

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Kritická místa matematiky na základní škole
(Analýza didaktických praktik učitelů – lineární rovnice)

Critical Areas of Mathematics at the Primary School
(Analysis of Teachers' Didactic Practices – Linear Equations)

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Autor diplomové práce: Mgr. Bc. Anežka Nováková

Studijní obor: Učitelství pro ZŠ a SŠ – matematika

Forma studia: kombinovaná

Diplomová práce dokončena: Praha, 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Nadi Vondrové, Ph.D. Všechny použité prameny a literatura byly řádně citovány a práce nebyla použita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne

Podpis

Poděkování

Děkuji vedoucí mé práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a podnětné připomínky. Děkuji učitelům za rozhovory a náslechy hodin, bez nichž by se tato práce neobešla.

Abstrakt

Cílem diplomové práce bylo popsat didaktické praktiky používané při výuce lineárních rovnic jako jednoho z kritických míst matematiky základní školy. Nejdříve jsou nastíněny strukturální i sémantické modely používané u lineárních rovnic a způsoby vyučování tématu lineární rovnice, jak je naznačují vybrané učebnice základní školy. Na základě studia odborné literatury jsou popsány obtíže žáků a typy chyb, kterých se v této oblasti dopouštějí. Vlastní výzkum sestával z polostrukturovaných rozhovorů s pěti zkušenými učiteli a následků v jejich hodinách. Rozhovory i následky byly přepsány do protokolů, které byly analyzovány technikami zakotvené teorie. Bylo zjištěno, že učitelé využívají jak běžných didaktických praktik, tak si i sami vytvářejí své vlastní metody a postupy. Tyto praktiky, modely, které učitelé využívají při výuce lineárních rovnic, přístupy k zavedení ekvivalentních úprav rovnic, stejně jako seznam kritických míst tématu lineární rovnice označených učiteli tvoří jeden z výsledků práce.

Klíčová slova:

lineární rovnice, modely, obtíže žáků, chyby, výukové přístupy

Abstract

The goal of the diploma thesis is to describe didactic practices used by primary teachers when teaching linear equations, seen as one of the critical moments of primary school mathematics. First, semantic and structural models of linear equations and ways of teaching linear equations as suggested by selected textbooks for primary schools are described. Next, on the basis of literature review, pupil' problems and types of mistakes they make in this area are given. My research consisted of semistructured interviews with five experienced mathematics teachers and observations of their lessons. The interviews and observations were transcribed and the transcriptions were analysed by techniques of grounded theory. It was found out that the teachers use common didactic practices as well as their own which they develop. The practices, models which the teachers use when teaching linear equations, approaches to introducing equivalent operations, as well as a list of critical places within linear equations are the main results of the work.

Keywords:

Linear equations, models, pupils' problems, mistakes, teaching approaches

Obsah

1	Úvod	8
2	Metody a přístupy učitelů, mechanismus poznávacího procesu a kritická místa.....	10
2.1	Metody a přístupy učitele	10
2.1.1	Vyučovací metody a přístupy	11
2.1.2	Výchovné metody a přístupy	12
2.1.3	Přístupy z hlediska učitelova stylu vyučování.....	14
2.2	Mechanismus poznávacího procesu – Teorie generických modelů.....	18
2.3	Kritická místa a typy chyb v řešení lineárních rovnic.....	21
2.3.1	Pojem kritická místa.....	21
2.3.2	Kritická místa související s lineárními rovnicemi	23
2.3.3	Typy chyb v řešení lineárních rovnic	25
3	Lineární rovnice v literatuře a učebnicích	30
3.1	Definice, zavedení a úpravy lineárních rovnic	30
3.1.1	Ekvivalentní a důsledkové úpravy, zkoušky	33
3.2	Modely rovnic z různých prostředí	34
3.2.1	Sémantické aritmetické prostředí.....	35
3.2.2	Strukturální aritmetické prostředí	36
3.2.3	Geometrická prostředí	39
3.2.4	Shrnutí modelů.....	39
3.3	Metody řešení lineárních rovnic	39
3.3.1	Metoda pokus – omyl.....	40
3.3.2	Tabulková metoda.....	41
3.3.3	Metoda váhy	41
3.3.4	Metoda měnič.....	42
3.4	Pojetí lineárních rovnic v RVP a učebnicích.....	44

3.4.1	Rámcový vzdělávací program	44
3.4.2	Učebnice pro 1. stupeň ZŠ.....	45
3.4.3	Učebnice pro 2. stupeň ZŠ.....	45
4	Lineární rovnice jako kritické místo označené učiteli	59
4.1	Metodologie.....	59
4.1.1	Cíle experimentu, výzkumné otázky.....	59
4.1.2	Příprava a realizace experimentu	60
4.2	Metody zpracování získaného materiálu	62
4.3	Způsob kódování rozhovorů a následů hodin s ilustracemi.....	62
4.4	Výsledky analýzy rozhovorů s ilustrací	67
4.4.1	Obecné přístupy učitelů k výuce a žákům	67
4.4.2	Způsoby zavedení a procvičování tématu lineárních rovnic	70
4.4.3	Používané modely a metody výpočtu lineárních rovnic	72
4.4.4	Míra pochopení tématu a podstaty prováděných úkonů žákem.....	76
4.4.5	Kritická místa, časté chyby žáků a místa bez obtíží.....	77
4.4.6	Používané učebnice a jiné materiály	79
4.5	Analýzy následů hodin	80
4.5.1	Analýza hodiny vyučující CK a rozbor žakovského řešení rovnic.....	80
4.5.2	Analýza hodiny vyučujícího BD.....	84
5	Závěr.....	87
5.1	Dosažení cílů práce.....	87
5.2	Porovnání výsledků vlastního výzkumu s vybranými poznatky z odborné literatury.....	87
5.3	Omezení výzkumu a vize do budoucna	90
6	Literatura a zdroje	92
7	Přílohy	96

1 Úvod

Skutečná výzkumná cesta není v hledání nových krajů, ale v novém způsobu vidění.

M. Proust

Téma Kritická místa v matematice na základní škole (Analýza didaktických praktik učitelů – lineární rovnice) mě zaujalo, protože kapitolu Lineární rovnice mám ráda a z vlastní učitelské zkušenosti vím, že žákům činí problémy nejen na základních a středních školách, ale také na vysoké škole.

Cíle diplomové práce jsou:

- zjistit u vybraných zkušených učitelů didaktické praktiky používané při výuce lineárních rovnic;
- zjistit, zda tito učitelé pracují s běžně používanými praktikami, nebo zda si vytvářejí své vlastní metody a postupy;
- zjistit úskalí, které učitelé spatřují v tématu lineární rovnice, a jak je překonávají;
- porovnat zjištěné poznatky s poznatky z odborné literatury.

První kapitola diplomové práce nastiňuje chápání tématu lineárních rovnic a dalších užívaných pojmů v odborné literatuře. Především se zaměřuje na konkrétní metody a postupy učitelů, mechanismus poznávacího procesu, kritická místa a chyby při řešení lineárních rovnic.

Ve třetí kapitole je analyzováno téma lineárních rovnic na základě učebnic druhého stupně základních škol, resp. víceletých gymnázií, z hlediska užitých pojmů, modelů, metod a postupů, které učebnice podporují.

Čtvrtá kapitola se věnuje vlastnímu výzkumu. Je popsán způsob přípravy, provedení a analýzy náslechnů hodin a polostrukturovaných rozhovorů, které byly vedeny s učiteli na základní škole. Nejprve je popsána metodologie výzkumu, analýza jednotlivých rozhovorů a náslechnů hodin (jejich přepis je v příloze).

Pátá kapitola obsahuje porovnání teoretických faktů z vybraných studií a odborné literatury a zjištěných poznatků z vlastního výzkumu. Tyto výsledky a závěry budou prezentovány při vhodné příležitosti učitelům matematiky, studentům učitelství

matematiky a zájemcům z řad učitelů, případně psychologů na setkání projektu GAČR a vhodných konferencích.

Diplomová práce je psaná v rámci projektu GAČR P407/11/1740 Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů.

2 Metody a přístupy učitelů, mechanismus poznávacího procesu a kritická místa

Učitelské přístupy i metody výuky je možné v kontextu vyučovacího procesu zkoumat z mnoha hledisek. Oddíl 2.1 uvádí základní přehled metod a přístupů, které jsou pro tuto práci významné. V doporučené literatuře¹ je možné nalézt jejich detailní zpracování.

Další oddíl této kapitoly se zabývá jednak poznatky uloženými ve vědomí člověka (objekty, vztahy, postupy a schémata) a dále mechanismem toho, jak probíhá proces získávání nových poznatků. Na druhé straně se zmíní také o formalismu ve vyučování.

Třetí část kapitoly se zabývá kritickými místy ve vyučování lineárních rovnic, tedy oblastmi, které žákům činí potíže a v nichž dělají chyby. Důležité je také vzájemné propojení obtížného místa s typy chyb, kterých se v dané oblasti žáci dopouští.

2.1 Metody a přístupy učitele

Slovo metoda, řec. *methodos*, „znamená cestu, postup. Obecně lze říci, že metoda jako cesta k cíli je rozhodujícím prostředkem k dosahování cílů v každé uvědomělé činnosti.“ (Skalková, 1999, s. 166) Lze rozlišit metody vyučovací a výchovné.

Co se vlastně skrývá pod slovy *přístupy učitele*? V různých knihách nalezneme různé termíny jako např. učitelovo pojetí výuky, styly, způsoby nebo modely výuky, výchovy apod., které v podstatě hovoří o tomtéž.

¹ V uvedené literatuře je možné se dozvědět detailní informace k jednotlivým metodám a přístupům učitelů. Cílem této práce není metody a přístupy obecně vypsát, ale práce má popsat takové přístupy, které učitelé aktuálně používají v současné škole.

Např.: (Čáp, Mareš, 2001, s. 247–326, 429–436, 441–472), (Kalhous, Obst a kol., 2009, s. 307–327), (Průcha, Walterová, Mareš, 2003), (Skalková, 1999, s. 169–224).

2.1.1 Vyučovací metody a přístupy

„V didaktice pod pojmem vyučovací metoda chápeme způsoby záměrného uspořádání činností učitelů a žáků, které směřují ke stanoveným cílům.“ (Skalková, 1999, s. 166) V obecné didaktice se zřejmě nejvíce používá klasifikace základních vyučovacích metod podle J. Maňáka. Dle mého názoru jeho klasifikace zahrnuje všechny podstatné fáze a hlediska vyučování. Klasifikaci zde rozepisuji, protože v analýze rozhovorů s učiteli budou jednotlivé metody sledovány a bude zaznamenáván jejich proporcionální výskyt. Poté bude možné do jisté míry sledovat, jaké metody jsou u zkoumaných učitelů nejčastěji používány.

Klasifikaci uvádím ve třech úrovních. Myslím, že není nutné ještě každou úroveň komentovat, protože slovní výrazy, jimiž jsou metody popisovány, jsou srozumitelné.

Klasifikace základních metod vyučování – J. Maňák:²

A. Metody z hlediska pramene poznání a typu poznatků – aspekt didaktický

a. Metody slovní:

- i. monologické (popis, vysvětlování, výklad, přednáška atd.),
- ii. dialogické metody (rozhovor, diskuze, dramatizace atd.),
- iii. metody písemných prací (písemná cvičení, kompozice),
- iv. metody práce s učebnicí, knihou, textovým materiálem.

b. Metody názorně demonstrační:

- i. porovnávání předmětů a jevů,
- ii. předvádění (předmětů, modelů, pokusů, činností),
- iii. demonstrace statických obrazů,
- iv. statická a dynamická projekce.

c. Metody praktické:

- i. nácvik pohybových a pracovních dovedností,
- ii. žákovské laboratorní činnosti,
- iii. pracovní činnosti (v dílnách, na pozemku),
- iv. grafické a výtvarné činnosti.

² Je použit soupis z knihy (Skalková, 1999, s. 169), protože je přehledný a systematicky shrnuje Maňákovu klasifikaci metod.

- B. Metody z hlediska aktivity a samostatnosti žáků – **aspekt psychologický**
 - a. Metody sdělovací
 - b. Metody samostatné práce žáků
 - c. Metody badatelské, výzkumné a problémové
- C. Charakteristika metod z hlediska myšlenkových operací – **aspekt logický**
 - a. Postup srovnávací
 - b. Postup induktivní
 - c. Postup deduktivní
 - d. Postup analyticko-syntetický
- D. Varianty metod z hlediska fází výchovně vzdělávacího procesu – **aspekt procesuální**
 - a. Metody motivační
 - b. Metody expoziční
 - c. Metody fixační
 - d. Metody diagnostické
 - e. Metody aplikační
- E. Varianty metod z hlediska výukových forem a prostředků – **aspekt organizační**
 - a. Kombinace metod s vyučovacími formami
 - b. Kombinace metod s vyučovacími pomůckami
- F. Aktivizující metody – **aspekt interaktivní**
 - a. Diskuzní metody
 - b. Situační metody
 - c. Inscenační metody
 - d. Didaktické hry
 - e. Specifické metody

2.1.2 Výchovné metody a přístupy

Výchovné metody jsou součástí tzv. výchovného stylu, resp. přístupu. Podstatou výchovné metody je používání cílených a soustavných postupů a prostředků, jež vedou k žádoucímu cíli. (Průcha, Walterová, Mareš, 2003, s. 122)

Literatura se shoduje na třech základních výchovných stylech³, které jako první charakterizoval se svými kolegy Lewin 1939 (cit. v Čáp, Mareš, 2001, s.303nn). Jeho experiment byl prováděn se skupinou dětí ve volnočasové aktivitě, kdy postupně zkoušel rozdílné styly vedení. Výsledkem byla dnes již ustálená trojice stylů. Myšleny jsou tím: *autoritativní* (autokratický, dominantní), *liberální* a *demokratický* (sociálně integrační) *styl vedení*.

Je zjevné, že toto rozdělení skrývá nebezpečí vnímání stylů vychovatelů (rodičů i učitelů) příliš zjednodušeně. Z běžného života však víme, že každý má svůj nezaměnitelný styl. Větší rozrůzněnost uvedených stylů dodají následující dvě dimenze, kdy se rozměry každé z nich pohybují na různých stupních, ne jen v uvedených krajnostech:

„1. *Dimenze emočního vztahu k dítěti:*

- láska, kladný postoj x nepřátelství, záporný, chladný, zavrhuje postoj.

2. *Dimenze řízení:*

- autonomie, minimální řízení x přísná kontrola, maximální řízení.“

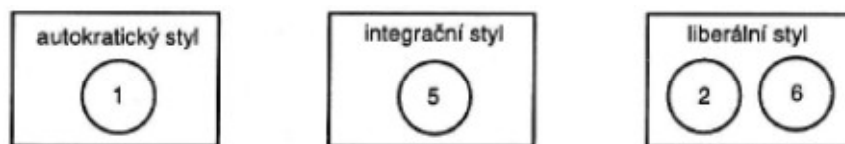
(Čáp, Mareš, 2001, s. 305)

J. Čáp a J. Mareš (2001, s. 306) spojili výše uvedené pojmy do přehledného *modelu devíti polí způsobu výchovy* (viz tabulka 2.1). Obrázky 2.1 a 2.2 jsou uvedeny pro úplnost, aby byly dobře vidět souvislosti mezi jednotlivými pojmy.

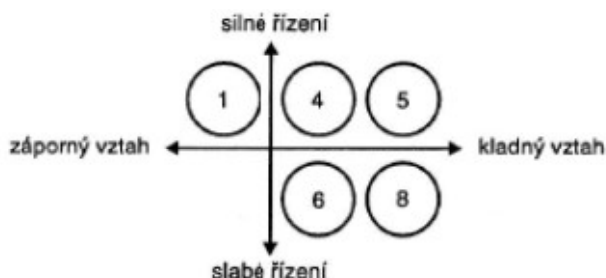
Emoční vztah	Řízení			
	silné	střední	slabé	rozporné
záporný	1 výchova autokratická, tradiční, patriarchální		2 liberální výchova s nezájmem o dítě	3 pesimální forma výchovy, rozporné řízení se záporným vztahem
záporněkladný	9 výchova emočně rozporná, jeden z rodičů zavrhuje, druhý extrémně kladný nebo dítě je s ním v koalici			
kladný	4 výchova přísná a přitom laskavá	5 optimální forma výchovy se vzájemným porozuměním a přiměřeným řízením	6 laskavá výchova bez požadavků a hranic	7 rozporné řízení relativně vyvážené kladným emočním vztahem
extrémně kladný			8 kamarádský vztah, dobrovolné dodržování norem	

Tabulka 2.1: Model devíti polí způsobu výchovy. (Čáp, Mareš, 2001, s. 306)

³ (Srov. Bendl, Kucharská a kol., 2008, s. 163nn), (Srov. Čáp, Mareš, 2001, s. 303nn).



Obrázek 2.1: Tři styly výchovy (Lewin, K., 1939; cit. v Čáp, Mareš, 2001, s. 306)



Obrázek 2.2: Model dvou dimenzí postojů (Schaefer, E. S., 1959; cit. v Čáp, Mareš, 2001, s. 306)

Z tabulky a obrázků je zřejmé, že autoritativní styl (číslo 1) vyžaduje silné nebo střední vedení a je provázen záporným emočním vztahem vychovatele k dítěti. Liberální styl (čísla 2 a 6) se naopak vyznačuje slabým řízením bez zájmu a pravidel s možností různé intenzity emočních vztahů. Třetí, demokratický styl vedení (číslo 5), je popsán jako *optimální forma výchovy* se středním řízením vychovatele a pozitivními emocemi.

Není mým cílem hodnotit, který styl vedení je ideální, ale i z literatury je zřejmé, že jistý styl/přístup může jednomu učiteli vyhovovat a pro druhého být naprosto nepřijatelný. Stejně tak to je i s žáky, kteří od různých učitelů vyžadují a očekávají různou míru řízení i různou kvalitu vztahů.

2.1.3 Přístupy z hlediska učitelova stylu vyučování

V souvislosti s přístupy učitele je nutné nastínit pojetí výuky učitelem z hlediska jeho stylu vyučování.⁴ Nezáleží jen na kurikulu, ale přístupy učitelů se odvíjejí například i od kulturního prostředí a dané doby. Na mysli mám přístup kritický, transmisivní a konstruktivistický (Bendl, Kucharská a kol., 2008), který zde bude ještě rozšířen o přístup založený na didaktickém konstruktivismu.

⁴Někteří autoři tyto styly nazývají přístupy z hlediska kurikula. (Srov. Bendl, Kucharská a kol., 2008, s. 165), (Srov. Kalhous, Obst, 2009, s. 49–58).

Kritický (autonomně kritický) *přístup* se snaží propojovat znalosti žáků s tím, co je okolo nich, tedy s věcmi a situacemi z běžného života. Učitel se snaží vést žáky k tomu, aby dokázali kriticky zhodnotit nastalou situaci, úkol apod. z více hledisek a z různého úhlu pohledu.

Transmisivní přístup je založený na přísunu pouze potřebných informací. Žák je od učitele zásoben pouze takovými informacemi, které potřebuje k dané látce. Přesně se ví, co žák musí umět a jak. Vyučování je orientované na učitele a žák je brán jako pasivní a pouze přijímající činitel. (Skalková, 1999) Transmisivním přístupem se rozumí snaha o přímý „přenos znalostí z hlavy učitele přímo do hlavy žáka“ (Hejný, 2007, s. 11). Tento přístup je podle M. Hejného a F. Kuřiny (2009, s. 193) orientován především na fakta a výsledky, navíc neposkytuje dostatek podnětů pro rozvoj tvořivosti a porozumění. Pozitivní je přispění k rozvíjení paměti. Celkově je tento přístup spíše bránou k formálnímu vzdělání.

Konstruktivistický přístup vychází z *prekonceptů*. Učitel si uvědomuje, že žák přichází s určitým množstvím znalostí a vědomostí, a snaží se pomocí dialogu s žákem vytěžit co nejvíce informací k tématu, které žák zná, navázat na ně a prohlubovat je. Žák aktivně participuje na vlastním vzdělávacím procesu a učitel upřesňuje a usměrňuje myšlenkové procesy žáků.

Konstruktivistickými přístupy k vyučování matematice se u nás nejvíce zabývají M. Hejný a F. Kuřina⁵. Ve svých pozorováních vyučování matematice došli ke třem důležitým nedostatkům spjatým s výukou matematiky, které jsou i dnes stále aktuální:

- „1. Žáci sice nepopírají důležitost matematiky, ale většina z nich má k matematice vztah vlažný, nebo dokonce odmítavý.
2. Schopnosti občanů účinně používat své školské matematické poznatky v běžném životě jsou chatrné.
3. Matematika nepřispívá k osobnostnímu růstu mládeže tak výrazně, jak by bylo možné a žádoucí.“ (Hejný, Kuřina, 1998, s. 385)

Autoři těchto tezí hledají nejen příčiny tohoto neutěšeného stavu, ale i cesty ke zlepšení, přičemž vycházejí z vlastních zkušeností. Nejrozšířenější příčinou výše

⁵ Zájemci se mohou o konstruktivistickém přístupu dočíst podrobnosti např. v(Hejný, Kuřina, 2009), (Hejný, Littler, 2007); (Hejný, 2004); (Hejný, Kuřina, 1998)

uvedených problémů je podle autorů formalismus, který chápe znalosti uchované „v paměti (člověka) jako izolované jevy, (které) nejsou spjaty se zkušenostmi jejich nositelů a neuplatní se při řešení problémů“. (Hejný, Kuřina, 1998, s. 387) Cestou funkčně měnící formální poznání je budování poznatků spojené se správnou diagnostikou a vyučování založené na poznání mechanismu poznávacího procesu v matematice (viz oddíl 2.2).

M. Hejný a F. Kuřina dospěli k tzv. *didaktickému konstruktivismu*⁶ (Hejný, Kuřina, 1998. dále v: Hejný, 2004; Hejný, 2007; Hejný, Kuřina, 2001, 2009). Jejich pojetí vychází z deseti přesvědčení (tzv. desatera didaktického konstruktivismu):

1. Matematiku chápeme jako specifické lidské jednání, není to jen výsledek činnosti.
2. Důležitou součástí matematické činnosti je hledat souvislosti, řešit úlohy a problémy, vytvářet a rozvíjet pojmy, zobecňovat, prověřovat a odůvodňovat tvrzení, přičemž dalším dílem těchto činností je i vytváření realitou inspirovaných matematických modelů.
3. Informace jsou přenosné, ale poznatky nikoliv, protože vznikají individuální konstrukcí ve vědomí člověka.
4. Tvoření poznatků stojí na předpokladu vlastní zkušenosti jedince, kdy žák své zkušenosti získává jednak ze setkávání se s realitou a jednak z činností předložených ve škole.
5. Podstatou vzdělávání v matematice je vytvořit prostředí, které podněcuje tvořivost, na základě tří faktorů – učitel, klima třídy a nestejnorodost podnětné roviny.
6. Přestože poznatková konstrukce je individuálním procesem jedince, tak je nezaměnitelným způsobem ovlivněna i sociální interakcí žáků ve třídě.
7. Důležité je používat různé druhy reprezentantů a strukturálním způsobem budovat matematický svět. Jednotlivé poznatky a zkušenosti jsou v mysli jedince organizovány, řazeny do skupin s jistou strukturou obecnějších i abstraktnějších pojmů.

⁶ Termín vznikl na jednom semináři a je zaveden v podobném pojetí jako u J. Brinkena (Hejný, Kuřina, 1998, s. 394). Z teoretického hlediska se nechali ovlivnit tamtéž uvedenými publikacemi zabývajícími se konstruktivismem (Danes, Maher, Noddings, 1990); (Glasserfeld, 1991); (Ernest, 1994).

8. Dalším znakem matematického konstruktivistického vyučování je jednak budování různých způsobů komunikace ve třídě a jednak vyučování různým matematickým způsobům vyjadřování (verbální, neverbální a symbolické).
9. Vzdělávací proces se hodnotí nejméně ze tří hledisek: porozumění matematice (budování představ, pojmů a postupů), zvládnutí matematického řemesla (myslí se tím trénink a ovládnutí jistých definic, algoritmů a pravidel) a aplikace matematiky, která je vyvrcholením poznávacího procesu s jistou motivační rolí.
10. Poznání založené na reprodukci informací není skutečným poznáním (formální poznání), je založené na předávání informací, postupů a návodů a vede k rychlému zapomínání.

Výuku založenou na konstruktivistických principech nazývá N. Vondrová podnětnou, kdy učitel připravuje mj. podněty a podnětná prostředí pro další rozvoj žáků. S podnětnou výukou jsou spojeny principy účinného vyučování matematice, které podle N. Vondrové vyjadřují ideu *dobré praxe* a zároveň popisují celý vyučovací proces matematice z hlediska činnosti učitele.

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
 2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy).
 3. Učitel podporuje žakovu aktivní činnost.
 4. Učitel rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení.
 5. Učitel nahlíží na chybu jako na vývojové stádium žakova chápání matematiky a impuls pro další práci.
 6. Učitel iniciuje a moderuje diskuse se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů.
 7. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění.
- (Stehlíková, 2007, s.16nn)

2.2 Mechanismus poznávacího procesu – Teorie generických modelů

Pro konstruktivistické pojetí výuky matematiky je nezbytné pochopení mechanismu poznávacího procesu. Tento mechanismus bude také využit k vymezení kritických míst ve výuce lineárních rovnic (viz kap. 2.3.2).

Duchovním otcem teorie generických modelů je M. Hejný. Hlavní myšlenka, kterou převzal od svého otce V. Hejného, spočívá v ideji, „že kvalitní poznání nemůže učitel žákovi předat, ale žák se k němu musí dobrat samostatně.“ (Hejný, 2004, s. 23) Při zkoumání poznávacího procesu zjistil, že v jisté chvíli dojde k náhlému dosažení vhledu zároveň do několika až do dané doby oddělených zkušeností žáka, což podrobil dalšímu zkoumání.

Matematické poznatky člověka se člení do dvou oblastí: na *obsah* a *schopnosti*. Obsah matematických poznatků je dostatečně probádanou oblastí, zatímco matematické schopnosti ještě ne, jelikož úzce souvisejí s obecnými intelektuálními a kognitivními procesy jedince a jsou závislé na mnoha dalších vlivech (Hejný, 2004).

Obsah matematického poznání se třídí do čtyř skupin. První skupinou jsou *objekty*, což je jistý základ, na kterém stojí celá struktura poznatků. Jsou tím myšlené např. rovnice, číslo 6, zlomek, dělitelnost apod. Druhá skupina nazývaná *vztahy* propojuje mezi sebou objekty nebo vztahy a dále se dělí na *tvrzení* ($2 + 3 = 5$) a *vzorce*. Třetí a velmi širokou skupinou poznatků jsou *postupy*, které zahrnují *algoritmy*, *návody* (návod na řešení rovnice), *řešitelské strategie* (hledání řešení nezvyklých úloh) a *argumentace* (hledání vzájemných vztahů). Poslední skupinou jsou *schémata* zahrnující kompaktní představy jedince založené na násobném opakování a zkušenosti, které vedou k nepřímým poznatkům vybavitelným v případě nutnosti. Souhrnně mezi matematický obsah *poznatků uložených ve vědomí člověka* tedy patří objekty, vztahy, postupy a schémata. (Hejný, 2004, s. 25)

Mechanismus (matematického) poznávacího procesu – teorie generických modelů (Hejný, 2004, 2007, 2009) – popisuje proces vzniku a výstavby matematických poznatků v mysli žáka. Je rozdělen do hladin (dříve etap) a hladinových přechodů, tzv. mentálních zdvihů. Další odstavce stručně představí podstatu jednotlivých hladin a přechodů.

1. *Hladina motivace* nejen že je prvotní v celém vzdělávacím procesu, ale také jím neustále prolíná, nikdy nekončí, jen mění svoji intenzitu. Důležitý počáteční rozpor je, že člověk něco neví a chce to vědět, a tato otázka podněcuje právě jeho motivaci.

2. *Hladina separovaných (izolovaných) modelů* je etapa postupného získávání zkušeností z konkrétních případů, které tvoří základ pozdějšího poznání. Čím více jich je, tím bude výsledné poznání pevnější. M. Hejný (2004) uvádí zvláštní typy modelů, které sehrávají podstatnou roli. Jsou to *překvapivý model* (tváříci se, že není modelem daného objektu, i když opak je pravdou), *zdánlivý model* (jevící se jako model daného objektu, přičemž není jeho modelem) a konečně *ne-model* (pomáhající vysvětlit hledaný objekt modelem doplňku).

3. *Zobecnění (mentální zdvih)* často bývá jen krátký časový úsek, kdy z dříve oddělených separovaných modelů uložených ve vědomí člověka na sebe některé začnou poukazovat, a začnou se vytvářet vnitřní struktury a vazby, díky nimž jedinec získává vhled do dříve zdánlivě nesouvislých modelů.

4. *Hladina generických (univerzálních) modelů* je soubor modelů, které zastupují jisté skupiny separovaných modelů. Zde je odkryta podstata matematického myšlení, kdy se z jednotlivostí vyvozují obecné modely – tvoří se generické modely.

5. *Abstrakce (abstrakční mentální zdvih)* dává vzniknout *abstraktnímu poznání*. Žák nahlíží novým pohledem na získané separované a generické modely a získává vhled do struktury těchto modelů. U tohoto mentálního zdvihu je rozdíl oproti předchozím hladinám a zobecnění ve vyšší úrovni abstraktního poznání, které v předchozích etapách je na nižší úrovni. Tento zdvih jde ruku v ruce s novým odborným (matematickým) jazykem⁷ a symbolickým záznamem jako reprezentantem nové struktury poznatků. Časově je tento zdvih již delší záležitostí.

6. *Hladina krystalizace* se prolíná s předchozími stádii poznání a je velmi zásadní pro další rozvoj žáka. Nové poznatky se zde propojují s předchozími vědomostmi nejprve jako modely, později jako abstraktní poznání a v této fázi právě doplňují nebo zpřesňují již existující struktury znalostí žáka. Tato hladina je dlouhodobým procesem a na této úrovni je později žák schopen abstraktně uvažovat i o

⁷ Tento přechod podrobně zkoumá L. Kvasz (1999) z fylogenetického hlediska a podrobně rozpracovává používání příslušného matematického jazyka.

objektech, které není možné ověřit vlastní zkušeností, ale které rozvine na základě prověření separovaných a generických modelů.

Automatizace je chápána jako etapa aplikace a procvičování získaného poznatku, ve vyučovacím procesu má nezastupitelné místo, ale do poznávacího procesu podle Hejného nepatří (nečísluje se). Autoři teorie podotýkají, že ve výuce často přispívá spíše k formálním poznatkům, přičemž body 1 – 6 této teorie, jak bylo zmíněno na začátku kapitoly, se snaží formalismus odhalit a bojovat proti němu zmíněnými cestami.

V průběhu vysvětlování jednotlivých hladin a přechodů již bylo mezi řádky naznačeno, že postup poznávacího procesu žáka ve značném rozsahu koresponduje s časovým průběhem a posloupností jednotlivých hladin daného procesu. Není ale obvyklé, že by na sebe jednotlivé hladiny plynule navazovaly, spíše se nové poznatky ukotvují do více hladin najednou. Pokud výchovně-vzdělávací proces probíhá podle obvyklého pořádku a podle běžných ontologických možností dítěte, dalo by se obecně říci, že na prvním stupni základní školy žák ve svém osobním poznávacím procesu dospěje k etapě generických modelů a na druhém stupni již postoupí s pomocí přechodu abstrakce k etapě krystalizace poznatků. Je však důležité tento proces posuzovat individuálně vzhledem k aktuálnímu matematickému tématu.⁸

Při výuce sledující jednotlivá stadia poznávacího procesu je kladen důraz na oslabení formálních poznatků s tím, že učitel nemůže žákovi předat znalosti, ale může žáka k poznatkům doprovodit. Stěžejním bodem vyučování tedy není výklad, ale tzv. podnětné vyučování, kdy je žákovi předkládána série vhodných úloh, které s patřičným přístupem učitele mohou žáka přivést k funkčnímu poznatku. Poněkud konkrétnější možnosti, jak odhalit formální poznatky u žáků, nalezneme již v Teorii vyučování matematiky (Hejný a kol, 1989):

1. Objasnit paradox.
2. Rekonstruovat zapomenutý vzorec.
3. Objasnit selhání standardního postupu.
4. Obhájit standardní postup vůči námitce.
5. Najít chybu v úvaze.
6. Aplikovat poznatek (vzorec) v praxi.

⁸ Přednáška M. Hejného *Vzdělávání v matematice orientované na budování schémat* (28. 3. 2011, 13. 4. 2011). PedF UK Praha, cílová skupina: studenti a učitelé.

7. Rozhodnout o platnosti hypotézy.
 8. Najít objekt požadovaných vlastností.
 9. Řešit nestandardní úlohu.
 10. Objasnit některé pojmy, souvislosti, symboliku atd.
- (Hejný, 1989, cit. v Hejný, Kuřina, 1998, s. 388).

2.3 Kritická místa a typy chyb v řešení lineárních rovnic

2.3.1 Pojem kritická místa

Pro charakteristiku *kritického místa* využiji překlad úvodní části z grantu GAČR, v jehož rámci, jak již bylo zmíněno, je psána tato diplomová práce.

Projekt se zabývá tzv. kritickými místy matematiky na základní škole, ve kterých žáci často selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost a její tvořivé užívání v každodenním životě produktivně vyvíjela. Mnoho učitelů z praxe si vytváří své vlastní empirické didaktické praktiky, které by mohly pomoci jejich žákům překonat problémy s daným učivem a vypořádat se s nimi. Tyto praktiky se často liší od těch, které se učí během studia jako budoucí učitelé. Jak obecná, tak oborová didaktika se většinou soustřeďují na standardní techniky zaručující hladké vyučování z pohledu učitele spíše než z pohledu jednotlivých žáků (což je také způsobeno nedostatkem času věnovaného didaktické přípravě učitelů). Vlastní, ale problematické strategie, které si žáci vytvářejí, jdou zpravidla stranou. Učitelé se s nimi setkávají teprve ve své vlastní praxi a vyvíjejí své vlastní (více nebo méně reflektované) praktiky, které reagují na žakovské strategie a zapojují je do vyučování.⁹

⁹The project deals with so called *critical areas of mathematics at the primary school*, in which pupils often fail, or in other words, they do not master them on such a level that their mathematical literacy and its creative usage in everyday life develop productively. Many in-service teachers develop their own *empiric didactic practices*, which should help their pupils to overcome or deal with their problems with the subject matter. These are usually not the practices which they learnt during their university education

Kritické místo ve vyučování matematice je tedy chápáno jako místo pro žáky nějakým způsobem obtížné. Obtížnost může být ovlivněna z několika různých stran. Oddíl věnovaný mechanismu poznávacího procesu zmiňuje, že tato teorie byla koncipována jako nástroj pro porozumění, odhalení, diagnostiku a reedukaci formálních poznatků. Jsem přesvědčena, že formální poznání často vzniká právě u kritických míst nejen v matematice. Ovládá-li žák jistou činnost jen mechanicky, hrozí velké nebezpečí, že udělá chybu. Žák mnohdy ani nezpozoruje, že se chyby dopustil, a díky tomu není schopen ji opravit. Vracím se k této myšlence záměrně, abych připomněla myšlenku poznávacího procesu a skrze tuto optiku sledovala vlastní i cizí hlediska kritických míst ve vyučování matematice.

Dříve než se podíváme na to, jak vidí kritická místa někteří autoři, předložím vlastní seznam kritérií, která ukazují na to, že určitá látka je oním kritickým místem. Vycházím přitom i z myšlenek různých autorů již v textu popsaných.

Kritériem podle mého názoru je:

- nedostatečný zájem a nízká motivace žáka,
- zdánlivá nepotřebnost nových poznatků (míra užitečnosti pro život),
- nepochopení odborných termínů žákem,
- složitost užitého matematického jazyka,
- subjektivní obtíže (např. poruchy učení, strach z neúspěchu),
- objektivní obtíže spojené s (ne)nárocností dané látky,
- výuková metoda učitele (odd. 2.1.1, 2.1.2),
- přístup učitele – míra emocí a řízení (viz odd. 2.1.3),
- nesoulad mezi skutečnou hladinou v poznávacím procesu žáka a domnělou představou učitele (např. nedostatek izolovaných modelů a příliš rychlý přechod do abstraktní roviny atd.).

Rozhodně netvrdím, že jsem shrnula všechna hlediska, ale tato mi silně rezonují se zadáním práce, teoretickou i experimentální částí.

as pre-service students, as both general and content didactics mostly focus on standard techniques to ensure smooth teaching from the perspective of a teacher rather than individual pupils (this is also caused by the lack of time devoted to the didactic preparation of teachers). Individual but problematic strategies of pupils when mastering mathematics are usually put aside. The teachers meet them only in their own practice and develop their own (more or less reflected) practices which react to these strategies and integrate them into the teaching.

2.3.2 Kritická místa související s lineárními rovnicemi

Algebra, resp. využití písmen v matematice, je sama o sobě kritickým místem. Existuje celá řada výzkumů, které to potvrzují a které se zaměřují na specifické problémy žáků či na různé způsoby výuky, které by měly těmto problémům předcházet. Z velkého množství zdrojů vybírám jen některé, a sice ty, které se zabývají explicitně rovnicemi.

Obtížnými místy v algebře se zabývá například L. R. Booth, který tvrdí, že „jedna z cest, jak zjistit, proč je algebra obtížná, je identifikovat druhy běžných chyb, jichž se žáci v algebře dopouštějí, a následně prozkoumat jejich příčiny.“ (Booth, 1988, s. 299)¹⁰ Ve svém článku se zmiňuje o svých dřívějších experimentech, kde se kromě jiných okruhů také věnoval řešení rovnic (s různou obtížností podle věku žáků). Bez ohledu na věk byly chyby žáků rozděleny do čtyř oblastí; jedná se o: zaměření algebraické aktivity a povaha odpovědi; použití zápisu a konvencí v algebře; významy písmen a proměnných; druhy vztahů a metod použitých v aritmetice (tamtéž).¹¹ Jednotlivé oblasti si více přiblížíme.

První oblast se zabývá chápáním aktivit v algebře s rozdílností oproti aritmetice. Činnost v aritmetice se zaměřuje především na hledání konkrétní číselné odpovědi, kdežto činnost v algebře je zaměřena na původ procesů, na vztahy a manipulaci, přičemž se pokouší tyto činnosti vyjádřit v obecném a jednoduchém tvaru.¹² Žáci mnohdy ale nejsou schopni chápat a používat celou šíři algebraických činností a jejich zúžený pohled se zaměřuje pouze na číselnou odpověď. Booth (1988) v závěru charakteristiky píše, že žáci jsou později schopni akceptovat spíše algebraickou

¹⁰Vlastní překlad: One way of trying to find out what makes algebra difficult is to identify the kinds of errors students commonly make in algebra and then to investigate the reasons for these errors.

¹¹Vlastní překlad: a) the focus of algebraic activity and the nature of *answers*; b) the use of notation and convention in algebra; c) the meaning of letters and variables; d) the kinds of relationships and methods used in arithmetic.

¹²Někteří autoři používají pojem procedural knowledge, tj. *procedurální/procesní znalost* (např. Booth, Koedinger, 2008; Baroody, 1983; Rittle-Johnson, Siegler, Alibali, 2001).

Originál: In algebra the focus is on the derivation of procedures and relationship and the expression of these in general, simplified form.... The immediate focus is on the derivation, expression, and manipulation of the general statement itself.

odpověď (př. výraz $n + 3$ je číslo, resp. výsledek je o 3 větší než n) než fakt, že stejný výraz reprezentuje i proces (př. výraz $n + 3$ znamená, že k číslu 3 přičtu n).¹³

Konkrétní obtíže z oblasti žákovské interpretace matematických symbolů vztahujících se k rovnicím dokládá L. R. Booth např. odkazem na článek (Kieran, 1981), který se zabývá chápáním rovnic žáky (12 – 14 let). Symbol součtu je možné chápat jako výsledek nebo jako akci a rovnítko může být symbolem pro vztah rovnosti nebo jako jednosměrné vedení k výsledku s tím, že máme napsat výsledek. Oba významy v obou případech jsou pro algebraické myšlení nezbytné. (Booth, 1988; Booth, Koedinger, 2008)¹⁴

Další zkoumanou oblastí jsou významy písmen a proměnných. L. R. Booth (1988) zajímavě propojuje chápání písmene v aritmetice a proměnné v algebře. V aritmetice písmeno m reprezentuje *metr*, ale algebře proměnná m označuje *počet metrů*. Na příkladu ukazuje, že pro žáky není snadné pochopit proměnnou a že nesprávné představy a chyby v algebře spíše ukazují na nesprávné a přetrvávající problémy v aritmetice. (Tohoto problému si je vědom i M. Hejný,¹⁵ který zdůrazňuje propedeutické budování myšlenky proměnné.)

Poslední obtížnou oblastí se značným výskytem chyb je chápání aritmetických vztahů, vlastností a metod. Pro představu řekněme, že se jedná například o nesprávné používání závorek, kdy je žáci např. ignorují. Další důležitou složkou této oblasti je používání neformálních metod řešení úloh žáky. V článku (Booth, 1988) je zdůrazněno, že žáci musí nejprve cítit potřebu pochopit a naučit se používat formálnější metody a postupy. Aby žák potřebnost obecné metody řešení uznal za potřebnou, musí být splněny tři podmínky (Booth, 1988): a) učitel si je v jistých úlohách vědom žakovy neformální metody řešení; b) učitel si uvědomuje důležitost a hodnotu žakovy neformální metody a je schopen diskutovat o jejím používání a c) učitel žáky vede

¹³ Vlastní překlad: This problem may relate more closely to the difficulty that students appear to have in accepting algebraic answers than to the fact that the same expression represents both procedure and answer.

¹⁴ Někteří autoři toto nazývají termínem Conceptual knowledge, tj. *koncepční/pojmová znalost* (např. Booth, Koedinger, 2008; Baroody, 1983; Rittle-Johnson, Siegler, Alibali, 2001).

¹⁵ Přednáška M. Hejného Vzdělávání v matematice orientované na budování schémat (28. 3. 2011, 13. 4. 2011). PedF UK Praha, cílová skupina: studenti a učitelé.

k uvědomění si omezení, které tyto metody přinášejí při řešení podobných nebo obtížnějších úloh.

2.3.3 Typy chyb v řešení lineárních rovnic

Není zcela snadné popsat typologii chyb, kterých se žáci při řešení lineárních rovnic dopouštějí. Různí autoři se k této otázce staví z různých úhlů pohledu. Z výše uvedeného vyplývá, že kritická místa nám vymezují oblasti, ve kterých se žáci dopouští více chyb, protože tato místa pro ně jsou obtížná a nejasná. Chyby v oblasti rovnic také patrně plynou i z nedostatečného vhledu do prováděných úprav.

Zajímavou studii na téma chyby v jednoduchých lineárních rovnicích zpracoval R. Hall (2002)¹⁶. Vypsal kategorie známé z literatury a na základě experimentů je přeorganizoval a rozšířil o nově vzniklé kategorie. Na obrázku 2.3 vidíme 9 kategorií chyb, ke kterým dospěl. Příklady chyb naznačují charakteristiku daných kategorií, jejichž názvy není zcela snadné výstižně přeložit do češtiny. Podívejme se na jednotlivé kategorie podrobněji. (Hall, 2002) Chyby jsou většinou ilustrovány na řešení rovnice $5x + x + 2 = 3x + 12$.

¹⁶Předexperiment a experiment prováděl ve třídách prima – kvarta (246 žáků, Velká Británie). Žákům zadal šest příkladů rovnic a potom jejich řešení s pomocí zakotvené teorie kódoval a řadil do jednotlivých kategorií chyb. Pokud některá kategorie v literatuře chyběla, tak ji nově vytvořil a charakterizoval.

Error Types in the Large-Scale Study

Deletion error (Lit)	Redistribution error (Lit)	Switching Addends error (Lit)
$3x - 3 + 2 = 12 - 3$	$5x + 2 - 2x = 2x + 12 - 2x$	$6x + 2 = 3x + 12$
$x + 2 = 9$	$3x + 2 + 2 = 12 - 2$	$9x = 14$
Transposing error (Lit)	Omissions error (New)	Other Inverse error (New)
$5 + \frac{x}{2} = 2$	$5x + x + 2 = 3x + 12$	$4x = 1$
$5 + x = 4$	$6x + 2 - 2 = 3x + 12$	$x = 1 - 4$
Number Line Error (New)	Division error (New)	Absence of Structure error (New)
$-3 + 1 = -4$	$3x = 10$	$5x + x + 2 = 3x + 12$
	$x = 3.1$	$3 + 2 = 3x - 8$

Obrázek 2.3: Kategorizace chyb (Hall, 2002, s. 35)

První kategorie – *Deletion error (chyba vymazání/zrušení)*¹⁷ – představuje chyby plynoucí z přílišné generalizace a škrtnání nejen operací. Žák má tendenci generalizovat a využívá jen některá pravidla úprav výrazů. Příklad ukazuje, že si žák upravil pravidlo a odčítá číslo 3, jako by se nejednalo o neznámou, ale o číslo. Ve výpočtu vidíme naznačenou ekvivalenci úprav a jednosměrná šipka v ilustracích ukazuje *úmysl* žáka vedoucí k chybě, nebo již provedenou chybu.

$$5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 6x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 3x + 2 = 12 \rightarrow 3x - 3 + 2 = 12 - 3 \rightarrow x + 2 = 9.$$

¹⁷ (Hall, 2002; převzal od Kieran, 1992)

Druhá kategorie – *Redistribution error (chyba přerozdělení)*¹⁸ – ukazuje chyby, které plynou z žákova nedodržení stejného znaménka při úpravách na obou stranách rovnice. Hall (2002) popisuje tuto chybu jako neschopnost dodržet znaménko při úpravě stran, tj. porušení rovnosti, př.:

$$5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 5x + 2 = 2x + 12 \Leftrightarrow 3x + 2 = 12 \rightarrow 3x + 2 + 2 = 12 - 2.$$

Třetí kategorie vznikla spojením tří v předexperimentu samostatných kategorií. Hall tvrdí, že příčina provedené chyby je skrytá. První, *Switching addends error (chyba znaménka při přehození sčítanců mezi stranami rovnice)*¹⁹, se při řešení rovnic objevuje relativně často, př.: $6x + 2 = 3x + 12 \rightarrow 6x + 3x = 12 + 2$. Žák při přenášení činitele z jedné strany rovnice na druhou *zapomene* změnit znaménko. Druhou podskupinou jsou *Exhaustion error (chyby z vyčerpání)*²⁰, kterých se žák dopustí většinou až v závěru výpočtu, kdy se vyčerpal úsilím o správné řešení a dříve se chyby stejného typu ve výpočtu nedopustil. Třetí jsou *Misuse of additive inverse error (chyby z nesprávného používání součtové inverze)*²¹ plynoucí z opačného použití správně míněného početního kroku, tj. žák díky opačné operaci nedocílí zjednodušení rovnice, př.: $6x + 2 + 2 = 3x + 12 + 2$.

Čtvrtá kategorie *Transposing error (transpoziční chyba)*²² plyne ze slepé aplikace pravidla, kdy žáci nepracují s rovnicí jako celkem, ale operace provádějí jen na některých členech dané rovnice. Na příkladu vidíme, že žák nerozšířil danou rovnici správně: $5 + \frac{x}{2} = 2 \rightarrow 5 + x = 4$.

Pátá kategorie *Omissions error (chyba z opomenutí)*²³ se přihodí při řešení rovnice s více členy, kdy z nepochopitelných důvodů jsou některé členy rovnice vynechány a dále se s nimi nepracuje. V následujícím příkladu vidíme, že žák při výpočtu a opisování zapomněl, že také zároveň měl v úmyslu provádět úpravu rovnice,

¹⁸ (Hall, 2002; převzal od Kieran, 1992)

¹⁹ (Hall, 2002; převzal od Kieran, 1992)

²⁰ (Hall, 2002)

²¹ (Hall, 2002)

²² (Hall, 2002; převzal od Kieran, 1992)

²³ (Hall, 2002)

kterou provedl na levé straně rovnice, ale na pravé již stejnou úpravu neprovedl, př.
 $5x + x + 2 = 3x + 12 \rightarrow 6x + 2 - 2 = 3x + 12$.

Šestá kategorie *Other inverse error (jiné chyby plynoucí z nesprávné inverze operací)*²⁴ jsou zpravidla udělány žáky, kteří nerespektují či možná spíše nevidí rozdíly mezi $(3x \wedge 3; -3 \wedge 3)$. Chyby z této kategorie většinou dělají žáci začínající s látkou rovnic. Dají se snadno odstranit pomocí cíleně vedené výuky. Na konkrétním příkladu vidíme, že žák nerozeznává číslo u neznámé jako její součást, ale pracuje s ním jako s číselným členem. Př.: $4x = 1 \rightarrow x = 1 - 4$.

Sedmá kategorie *Number line error (chyba číselné osy)*²⁵ je celkem dobře vystižena v názvu. Žák dělá chyby spojené s nějakým dříve naučeným postupem, při kterém přehlédne důležitá znaménka, která mění smysl výsledku (př. $-3 + 1 = -4$). U charakteristiky této skupiny má Hall (2002, s. 14) poznámku, že chyby algoritmů a manipulací nebudou považovány za chyby samy o sobě. S tím nesouhlasím, protože pokud žák dělá chyby v algoritmech a manipulacích, tak to svědčí o nepochopení podstaty prováděných úkonů a o jejich mechanické realizaci.

Osmá kategorie *Division error (chyby v dělení)*²⁶ se vyskytují až v závěru řešení rovnice, kdy v posledním kroku dochází k dělení rovnice číslem tak, aby se osamostatnila neznámá. Žák tento krok nezvládne (př. $3x = 10 \rightarrow x = 3,1$). K této kategorii Hall ještě připojil jednu dříve samostatnou skupinu chyb *Inability of isolate variable error (chyba z neschopnosti osamostatnit proměnnou)*²⁷, kdy žák skončí své úsilí o výpočet rovnice předčasně (př. $3x = 10 \rightarrow \text{prázdné}$), protože není schopen proměnnou osamostatnit, tj. výpočet nedokončí.

Devátá kategorie *Absence of structure error (chyby plynoucí z nepřítomnosti vazeb)*²⁸, př.: $6x + 2 = 3x + 12 \rightarrow 3 + 2 = 3x - 8$ ukazuje na to, že žák nemá upevněné základní, řekněme aritmeticko-algebraické vazby, a tak není schopen správně provádět

²⁴ (Hall, 2002)

²⁵ (Hall, 2002)

²⁶ (Hall, 2002)

²⁷ (Hall, 2002)

²⁸ (Hall, 2002)

potřebné operace. U těchto chyb není možné nalézt podobnost s výše jmenovanými chybami.

Hall (2002, s. 36) po kódování chyb v žákovských řešeních vytvořil závěrečnou tabulku s počty nalezených chyb. Graficky není tabulka přehledná, proto ji neuvádím, ale jen komentuji. Největší počet chyb se objevil ve 3., 4. a 8. kategorii (40, 40, 34 chyb z 246 žákovských řešení). Řečeno slovy, jedná se o chyby při nesprávném přechodu z jedné strany rovnice na druhou, chyby z vyčerpání, chyby z nesprávného používání sčítací inverze, transpoziční chyby, chyby při dělení a nesprávném izolování proměnné. Další skupiny chyb (1., 2., 5., 6. a 7. kategorie) se postupně vyskytovaly v počtu 5, 6, 8, 18 a 7 chyb, což je již relativně nízké procento ze všech zkoumaných řešení.

V experimentální části (kap. 4.4) bude analyzováno několik příkladů žákovského řešení lineárních rovnic z následků hodin, které jsem absolvovala v rámci zpracovávání této práce a zároveň v rámci projektu GAČR. S daným žákem jsem seděla v jedné lavici a přesně jsem viděla, jaké kroky dělal, a mohla se ho ptát, jak k nim došel a proč. Uvidíme, jak se teoretické poznatky promítají do běžné praxe a korelují s ní.

3 Lineární rovnice v literatuře a učebnicích

Lineární rovnice jsou částí učiva o rovnicích a ve vyučování matematice zaujímají důležité místo. Jsou jedním ze základních stavebních kamenů matematiky vůbec, což potvrzují např. autoři Kompendia matematiky (Delventhal, Kissner, Kulick, 2004), kteří výmluvně přirovnávají řešení rovnic matematika k vahám prodavače, jako nezastupitelného nástroje.

M. Hejný (1989) navrhuje plán přípravy učitele k vyučování rovnic. Učitel se má jednak snažit pochopit žákův mechanismus procesu poznávání a učení se rovnicím a jednak má přemýšlet o příčinách případných neúspěchů (viz oddíl 2.3) a hledat cesty, jak je odstranit, jak s nimi dále pracovat a co nejlépe je využít k prohloubení znalostí. M. Hejný uvádí následujících 6 cílů, které by si učitel měl uvědomit dříve, než začne učit rovnicím (1989, s. 193; nyní překlad do češtiny).

1. Prohloubit zájem žáka o matematiku a vědět, jak ho motivovat;
2. rozvíjet žakovu schopnost modelovat reálné situace v jazyce rovnic;
3. rozšířit zkušenosti žáka s rovnicemi a jejich řešením;
4. využít rovnice na procvičování různých částí matematiky;
5. získat zručnost a jistotu v řešení některých důležitých typů rovnic;
6. rozvíjet abstraktní pohledy na rovnice, pěstovat logiku a schopnost dedukce.

3.1 Definice, zavedení a úpravy lineárních rovnic

Nyní je ve středu zájmu *forma*, *srozumitelnost* a *složitost* definice lineární rovnice v učebnicích. Není důležité, v jaké části jsou tyto definice uvedeny, zda jsou na začátku příslušné kapitoly nebo až v jejím průběhu. Je zřejmé, že uvedená tři kritéria se mění podle zaměření učebnic a podle toho, pro jaký stupeň škol jsou určeny. Jeden z hlavních znaků je souvislost s věkem žáka, stupněm jeho poznávacího procesu (viz oddíl 2.2) v tématu rovnic a předpokládanými schopnostmi žáka, který se bude z knih učit. V mnoha případech jsou definice doprovázeny obrázkem. Dalo by se polemizovat, jestli takové prezentování obrázkem, tj. pro žáky přijatelným způsobem, je možné považovat za definici, ale budiž. Často by bylo možné namítnout, že se jedná o instruktivní pojetí látky, ovšem do značné míry záleží na učiteli, jak k látce přistoupí a jak kreativně zvýší potenciál připraveného materiálu v učebnici.

V učebnicích pro 1. stupeň se termíny rovnost a rovnice téměř nevyskytují, ale s rovnicemi se v různé míře propedeuticky pracuje (více viz oddíl 3.4.2). V učebnicích 2. stupně se již termín rovnice, myšleno lineární rovnice, objevuje. Látka je zahrnuta do učiva 8. ročníku. Pokud je mi známo, tak se s propedeutickými úlohami o rovnicích v 6. a 7. ročníku, až na učebnici (Šarounová a kol., 1998), nesetkáváme. Při své analýze vycházím z těchto učebnic:

- BINTEROVÁ Helena; FUCHS, Eduard; TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 8: aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. 127 s. ISBN 978-80-7238-684-0.
- COUFALOVÁ, Jana a kol. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 2. upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007, 192 s. ISBN 978-80-7168-994-2.
- HERMAN, Jiří a kol. *Matematika: rovnice a nerovnice: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií (tercie)*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 121 s. ISBN 80-719-6014-4.
- CHARVÁT, Jura, ZHOUF, Jaroslav, BOČEK, Leo. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 223 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-719-6154-X.
- KOMAN, Milan, TICHÁ, Marie, KUŘINA, František, ČERNEK, Pavol. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl*. 1. vyd. Praha: Matematický ústav AV, 2002, 84 s. ISBN 80-85823-47-0.
- KUBÁT, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2004, 419 s. ISBN 80-719-6298-8.
- KRYNICKÝ, Martin. [online]. 2010 [cit. 2012-04-12]. Realistická pedagogika: Když (se) chcete učit... *Funkce a rovnice*. Dostupné z WWW: <<http://www.realisticky.cz>>.
- NOVOTNÁ, Jarmila, KUBÍNOVÁ, Marie, SÝKORA, Václav. *Matematika s Betkou 3: pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Scientia, 1998, 205 s. ISBN 80-718-3148-4.
- ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 8. ročník základní školy: 2. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 71 s. ISBN 80-719-6167-1.
- POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách I*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 344 s. ISBN 80-719-6021-7.

- ROSECKÁ, Zdena a kol. *Algebra: učebnice pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, 2005, 111 s. ISBN 80-856-0792-1.
- ŠAROUNOVÁ, Alena a kol. *Matematika 7, II. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 212 s. ISBN 80-7196-106-X.
- ŠAROUNOVÁ, Alena a kol. *Matematika 8, II. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 143 s. ISBN 80-719-6127-2.
- TREJBAL, Josef. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl*. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2000, 86 s. ISBN 80-723-5043-9.

Nejčastější formou zprostředkování pojmů týkajících se lineárních rovnic v učebnicích 2. stupně je forma obrázku doprovázená slovním a pro žáky srozumitelným vyjádřením. V některých případech *definicím* předchází několik úloh a až poté následuje spíše slovní než symbolická sumarizace naznačených pojmů. Důležité a nové poznatky jsou sepsány do názorných přehledů s ukázkou jednoduchých příkladů k zapamatování. Příkladem jsou učebnice (Odvárko, Kadleček, 1999, s. 6) nebo (Binterová a kol., 2009, s. 72). Jiné učebnice pojmy vysvětlují hned na začátku kapitoly nebo v průběhu prvního řešeného příkladu. Tento způsob se jeví jako instruktivní; jednotlivé kroky postupu řešení jsou jasně dány a není prostor pro diskuzi nad jiným možným řešením.

Pojmy *platná a neplatná rovnost*, ze kterých se vychází při definování rozdílů mezi rovnostmi a rovnicemi, definuje např. (Herman a kol., 1996, s. 11). V jiných učebnicích se pojem rovnosti také objevuje, ale v menším rozsahu a spíše konstatováním: *toto je rovnost*.

Lineární rovnice je zpravidla definována takto: „Rovnice $ax + b = 0$ ²⁹, kde $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$, se nazývá lineární rovnice (s neznámou x).“ (Charvát a kol., 2001, s. 17) V učebnicích mnohdy nechybí diskuze nad podmínkami řešitelnosti rovnic.

Souvislost mezi lineárními rovnicemi a lineárními funkcemi je prezentována např. v elektronické učebnici M. Krynického nebo ve sbírce (Kubát, 2004, s. 10), a to nejen slovně, ale i vizuálním srovnáním. Na obrázku 3.1 je vidět vyšší náročnost a sofistikovanost matematického vyjádření a definice.

²⁹ Pokud nebude řečeno jinak, bude písmeno x příp. y označovat neznámou a ostatní písmena ve výrazu budou označovat parametry.

Lineární rovnice jsou všechny rovnice, které můžeme zapsat ve tvaru $ax + b = 0$ (neznámá je pouze v první mocnině).

Podobnost:

Lineární rovnice $ax + b = 0$

Hledáme, kdy se výraz $ax + b$ na pravé straně rovná nule.

Řešíme rovnici:

$ax + b = 0 \quad / -b$ Odečítat můžeme cokoliv.

$ax = -b \quad / \text{Chceme dělit číslem } a.$ Jde to pouze, když $a \neq 0 \Rightarrow$ musíme rozdělit postup do několika částí.

Lineární funkce $y = ax + b$

Hledáme, kdy $y = 0 \Rightarrow$ hledáme průsečík s osou x .

Obrázek 3.1: Definice lineární rovnice podle M. Krynického

3.1.1 Ekvivalentní a důsledkové úpravy, zkoušky

Pojem *řešení rovnice* se používá ve třech významech: a) kořen rovnice, b) množina všech kořenů rovnice, c) postup hledání kořenů rovnice.

Ekvivalentní úpravy jsou takové úpravy rovnice, při kterých nedochází ke změně počtu kořenů původní ani upravené rovnice. V učebnicích pro střední školy se hovoří o ekvivalentních úpravách, které zachovávají množinu všech řešení (např. Charvát a kol, 2001).

J. Kubát (2004), podobně jako dříve M. Hejný (1989), definuje důsledkové a ekvivalentní úpravy následovně.

Každá úprava, která převádí rovnici $f_1(x) = g_1(x)$ s množinou všech řešení K_1 na rovnici $f_2(x) = g_2(x)$ s množinou všech řešení K_2 , kde $K_1 \subset K_2$, se nazývá *důsledková úprava* rovnice $f_1(x) = g_1(x)$.

Jestliže $K_1 = K_2$, jde o *ekvivalentní úpravu* rovnice $f_1(x) = g_1(x)$.

Řešíme-li rovnici pomocí důsledkových úprav, je třeba provést zkoušku dosazením do původní rovnice.

Při řešení rovnice pomocí ekvivalentních úprav není zkouška nutná.

(Kubát, 2004, s. 52)

Důsledkovou úpravu rovnice $f_1(x) = g_1(x)$ na rovnici $f_2(x) = g_2(x)$ lze též označit implikací rovnic $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$ a ekvivalentní úpravu rovnice $f_1(x) = g_1(x)$ na rovnici $f_2(x) = g_2(x)$ je možné označit ekvivalencí $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

Úvahy nad rozdílem mezi důsledkovými a ekvivalentními úpravami vedou k myšlence zkoušky, která má funkci pojistky správnosti řešení a výběru správných výsledků. Diskuze nad nutností provádění zkoušky je nedílnou součástí výuky rovnic. O. Odvárko (1994) ve svém článku popisuje přístup žáků, kteří postupem času zjišťují, že pro ně je zkouška něco zbytečného a nedůležitého. Žáci, podle jeho slov, argumentují tím, že učitel stejně kontroluje pouze výsledky a navíc jsou rovnice tak jednoduché, že se nemohou v řešení splést. Naopak na druhém stupni ZŠ se již vytvářejí návyky pro řešení rovnic, které jsou důležité při výuce na střední škole, kde se při řešení úloh často používají důsledkové úpravy a provedení zkoušky je nezbytné.

3.2 Modely rovnic z různých prostředí

M. Hejný a D. Jirotková³⁰ objasnili zavedení různých prostředí do matematické výuky myšlenkou R. J. Gerriga, který na otázky: Víš, kolik máte doma obrazů?, Kdy ses to učil?, Jak je možné, že to víš a nikdy ses to neučil?, odpovídá, že člověk má v hlavě schéma bytu a při položení otázky ve své hlavě prochází jednotlivé místnosti a dokáže spočítat počty obrazů v bytě. Právě toto bezděčné učení se jeví jako nejefektivnější; člověk pobývajících v jistém prostředí se bezděky učí. Tento fakt je vedl k vytvoření různých prostředí v matematice, kde se pouze nepočítá, ale žáci se řešením úloh učí nejen matematické poznatky, ale i poznatky užitečné pro život. Rozhodujícím momentem je osobní zkušenost žáka. Některá prostředí důležitá pro lineární rovnice budou uvedena v následujícím oddíle 3.2.

Pro představení modelů, které se používají pro výuku lineárních rovnic, využiji třídění z diplomové práce V. Koudelkové (2011, s. 18nn), která toto téma podrobně zpracovala pro učebnice 1. stupně. V. Koudelková (2011) rozdělila prostředí, z nichž vyrůstá pojem lineární rovnice a její řešení, na sémantická, strukturální a geometrická³¹.

³⁰ Přednášky na téma Vzdělávání v matematice orientované na budování schémat, 28. 3. 2011; 13. 4. 2011, PedF UK Praha, cílová skupina: studenti a učitelé.

³¹ Tyto pojmy používá v souladu s přednáškami M. Hejného z Didaktiky matematiky z roku 2011. Odkaz: (Koudelková, 2011, s. 18)

3.2.1 Sémantické aritmetické prostředí

V aritmetickém sémantickém prostředí nesou čísla určitý význam a reprezentují jisté reálné objekty (závaží na vahách, schody, cestování autobusem).

Rovnoramenné váhy

Na prvním stupni ZŠ je tento model v učebnicích jenom zřídka, ale na druhém se s ním setkáme ve všech uvedených učebnicích kromě učebnice (Šarounová a kol., 1999).

Žák vidí jednotlivá závaží na vahách a tuto reálnou situaci popisuje schématem rovnice. Pokud má vyučující možnost vzít rovnoramenné váhy do hodiny, žák by mohl získat další zkušenost vlastní manipulací se závažími. Žák odebírá jednotlivá závaží tak, aby se neporušila rovnost. Tento proces je demonstrován škrtním jednotlivých závaží o stejné hmotnosti. Dále je proces zapisován pomocí matematického zápisu rovnice, kde také, stejně jako na vahách, jsou odebírána jednotlivá čísla stejné hodnoty, až se nakonec zjistí hodnota neznámé.

Kromě schématu vah je využita ještě rovnost mezi počty předmětů ve spojených obdélnících. Na obrázcích žák postupuje podobně jako na vahách (Binterová a kol., 2009, s. 76). Používají se úpravy škrtní, půlení a přiřazování, kterými si žák může ověřit výsledek řešené rovnice. Opět by bylo možné provádět reálnou manipulaci s měšci a mincemi.

Druhou obdobou modelu vah je model houpačky, který se objevuje pouze v učebnici (Rosecká a kol., s. 70).

V souhrnu můžeme říci, že model vah byl v učebnicích použit jako demonstrační prostředek k řešení konkrétních úloh, k výkladu ekvivalentních úprav při řešení rovnice nebo jako zmínka, jak bychom si rovnice mohli představit.

Autobus

Prostředí Autobus se v učebnicích 2. stupně ZŠ nevyskytuje, zařazují ho pro úplnost. Pouze Binterová a kol. (2009) mají jednu úlohu tohoto typu, kterou mají žáci řešit v úvodu celé kapitoly, ale není naznačen postup řešení. Toto prostředí je specifické pro učebnice (Hejtný a kol., 2007 – 2010).

Úlohy z tohoto prostředí se nejprve řeší manipulativně, žáci simulují jízdu autobusu po zastávkách, kde nastupují a vystupují cestující. Postupně se snaží výsledky nějakým způsobem zapisovat a systematizovat, až dospějí k formě přehledné tabulky. Později jsou žáci schopni řešit i složitější zadání úloh jen s pomocí tabulky zastávek a počtu cestujících.

Úlohy na věk

Úlohy na věk řadím k obtížnějším úlohám na představivost i na řešení. V učebnicích se objevují pouze zřídka.

Jeden ze způsobů řešení těchto úloh je pomocí jednoduché tabulky. „Aniččině tetě je 35 let, Aničce je 14 let. Za kolik let bude tetě dvakrát tolik let, než bude Aničce?“ (Odvárko, Kadleček, 1999, s. 26)

	nyní	Potom
Anička	14 let	$14 + x$
Teta	35 let	$2(14 + x)$

Uvědomíme si, že roky narození Aničky a tety se nemění, tedy mezi jejich věky je stále stejný rozdíl: $35 - 14 = 21$ let. Neznámá x označuje, za kolik let bude tetě dvakrát tolik let, než bude Aničce. Vytvoříme rovnici: $2(14 + x) - (14 + x) = 21$ a vyřešíme ji.

3.2.2 Strukturální aritmetické prostředí

Díky abstrakci pojmu číslo jsem očekávala, že úloh ze strukturálního aritmetického prostředí se bude objevovat při zavedení rovnic více, než bylo úloh ze sémantického prostředí, ale nebylo tomu tak.

Úlohy „Myslím si číslo“

Netradiční zadání může žáky zaujmout a úlohy „Myslím si číslo“ řeší i na druhém stupni spíše jako hádanky. Matematický model, tedy rovnice, ustupuje do pozadí. I v učebnicích jsou tyto úlohy nazvány např. úlohami s kouzlem (Novotná a kol., s. 180).

V učebnici (Coufalová, 2007) jsou trochu netradičně zadané úlohy typu „Myslím si číslo“.

„1. Kdo jsem?

- a) Když mě vynásobíte dvěma a přičtete 8, dostanete 4.
- b) Když ke mně přičtete 8 a součet vynásobíte 5, dostanete 6.
- c) Moje třetina je o 2 menší, než moje polovina.

2. Vynásob mě pěti a součin odečti od jedné. Dvě pětiny tohoto rozdílu jsou stejné, jako když ke mně přičteš 1. Poznáš, kdo jsem?“ (Coufalová a kol., s. 136)

Řešení:

1.a) $x \cdot 2 + 8 = 4; x = -2$

1.b) $(x + 8) - 5 = 6; x = -7$

1.c) $\frac{x}{3} + 2 = \frac{x}{2}; x = 12$

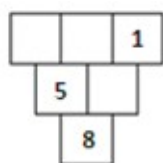
2. $(1 - x \cdot 5) \cdot \frac{2}{5} = x + 1; x = -\frac{1}{5}$

Magické čtverce

Magické čtverce se ve velké míře objevují na 1. stupni, ale na 2. stupni je jejich výskyt velmi nízký. Podstatnou vlastností magických čtverců je, že součty čísel v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách se rovnají. Toto prostředí se objevilo pouze v učebnici (Rosecká, 2005, viz obr. 3.16).

Součtové pyramidy nebo trojúhelníky

Toto prostředí se opět vyskytuje až na jednu výjimku (Trejbal, 2000) výhradně v učebnicích 1. stupně. Jedná se o úlohy, kdy jsou v obdélnících pyramidy nebo trojúhelníku vepsána čísla a prázdná políčka se musí dopočítat. Úlohy je možné diferencovat podle náročnosti. Rozbor celého postupu uvádí V. Koudelková (2011, s. 20 – 21). Na obrázku 3.2 je naznačený postup řešení, kdy si jednotlivá políčka součtového trojúhelníku označíme písmeny a zapíšeme do rovnic jejich vzájemné vztahy a rovnice vyřešíme. Jen podotýkám, že žáci si tyto vztahy velmi rychle osvojí a žádné rovnice si při řešení úlohy nepíší.

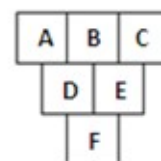


Označíme-li si jednotlivá pole písmeny $A - F$, jak můžeme vidět na obr. 5, pak v uvedeném příkladu můžeme najít tyto rovnice:

$$5 + E = 8$$

$$B + 1 = E$$

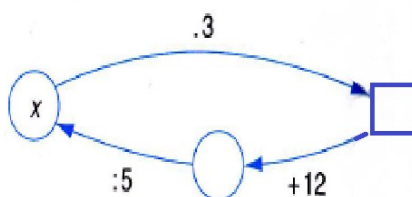
$$A + B = 5.$$



Obrázek 3.2: Postup řešení součtového trojúhelníku (Koudelková, 2011)

Diagramy

Pro ilustraci tohoto prostředí použijí příklad z učebnice (Koman a kol., 2002, obr. 3.3). Při hledání řešení úlohy typu „Myslím si číslo“ použili autoři jako jednu z variant následující zacyklený diagram. Tento způsob přiblížení řešení rovnic se ještě několikrát v této učebnici objevuje.



Obrázek 3.3: Diagram

Tabulky

Tabulky na doplňování čísel se na 2. stupni neobjevují, ovšem v učebnicích 1. stupně jsou velmi časté. Jedinou výjimkou je jedna tabulka v učebnici (Koman a kol., 2002, obr. 3.4), kde žáci počítají podle známého vzorce délku strany rovnostranného trojúhelníku.

Doplňte tabulku, podle které můžete z obsahu rovnostranného trojúhelníku určovat délku jeho stran.

$S \text{ (cm}^2\text{)}$	5	10	15	20	25	30
$a \text{ (cm)}$				6,8		

Obrázek 3.4: Tabulka

3.2.3 Geometrická prostředí

Výskyt modelů z geometrického prostředí je velmi malý. V podstatě máme před sebou pouze jeden z modelů použitých pro propedeutiku na 1. stupni, a sice neznámé rozměry pravoúhelníků.

Neznámé rozměry pravoúhelníků

Rovnice se dají využít i v geometrii, později v analytické geometrii. K sestavení rovnic popisujících vlastnosti daných obrazců je nutné znát základní vlastnosti daných mnohoúhelníků. Příklad této úlohy je na obr. 3.10.

3.2.4 Shrnutí modelů

Model rovnoramenných vah se mi na 2. stupni ZŠ jeví jako nejefektivnější. Je pravda, že je vedle úloh na „Myslím si číslo“ nejpoužívanějším modelem pro rovnice. Přestože se rovnoramenné váhy v současnosti používají méně často, jsou reálným předmětem, který přibližuje matematiku žakovskému chápání.

Strukturální aritmetická prostředí, která mohou vést k pojmu lineární rovnice a jejímu řešení, se v učebnicích 2. stupně objevují zřídka. Dalo by se říci, že tyto učebnice obsahují spíše sémantická prostředí, z nichž se vyvodí pravidla pro úpravu rovnic, a dále se už procvičuje pouze řešení rovnic bez použití dalších modelů.

3.3 Metody řešení lineárních rovnic

Cílem této podkapitoly je nalézt a popsat výuku metod řešení tak, jak je prezentována v dostupné literatuře.

Rovnice jsou v učebnicích a sbírkách prezentovány různými způsoby, které se v podstatě věci shodují. Většinou je použit velmi podobný postup, který není nahodilý, ale směřuje od jednodušších ke složitějším pojmům a postupům. Myslím, že je možné je rámcově shrnout do tří následujících kroků:

- připomenutí úprav algebraických výrazů (pojem proměnná),
- připomenutí a vysvětlení pojmů a úkonů spojených s rovností a rovnicí (rovnost, rovnice, neznámá – proměnná, řešení: kořen a proces),

- řešení rovnic s pozdějším vysvětlením ekvivalentních úprav v různých způsobech provedení.

Téměř ve všech učebnicích jsem našla několik úloh, které ve větší či menší míře připomínají již osvojené a známé postupy řešení a ze kterých autoři vycházejí při zavádění (řešení) rovnic. V některých učebnicích (viz níže) jsou naznačené doporučené metody a formy výuky a výkladu. Zde je nutné dodat, že velmi záleží na přístupu každého učitele (viz oddíl 2.1), zda využije nabízený potenciál učebnice nebo pomocí vhodných metod ho ještě umocní.

3.3.1 Metoda pokus – omyl³²

Na začátek úvah k této metodě je nutno podotknout, že si učitel často ani neuvědomí důležitost této metody pro žáka. Metoda není omezená ani věkem uživatele ani jeho matematickými dovednostmi a z didaktického hlediska je velmi důležitá.

Metoda spočívá ve zkoušení předpokládaných řešení. Do zadání řešitel postupně dosazuje čísla a ověřuje, zda získá rovnost, nebo ne. Pokud řešitel postupuje podle systematického klíče, vyvozuje ze získaných výsledků jisté vztahy, které mu pomáhají při pochopení a budování pro něho nových metod řešení.

Z metody pokus – omyl také vychází jeden přístup³³ k vyučování lineárních rovnic, v němž učitel žákům předkládá rovnice, které mají místo neznámé čtverečky, a znaménko rovnosti označuje jako *přepážku (fence)*, která rozděluje dvě strany se stejnými počty. Žáci hledají čísla, která patří do čtverečků, aby toto pravidlo platilo. Učitel jim neřekne žádné další pravidlo nebo metodu, postupně žáci počítáním sami nacházejí rychlejší a jednodušší metody řešení, než je metoda pokus – omyl. Zajímavé je tvrzení autorů článku podložené praxí zkoumaného učitele, že do 14 dnů touto metodou žáci řeší rovnice typu $ax + b = cx + d$.

³² Řazení jednotlivých metod jsem použila podle (Hejný, 1989).

³³ (Pirie, Lyndon, 1997)

3.3.2 Tabulková metoda

Tato metoda je v podstatě systematizací náhodných pokusů metody *pokus – omyl*. Žák dosazuje čísla podle určitého pravidla, které při vhodném použití usnadní řešení. Žák si s použitím tabulky osvojuje návyky, jak systematicky uspořádat výsledky svých výpočtů a případně s nimi dál vhodně pracovat. Je evidentní, že se jedná o kvalitativně vyšší metodu řešení rovnic, než je metoda *pokus – omyl* (Hejný, 1989).

V učebnicích pro 2. stupeň se tato metoda, stejně jako metoda *pokus – omyl*, vyskytuje velmi zřídka, nalezla jsem pouze dva náznaky. Učebnice (Koman a kol., 2002) má v úvodu kapitoly o rovnicích dvě úlohy typu „Myslím si číslo“ a na věk, kde je náznak žákova experimentování (metoda *pokus – omyl*), ale doprovodné instrukce spíše navádějí k systematické úpravě do tabulky. V učebnici (Odvárko, Kadleček, 1999) se též hledá neznámé číslo, ale žák je pasivní, má jen pozorovat, jak se v učebnici objevuje hledané číslo splňující předložené podmínky. Následují dvě úlohy, které žák může řešit samostatně s metodou tabulky, podobně jako v řešeném příkladu. Druhá řešená úloha se více blíží metodě *pokus – omyl*, ale žák opět jen sleduje práci někoho jiného. Opět mohu podotknout, že učitel může nechat žáky nejprve hledat neznámá čísla a teprve pak se podívat na řešení v učebnici, ale ze zkušenosti mohu konstatovat, že se tomu tak mnohdy neděje.

3.3.3 Metoda váhy

V odborné literatuře jsou uvedeny různé názvy, ale všechny mají společnou „záměrnou předmětnou manipulaci“³⁴ s objekty na rovnoramenných vahách. V článku (Pirie, Lyndon, 1997) nazývají tuto metodu *balance* – možno přeložit jako váhy, vyváženost, rovnováha apod. Principem této metody je, že si žák pokud možno na příkladech empiricky ověří některé rovnosti. Dnes už je možnost využívat i interaktivních programů na počítači³⁵, které simulují ruční manipulaci s rovnoramennými váhami.

³⁴ Tento termín použil M. Hejný (1989).

³⁵ Např.:

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions&from=topic_t_2.html.

Při řešení touto metodou žák postupuje v několika krocích. Nejprve si schematicky znázorní model vah s množstvím závaží podle zadání a odebíráním (škrtním) a přidáváním (dokreslováním) řeší rovnici obrázkem. Později se žákovi zdá, že je zbytečné, aby stále maloval různá závaží a váhy, tak obrázek zjednodušuje na dvě misky se zobáčkem a čísla s neznámou jako závaží. Dalším krokem je přepis do klasické rovnice, kdy pod rovnici, např. $x + 1 = 2x + 3$, vidí na jedné straně tři neznámá závaží s jednokilovým a na druhé straně dvě neznámá závaží s tříkilovým závažím a kroky odebírání od obou stran řeší již matematickým zápisem a příslušným postupem.

Výhodou této metody, pokud žák má skutečně dostatek času na to, aby pochopil jednotlivé úkony s modelem vah, je prevence hrozícího formalismu. Žák je schopen v krátké době dospět k poznání, že pokud provádím na obou stranách stejné změny, tak se rovnost stran nemění, a jaké změny to jsou.

Zřejmě je na místě, abych upřesnila používanou terminologii, protože může být matoucí, že používám pojmy metoda váhy a model váhy. Pod pojmem *metoda váhy* je skryt postup, resp. princip práce s rovnicí, kdy měním na obou stranách rovnice stejné hodnoty, tedy odebírám, přidávám, násobím, dělím stejnými čísly nebo proměnnými. Oproti tomu pojem *model váhy* je používán jako vzor, resp. předloha pro následný postup práce. Dalo by se říci, že také dochází k pohybu, ale prioritou je stav rovnováhy.

Všechny učebnice pro 2. stupeň kromě (Šarounová a kol., 1999) obsahují v různé míře práci s rovnoramennými váhami. Někdy se jedná pouze o model a někdy jsou váhy použity přímo pro demonstraci metody.

3.3.4 Metoda měnič

Název Metoda měnič pochází z učebnice (Odvárko, Kadleček, 1999, s. 16, obr. 3.5). V článku (Pirie, Lynton, 1997) tuto metodu popisují jako „změň strany, změň znaménka“³⁶.

³⁶Change sides, change signs.

Čenda má dobrý nápad!
Čenda nám chce ukázat ještě další postup řešení rovnice $2x - 3 = 5x + 9$, na který přišel, když si četl Pepovo řešení. Sleduj ho a kontroluj.

„Když přičtu k oběma stranám rovnice číslo 3, zmizí číslo -3 z levé strany a přejde na pravou stranu jako $+3$:

$$2x - 3 = 5x + 9 \quad | +3$$

$$2x = 5x + 9 + 3$$

Když odečtu od obou stran upravené rovnice člen $-5x$, zmizí člen $5x$ z pravé strany a přejde na levou stranu s opačným znaménkem jako $-5x$:

$$2x = 5x + 12 \quad | -5x$$

$$2x - 5x = 12$$

$$-3x = 12 \quad | :(-3)$$

$$x = -4$$

MĚNIČ ZNAMENK

Obrázek 3.5: Měnič

Na obrázku 3.5 vidíme, jak žáci při řešení rovnice touto metodou postupují. Důležité je objevení změny při přenosu jednotlivých členů rovnice z jedné strany rovnice na druhou. Je zde určité nebezpečí zneužití této metody jako čistě instruktivní, ale myslím si, že k této metodě je žák schopen dospět i samostatně. M. Hejný (1989) také vyslovuje tuto pochybnost. Žák se při pouhém mechanickém počítání (mechanickém používání kalkulu) často dopouští chyb. Na druhou stranu, žák, který pracoval s modelem, ovládá řešení rovnice na vyšší úrovni a za symbolickými zápisy je schopen vidět jednotlivé kroky, které dříve prováděl na modelu. M. Hejný (1989) zmíněnou metodu kalkul považuje za vrchol metod, ke kterému se žák postupně propracovává, tedy od jiných metod se liší mírou abstraktního myšlení žáka. Z tohoto důvodu si myslím, že metoda kalkul od M. Hejného je totéž jako metoda měnič (Odvárko-Kadleček). Jsem přesvědčena, že vhodně volenými příklady rovnic a neustálým počítáním a hledáním vhodné techniky řešení, se k metodě měnič žák může dopracovat, aniž by byl instruován a učil se pamětně množství pravidel.

3.4 Pojetí lineárních rovnic v RVP a učebnicích

Tento oddíl se věnuje pojetí lineárních rovnic jednak v Rámcovém vzdělávacím programu a také v učebnicích. Provedu didaktický rozbor tématu ve vybraných učebnicích. Na základě analýzy budou vymezena základní kritéria, podle kterých budou jednotlivé učebnice porovnány.

3.4.1 Rámcový vzdělávací program

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání zahrnuje učivo rovnice (resp. lineární rovnice a soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými) ve vzdělávacím oboru *Matematika a její aplikace* do vzdělávacího obsahu *Číslo a proměnná*. Zbylé tři tematické okruhy se o učivu rovnic nezmiňují. Na 1. stupni se o tématu rovnice v RVP nehovoří, ale na základě očekávaných výstupů (viz níže) je možné předpokládat, že žák ovládá řešení jednoduchých lineárních rovnic. Většinou se s rovnicemi žáci setkají již na 1. stupni a dovedou je řešit. Na 2. stupni se řeší úlohy komplexnějšího typu, které díky širšímu zaměření na více vzdělávacích oblastí hlouběji rozvíjejí a utvářejí klíčové kompetence žáka.

Kromě klíčových kompetencí je v RVP u každé vzdělávací oblasti vymezeno několik bodů cílového zaměření. Některé body cílového zaměření vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* je podle mého názoru možné splnit právě při výuce učiva o rovnicích. Mám na mysli body, ve kterých se hovoří o vedení žáka k „vytváření zásoby matematických nástrojů (...), k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití“ (RVP, s.30). Dále hovoří o vedení žáka k „poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný i pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely“ (RVP, s. 30). Mohlo by se zdát, že uvedené body s rovnicemi nesouvisí, ale ve spojení s očekávanými výstupy by souvislost mohla být jasnější, např. žák „formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav; analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž používá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel“. (RVP, s. 32)

Je zřejmé, že tvrzení jsou stále velmi obecná. Pro odpovědi na konkrétní otázky následuje analýza učebnic.

3.4.2 Učebnice pro 1. stupeň ZŠ

Učebnice prvního stupně zde nebudu rozebírat. Zájemci si mohou prostudovat rozbor učebnic tématu *Rovnice na 1. stupni* v diplomové práci V. Koudelkové (2011, s. 39 – 50), která podrobně analyzovala prvostupňové učebnice šesti nakladatelství: Alter, Fraus, Matematický ústav AV, Prodos, Prometheus a SPN. Z její analýzy vyplývá, že ne každá učebnice obsahuje v dostatečné a uspokojivé míře propedeutické úlohy k rovnicím. V převážné většině učebnic tak mají žáci jen omezenou možnost získat dostatečné množství izolovaných modelů k rovnicím, které by se jim později na 2. stupni hodily.

Podle autorky se zastoupení propedeutiky rovnic v jednotlivých učebnicích značně liší jak pestrostí, tak množstvím úloh (Koudelková, 2011, s. 50). Zastoupené „rovnice“ úlohy rozlišuje podle prostředí. Nejvíce úloh je z prostředí strukturálního, potom o poznání méně úloh ze sémantického prostředí a naposledy z geometrického prostředí. V podstatě pouze u řady učebnic nakladatelství SPN a Fraus řeší provázanost mezi uvedenými prostředím a koncepčním zápisem uváděných rovnic. Na rozbor V. Koudelkové navážu podrobnou analýzou tématu v učebnicích druhého stupně.

3.4.3 Učebnice pro 2. stupeň ZŠ

Všechny zkoumané učebnice až na učebnici (Novotná a kol., 1998)³⁷ mají doložku MŠMT ČR. Novější vydání jsou upravená tak, aby souhlasila s RVP ZV.

Následující oddíly jsou řazeny podle názvů nakladatelství zkoumaných učebnic a případně jsou rozlišeny jmény jejich autorů.

U jednotlivých učebnic budu sledovat cíl a didaktický záměr autora učebnice. V každém případě se jedná o moji osobní interpretaci. Je možné, že můj pohled nemusí přesně korespondovat s názorem autorů učebnice či s názorem jiných učitelů nebo

³⁷ Přestože tato učebnice nemá doložku, tak se mi zdá, že do výčtu učebnic může přinést zajímavý pohled.

didaktiků. Popis bude kvalitativní, tedy spíše proporcionální, ne statistický. Pro svou analýzu jsem zvolila následujících sedm hledisek.

Prvním je *motivace*, která je pro uvedení nové látky velmi důležitá.

Prostředí neboli *modely* jsou druhým hlediskem charakterizujícím učebnice z pohledu zastoupení jednotlivých úloh a je tím myšleno, zda se v dané učebnici objevují úlohy ze sémantického, strukturálního nebo geometrického prostředí. Některé úlohy již byly komentovány v kapitole věnované prostředí a zde budou systematicky začleněné k příslušné učebnici se zhodnocením četnosti výskytu.

Dalším obecnějším kritériem jsou *vyučovací metody, resp. přístupy* (podle J. Maňáka, viz oddíl 2.1.1), které jsou podporovány v analyzovaných učebnicích. Je zajímavé sledovat, jak široká paleta přístupů se v různých učebnicích objevuje.

Pro *metody a přístupy k řešení rovnic* popsané v oddílu 3.3 bude naznačena frekvence výskytu jednotlivých metod (pokus – omyl, tabulka, váhy, měnič) v učebnicích.

Dalším hlediskem je *počet úloh* k procvičení. Zajímá mě to z důvodu možnosti získání dostatku zkušeností, resp. separovaných modelů, pro následné abstraktní poznání a krystalizaci poznatků.

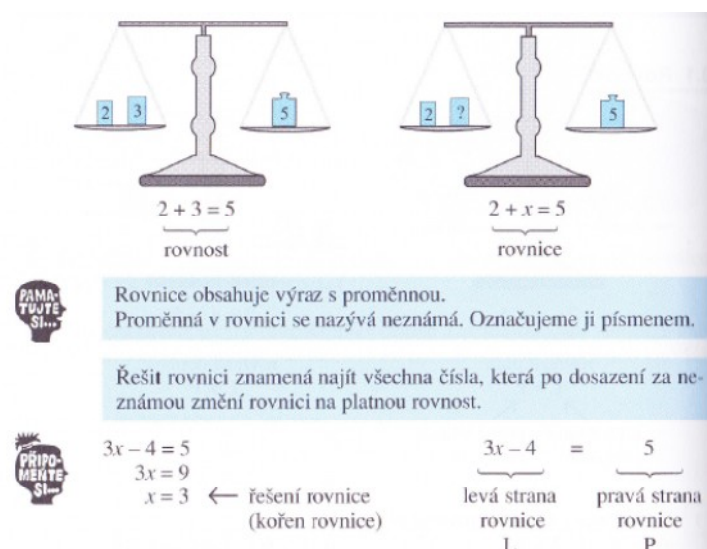
Předposlední kategorií je *vyžadovaná reakce od žáků*. Tato otázka souvisí s používanými vyučovacími metodami, ale zaměřuje se i na jeden konkrétní aspekt účasti žáků ve vyučování matematice. Odpovědí na tuto otázku by mohlo být vyžadování číselného řešení, slovního zdůvodnění odpovědi, grafického vyjádření obrázkem apod.

Poslední kategorie se týká chyb, resp. *práce s chybou*. Pouze ve dvou učebnicích (z devíti analyzovaných) se vyskytují úlohy ukazující na chyby. Autoři učebnice (Koman a kol., 2002) nechávají žákům prostor a aktivně vybízejí k zamyšlení nad dalšími možnostmi řešení a kontroly výpočtů. V učebnici (Odvárko, Kadleček, 1999) je práce s chybou pojata z jiného úhlu pohledu. Jsou zde pro žáky připravené úlohy s chybně vyřešenými příklady a žák má chyby nalézt a opravit.

Fortuna (Coufalová a kol., 2007)

Tato učebnice má hned v úvodu kapitoly o rovnicích obrázek s ukázkou pojmu rovnost a nerovnost, který má zřejmě i funkci motivační, protože následující cvičení jsem jako motivační neshledala. Následují číselné rovnosti a žák má rozhodnout o jejich

platnosti (s. 127). Rovnoramenné váhy jsou v učebnici (s. 128, obr. 3.6) použity pro pomoc při definování rovnice a zavedení ekvivalentních úprav. Váhy jsou použity spíše pro výklad látky o rovnicích jako demonstrace rovnosti a naznačení, jinak se s nimi více nepracuje. Jiné úlohy ze sémantického prostředí se v této učebnici nevyskytují.



Obrázek 3.6: Definice obrázkem se snadnou formulací

Ze strukturálních prostředí jsem narazila pouze na úlohu „Myslím si číslo“. Jiné úlohy z dalších prostředí se v učebnici neobjevují.

V učebnici jsou podporovány metody s procesuálním aspektem a jsou spíše fixačního a aplikačního charakteru (viz odd. 2.1.1). Metody řešení jsou použity dvě. Díky prezentaci ekvivalentních úprav jsou to váhy a poté je napsáno, jak se mění znaménka při konkrétním řešení rovnice, tedy se jedná o metodu měnič. Myslím si, že úloh je v této učebnici dostatek a jsou navíc v jednotlivých cvičeních odstupňované podle obtížnosti. Žáci jsou v zadání jednotlivých úloh vybízeni k aktivní činnosti aktivizujícími slovesy: vyber, dosad', rozhodni, ověř, řeš rovnici apod. Upozornění na chyby nebo práce s chybou se v této učebnici neobjevuje.

Fraus (Binterová a kol., 2009)

Učebnice nakladatelství Fraus pro 8. ročník (s. 72, obr. 3.7) uvádí po třech úvodních úlohách spíše slovní popis než definici toho, co je rovnice a jak se bude rovnice řešit. Tento slovní popis se mi zdá srozumitelný, avšak dost dlouhý, a zabírá

téměř polovinu strany. Lze předpokládat, že je pro žáky obtížně čitelný ne z důvodu jazyka, ale délky textu. Podle zkušeností mohu říci, že text delší než 5 řádků žáci číst vesměs odmítají.

Jak na to?

Pomocí rovnic se naučíte řešit i mnohem obtížnější úlohy, než které jsou v úvodu této kapitoly. Že nevíte, co to rovnice je? Už víme, co to je výraz. Třeba $3 \cdot (2 + 18)$ je číselný výraz a $p + 7^2$ je výraz s proměnnou p . A rovnice není nic jiného než **rovnost dvou výrazů**. Ale pozor! V takové rovnici musí být aspoň jedna **neznámá** (někdy ji také nazýváme **proměnná**).

Tedy byste jistě dovedli napsat celou řadu rovnic! Například $a + 2 = 10$ je rovnice s jednou neznámou a , $3x = 7y + 10$ je rovnice se dvěma neznámými x a y .

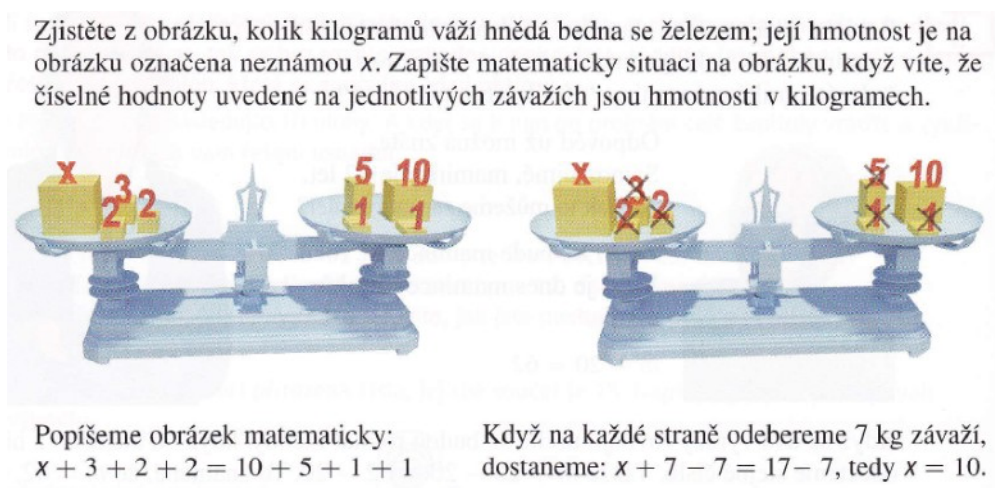
A co znamená **řešit rovnici**? Najít všechna taková čísla, jejichž dosazením za neznámé dostaneme na obou stranách rovnice stejná čísla!

Vyřešit rovnici $a + 2 = 10$ určitě dovedete. Řešením je číslo 8 a žádné jiné, protože jen pro toto číslo platí $8 + 2 = 10$. Najít řešení rovnice $x^5 + 7x^3 = 2\sqrt{x} - 23$ je ale tak těžké, že bez pomoci počítače to určitě nedokáže ani paní učitelka nebo pan učitel!

My se teď naučíme řešit aspoň některé rovnice. Nejprve si ukážeme několik jednoduchých příkladů, které určitě vyřešíte i z paměti a bez rovnic. Na nich si předvedeme, jak se s rovnicemi pracuje. A když to zvládneme, nebudou nám dělat problémy ani obtížnější příklady.

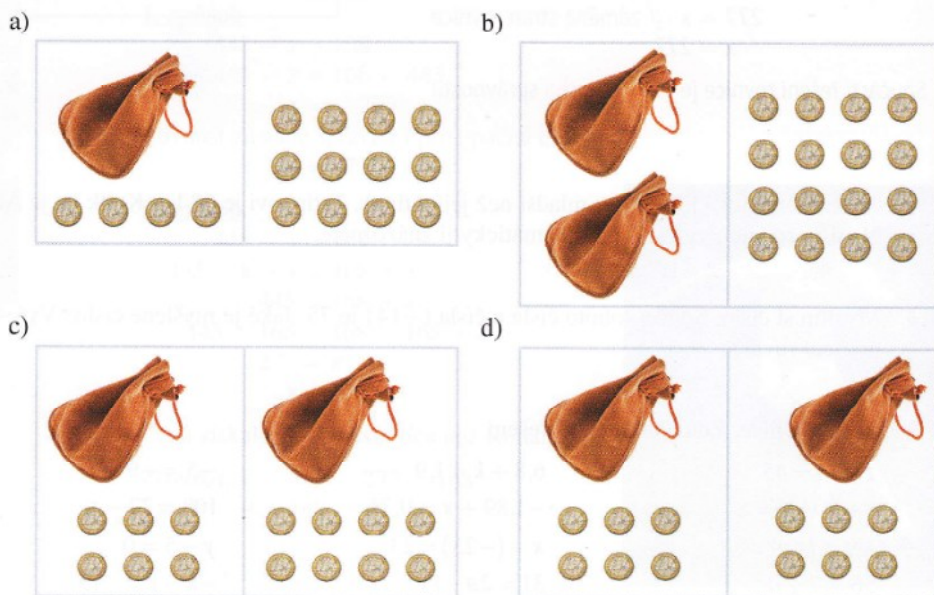
Obrázek 3.7: Popis řešení rovnice

Sémantické aritmetické prostředí je v této učebnici zastoupeno rovnoramennými vahami, úlohami na věk a jednou úlohou z prostředí autobusu, který je nabídnut k řešení v úvodu kapitoly. Na obr. 3.8 vidíme použité rovnoramenné váhy (s.74) a na obr. 3.9 rovnosti v obdélnících. Žák má aktivně a manipulativně zkusit řešit danou rovnici.



Obrázek 3.8: Použití modelu vah

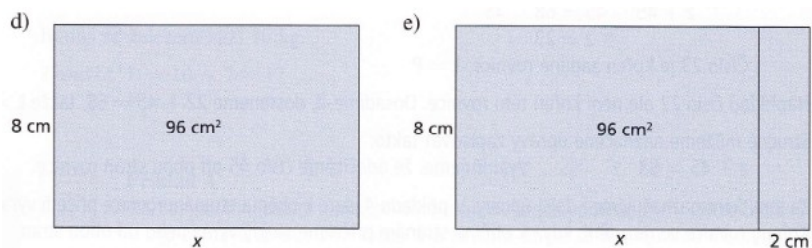
Levá strana obrázku se rovná pravé straně. Pozorujte obrázky. Popište rovnici řešení situace, kterou znázorňují. Rovnici vyřešte a řešení zdůvodněte.



Obrázek 3.9: Demonstrace rovnosti v obdélníku

V učebnici (s. 72) je jedna z úvodních úloh v prostředí autobusu. Žáci mají tuto úlohu vyřešit jakýmkoliv způsobem. Myslím, že žáci, kteří nebyli zvyklí z 1. stupně na úlohy tohoto typu, by mohli mít problém s řešením, na druhou stranu je v této učebnici větší procento zajímavých úloh, kdy není předepsáno, jak se mají řešit, a žáci mají nalézt vlastní postupy výpočtu. Ke snazší matematizaci opět přispívá podobnost s reálným životem. Ze sémantického prostředí se jako poslední objevují úlohy o věku, kdy je žákům dána volnost při řešení s doporučením zkusit pro řešení využít rovnici.

Ze strukturálních prostředí se v této učebnici objevují úlohy pouze typu „Myslím si číslo“, a to ještě jen v nízkém počtu (3 příklady). Geometrické prostředí je zastoupeno jedním příkladem (s. 76, obr. 3.10), kdy žák má pozorovat obrázky, popsat situaci rovnici a rovnici vyřešit. V tomto případě žák musí vědět, že se jedná o obdélníky a jak se počítá obsah takového obdélníku, aby mohl sestavit správnou rovnici.



Obrázek 3.10: Neznámé rozměry obdélníků

Troufám si tvrdit, že v této učebnici je jedna z nejlepších motivací, které jsem v učebnicích viděla. Autoři k žákovi přistupují velice pozitivně a úvodem ho naladí tak, aby sám žák chtěl počítat a začal se o novou látku zajímat. Důležité je, že autoři ukazují využitelnost nové látky.

Přehled vyučovacích metod jsem odvodila ze slovních popisů a návodů k řešení. Autoři zde používají mnoho aktivních sloves, např. vymysli, zdůvodni, pozoruj, napiš, vyjádři apod. Odtud soudím, že učebnice podněcuje metody demonstrační, praktické, badatelské, srovnávací, diskusní apod.

Jak jsem již uvedla, velmi záleží na postoji učitele a na jeho možnostech. Pro řešení rovnic autoři používají pouze dvě metody: váhy a měnič. Metodu měnič v této učebnici neobjeví žák sám pomocí vlastního řešení řady úloh, ale je mu podán výklad o její výhodnosti. Úlohy jsou v učebnici zajímavé a do značné míry spojené se situacemi z běžného života, ale úloh na procvičení látky je tu velmi málo. Od žáků je vyžadováno mnohem více aktivity než v první učebnici. Úlohy na práci s chybou jsem neobjevila.

Matematický ústav Akademie věd (Koman a kol., 2002)

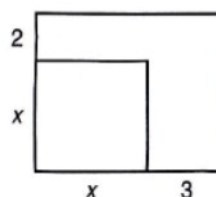
V této učebnici nalezneme mnoho úloh z různých prostředí. Kapitola rovnic je zahájena úlohou typu „Myslím si číslo“, která je zaznamenána nejen rovnicí, ale i zacykleným diagramem (viz obr. 3.3). K řešení využívají autoři experimentální zkoušení různých čísel a rovnou je sestavují do tabulky, tj. používají zdokonalení metody pokus – omyl. Je důležité vidět rozdíl mezi takto použitou tabulkou a doplňovací tabulkou (viz obr. 3.4), do které žák dopisuje chybějící údaje, ale v první tabulce má správně vše vymýšlet.

V této učebnici jako v jediné je velmi vysoký počet (přibližně 20) úloh z geometrického prostředí. U těchto úloh je zajímavé to, že se nespokojují pouze s jedním řešením, ale přivádějí žáka k hlubšímu zamyšlení se nad geometrickými vlastnostmi daných útvarů (s. 44, obr. 3.11) nebo těles (s. 43, obr. 3.12) a vybízejí žáka, aby se pokusil šikovním způsobem zapsat řešení do rovnic tak, aby se daly potřebné rozměry vypočítat.

Námět 4

- a) Když u čtverce prodloužíme jeho vodorovné strany o 3 cm a svislé strany o 2 cm, zvětší se jeho obsah o 36 cm^2 .

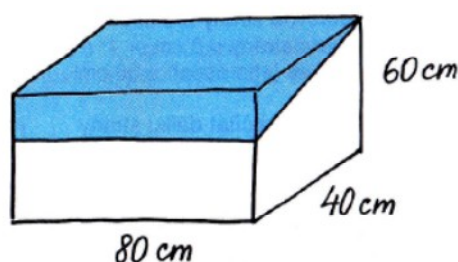
Zkuste vypočítat délku strany původního čtverce.



- b) Pozměňte úlohu tak, že budete zkracovat strany čtverce a zmenšovat obsah.

Obrázek 3.11: Geometrická úloha 1

Z kváдру znázorněného na obrázku byl odříznut barevně vyznačený trojboký hranol. Tím se jeho objem zmenšil o $24\,000 \text{ cm}^3$. Vypočítejte výšku přední stěny seříznutého kváдру.



Obrázek 3.12: Geometrická úloha 2

V celé kapitole o rovnicích jsou velmi zajímavé, netradiční a překvapivé úlohy, které by mohly žáky motivovat k činnosti. Autoři učebnice využili mnoho modelů a prostředí pro realizaci úloh. Zajímavé je, že model vah je jeden z řady modelů, přičemž žádný nemá výraznou převahu. Paleta podporovaných vyučovacích přístupů je také velmi bohatá, od demonstračních, badatelských až k aplikačním a diskusním. Velmi zajímavý je fakt, že v celé kapitole jsou použity všechny metody řešení rovnic kromě metody měnič. Autoři žáky velmi často vybízejí, aby úlohy řešili různými metodami (např. pokusem, úsudkem, tabulkou). V učebnici je velmi vysoký počet úloh a slovní úlohy jsou prostřídány s klasickými příklady na rovnice. Poslední důležitou poznámkou k těmto učebnicím jsou úlohy na práci s chybou. Autoři nechávají žákům prostor, aby se zamysleli nad možnostmi řešení a kontrolami výpočtů. Velmi důležitý je moment diskuze nad platnými řešeními rovnice a nad nutností kontroly (zkoušky).

Prometheus (Odvárko, Kadleček, 1999)

V učebnici jsou nejprve zařazeny 3 strany různých úloh, které zajímavou formou diskutují nad způsoby řešení některých úloh a které jsou zároveň i motivačním prvkem k učení se nové matematické dovednosti umožňující snazší počítání mnoha do té doby

problematických úloh. Následuje sumarizace naznačených pojmů. Forma je obvyklá jako u jiných témat této učebnice, kde jsou důležité poznatky sepsány do přehledů s jednoduchými příklady k zapamatování. Provedení není složité, je názorné a přehledné (s. 6, obr. 3.13).

ROVNICE S JEDNOU NEZNÁMOU

$2x - 1 = 2$
 $z^2 - 3 = 3z + 1$

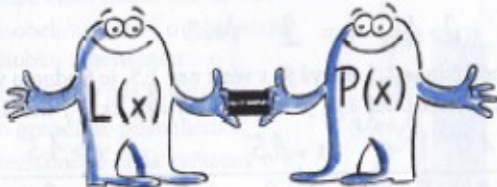
rovnice s neznámou x
 rovnice s neznámou z

Výraz nalevo od znaku „ $=$ “ se nazývá **levá strana rovnice**,
výraz napravo od znaku „ $=$ “ se nazývá **pravá strana rovnice**.

$\underbrace{2x - 1}_{\text{levá strana rovnice s neznámou } x} = \underbrace{2}_{\text{pravá strana rovnice}}$

$\underbrace{z^2 - 3}_{\text{levá strana rovnice s neznámou } z} = \underbrace{3z + 1}_{\text{pravá strana rovnice}}$

Označení: $L(x) = P(x)$ $L(z) = P(z)$



ŘEŠIT ROVNICI

znamená určit všechna taková čísla, pro která se hodnota levé strany této rovnice rovná hodnotě její pravé strany.

Každé takové číslo se nazývá **kořen rovnice** nebo **řešení rovnice**.

Rovnice $2x - 1 = 2$ má **jediný kořen** (jediné řešení) ... číslo 1,5.
Rovnice $|y| = 6$ má **dva kořeny** (dvě řešení) ... čísla -6 a 6 .

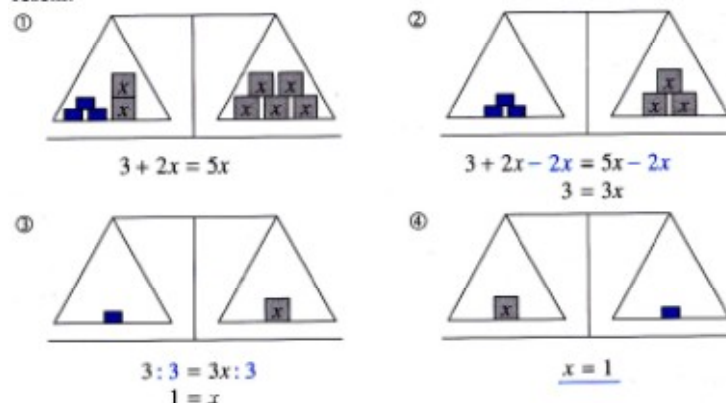
O správnosti řešení se přesvědčíme **zkouškou**.

Obrázek 3.13: Pojem a řešení rovnice v učebnici

V učebnici má zprvu při řešení rovnic a vysvětlení ekvivalentních úprav značnou převahu model rovníramenných vah. Žáci mají možnost vidět změny na vahách a zároveň změnu v rovnici, a postupně tak dojdou k výsledku. Na obr. (3.14, s. 12) vidíme některé ekvivalentní úpravy rovnic shrnuté v jednom příkladu.

Pepovy „váhy“ naposledy

Řešíme rovnici $3 + 2x = 5x$ s neznámou x . Pozorně nás sleduj a komentuj postup řešení.



Obrázek 3.14: Váhy a rovnice

Motivace žáků je v učebnici přiměřená. Žák je v řešených příkladech doprovázen Aničkou, Čendou a Pepou, kteří mnohdy problémové úlohy řeší i třemi různými způsoby. Žák má možnost si řešení projít a vybrat si, které mu nejlépe vyhovuje. Úlohy jsou převážně z prostředí vah, ale vyskytují se i úlohy typu „Myslím si číslo“ a na věk. Myslím, že učebnice podporuje praktické, fixační nebo diagnostické vyučovací metody.

Metody řešení rovnic jsou hlavně váhy a měnič, metoda tabulka je použita pouze v první úloze, proto ji zde nepovažuji za stěžejní. Za nedostatek této učebnice považuji relativně malý počet úloh na procvičování s tím, že jsou rychle zařazeny velmi obtížné úlohy. Aktivita, která se očekává od žáků, je podpořena slovesy v jednotném čísle a rozkazovacím způsobu, což se v předchozích učebnicích neobjevilo. Uveďme příklad: řeš, urči, vyber, vypočítej nebo zkontroluj.

Na závěr jedna pozitivní poznámka k práci s chybou. Každá kapitola obsahuje nejméně jedno cvičení, kde žáci mají najít, opravit a okomentovat chyby. Považuji to za velmi přínosné cvičení, protože si žáci znovu připomenou a uvědomí podstatu prováděných operací.

Prometheus (Šarounová a kol., 1999)

Analýzu provádím z 2. dílu učebnice pro 7. ročník a z 2. dílu pro 8. ročník. V úvodní kapitole je zařazena motivační problémová úloha, kterou mají žáci řešit samostatně. Učebnice obsahuje modely z prostředí vah a Myslím si číslo. Ze složení

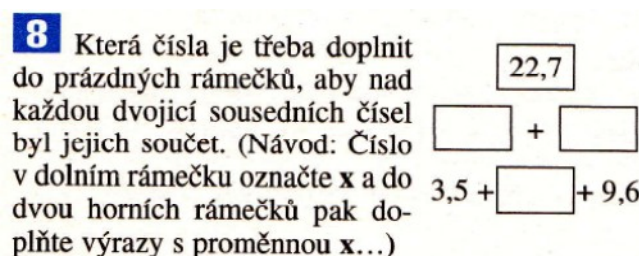
úloh odvozují, že jsou zde výrazně použity vyučovací metody fixační a praktické. V učebnici pro 7. ročník je řešení rovnic vysvětlováno metodou vah a v učebnici pro 8. ročník se již počítá s ovládnutím metody řešení rovnic a vysvětluje se pouze řešení složitějších rovnic. Žáci mají vyvíjet osobní aktivitu jako: psát, řešit, vybrat ze seznamu, dosazováním předložených čísel zjistit výsledek nebo vysvětlit řešení. Práce s chybou není v tématu nikterak obsažena.

SPN (Trejbal, 2000)

V této učebnici jsou vlastnosti a pojmy o rovnosti a rovnicích vysvětlovány v průběhu prvního řešeného příkladu kapitoly o rovnicích. Forma předávání nových pojmů je spíše instruktivní a jednotlivé kroky postupu řešení jsou jasně dány. Definice lineární rovnice je až v závěru kapitoly jako shrnutí nových poznatků.

Na začátku kapitoly se žáci nejprve učí ověřovat platnost rovností a na zajímavých řešených slovních úlohách (např. Myslím si číslo) vidí, jak by se mohly řešit pomocí rovnic. Při výkladu ekvivalentních úprav autor učebnice používá model vah a modelované příklady přepisuje do matematického vyjádření pomocí rovnice. Následujících několik řešených příkladů dokonce slovně komentuje, jako by se jednalo o výklad u tabule. Podle uvedených úloh se zdá, že autor používá pouze jednu metodu řešení rovnic, a to metodu váhy. Žádná jiná metoda není ani naznačena.

V aplikačních úlohách je úloha ve tvaru součtového trojúhelníku, ale vizuálně není dostatečně přehledná (s. 49, obr. 3.15). Její rozsáhlý popis by při větší přehlednosti nebyl nutný a konkrétní úloze spíše škodí, jelikož návod k řešení žáka dovede téměř bez práce až k výsledku.



Obrázek 3.15: Součtový trojúhelník

Vyučovací metody podnětené učebnicí jsou nejspíš slovní (soudě podle rozsáhlých komentářů postupů řešení rovnice), sdělovací a fixační (vzhledem

k charakteru výkladu a počtu příkladů). Počet příkladů rovnic na procvičení s několika rovnicemi je přiměřený. Celkové zpracování a formát učebnice je netradiční. U slovních úloh nejsou žádné instrukce pro řešení, pouze klasické s nikterak vybočujícími otázkami. Běžné příklady rovnic jsou uvedeny slovním spojením: řešte rovnice. Práce s chybou se v učebnici neobjevuje.

Scientia (Novotná a kol., 1998)

Učebnice využívá zkušeností školačky Betky, která chodí do stejného ročníku jako žáci. V úvodu rovnic jsou žáci motivováni jednou epizodou z jejího života, kdy Betka nevěděla, jak je možné, že trenér tak rychle vyřeší matematické kouzlo. Tento moment je velmi zajímavý a důležitý, protože žáci řeší problematiku kouzla a matematika jde jakoby stranou, přičemž je ve své podstatě prostředkem pro vyřešení problému.

Následující úloha je z prostředí zoo a autoři učebnice k jejímu vyřešení používají model vah, přičemž počty antilop v zoologické zahradě zamění za příslušné počty závaží. Díky zdoluhavosti zakreslování vysokého počtu závaží (antilop) docházejí autoři ke zjednodušení, kdy píše do jednoho závaží číslo označující souhrnný počet závaží (antilop). Když se zdá, že je toto zjednodušení jasné a srozumitelné, tak ho přepíše do matematického vyjádření rovnice. Úloh na procvičení je přiměřený počet.

Podle zastoupení úloh se mi zdá, že výukové metody jsou nejvíce variantami metod z hlediska fází výchovně vzdělávacího procesu (tj. motivační, expoziční, fixační a aplikační). Žáci jsou kromě vyličené motivace aktivováni pomocí sloves: porovnejte, řešte, najděte, určete a vypočítejte. Úlohy na práci s chybou se nevyskytují.

Nová škola (Rosecká a kol., 2005)

Učebnice v úvodu předkládá úlohu na manipulaci se sirkami jako modelaci situace platné rovnosti. Úlohy jsou voleny zajímavě a je zde velké množství mezipředmětových vazeb, jež se v jiných učebnicích v takové míře neobjevují. Úloh na procvičení látky je tu naopak velmi málo. Úlohy na práci s chybou zde též nejsou.

Učebnice jako jediná ze studovaných učebnic obsahuje ukázkou rovnováhy na houpačce (s. 70). Považuji to za alternativní model k modelu vah (též použitý pouze jednou), protože v podstatě věci se jedná o tutéž demonstrační pomůcku, kde na obou

ramenech porovnáváme zátěž a řešíme, kdy budou ramena v rovnováze. Učebnice drží prvenství ještě v použití prostředí magických čtverců. Na obrázku 3.16 (s. 79) vidíme trochu odlišné zadání, než je u běžných magických čtverců zvykem. Zde vidíme opačný postup. Máme téměř doplněná políčka s neznámou a víme, že součet v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách musí být stejný, ale neznáme ho. Z této vlastnosti vycházíme a pomocí ní se dopracujeme k rovnicím a dopočítáme hodnoty neznámé.

MAGICKÉ ČTVERCE
Na obrázku jsou magické čtverce, jejichž čísla jsou vyjádřena pomocí neznámé. Sestav vhodně rovnice, vypočítej hodnotu neznámé, doplň čísla dané magické čtverce a ověř, zda je máš vyplněny správně.

$4x$	$x-3$	$3x$
3^2	$2x+3$	$4x-3$
$18-x$	27	x

$2x-4$	$x-8$	$x+2$
$x-4$	x	14
2^3	$x+8$	$x-6$

$4x-11$	$x-3$	$x+2$
$x-1$	$x+1$	$2x-2$
x	$2x$	3

Obrázek 3.16: Magické čtverce

Slovní úlohy s geometrickými náměty řešené rovnicemi obsahují mj. úlohy, u kterých jsou zadány některé rozměry parcely a její obvod. Žák má dopočítat délky všech neznámých stran pozemku.

V této učebnici považuji za vadu pasivní činnost žáka, který je neustále vyzýván, aby pozoroval řešené příklady a pouze občas samostatně řešil úlohy nebo rovnice, což je trochu v protikladu s myšlenkou Nové školy o aktivním přístupu žáka k vyučované látce i vzdělání. Jako hlavní podporované vyučovací metody vidím práci s učebnicí a diskusní metody.

Prometheus (Herman a kol., 1996)

Cením si úvodních několika vět, které žáka do tématu uvádějí, a následné diskuze nad pojmy s plynulým přechodem na příklady. Je snad jedinou učebnicí, která velmi podrobně řeší pojmy platná a neplatná rovnost, ze kterých vychází při řešení

rozdílnosti rovnosti a rovnice. Definice rovnice je spíše srozumitelným komentářem zápisu rovnice v matematickém jazyce. Metody řešení rovnic jsou použity pouze dvě: váhy a měnič, který je použit až po získání dostatečného množství zkušeností s řešením rovnic. Úlohy pracující s chybou se v této učebnici nevyskytují. Slova vyzývající k činnosti (např. řešte, všimněte si, pojmenujte, vysvětlete a zjednodušte) naznačují vyučovací metody: dialogické, diskusní, práce s knihou a fixační.

Srovnání učebnic podle sedmi kritérií

Výše uvedenou analýzu učebnic shrnuji v přehledné tabulce (3.1).

<i>Kategorie/ Učebnice</i>	<i>Motivace</i>	<i>Prostředí/ modely</i>	<i>Vyučovací metody/ přístupy</i>	<i>Metody řešení rovníc</i>	<i>Počet úloh</i>	<i>Vyžadovaná reakce od žáků</i>	<i>Chyby, práce s chybou</i>
Fortuna (Coufalová a kol., 2007)	Obrázek, bez komentáře	Váhy Myslím si číslo	Fixační Aplikační	Váhy Měnič	Různá obtížnost, dostatečné množství	Vyberte Dosad'te Rozhodněte Ověřte Řešte rovnici	Nejsou
Fraus (Binterová a kol., 2009)	Zajímavé úvodní úlohy	Váhy Autobus Věk Myslím si číslo Geom.úlohy	Demonstrační Praktické Badatelské Srovnávací Diskusní apod.	Váhy Měnič	Zajímavé Nízký počet Aplikační	Vymyslete Zdůvodněte Pozorujte Popište Vyjádřete	Nejsou
MÚAV (Koman a kol., 2002)	Zajímavé a překvapivé úlohy v celé kapitole	Diagramy Tabulky Váhy Geom.úlohy Myslím si číslo Úlohy na věk	Demonstrační Praktické Badatelské Aplikační Diskusní apod.	Pokus – omyl Tabulka Váhy	Vysoký počet úloh Zajímavé Aplikační	Řešte rovnici Řešte úsudkem Dopočítejte Nezapomeň te Ověřte	Jsou řešené
Prometheus (Odvárko, Kadleček, 1999)	Problémová úloha hledání neznámého čísla	Myslím si číslo Váhy Úlohy na věk	Praktické Fixační Diagnostické	(Tabulka) Váhy Měnič	Malý počet úloh na procvičení, některé příliš složité	Řeš Urči Vyber Vypočítej Zkontroluj	Úlohy na kontrolu a opravu řešení

Prometheus (Šarounová a kol., 1998) (Šarounová a kol., 1999)	Úvodní úloha	Váhy Myslím si číslo	Fixační Praktické	Váhy	Dostatek Složitě úlohy a příklady	Vyberte Dosad' Vysvětlete Napište Řešte	Nejsou
SPN (Trejbal, 2000)	Úvod: Pouze pojmy a řešené příklady	Myslím si číslo Úlohy na věk Váhy Součtový trojúhelník	Slovní Sdělovací Fixační	Váhy	Přiměřený počet úloh	Rozhodněte Řešte	Nejsou
Scientia (Novotná a kol., 1998)	Matematické kouzlo	Myslím si číslo Úlohy na věk Váhy	Motivační Expoziční Fixační Diskusní	Váhy	Přiměřený počet úloh	Porovnejte Řešte Najděte Určete Vypočítejte	Nejsou
Nová škola (Rosecká a kol., 2005)	Různé úlohy Mezipředmětové vazby	Magické čtverce Geom. úlohy	Práce s učebnicí Diskusní	Váhy Měníč	Mnoho řešených př. Málo př. na procvičení	Pozoruj Řeš	Nejsou
Prometheus (Herman a kol., 1996)	Úvod Diskuze nad pojmy	Váhy	Dialogické Diskusní Práce s knihou Fixační	Váhy Měníč	Pouze rovnice bez slovních úloh	Řešte Všimněte si Pojmenujte Zjednodušte Vysvětlete	Nejsou

Tabulka 3.1: Srovnání učebnic podle kritérií

4 Lineární rovnice jako kritické místo označené učiteli

V této kapitole se věnuji metodologii, popisu a analýze rozhovorů s učiteli a následně jejich hodin k tématu lineárních rovnic.

Rozhovory byly prováděny v rámci projektu GAČR P407/11/1740 Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů. Rozhovory jsou pro účely projektu rozsáhlejší, do diplomové práce zařazuji pouze části, které se týkají zadaného tématu. V příloze číslo je možné nahlédnout do příslušných částí rozhovorů zařazených podle smyšlených iniciál dotazovaných učitelů.

4.1 Metodologie

4.1.1 Cíle experimentu, výzkumné otázky

Cílem je zjistit, jak vybraní učitelé z praxe pojmají téma lineární rovnice. Konkrétně se jedná o tyto výzkumné otázky:

- jaké didaktické praktiky vybraní zkušení učitelé při výuce lineárních rovnic používají; zda se jedná o běžně používané praktiky, nebo zda si vytvářejí vlastní,
- jaká úskalí spatřují v tématu lineární rovnice a jak je překonávají.

Nejdříve byly připraveny otázky, které tvořily základní rámec polostrukturovaných rozhovorů s učiteli:

- Když začínáte učit rovnice, jakým způsobem žákům látku vykládáte, jak látku uvádíte?
- Objevují se někde zásadní kritická místa ve vyučování konkrétního tématu lineární rovnice? Jaká je míra pochopení látky žáky?
- Jak využíváte u lineárních rovnic učebnice nebo máte i jiné zdroje úloh?
- Jaké modely používáte při výkladu a práci s lineárními rovnicemi?
- Jaké metody řešení rovnic používáte?
- Jakých chyb se žáci u lineárních rovnic nejčastěji dopouštějí?
- Jaké máte návrhy na zlepšení (nejen obecně)?

Toto jsou pouze základní oblasti směřování dotazů. Není snadné „odhadnout“ další otázky, protože velmi záleží na odpovědích učitelů.

4.1.2 Příprava a realizace experimentu

Experiment probíhal ve třech fázích. Byl naplánován vstupní polostrukturovaný rozhovor, dále náslechy v hodině a následný polostrukturovaný rozhovor. Každá část měla svůj cíl a byla prostředkem k zodpovězení výzkumných otázek. Vstupní rozhovor obsahoval části seznámení, navození atmosféry, obecnější otázky a poté výše zmíněné otázky, kdy jsem se snažila zjistit didaktické praktiky dotazovaných učitelů, jejich vlastní didaktické postupy, dále kritická místa ve vyučování lineárních rovnic a způsoby, jak je u žáků učitelé zjišťují a překonávají. Náslechy v hodinách měly posloužit jako ukázka přístupů učitele k vyučované látce i k žákům a přinést konkrétní podklad pro následný rozhovor. Tyto první dvě složky byly podrobeny prvotní analýze, která zjistila *bílá místa* v odpovědích učitelů na výzkumné otázky. Následný rozhovor byl prostorem pro zaplnění těchto bílých míst a získání dalších podrobností k tématu lineární rovnice prostřednictvím diskuse nad sledovanou hodinou.

Rozhovory byly provedeny v únoru a březnu roku 2012 (viz tabulka 4.1) a byly nahrávány na diktafon a následně přepsány do písemné podoby. V tabulce je také u každého učitele uveden číselný výčet citací týkajících se vstupního rozhovoru, následného rozhovoru a případně náslechu hodiny.

Výběr učitelů pro rozhovory se řídil několika kritérii. Bylo důležité, aby respondenti byli učitelé s jistou délkou praxe, aby měli ve své aprobaci matematiku, aby byli ochotni zapojit se do výzkumu a souhlasili s nahráváním rozhovoru. S nabídkou rozhovorů na dané téma jsem navštívila tři základní školy ve městě Hlinsko. Ředitelé dvou z nich nabídku přijali a postupně jsem se na průběhu experimentu domlouvala s jednotlivými vyučujícími. Učitelé AC, BD a CK jsou ze ZŠ Resslova Hlinsko. Učitelé RV a SB jsou ze ZŠ Smetanova Hlinsko. Přestože jsou učitelé z jednoho města a ze dvou škol, tak se nedomnívám, že by byli navzájem ovlivněni a učili stejnými metodami. Ze začátku jsem v tomto smyslu měla obavy, ale hned druhý rozhovor mě ujistil o opaku. Jak se ukázalo, tři učitelé z první školy mají diametrálně odlišné přístupy, a postupně z rozhovorů vyplynulo, že se navzájem dovedou respektovat

a nejsou u nich znatelné tendence nějakým způsobem se sjednocovat. Každý učitel má svůj nezaměnitelný styl práce.

Z tabulky (4.1) je zřejmé, že se setkáváme s učiteli matematiky 3 skupin a) s nejnižší délkou praxe (9 a 13 let), b) se střední délkou praxe (16 a 17 let) a c) s velmi dlouhou praxí (40 let).

Učitel	Délka praxe	Nyní vyučují matematiku	Vstupní rozhovor	Náslech hodiny a její téma		Druhý rozhovor
BD Muž	9 let	7., 8., 9. ročník	13. 2. (BD 1–18)	13. 2. (BD 90–147)	8. r. Rovnice – odstraňování zlomků	28. 3. (BD 19–89)
CK Žena	12 let	7., 8., 9. ročník	13. 2. (CK 1–20)	14. 2. (CK 51–109)	8. r. Rovnice – závěrečné opakování	28. 3. (CK 21–50)
RV (ředitel školy) Muž	16 let	7. ročník	1. 3. (RV 1–22)	1. 3.	7. r. Výška trojúhelníku	29. 3. (RV 23–47)
AC Muž	26 let (17 let na ZŠ)	6. ročník	13. 2. (AC 1–18)	14. 2.	6. r. Převody jednotek obsahu	28. 3. (AC 19–67)
SB Muž	40 let	8., 9. ročník	1. 3. (SB 1–31)	1. 3.	8. r. Výrazy	29. 3. (SB 32–56)

Tabulka 4.1: Údaje o respondentech

Na jmenovaných školách jsem byla velmi mile přijata a učitelé byli v dobré náladě. Rozhovory probíhaly v pracovnách učitelů a trvaly průměrně 1 hodinu. Na obou stranách byla z počátku jistá míra trémy a očekávání, jak budou rozhovory probíhat, ale ta brzy opadla a atmosféra byla příhodná i pro náročnější otázky. Nemohu zcela jasně posoudit, zda z mé strany byly rozhovory vedeny zcela korektně, ale doufám, že pro účely nejen této práce byly dostačující. U všech učitelů jsem absolvovala i náslech vyučovací hodiny, ale pouze u dvou z nich se jednalo o téma lineární rovnice.

Postup mé práce byl následovný. Po realizaci všech vstupních rozhovorů s učiteli jsem provedla jejich přepis a předběžný rozbor. Je nutné říci, že každý učitel odpovídal na uvedené otázky v jiném pořadí, někdo odpověděl na více otázek najednou,

kdy mi bral slova z úst, ale jiný se nad otázkami podívoval, že už odpověděl v předešlé, přestože osobně v otázkách vidím rozdíly.

Náslechy hodin ve všech případech proběhly tentýž nebo následující den po úvodním rozhovoru. Na následný rozhovor jsem se připravila tak, že k rozhovorům jednotlivých učitelů jsem si vypsala otázky, které nebyly zodpovězeny, nebo u nichž jsem chtěla získat rozsáhlejší odpovědi. Také jsme se vrátili ke sledované hodině. Díky téměř měsíčnímu odstupu následného rozhovoru od prvních dvou částí si někteří učitelé již přesně nevybavovali detaily hodin, ale po krátkém připomenutí dovedli důležitá místa komentovat.

4.2 Metody zpracování získaného materiálu

Následné rozhovory, stejně jako vstupní rozhovor a náslechy hodiny, jsem přepsala do protokolů, které jsem kódovala v programu Atlas.ti. Přepisy těch částí rozhovorů, které se týkají této práce, jsou uvedeny v příloze (1 – 5). Podrobný komentář ke způsobu kódování je v odstavci 4.3.

4.3 Způsob kódování rozhovorů a náslechů hodin s ilustracemi

Kódování bylo prováděno pomocí postupů zakotvené teorie (Strauss, Corbinová, 1999), ovšem obohacených prvky deduktivního přístupu, kdy jsem využila kódy připravené na základě studia odborné literatury týkající se lineárních rovnic (viz kap. 2 a 3). Při volbě kódů jsem vycházela z hrubého kódování celých rozhovorů v rámci již zmíněného projektu GAČR, z nichž jsem vybrala ty kódy, které mě zajímají vzhledem k tématu práce (viz tab. 4.2, první sloupec). Citace z rozhovorů, které byly kódovány těmito obecnými kódy, jsem následně kódovala podrobněji. Tím se ustálil seznam kódů uvedený v tab. 4.2, druhý sloupec. Četnost výskytu některých kódů je překvapivá, ovšem vysoké číslo někdy zahrnuje i několikanásobné vrácení se učitelů k tématu (např. kód „zavedení – mechanicky“: u BD šest výskytů).

V tabulce 4.2 jsou vidět jednotlivé kategorie i s jemnějšími kódy a ilustracemi. Kódy s nulovým zastoupením jsou též vypsány. Znamená to, že jsem předpokládala jejich výskyt, ale tento předpoklad nebyl splněn.

Vysvětlení zkratk: V závorce jsou uvedeny iniciály učitelů a číslo promluvy z rozhovoru. T znamená tazatel (tedy já) a U znamená učitel.

Názvy kódovaných skupin	Jemnější kódy	Četnost výskytu	Ilustrace
Zavedení tématu – budování schémat	Jen obrázek (bez manipulace s reálným modelem)	8	(AC 25) „Ne, ty váhy jako nemám přímo v hodině. Ale spíše se maluje.“
Zavedení tématu – budování schémat Metody	Manipulace s reálným modelem dětmi Úvod	1	(AC 48–51) „T: Jakou činnost dělaly děti? U: Měli jsme tam takové kostičky, co mám támhle na okně (klasické cca 6x6x6cm). T: To měli na lavici? Jak s tím pracovali? U: Oni si něco postavili. Jeden postavil a druhý posoudil, jestli je to ze stejného počtu kostek.“
Zavedení tématu – budování schémat	Manipulace s reálným modelem učitelem	5	(RV 8–9) „T: Např. přinesete i na začátku do hodiny váhy? U: Mám je tam. Měl jsem tam rovnoramenné. Oni nám je nechtějí moc půjčovat, máme ty laboratorní a ty nejsou úplně ideální. Nejlepší by byla tzv. decimálka, tam je to dobré, protože tam můžete dát cokoliv.“
Zavedení	Hledání správného řešení	1	(SB 37) „Nejprve neřešíme rovnice, ale říkáme si, jestli by mohlo být jisté číslo správným řešením. Oni přijdou na to, že se to dosazuje, tak to vyzkoušíme. Potom je zmínka o tom, kolik může být u dané rovnice řešení.“

Zavedení	Rovnou příklady (mechanicky, instruktivně)	8	(BD 11) „T: Jak rovnice zavádíte? U: Váhy. Dřív jsem je používal. Teď první, co udělám, zavedu, že nalevo bude neznámá, nalevo si naházím všechny neznámé, napravo čísla. Říkám, že dělají doma v pokoji pořádek. Přecházíš přes rovná se (rovnítko), tak měníš znaménko. Ty váhy jsem jim taky snad řekl, ale hlavní je, že děláš doma pořádek – neznámá nalevo, číslo napravo, přecházím přes rovnítko, měním znaménko.“
Zavedení	Navázání na zkušenosti z 1. st.	2	(SB 35) „Na úplný úvod začneme rovnicemi z prvního stupně. Oni ten pojem rovnice znají z prvního stupně. Z hlediska sčítání např. $x + 15 = 30$, tak na základě součtu a sčítance známého a neznámého řeší. Potom je podstatná ta neznámá.“
Zavedení	Přesah do vyšších ročníků	2	(SB 37) „Například je tam zmínka o kvadratické rovnici, kterou se naučí řešit až na SŠ, ale je tam zmínka o rovnici $x^2 = 9$, že x může být nejenom 3, ale i -3 .“
Pojmy	Neznámá, proměnná	2	(RV 15) „Je pravda, že jim písmenka chvíli problém dělají, než si na ně zvyknou. Samozřejmě už jsem je zaváděl na prvním stupni. Když něco nevím, tak co? Dám si místo toho otazníček nebo písmenko. Za to písmenko si schovám jedničku, dvojku. Ono tam stále stojí písmenko x a za ním v tu danou chvíli by mohla být trojka. Ať tam zkrátka je. Jde opět o to, jak je na to člověk připravuje. Celkově v tom jsou zkušenosti, že chvíli ta písmenka dělají jako proměnná problém.“
Pojmy	Rovnost – rovnice	4	(SB 36) „Říkám jim, že $x + 15 = 30$ je rovnice, ale $12 + 7 = 19$ je rovnost. Tak si řekneme rozdíl mezi rovnicí a rovností, aby si na rovnici zvykli.“
Pojmy	Zkoušky, ověření	3	(BD 16,17) „T: Chápou, že když mi L a P vyjdou stejně, že výsledek, který mi vyšel je kořenem rovnice? U: Ano, to chápou. Vždycky si to i řekneme.“

Kritické místo	Nějaký problém	19	(CK 19) „U: Postup rovnic umí, ale nastane problém, když vychází desetinné číslo nebo zlomek a mají ještě počítat zkoušku. Další problém nastane, když mají např. $6x = 2$. Vydělit 2 šesti, tak všichni vydělí 6:2. Protože se jim zdá, že to jinak nejde.“
Kritické místo	Problém – není	8	(AC 11) „To bych řekl, že rovnice zase zvládají, to problém není.“
Ne/chápání podstaty	Míra pochopení	15	(BD 42,43) „T: Tedy, nějaké hlubší pochopení v práci s rovnicí nehledáte? U: Teď ne, předtím, když jsme používali ty váhy, tak ano. Třeba se k nim vrátím, to neříkám, ale teď ne.“
Obtížnost	Vzrůstající, klesající	8	(BD 15) „Tento postup je u těch jednodušších rovnic. U těch složitějších nejprve odstraníš zlomky, pak závorky, potom se teprve dostaneš do stavu, který jsme si říkali.“
Učebnice a jiné materiály	+ IT	19	(SB 55,56) „T: Jak často jim dáváte ty příklady? Na každé téma? U: Tak zhruba jednou za 2 – 3 týdny. Ono to tak odpovídá na ta témata. Kopíruju to někdy z Frause nebo ze starých sbírek (sbírka úloh z algebry – rok 64). Poslední teď tu mám na vzorci.“
Modely – geometrické	Určení obsahu plochy	0	
Modely – sémantické	Autobus: Houpačka: Roura od kamen: Úlohy na věk: Úklid: Váhy:	0 1 1 1 1 12	(RV 27) (CK 29) (CK 20) (BD 11) (SB 28) „Neznám lepší způsob než váhy.“

Modely – strukturální	Diagramy:	0	(CK 20: Popisuje spíše slovní vyjádření s otázkou, než přímo úlohu Myslím si číslo.) (BD 18), (CK 20)
	Mag. čtverec:	0	
	Myslím si číslo:	1	
	Součtové pyramidy:	0 2	
	Tabulky:		
Metody	Pokus – omyl	1	(SB 37) „Nejprve neřešíme rovnice, ale říkáme si, jestli by mohlo být jisté číslo správným řešením. Oni přijdou na to, že se to dosazuje, tak to vyzkoušíme. Potom je zmínka o tom, kolik může být u dané rovnice řešení.“
Metody	Tabulka	0	
Metody	Váhy	11	(AC 13) „T: Když rovnice začínáte, tak jim ukážete ... U: Když to začínám učit, tak přidáváme a ubíráme na obou stranách jako na vahách.“
Metody	Měníč	11	(BD 11) „Děláš doma pořádek – neznámá nalevo, číslo napravo, přecházím přes rovnítko, měním znaménko.“
Metoda výpočtu	Přechod od metody vah k měnič	5	(SB 43) „Potom váhy opustíme a jde o to, aby uměli mechanismus řešení. To znamená, že je potom spíše navádím k tomu, aby si uvědomili, že když se říká tady v té ekvivalentní úpravě, že rovnice nebo řešení se nezmění, když na obě strany přidáme nebo odečteme 3, čili přičteme nebo odečteme, tak je potom vedu k tomu, aby si uvědomili, jak se to projeví konkrétně. Tzn., když z jedné strany něco zmizí na druhou stranu, tak se to tam projeví v opačném znaménku. To je pro ně početně to nejdůležitější.“
Metoda výpočtu	Přechod od metody měnič k metodě váhy	0	

Chyby	Metoda a postup	8	(RV 25) „U rovnic zapomínají vynásobit, když na jedné straně mají více členů. Představte si, že tu není jedna mistička, ale dvě. Když zdvojnásobím na jedné straně, tak musím zdvojnásobit i na jednotlivých mističkách.“
Chyby	Jiné celky	8	(CK 19) „U: Postup rovnic umí, ale nastane problém, když vychází desetinné číslo nebo zlomek.“

Tabulka 4.2: Seznam kódů s ilustracemi

4.4 Výsledky analýzy rozhovorů s ilustrací

Výsledky analýzy jsou prezentovány podle oblastí zjištěných jevů a pro přehled jsou použity tabulky, aby bylo možné srovnat zjištěné hodnoty jednotlivých vyučujících a učinit s jejich pomocí dostatečně vypovídající závěry.

Analýza rozhovorů odkryla následující oblasti obecných i konkrétnějších jevů:

- Postoje a přístupy učitele k žákům (4.4.1)
- Vlastní didaktické postupy při práci se žáky a jejich hodnocení a návrhy na zlepšení výstupů z matematického okruhu lineární rovnice (4.4.1)
- Způsob zavedení pojmů a postupů a způsoby procvičování (4.4.2)
- Používané modely a metody výpočtu lineárních rovnic (4.4.3)
- Míra pochopení tématu a podstaty prováděných úkonů žákem (4.4.4)
- Typy chyb žáků (4.4.5)
- Kritická a bezproblémová místa (4.4.5)
- Používané učebnice a jiné materiály (4.4.6)

V následujících oddílech jsou jednotlivé body podrobněji rozebrány a shrnuty. Kódy v závorce jsou odkazy na příslušnou promluvu z rozhovorů, které jsou v příloze 1 – 5.

4.4.1 Obecné přístupy učitelů k výuce a žákům

Není snadné z celých rozhovorů vybrat části, které by pojednávaly obecně o přístupech učitelů k výuce a žákům, protože se učitelé často k těmto otázkám vyjádřili při povídání o některém jiném vyučovaném celku a konkretizovali je na aktuálně

diskutované téma. Také jsem se několikrát při rozhovorech setkala se situací, kdy při rozmluvě o konkrétní metodě či postupu mi učitelé říkali např.: „To nestojí za řeč. To Vás zajímá?“ Nemohu tedy rozhodnout, zda si některé své postupy a přístupy nenechali pro sebe, protože je nepovažovali za podstatné nebo si je v dané chvíli nevybavili. Je možné, že to může být zapříčiněno i mým nedostatečným posouzením konkrétní situace a nedokonalostí položených otázek. Přesto si myslím, že podstata hledaných přístupů je v rozhovorech zachycena, byť by nebyla rozvedena do takové hloubky.

Z rozhovoru s učitelem AC je patrné, že má velmi pozitivní přístup k žákům a není pro něho problém změnit průběh hodin tak, aby se přizpůsobil žákům. Jako příklad může sloužit situace, kdy žák přišel do hodiny s metodou, kterou ho naučil někdo z rodiny, a učitel změnil průběh připravené hodiny a věnoval se navrhované metodě řešení rovnic (AC 55). Podle jeho slov má rád, když žáci přijdou do školy s nějakým novým postupem řešení, který je naučil někdo z rodiny. Zde vidíme kladný ohlas na zájem rodiny. Většinou se ukáže, že nové postupy jsou těmi, ke kterým by se dospělo v průběhu výuky, ale takto přijaté postupy řešení jsou podle učitele mnohem cennější.

Učitel BD klade důraz na přiměřenost příkladů, ve kterých by měli šanci uspět i slabší žáci (BD 23). V současné době též žákům poskytuje přesné, možná až instruktivní, návody k metodám řešení rovnic (BD 37). Odůvodněním je náročná situace s velmi slabými žáky, kdy je pro učitele těžké najít způsob, jak tyto žáky něco naučit. Dalším způsobem práce s těmito slabými žáky je jejich práce u tabule, kdy učitel má prostor s nimi pracovat a připravuje i přiměřené (tj. lehčí) varianty příkladů v písemné práci (BD 81–83). Opět vidím pozitivní přístup k dětem, kdy učitel hledá způsoby, jak by i slabý žák mohl uspět. Instruktivně-mechanický způsob/styl výkladu metod řešení rovnic sám učitel evidentně hodnotí jako momentální stav a říká, že nevylučuje, že by se mohl časem změnit a přejít k jiným metodám.

U učitele SB jsem vypožadovala tři základní momenty vedoucí ke zlepšení výuky, které má léta prověřené v praxi. Prvním momentem je důraz na míru procvičování a počítání (SB 49,54). Několikrát opakoval nutnost domácí přípravy, jež vede k získávání zkušeností, nadhledu a dovednosti propojovat zkušenosti z různých oblastí („selský rozum, kupecké počty“). Dokládá to i četnými zkušenostmi bývalých žáků (SB 14). Druhým aspektem bylo tvrzení o důležitosti pomůcek, kdy tento učitel vidí pravítko, křídlo a modely (SB 54) jako nejdůležitější nástroje učitele, které žáky

nerozptylují a které jsou dostatečné; jedním dechem dodává, že používání nových technologií žákům brzy zevšední. To neznamena, že tuto techniku neumí ovládat, ale vzhledem k nižšímu počtu takových zařízení na škole nevyžaduje třídu s těmito pomůckami. Jako třetí významný moment z pozice učitele vidím důraz na přístup k žákům. Během své dlouhé kariéry učitel dospěl k názoru, že trpělivost, pravidelnost a neúnavnost s důrazem nejen na matematiku jsou velmi důležité a zásadní přístupy, ověřené praxí. (SB 11,13,16)

Svým způsobem podobné výpovědi na obecné otázky na zlepšení žáků jsou u učitele RV, který podotýká, že svědomitost a píle žáka (RV 5) hraje velkou roli při učení se učivu a nové látce. Další odpovědi od tohoto učitele jsou ještě obecnější. Sám říká, že kolegy povzbuzuje k lidské přísnosti a k přípravě jasných pravidel jak pro děti, tak pro rodiče. „Čím lepší pravidla, tím lepší hra.“ (RV 13) Pro něho je velmi důležité, jaké jsou vztahy mezi učiteli, rodiči a žáky. Tomuto tématu se v rozhovoru věnoval velmi dlouho a dost podrobně (RV 13, RV 17–22). Kromě obecných přístupů učitel komentoval konkrétní a přesný návod, jak ve škole postupují při různých konfliktních situacích, počínaje klidným řešením konfliktů v rozhovoru se žákem, přes řešení s rodiči až po jednání se sociálním úřadem. Učitelé si musí, podle ředitele RV, uvědomit, že jsou především učiteli a ne vychovateli a ve škole nesuplují roli rodičů. Zajímavý je moment, kdy hovoří o tzv. „zákonu zachování lásky a vřelosti“ (RV 19), který spočívá v míře rodičovského zájmu o děti. Ředitel RV toto tvrzení používá při rozhovoru s rodiči, kdy říká, že zde platí přímá úměra. Pokud se rodiče nebudou dětem věnovat a dávat jim lásku (pěkné slovo, pohlázení) a budou je uklízet k počítači, tak později děti nebudou schopny lásku v různých formách vrátit, protože je to nikdo a obzvláště počítač nenaučil. Učitel své konkrétní zkušenosti dokládá čerstvou vzpomínkou na diskusní televizní program s rektorem Karlovy univerzity v Praze, kde hovořil o 4 jednoduchých principech práce se třídou (RV 37–39): Vztah – láska mezi zúčastněnými lidmi; slušnost; řád; pracovitost. Dodává, že je důležité pracovat, pokud je to možné přirozeně. Za největší problém učitel RV označuje správně zareagovat v danou chvíli na daný podnět.

RV dodává, že velmi záleží na „hledání cesty k žákovi“ (RV 39), ale není možné jen stále hledat cestu. Podle míry aktivity učitele v „hledání cesty“ dosáhneme dvou výsledků: a) žák umí počítat, b) žák je slušný. V ideálním případě by bylo žádoucí, aby žák odcházející ze školy byl slušný a uměl i počítat. Poslední důležitou

a nezastupitelnou skutečností je učitelova znalost oboru, zájem o další vzdělávání a o osobní přístup, kdy si učitel nejde do třídy látku pouze „odvykládat“ (RV 40). Učitel také pokládá základní otázku, co je důležitější, konstruktivní (tvořivost) nebo instruktivní (preciznost, dril) přístup? Dochází k názoru, že „je asi ideální od všeho něco“ (RV 43–4).

Učitelka CK navrhuje ke zlepšení výsledků žáků jediný postup, kterým je doučování (CK 9–11). Její výpovědi jsou skutečně krátké. Některé obecné kódy se vůbec v rozhovoru neobjevují. Například jsem nikde nenalezla zmínky o učitelčině přístupu k dětem ani povídání o klimatu třídy. Přestože jsem tuto otázku položila, učitelka se odpovědi vyhýbala. Zdálo se mi, že o vztahových věcech nechce hovořit. Soudím tak podle velké váhavosti až neochotě popsat atmosféru v hodině (CK 38–40).

4.4.2 Způsoby zavedení a procvičování tématu lineárních rovnic

Nyní se budeme věnovat zaváděným *pojům*. Je zjevné, že učitelé přemýšlejí o návaznosti učiva na předchozí ročníky. V úvodu tématu se zabývají jednoduchými rovnicemi typu $x + a = b$, které se vyskytují již na 1. stupni (SB 35), přičemž se zavádějí pojmy *známá*, tj. číslo, a *neznámá*, tj. *proměnná*. Učitel RV na prvním stupni aktivně pracuje s písmeny jako neznámou (RV 15). Učitelé si však nevšímají pouze předchozích zmínek o rovnicích, ale vidí i návaznost do dalších ročníků v úlohách se vzrůstající obtížností (SB 37,52).

Pojmy *rovnost* a *rovnice* učitel SB vždy ukazuje na příkladu (SB 36) a snaží se ukázat podstatu řešení rovnic v hledání neznámé (SB 38). Učitel AC přispěl zajímavou činností (AC 48–53), kdy s žáky prováděl porovnávání staveb z kostek. Žáci stavěli a porovnávali, zda počty kostek v jednotlivých stavbách jsou stejné, resp. určovali rovnost počtů kostek.

Pojem *zkouška* je také zajímavé zmínit, protože učitel SB (SB 36) diskutuje s žáky o nutnosti zkoušky a její funkci. Na druhé straně učitel BD nediskutuje o její funkci, ale klade důraz na jednoduchost při jejím provádění (BD 15–17), přičemž nelpí na dlouhých zápisech, ale zato vyžaduje pochopení a slovní formulaci významu provedených zápisů ($L = P$).

Od *pojmu* se přesuneme k *budování schématu rovnic*. Metody a modely jsou konkrétně řešeny v dalším oddíle, nyní jde o technické provedení zavedení rovnice.

Nejvíce učitelé při budování schématu rovnic využívají model vah, kdy s nimi nemanipulují přímo v hodině, ale vypůjčí si jejich myšlenku a jen *schematicky malují obrázek vah* (RV 31) nebo si dokonce pomohou moderní technikou, která celkem věrně předvádí rovnosti a nerovnosti na modelu vah (AC 20–47), (RV 7). Kromě obrázků a počítačových aplikací používají i velmi běžnou pomůcku, a to své ruce, kdy jednoduchým pohybem mohou naznačit rovnost a nerovnost (SB 28–30). Ve dvou případech učitelé klasické váhy používají nebo někdy použili (CK 14; RV 7) přímo v hodině matematiky nebo spíše fyziky. Navíc vyučující CK tvrdí, že žáci už rovnice znají z 1. stupně, tak není důvod používat žádné obrázky, proto bez zdržování jdou přímo počítat (CK 14,27). I vyučující BD je v současnosti velmi silně přesvědčen, že je nutné jít co nejdříve na počítání a dril, aby si žáci postup zmechanizovali (BD 11,21,39).

Během analýzy se objevily tři přístupy ke *způsobům procvičování*. Někdy jsou získány i z obecných částí rozhovoru, které se netýkaly přímo rovnic.

Zatímco v současné didaktice matematiky se dril a mechanické počítání spíše upořádají a dává se důraz na konstruktivistické přístupy k vyučování, učitelé CK (CK 14) a BD (BD 39,57,67,71) v rozhovorech velmi často opakovali nutnost v prvním případě drilu až „drezúry“ a v druhém případě, myšleno trochu jemněji, nutnost mechanického počítání. Na první pohled je kvalitativní rozdíl mezi těmito pojmy málo zřetelný, ale při samotném rozhovoru byl velmi znatelný důraz učitelů na jistá slova a slovní spojení. Dril je způsobem zcela instruktivním bez možnosti hledání jiné metody řešení a žák se učí aplikovat naučená pravidla a poučky. *Mechanické počítání* ve druhém případě je jakousi jemnější variantou drilu, přičemž učitel klade důraz na zestručnění a jednoduchost provádění operací. Žáci se učí přesný postup s ne zcela povzbudivým závěrem učitele, že stejně ne všichni žáci postup pochopí (BD 83). Níže se ještě k této otázce vrátím.

Druhý přístup je *důraz na stálé počítání* s nutností žákova pochopení mechanismu a fungování ekvivalentních úprav (SB 43). O tomto způsobu opakování rovnic hovoří i učitelé SB, AC a RV (SB18,24,49), (AC 55–57), (RV 44). Učitelé se shodují v názoru, že při systematickém počítání není problém s pochopením jednotlivých úprav. Celkově je z jejich výpovědí zřejmé, že pracují i s dalšími způsoby opakování látky.

Třetí přístup klade důraz na *procvičování jako variování*, resp. důraz na rozvoj tvořivosti a logického myšlení žáka. Komentáře učitelů k tomuto přístupu jsou, zdá se, velmi opatrné, jsou čitelné spíše mezi řádky (SB 37), (RV 44), kdy učitelé nechávají žáky přemýšlet nad úlohami a diskutují s nimi nad možnostmi řešení. Tento přístup je možné nazvat jako konstruktivistický.

Výhody druhého nebo třetího přístupu v matematice pěkně shrnuje RV (RV 44). Osobně se více přiklání ke způsobu *vést žáky k myšlení a tvořivosti*, ale na druhou stranu systematické počítání „zaručí“ znalost základních matematických dovedností. Dochází však k názoru, že je nutné v hodinách látku procvičovat více způsoby.

4.4.3 Používané modely a metody výpočtu lineárních rovnic

Předpokládala jsem větší kreativitu a více námětů v metodách a modelech použitých učiteli ve vyučování lineárních rovnic. Trochu mě zklamalo, že v metodách se neobjevuje téměř nic, co bych již z hodin didaktiky neznala, ale na druhou stranu je potěšující, že učitelé používají léty prověřené a osvědčené metody a modely.

Používané modely

Nejvíce jsou v praxi učitelů zastoupeny modely ze *sémantického aritmetického prostředí*. Tři učitelé z pěti nejvíce používají *rovnoramenné váhy* (např. SB 27–28). Čtvrtý učitel tento model také dříve používal (BD 11,21). Co učitelé myslí tím, že používají tento model? Převážně se jedná o myšlenkové přiblížení se činnosti prováděné na rovnoramenných vahách, kdy ne vždy mají živý model přímo v hodině, ale požadovanou činnost žákům přibližují obrázkem (AC 13), manipulací vlastních rukou jako ramen vah (RV 7,25,27) nebo i s pomocí počítačových aplikací (AC 20–37).

Velmi podobný model k rovnoramenným vahám je model *houpačka* (RV 27), kde učitel opět demonstruje pomocí svých paží rovnost a nerovnost. Vyučující se tak, i podle jeho slov, snaží žákovi matematický výpočet přiblížit k reálné každodenní situaci.

Zmínka (CK 20) o *úloze na věk* není zcela čistě myšlena jako model. Vyučující tyto úlohy s žáky řeší spíše až ve slovních úlohách a poukazuje na to, že jsou pro žáky velmi složité díky jejich neschopnosti si podmínky úlohy reálně představit.

V rozhovorech se objevují dva nové, v literatuře nepopsané, modely, které naznačují stejnou metodu řešení. Myslím, že je vhodné si přiblížit, jak učitelé tyto modely při výpočtech rovnic používají. Nutno ještě říci, že oba učitelé jsou v současné době zastánci okamžitého zahájení počítání bez „zdržování se“ nějakými modely a přirovnání k činnostem běžného života je cestou, jak žákům objasnit mechanismus výpočtu. První z modelů je *roury od kamen* (CK 29). Představme si bílou kočku na jedné straně roury od kamen. Když rourou proběhne, tak už není bílá, ale černá. Stejně tak se chová znaménko u čísla nebo neznámé v rovnici. Když číslo nebo neznámou převádíme přes rovnítko, tak se jeho znaménko změní na opačné stejně jako barva kočky z bílé na černou. Druhý model je *úklid pokoje* (BD 11). Opět se jedná o jisté prostředí, kdy třídím členy rovnice, přičemž členy s neznámou uklízím na jednu stranu a členy bez neznámé na druhou stranu.

Strukturální aritmetické prostředí a jeho modely byly v rozhovorech zastoupeny velmi málo a jsou spíše kombinací modelu a metody. Jedná se o úlohy typu „Myslím si číslo“ (CK 20), kdy žáci mají opět podle učitele potíže si vůbec matematické vyjádření reálně představit. Otázkou zůstává, zda by žáci byli schopni opačného procesu; mám na mysli situaci, kdy reálnou situaci mají vyjádřit matematickým zápisem. O této možnosti bohužel řeč nebyla.

Dvakrát se v rozhovorech také objevuje zmínka o *tabulkách* (BD 18; CK 20) v souvislosti s aplikací rovnic u slovních úloh, kdy tabulky učitelé používají jako prostředek pro uspořádání zadaných informací. Vidíme, že tento význam je jiný, než chápání tabulek popsanych v odstavci 3.3.2.

Model z *geometrického prostředí* se v rozhovorech neobjevil.

Používané metody

V průběhu analýzy rozhovorů se ukázalo, že zastoupení jednotlivých metod řešení není zcela vyrovnané. Orientace mezi metodami používanými učiteli nebyla zcela snadná a vyžadovala opakované čtení a uvažování nad významem řečených slov, protože na první pohled jasné odpovědi nebyly vždy zcela jasné.

Při kódování jsem vycházela ze čtyř základních metod řešení lineárních rovnic popsanych v odstavci 3.3, ale snažila jsem se hledat i nepopsané metody. Kromě jmenovaných metod, které nebudu znovu komentovat, se nově objevil i tzv. přechod, kdy učitelé používají jednu metodu řešení a potom přecházejí k druhé metodě. Tento

proces má neostré hrany a je mezikrokem mezi dvěma metodami, proto jsem ho nazvala přechodem. Jedná se o přechod mezi metodou váhy a metodou měnič.

V tabulce 4.3 je vypsáno, zda učitelé používají metodu zapsanou v záhlaví tabulky a kde se o ní v rozhovoru zmiňují. Na první pohled je patrné, že metoda tabulky není vůbec učiteli používána. Metoda pokus – omyl je používána jen velmi okrajově a spíše jako pomocná metoda pro jiné aktivity. Třetí metoda váhy je aktivně používána třemi učiteli, kteří na ní staví výklad látky i celý proces řešení rovnic. Když se více zamyslíme nad výroky učitelů kódovaných jako *přechod od metody váhy k metodě měnič*, zjistíme, že se do určité míry jedná o mentální zdvih, zobecnění nebo dokonce abstrakci, kdy žák z jednotlivých modelů sestavuje svůj ucelený soubor poznatků. Domnívám se, že se jedná o abstraktní poznání, protože žák je schopen účinně používat matematický jazyk s odbornou terminologií a rozumí jim. Tři uvedení učitelé se shodují v názoru, že žák je schopen k tomuto poznání dospět. Poslední metoda měnič je pro tři učitele metodou, ke které žák dospěje postupným vývojem, a pro dva učitele je jedinou metodou, kterou je možné používat při řešení lineárních rovnic.

	Metoda pokus-omyl	Metoda tabulka	Metoda váhy	Přechod od ~~MV~~ k MM	Metoda měnič
AC	Ano (AC 39, 48–51)	Ne	Ano (AC 12,15,47)	Ano (AC 15–17, 54–57)	Ano (AC 3,7,11)
BD	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano (BD 6,11,27, 31,33–35, 56–61)
SB	Ano (SB 37)	Ne	Ano (SB 27,28,30)	Ano (SB 43–48)	Ano (SB 20)
RV	Ne	Ne	Ano (RV 7,25,27, 28–33)	Ano (RV 7) – náznak	Ano (RV 7) – náznak
CK	Ne	Ne	Ne	Ne	Ano (CK 14,29)

Tabulka 4.3: Tabulka využívání různých metod učiteli

Podívejme se nyní na ilustrace výše uvedených obecných popisů.

Učitel AC zdůrazňuje, že výhradně používá metodu vah (AC 12,15,47) a metodu měnič (AC 3,7,11) použije tehdy, kdy na ni upozorní sami žáci nebo ji případně sám zmíní v závěru probíraného celku lineární rovnice. Přechod mezi metodami vyučující hodnotí velmi vysoko (AC 15–17, 54–57) a spíše vyčkává, zda s metodou měnič někdo

z žáků do hodiny přijde. Epizody z hodin, kdy žák přišel se zmiňovanou metodou, učitel líčí velmi hrdě a říká, že pokud si žáci skutečně počítají, tak vždy někdo přijde s tím, jak je možné počítat *jednodušeji* než stále odečítat a přičítat na obou stranách rovnice. Učitel AC jako jediný zmínil zajímavou činnost používanou v úvodu výkladu o rovnicích, kdy žáci porovnávají počty kostek vlastnoručně postavených staveb (AC 39,48–51), tedy řeší, kdy se počty kostek stavby na jedné straně lavice rovná počtu kostek stejné nebo jiné stavby na druhé straně lavice. Do tabulky jsem to zapsala pod metodu pokus – omyl, protože žáci při této aktivitě manipulativně zkoušejí, zda se počty kostek rovnají. Mojí domněnkou je, že učitel používá i další variace zadání úloh s kostkami, ale nemám to podloženo natočeným rozhovorem.

Učitel BD má jednu nejasnou zmínku o metodě váhy, která přesně neříká, že by tuto metodu používal, jedná se v tomto případě spíše o popis formálního zápisu. Z dalších šesti rozsáhlejších částí je patrné, že vyučující používá výhradně metodu měniče (BD 6,11,27,31,33–35,56–61). Není bez zajímavosti, že v rozhovoru učitel zmínil model váhy jako model, který dříve používal, a možná se, podle jeho slov, k nim někdy opět vrátí. Velmi často při hovoru o metodě výpočtu uváděl model nazvaný *úklid* (viz výše), který spočívá v procesu úklidu a ne ve stavu, jako např. je tomu u vah (BD 11). Jiné metody výpočtu rovnice zásadně odmítá.

Učitel SB klade velký důraz na váhy a uvádí je jako nejlepší způsob (SB 28) zavedení rovnic, který zná. I když v rozhovoru je následující výklad učitelových metod spíše v opačném pořadí, protože chvíli trvalo, než jsme se k nim propracovali, uvedu je v logickém pořadí. Úplný začátek tématu rovnice se nese v duchu jednoduchých rovnic řešených již na 1. stupni. Důležitým momentem je, že žáci nezačnou řešit rovnici, ale položí si otázku, „jestli by mohlo být jisté číslo správným řešením“ (SB 37). Dospějí k dosazování a zkoušení výsledků. Nespokojí se s jedním výsledkem, ale diskutují nad množstvím řešení rovnice. Kvůli experimentování jsem tuto zmínku zařadila do metody pokus – omyl a myslím, že plně tuto metodu reprezentuje. Žáci posléze s učitelovou pomocí postupují při řešení úloh s pomocí modelu a metody vah (SB 27,28,30). Učitel říká, že je důležitá trpělivost, než si žák nalezne svůj správný styl výpočtu. Přestože přechod k metodě měniče je někdy zdlouhavý (SB 43–48), většina žáků k ní dříve či později dospěje (SB 20).

Učitel RV je třetí z učitelů, kteří dávají jednoznačně přednost metodě vah (RV 7, 25,27,28–33) modelu vah a dokonce, jak už jsem zmínila, používá je jako skutečný

model, ne jen na obrázcích nebo na interaktivní tabuli. Metodu přechodu od úprav na obou stranách současně k přehazování členů z jedné strany na druhou (tj. měnič) v náznaku zmiňuje v souvislosti se zjednodušováním zápisu, kdy si žáci všímají, co se vlastně děje se znaménky při přechodu přes „ $=$ “ a zjednodušují zápis (RV 7). O jiných metodách výpočtu se vyučující nezmínil.

Učitelka CK používá striktně metodu měnič (CK 14,29) se specificky vlastním modelem *roura od kamen* (viz výše). S touto myšlenkou se osobně setkávám poprvé a evokuje představu černé skříňky. Vyučující důsledně trvá na nutnosti rovnou přejít na počítání a v tabulce 4.3 vidíme, že používá striktně pouze jednu metodu řešení rovnic. Otázkou zůstává, zda jsou žáci schopni pochopit podstatu prováděných operací. Na to se pokusí odpovědět následující odstavec.

4.4.4 Míra pochopení tématu a podstaty prováděných úkonů žákem

Jak bylo dvakrát naznačeno, vrátíme se k otázce, jaká je míra pochopení žáka při různých typech a způsobech výkladu látky.

Učitelé CK a BD začínají látku výhradně příklady a pravidly, jak počítat rovnice. Ptala jsem se jich, zda jsou žáci schopni pochopit takto vyložený postup řešení. Učitele BD jsem se na tuto otázku ptala třikrát v průběhu dvou rozhovorů (BD 39–43, 56–61, 68–71). Vždy následovala stejná odpověď o mechanické práci bez snahy o hlubší pochopení a argument, že se něco nazpaměť musí žáci naučit. Pozitivní je individuální přístup k žákům, kdy pro slabší žáky učitel připravuje jednodušší příklady na procvičení i do písemné práce, aby přý alespoň trochu uspěli (BD 83). Šikovní žáci, pokud chápou postupy řešení, si smí zjednodušit zápis (BD 14). Velmi podobně se vyjadřovala učitelka CK s tím, že pro pochopení metody má jediný praktický příklad (*roura od kamen*) a „žáci si to potom pamatují. V podstatě na tomto příkladu by to pochopit měli. To pochopí.“ (CK 29) Na druhou stranu jinde učitelka uvádí, že žáci opakovaně dělají chyby.

Zbývající učitelé, jak již bylo řečeno, vycházejí z mechanismu činnosti s váhami a říkají, že žáci díky tomuto modelu a jeho názornosti podstatu jednotlivých kroků chápou (např. RV 29). Když se žáci postupně odpoutávají od malování vah a řeší rovnice, tak už chápou podstatu prováděných ekvivalentních úprav (SB 43). RV

(RV 35) přidává vlastní zkušenost, kdy ve škole narazil na prvotní nepochopení a rovnice pro něho byly kamenem úrazu. S lehkou nadsázkou dodává, že asi nikdy neviděl váhy, protože by to potom chápal. Důležitá je ještě poznámka, že „při nepochopení některé úpravy se hned (s žáky) vrátí k vahám a demonstruje na nich zjištěný fakt, a tak problém se žáky odstraní“. (RV 25)

Když jsem se učitelů dotazovala, *jak* poznají, že žák látku chápe, tak se např. BD usmál a řekl, že to umí (BD 69). Až na výjimku jsem se podrobnějších odpovědí nedočkala. Jediný přímo odpověděl AC (AC 61–63), že pozná pochopení látky okamžitou zpětnou vazbou, tj. hlášením a vyvoláváním žáků a diskuzí se žáky.

4.4.5 Kritická místa, časté chyby žáků a místa bez obtíží

Při analýze chyb, kritických míst a míst bez problémů objevujících se v rozhovorech jsem některé části kódovala dvojité (chyba a kritické místo). Některé spíše obecné poznámky jsou zakódované jen jako kritické místo a jejich počet je velmi malý. Z tohoto důvodu jsou zdánlivě odlišné skupiny v jednom oddíle. Chyby a obtížná místa jsou rozděleny do dvou skupin: 1) chyby a kritická místa v metodě řešení; 2) chyby a kritická místa pramenící z neznalosti výpočtů z jiných matematických celků.

Dříve než přistoupím k hodnocení toho, co žáci nezvládají, tak zmíním i pozitivní ohlasy učitelů na místa, která žákům v rovnicích spíše jdou. Není problém s pochopením postupu řešení rovnice (AC 4–11). Rovnice se totiž hodně a často řeší. Mechanismy řešení a ekvivalentní úpravy (CK 12,17) žáci zvládají, ale navíc velmi záleží na četnosti počítání a domácí přípravě. (SB 18,22)

Obecné poznámky o příčinách chyb obsahují například nepozornost žáků (BD 37) nebo „lenost, pohodlnost, neplnění si základních povinností“ (SB 11) a konzumní přístup (CK 47). Tyto nelichotivé vlastnosti se promítají i do výuky, kdy nastává velký problém („v hodině je to chvilka umravňování, chvilku výchova a potom teprve vzdělání“, RV 36) s danými osnovami, které se musí splnit. V úvodu rozhovoru se podobně vyjadřovali i ostatní vyučující (např. BD 9).

Chyby a kritická místa v metodě řešení rovnice

Přes soustavnou práci s neznámou již od 1. stupně se občas chyby plynoucí z nedostatečného pochopení funkce neznámé objevují (RV 15).

Přestože učitelé říkali, že není problém s pochopením postupu řešení, tak podle jejich slov se chyby ve výpočtech objevují (SB 23). Učitel BD konkrétněji specifikuje chybnou práci s metodou měnič, kdy žáci zapomenou změnit znaménko (BD 35).

Druhou konkrétní chybou při větším množství členů na obou stranách rovnice je z pohledu učitele nevýhodný postup zjednodušování rovnice, kdy žáci rovnou převádějí členy bez neznámé na jednu stranu a členy s neznámou na druhou stranu bez toho, aby si výrazy nejprve zjednodušili. Tento postup není špatný, ale při větším množství členů chybovost velmi razantně vzroste (BD 37,67). Učitel je vede k tomu, aby si každou stranu rovnice nejprve zjednodušili a až poté převáděli pomocí *úkladu* na potřebnou stranu. Učitel jim chce ušetřit práci, ale žáci zatím nevidí výhodnost ani nutnost tohoto způsobu řešení rovnice.

K chybě nesprávného násobení se vyjádřili dva učitelé, kdy žáci vymýšlejí vlastní úpravy, např. násobí jednu stranu a druhou ne (SB 31), nebo zapomínají vynásobit více členů jedné strany rovnice. Pomoc pro tuto chybu učitel hledá ve vrácení se k modelu vah, kdy si žáci představují, že na jedné straně vah není jen jedna mistička, ale např. dvě a více. Při násobení se musí vynásobit každá mistička zvlášť. To prý funguje (RV 25).

Poslední chyby, které jsou spojené s postupem řešení rovnice, jsou chyby v provádění zkoušky (CK 19) a chyby v osamostatňování neznámé (BD6), kdy žáci nedovedou správně vypočítat neznámou a buď skončí výpočet předčasně, nebo ho dokončí chybně.

Chyby a kritická místa plynoucí z neznalosti výpočtů jiných matematických celků

Jak název napovídá, žákům často chybí znalosti látky z předchozích ročníků. Konkrétní vyjmenované okruhy jsou:

- a) početní chyby (SB 15), chyby ve sčítání, odčítání, násobilce (SB 50),
- b) celá čísla a práce se znaménky (SB 52),
- c) desetinná čísla (SB 52), (CK 15,19), (SB 50),
- d) zlomky – jejich úprava, odstranění zlomku (BD 6,7,67), (SB 21), (CK 15,19),
- e) hledání nejmenšího společného násobku při práci se zlomky (BD 81–82),
- f) absolutní hodnota (BD 15),
- g) vzorce a výrazy $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (SB 50),

h) kvadratický člen, kdy žáci zapomínají na druhý kořen (BD 15,21),

i) slovní úlohy (BD 18), (CK 20), (RV 5).

S chybami učitelé pracují různě. Někteří drilem (CK 14), jiní postupným přidáváním obtížnějších úloh³⁸ (BD 77–79) nebo, jak již bylo řečeno, se vracejí k modelu vah a znovu upevňují pochopení žáka (RV 25). Jistě existují další postupy, jak odstraňovat chyby, a je mnoho dalších chyb, kterých se žáci dopouštějí, ale v mých pěti rozhovorech se neobjevily.

4.4.6 Používané učebnice a jiné materiály

V úvodu jen krátká zmínka o učebnicích, aby bylo jasné, s jakým materiálem učitelé rámcově pracují. ZŠ Resslerova Hlinsko používá učebnice nakladatelství Prometheus (Odvárko, Kadleček, 1999). Na ZŠ Smetanova Hlinsko nově zavádějí učebnice nakladatelství Fraus (Binterová a kol., 2009) s tím, že je zatím zavedli v 6. a 7. ročníku. Rovnice v 8. ročníku ještě vyučují podle učebnic nakladatelství Prometheus (Odvárko, Kadleček, 1999).

Všichni učitelé vycházejí z výše popsaných učebnic (BD 5,85–88), (RV 27), (př. CK 14), (SB 29,39–42) a jejich metodik (AC 16,57).

Učitel RV též používá příslušný software k učebnici Fraus na interaktivní tabuli (RV 9–11) a je spokojený s možností přiblížit žákům matematiku i reálný svět prostřednictvím interaktivní tabule (RV 27). Učitel AC také rovněž používá interaktivní tabuli a sám si hledá na internetu materiály (AC 27,37), (AC 41–47). Bohužel si nepamatoval názvy stránek, které často navštěvuje.

Učitel BD také pracuje aktivně s internetem, a to při vyhledávání příkladů i zajímavostí pro žáky. Jak sám říká, učebnice není vybavena tolika jednoduššími příklady, které pro žáky potřebuje, proto je pro něho snazší se inspirovat na internetu než například v matematických sbírkách. Při rozhovoru si vzpomněl například na web e-matematika, ZŠ Dobřichovice (BD 21) nebo www.cihak.webz.cz (BD 85–88). Několikrát se v průběhu rozhovoru vrátil k otázce, že v učebnici mu nevyhovuje skladba příkladů a jejich obtížnost. Konkrétně k rovnicím a později ke slovním úlohám vždy

³⁸ V didaktice matematiky se hovoří o tzv. gradovaných úlohách, kdy se postupně zvyšuje obtížnost úloh.

hledá jednodušší a snaží úlohy a přizpůsobuje i styl řešení (BD 18). Velmi podobný přístup líčila i vyučující CK (CK 68). Učitel SB žákům také připravuje pracovní listy s úlohami a stejně jako CK je následně využije při testování (SB 13,54–56).

4.5 Analýzy náslechů hodin

Náslechy hodin budou zmíněny pouze dva, protože ostatní nebyly na téma lineární rovnice. Podrobné zápisy z hodin jsou v příloze 2 a 5 zařazeny jako závěrečná součást přepisů rozhovorů s učiteli. Pro přehlednost a možnost odkazů jsou také očíslovány jako rozhovory. Zápisy z hodin jsou poměrně podrobné, protože jsem hodiny nahrávala na diktafon a pasáže, které byly v hodině významné, jsem mnohdy i přímou řečí přepisovala. Následující text je syntézou analýzy hodiny a částí následného rozhovoru vztahujících se k hodině.

4.5.1 Analýza hodiny vyučující CK a rozbor žakovského řešení rovnice

Z mého pohledu jako pozorovatele byla hodina zaměřena na klasické opakování a zdokonalování se v řešení složitějších lineárních rovnic. Jednalo se o třídu 8. ročníku s tím, že žáci této třídy jsou na matematiku rozděleni na dvě části, podle slov učitelky, na zdatné a méně zdatné počtáře. Vyučující CK má část třídy zdatných počtářů.

Vyučující v hodině zdůrazňuje individuální tempo, aby žáci nebyli stresováni a počítali pokud možno bez chyb. Na druhou stranu jsem byla opakovaně svědkem situace, která ukazovala, že žáci jsou v určitých ohledech příliš závislí na učitelce. Šlo o to, že žáci téměř ve stejném čase přestali pracovat a více jak 5 žáků se zároveň hlásilo, že jim to nevychází, a všichni čekali, až k nim vyučující přijde a chybu jim najde. V hodině se vytvořil zvláštní hluk, kdy několik žáků samostatně počítalo, a zbytek žáků čekal, až jim vyučující chyby najde a opraví. Nikdy předtím jsem se s takovým přístupem nesetkala. Vyučující k tomu řekla:

Oni jsou takoví upovídání, ukřičení. Když jim látka jde, tak počítají potichu, soustředěně. Jakmile dostanou nějaký problém, že někomu něco málo nejde, tak v té třídě je takový ruch. Říkají: já nerozumím. Potom přijde písemma a všichni mají jedničky. V tom je takový paradox, že pocit z hodiny

je, že tomu nikdo nerozumí. Tak to vysvětlíme o hodinu víc, o další hodinu víc. Stále to vypadá, že tomu nikdo nerozumí. Potom dáme písemku a oni to všichni mají dobře. (CK 38)

Ano, je to tak. Jak tam je nějaký problémový příklad, tak to tak dělají. A to ještě byli hodní. Když zjistí, že jim to nejde, tak tam začnou vykřikovat, jak to je hloupé, jak by to vůbec mohli k něčemu v životě potřebovat? Ale když jim látka jde a umí to a vychází jim to, tak není problém a počítají. (CK 45)

Nechtějí přemýšlet, nechťejí se pozastavit, hledat chybu. V tomto jsou takoví konzumní. Když mi to jde, tak v pohodě, jedu, ale když mi to nejde, tak proč bych se namáhal? On mi to někdo najde, nebo řeknu, že to neumím nebo že to je těžké. (CK 47)

V průběhu hodiny vyučující chodí po třídě a kontroluje žákům jejich výpočty i výpočty řešených rovnic na tabuli. Přitom ještě opravuje každému žákovi chybné zadání v pracovním listu a opakuje, jak se jednotlivé typy rovnic řeší. (CK 62–66) Vyučující si stěžuje, že si žáci nejsou schopni chyby nalézt, ale v podstatě jim vychází vstříc a k ničemu dalšímu je nevede, resp. nevede je k tomu, aby si dokázali poradit sami a své chyby nalézt a opravit.

Jelikož měli žáci pracovat každý svým vlastním tempem, velmi rychle se rozešlo tempo práce na tabuli s tempem žáků v sešitech. Ve třídě se vytvořily zhruba tři skupiny: dobře počítající rychlí žáci, žáci počítající tempem tabule a pomalí nepočítající žáci. (CK 102–109) Vyučující se pohybovala mezi všemi skupinami a všem kontrolovala postupy a výsledky, což je na jednu stranu obdivuhodné, protože žáci dostali okamžitou zpětnou vazbu, na druhou stranu je nevedla k samostatnosti i v oblasti identifikace a odstranění chyb.

Rozbor chyb žáka při řešení rovnice

V hodině jsem seděla vedle velmi šikovného žáka a měla jsem možnost jej sledovat při řešení zadaných rovnic. Řešení tří úloh tohoto žáka mám zdokumentované a zanalyzované.

$$\begin{array}{lcl}
 14 - [3 - (5 - x)] & = & 18 - 5x \\
 14 - [3 - 5 + x] & = & 18 - 5x \\
 14 + 2 - 4x & = & 18 - 5x \quad / +5x \\
 16 - 4x & = & 18 \quad / -16 \\
 -4x & = & 2 \quad / : -4 \\
 x & = & -0,5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{lcl}
 14 = [3 - (5 - x)] \\
 14 - [3 - (5 + x)] \\
 14 - [3 - 5 + x] \\
 14 - 3 + 5 - x \\
 16 - x = 18 - 5x \quad / +5x \\
 16 + 4x = 18 \quad / -16 \\
 4x = 2 \quad / :4 \\
 x = 0,5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 L(0,5) : 14 - [3 - (5 - x)] & = & 18 - 5x \\
 & = & 14 - [3 - 4,5] = 14 - [-1,5] = 14 + 1,5 = 15,5
 \end{array}$$

$$P(0,5) : 18 - 5x = 18 - 5 \cdot 0,5 = 18 - 2,5 = 15,5 \quad L = P$$

Obrázek 4.1: Žákovské řešení s chybami 1

Na obr. 4.1 je vidět řešení úlohy i se zkouškou. Je zajímavé, že přes množství chyb, které se ve výpočtu objevují, je výsledek správný a že díky chybě ve zkoušce žák zjistil, že příklad je chybně vypočítaný. Před touto úlohou vypočítal žák asi tři úlohy správně a nyní při prvním neúspěchu položil tužku a nechtěl dál počítat. Společně jsme znovu prošli jednotlivé kroky a žák je postupně začal opravovat. Všechny chyby byly zapříčiněné nesprávnou prací se znaménky a dále ještě ve zkoušce chybným sečtením dvou čísel. Nejprve začal chyby opravovat do původního řešení, ale to se záhy stalo nepřehledné, tak znovu úlohu řešil ve vedlejším sloupci. Úsměvný je žákův závěr, kdy říká, že mu to vyšlo stejně jako poprvé. Rozdíl byl v tom, že nyní byl postup bez chyb. Důležité je dodat, že jsem mu nediktovala dobré řešení, ale snažila jsem se pouze klást vhodné otázky tak, aby na správné řešení přišel sám.

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{3} \cdot \left(3 - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot (6 - A) \quad | \cdot 3 \\
 & \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{6}{1} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6^2}{1} - A\right) \quad \left(\frac{1}{3} \cdot -\frac{A}{1}\right) \\
 & \frac{2}{3} - \frac{A}{3} = \frac{2 - A}{3} \\
 & \frac{2}{1} - \frac{A}{3} = \frac{2 - A}{1} \\
 & 0 = 0
 \end{aligned}$$

nekonečně mnoho řešení

Obrázek 4.2: Žákovské řešení s chybami 2

Druhá rovnice (obr. 4.2) je rovnice se zlomky. Žák se nejprve snažil, jak je vidět v druhém řádku, zlomkem roznásobit závorku. Nebyl by to špatný postup, ale dopustil se u něho opět několika chyb. S návodnými otázkami reagujícími na chybné kroky dovedl první záměr až ke správnému výsledku. Po dokončení výpočtu touto poměrně náročnou metodou si vzpomněl na to, že by bylo snazší zlomek nejprve odstranit a potom řešit o poznání jednodušší rovnici.

$$\begin{aligned}
 7n - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{8}{1} - 1\right) &= \frac{5}{8} + 3n \quad | \cdot 8 \\
 56n - 6 \cdot (5n - 1) &= 5 + 24n \\
 56n - 30n + 6 &= 5 + 24n \quad \{ \\
 26n + 6 &= 5 + 24n \quad | -24n \\
 2n + 6 &= 5 \quad | -6 \\
 2n &= -1 \quad | :2 \\
 n &= -0,5
 \end{aligned}$$

Obrázek 4.3: Žákovské řešení s chybami 3

Ve třetí rovnici (obr. 4.3) je vidět poučení se z předchozích chyb. Žák v první řadě odstraňuje zlomek, přičemž stojí za zmínku pomocný zlomek $(8/1)$ nad prvním řádkem. Žák si už raději píše pomocné výpočty, aby se nedopustil chyby. Je vidět, že i mezi druhým a třetím řádkem je výpočet se znaménky proveden správně.

Jestliže shrneme chyby žáka z uvedené hodiny, zjistíme, že chyby vycházejí z neschopnosti zapojit do výpočtu předchozí znalosti při řešení rovnic. V uvedených příkladech se jedná o:

- roznásobení závorky,
- odčítání a sčítání dvou čísel,
- práce se zlomkem,
- chybovost z vyčerpání.

Rovnice, které řešil výše zmíněný žák, byly podstatně náročnější, než byly rovnice zahrnuté do experimentu R. Halla (2002). Chyba roznásobení závorek se v jeho experimentu neprojevila, protože v jeho sadě úloh nejsou žádné rovnice se závorkami. Druhá chyba žáka by se podle Hallovy kategorizace dala nazvat chybou přerozdělení, kdy žák nedodrží znaménka při vyrovnávání stran. Další chyba žáka je spojená s chybnou prací se zlomky, kdy žák pracuje jen s některými členy rovnice. Poslední ze sledovaných chyb je v Hallově kategorizaci stejnojmenná třetí kategorie o chybách z vyčerpání.

4.5.2 Analýza hodiny vyučujícího BD

Žáci jsou druhou částí 8. třídy, jedná se o žáky méně zdatné v matematice. Jelikož obě skupiny mají matematiku ve stejný čas, tak časově jsem tuto hodinu (BD 91–147) absolvovala o den dříve než předchozí u učitelky CK. V hodině jsem seděla sama, neměla jsem tedy možnost vidět sešity žáků.

V hodině bylo v úvodu zkoušení, poté výklad nového typu rovnice a jejího řešení a procvičování na dalších rovnicích. Učitelův výklad byl čistě instruktivní. Jak se v průběhu hodiny ukazovalo, většina žáků netušila, proč a jak mají dělat takové úpravy. Když se ptali na odůvodnění, tak se jim ho nedostalo. Učitel v následném rozhovoru řekl, že nechce žákům komplikovat život, a tak se snaží prováděné úpravy žákům velmi zjednodušovat. Myslím ale, že toto řešení přináší spíše negativa, protože žáci bez mezikroků, které učitel jen řekne, ale nezapíše, se jen velmi těžko dopátrají podstaty

prováděných operací. Připomeňme, že učitel sám říká, že se nachází v situaci, kdy po žácích chce úpravy rovnic mechanicky. Ale jedním dechem dodává, že nevylučuje, že se časem nevrátí k jiným metodám.

Žáci v hodině pracují podle pokynů učitele a v případě nepochopení se ptají. Jedna žákyně vůbec nepracuje a po hodině přichází za vyučujícím, jestli by jí látku nevysvětlil, že to nechápe. Jiná velmi slabá žákyně se snaží nový postup pochopit, ale jde jí to velmi těžce. Učitel přistupuje k žákům velmi individuálně, např. chválí zkoušeného žáka za dobrý výkon a za to, že se konečně začal učit. V hodině je příjemná pracovní nálada. Žáci se sice nedokáží soustředit na práci celou hodinu, ale po chvilce odpočinku se až na výjimky opět do práce pouštějí.

Jednalo se rámcově o procvičovací hodinu s úvodním krátkým výkladem. Učitel žákům předkládá jednoduché následující schéma při řešení rovnice s neznámou x a domnívá se, že podle něho budou schopni vypočítat rovnice se zlomky.

$$\text{Rovnice: } \frac{8x}{3} = \frac{5x}{2} - 4$$

Učitelův komentář (U – učitel; Ž – žák), (BD 112–115):

- U: „První co v té rovnici udělám je, že odstraním zlomek. To je první věc.

Je takový nesympatický. Jak?“

- Ž slabě: „Společný jmenovatel?“

- U: „Podívám se do jmenovatele, je tam 3 a 2 (barevně označí). Hledám nejmenší společný násobek. To je 6. Budu násobit šestkou. V učebnici to je trochu více rozebrané, ale nebudu vám komplikovat hlavu. Postupuj přesně podle tohoto postupu. Pozor. Paradoxně. Rovnici si rozdělím na části. Plus, mínus a rovnítko mi to dělí na části. (jednotlivé části v rovnici učitel podtrhává) Toto je jedna část, toto druhá, toto třetí. Všechny tyto části budu násobit šesti. To se budete divit, jak budu násobit. Šest děleno třemi jsou 2. Dva krát 8 je 16. Stejně budu pokračovat dále. Podívejte se případně do učebnice. Dále $6:2 = 3$; $3 \cdot 5 = 15$ a nakonec $6 \cdot (-4) = -24$. Používejte tento postup. Zkoušku opět do prvního řádku, ne do druhého, ale do prvního.“

Mnoho žáků, jak již bylo řečeno, nerozumělo, proč mají rovnici násobit nejmenším společným násobkem jmenovatelů daných zlomků. Soudím tak z posledních dvou příkladů (BD 129,131), kdy rovnici násobili jiným číslem, než bylo požadováno,

a nechápali, kde mají chybu. Učitel bohužel jen řekl, čím mají rovnici násobit, ale důvod vyslovený nebyl.

Ve výpočtech rovnic se kromě chyb plynoucích z nové látky objevovaly chyby i z jiných matematických okruhů, např. práce se znaménky, zápornými čísly a malou násobilkou.

5 Závěr

5.1 Dosažení cílů práce

Domnívám se, že práce odpověděla na obě výzkumné otázky. Ukázalo se, že všech pět zkoumaných zkušených učitelů využívají modely a přístupy, k nimž vedou učebnice, ovšem že si též vytvářejí své vlastní přístupy (viz oddíl 4.4.1 – 4.4.3) a navzájem se liší důrazem na použití modelů usnadňujících pochopení ekvivalentních úprav rovnic. Úskalí, která v tématu lineární rovnice spatřují, a chyby, jichž se žáci podle nich nejčastěji dopouštějí, jsou podrobně popsány v oddíle 4.4.4 a 4.4.5.

Za důležitý výsledek práce považuji též didaktický rozbor tématu lineární rovnice v devíti řadách učebnic pro ZŠ, při němž bylo sledováno sedm kritérií: motivace, použitá prostředí/modely, podpořené vyučovací metody/přístupy, zastoupení metod řešení rovnic, počet úloh, vyžadovaná reakce od žáků a práce s chybou. Tento rozbor může sloužit i jako materiál využitelný v rámci didaktiky matematiky pro budoucí učitele matematiky.

5.2 Porovnání výsledků vlastního výzkumu s vybranými poznatky z odborné literatury

Metody vyučování

V oddíle 2.1 jsou naznačeny nejčastěji používané metody vyučování (podle J. Maňáka). Při analýze devíti učebnic z 2. stupně ZŠ jsem sledovala učebnicemi podporované metody vyučování. Nejvíce byly zastoupeny varianty metod z hlediska fází výchovně vzdělávacího procesu, tj. metody procesuální. Konkrétně se jedná o metody fixační, aplikační, motivační, expoziční a diagnostické. Druhé nejpočetněji zastoupené byly metody z hlediska pramene poznání a typu poznatků, tj. metody didaktické. Konkrétně mohu vyjmenovat metody praktické, názorně demonstrační, slovní (dialogické) a metody práce s knihou / učebnicí.

Další tři skupiny jsou zastoupeny méně. Jedná se o: aktivizující metody – aspekt interaktivní (metoda diskusí), metody z hlediska aktivity a samostatnosti žáků – aspekt

psychologický (metody badatelské a sdělovací) a nakonec metody z hlediska myšlenkových operací – aspekt logický (metoda srovnávací).

Přístupy z hlediska učitelova stylu vyučování

V rozhovorech učitelů je možné nalézt všechny tři, v teoretické části zmiňované, přístupy učitelů z hlediska jejich stylu vyučování. Například *transmisivní přístup* má učitel BD (BD 11) a soudím tak podle toho, že žáky učí pouze potřebné informace pro výpočet rovnic. Učitel přesně ví, co by žák měl umět a jak. I z náslechu hodiny bylo zřetelné (BD 112–115), že žák je pasivní a pouze přijímající činitel. Ve velmi podobném duchu se vyjadřuje i vyučující CK.

Zbývající tři učitelé se snaží podle svých slov propojovat znalosti žáků s věcmi a situacemi z běžného života. S pomocí diskuze nad řešeními rovnic se učitelé snaží vést žáky ke zhodnocení nastalé situace, což by ukazovalo na *kritický přístup*. Jenomže tito učitelé se snaží nejprve odhalit prvotní znalosti a vědomosti, využít jejich potenciál a navázat na ně. Tento fakt nás vede ke *konstruktivistickému přístupu*. Není samozřejmě možné usuzovat na vyučovací styl učitele ze dvou rozhovorů a náslechu na hodině. Jedná se spíše o určitou tendenci, kterou učitel ve výuce daného tématu projevuje.

Obecné přístupy a metody učitelů k výuce a žákům

Myslím si, že výchovné metody popsané v oddíle 2.1.2 je možné dát do souvislosti s obecnými přístupy učitelů popsanými v oddíle 4.4.1.

Učitelé v rozhovorech kladli důraz v první řadě na rodinu a domácí přípravu žáků, na jejich píli a svědomitost (např. RV 5). Dá se říci, že je to poznámka týkající se domácího zázemí a klimatu, které učitel nemůže ze školy ovlivnit. Co však učitel může ovlivnit, je přístup k žákovi ve škole. Učitelé popisují své individuální přístupy k žákům jako hledání cesty k žákovi (RV 39), resp. nutnost práce na vztahu, slušnosti, řádu a pracovitosti (RV 37 – 39) a snaží se pracovat s žáky trpělivě pravidelně a neúnavně (SB 11,13,16). V tomto smyslu se vyjadřují i zbývající vyučující.

Jestliže tyto výpovědi obecně popíšeme s pomocí modelu devíti polí (Čáp, Mareš, 2001, s. 306), tak řekneme, že jejich výchova není přísná, ale laskavá se snahou o vzájemné porozumění a přiměřené řízení. Tedy v dimenzích řízení a emočního vztahu se jedná o řízení silné či střední a emočně kladné či extrémně kladné, jedná se tedy

o demokratický styl vedení. Je však nutno mít na paměti, že tak usuzujeme z toho, co o sobě učitelé sami řekli.

Kritická místa a typy chyb v řešení lineárních rovnic

Je zřejmé, že učitelé některé oblasti jako obtížné neoznačí, ale začnou se jimi zabývat až ve chvíli, kdy v nich žáci nadměrně chybují. Výroky učitelů o kritických místech a chybách žáků v celku lineární rovnice se dělí na kritická místa a chyby v metodě řešení rovnice a v neznalosti výpočtů z jiných matematických celků. Kritická místa jsou podrobně rozebrána v oddílech 2.3 a 4.4.5 a typy chyb v oddílech 2.3.3 a 4.4.5. V posledně jmenovaném oddíle jsou chyby z žákovského řešení porovnány s teoretickými kategoriemi R. Halla (2002), proto se k nim již vracet nebudu.

Čeho bych si ráda všimla a vyložila svůj pohled, jsou Hallovy kategorie chyb. V jeho práci je několik věcí, které stojí za komentář. R. Hall ve své studii řeší pouze výsledný zápis žákovského řešení rovnice, nezamýšlí se nad procesem vzniku, resp. metodou žákova řešení, proto se jeho kategorie zdají na první pohled velmi nepřehledné. Zkusila jsem jeho kategorie rozčlenit do skupin podle předpokládané metody vzniku, kterou on zanedbává, nebo podle jiných nespecifických vlivů. Dospěla jsem ke třem následujícím skupinám chyb plynoucích zřejmě z nesprávného používání 1) metody váhy, 2) metody měnič a 3) jiné ne nutně matematické oblasti.

Chyby plynoucí z nesprávného používání metody váhy jsou z Hallovy kategorizace dvě: *Redistribution error (chyba přerozdělení)* a *Misuse of additive inverse error (chyby z nesprávného používání součtové inverze)*, kdy žáci pracují s oběma stranami rovnice zároveň, ale svými chybnými kroky poruší rovnost. Díky Hallovým konkrétním příkladům je zřejmé, že žák pracuje metodou váhy, protože se jednotlivé úpravy objevují na obou stranách rovnice a sám Hall říká, že žák nedodržuje pravidla při úpravě obou stran rovnice, což je podstatný důkaz pro zařazení kategorií do výše jmenované skupiny.

Druhou skupinou jsou chyby plynoucí z nesprávného používání metody měnič. Do této skupiny zařazují kategorie: *Switching addends error (chyba znaménka při přehození sčítanců mezi stranami rovnice)*, *Transposing error (transpoziční chyba)* a *Division error (chyby v dělení)*. Hall se u jednotlivých kategorií zmiňuje, že se jedná o chyby plynoucí z nesprávné práce, resp. z nesprávného přenosu čísla, proměnné nebo výrazu mezi stranami rovnice.

Třetí skupinou jsou chyby plynoucí z nesprávného používání jiné ne nutně matematické oblasti. Myslím tím nesprávné použití jiných oblastí matematiky a přílišné generalizování matematických postupů nebo jiné nematematické vlivy. V prvním případě se jedná např. o práci se zlomky, celými čísly apod. Slovy Hallových kategorií – *Number line error (chyba číselné osy)*, *Other inverse error (jiné chyby plynoucí z nesprávné inverze operací)*. Druhý případ naznačuje např. neznalost struktury – *Absence of structure error (chyby plynoucí z nepřítomnosti vazeb)*, *Exhaustion error (chyby z vyčerpání)* a *Deletion error (chyba vymazání/zrušení)* ukazující na nepochopení potřebných matematických vazeb.

Modely a metody řešení lineárních rovnic

Modely a metody řešení lineárních rovnic byly podrobně popsány v předchozí kapitole. Zde uvedu již jen několik postřehů.

I v rozboru rozhovorů je možné vidět, že někteří učitelé se snaží urychlit poznávací proces žáků v oblasti lineárních rovnic. Je možné se setkat s názorem učitelů, že etapa získávání vhledu do řešení rovnic není podstatná a že je nutno velmi rychle přejít k procvičování až drilování řešení rovnic těmi „správnými“ metodami. To se objevuje např. u učitelů BD a CK v tom, kdy učitel chce žáka ušetřit náročné cesty hledání a objevování, a tak žákům oznámí, jak si řešení co nejlépe zkrátit. Vystává však nebezpečí, že se pro žáky řešení rovnic stane směsicí pravidel, která se musí učit nazpaměť a která brzy zapomenou.

Jiní učitelé na druhou stranu vyčkávají (např. AC 3,7,11), až žáci s novou metodou přijdou. Z učitelovy výpovědi je zřejmé, že žáci nejprve získávají zkušenosti s použitím metody váhy – tedy stále pracují s odebíráním, přidáváním zároveň na obou stranách a při dostatečném množství zkušeností, mohlo by se říci, separovaných modelů, jsou schopni postupy řešení zobecnit, a dospět tak k té metodě řešení, která je na úrovni abstraktního poznání.

5.3 Omezení výzkumu a vize do budoucna

Je zřejmé, že výsledky analýz rozhovorů je závislý nejen na mém přístupu, ale také na tom, s kým jsem rozhovory dělala. Kdyby se výzkumu zúčastnili jiní učitelé, výsledky by se jistě v některých aspektech lišily, jsem ale přesvědčená o tom, že základ

výpovědí by byl stejný. Uvědomuji si též, že pět rozhovorů není mnoho. Jedná se však o kvalitativní výzkum a domnívám se, že množství poznatků, které jsem analýzou těchto pěti rozhovorů získala, je dostatečné. Další rozhovory by porozumění tématu prohloubily, ovšem ty již jsou nad rámec mé práce. Je však jisté, že další rozhovory proběhnou v rámci zmíněného projektu GAČR.

Téma lineárních rovnic mě zajímá a i nadále bych se mu chtěla věnovat ve své praxi nejméně na úrovni shromažďování nových poznatků o žákovských postupech řešení lineárních rovnic.

Dále by bylo zajímavé sestavit, podle zjištěných výsledků, soubor úloh pro téma lineární rovnice, které by podporovaly správný rozvoj poznávacího procesu tak, aby žák nebyl nucen se při řešení rovnic učit nazpaměť pravidla a mechanicky postup. Takový soubor úloh by se následně vyzkoušel v praxi.

Bylo by také zajímavé provést rozbor tématu v učebnicích středních škol s cílem sledovat posun v chápání např. modelů a metod řešení.

Konečně bylo by možné (možná i žádoucí) navázat na tuto práci, dále ji rozšířit a analyzovat větší počet rozhovorů. Myslím, že v rámci již zmíněného projektu GAČR P407/11/1740 bude dostatek rozhovorů pro případnou další analýzu.

Závěrem si dovoluji osobní poznámku. Při zpracování diplomové práce jsem se dozvěděla řadu zajímavých poznatků týkajících se tématu lineární rovnice, a jak k němu učitelé přistupují. Naučila jsem se základům kvalitativní analýzy dat, a to prostřednictvím programu Atlas.ti. To pro mě bude v budoucnu užitečné. V neposlední řadě jsem získala i další poznatky z oblasti pedagogiky a psychologie.

6 Literatura a zdroje

- BAROODY, A. J., GINSBURG, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the equals sign. *Elementary School Journal*, 84 (2), 199-212.
- BENDL, Stanislav; KUCHARSKÁ, Anna ed.al. *Kapitoly ze školní pedagogiky a školní psychologie: skripta pro studenty vykonávající pedagogickou praxi*. Univerzita Karlova v Praze: Pedagogická fakulta, 2008.
- BOOTH, J. L., KOEDINGER, K. R. (2008). Key misconceptions in algebraic problem solving. In Love, B. C., McRae, K., Sloutsky, V. M. (Eds.). *Proceedings of the 30th Annual Cognitive Science Society*, p. 571-576. Austin, TX: Cognitive Science Society.
- BOOTH, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford, A. P. Schulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* p. 20-32. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- ČÁP, Jan; MAREŠ, Jiří. *Psychologie pro učitele*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2001, 655 s. ISBN 80-717-8463-X.
- DELVENTHAL, Katka Maria; KISSNER, Alfred; KULICK, Malte. *Kompendium matematiky*. Praha: Universum, 2004, 714 s. ISBN 80-242-1227-7.
- FALKNER, K. P., LEVI, L., CARPENTER, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232-236.
- HALL, R. D. G. (2002) An Analysis of Errors Made in the Solution of Simple Linear Equations. *Philosophy of Mathematics Education Journal* 15, Dostupné z: http://people.exeter.ac.uk/PERnest/pome15/hall_errors.pdf
- HEJNÝ, Milan. Mechanizmus poznávacího procesu. In Editor Milan Hejný, Jarmila Novotná, Naďa Stehlíková. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, **2004**, s. 23–42. ISBN 80-7290-189-3.
- HEJNÝ, Milan, LITTLER, Graham. Transmisivní a konstruktivistický přístup k vyučování. In Stehlíková, Naďa (ed.) *Náměty na podnětné vyučování v matematice*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, **2007**, s. 11-23. ISBN 978-80-7290-342-9.

HEJNÝ, Milan a kol. *Teória vyučovania matematiky 2*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava. 1989.

HEJNÝ, Milan; KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2. aktual. vyd. Praha: Portál, **2009**, **240s**. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, Milan, KUŘINA, František. Konstruktivní přístupy ve vyučování matematice. *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*. 1998, roč. 7., č. 7., 385–395. ISSN 1210-1761.

KALHOUS, Zdeněk; OBST, Otto. *Školní didaktika*. 2. vyd. Praha: Portál, 2009, 447 s. ISBN 978-80-7367-571-4.

KNUTH. E. J.; STEPHENS, A. C. (2006) Does understanding the Equal Sign Matter? *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (4), p. 297-312. Dostupné z: <http://www.nctm.org/publications/article>

KOMENSKÝ, Jan Amos. *Didaktika analytická*. Vyd. 1. Editor Růžena Váňová. Brno: Tvořivá škola, 2004, 69 s. ISBN 80-903-3971-9.

KOUDELKOVÁ, Věra. *Rozvoj porozumění rovnicím na 1. stupni ZŠ*. Diplomová práce. Pedagogická fakulta, KMDM. 2011. Vedoucí: RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.; s. 120 (135 s přílohami)

ODVÁRKO, Oldřich. Zkoušky při řešení rovnic a nerovnic. *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*. 1994, roč. 4., s. 145–152. ISSN 1210-1761.

PIRIE, S. E. B., LYNDON, M. The Equation, the Whole equation, and Nothing but the Equation! One Approach to the Teaching of Linear Equations. *Educational Studies in Mathematics*, 34 (2) p. 159-81 Nov 1997.

PRŮCHA, Jan; WALTEROVÁ, Eliška; MAREŠ, Jiří. *Pedagogický slovník*. 4., aktual. vyd. Praha: Portál, 2003, 322 s. ISBN 80-717-8772-8.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha: VÚP, 2005

RITTLE-JOHNSON, B., SIEGLER, R. S., ALIBALI, M. W. (2001) Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative proces. *Journal of Educational Psychology*, 93 (2), 346-362.

SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika*. Vyd. 1. Praha: ISV nakladatelství, 1999, 292 s. ISBN 80-858-6633-1.

STAR, J. R., NEWTON, K. J. (2009) The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 41, 557-567.

STEHLÍKOVÁ, Nad'a. Charakteristika kultury vyučování matematice. In HOŠPESOVÁ, Alena, STEHLÍKOVÁ, Nad'a a TICHÁ, Marie. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 13-48. ISBN: 978-80-7394-052-2.

STRAUSS, Anselm. CORBINOVÁ, Juliet. *Základy kvalitativního výzkumu: Postupy a techniky metody zakotvené teorie* Přel. S. Ježek. 1.vyd. Boskovice: Albert, 1999, 196 s. ISBN 80-858-3460-X.

Seznam použitých učebnic

BINTEROVÁ Helena; FUCHS, Eduard; TLUSTÝ, Pavel. *Matematika 8: aritmetika: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. 127 s. ISBN 978-80-7238-684-0.

COUFALOVÁ, Jana a kol. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 2. upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007, 192 s. ISBN 978-80-7168-994-2.

HERMAN, Jiří a kol. *Matematika: rovnice a nerovnice: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií (tercie)*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 121 s. ISBN 80-719-6014-4.

CHARVÁT, Jura, ZHOUF, Jaroslav, BOČEK, Leo. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 223 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-719-6154-X.

KOMAN, Milan, TICHÁ, Marie, KUŘINA, František, ČERNEK, Pavol. *Matematika pro 8. ročník základní školy*, 2. díl. 1. vyd. Praha: Matematický ústav AV, 2002, 84 s. ISBN 80-85823-47-0.

KUBÁT, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2004, 419 s. ISBN 80-719-6298-8.

NOVOTNÁ, Jarmila, KUBÍNOVÁ, Marie, SÝKORA, Václav. *Matematika s Betkou 3: pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Scientia, 1998, 205 s. ISBN 80-718-3148-4.

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří. *Matematika pro 8. ročník základní školy: 2. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 71 s. ISBN 80-719-6167-1.

POLÁK, Josef. *Středoškolská matematika v úlohách I*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 344 s. ISBN 80-719-6021-7.

ROSECKÁ, Zdena a kol. *Algebra: učebnice pro 8. ročník*. Brno: Nová škola, 2005, 111 s. ISBN 80-856-0792-1.

ŠAROUNOVÁ, Alena a kol. *Matematika 7, II. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 212 s. ISBN 80-7196-106-X.

ŠAROUNOVÁ, Alena a kol. *Matematika 8, II. díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 143 s. ISBN 80-719-6127-2.

TREJBAL, Josef. *Matematika pro 8. ročník základní školy, 2. díl*. 2. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2000, 86 s. ISBN 80-723-5043-9.

Elektronické zdroje

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_201_g_4_t_2.html?open=instructions&from=topic_t_2.html.

KRYNICKÝ, Martin. [online]. 2010 [cit. 2012-04-12]. Realistická pedagogika: Když (se) chcete učit... *Funkce a rovnice*. Dostupné z WWW: <<http://www.realisticky.cz>>.

Citace 2.0 : vše o citování literatury a dokumentů [online]. c2004 [cit. 2011-03-01]. Generátor citací. Dostupné z WWW: <www.citace.com>.

7 Přílohy

Příloha 1: Rozhovor s učitelem AC 13. 2. a následný rozhovor 28. 3.	I
Příloha 2: Rozhovor s učitelem BD 13. 2., následný rozhovor 28. 3. a následně hodiny 13. 2.	V
Příloha 3: Rozhovor s učitelem SB 1. 3. a následný rozhovor 29. 3.	XIV
Příloha 4: Rozhovor s učitelem RV 1. 3. a následný rozhovor 29. 3.	XIX
Příloha 5: Rozhovor s učitelkou CK 13. 2. a následný rozhovor 28. 3. a následně hodiny 14. 2.	XXVII
Příloha 6: Seznam obrázků a tabulek	XXXIV

Příloha 1: Rozhovor s učitelem AC 13. 2. a následný rozhovor 28. 3.

- 1 Učitel AC
- 2 Učitel: Praxi mám 26 let. Nicméně matematiku učím tady od té doby, co jsem nastoupil, od 1996. A 2 roky jsem ji předtím učil na učňovce. Což je zhruba 17 let.
- 3 ...
- 4 T: Rovnice.
- 5 U: Tam problém není, pokud jim dovolíme přehazovat a měnit znaménka. Takové to zažité přičítat stejný výraz nebo odčítat stejný výraz k oběma stranám.
- 6 T: To jim nejde?
- 7 U: Jde to, ale děti mají raději a zvládají to, když se to učí: přehodím zleva napravo a změním znaménko.
- 8 T: To jim jde snáz, než když si to přičtou k oběma stranám?
- 9 U: Já se domnívám, že ano.
- 10 T: Když tady v učebnici máme, že přičítám a dělím celou rovnici (za lomítko si píšu +, :, ...), tak to je problém?
- 11 U: Ne, v tom problém není. To bych řekl, že rovnice zase zvládají, to problém není. Ale že mají raději ten postup, který někdo i nerad vidí. Např. když to mají rodiče i prarodiče nějak zažitý a když je to tak naučí, no tak co dělat. Musí to dokázat vysvětlit proč, ale mají to raději.
- 12 T: Když rovnice začínáte, tak jim ukážete
- 13 U: Když to začínám učit, tak přidáváme a ubíráme na obou stranách jako na vahách.
- 14 T: Používáte ještě jiný model než model vah?
- 15 U: Abych se přiznal, tak si teď nevzpomínám, ale na těch vahách, miskách to hezky vidí. Já úmyslně o tomto způsobu přehazovat, přihazovat zleva vpravo a obráceně nikdy nehovořím, a pak když s tím někdo přijde, tak si to ukážeme, vysvětlíme anebo jim to ukážu až třeba na závěr. Oni se s tím můžou setkat, tak aby si s tím věděli poradit.
- 16 T: Tedy to děláte stejným stylem, jak to je tady v učebnici a když s tím někdo přijde, tak to vysvětlíte.
- 17 U: I když s tím nikdo nepříjde, tak jim to ukážu až na závěr, že existuje i tento způsob, který někdo používá. Ono s tím většinou někdo přijde. „Proč se to pane učiteli, neučíme takhle?“ (smích)
- 18 ...

19 Následný rozhovor

- 20 T: Dalším tématem byly rovnice. My jsme mluvili o modelu vah. Já bych se Vás ráda zeptala, jak konkrétně ho používáte. Když zavádíte rovnice a máte nějakou první hodinu, tak jakým způsobem s tím pracujete.
- 21 U: Na těch vahách.
- 22 T: Jak?
- 23 U: Aby si to představili, aby to bylo vyrovnané (ukazuje rukama polohu misek jako na rovnoramenných vahách)
- 24 T: Představí si to? Nebo tam máme ty váhy jako model v hodině?
- 25 U: Ne, ty váhy jako nemám přímo v hodině. Ale spíše se maluje.
- 26 T: Jenom na tabuli?
- 27 U: Dneska už máme IT, tak tam se taky už něco využije.
- 28 T: Jaký mají výstup děti v sešitě?
- 29 U: Jako v sešitě?
- 30 T: Ano.
- 31 U: Tak to se dělá většinou na úplně ex-jednoduchých příkladech.
- 32 T: Oni si to také malují, nebo se jenom dívají na tu tabuli?
- 33 U: Oni si můžou do sešitu, je-li to k tématu, tak si můžou malovat cokoliv.
- 34 T: Když jsme konkrétně u rovnic u modelu vah
- 35 U: Jako samotné váhy? To ne, to po nich nechci.
- 36 T: Takže to máte jenom na té tabuli?
- 37 U: ano, nebo jim to promítneme. Dneska už je těch programů hodně.
- 38 T: Tedy, potom jedete na nějaké lehké příklady?
- 39 U: Ono se to nedělá hned na číslicích, ale dělá se to na předmětech, ne jenom na číslech.
- 40 T: Když jim to ukazujete na IT...
- 41 U: Já jsem to s těma malejma ještě nedělal na IT.
- 42 T: ...Ale když jste to dělal v 8.r. před dvěma lety, ale jakým způsobem jste to dělal? Mě rovnice zajímají, proto se na ně tolik ptám.
- 43 U: Teď Ti přesně neřeknu odkaz, ale bylo to sebrané z internetu? Promítnuté.
- 44 T: Nějaký applet?
- 45 U: Ne, to bylo... možná bych to našel doma... měla to nějaká pedagogická fakulta, ale vaše hradecká to nebyla
- 46 T: a pražská?

- 47 U: ne to taky ne... nejsem si jistý, ale možná ty byly Budějovice, ale to si skutečně nejsem jistý. Tam měli klasický kupecký váhy, jak tam něco naskakuje, něco odskakuje. To bylo moc pěkné.
- 48 T: Jakou činnost dělaly děti?
- 49 U: Měli jsme tam takové kostičky, co mám támhle na okně (klasické cca 6x6x6cm).
- 50 T: To měli na lavici? Jak s tím pracovali?
- 51 U: Oni si něco postavili. Jeden postavil a druhý posoudil, jestli je to ze stejného počtu kostek.
- 52 T: Výborně, to jsou důležité informace. Vy si myslíte, že by mě toto nezajímalo, ale právě toto je pro mě důležité.
- 53 U: Jo? (smích) No, člověk zkoušel různé věci, něco se osvědčilo, něco se neosvědčilo, tak od toho odejde a musí zkusit něco jiného.
- 54 T: Napadá vás ještě něco k rovnicím, co se Vám osvědčilo?
- 55 U: Víš co, to si člověk hned všechno nevybaví. Co jsme měli ještě k rovnicím? ...Vždycky to se pobavím, ale v dobrém, když žák přijde s něčím, co ho naučil dědeček nebo babička - oni (prarodiče) většinou mají děti odpoledne na starosti. Já to nezavrhnu, ale z pohledu ostatních dětí to je něco archaického, že ho to naučil dědeček nebo babička. Mě toto baví. My se k tomu vrátíme a mnohokrát tyto archaické věci mají význam v našem počítání.
- 56 T: Máte na mysli nějaký konkrétní příklad?
- 57 U: Např. u rovnic. Metodika nám říká: přičítat, odčítat, závorky, za lomenou čarou atd. Tady přišel kluk s tím, proč to nemůže přehazovat (myslí tím převod př. čísla z jedné strany rovnice na druhou se změnou znaménka). Já jim to vždycky taky ukážu, ale až na závěr, když se s tím někde setkají, tak aby je to nepřekvapilo. Předběhl mě, řekl jsem: my bychom se k tomu dostali, ale když už jsi s tím přišel, tak si to řekneme.
- 58 T: Když se potom dostanete v rovnicích k těžším úpravám rovnic, tak poznáte na dětech, že to chápou?
- 59 U: Při prvním výkladu?
- 60 T: Potom i postupně.
- 61 U: Potom i ano, když to vidím v sešitech a v DÚ, tak to se potom pozná, ale když bych vyložil látku, tak samozřejmě na většině to jde poznat, ale abych to poznal na všech dětech, to určitě ne hned.
- 62 T: Když už dojde k tomu, že to chápe čím dál více žáků, tak jak se projevují?

- 63 U: U mě vědí, že mohou říkat k tématu. Nebo když vidím, že se někdo delší dobu nehlásí, tak ho vyzvu. Na základě zpětné vazby. V ten moment. Nevím, jak jinak bych si to ověřil. Potom déle už ano, ale v ten moment jediné zpětnou okamžitou vazbou.
- 64 ...
- 65 T: Kdybychom teď měli vyjmenovat nějaké základní znalosti, tak jaké by to podle Vás byly?
- 66 U: Obávám se, že na něco zapomenou. Samozřejmě, že základní početní operace. Potom jsem bohužel, ale nevím, jestli bohužel, jsem přesvědčen, že v matematice, ale i v jiných předmětech, že něco než drilem naučit... že se něco musí naučit drilem, např. násobilku, vyjmenovaná slova apod. Takové jak někdo šmahem zavrhuje to, že se to dítě nějak naučí. Např. teď mám v 6. r. prvočísla a chci, aby je do 30 dokázali vyjmenovat. Oni si je zafixují a potom když vidí to číslo rozložené na součin, tak si okamžitě v duchu promítne naučenou řadu a řekne si: dobrý mám to, a může od toho jít. Nemusí dobu přemýšlet nad číslem, jestli se ještě dá rozložit nebo ne. Já bych to všechno taky hned nezavrhoval.
- 67 U: Potom to jsou takové rovnice, zlomky, procenta, jednoduché lomené výrazy, úpravy výrazů, jednoduché slovní úlohy, určitě jsem na něco zapomněl. Z 9. r.? Tu bych zase trochu více přitáhl, tak aby ta změna z přechodu na SŠ nebyla tak veliká, ale do 8. r. bych to nechal volnější. Někdy se mi zdá, že se na ty děti toho valí moc. Třeba se u něčeho ani nemůžeme zastavit, člověk kouká do plánu, co ho čeká. Potom se to nastavuje doučováním apod.

Příloha 2: Rozhovor s učitelem BD 13. 2. a následný rozhovor 28. 3.

- 1 Učitel BD
- 2 Tazatelka: Jak dlouho už učíš matematiku?
- 3 Učitel: Asi 9 – 10 let. Bude to 9 let.
- 4 T: Prosím, mohl bys zhodnotit matematickou úroveň dětí a kurikulum (plány, učivo) tehdy, když jsi nastupoval, a teď?
- 5 U: Úroveň byla vyšší, už za 9 let to vidím, že byla vyšší. Dnes se prakticky dostanou všude, když člověk vidí přijímačky. Není na ně tlak. Jinak jedeme podle stejných knížek, prakticky se nároky nezměnily, nebo osnovy. Plány máme udělané podle těchto knížek, jinak do těch knížek většinou ještě něco kopíruju.
- 6 U: Rovnice taky dělám jinak. V knížkách jsem to neviděl. Např. $-18x = 36$, tak jim řeknu $36 : (-18)$. Je to jedna z možností, které jim ukazují. Ať si to klidně napíšu a potom teprve krátí, protože mě docházelo k tomu, že mi to přehazovali. (ŘÍKÁM:) Když to děláš, tak si napiš lomeno a potom dál pracuj se zlomkem. Zaokrouhlování celkem jde. Násobení. Dělení je horší.
- 7 U: Jednociferným číslem to jde, ale když přijde dvojciferné,... Proto je člověk učí krátit. Např. mám vysoké číslo Nejprve jim říkám, aby si to zkrátili. Potom vydělí až to poslední.
- 8 ...
- 9 U: Rovnice. Vcelku dobré, i když bývalo to lepší.
- 10 T: Jak rovnice zavádíte?
- 11 U: Váhy. Dřív jsem je používal. Teď první co udělám, zavedu, že nalevo bude neznámá, nalevo si naházím všechny neznámé, napravo čísla. Říkám, že dělají doma v pokoji pořádek. Přecházíš přes rovná se (rovnítko), tak měníš znaménko. Ty váhy jsem jim taky snad řekl, ale hlavní je, že děláš doma pořádek – neznámá nalevo, číslo napravo, přecházím přes rovnítko, měním znaménko.
- 12 U: Stejně, rychlejší si počítají, slabší mi chodí k tabuli, tak to mám zařízené. Proč by mi tam chodil rychlejší, ten ať počítá sám. Spíš ať tam jde slabší a z nich to člověk páčí a tahá.
- 13 T: Používáš i tento zápis, že si za lomítku píšeš to, co převádí?
- 14 U: Říkám: „Pokud Ti to pomůže, tak si to piš, ale jinak si s tím neotravuj život.“ Když jim to ukazuju, tak to tam třeba napíšu. Dál jim říkám, proč bys to tam psal, když to umíš, víš, o co se jedná, tak proč to tam psát. Zezačátku to ano, aby to viděli.

- 15 Tento postup je u těch jednodušších rovnic. U těch složitějších nejprve odstraníš zlomky, pak závorky, potom se teprve dostaneš do stavu, který jsme si říkali. Potom jsou i problémy, tady jich je jen pár jednoduchých, ale objeví se, absolutní hodnota a kvadratický člen. Tam mi zapomínají číslo opačné, druhý kořen. Napíší např. 4, ale už zapomenou na -4 . To moc nepíší. U zkoušky nepíšu do závorky výsledek (pro který se zkouška dělá) a ani nepíšu $L=P$. Jednoduchost, podle mě to je zbytečné. Vidiš to? Proč to tam budeš psát. Jednoduchost.
- 16 T: Chápou, že když mi L a P vyjdou stejně, že výsledek, který mi vyšel je kořenem rovnice?
- 17 U: Ano, to chápou. Vždycky si to i řekneme.
- 18 U: Rovnice a slovní úlohy. To mám také stažené. Jsou tu zbytečně složité příklady. Podívej, nezdá se Ti ten první příklad zbytečně složitý/těžký? Přijde mi, že ano. Zdá se mi, že je tu skákání z jednoho do druhého. Hned pohybovka, na práci,... Mám jich tam např. 10 k jednomu. Dělam to jedine přes tabulky, jinak jim to ani neukazuju. Plnění bazény – to dělám taky přes tabulku, ne jak je to tady, to se mně vůbec nelíbí. Všechno tabulkami. Potom směsi také přes tabulku (i malují drobné obrázky), mícháš toto a toto a potom máš to, co Ti vznikne. Myslím, že to je jednoduché a přehledné, tady (v učebnici) se mi to nelíbí.
- 19 **Následný rozhovor**
- 20 T: Ty jsi říkal, že jsi dříve pro rovnice používal model vah, ale dnes už ...
- 21 U: Dneska už to jenom přesouvám. Ty váhy jsou dobrý akorát, když tam je kvadratický člen. Např. Když tam je x^2 tak to vezmete pryč. (říká studentům – v příkladech, kde to používají, se většinou mocniny neznámé odečtou) Je to jednodušší a toto se mi například líbí na e-matematika nebo ZŠ Dobřichovice. Tam mají pěkně udělané pracovní listy – mají tam 10 rovnic od jednodušších po složitější a pěkně podle témat, roznásobuješ závorky, řešíš zlomky atd.
- 22 T: Jsou tam i jiný kapitoly? (na jmenovaných stránkách)
- 23 U: Je toho tam víc, ale mně se tam líbily rovnice. Je to na e-matematika a ZŠ Dobřichovice, nebo nějak tak, když to hledám. Tento styl se mi líbí. Teď (v situaci v jaké se učitel nachází) nemá cenu jet podle učebnice a nekomplikovat si život. Něco to chce vybrat. (Jak bylo popsáno, pro práci se slabými žáky, potřebuje mít příklady, ve kterých by měli šanci uspět.)
- 24 T: Když začínáte rovnice v první hodině, tak jak to probíhá?
- 25 U: Děláme ty jednoduchý, opravdu jednoduchý příklady.

- 26 T: Tedy ukazuješ jim nějak ten model (váhy). Přejde první hodina rovnice, jakým způsobem...
- 27 U: (Uč. píše na papír) Jak bychom to začali. ($x + 3 = 7$) Už jenom přehazuju na druhou stranu. (naznačuje převedení trojky na pravou stranu)
- 28 T: Ale v učebnici jsou ty váhy, ne?
- 29 U: Jsou.
- 30 T: Tak si je ukazujete? Nějak to komentuješ?
- 31 U: Někdy jako řeknu jim to, ale hlavní co, přehodit, jak jdeš přes rovnítko, změníš znaménko.
- 32 T: Chápu tady ten (právě vyličený) postup?
- 33 U: Většina ano, ale víš, že se najdou vždycky někteří, kteří to nechápou. Zkrátka „měnič“ (ukazuje na rovnítko uvedené rovnice), ono to je také v učebnici, je tam taková krabice, kde se mění znaménko atd. No, třeba se k tomu vrátím, že zase budou váhy.
- 34 T: Jak poznáš, že chápu co tady v tomto schématu (práce s měničem) píšeš?
- 35 U: Jsou, jak jsem Ti říkal, např. teď v 8.r. (jmenuje žáky), oni to 10krát přehodí a z toho jednou nezmění znaménko. Potom je všechno špatně.
- 36 T: V čem vidíš problém, když tuto chybu udělají?
- 37 U: Nepozornost, hlavně nepozornost, nemyslí na to. Myslím, když tady bude př. (píše novou rovnici $2x+7+3x=6+3x$), i kdyby to bylo rozsáhlejší, tak jim řeknu, aby si to na té straně počítali a teprve potom přehazuj. I když to mnozí přehazují hned. To je jednodušší, u složitějších to chce dát do celku...
- 38 T: Mě jde o to, jestli chápu ten princip postupu přehazování.
- 39 U: Mechanicky. Mechanicky, je to jednoduchost, přehодиš a je hotovo.
- 40 T: tedy dělají to mechanicky?
- 41 U: Toto chci mechanicky.
- 42 T: Tedy, nějaké hlubší pochopení v práci s rovnicí nehledáte?
- 43 U: Teď ne, předtím, když jsme používali ty váhy tak ano. Třeba se k nim vrátím, to neříkám, ale teď ne.
- 44 T: Dobře.
- 45 T: Když se vrátím k hodině, kterou jsem viděla, tak se tam začínala hodina prací se zlomkem? Ty jsi teď říkal, že to děláte mechanicky (ekvivalentní úpravy rovnic). Nestane se potom, že nechápou podstatu úkonů, který dělají?
- 46 Úryvek z hodiny: (Přesné citace jsou označeny uvozovkami. Je tím ukázána autenticita učitelova výkladu.)
- 47 Rovnice se zlomky:

- 48 Př.1.: $(8x/3 = 5x/2 - 4)$
- 49 U komentuje: První co v té rovnici udělám je, že odstraním zlomek. To je první věc. Je takový nesympatický. Jak? (pauza)“
- 50 Ž slabě: „Společný jmenovatel?“
- 51 U: „Podívám se do jmenovatele, je tam 3 a 2 (barevně označí). Hledám nejmenší společný násobek. 6. Budu násobit šestkou. V učebnici to je trochu více rozebrané, ale nebudu vám komplikovat hlavu. Postupuj přesně podle tohoto postupu. Pozor. Paradoxně. Rovnici si rozdělím na části. Plus, mínus a rovnítko mi to dělí na části. (jednotlivé části v rovnici podtrhává) Toto je jedna část, toto druhá, toto třetí. Všechny tyto části budu násobit šesti. To se budete divit, jak budu násobit. Šest děleno třemi jsou dvě. Dva krát 8 je 16. Stejně budu pokračovat dále. Podívejte se případně do učebnice. Dále $6:2 = 3$; $3 \cdot 5 = 15$ a nakonec $6 \cdot (-4) = -24$. Používejte tento postup. Zkoušku opět do prvního řádku, ne do druhého, ale do prvního.“
- 52 Nyní máme rovnici: $16x = 15x - 24$
- 53 Ž jde k tabuli dopočítat. (Dělá chyby, ale nevidím je, stíní mi tělem. Po U komentáři chybu maže a opravuje. Byla to chyba v převodu neznámé na jednu stranu.)
- 54 U bere k tabuli slabší žáky, komentuje a případně opravuje každá chybný krok. (Komentář: „Ty asi doma moc neuklízíš.“ Podle rozhovoru to znamená: Neznámé na jednu stranu, čísla na druhou. „Zkoušku. Vždycky když můžeš krátit, tak krát. Pozor na znaménko – jako první. Zkoušku do prvního řádku, v druhém jsi mohl udělat chybu!“
- 55
- 56 T: Chápu podstatu úkonů, co tam provádíte?
- 57 U: Něco se mechanicky naučit musí.
- 58 T: Ty's řekl, že to vynásobíte 6. Vědí proč to vynásobit šesti? Proč to nevynásobit např. trojkou, která tam také je.
- 59 U: Jasně, snažit se najít nejmenší společný násobek. Ano, pokud to vynásobíš 12, tak ano, můžeš to tak dělat, ale dřeš se. Vyjde Ti to, ale dřeš se. Nejmenší společný násobek, zakroužkovat si barevně, že to je těchto čísel a už násobíš. Ono řekneš, násobíš a ono dělíš. To je ten kámen úrazu.
- 60 T: No právě, jestli tam nebyl v tomto problém, protože ty řekneš: „násobíme, ale dělíme“.
- 61 U: No, první příklad jim ukážu, že to rozepíšeme: $6 \cdot (8x/3) = 6 \cdot (5x/2) - 6 \cdot 4$.
- 62 T: V té hodině to ale nebylo takto roznásobené.
- 63 U: Nebylo? Je to možné, buď jsme to dělali hodinu před tím, nebo už to vůbec nedělám. Stejně se jim akorát plete hlava. Počítáme mechanicky. Ted' názor můj v této situaci.

- 64 T: V jaké situaci?
- 65 U: Určitě jsem to dělal, že jsem to rozepisoval.
- 66 T: V situaci ve třídě?
- 67 U: Stejně to pochopí málokdo. Mechanicky. Je to jednoduchý udělej to tak. Potom to krásně roznásobíš, potom zkrátíš. (stále pracujeme se stejným příkladem) Většině tím stejně pleteš hlavu. Jednou jim to ukázat a dost. Spíš to ještě rozdělit na části. Rovnítko a plus ti to dělí na části, podtrhni si je a každou z nich musíš vynásobit. To byla nejčastější chyba, že nevynásobili čtyřku.
- 68 T: Jakým způsobem poznáš, že to ten žák ovládá.
- 69 U: Umí to. (smích)
- 70 T: Když už tam nedělá chyby, je jasné, že tomu rozumí, proč tam dělá všechny ty kroky, nebo to má opravdu jen mechanicky nacvičené?
- 71 U: Proč dělá kroky, no, to je potřeba mechanicky naučit. Násobilku taky. Proč $6 \cdot 6 = 36$. Já mu to můžu rozebrat, protože $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$, můžu takto to rozebrat.
- 72 T: Dobře. To je asi všechno.
- 73 U: Proto se mi líbilo těch 8 typů u rovnic.
- 74 T: Jaké typy myslíš?
- 75 U: Teď nevím, jestli jich je 6,7 nebo 8, ale to se mi líbilo.
- 76 T: Teď myslíš ekvivalentní úpravy nebo rovnice?
- 77 U: Nevím, např. úplně jednoduché ($2x-7=6$); $3 \cdot (x+7) + \dots =$, roznásobit (rovnice se závorkami); nebo $(x+6)(x+4)+\dots=$, (rovnice s kvadratickým členem); potom je typ se zlomkem atd.
- 78 T: Tedy přidávání nějakých obtížnějších kroků?
- 79 U: Přesně tak.
- 80 T: Ještě mě napadá, že v té hodině bylo 8 příkladů, ale v každém se objevila nějaká chyba, ...
- 81 U: Nevybírám k tabuli ty, kterým to jde, ale ty, kterým to nejde. V takovém množství (16 Ž ve třídě). Ukážu jeden příklad, chytají se a spíše беру ty, kterým to nejde, z toho to vyplývá?
- 82 T: V následujících hodinách už jim to je třeba jasnější? Protože nejčastější chyby, které se tam objevily byly z násobení té rovnice nejmenším společným.
- 83 U: Například žáci (opět jmenuje 4 slabé žáky) to neumí doted'. Těm zkrátka do písemky dám jednodušší, jinak bych z nich nic nedostal.
- 84 ...

- 85 T: Když látku zavádíš, tak používáš ještě nějaké jiné materiály než jen učebnici?
- 86 U:... Příklady stahuju z internetu. Než bych to tady našel v knížkách, tak to z internetu stáhnou přímo nějaké sborníky, sbírky.
- 87 T: Když jsme na to narazili, tak používáš, kromě těchto učebnic a příkladů, ještě nějaké sbírky (papírové)?
- 88 U: Občas zajdu do kabinetu a něco si najdu, ale spíš z internetu. (www.cihak.webz.cz)
- 89 ...

90 **3. vyučovací hodina (začátek v 10h.) 13. 2. 2012**

- 91 Ročník: 8.A polovina třídy (Organizačně v této třídě mají výuku matematiky rozdělenou na 2 paralelní poloviny. Ve stejnou hodinu vyučují 2 učitelé, každý svou polovinu třídy.)
- 92 Přítomno: 16 Žáků (9ch, 7d)
- 93 Vzhled třídy: okna vlevo, křídová tabule, 3 řady lavic, nástěnné mapky, plakátky nejen s matematickými tématy
- 94 Cíl hodiny: Výchovný – samostatná práce a rozvoj kritického myšlení, diskuze nad správností řešení rovnic
- 95 Výukový – procvičit a upevnit počtářské dovednosti v rovnicích
- 96 Téma: Rovnice, odstranění zlomku z rovnice
- 97 Kompetence: Komunikační, kompetence k řešení problémů (diskuze nad řešeními), sociální (diskuze se spolužáky k tématu)
- 98 Motivace: „Naučíme se odstraňovat zlomky v rovnicích. Budete umět řešit těžší rovnice.“
- 99
- 100 Struktura hodiny (45 min)
- 101 Úvod: Oznámení o průběhu hodiny a procvičování nového tématu
- 102 Opakování:
- 103 Zkoušení: Dvě rovnice na opakování – 1 žák počítá na tabuli; ostatní počítají do sešitu; U (učitel) chodí po třídě a komentuje zápis z tabule i ze sešitů
- 104 $27 - 3x = 30$
- 105 $7(5-2x) = 3$ ($17-2x$)
- 106 U (učitel): nespěchej, počítej pomalu, nebuď zbrklý; chválí žáka, že rovnice vypočítal správně a konečně získal dobrou známku
- 107 U: napomíná jednužačku, ať počítá
- 108 Výklad:

- 109 „Čeká nás poslední jednoduchá věc u rovnic. Musíš se naučit postup.“
- 110 Uč. str. 19 /E (O–K)
- 111 Rovnice se zlomky:
- 112 Př.1.: $(8x/3 = 5x/2 - 4)$
- 113 U komentuje: První co v té rovnici udělám je, že odstraním zlomek. To je první věc. Je takový nesympatický. Jak? (pauza)“
- 114 Ž slabě: „Společný jmenovatel?“
- 115 U: „Podívám se do jmenovatele, je tam 3 a 2 (barevně označí). Hledám nejmenší společný násobek. 6. Budu násobit šestkou. V učebnici to je trochu více rozebrané, ale nebudu vám komplikovat hlavu. Postupuj přesně podle tohoto postupu. Pozor. Paradoxně. Rovnici si rozdělím na části. Plus, mínus a rovnítko mi to dělí na části. (jednotlivé části v rovnici podtrhává) Toto je jedna část, toto druhá, toto třetí. Všechny tyto části budu násobit šesti. To se budete divit, jak budu násobit. Šest děleno třemi jsou dvě. Dva krát 8 je 16. Stejně budu pokračovat dále. Podívejte se případně do učebnice. Dále $6:2 = 3$; $3 \cdot 5 = 15$ a nakonec $6 \cdot (-4) = -24$. Používejte tento postup. Zkoušku opět do prvního řádku, ne do druhého, ale do prvního.“
- 116 Nyní máme rovnici: $16x = 15x - 24$
- 117 Ž jde k tabuli dopočítat. (Dělá chyby, ale nevidím je, stíní mi tělem. Po U komentáři chybu maže a opravuje. Byla to chyba v převodu neznámé na jednu stranu.)
- 118 U bere k tabuli slabší žáky, komentuje a případně opravuje každá chybný krok. (Komentář: „Ty asi doma moc neuklízíš.“ Podle rozhovoru to znamená: Neznámé na jednu stranu, čísla na druhou. „Zkoušku. Vždycky když můžeš krátit, tak krát. Pozor na znaménko – jako první. Zkoušku do prvního řádku, v druhém jsi mohl udělat chybu!“
- 119 Žákyně v (2) lavici vysvětluje své spolužačce postup asi u poloviny příkladů v hodině. Později už zvládá téměř bez pomoci.
- 120 Žákyně se ptá, že něčemu nerozumí. U individuálně vysvětluje, ale stále sleduje i dění na tabuli.
- 121 Žákyně (3) jde na toaletu – přes 10 min je pryč z hodiny.
- 122 Uč. 19 /cv. 8, 9, 10, 11, 12 – plán na hodinu, i pro rychlejší, aby nezaháleli
- 123 Př. 2.: Další Ž u tabule ($1t/8 = -2$) U: „Násobíš, ale paradoxně dělíš $8:8 = 1$. Rovná se. – $2 \cdot 8 = -16$ Opět znaménko. Zase ho píšeš až nakonec. Nejprve vyřeš znaménko!“
- 124 Př. 3.: ($3t/7 = 2$) Ž v prvním kroku špatně vynásobil pravou stranu. Místo 14 píše 12.“

- 125 Př. 4.: $(11t/3 = 0) \rightarrow 11t = 0$ (OK) $\rightarrow t = 11$ (chyba); U: „Máš to dobře? Když 11 lidí má 0 Kč, tak kolik korun má jeden člověk? Když částku 0 Kč rozdělím mezi 11 lidí, tak každý bude mít 11 Kč? ... Ano, zkoušku musíš dělat. Nula je číslo jako každé jiné. Nemůžeš ji diskriminovat.“
- 126 Př. 5.: $(t/4 + 3 = 1)$ – u tabule je velmi slabá Ž (4) a U s ní počítá a komentuje její kroky. Dělí rovnice na 3 části. $(t + 12 = 4 \rightarrow t = 16)$ (chyba)... Po U komentáři si to opraví, ale je vidět, že se jí nelíbí si „uklízet“; problém je i zkouška, kde na L má $-8/4$ a nemůže přijít na to, že to je -2 . Chybu udělala i při jednoduchém sčítání $(-2 + 3 = -1)$; chyba); Učitel demonstruje na reálné situaci. „Máš 2 koruny dluh a V ruce máš tři koruny. Budeš mít stále dluh nebo Ti něco zbude?“
- 127 Ž (3) nedělá vůbec nic. Hledí po třídě a z okna.
- 128 Př. 6.: $(3u/4 - 1 = 7u/4)$ Chyba se objevila hned ve 2. řádku, protože Ž nevynásobil (-1) . Učitel opět opakuje, ať si klidně jednotlivé členy podtrhnou, aby nezapomněli některý vynásobit. Další výpočet i zkouška byly dobře.
- 129 Př. 7.: $(u/6 = 5 - u/4)$ Ž rovnici násobí číslem 2. Učitel se ptá. „Čím budeš násobit?“ Ž: „6:3“. U: „6 a 4. Nejm.spol.násobek je?“ Žáci: „24,12.“ Potom už to dopočítává dobře.
- 130 U: „Dejte na to pozor. Když to dobře roznásobíš, tak máš za to bod. Hlavně nespěchej. Když to uděláš špatně, tak ostatní Ti už je k ničemu.“
- 131 Př. 8.: $(3u/5 - 1/15 = 2u/3)$ Ž chce násobit trojkou. U: „Jak to. Nejm.spol.násobek je přece 15.“ Další chyba je při zkoušce – znaménko. Zvoní, ale U chce příklad (resp. zkoušku) dopočítat.
- 132 Dívka (3): celou hodinu nic nedělala. V sešitě má snad jen jeden příklad. Vůbec si nepsala. Chvilku před zvoněním se ptá na vysvětlení, že tomu nerozumí. Po zvonění jde ke stolku, kde jí U vysvětluje látku z minulé hodiny, co měla špatně v DÚ.
- 133 Použité metody: samostatná práce jednotlivců se společnou kontrolou
- 134 Pomůcky: učebnice, sešit, tabule
- 135 Domácí úkoly: žádné
- 136 Hodnocení žákovy činnosti (diagnostické metody) a atmosféry hodiny
- 137 Žáci pracovali dle pokynů učitele, v případě nepochopení se neváhali zeptat.
- 138 Žáci, kteří chtějí pracovat, tak pracují. Žákyně (3) naprosto nepracovala. Žákyně (4) byly velmi slabé, ale chvílemi se snažili látku pochopit.
- 139 Učitel chválí zkušného žáka za dobrý výkon a za to, že se konečně začal učit.
- 140 V hodině byla běžná pracovní nálada.
- 141 Žáci se nedokáží soustředit na práci celou hodinu a některé žákyně nepracují a svými projevy to dávají najevo.

- 142 Didaktické a jiné poznámky k průběhu hodiny
- 143 Procvičovací hodina.
- 144 Učitel se snaží žákům předložit jasné a jednoduché schéma, podle kterého by měli být schopni vypočítat rovnice se zlomky.
- 145 Myslím, že ne všichni porozuměli, proč mají rovnici násobit nejmenším společným násobkem daných zlomků. Soudím tak z posledních dvou příkladů, kdy vždy rovnici násobili jiným číslem a nechápali, kde mají chybu. Učitel jim řekl, čím to mají násobit, ale důvod tam řečený nebyl.
- 146 Při řešení prvního příkladu U řekl, aby se případně podívali do učebnice, ale ať počítají přesně podle schématu.
- 147 Některé objevující se chyby jsou i z jiných oblastí, ne jen z tématu rovnice (např. práce se znaménky a zápornými čísly, násobilka).

Příloha 3: Rozhovor s učitelem SB 1. 3. a následný rozhovor 29. 3.

- 1 Učitel SB
- 2 Tazatelka: Mohl byste mi prosím na začátek říci, jak dlouho pracujete jako učitel?
- 3 Učitel: Já to mám za pár. Taky jsem působil/študoval tam jako vy na KU. Já jsem končil v r. 1974. Teď mi bylo 61, v podstatě mám už jen 1,5roku. V provozu jsem 40 let.
- 4 T: Celou dobu učíte matematiku?
- 5 U: Mám matematiku a tělocvik.
- 6 T: Celou dobu na základní škole?
- 7 U: Přesně tak. Začínal jsem na nějaké škole na vesnici, jak to tak bývalo, asi 15 let. Potom, že jsem hlinečák, tak jsem přešel sem. Tady jsem přes 20, 25 let.
- 8 T: Když máte takovou dlouhou praxi, mohl byste nějak „zhodnotit“, jak se mění (forma) znalostí dětí v průběhu času, když jste začínal a teď?
- 9 U: Je to v podstatě stejné, jako všude jinde v tom smyslu, že to je dneska už o něčem jiném, bohužel do mínusu, protože...
- 10 T: V čem?
- 11 U: Obecně jiná doba, jiné děti. To znamená lenost, pohodlnost, neplnění si základních povinností, dneska děti nemají žádné povinnosti, žádnou potřebu, mají všechno na talíři. Začíná to tím, že je rodiče vozí do školy, do všeho je strkají, nemají doma ani žádné povinnosti, jak to bývalo, nemají systém a řád a nic je k něčemu nenutí. Samozřejmě až na výjimky. Ty, co mají nějaký sport nebo něco musí pravidelně dělat, tak jsou pochopitelně někde jinde. Ale bohužel hodně dětí se převaluje, povaluje, různě čas utrací. No právě ty počítače jsou nejjednodušší. Počítač má skoro každý.
- 12 T: Máte nějaké metody, kterými se děti mohou aktivizovat?
- 13 U: Dnes, co je snad neúčinnější, je jít po nich trpělivě, pravidelně, neúnavně. Někaké pomůcky a všechno možné, no samozřejmě, ale oni s tím zacházejí stejně. Když jim nabídnete jeden nebo 20 papírů, tak s tím zacházejí stejně. Vykašlou se na to nebo to neřeší. Několik, těch ubývá, se tomu věnují. Ale čím více se jim nabízí, tím je to horší.
- 14 U: Naopak mě potěší, když někdo z dětí pochválí. „Díky tomu, že jsem toto uměla / ovládala, tak na střední škole mám „hawai“.“ Tam to jede, tam se k tomu přidává, a když jsou základy, tak se na tom už jinak staví. Je to nějaké takové složité, no.
- 15 T: Když jste připravovali ŠVP tady pro školu, tak bylo tam pro Vás něco nového, použitelného? Změnilo se něco ve vašem přístupu k dětem a k učivu?

- 16 U: To je jedna z těch věcí. Já jsem právě za celou dobu zažil takových hurá akcí několik a všechny měly stejný výsledek. Ať už to byly kdysi nějaké množiny spojené, jak vidíte v regálech, s různými pomůckami, do kterých se dávaly tisíce. Zase jednak ŠVP, to jsme tu měli ještě staré vedení. Člověk nevěděl v podstatě, o co jde. Potom se to dělalo tak zmetkovitě a nárazově, že můžu říci, že se bez toho obejdu. Vždycky jsem tvrdil to, že sám musím vědět, co chci a jak chci, a potom můžu mít x desek pod paží s nějakým ŠVP nebo s čím a přijdu do třídy a je mi to naprosto k ničemu, protože tam se teprve ukáže co, kdo, jak. Tak jsou třeba paní učitelky, které chodily nebo chodí do třídy s pláčem a mohly by mít troje desky pod každou paží s nějakým vypracovaným ŠVP a je jim to na nic. Dneska totiž v té škole platí především něco jiného. Zkrátka na ty děti být tvrdý, přísný, spravedlivý, důsledný atd. potom je dlouho nic a potom je nějaké ŠVP. Dnes se potýkáte s takovými věcmi, které dříve byly naprosto jasné. Děti nejsou k tomu vybavený - kázeň, slušnost dneska už chybí. Toto všechno musíte řešit, ztrácíte čas s těmito věcmi a pak teprve dojde na učení. Potom je ještě otázka, jak si kdo umí třídu ukáznit a kdo ne, koho berou a koho ne. Kdybych o ŠVP nikdy neslyšel, tak mi to je úplně jedno. Potom Vám nikdo nedá vůbec nic zadarmo. Děti vědí a poznají. Co Vám dovolí, to Vám dovolí. To je takový můj pohled.
- 17 T: Teď bych se Vás zeptala na lineární rovnice, ty mě hodně zajímají. Ony se začínají už na prvním stupni, ale s dalšími úpravami se dělají až v 8.r.
- 18 U: Tam není problém s pochopením. Ty rovnice se jedou tak hodně a tak často, že nějaké ty mechanismy a úpravy oni zvládají. Ale opět to je o počítání.
- 19 Dělají početní chyby.
- 20 Oni si to potom zmechanizují, že neznámou na jednu stranu, zbytek na druhou, že když dávám něco z jedné strany na druhou, že se změní znaménko.
- 21 Samozřejmě, že to někdy neudělají, anebo tam je potom nějaký výpočet např. odstranění nebo upravení zlomku a už tam jsou chyby z hlediska výpočtu a ne z hlediska postupu. Chyby výpočtu ne postupu (zlomky,...)
- 22 To schéma chápou, stejně jako u řešení soustavy rovnic, ať už je to dosazovací nebo sčítací.
- 23 Postup Oni vědí, že z této rovnice mají počítat neznámou, ale udělají tam chybu.
- 24 Čili opět, svým dětem zdůrazňuju, že to chce počítat, počítat a počítat.
- 25 ...
- 26 T: Ještě když se vrátím k rovnicím, tak když jim ukazujete, když odhlédneme od toho, že to neumí matematicky spočítat, tak jak jim ukazujete nebo zavádíte ekvivalentní úpravy?
- 27 U: Dobrá metoda jsou váhy. Rovnoramenné staré váhy.

- 28 Tedy se to vždycky tak jakoby nakreslí. Předtím jim vysvětluju, nebo jsme i používali takové staré miskové váhy, aby je viděli. Teď máme rovnováhu, zobáčky jsou v rovnováze, když přidám tam i tam stejně, tak se to opět rovná. Neznám lepší způsob než váhy.
- 29 Hodnocení zavedení rovnic z učebnice I tady v těch knížkách to tam i mají i schematicky znázorněné.
- 30 Tak to i nakonec říkáme, ať přidám nebo uberu cokoliv atd., když je to na obou miskách stejně, rovná se to. Jestli tam máš 1kg mouky a 1kg závaží nebo 5kg mouky a 5kg závaží, tak se to rovná, ale jakmile to v něčem porušíš tak už se to rovnat nebude. Metoda odebrání z obou stran
- 31 To jsou jejich úpravy, kdy v rovnici např. násobí jednu stranu a druhou ne.
- 32 **Následný rozhovor**
- 33 T: Potom jsme mluvili o rovnicích. Vy jste říkal, že používáte model vah. Mohl byste mi prosím ještě jednou říci, jak s nimi pracujete, když téma zavádíte? Když je úvodní hodina na rovnice, tak jak s tím pracujete?
- 34 U: Teď jsme to dělali v 8.r.
- 35 Na úplný úvod začneme rovnicemi z prvního stupně. Oni ten pojem rovnice znají z prvního stupně. Z hlediska sčítání např. $x + 15 = 30$, tak na základě součtu a sčítance známého a neznámého řeší. Potom je podstatná ta neznámá.
- 36 Říkám jim, že $x + 15 = 30$ je rovnice, ale $12 + 7 = 19$ je rovnost. Tak si řekneme rozdíl mezi rovnicí a rovností, aby si na rovnici zvykli. Potom je to i otázka zkoušky, ověření.
- 37 Nejprve neřešíme rovnice, ale říkáme si, jestli by mohlo být jisté číslo správným řešením. Oni přijdou na to, že se to dosazuje, tak to vyzkoušíme. Potom je zmínka o tom, kolik může být u dané rovnice řešení. Například je tam zmínka o kvadratické rovnici, kterou se naučí řešit až na SŠ, ale je tam zmínka o rovnici $x^2 = 9$, že x může být nejenom 3, ale i -3.
- 38 Potom když dojde na jednodušší rovnice, kde je neznámá na obou stranách, tak pak právě dojde na váhy, kde to mají i tady v knížkách schematicky znázorněné. To už je ten způsob, jak se propracováváme k řešení, takže si nejdříve řekneme, co je účelem řešení rovnice, že hledáme, co je ta neznámá. Snažíme se ji převést pouze na levou stranu (úzus, že nalevo - schéma, dohoda) a osamostatnit ji. Tady je právě ta podstata vah.
- 39 T: Tak si to ukazujete jenom takto v učebnici?
- 40 U: Taky děláme nákres na tabuli. Nakreslíme si to u několika příkladů.
- 41 T: Takže si to kreslí i v sešitě?

- 42 U: No, ne u všech příkladů. Dejme tomu, že u jednoho. Tady v knížce mají další, tak to všechno nepřekresluje. Spíše jim to tam i vysvětluju, nakreslím na tabuli nebo stále jim to ukazuju rukama, co to je ta rovnice, kdy se něco rovná něčemu a co se stane, když na jednu miskou něco přidáme nebo uберeme, tak dojde k nerovnosti (ukazuje rukama). Pokud chci udržet rovnováhu, tak musím na obě strany atd., postupujeme tímto způsobem.
- 43 To je takový ten začátek, jenomže potom to podstatné, a k tomu se dostáváme teď, umět mechanismus řešení. Potom váhy opustíme a jde o to, aby uměli mechanismus řešení. To znamená, že je potom spíše navádím k tomu, aby si uvědomili, že když se říká tady v té ekvivalentní úpravě, že rovnice nebo řešení se nezmění, když na obě strany přidáme nebo odečteme 3, čili přičteme nebo odečteme, tak je potom vedu k tomu, aby si uvědomili, jak se to projeví konkrétně. Tzn., když z jedné strany něco zmizí na druhou stranu, tak se to tam projeví v opačném znaménku. To je pro ně početně to nejdůležitější.
- 44 T: Chápou právě tuto změnu, když odebíráme nebo přibíráme, tak jak se to převádí na druhou stranu, tak mi přijde, že to jsou dva odlišné kroky, jestli to mají propojené, jestli chápou podstatu operace, kterou provádějí.
- 45 U: Celkem si myslím, že ano (chápou podstatu operace, kterou provádějí), na to že to děláme týden. Potom už jim to právě zjednodušuju. Když právě na obě strany přidáme nebo uберeme, tak aby si uvědomili ten faktický projev. Potom jde i o zapisování.
- 46 T: Zapisujete to, jak je to tady v učebnici?
- 47 U: Ze začátku ano, vyloženě barevnou křídou napíšu změnu. Opíšu to, co tam je, $2x + 3 = x - 5$.
- 48 Pak si řeknu, odečteme x : $2x + 3 - x = x - 5 - x$ barevně maluju a zdůrazňuju jim: vidíte to? Převeďu odečtu x a musím to udělat na obou stranách. Potom dostanu $x + 3 = -5$, potom říkám. Teď si uvědomte, co se stalo, když jsme od obou stran odečetli x . V podstatě: toto x na pravé straně, které bylo jako plus, se dostalo sem na levou stranu jako mínus x . Výsledkem je toto. Čili zapisujeme to, jak to je v knížce, ale potom už je vedu k tomu, když to budou mít stejné zadání, tak aby si řekli, že x z pravé strany zmizí - odečtu ho a jak se mi to projeví na druhé straně.
- 49 Tedy ze začátku toto děláme, ale potom to zestručňujeme. Ono ty děti ten mechanismus děti u rovnic pochopí a ve většině dalších případů – u řešení soustav rovnic, at' je dosazovací, sčítací, tak oni ten mechanismus chápou, ale daleko větší problém je, trvající problém ve všem, že ten, kdo neumí základní věci, tak to dělá s chybami. To je ten kámen úrazu. Oni potom vědí, co kam převést, sečíst, odečíst, vydělit. Ale oni dělají chyby. Je to o počtech. Je to o počtech.

- 50 U: Tuto moji třídu učím od páté třídy a teď to sami vidí, že dělají chyby v +, -, desetinné čárce atd. Může tomu rozumět, jak chce a stejně se nedopočítá. To je v těch vzorcích. Teď jsme měli výrazy v minulých týdnech. Měli jsme dva ...vzorce. Nejprve ten vzorec jakoby neuměj, potom se ho naučí, že $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Jenomže jaký je projev. $(0,5 + 3x)^2$, to dejme tomu, že by toto ještě šlo - dvě místa. Někdo napíše jen x - tedy neumocní neznámou. Horor nastane v prostředním členu, když to mají vynásobit. To je přesně ono. Je to jen obyčejná násobilka a nejsou schopni to dát dohromady.
- 51 T: Tedy podstatu těchto výrazů, vzorečků znají.
- 52 U: To je stejné jako s rovnicí. Vědí, co s tím mají dělat, ale znaménko, desetinné čárky, ty věci, které mají znát z 6. a 7.r. Říkám žákům: když nebudete umět tyto věci, tak potom v 9.r. nemáte šanci - lomené výrazy, rozklady, nebo naopak rozložit nebo složit něco podle vzorce atd.
- 53 T: Mohl byste mi ještě říci, nějaké Vaše vlastní postupy, čím se odlišujete od kolegů, při práci se třídou?
- 54 U: Už jsem ve škole hodně dlouho a uznávám takovou tu klasiku. V té matematice je to takové pořád svým způsobem stejné. Tvrdím, že nejdůležitější pomůckou jsou ukazovátka, křída, některé modely atd. Já už nejsem ten typ, že bych jim někde blikal nějakými barevnými obrázky nebo jim něco promítal. To už se v tom budu těžko měnit, přizpůsobovat už rozhodně ne. V té matematice podle mě je důležitý takový ten drill, opakování, důslednost, že po nich jdu - to oni vědí - včetně sešitů, podložky a takové základní věci. Snažím se střídát problémové úlohy, témata a takovou tu praxi, ale že bych se chtěl nějak předvádět, blejskat, tak to ne. I se mi to spíše protiví, ani se mi to nějak nevyplatilo. Ono se to dětem třeba jako líbí, ale potom skutek utek. Myslím si, že je tu potřeba cvičit, počítat, cvičit, tak jim nakopíruju papíry: tady máš 30 příkladů. Říkám: z toho dám písemku, spočítej si něco.
- 55 T: Jak často jim dáváte ty příklady? Na každé téma?
- 56 U: Tak zhruba jednou za 2 - 3 týdny. Ono to tak odpovídá na ta témata. Kopíruju to někdy z Frause nebo ze starých sbírek (sbírka úloh z algebry - rok 64). Poslední teď tu mám na vzorce. Říkám: vlepte si to do sešitu. Někteří si to nevlepili, tak jsem si to vzal zpátky. Říkal jsem, když to nechceš, tak si to sežeň, kde chceš. Spočítej si to, když Ti něco nepůjde, tak se přihlas.

Příloha 4: Rozhovor s učitelem RV 1. 3. a následný rozhovor 29. 3.

- 1 Učitel RV
- 2 T: Co učivo tehdy a teď? Když to porovnáte tehdy a teď?
- 3 U: Ve své podstatě se učivo nezměnilo. Protože matematika se mi líbila, že má kostru stále stejnou. Mně se líbí, že dnes už je to krásně propojenější. Co se týče třeba Frause (uč. pro 2. stupeň), tak tam jsou např. přirozená čísla a skočíme na hmotnost slona, je tam uvedena. Oni vidí slona, kdy byl zvážený v ZOO a vážil tolik a tolik. Oni zase vidí, že obrázek je z přírodopisu, který tam viděli. V tom se mi to líbí, že v tom nám pomohli.
- 4 Učitel: Učí 16 let.
- 5 U: Kde je problém, to jsou slovní úlohy. Takové to převaření textu do matematické podoby, tak to u někoho činí problémy. Když to vezmu na sebe, tak mě to taky moc na ZŠ nebalilo. Člověk byl sportovec a slovní úlohy byly takové zdržující. Jakoby jsem dorůstal a naopak na SŠ už mě začaly bavit. Někdy je to vyzrálostí člověka a slovní úlohy obzvlášť. Potom záleží na tom, jak se jim to (úlohy, řešení) postaví (představí, vysvětlí). Je to práce učitele, aby neviděli ve slovní úloze nějakého strašáka, který spadl z vesmíru a působí jim pětky, ale aby viděli, že to je jakýsi text, který je potřeba, nějaká reálná situace, která je díky matematice jako nástroji potřeba řešit, přetavit si to a potom zase lidsky odpovědět. Nevím, myslím si, že by to šlo zvládnout, ale musela by být spolupráce i s rodinou. Zrovna ty slovní úlohy jsou období puberty, kdy je to nejsilnější. Pozor, ne žádná 9.tř., ale konec 7.r. až do půlky 8.r. jsou kritické. Tam to přichází. Právě v 8.r. jsou pohybové slovní úlohy. Oni mají myšlenky někde jinde. To je jediný paradox. Ale díky návaznosti učiva není možné to nikam jinam převést. Potom už v 9.r. někteří začínají nebo jim to uteče, protože se v pubertě věnují jiným věcem a ne tady tomu. Je to taková písnička. Ale na druhou stranu vidím na svědomitých žácích, nejsou to žádní einsteini, nic takového, ale díky svědomitosti a pílí – teď to řeknu šeredně – se na tu dvojku matematiku naučit a zvládnou ji.
- 6 T: Rovnice? Jak to děláte, když to zavádíte?

- 7 U: Tam jsou váhy. Dělam to vyloženě formou vah. Říkám, že to je jednoduché. Na jedné misce mám meloun, na druhé 4 dýně. Jestliže se 4 dýně rovnají tomu jednomu melounu, tak vezmu misky a přehodím je, tak váhy musejí být vyrovnaný. Jestliže tady odeberu 2kg, tak co to udělá? (Rukama ukazuje změnu polohy misek na miskových vahách.) Tak samozřejmě musím 2 kg odebrat i tady, aby se to vyrovnalo. (Demonstrace pomocí rukou.) Když se to ukazuje na praktických příkladech, tak se jim to nezdá těžké. Samozřejmě není dobré, když tomu někdo hned dává pojmy ekvivalentní úprava, ne. Nejprve ať to dělají klasickým způsobem, na který jsou zvyklí, tj. obyčejným vážením. Potom ano, toto odebrání dvou kg je jedna z ekvivalentních úprav. Potom říkám, že je druhá věc, když už to je zdlouhavé, tak si ukážeme, že když na jedné straně mám -2 , tak co mi to dělá? Přetahuji to na druhou stranu rovnítka, tak to nám sčítá. Potom zjednodušovat. Ale ze začátku je zkrátka grunt.
- 8 T: Např. přinesete i na začátku do hodiny váhy?
- 9 U: Mám je tam. Měl jsem tam rovnoramenné. Oni nám je nechtějí moc půjčovat, máme ty laboratorní a ty nejsou úplně ideální. Nejlepší by byla tzv. decimálka, tam je to dobré, protože tam můžete dát cokoliv. Pravda je taková, že si to někdy zjednodušíte. A vyloženě jim to pustíte přes interaktivní tabuli, protože tam jsou ty váhy vidět. Přidají, udělají toto, oddělají toto, atd.
- 10 T: Když říkáte, že používáte IT, tak používáte nějaký software, např. na váhy?
- 11 U: Oni tam mají v softwaru IT obrázek vah a nějakou funkci, jak to funguje.
- 12 ...
- 13 Ta škola musí být. Kolegům říkám, aby byli přísní, ale lidsky přísní, a říkám vám, čím lepší pravidla, tím lepší hra. Děti po tom taky touží, aby to mělo jasný řád, protože by bylo špatné, kdyby se tu nikdo neučil. Oni sem budou chodit rádi, nebojte se, že ne, ale bylo by špatné, kdyby sem chodil rád ten, který nic nedělá. To by byla špatná škola. Ne. Pro toho, kdo tady nic nedělá a účastnit se nechce, i když jste mi nabídli stejné podmínky, tak pro něho ať to je špatná škola. Pro ty, kteří zjistili pravidla hry, tak ano. Nepoužívejte na ně sprostá slova, nikdy. Jestli tak chtějí na ně mluvit, tak ať si na ně křičí doma. Zbytečně se nenervujte. Zahraj, a pokud to nefunguje, tak si volej rodiče. Přes ně to řešte. Oni jsou ty hlavní, co mají na děti páku. Ať si namlouváme, co chceme, tak stejně někoho nezlomíme. Jestliže někdo vyrůstá 8 let v nějakém pošramoceném prostředí, kde to mají jinak nastavené, tak ty nejsi za tu jednu hodinu schopný ho změnit. Pracuj s těmi dobrými. Taky mu nastav pravidla, podmínky, jestli to nejde, tak si zavolej rodiče. Jestliže nejsou schopni oni to zabezpečit, tak se to nedá a přichází sociální úřad. Jinak to nejde. Nemůžeme tu každému dělat mámu a tátu, to zkrátka nejde. To je už trochu dál.

14 ...

15 Je pravda, že jim písmenka chvíličku problém dělají, než si na ně zvyknou. Samozřejmě už jsem je zaváděl na prvním stupni. Když něco nevím tak co? Dám si místo toho otazníček nebo písmenko. Za to písmenko si schovám jedničku, dvojku. Ono tam stále stojí písmenko x a za ním v tu danou chvíli by mohla být trojka. Ať tam zkrátka je. Jde opět o to, jak je na to člověk připravuje. Celkově v tom jsou zkušenosti, že chvíličku ta písmenka dělají jako proměnná problém.

16

17 Pokud nemáte podporu v rodině, tak to můžete dělat, jak jen chcete dobře a stejně se nikam nedoberete. Potom říkám rodičům, že si ten čas na děti musí najít, ne že to s nimi mají počítat, ale že to po dětech mají chtít a že tu ta kontrola bude. I dětem říkám, že se sem nechodí bavit, ale že sem chodí pracovat. Já jsem váš vedoucí pracovník, jak jste si všimli, tak se vám snažím tu práci udělat příjemnou. To není o tom, že se sem chodíte bavit. Vaše rodiče v ten čas, co tu trávíte, chodí do práce a vydělávají peníze, aby vám potom mohli koupit ty kalhoty, co chcete, nebo nějaké lyže a vy sem chodíte pracovat. Ta vaše práce vám prodá něco jiného, vy nedostáváte za ni peníze, ale udělá rodičům radost a tak to musí fungovat a na to si zvykněte. To není, že vám namazali krajíc chleba a vy jste si ho sem přišli sníst. Když to tak děláte, tak potom lítají takové známky.

18 U: Stále tvrdím, že se tu hledají složité postupy. Postup je jednoduchý. Vyčistit si vztah s rodinou a je třeba, aby stát začal na toto dohlížet, na rodinu. Ono to bývalo takové kliše, ale rodina je základ státu, základ všeho. Pokud je dobře vytvořené rodinné prostředí a pokud si s nimi odmala hrají např. pexeso, nebo ji dávají puzzle, nebo jim čtou, tak to je potom jednoduché. Nejde jen o matematiku, ale i o češtinu – o slovní zásobu. Pokud k tomu budou takto lidsky přistupovat, tak to je zaručený úspěch.

19 Rodičům říkám, že to je zákon zachování lásky a vřelosti. Věřte tomu, že se vám to vrátí. Chápu, že mnohdy máte hodně práce, ale nemáte ji oba dva, potom se musíte domluvit, v té rodině to tak fungovat musí, jeden si musí roli převzít, jeden vydělává, ale ať to není na úkor dětí. Troufám si tvrdit, že to jde, ale ti lidé musí chtít. Ono mnohdy jsou pracovní večere, na kterých nemusí být, ale jdou, protože proč by se doma otravovali s dětmi. Pokud to nebudete dělat, a to vám nalívám čistého vína, tak věřte tomu, že vám to děti vrátí. Pokud je budete uklízet k počítačům, tak je tam uklízejte, ale budete mít děti neohrabané, neschopné a na druhou stranu nebudou ani schopné s vámi promluvit. Potom budete chtít, aby vám řekli nějaké pěkné slovíčko, a oni vám ho neřeknou, protože jste jim

ho také neříkali a počítač je ho říkat nenaučí. Takto když to učení postavíme, tak to bude krása. Samozřejmě je to ideál, takto úplně to nejde, protože lidé jsou různí, ale na druhou stranu ať vědí, jakou mám vizi.

- 20 Když přijde nějaká inspekce, tak říkám, ať se pohrabou v papírech, ale ve své podstatě, ano jsem tady od toho, abych (já – ředitel) na ně (učitele) dohlédl, protože ta témata se musí probrat, ale to není všechno. Můžete mít krásně napsané plány, můžete mít ŠVP napsaný krásně, jak chcete. To musíte tvořit, ano mám nějakou kostru, ale jestli jsem právě probral toto nebo toto, to je taková složitá vazba. Já nemůžu probírat zlomky, když mi tam pláče dítě, jehož rodiče se rozvádějí. To nejde. Než ho uklidním, než ho přivedu na téma? Je to taková směsice.
- 21 Na druhou stranu se mi líbí, že děti chodí, vrací se, zdraví, i když už ze školy vyšli. Dělán to proto, že každému z vás chci pomoci. Nemůžu každému vlézt do rodiny a dělat vám tam pořádek nebo někoho zastřešovat. Toto je taková psychologie, aby se to ubíralo lepším směrem. Pokud se morálka ve společnosti zlepší, tak věřím, že selepší i výsledky. Pokud ne, tak můžeme vymýšlet matematiky, jaké chceme. Můžou být postupy a stejně vám na to budou kašlat.
- 22 To samé je s IT. Někdo si myslel, zavedeme jim IT, ono je to bude bavit. Oni to okouknou a za 14 dní je to pro ně samozřejmostí a je to na stejné úrovni, jako byla křída. Samozřejmě, že to je doplněk. Je to tak se vším. Nejdůležitější element je stejně ten člověk.

23 Následný rozhovor

- 24 Tazatelka: Chtěla jsem se Vás na začátek zeptat, když jsme si minule povídali o rovnicích, vzala jsem i učebnici Frausovskou na rovnice, když ty rovnice budete probírat, tak jakým způsobem to budete s žáky probírat.
- 25 Učitel: Mně se nejvíce líbí váhy. To je asi to nejhezčí. I ty ekvivalentní úpravy, v uvozovkách ekvivalentní, se hezky ukazují. Když odeberu z jedné misky, tak musím odebrat i z druhé misky. To se mi zdá nejideálnější i pro ně pro představivost, protože ve fyzice ty rovnoramenné váhy používají. Když to zdvojnásobím na jedné straně, tak to musím zdvojnásobit i na druhé straně. Tam je jediná věc, že u rovnic zapomínají vynásobit, když na jedné straně mají více členů, oba/více členy/ů. Ale to ve své podstatě, si představte, že tu není jedna mistička, ale dvě. Když zdvojnásobím na jedné straně, tak musím zdvojnásobit i na obou/jednotlivých mističkách. To funguje. Je pravda taková, že v 8.r. s Frausem nejsem. My jsme začali s Frausem vloni, tak teď jedem 6.,7.r. Osmička na

mě teprve čeká. Teď teprve přišly učebnice. Teď je budu nastudovávat. Nevím, jakým způsobem to tady mají dělané.

- 26 T: Jakým způsobem jste to učil. Včera jsem tu celou kapitolu ve Frausovi (8.r.) procházela.
- 27 U: Ono to je dělané na objektivnost a na děti, které mají určitý intelekt, ale ne na všechny. Ano, vybírat z toho. Něco z toho použít. Velice hezké je na tom to, že tam je milion věcí, které tu matematiku přibližují reálnému životu. Tady vidím nějaké sportovce. Oni se dostanou do jiné dimenze. Není to jen to holé (matematické). (prohlíží si učebnici) Jde o jednu věc. Existují tu dvě strany u rovnice a mezi nimi je rovnítko, aby se to sobě rovnalo, tak nejideálnější na představu je, jak bych to řekl. Když tam dám něco nestejného, tak to žáci nevidí. Když na jednu stranu dám meloun a mám ho vyrovnat pěti banány a vyrovnají to teprve, až když tam jsou ty váhy. Klasickým způsobem to neudělají. Nebo houpačka - klasika. Není to vyrovnané, co se děje, dojde k tomuto (ukazuje rukama jako na ramenech vah nebo houpačky nerovnost stran). Ekvivalentní úpravy vedou k tomu, že se to na těch vahách velmi zjednoduší. To je to samé jako jsem dnes říkal z pohledu nějaké ceny. Množství vám nic neříká.
- 28 T: Potom, když jim to takto hezky ukážete na vahách, tak chápou podstatu těch operací, které provádějí?
- 29 U: myslím, že ano. Když to (závaží, věc) vždy oddělám - odčítání, přičítání - přidám, násobení - zdvojnásobím, dělení - zase rozpůlím. Myslím, že vcelku ano.
- 30 T: malují si to do sešitu?
- 31 U: ze začátku namalujeme jedny pěkné váhy a potom už děláme takové schéma, takový trojúhelníček, potom už jen destičku. Ze začátku ano, potom už ne. Říkám: proč to děláte? Protože vám to ta matematika pěkně zjednoduší. Sami potom poznáte, že se vám to nechce dělat zdlouhavě. Ty to zautomatizuješ, už se ti to nechce dělat zdlouhavě, tak přejdi k tomu, k čemu ti to velí, abys dospěl na ideální způsob. Říkám: musel ses učit násobit, ale sám jsi chtěl, abys nemusel milionkrát sčítat. To je to samé, někteří se mě ptají už po druhé hodině, jestli už by to mohli vynechat. Jestli to umíš, tak už to můžeš vynechat, jen jsem ti to ukázal. K tomu ta matematika slouží.
- 32 T: používáte tady ten postup, kdy se za lomítko píše to, co odečítáte, přičítáte,...?
- 33 U: dávám jim to tam. Píšu jim to tam, ale že bych to po nich požadoval, to nepožaduju. Pro mě jde o to, že mu to je jasné. Ten zápis, pokud budu vědět, že mu to není jasné a plave v tom, tak to po něm budu požadovat. Je tu $-3x$, co to znamená, měl jsi tu $-3x$ odečíst z jedné i z druhé strany. Pokud vidím, že to je bez problémů, tak to nepožaduju. Je pravda taková, aby mi tam někdy ten krok udělal. Řeknu, teď mi to tam schematicky naznač, aby i

ostatní viděli, jak jsi odečetl to číslo od obou stran. Jak to zapíšeš? Jde o to, že jednou bude mít i své děti a bude jim to vysvětlovat, a o to mi jde. Zase, klasicky nelpím na tom, že to tam musí být.

- 34 T: potom, když přejdete na počítání rovnic bez obrázků, tak chápou postatu těch operací?
- 35 U: myslím si, že ano. Pamatuju si na sebe, jako na dítě, že mi rovnice dělaly obrovský problém. Asi jsem v životě neviděl váhy, protože jsem si sednul, úplně si to nevybavuju, ale vím, že jsem zmačkal asi 350 papírů, protože mi nechtěla žádná rovnice vyjít. Přitom to byly jednoduché začátečnické rovnice. Zřejmě tam byla nějaká začátečnická chyba, nevím. Přitom mi matematika šla. Nevím, z jakého důvodu, jen vím, že jsem u toho brečel a házel papíry do koše.
- 36 U: Tady je dnes jeden velký problém. V hodině je to chvilka umravňování, chvilku výchova a potom teprve vzdělání. Potom jsou osnovy a máte to najednou splnit. Pokud chcete být pochválen od vedení
- 37 T: ještě bych měla jednu otázku, jestli byste mi mohl říci, nějaké vlastní postupy, které máte při práci se třídou.
- 38 U: podívejte se, řeknu to takto. Včera jsem poslouchal nějaký rozhovor s rektorem Karlovy univerzity. Velice se mi to líbilo. Řekl, že to stojí na 4 jednoduchých principech. Musí být (1) jakási láska mezi těmi lidmi, tzn., že ten vztah tam musí být. Nejsem váš protivník, soupeř. (2) slušnost, (3) řád a (4) pracovitost. Jsou to 4 atributy. My se tu můžeme bavit o učebnicích, ale pokud to tam není, tak ... Zase říkám, že největší podloží je rodina. Pokud na to v rodině dbají, tak to je dobré. Nejsem ten, který by ti tady chtěl nějak ubližovat, i když to dnes vypadalo, že jsem na něho byl zlý, vůbec nebyl. To byla obyčejná hra. Jeho to bude mrzet, já ho znám. Na někoho by to nezabralo, ale jeho znám. Mě mrzela jiná věc, že on stále chodí, že by potřeboval uvolnit na hokej. Sport mám rád a říkám: pokud si to doplníš, tak mi to nevadí, ale pokud by nastaly problémy, tak to tak s tím uvolňováním nepůjde. Něco za něco. To jsou ta pravidla, samozřejmě až dostane jedničku z písemky, tak ho pochválím, ale řeknu, že mi udělal reklamu před paní Novákovou, myslel jsem, že se začervenám. Takže mu to trochu zahraju - tam jde o nějaký blízký vztah, ale na tomto principu, když se to bude odehrávat, tak to bude dobré. Včera právě pan rektor říkal, že spousta dětí chodí z rodin zdivočelých a že se to potom špatně rovná. Těžko se to i ovlivňuje. Potom vymýšlet postupy. Jak říkám, že to je dnes o tom tu třídu trochu strhnout nebo je trochu dostat - když to řeknu trochu násilnický - srovnat do latě. Dnes to je těžký, z těch 25 žáků, i kdybyste se rozkrájeli, tak 3 nezaumíte.

- 39 U: Jak to včera říkal, aby to bylo pokud možno přirozenou cestou. Největší úskalí hodiny je potom správně zareagovat. Vy je chcete někam strhnout, tři tam budou rušivý element, ke kterým potom hledáte cestičku, ale nemůže to být jen o hledání cestičky, protože tam potom není místo na matematiku. Proto jsem říkal, že by bylo ideální, kdyby do školky chodili s určitými návyky a do školy také. Mně by se líbilo, máme tady tolik odborníků, kdyby nastavili standardy: co má dítě umět, když nastupuje do školy. Aby si umělo zavázat botu a když ne, tak samozřejmě mohlo projít nějakou vadou, potom k tomu má důvod, proč to neumí a musí tam být lékařská zpráva. Potom tam musí být posouzení, jestli ho dáme do školy nebo ho ještě chvilku necháme dozrát, ale určité požadavky by tu být měly. To samé při vstupu do školky by mělo umět zformulovat větu, popsat obrázek, umět rozeznat 3–4 barvy atd. Dnes se to právě neděje a každý si myslí, že to tady potom spasíme a nespasíme vůbec nic. Nacházíme k nim cestičky, když to člověka baví. Jsou i učitelé, kteří cestičky nehledají, kteří to dovykládají klasickým způsobem a jdou po nich, aby to plnili. Potom by měl být rozhodující výsledek, ale jde o to, co má být tím výsledkem? Jestli umí počítat nebo jestli je slušný. To je právě to, co od toho chtít. Ideální by bylo, kdyby byl slušný a uměl i počítat.
- 40 T: přispívá k tomu matematika?
- 41 U: přispívají k tomu učitelé. To je základ. Tam je to. Je jedno, jaký máte předmět. Je důležité, abyste v něm byl pevný a měl ho rád. Děti to poznají/vycítí jestli jste to šli jen odvykládat, nebo při jejich dotazech jste schopni na to zareagovat a dát jim jistý řád. Každopádně je matematika jedním z těch předmětů a předně je s dobrou časovou dotací, protože ji máme každý den, tak musí napomáhat. I když by to mělo jednu hodinu, tak jde o osobnost člověka. Že tam jste každý den, tak přejímají vaše názory, hodnoty, tak to musí určitě ovlivnit. Nevím, jako jestli matematika není ředitel - ta osoba, která to učí.
- 42 ...
- 43 U: Vloni jsem tam měl 2 děti, které vyhráli okresní olympiádu. Jedno bylo na prvním a jedno na pátém místě, což je pěkné. Letos byl jeden hošík druhý, protože mohl jít jen jeden žák za kategorii. Teď jsme dělali klokana, 4 se dostali na 70 bodů, jeden se dostal na 90 bodů, což je pěkné. Trochu jsem si z toho udělal legraci, protože jsem řekl, že kdo bude mít pod 30 bodů, tak dostane 5 z matematiky. Až jsem se smál, když jsem to opravoval, protože nikdo neměl pod 30 bodů. Bylo tak 32,33. Většina je pohybovala kolem 40b. Ale celkově to není špatné, když to srovnám s jinými školami. Uvidíme, až přijde celkové srovnání. S touto třídou jsme dělali před dvěma lety testy a je kousek nad republikovým průměrem. Ale zase se tam rovnáte s gymnázii, se školami pražskými výběrovými. My tu musíme nabrat každého, bez výběru.

- 44 U: v matematice je to filosofická otázka, jestli je vést k tvořivosti nebo naopak preciznosti, k drilu. To je těžké si na to odpovědět. Mně je bližší je vést k myšlení, ale na druhou stranu potom přijde tato situace, co nastala dneska a řeknete si, tím drilem by se taková věc nestala, protože i ti čtyřkami a pětkaři uměli dělení, že se nezamysleli a na něco nepřišli? Potom je asi ideální od všeho něco.
- 45 U: další věc jsou i různá období ve školním roce, př. před Vánocemi, nebo když začnou být takové krásné dny, to můžete dělat, co chcete a nemůžete nic. Nejhorší situace je ta, kde je konec 7.r. až do tří čtvrtě roku 8.r., kdy je pubertální věk. V 9.r. už to je dobré, tam se to začíná klidnit. Toto je další faktor, který ovlivní výuku. Je to nejen o tom zaujmout to opačné pohlaví, tak to je. Někteří to dělají naschvál, aby se neshodil proti ostatním.
- 46 T: Děkuji Vám mockrát.
- 47 U: Není zač.

**Příloha 5: Rozhovor s učitelkou CK 13. 2. a následný rozhovor 28. 3.
a následně hodiny 14. 2.**

- 1 Učitelka CK
- 2 Tazatel: Na začátek bych se Vás ráda zeptala na vaši učitelskou profesi. Jak dlouho matematiku učíte? Jestli mi to můžete říct?
- 3 Učitelka CK: Ano, až to spočítám. 4,6 a bez mateřské to teď je pátý rok. Tedy 12 let.
- 4 T: To bylo na ZŠ?
- 5 U: Ano na ZŠ.
- 6 T: Neměla byste nějaký konkrétní příklad z matematiky, kdy měl žák nějaký problém?
- 7 U: Myslíte, když mu nejde nějaká látka?
- 8 T: Ano.
- 9 U: Mají možnost přijít na doučování, domluvit se. Je jim to vysvětleno v hodinách, pokud to nechápe, tak může přijít na doučování ráno nebo odpoledne - to se jim moc nehodí, no. Jinak to potom řeší tak, že si rodiče seženou nějaké doučování, nebo od spolužáků.
- 10 T: Kdo je iniciátorem (doučování) v té situaci, když to žákovi nejde?...
- 11 U: Já jim (dětem) to nabízím. Nabízím to žákům i rodičům na rodičovské schůzce. Říkám: když mají někteří problémy, špatné známky atd., tak mohou přijít, zeptat se, domluvit. Když přijdou den předem, tak není problém.
- 12 U: Rovnice - základní - zvládáme. Ekvivalentní rovnice také zvládají.
- 13 T: Jak jim to tady na začátku ukazujete, když rovnice začínáte?
- 14 U: Já jdu rovnou na příklad. Řeknu jim, že by ve fyzice vážili, že musí mít na obou miskách stejná závaží. I si to prakticky vyzkoušeli, protože tam děláme laborku, tak to ví. Tyto příklady, ukázky s nimi vůbec neprocházím a jdu rovnou na ten dril, jak se to má počítat, aby si ten dril zavedli. Chci po nich tvrdě lomené čáry. Může si klidně udělat rovnou $(-3x+3)$ do jednoho řádku. Potom tento řádek vynechá a napíše až následující (příklad z učebnice). Ale chci, aby ty pravidla měli a bylo vidět přesně, co dělali.
- 15 Když potom vezmeme rovnice se zlomky, jak začnou vycházet zlomky, zkouška se zlomky, tak tam to nikdy nevychází. Teď bojujeme. Vrátili jsme se zpátky ke zlomkům. Dostali samostatné práce na doma a budou psát písemku jen na zlomky.
- 16 T: Potom není problém s postupem, ale...
- 17 U: Ne, to základní umí.
- 18 T: Potom je tam tedy problém s desetinnými čísly,...

- 19 U: Postup rovnic umí, ale nastane problém, když vychází desetinné číslo nebo zlomek a mají ještě počítat zkoušku. Další problém nastane, když mají např. $6x = 2$. Vydělit 2 šesti, tak všichni vydělí $6:2$. Protože se jim zdá, že to jinak nejde.
- 20 U: Slovní úlohy. Trochu je problém u složitějších, protože si musí uvědomit druhy úloh. Když už se dělají potom úlohy o společné práci a o pohybu, tak už to je dril a už podle toho jedou, kdežto tady to jsou obecné úlohy typu: Zvětši číslo o..., Ten je starší,...; což činí problém, protože si to nedokáží představit. Procházíme to podle tabulek.
- 21 **Následný rozhovor**
- 22 T: Když jsme řešili rovnice. Používáte nějaké modely? Vy jste říkala, že rovnou jdete na příklady.
- 23 U: Myslíte jako obrázky?
- 24 T: Někaké modely, když téma zavádíte.
- 25 U: Oni vlastně znají rovnice z národní školy, takže my na to navazujeme, jenom to rozšiřujeme. Takže jedeme bez obrázků.
- 26 T: Tedy žádné modely?
- 27 U: Ne, rovnou jdeme na příklady.
- 28 T: (váhám, jak správně položit otázku) Nemůže se tam stát, že ... Jakým způsobem poznáte, že chápou jednotlivé úpravy, které provádějí?
- 29 U: Myslíte ekvivalentní úpravy, že např. jedné straně (rovnice) je plus a na druhé mínus? Vysvětluji jim to například na rouře od kamen a bílé kočce. Na jedné straně máte plus a na druhé mínus, jako když na jedné straně je bílá kočka a proběhne rourou, tak tam bude mínus, protože se změnil jako ta kočka, která je teď černá. Oni si to na tomto pamatují, že se tam musí změnit znaménko.
- 30 T: Tak už máte nějaký model.
- 31 U: Ukážu jim to na takovémto praktickém příkladu, ale že bych používala nějaké modely, obrázky, tak to ne. To jenom, že si to uvědomí, jak a proč se ta znamínka mění.
- 32 T: O to mi jde. Jestli chápou podstatu úkonů, které provádí.
- 33 U: V podstatě na tomto příkladu by to pochopit měli. To pochopí.
- 34 T: Máte ještě nějaký jiný příklad na, kterém jim to ukazujete?
- 35 U: Ne.
- 36 POPIS K HODINĚ
- 37 T: Dalo by se situace z hodiny nějak popsat z Vašeho pohledu? (Mám Tím na mysli pracovní atmosféru a činnost žáků.)

- 38 U: (velmi váhá) To Vám takto nezhodnotím, jak... Když je tam vidím, tak oni jsou takoví upovídání, ukřičení. Když jim látka jde, tak počítají potichu, soustředěně. Jakmile dostanou nějaký problém, že někomu něco málo nejde, tak v té třídě je takový ruch. Říkají: já nerozumím. Potom přijde písemka a všichni mají jedničky. V tom je takový paradox, že pocit z hodiny je, že tomu nikdo nerozumí. Tak to vysvětlíme o hodinu víc, o další hodinu víc. Stále to vypadá, že tomu nikdo nerozumí. Potom dáme písemku a oni to všichni mají dobře.
- 39 T: To je zajímavé.
- 40 U: V této třídě je to takové.
- 41 T: (popis situace z hodiny) Kromě toho, mě velice zaujal příklad žáka. Chvilku jsem se v hodině věnovala žákovi sedícího vedle mě. (ukazuji v sešitě příslušný příklad - viz obrázek) Přes chyby, které tam udělal, tak mu vyšel výsledek správný, ale nevyšla mu zkouška. Položil tužku a nechtěl počítat dál. Tak jsme se na to společně dívali a našli jsme chyby ve znamínkách. Začal to nějak opravovat do svého řešení a stalo se to nepřehledným. Nakonec napsal nové řešení vedle. Říkal, vždyť mi to vyšlo stejně. Říkala jsem mu, že ... Jakým způsobem, když máte písemku, kontrolujete i postup?
- 42 U: Když máme písemku, tak jim kontroluju postup a za každou matematickou operaci mají body. Třeba za jednu rovnici mají klidně i 14 bodů, aby to bylo odstupňované. Někdo se splete ve znaménku, někdo v roznásobení atd. Zkrátka, aby tam nějaké body měli za to, že něco vypočítají.
- 43 T: Žákův závěr byl: „měl jsem to správně“. Říkala jsem: „To nebylo správně. I když výsledek máte stejný, tak postup správně nebyl a paní učitelka by Vám to uznat nemohla.“ Potom přišel na to, že chybu měl ve zkoušce, i když ji v podstatě měl i v řešení rovnice samotné. To mi přišlo u tohoto žáka zajímavé.
- 44 ... T: V té hodině se v jednu chvíli hlásilo 5 dětí, možná 4-5. Nepočítali a čekali, až vy k nim přijdete. Někteří - opravte mě, jestli si to myslím špatně - čekali, až jim chybu najdete vy, že se nesnažili si tu chybu opravit. Je to tak?
- 45 U: Ano, je to tak. Jak tam je nějaký problémový příklad, tak to tak dělají. A to ještě byli hodní. Když zjistí, že jim to nejde, tak tam začnou vykřikovat, jak to je hloupé, jak by to vůbec mohli k něčemu v životě potřebovat? Ale když jim látka jde a umí to a vychází jim to, tak není problém a počítají.
- 46 T: V čem je tedy problém, když jim to nejde?

- 47 U: (váhá) Já bych řekla, že nechtějí přemýšlet, nechtějí se pozastavit, hledat chybu. V tomto jsou takoví konzumní. Když mi to jde, tak v pohodě, jedu, ale když mi to nejde, tak proč bych se namáhal? On mi to někdo najde, nebo řeknu, že to neumím nebo že to je těžké.
- 48 T: Kromě toho, vidíte tam ještě nějakou další příčinu?
- 49 U: Ne, to nevím.
- 50

51 **3. vyučovací hodina (začátek v 10h.) 14. 2. 2012**

- 52 Ročník: 8.A polovina třídy (Organizačně v této třídě mají výuku matematiky rozdělenou na 2 paralelní poloviny. Ve stejnou hodinu vyučují 2 učitelé, každý svou polovinu třídy.)
- 53 Přítomno: 15 Žáků (10ch, 5d)
- 54 Vzhled třídy: okna vlevo, křídlová tabule, 3 řady lavic, nástěnné mapky, plakátky - hudebna;
- 55 Cíl hodiny: Výukový - procvičit a upevnit počtářské dovednosti v rovnicích; ujištění se, zda jsou schopni řešit i komplikovanější rovnice
- 56 Téma: Rovnice - závěrečné opakování
- 57 Kompetence: Komunikační, komp. k řešení problémů (diskuze nad řešeními), sociální (diskuze se spolužáky k tématu)
- 58 Motivace: Nevysloveno.
- 59 Struktura hodiny (45 min)
- 60 Úvod: U (učitelka): organizační záležitosti; rozdání papíru s příklady na rovnice; Žáci budou mít doma na týden; příklady z něho budou v písemce (podle slov CK papíry s příklady žáci
- 61 Ž (ch) se omlouvá, že nemá sešit (prý si koupil nový a nechal ho doma) a učebnici; U: piš na papír
- 62 Počítání: Žáci počítají na tabuli. (Vítek - komediant třídy se předvádí a celou hodinu diskutuje, ale za hodinu spočítal max. 3 rovnice; na tabuli dělal drobné chyby, které postupně
- 63 U: Zkoušku děláme tak, že si nejprve přepíšeme za L to, co je na levé straně s x-em a potom dosadíme.
- 64 U: Chodí po třídě ke každému, kdo se hlásí, opravuje postup. Dává důraz na vlastní tempo tak, aby nedělali chyby.

- 65 Ale když to Ž nevychází, tak čeká, až mu U najde chybu a opraví. Nesnaží se si chybu sám najít.
- 66 Mají si počítat podle vlastního tempa.
- 67 K tabuli chodí dobří počtáři, ale občas udělají chybu spíše z nepozornosti.
- 68 Cvičení 4.:
- 69 U: Neděste se, když vám tam vyjde druhá mocnina. Rovnice jsou tak postavené, aby se to odečetlo.
- 70 Jen to U dořekne, tak se žák začne ptát, proč tam vyjde druhá mocnina. Učitel mu to vysvětluje.
- 71 Problém je roznásobení, nepřehledný zápis na tabuli.
- 72 Ž na tabuli dopočítal, hlásí se zároveň 4 - 5 Žáků, U se jim postupně věnuje; Chlapci se ve třídě baví a nepočítají
- 73 D(1) říká, že rovnicím na roznásobování dvojčlenů nerozumí; Učitel jí říká ať se ani nesnaží, že na ně nemá, že má počítat jen příklady ze cvičení 2 (roznásobení dvojčlenu číslem), (dost mě to zarazilo, ale dívka má IVP)
- 74 4c: chyba v zadání - U obchází každého žáka a opravuje mu zadání v listu; prý, když to řekne do pléna, tak si to nikdo neopraví
- 75 Na tabuli se počítají následující příklady:
- 76 Cvičení 5.: (odstraňování složených závorek); cv.6;cv.7 (rovnice se zlomky)
- 77 U: Jak budeme závorky odstraňovat? Zevnitř.
- 78 U musí připomenout na konkrétním příkladu, jak se závorka upravuje.
- 79 Problém: mínus před závorkou; sčítání záporných čísel (U demonstruje na penězích - dluhy, příjmy)
- 80 Diskuze chlapců:
- 81 $15/30 = 0,5$; Chlapec vedle mě tvrdí, že to je 0,2. Já: Jak to? Kolikrát se vejde 15 do 30? Ž: Dvakrát. Já: Ano, ale je to polovina té 30, ne? (napsala jsem zlomek $15/30$) Jak tento zlomek zkrátíte?; Ž se začal usmívat - už mu to došlo a řekl: „jasně, 0,5“)
- 82 Vítek stále „machruje“; U - ještě jsi toho nenechal? Pokud chceš, tak se příště sejdeme o 5 minut dříve, abychom se mohli zasmát tvým rádoby vtipným řečem, když potom budeš v hodině v klidu. Ale sebevědomí máš na to dost silné, ne?; Vítek: Ale už mám 3 příklady.
- 83 U: „Vidíte, že ty rovnice už jsou trochu těžší. Používejte v nich všechno, co už známe, znaménka před závorkou atd.“
- 84 Oprava postupu řešení rovnice:

- 85 Ž vedle mě počítá příklad se závorkami, ale má tam chyby. Nesprávně pracuje se znaménkem mínus. Paradoxem bylo, že mu přes chyby rovnice vyšla a udělal chybu ve zkoušce.
- 86 Ž: „Nevychází mi zkouška.“
- 87 Návodnými otázkami se ho snažím dovést, aby si našel chybu, protože když mu to nevyšlo, tak chtěl úplně přestat počítat. Neměl chuť najít si chybu. V každém řádku rovnice jsme našli většinou i více chyb. Celé řešení rovnice jsme opravili.
- 88 Po vyřešení má radost, že už to má dobře.
- 89 Ž: ale tady mi to vyšlo, to bylo dobře. Já: ale měl jste v postupu chyby, to by paní učitelka neuznala.
- 90 Dále počítá rovnice se zlomky (cv.7 c, a) - už se mě nebojí zeptat, kde má chybu; řešíme několik možností práce se zlomky, na první pohled možná složitě hledání společného jmenovatele dvojčlenu v závorce.
- 91 Po vyřešení si Ž vzpomněl, že se učili nejprve odstranit zlomek a potom počítat.
- 92 Tabule (7c, 7a):
- 93 Opakované chyby: práce se znaménkem, roznásobování
- 94 Př.: vyšlo $0 = 0$, tj. nekonečně řešení. Tedy nemusíme dělat zkoušku.
- 95 Zvoní. U: Ještě nekončíme. Vážení. Dnes jsme vyřešili dost příkladů. Doma si počítejte, když nebudete nějaký vědět, tak ho přineste a spočítáme ho ve škole.
- 96 Ž: Ten papír si máme nechat?
- 97 U: Papír si nechte. Vráťte mi ho příští týden.
- 98 Použité metody: samostatná práce jednotlivců s kontrolou učitele a případnou kontrolou s tabulí
- 99 Pomůcky: pracovní list - mám ho k dispozici, sešit, tabule
- 100 Domácí úkoly: propočítávání rovnic, dle svého (záleží na každém žákovi)
- 101 Hodnocení žákovy činnosti (diagnostické metody) a atmosféry
- 102 Žáci víceméně pracovali dle pokynů učitele. Ve chvíli nevědomosti se obraceli na učitelku, aby jim v řešení našla chybu nebo vysvětlila, co mají dále dělat.
- 103 Aktivní je v hodině pár žáků a nejvíce p. učitelka. Mnoho žáků za celou hodinu spočítalo velmi málo příkladů, protože evidentně nechtěli pracovat.
- 104 Žák vedle mě spočítal nejméně 6 rovnic se zkouškou.
- 105 V hodině byla velmi rušná atmosféra.
- 106 Didaktické a jiné poznámky k průběhu hodiny
- 107 Procvičovací hodina.

108 Mnozí žáci se skutečně nesnažili a chtěli, aby to učitelka téměř počítala místo nich, nebo
109 jim alespoň „naservírovala“ celý postup řešení. Vzhledem k tomu, že si každý měl počítat
vlastním tempem, tak se záhy rozešlo počítání na tabuli s tím, co počítali do sešitu.
Někteří byli rychlejší, ale někteří byli dokonce pomalejší i o 2 rovnice za celou hodinu.

Příloha 6: Seznam tabulek a obrázků

Tabulka 2.1: Model devíti polí způsobu výchovy. (Čáp, Mareš, 2001, s. 306)

Tabulka 3.1: Srovnání učebnic podle kritérií

Tabulka 4.1: Údaje o respondentech

Tabulka 4.2: Seznam kódů s ilustracemi

Tabulka 4.3: Tabulka využívání různých metod učiteli

Obrázek 2.1: Tři styly výchovy (Lewin, K., 1939 – In Čáp, Mareš, 2001)

Obrázek 2.2: Model dvou dimenzí postojů (Schaefer, E.S., 1959 – In Čáp, Mareš, 2001)

Obrázek 2.3: Kategorizace chyb (Hall, 2002, s. 35)

Obrázek 3.1: Definice lineární rovnice podle M. Krynického

Obrázek 3.2: Postup řešení součtového trojúhelníku (Koudelková, 2011)

Obrázek 3.3: Diagram

Obrázek 3.4: Tabulka

Obrázek 3.5: Měníč

Obrázek 3.6: Definice obrázkem se snadnou formulací

Obrázek 3.7: Popis řešení rovnice

Obrázek 3.8: Použití modelu vah

Obrázek 3.9: Demonstrace rovnosti v obdélníku

Obrázek 3.10: Neznámé rozměry obdélníků

Obrázek 3.11: Geometrická úloha 1

Obrázek 3.12: Geometrická úloha 2

Obrázek 3.13: Pojem a řešení rovnice v učebnici

Obrázek 3.14: Váhy a rovnice

Obrázek 3.15: Součtový trojúhelník

Obrázek 3.16: Magické čtverce

Obrázek 4.1: Žákovské řešení s chybami 1

Obrázek 4.2: Žákovské řešení s chybami 2

Obrázek 4.3: Žákovské řešení s chybami 3