají křivky* 2 *průsečíky, pro b =* $\sqrt{2}$ *(obr. 46b) mají křivky jeden průsečík a pro b =* 0 *(obr. 46c) nemají průsečík žádný.*

**Další parametry:** Úlohu modifikujme přidáním parametru $a$ do první rovnice ($ax + y = b$) a parametru $c$ do druhé rovnice ($cx^2 + y^2 = 4$). V této úloze budeme určovat, jaká řešení mohou existovat. V GeoGebře je možné k diskuzi o počtu řešení přistupovat čistě vizuálně, což umožňuje vynechat komplikované početní zkoumání vztahů mezi jednotlivými parametry.

**Grafické řešení:** Při grafickém řešení úlohy zkonstruujeme jednotlivé geometrické útvary, což v tomto případě bude přímka a křivka druhého stupně. Jejich průsečíky znázorňují řešení této soustavy rovnic. U křivky druhého stupně je potřeba znát typ této křivky, protože se v závislosti na parametru $c$ může jednat o elipsu, hyperbolu nebo dvě přímky. V GeoGebře máme možnost vytvořit křivku zadáním její rovnice a nemusíme tak její typ znát. Na obr. 47a, 47b vidíme dvě možná řešení této úlohy.




**Obr. 47a - Elipsa**



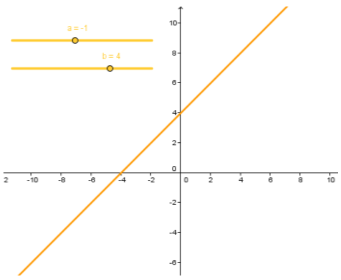

**Obr. 47b - Hyperbola**

*Komentář: Pro parametry $a$ = -1, $b$ = 3, $c$ = 0,5 (obr. 47a) existují dvě možná řešení. Pro parametry $a$ = -1, $b$ = 3, $c$ = -1 (obr. 47b) existuje jedno řešení.*

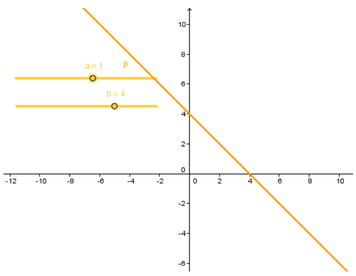
**Základní znalosti:** V této úloze pracujeme se dvěma útvary, přímkou $p: ax + y = b$ a křivkou $h: cx^2 + y^2 = 4$. Abychom dokázali zjistit, jak závisí řešení úlohy na parametrech $a$, $b$, $c$, musíme nejdříve pochopit, jak tyto parametry ovlivňují vlastnosti daných útvarů.

Nejdříve budeme zkoumat přímku (*Uloha_4_Poduloha_1.ggb*). Pozorováním změn u parametrů $a$ a $b$ zjistíme, že koeficient u neznámé $x$ (parametr $a$) ovlivňuje otočení přímky $p$ a absolutní člen (parametr $b$) ovlivňuje posunutí na ose $y$. Žáci by si měli všimnout následujících vlastností:

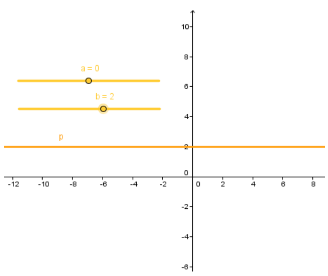
- Pro parametr $a$ < 0 je přímka $p$ rostoucí, pro $a$ = 0 konstantní a pro $a$ > 0 klesající (obr. 48a, 48b, 48c).
- Přímka $p$ nikdy nebude rovnoběžná s osou $y$.
- Pro $b$ = 0 prochází přímka $p$ počátkem.
- Pro opačné hodnoty parametru $a$ jsou vzniklé přímky osově souměrné podle osy $y$.



**Obr. 48a**



**Obr. 48b**

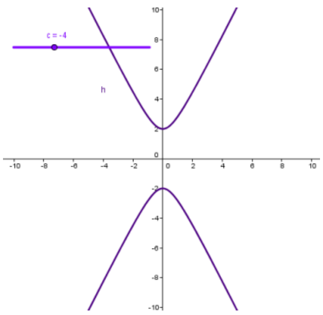


**Obr. 48c**

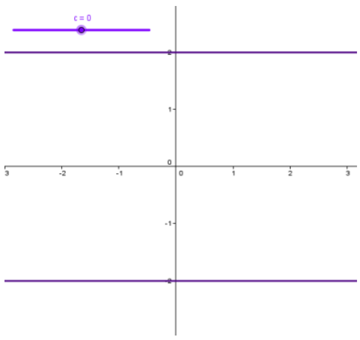
*Komentář: Na obr. 48a je přímka pro parametry $a$ = -1, $b$ = 4, na obr. 48b je k ní přímka souměrná podle osy $y$ s parametry $a$ = 1, $b$ = 4, na obr. 48c je přímka rovnoběžná s osou $x$ s parametry $a$ = 0, $b$ = 2.*

Nyní budeme zkoumat křivku $h$ druhého stupně. Zde je situace jiná. Změnou parametru neměníme umístění křivky, ale její tvar a typ. Při použití GeoGebry snadno zjistíme, že při změně parametru mohou nastat tři situace. Křivkou může být elipsa (kružnice), hyperbola nebo dvě přímky. Všechny tři příklady lze nalézt na obr. 49a, 49b, 49c. Žáci by měli zaznamenat následující vlastnosti:

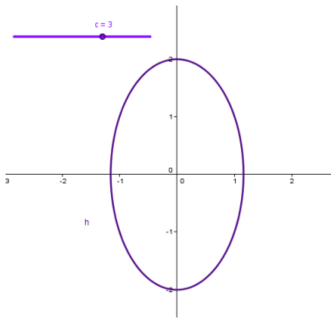
- Pokud je parametr $c < 0$, je křivkou hyperbola.
- Pokud je parametr $c = 0$, vzniknou dvě přímky rovnoběžné s osou $x$.
- Pokud je parametr $c > 0$, je křivkou elipsa.
- Elipsa i hyperbola mají střed v počátku.
- Všechny tři křivky prochází na ose $y$ body [0, 2] a [0, -2].



**Obr. 49a – Hyperbola**



**Obr. 49b – Dvě přímky**



**Obr. 49c - Elipsa**

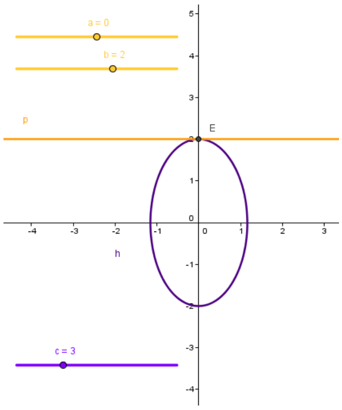
*Komentář: Na obr. 49a je hyperbola, která vznikne dosazením parametru* $c = -4$, *na obr. 49b jsou dvě přímky pro parametr* $c = 0$ *a na obr. 49c je elipsa vzniklá dosazením parametru* $c = 3$.

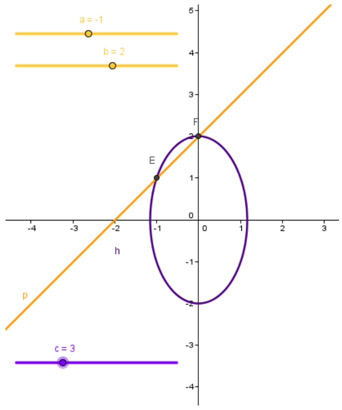
**Podpora diskuze:** Pro pochopení, jaká řešení mohou vzniknout, jsme úlohu rozdělili na tři podúlohy podle typu křivky $cx^2 + y^2 = 4$.

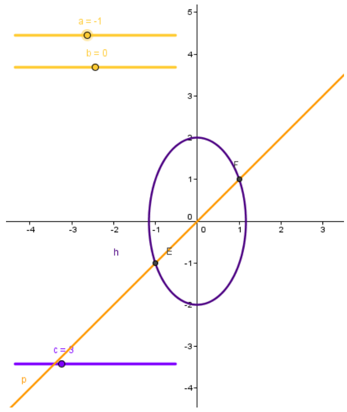
Nejdříve se budeme zabývat případem, kdy je parametr c > 0 a hledáme průsečíky přímky $p$ a elipsy $h$. V tomto případě mohou nastat tři možnosti.

- Přímka a elipsa nemají žádný průsečík,
- přímka je tečnou elipsy, existuje tedy jeden bod dotyku (obr. 50a).
- nebo přímka protíná elipsu a průsečíky jsou dva (obr. 50b).

Pokud je přímka rovnoběžná s osou $x$, je snadno viditelné, že počet řešení ovlivňuje rozdíl mezi hodnotou parametru $b$ a délkou poloosy elipsy ležící na ose $y$. Zároveň budou průsečíky souměrné podle osy $y$. V případě, že přímka prochází počátkem, budou průsečíky podle něj souměrné (obr. 50c).





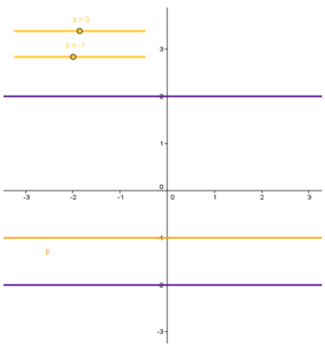


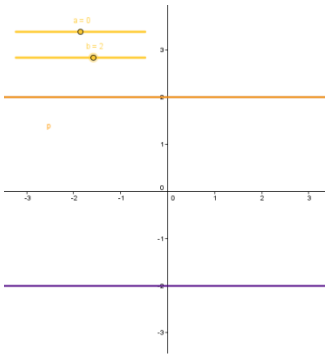
**Obr. 50a** **Obr. 50b** **Obr. 50c**

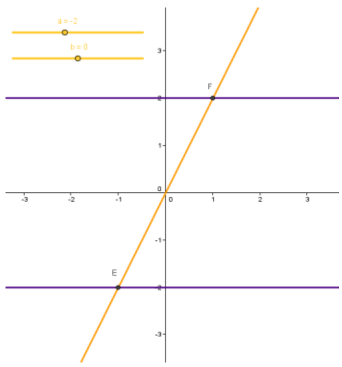
*Komentář: Na obr. 50a je přímka p tečnou elipsy pro parametry a* = -0, *b* = 2, *c* = 3. *Na obr. 50b jsou dva průsečíky pro parametry a* = -1, *b* = 2, *c* = 3. *Na obr. 50c jsou průsečíky souměrné podle počátku pro parametry a* = -1, *b* = 0, *c* = 3.

Další zkoumanou situací jsou dvě rovnoběžné přímky, což platí v případě, kdy je parametr $c = 0$ (obr. 51a, 51b, 51c). Vzdálenost těchto přímek od osy $x$ je odmocnina absolutního členu, v této úloze to je 2. V tomto případě mohou nastat tři možnosti:

- Není žádné řešení - v případě, že jsou všechny přímky rovnoběžné (pro $a = 0$, $b \neq \pm 2$).
- Existuje nekonečně mnoho řešení - v případě, že přímka $p$ je totožná s jednou z přímek $h$ (pro $a = 0$, $b = \pm 2$),
- Existují dvě řešení - v případě, že je přímka $p$ s přímkami $h$ různoběžná (pro $a \neq 0$). Pokud přímka $p$ prochází počátkem, jsou průsečíky souměrné podle počátku.





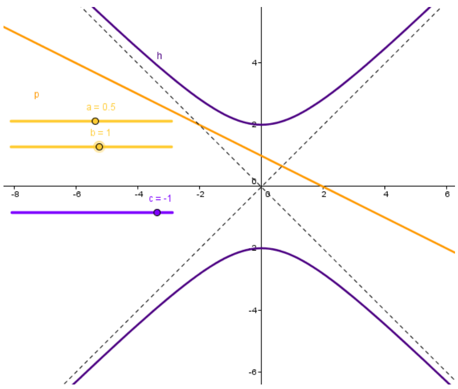


**Obr. 51a** **Obr. 51b** **Obr. 51c**

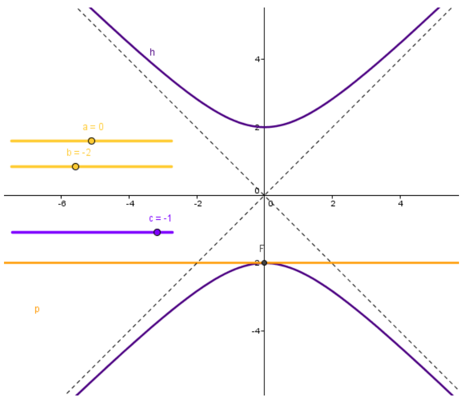
*Komentář: Obr. 51a - žádné řešení pro přímku p rovnoběžnou s osou x (a* = 0, *b* = 1), *obr. 51b - nekonečně mnoho řešení pro přímku p totožnou s přímkou h (a* = 0, *b* = 2), *obr. 51c - dvě řešení souměrná podle počátku (a* = -2, *b* = 0).

Třetím případem možného typu křivky je hyperbola. Mohou nastat různé situace s žádným, jedním nebo dvěma řešeními. Některá z těchto řešení jsou závislá na asymptotách hyperboly, proto jsou v této podúloze asymptoty zobrazeny.

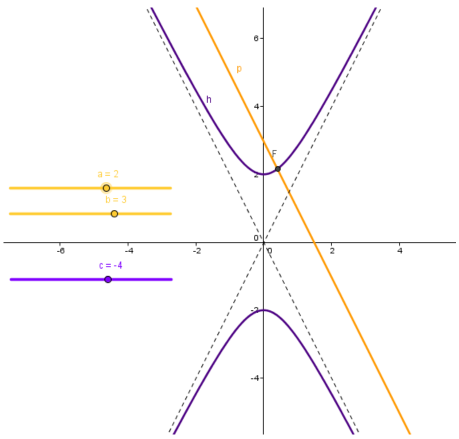
- Pokud přímka $p$ hyperbolu neprotne, nebude mít soustava žádné řešení (obr. 52a).
- Jedno řešení má soustava tehdy, když je přímka $p$ tečnou hyperboly nebo když je přímka rovnoběžná s asymptotou a neprochází počátkem (obr. 52b, 52c).
- Dále mohou existovat dvě řešení, která se nachází ve stejné části hyperboly (průsečíky budou mít stejná znaménka u ypsilonových souřadnic) nebo v opačných částech hyperboly (průsečíky budou mít různá znaménka u ypsilonových souřadnic) (obr. 52d).
- Pokud přímka $p$ prochází počátkem, pak buď nemá s hyperbolou žádný průsečík, nebo ji protíná ve dvou bodech a ty jsou souměrné podle počátku, nebo se stane asymptotou.



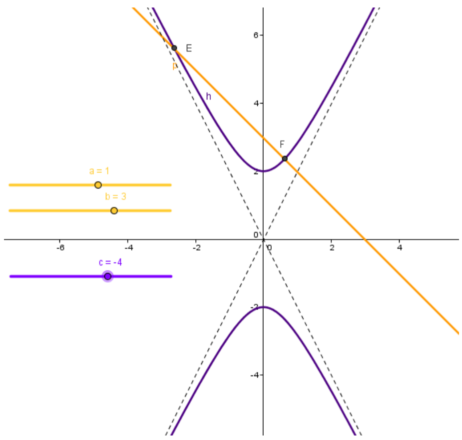
**Obr. 52a**



**Obr. 52b**



**Obr. 52c**



**Obr. 52d**

*Komentář: Obr. 52a - žádné řešení pro parametry* $a = 0{,}5$, $b = 1$, $c = -1$. *Obr. 52b - jedno řešení pro parametry* $a = 0$, $b = -2$, $c = -1$, *přímka p je tečnou hyperboly. Obr. 52c - jedno řešení pro parametry* $a = 2$, $b = 2$, $c = -4$, *přímka je rovnoběžná s asymptotou. Obr. 52d - dva průsečíky pro parametry* $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$.

**Pružnost nákresny:** Možnost přemístění nebo přiblížení náhledu v této úloze může pomoci při hledání průsečíku, který se nachází na místě vzdáleném od počátku a který by na normálním nákresu nebyl vidět. Tato možnost také pomůže názorně vysvětlit pojem asymptota, kdy můžeme ukázat, že v libovolném místě bude při dostatečném přiblížení zůstávat mezi hyperbolou a asymptotou mezera.

### 3.2.2 Soustavy nerovnic

**Úloha 5** (Složka *Uloha_1* v příloze)

**Zadání:** Řešte graficky soustavu nerovnic:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3 &\geq 0, \\ 2x - y + 3 &\geq 0, \\ -2x + y + 3 &\geq 0, \\ -2x - y + 3 &\geq 0. \end{aligned}$$

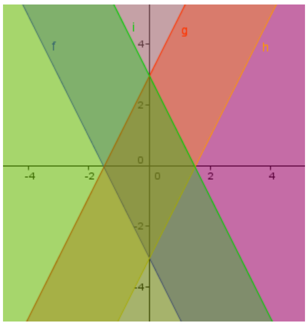
**Parametry úlohy:** Pro potřeby této práce jsou do zadání doplněny parametry $a$, $b$. Parametr $a$ je koeficient u neznámé $x$, parametr $b$ je absolutní člen.

**Cíl úlohy:** V této úloze ukážeme, jak jednotlivé koeficienty ovlivňují přímky, které se liší pouze ve znaménkách koeficientů. Každá lineární nerovnice reprezentuje polorovinu a průniky těchto polorovin vytváří řešení této soustavy nerovnic.

**Klasický postup řešení:** Z nerovnic vyjádříme $y$ a určíme poloroviny, v nichž leží body, jejichž souřadnice danou nerovnost splňují.
Poznámka: S vědomím, že se nejedná o korektní formulaci, budeme pro přehlednost textu zkráceně uvádět, že polorovina splňuje danou nerovnost, resp. polorovina je řešením nerovnice.

- Nerovnost $y \geq -2x - 3$ platí pro polorovinu ležící nad přímkou $f: y = -2x - 3$.
- Nerovnost $y \leq 2x + 3$ platí pro polorovinu ležící pod přímkou $g: y = 2x + 3$.
- Nerovnost $y \geq 2x - 3$ platí pro polorovinu ležící nad přímkou $h: y = 2x - 3$.
- Nerovnost $y \leq -2x + 3$ platí pro polorovinu ležící pod přímkou $h: y = -2x + 3$.

Narýsujeme jednotlivé poloroviny a jejich průnik je řešením této soustavy. Z grafického řešení (viz obr. 53) je vidět, že výsledkem je kosočtverec s vrcholy na osách $x$, $y$.




**Obr. 53 – Grafické řešení**

*Komentář: klasicky bychom tuto úlohu řešili na papír a k vyznačení polorovin použili šrafování, v GeoGebře lze použít barevné rozlišení.*

**Využití GeoGebry:** V úloze rozšířené o parametry $a$ a $b$ máme tyto nerovnice:

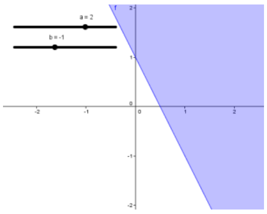
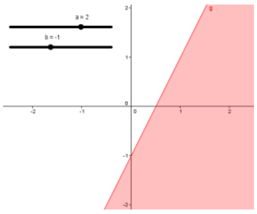
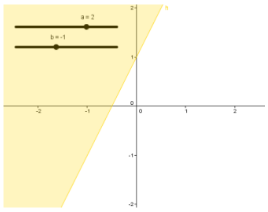
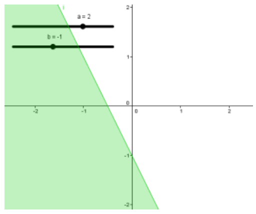
$$ax + y + b \geq 0,$$
$$ax - y + b \geq 0,$$
$$-ax + y + b \geq 0,$$
$$-ax - y + b \geq 0.$$

Pro různé hodnoty parametrů nastanou různé situace. Vzhledem k tomu, že řešením každé nerovnice je polorovina a řešením soustavy je průnik těchto polorovin, mohou nastat pouze tyto možnosti: řešením soustavy může být přímka, rovinný pás, bod, kosočtverec nebo nemusí existovat řešení žádné. V GeoGebře všechny tyto situace názorně předvedeme a rozebereme, za jakých okolností nastávají.

**Grafické řešení:** GeoGebra umožňuje zadat nerovnici do vstupního panelu a vytvořit tak zvýrazněnou polorovinu, aniž bychom museli sestrojovat určující přímku a zjišťovat, která polorovina danou nerovnost splňuje. Další výhodou je barevné rozlišení jednotlivých polorovin, které usnadňuje orientaci v nákresu.

**Základní znalosti:** Důležitou dovedností je dokázat určit v závislosti na koeficientech nerovnice, která polorovina splňuje danou nerovnost. V podúlohách názorně ukážeme, pro jaké koeficienty je řešením polorovina nad přímkou a pro jaké polorovina pod přímkou (obr. 54a-d). Je potřeba si uvědomit několik informací:

- Polorovina je určena hraniční přímkou, kterou parametr $a$ otáčí a parametr $b$ posunuje po ose $y$.
- Pro kladné $y$ splňuje nerovnost polorovina nad přímkou, pro záporné $y$ polorovina pod přímkou.

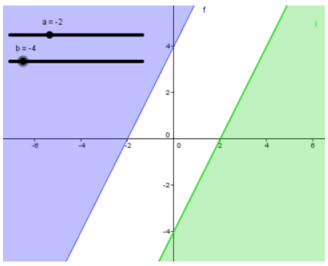
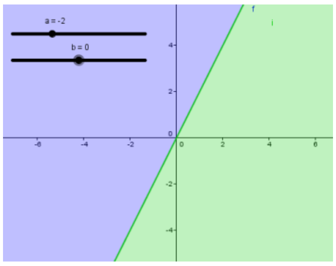
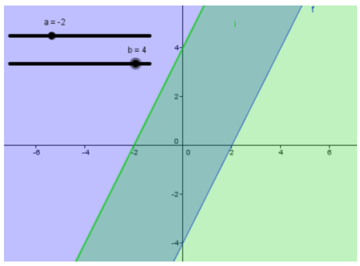





**Obr. 54a** **Obr. 54b** **Obr. 54c** **Obr. 54d**

*Komentář: Na obr. 54a-d jsou poloroviny splňující dané nerovnosti pro parametry a* = 2, *b* = -1.

Ze čtyř nerovnic zadaných v této úloze jsou dvě dvojice hraničních přímek rovnoběžné. Následující vlastnosti budou pro dvojice nerovnic s rovnoběžnými hraničními přímkami analogické, proto zvolíme jednu z těchto dvojic a vlastnosti popíšeme. Zvolme dvojici nerovnic $ax + y + b \geq 0, -ax - y + b \geq 0$. Jejich hraniční přímky *f, i* při libovolných parametrech *a, b* zachovávají rovnoběžnost a poloroviny splňující dané nerovnosti jsou při libovolných parametrech *a, b* opačné. Z obr. 55a, 55b, 55c vidíme, že mohou nastat tři situace:

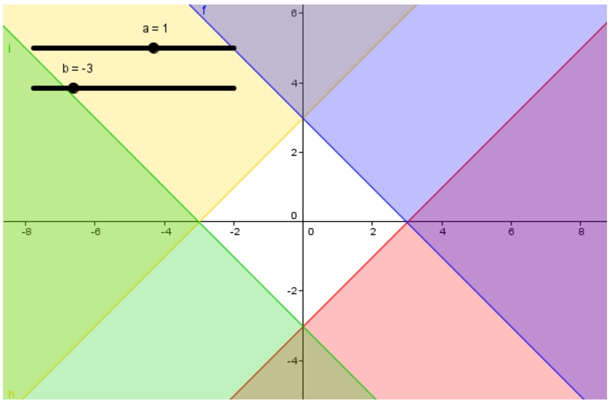
- Poloroviny mají prázdný průnik, soustava dvou nerovnic nemá řešení. Tato situace nastane pro parametr *b* < 0.
- Poloroviny mají společnou hraniční přímku, ta je řešením soustavy. Tato situace nastane pro parametr *b* = 0.
- Poloroviny mají neprázdný průnik, vzniká tzv. rovinný pás a ten je řešením soustavy. Tato situace nastane pro parametr *b* > 0.

**Obr. 55a – Prázdný průnik** **Obr. 55b – Společná přímka** **Obr.55c – Rovinný pás**

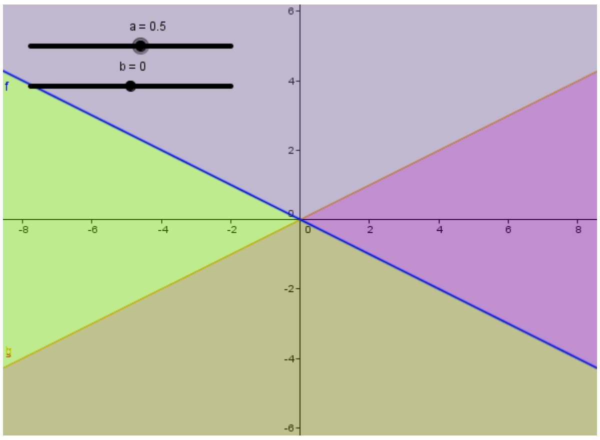
*Komentář: Obr. 55a - prázdný průnik pro parametry a* = 2, *b* = -4, *obr. 55b - společná přímka pro parametry a* = 2, *b* = 0, *obr. 55c - rovinný pás pro parametry a* = 2, *b* = 4.

**Podpora diskuze:** Nejprve se budeme zabývat situací, kdy soustava nemá žádné řešení. Z předchozí podúlohy vidíme, že soustava dvou nerovnic s rovnoběžnými hraničními přímkami nemá řešení právě tehdy, když je parametr $b < 0$ (což platí i pro druhou dvojici nerovnic). Soustava tedy nemá řešení pro $b < 0$. Na (obr. 56) vidíme, že průnik těchto čtyř polorovin je prázdný. Pro $b \geq 0$ má soustava alespoň jedno řešení, jak bude ukázáno dále.



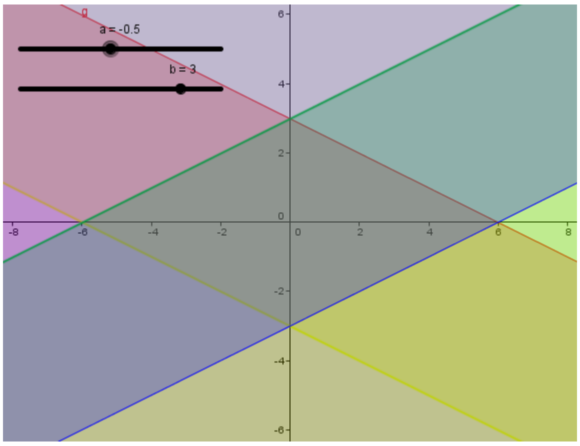

**Obr. 56 – Prázdný průnik**

Dalším možným řešením je bod [0, 0]. Kdy tato situace nastane, vidíme v předchozí podúloze, tedy pro případ, kdy je parametr $b = 0$ a parametr $a \neq 0$. Pro obě dvojice nerovnic splývají jejich hraniční přímky a jejich průsečíkem je bod (obr. 57).




**Obr. 57 - Bod**

V případě, že je parametr $b > 0$ a parametr $a \neq 0$, mají hraniční přímky polorovin právě čtyři průsečíky a řešením je tedy čtyřúhelník. Protože absolutní člen a absolutní hodnota koeficientu u proměnné $x$ jsou u všech nerovnic stejné, protínají se jejich hraniční přímky na ose $x$ a na ose $y$ ve stejné vzdálenosti od počátku. Úhlopříčky vzniklého čtyřúhelníku se vzájemně půlí a jsou k sobě kolmé, můžeme tedy říci, že řešením je kosočtverec (obr. 58). Lze také vidět, že je to průnik dvou rovinných pásů z předchozí úlohy.



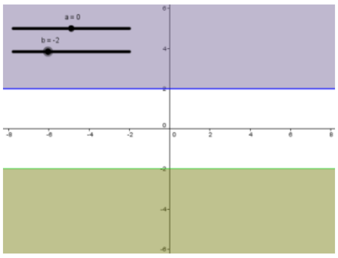

**Obr. 58 - Kosočtverec**

Pokud je $a$ = 0, stávají se ze čtyř nerovnic pouze dvě, a to:

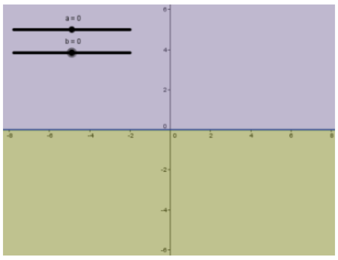
$$y + b \geq 0$$
$$-y + b \geq 0$$

Pak mohou nastat tři případy:

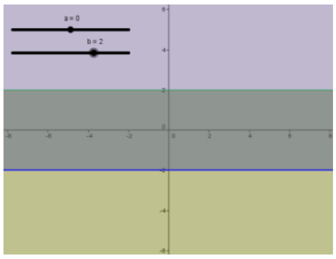
- Pokud $b$ < 0, mají poloroviny splňující dané nerovnosti prázdný průnik – soustava nemá řešení (obr. 59a).
- Pokud $b$ = 0, je řešením osa $x$ (obr. 59b).
- Pokud $b$ > 0, průnikem polorovin bude rovinný pás, který je řešením soustavy (obr. 59c).



**Obr. 59a – Prázdný průnik**



**Obr. 59b – Osa x**



**Obr. 59c – Rovinný pás**

## 3.2.3 Zhodnocení

Z oblasti analytické geometrie byly zpracovány dva příklady. První příklad je soustava dvou rovnic o dvou neznámých, jedna rovnice je lineární, druhá kvadratická a obě obsahují parametr. Druhý příklad je soustava čtyř lineárních nerovnic s parametrem. V obou příkladech je stručný popis řešení bez použití GeoGebry a popis výhod, které GeoGebra do řešení přináší. Část *Využití GeoGebry* je rozdělena do několika částí, ve kterých jsou zvlášť popsány možnosti použití tohoto programu.

Část *Grafické řešení* obsahuje srovnání řešení úlohy klasickým způsobem a s pomocí GeoGebry. *Základní znalosti* jsou určeny pro samostatnou práci, kde mohou žáci na připravených podúlohách vyzkoušet, jak parametry ovlivňují vlastnosti útvarů, reprezentovaných rovnicemi a nerovnicemi. V *Podpoře diskuze* je úloha rozebrána podle různých situací, které mohou v závislosti na parametrech nastat. Pro některé případy jsou vytvořeny podúlohy, na kterých je možné tyto závislosti vyzkoušet.

# 4. Závěr

Cílem této práce bylo zvolit a stručně posoudit vybrané knižní a internetové zdroje a na jejich základě vybrat takové úlohy s parametrem, které je možné zajímavým způsobem řešit v programu GeoGebra.

Bylo popsáno sedm učebnic a sbírek, které byly hodnoceny s ohledem na úlohy s parametrem. Dále bylo posouzeno šest internetových stránek, které obsahují mimo jiné i úlohy s parametrem. Všechny tyto zdroje obsahují úlohy s parametrem, ať už v řešené či neřešené formě, a mohou být využity pro inspiraci při výběru příkladů, vhodných ke zpracování v dynamických programech pro výuku matematiky.

V práci byl stručně popsán program GeoGebra. Byla popsána jeho historie a uživatelské prostředí. Z nástrojů, jež tento program nabízí, byly popsány ty, které byly používány v této práci při řešení úloh.

Celkem bylo v práci zpracováno pět úloh, z nichž dvě byly z oblasti konstrukční geometrie a dvě z oblasti geometrie analytické. Všechny úlohy byly zpracovány a popsány v různých situacích, s ohledem na využití GeoGebry. Pro tyto úlohy bylo celkem vypracováno 29 podúloh, které slouží jako podpůrné příklady a jsou všechny zpracovány v programu GeoGebra.

Jak je vidět ve vypracovaných úlohách, GeoGebra je vhodná do výuky matematiky především pro svou dynamičnost, kterou lze využít při řešení obecně zadaných úloh. Úlohy s parametrem lze pomocí GeoGebry řešit názorněji a její použití je vhodné k pozorování změny možných řešení v závislosti na parametrech.

# Literatura

BURJAN, Vladimír a Milan MAXIAN. *Opakování z matematiky pro třídy gymnázií se zaměřením na matematiku.* 1. vyd. Překlad Karla Benešová. Praha: SPN, 1991, 278 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-042-3916-1.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988, 530 s.

DAVIDOVÁ, Eva. *Řešení planimetrických konstrukčních úloh.* Vyd. 1. Ostrava: Gymnázium Ostrava-Poruba, 2005. 56 s. ISBN 80-903-6471-3.

HERMAN, Jiří. Metody řešení matematických úloh I. 2. přepr. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1996, 278 s. ISBN 80-210-1202-1.

CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6154-X.

ODVÁRKO, Oldřich, Emil CALDA, Jaroslav ŠEDIVÝ a Stanislav ŽIDEK. *Metody řešení matematických úloh.* 1. vyd. Praha: SPN, 1990, 261 s. ISBN 80-042-0434-1.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 2. vyd. Praha: SPN, 1977, 627 s.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 207 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4907-0.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ.* 1. vyd. Praha: SPN, 1969, 688 s.

# Internetové zdroje


[1] *GeoGebra* [online]. [cit. 2014-04-07]. Dostupné z: http://www.geogebra.org/

[2] *GeoGebraTube* [online]. 2012 [cit. 2014-04-07]. Dostupné z: http://www.geogebratube.org/

[3] *GeogebraTube* [online]. 2012 [cit. 2014-04-07] Dostupné z: http://www.geogebratube.org/search/results/uid/Uz-nvldqEN8AADV84IoAAABt533fe7be25073

[4] *GeoGebraWiki* [online]. 2012 [cit. 2014-04-07]. Dostupné z: http://wiki.geogebra.org/cs/Manu%C3%A1l:Hlavn%C3%AD_str%C3%A1nka

[5] HAVELKOVÁ, Veronika. *Volně stažitelné geometrické programy*. Praha, 2010. Bakalářská práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[6] HAVELKOVÁ, Veronika. *GeoGebra ve vzdělávání matematice*. Praha, 2012. Dostupné z: http://trilian.ujep.cz/svoc/2012/k3b/k3b_03.pdf. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[7] HESTERIC, Roman. *Matematika - příklady.eu* [online]. 2008 [cit. 2014-04-02]. Dostupné z: http:// www.priklady.eu/

[8] HUSAR, Petr. *Nesnesitelně snadná matematika* [online]. 1990 [cit. 2014-04-02]. Dostupné z: http://e-matematika.cz/

[9] KOPEC, Tomáš. *Matematika* [online]. 2008 [cit. 2014-04-02]. Dostupné z: http:// matematika.primmat.cz/home

[10] KRYNICKÝ, Martin. *Elektronické učebnice matematiky* [online]. 2010 [cit. 2014-04-02]. Dostupné z http://www.realisticky.cz/

[11] PATÁKOVÁ, Eva. *Diplomová práce: Apolloniovy úlohy* [online]. 2005 [cit. 2014-04-02]. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/uvod/uvod.html

[12] VANČURA, Jiří. *Apolloniovy úlohy* [online]. 2008/2009 [cit. 2014-04-02]. Dostupné z: http://www.apolloniovyulohy.webz.cz/

[13] VANÍČEK, J. EAMOS - výukový systém: *Počítačem podporovaná výuka matematiky* [online]. 2002 [cit. 2014-04-02]. Dostupné z: http://www.eamos.cz/amos/kat_mat/modules/external/index.php?kod_kurzu=kat_mat_9782

[14] VANÍČEK, J. EAMOS - výukový systém: *Dynamická geometrie* [online]. 2002 [cit. 2014-04-02]. Dostupné z: http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/modules/external/index.php?kod_kurzu=kat_mat_4296

[15] VOJÁČEK, Jakub. Analytická geometrie - úvod. *Matematika pro každého* [online]. 2008 [cit. 2014-04-07]. Dostupné z: http://maths.cz/clanky/analyticka-geometrie-uvod.html

# Příloha

Příloha obsahuje soubory a dynamické aplety ve formě webových stránek vytvořené v programu GeoGebra. Každá úloha má vlastní složku, v níž se nacházejí aplety v podsložce *Pracovní listy* a původní soubory v podsložce *GeoGebra*. Součástí CD je instalační program pro software GeoGebra. Nutnou podmínkou pro fungování všech souborů a dynamických apletů je nainstalovaná aktuální verze Javy.

Aplety jsou vytvořeny v rozlišení 1024x768 pixelů. Posun nebo přiblížení náhledu lze v apletech realizovat zmáčknutím klávesy Shift a táhnutím myši nebo otočením kolečkem myši. Vybrané objekty lze v apletech posunovat myší, případně ovlivňovat změnou hodnoty parametru na posuvníku. Aplety s postupem konstrukce umožňují krokování pomocí příslušných tlačítek.

## Seznam souborů na CD:

*GeoGebra jako pomocník řešení úloh s parametrem.pdf*
*GeoGebra-Windows-Installer-4-4-27-0.exe*

**Obsah složek GeoGebra:**

*Uloha_1.ggb*
*Uloha_1_Konstrukce.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_1-1.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_1-2.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_1-3.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_2-1.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_2-2.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_2-3.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_2-4.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_2-5.ggb*
*Uloha_1_Poduloha_2-6.ggb*
*Uloha_2.ggb*
*Uloha_2_Konstrukce.ggb*
*Uloha_2_Poduloha_1.ggb*
*Uloha_2_Poduloha_2.ggb*
*Uloha_2_Poduloha_3.ggb*
*Uloha_3.ggb*
*Uloha_3_Konstrukce.ggb*
*Uloha_3_Poduloha_1.ggb*
*Uloha_3_Poduloha_2.ggb*
*Uloha_3_Poduloha_3.ggb*
*Uloha_3_Poduloha_4.ggb*
*Uloha_4.ggb*
*Uloha_4_Konkretni.ggb*
*Uloha_4_Poduloha_1.ggb*
*Uloha_4_Poduloha_2.ggb*
*Uloha_4_Poduloha_3-1.ggb*
*Uloha_4_Poduloha_3-2.ggb*
*Uloha_4_Poduloha_3-3.ggb*
*Uloha_5.ggb*
*Uloha_5_Poduloha_1-1.ggb*
*Uloha_5_Poduloha_1-2.ggb*
*Uloha_5_Poduloha_1-3.ggb*
*Uloha_5_Poduloha_2.ggb*

**Obsah složek Pracovní listy:**

*Uloha_1.html*
*Uloha_1_Konstrukce.html*
*Uloha_1_Poduloha_1-1.html*
*Uloha_1_Poduloha_1-2.html*
*Uloha_1_Poduloha_1-3.html*
*Uloha_1_Poduloha_2-1.html*
*Uloha_1_Poduloha_2-2.html*
*Uloha_1_Poduloha_2-3.html*
*Uloha_1_Poduloha_2-4.html*
*Uloha_1_Poduloha_2-5.html*
*Uloha_1_Poduloha_2-6.html*
*Uloha_2.html*
*Uloha_2_Konstrukce.html*
*Uloha_2_Poduloha_1.html*
*Uloha_2_Poduloha_2.html*
*Uloha_2_Poduloha_3.html*
*Uloha_3.html*
*Uloha_3_Konstrukce.html*
*Uloha_3_Poduloha_1.html*
*Uloha_3_Poduloha_2.html*
*Uloha_3_Poduloha_3.html*
*Uloha_3_Poduloha_4.html*
*Uloha_4.html*
*Uloha_4_Konkretni.html*
*Uloha_4_Poduloha_1.html*
*Uloha_4_Poduloha_2.html*
*Uloha_4_Poduloha_3-1.html*
*Uloha_4_Poduloha_3-2.html*
*Uloha_4_Poduloha_3-3.html*
*Uloha_5.html*
*Uloha_5_Poduloha_1-1.html*
*Uloha_5_Poduloha_1-2.html*
*Uloha_5_Poduloha_1-3.html*
*Uloha_5_Poduloha_2.html*