UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KONCEPTUÁLNE ÚLOHY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

Rigorózní práce

2013

Mgr. Denisa Harčarová

UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
PRÍRODOVEDECKÁ FAKULTA

KONCEPTUÁLNE ÚLOHY VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY

Diplomová práca

Študijný program:	Učiteľstvo anglického jazyka a literatúry - matematiky
Pracovisko (katedra/ústav):	Ústav matematických vied
Vedúci diplomovej práce:	RNDr. Ingrid Semanišinová, PhD.
Konzultant diplomovej práce:	RNDr. Jozef Hanč, PhD.

Košice 2012

Bc. Denisa Gallová

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Košice 19. 4. 2012 ....…….......................

Denisa Gallová

Poďakovanie

Chcela by som sa poďakovať svojej vedúcej diplomovej práce RNDr. Ingrid Semanišinovej, PhD. za poskytnuté materiály, informácie, skúsenosti a cenné rady, ktoré mi napomáhali pri tvorbe a pri písaní tejto práce. Moje poďakovanie taktiež patrí RNDr. Jozefovi Hančovi, PhD. za pomoc pri zbieraní údajov potrebných pre túto prácu.

ABSTRAKT

Cieľom tejto diplomovej práce je objasniť metódu Peer Instruction, ktorá je založená na použití konceptuálnych úloh. Práca vysvetľuje dôvody vzniku tejto metódy, zaoberá sa miskoncepciami študentov, ktoré sú dôvodom na zmenu vyučovacieho procesu, v ktorom sa pasívna úloha študentov mení na aktívnu účasť vo vyučovacom procese. Tiež sa zaoberá použitím tejto metódy vo vyučovaní, konkrétne sa zameriava na tematický celok Deliteľnosť prirodzených čísel. Nachádza sa tu charakteristika vybraných slovenských a českých učebníc z hľadiska použitia v rámci metódy Peer Instruction. Posledná kapitola je venovaná použitiu konceptuálnych úloh vo vyučovaní matematiky. Súčasťou tejto kapitoly sú aj skúsenosti z vyučovania na dvoch gymnáziách.

ABSTRACT

The purpose of this diploma thesis is to explore method of teaching mathematics called Peer Instruction based on concetpual tasks. Diploma thesis explains the needs for its development, describes the misconceptions of students, which are the reason for changing the focus of teaching from passive learning to active participation. It also shows the usage of this method during the lesson. The main focus is the topic Divisibility of natural numbers. Slovak and Czech students textbooks are characterized concerning the possibility to be used in Peer Instruction teaching. The last chapter deals with using the conceptual tasks in the teaching process, which took place in two grammar schools.

OBSAH

ZOZNAM OBRÁZKOV

ÚVOD

„Vieš spočítavať?“ spýtala sa Biela kráľovná. *„Koľko je jeden a jeden a jeden a jeden a jeden a jeden a jeden a jeden a jeden a jeden?“*
„Neviem,“ odpovedala Alica. *„Nejako som sa v tom stratila.“*

Lewis Carroll (Za zrkadlom a čo tam Alica našla)

Nie sú naši študenti matematiky mnohokrát podobne stratení? Obzvlášť, keď majú pocit, že všetky informácie prichádzajú príliš rýchlo a nedajú sa zapamätať. Učitelia matematiky neučia predsa nič komplikované, takmer každý má potenciál sa to naučiť. Dá sa to vôbec zmeniť? Ako vidíme v úryvku z knihy od Lewisa Carrolla, problém nebol v tom, že by Alica nevedela spočítavať. Problém bol v tom, že úloha, ktorú jej Biela kráľovná zadala, nebola zameraná na sčítavanie, ale na pamäť. Bolo potrebné zapamätať si, koľkokrát kráľovná pridala číslo jeden.

A presne tu leží kľúč k zmene. Naše otázky a vyučovacie metódy by nemali byť zamerané na pamäť, na schopnosť žiakov „nabifľovať sa“ preberané učivo.

Táto diplomová práca sa zaoberá novým spôsobom, ako pristupovať k vyučovaniu matematiky a tým je metóda Peer Instruction. V prvej kapitole vysvetľujeme dôvody hľadania novej metódy pri výučbe matematiky. Pozrieme sa na to, akými spôsobmi študenti pristupujú k vyučovaciemu procesu a s akými predstavami na vyučovanie prichádzajú.

Kapitoly dva a tri sa venujú počiatkom tejto metódy na Harvardskej univerzite v 90-tych rokoch dvadsiateho storočia. Za jej vznikom stojí Eric Mazur, ktorý metódu Peer Instruction začal používať pri vyučovaní fyziky. Tá sa neskôr začala používať aj v iných predmetoch. My sa budeme zaoberať jej použitím v rámci vyučovania matematiky.

Štvrtá kapitola sa zaoberá charakteristikou vybraných slovenských a českých učebníc pre základné školy, ale aj pre gymnázia. Je zameraná na tematický celok Deliteľnosť prirodzených čísel, na zavádzanie pojmov, dokazovanie tvrdení, zameranie úloh v jednotlivých učebniciach a na výskyt konceptuálnych úloh, ktoré môžu byť použité v metóde Peer Instruction.

Posledná kapitola sa venuje použitiu konceptuálnych úloh vo vyučovaní matematiky. Nachádza sa tam zbierka konceptuálnych úloh k tematickému celku Deliteľnosť prirodzených čísel prispôsobených pre metódu Peer Instruction. Niektoré úlohy boli použité vo vyučovaní na Evanjelickom kolegiálnom gymnáziu v Prešove alebo na Gymnáziu Alejová v Košiciach. Uvádzame taktiež komentáre k jednotlivým úlohám a skúsenosti z použitia týchto úloh v rámci vyučovania.

1 DÔVODY HĽADANIA NOVEJ METÓDY

Matematika je z hľadiska obľúbenosti u študentov veľmi zaujímavým predmetom. Pre mnohých z nich je matematika disciplínou, ktorej sa v živote chcú za každú cenu vyhnúť, nerozumejú jej, a nikdy jej ani rozumieť nebudú. Aspoň sú o tom presvedčení. Keď sa snažíme zistiť, čo sa skrýva za týmto presvedčením, prídeme na to, že je pre nich náročné učiť sa matematiku, pretože aj keď sa naučia všetky definície, tvrdenia, príklady, ktoré sa prerátali na hodine, na písomke aj tak neuspejú. Ako sa to teda majú naučiť?

Pre druhú skupinu študentov je matematika najobľúbenejším predmetom, pretože ako tvrdia oni, stačí im len sedieť na hodine a z písomky majú jednotky. Nemusia vynakladať žiadne špeciálne úsilie doma, aby sa matematiku naučili. Jednoducho to vedia. Prvá skupina študentov túto druhú obdivuje, niekedy im aj závidí, ale hlavne nechápe, ako je to možné.

Ako je možné, že ten istý predmet spôsobuje také odlišné druhy reakcií? Hlavný rozdiel je v prístupe daných študentov.

1.1 Miskoncepcie

Študenti majú vo všeobecnosti dva prístupy k učeniu. Prvý prístup môžeme označiť ako povrchový alebo formálny a ten druhý ako hĺbkový alebo neformálny. **Hejný a Kuřina** [1] definujú tieto dva prístupy nasledovne:

Povrchový prístup *je ten, ktorý sa opiera najmä o pamäťové učenie, memorovanie, o rozširovanie poznatkov bez väčšej snahy dopátrať sa ich zmyslu. Je často postavený na mechanickom „biflovaní". Poznatky sú pritom formálne, študenti nevedia rozlíšiť podstatné od nepodstatného a skoro zabúdajú na to, čo sa takýmto spôsobom naučili.*

Hĺbkový prístup *vychádza zo snahy učiteľa poskytnúť zmysel učiva, rozumieť mu, rozumieť súvislostiam a dôsledkom. Študenti pritom rozumejú učivu a taktiež pochopili jeho obsah a štruktúru.*

Často sa stáva, že študenti majú ohľadom určitých pojmov tzv. miskoncepcie a tie im zabraňujú skutočne porozumieť preberanému učivu. Ak by sme to chceli úplne zjednodušiť, miskoncepcie sú vlastne mylné predstavy, ktoré sú spôsobené nesprávnym interpretovaním istého matematického princípu.

Ako zistíme, že študenti majú miskoncepcie?

Opýtame sa nejakú otázku a zistíme, že odpoveď je podozrivo zvláštna. Trochu môže pripomínať správnu odpoveď, ale je v podstate prekrútená – zle interpretovaná. Následne sa opýtame nadväzujúcu otázku, aby sme lepšie pochopili, ako to študent myslel a buď prídeme na to, že nevie, čo sa skrýva za daným pojmom alebo jeho odpoveď je takisto zvláštnym interpretovaním naučeného princípu. Takýmto postupom sme najčastejšie schopní diagnostikovať problém miskoncepcií u študentov.

Celý proces môže vyzerať napríklad takto, ako je opísaný v knihe **Dítě, škola a matematika** [2] :

Učiteľka: Máme narysovať tupouhlý trojuholník a rozdeliť ho na dva pravouhlé trojuholníky. Kto nám povie, čo je to tupouhlý trojuholník? Tak Iva.

Iva (*vstane, prižmúri oči, vychrlí*): Trojuholník, ktorého všetky tri uhly sú tupé, sa nazýva tupouhlý.

Učiteľka: Iva, trošku si sa uponáhľala. Vieš čo, poď k tabuli a ukáž, ktoré trojuholníky sú tupouhlé (*na tabuli je sedem trojuholníkov, z nich sú dva tupouhlé*).

Iva (*ide k tabuli a oznamuje*): Ja to neviem ukázať, viem to iba povedať.

Učiteľka (*prekvapená otvoreným priznaním žiačky*): Tak mi povedz, čo je to tupý uhol.

Iva (*úplne suverénne*): Uhol, ktorý je väčší ako pravý a menší ako priamy, sa nazýva tupý.

Učiteľka: A to by si už vedela nakresliť? Myslím ten pravý uhol, priamy uhol a tupý uhol.

Iva (*je vyvedená z miery*): Nie, ja to viem iba vysvetliť, ale neviem to nakresliť. (*skôr sebavedomo ako ustráchane sa pýta*) Povedala som to nesprávne?

Učiteľka: To o tých uhloch to bolo dobre, ale to o tupouhlom trojuholníku bolo nesprávne.

Iva (*nalistuje v učebnici text v rámčeku*): Tu to je: *„Trojuholník, ktorý má všetky uhly ostré, sa nazýva ostrouhlý.“*

Učiteľka: To je dobre, ale to platí o ostrouhlom trojuholníku a nie o tupouhlom.

Iva (*uvedomila si chybu, sčervenela*): Tak to som sa pomýlila. Je to inde (*hneď nalistuje iný rámček, v ktorom sa hovorí o tupouhlom trojuholníku*).

V tomto krátkom úryvku je najzarážajúcejšie Ivino tvrdenie, že ona tupouhlý trojuholník nevie nakresliť, ale vie povedať, čo to je. Ako je to možné, že študenti majú o matematike predstavu, že je to predmet, ktorý treba zvládnuť pamäťovo? A čo robiť, keď sa stretneme so študentom, ktorý nevie niečo „ukázať“, ale vie to iba „povedať“?

Čo máme urobiť, keď zistíme, že študenti majú miskoncepcie?

Najprv sa snažíme zistiť ako hlboko táto miskoncepcia siaha. Ak všetky hĺbkové poznatky sú v poriadku, stačí, ak študentovi objasníme, prečo je táto jeho predstava nesprávna a vysvetlíme mu, ako sa dá daný princíp uplatniť v tejto konkrétnej situácii. Ak však zistíme, že miskoncepcia pramení z množstva ďalších miskoncepcií, ktoré si študent buduje už pár rokov a že presne tak ako on, uvažuje väčšina triedy, stojíme pred náročnou úlohou. A to, pretransformovať spôsob výučby a uvažovanie študentov z povrchného, ktoré časom na seba nabaľuje veľké množstvo práve takýchto miskoncepcií, na hĺbkové, ktoré vedie k skutočnému porozumeniu postavenému na správnej interpretácii už naučených pojmov.

1.2 Príklady miskoncepcií

Ako sme spomínali v predchádzajúcej podkapitole, žiaci prichádzajú do triedy s istým intuitívnym porozumením matematických pravidiel, ale taktiež aj s miskoncepciami. Uvedieme niektoré z nich:

1. Číslo s tromi číslicami je vždy väčšie ako s dvomi.

Niektorí žiaci sú presvedčení, že 3.24 je väčšie ako 4.6. Ich argumentom je, že prvé z nich má viacero číslic. Prečo? Pretože počas prvých pár rokov v škole sa stretávali iba s prirodzenými číslami, kde číslo, ktoré malo viac číslic, bolo naozaj väčšie.

2. Keď násobíme dve čísla, výsledok je vždy väčší ako činitele.

Ďalšie pravidlo, ktoré funguje pre prirodzené čísla, ale zlyháva, pri číslach menších ako jedna. Takže $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$ (inými slovami aj polovica zo štvrtiny) nie je väčšia ako $\frac{1}{2}$ alebo $\frac{1}{4}$. To hneď vyvracia tvrdenie, že súčin dvoch čísel je vždy väčší ako oba činitele.

3. Ktorý zlomok je väčší?: $\frac{1}{3}$ alebo $\frac{1}{6}$?

Koľko žiakov by odpovedalo, že $\frac{1}{6}$, pretože vedia, že 6 je viac ako 3? Táto odpoveď odhaľuje, že žiaci majú problém s porozumením pojmu zlomok ako vyjadrením mnohosti. Praktické ukážky, ako napríklad torta nakrájaná na tretiny alebo šestiny a porovnávanie týchto kusov môžu značne pomôcť odstrániť túto miskoncepciu.

4. Sčítavanie zlomkov

Dokonca aj stredoškoláci majú mnohokrát problém sčítať zlomky ako napr. $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$. Pre mnohých to bude $\frac{5}{13}$. Jednoducho sčítajú čitatele a menovatele a majú výsledok.

5. Násobiť 10 znamená pridať nulu.

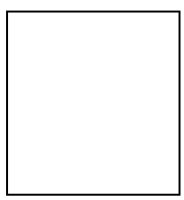
Nie vždy! Napríklad pre súčiny 23.7 * 10, 0.35 * 10, alebo $\frac{1}{6}$ * 10 to neplatí. 23.7 * 10 nie je predsa 23.70. Opäť je dôležité si uvedomiť, že pre mnoho žiakov sú iné ako prirodzené čísla mimo rozmedzia bežného uvažovania. Je dôležité upozorňovať, že sa stretávame aj číslami ako napríklad zlomky alebo desatinné čísla.

6. Pomer: tri jablká a dve hrušky.

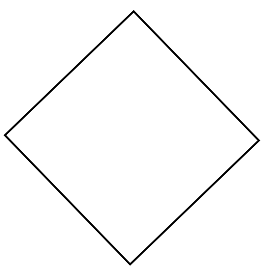
Ak sa opýtame akú časť ovocia tvoria hrušky, koľko detí odpovie $\frac{2}{3}$ namiesto $\frac{2}{5}$? Prečo? Lebo porovnávajú hrušky s jablkami, nie hrušky s celkovým počtom ovocia.

7. Geometrické útvary sa dajú rozoznať iba keď sú nakreslené tradičným spôsobom.

Učitelia často posilňujú túto miskoncepciu tým, že štvorec kreslia vždy takto:



Ak sa žiaci stretnú s týmto obrázkom:



sú presvedčení, že je to kosoštvorec. Táto miskoncepcia sa týka aj pravouhlých alebo rovnoramenných trojuholníkov, obdĺžnikov alebo lichobežníkov.

8. Ak je v zadaní slovo „prehrať“, bude to znamenať operáciu „odčítanie“.

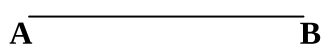
Uvažujme úlohu: *Chlapec prehral 4 guľôčky, zostalo mu 7 guľôčok. Koľko guľôčok mal pred hrou?*

Ak žiaci vidia v zadaní slovo „prehrať“ automaticky predpokladajú, že guľôčky budú odčítavať. Prehrať predsa znamená prísť o ne, čiže chlapec bude mať menej. Neuvedomia si, že tých 7 guľôčok zo zadania je to „menšie“ číslo – to, čo mu zostalo.

9. Pre každé b platí -b < 0

Hneď ako žiaci vidia pred „písmenom“ znamienko mínus, jedná sa samozrejme o záporné číslo. Čiže -b je vždy menšie ako 0. To, na čo sa zabúda je, že b môže byť aj záporné číslo.

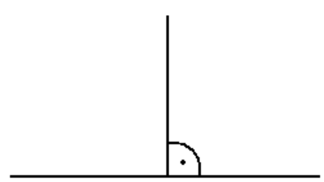
10. Na obrázku sú dve úsečky.



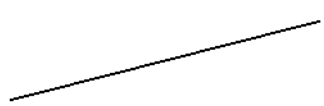
Žiaci majú pocit, že záleží na poradí písmen. A teda, že jedna úsečka je AB a druhá BA.

11. Kolmica je vždy rovnobežná s okrajom papiera.

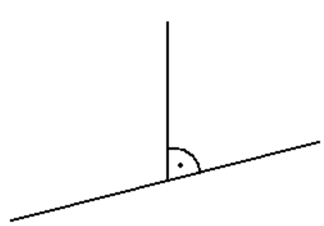
Ak požiadate žiakov, aby nakreslili kolmicu k vodorovnej priamke, väčšina to zvládne bez zaváhania.



Ak však majú nakresliť kolmicu k takejto priamke



stáva sa, že to dopadne takto:



12. 10% je vždy rovnaké číslo

Uvažujme úlohu: *Medveď mal na začiatku zimy hmotnosť 400 kg. Cez zimu schudol o 10% a potom do leta 10% svojej hmotnosti (po zime) pribral. Váži medveď opäť toľko ako na začiatku zimy?*

Častá odpoveď, ktorou sa stretneme je: áno, samozrejme, že váži rovnako. Veď schudol 10% a naspäť pribral 10%. Žiaci neberú do úvahy, že to aké číslo sa skrýva za 10 percentami, závisí od základu, z ktorého tieto percentá počítame.

13. Ak rátam aritmetický priemer, nulové hodnoty vynechávam.

Uvažujme úlohu: *6.A písala písomku z matematiky. Počet bodov získaných žiakmi bol nasledovný: 10, 8, 4, 0, 9, 5, 9, 9, 0, 2. Aký je priemerný počet bodov získaných v 6.A?*

Žiaci spočítajú počet bodov $10 + 8 + 4 + 9 + 5 + 9 + 9 + 2 = 56$. Nuly neuvažujú, lebo tie nezmenia nič na súčte. Ďalej vedia, tento výsledok majú vydeliť počtom sčítaných čísel $56 : 8 = 7$. Zabúdajú, že pri počte sčítaných čísel musia brať do úvahy aj tie dve nuly.

Čiže $56 : 10 = 5{,}6$.

14. Spoločná práca sa ráta ako aritmetický priemer.

Uvažujme úlohu: *Jeden maliar vymaľuje izbu za 8 hodín, druhý za 10 hodín. Ako dlho budú maľovať izbu spoločne?*

Nie je nič nezvyčajné, že ak žiaci vidia takúto úlohu, prvá odpoveď, ktorú od nich dostaneme je 9 hodín. Jednoducho vyrátajú aritmetický priemer. Keby si situáciu reálne predstavili, hneď by prišli na to, že obom im to nemôže trvať dlhšie ako jednému, ktorému to trvá 8 hodín. Namiesto toho mnoho žiakov zvolí prístup formalizmu a rátajú aritmetický priemer.

Takéto príklady formálneho učenia sa bez hlbšieho porozumenia by sme vedeli nájsť snáď aj na každej vyučovacej hodine. Žiaci akoby boli presvedčení, že matematika je zbierkou poučiek a vzorcov a že niet inej možnosti ako sa učiť všetkému spamäti.

Ak sme si už vedomí toho, že naučiť žiakov skutočne porozumieť matematike a nielen nejakej manipulácii s poučkami a vzorcami, je úloha, pred ktorou stojí každý učiteľ, otázkou zostáva: Ako tak urobiť? Ako učiť tak, aby sa žiaci zbavovali týchto miskoncepcií a bolo u nich budované skutočné porozumenie? Jedným zo spôsobov, o ktorom hovoria nasledujúce kapitoly, je Metóda Peer Instruction.

2 METÓDA PEER INSTRUCTION

2.1 Čo je to metóda Peer Instruction

Eric Mazur

Metóda Peer Instruction bola rozpracovaná najmä fyzikom Harvardskej univerzity **Ericom Mazurom**. Ako uvádza vo svojom článku *Understanding or memorization: Are we teaching the right thing? (Porozumenie alebo učenie sa spamäti: Učíme tým správnym spôsobom?) [3]* uplynulých deväť rokov učil Úvod do fyziky pre inžinierske, ale aj vedecké smery. Ako ďalej spomína, bol vcelku spokojný so svojím prístupom k vyučovaniu. Potvrdzoval to aj fakt, že jeho študenti nemali zväčša problém s riešením náročnejších úloh. Stretol sa však s článkom Davida Hestensa z Arizonskej štátnej univerzity, o ktorom hovorí, že mu „otvoril oči“. V tomto článku Hestens uviedol, že študenti, ktorí začínajú so štúdiom fyziky, prichádzajú s určitými predstavami o fyzikálnych javoch. Tieto predstavy sú väčšinou intuitívne, odvodené z osobnej skúsenosti a nie vždy korektné.

Ako príklad uvádza Newtonov tretí zákon - zákon akcie a reakcie. Drvivá väčšina študentov fyziky vie tento zákon kedykoľvek odrecitovať alebo vypočítať komplikované úlohy. Keď však boli postavení pred neštandardnú úlohu, ukázalo sa, že poznať Newtonov zákon, neznamená automaticky vedieť ho aplikovať v praxi. Ako príklad uvádza nasledovnú úlohu: *Došlo k čelnej zrážke kamióna a osobného auta. Ktoré auto pôsobí na to druhé väčšou silou?*

“Samozrejmá”, ale nesprávna odpoveď je jasná. Kamión pôsobí väčšou silou ako osobné auto. Pri tejto úlohe si Mazur povedal: „Moji študenti určite odpovedia správne“. A tak sa rozhodol zadať im ju. Prvé varovanie však prišlo vtedy, keď sa jeden študent opýtal: „Profesor Mazur, ako máme odpovedať na tieto otázky? Podľa toho, ako ste nás učili, alebo ako ja *rozmýšľam* o týchto veciach?“

To ho viedlo k otázke: **„Učia sa študenti skutočnú fyziku alebo len manipuláciu so symbolmi?“**

Mazur, ktorý sa zaoberal týmto problémom, vytvoril a zaviedol niečo, čo nazval *„konceptestami“*. [4] Vďaka týmto konceptestom sa rola študenta zmenila z pasívneho pozorovateľa na aktívneho účastníka.

Pod konceptestom rozumieme súbor konceptuálnych otázok, z ktorých má každá viacero možností odpovede, no vždy len jednu správnu. Sú zamerané na časté miskoncepcie žiakov, na porozumenie pojmov a metód riešenia. Jedným zo spôsobov ako takéto konceptesty vytvárať, je zozbieranie informácií z predchádzajúcich rokov o tom, aké chyby študenti robili v testoch, s akými problémami sa stretávali alebo čo nevedeli riešiť v domácich úlohách. Ďalšou pomôckou môže byť literatúra, ktorá sa venuje práve takejto tematike. Mazur taktiež sformuloval niekoľko zásad, podľa ktorých by sme sa mali riadiť, ak vytvárame konceptesty.

Pravidlá pre otázku v koncepteste:

A) je zameraná na porozumenie jedného pojmu alebo princípu,
B) nie je zameraná na pamäť, ale na porozumenie (nemala by sa dať vyriešiť jednoduchým dosadzovaním do vzorcov),
C) obsahuje adekvátne možnosti odpovedí,
D) je položená jednoznačne,
E) nie je ani príliš jednoduchá, ani príliš náročná.

Prvé tri z týchto bodov sú obzvlášť dôležité, pretože priamo ovplyvňujú spätnú väzbu, ktorú od študentov dostávame.

Ak je v otázke zahrnutý viac ako jeden kľúčový pojem, ťažko potom rozoznáme, čoho presne sa miskoncepcia týka, ak študenti neodpovedali správne.

Ak sa dá úloha vyriešiť len tým, že študenti dopĺňajú do vzorca, nezisťujeme ich skutočné porozumenie, ale iba to, či sú schopní učiť sa spamäti poučky a vzorce.

Keď vytvárame možnosti odpovedí musíme myslieť aj na to, aby tie nesprávne poskytovali odpovede, ktoré sú spojené s najčastejšími miskoncepciami. Jeden zo spôsobov, ako vytvárať takéto otázky, je nechať študentov doplniť (nie vybrať) odpoveď, ktorá je podľa nich správna. Potom len vyhodnotíme najčastejšie chybné odpovede a pre ďalšiu triedu máme pripravený konceptest aj s nesprávnymi možnosťami odpovedí.

Ak nie je otázka položená jednoznačne a viaceré možnosti prichádzajú do úvahy ako správne, nezistíme, či študenti len nesprávne interpretovali úlohu alebo naozaj nerozumejú preberanému pojmu.

Pri poslednej zásade je dôležité zdôrazniť, že konceptuálne otázky sú neštandardné typy úloh, nie úlohy aké by sme použili na písomke. Zaujíma nás hlbšie porozumenie pojmov a preto ak zadávame konceptuálne otázky, prichádzajú do úvahy aj tzv. „chytáky". Na druhej strane by to však mali byť úlohy, ktoré sú časovo nenáročné a nevyžadujú si zdĺhavé počítanie.

2.2 Použitie konceptuálnych úloh vo vyučovaní

Mazur navrhol nasledujúci postup pri výučbe:

60 minútovú vyučovaciu hodinu rozdelil na štyri 15 minútové časti. V každej časti použil jeden zo 4 konceptestov (jeden konceptest obsahuje zvyčajne jednu, resp. dve otázky).

- Prvých 7-8 minút každej časti je venovaných **vysvetľovaniu pojmov** týkajúcich sa vyučovaných (matematických) princípov.

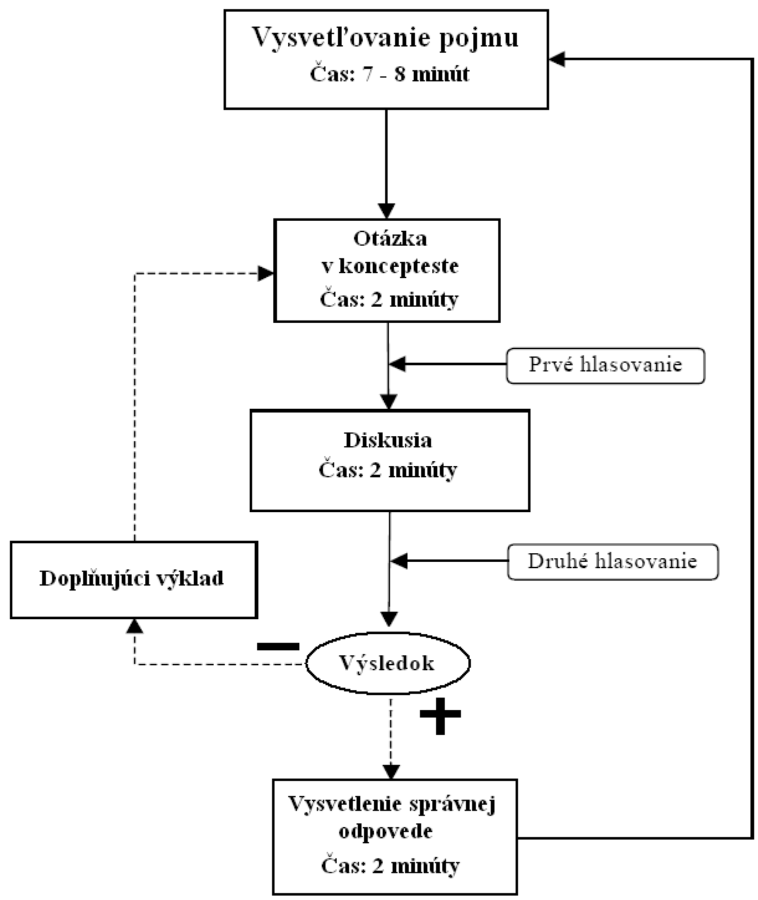
- Potom majú študenti za úlohu samostatne **odpovedať na otázku v koncepteste a následne hlasujú**. To, ako študenti odpovedali na otázku, ukáže do akej miery študenti porozumeli vysvetľovanému pojmu, javu, princípu a pod.

- Po prvom hlasovaní na zadanú otázku majú študenti čas na to, aby **diskutovali medzi sebou** a navzájom sa presviedčali o správnosti svojich odpovedí.

- Po diskusii študenti **opäť hlasujú o tej istej** otázke**.**

- Celý 15 minútový blok končí tým, že **vyučujúci krátko vysvetlí správnu odpoveď** (v prípade potreby zadá študentom ďalšiu podobnú otázku).

Priebeh jednej časti takejto výučby je znázornený aj na obrázku 1.



Obr. 1: Priebeh metódy Peer Instruction počas jednej 15 minútovej časti

Konkrétny príklad priebehu jednej pätnásť minútovej časti:

1) Vyučujúci v priebehu 7 – 8 minút definuje pojem prvočíslo: *"Čísla, ktoré majú iba dva delitele, a to 1 a samo seba, nazývame prvočísla."*

2) Nasleduje **konceptest**. Namiesto toho, aby sa vyučujúci pýtal, či vedia študenti definovať, čo je to prvočíslo, môže im položiť napríklad takúto otázku (táto koncepuálna úloha je bližšie popísaná v kapitole 5, úloha 5.3.3):

„Jedného dňa sa vlk Kleofáš vlúpal do košiara, kde bolo sto oviec. Každá z nich bola označená číslom od 1 do 100. Kým si vlk uvedomil, koľko šťastia ho stretlo, ovečka s číslom 1 mu utiekla. Keďže bol veľmi hladný, rozhodol sa, že všetky ovečky zje. Ale keďže bol aj veľmi poverčivý, prvý deň už žiadnu nezjedol. Na druhý deň zjedol všetky ovečky, ktoré boli označené číslom deliteľným dvoma. Tretí deň zjedol všetky násobky trojky, štvrtý deň všetky násobky štvorky atď. Na konci bol už taký plný, že posledná ovečka mu utiekla. Akým číslom bola označená?“

- **100**
- **99**
- **97**
- **91**

Nemali by sme podceniť dôležitosť kladenia správnych otázok. Úspech metódy Peer Instruction spočíva aj v kvalite a relevantnosti kladených otázok. Ak v prvej fáze bolo vysvetlených viacero pojmov, vyučujúci by mal mať k dispozícii konceptuálnu otázku, ktorá preverí každý z kľúčových pojmov. Správna odpoveď je v tomto prípade C).

3) Po tom, čo študenti hlasovali, majú čas na to, aby **diskutovali medzi sebou** a navzájom sa presviedčali o svojich odpovediach. Práve tento krok je veľmi dôležitý v Peer Instruction. Zaujímavé je, že konkrétne pri tejto “otázke o vlkovi“ 45% študentov odpovedalo správne už na prvýkrát, ale až 90% po možnosti diskusie so spolužiakmi (výsledky hlasovania sa nachádzajú v kapitole 5, úloha 5.3.3).

Mazur tento fakt vysvetľuje nasledovným spôsobom: „*Zdá sa, že študenti majú väčšiu schopnosť vysvetľovať princípy skryté za fyzikálnymi pojmami ako učitelia. A to preto, lebo učiteľ už tak dlho rozumie tomu princípu, že prípadné miskoncepcie sú preňho cudzie. Na druhej strane, študenti, ktorí práve pochopili nejaký princíp, si stále uvedomujú ťažkosti, s ktorými sa trápia ich spolužiaci. Následne vedia zdôrazniť potrebné informácie, aby tieto miskoncepcie odstránili.“ [3]*

4) Študenti znovu hlasujú.

5) Po druhom hlasovaní existujú v zásade dve možnosti. Ak študenti odpovedali väčšinou správne (t.j. viac ako 75% správnych odpovedí), prednášajúci prejde na novú tému. Inak by mal vyučujúci spomaliť, venovať viac času vysvetľovaniu a uzavrieť ho ďalším konceptestom na túto problematickú tému. To zabráni tomu, aby sa miskoncepcie, ktoré študenti ohľadom danej témy majú, prehlbovali.

2.3 Spôsoby spätnej väzby

Metóda Peer Instruction je obzvlášť výhodná vyučovacia metóda kvôli tomu, že nám poskytuje okamžitú spätnú väzbu od študentov. To nám umožňuje prispôsobiť hodinu ich vedomostiam a zaručí to, že s nami budú „vedieť držať krok". Na to, aby sme vedeli mapovať odpovede študentov pri hlasovaní v rámci konceptestov, môžeme použiť viacero metód.

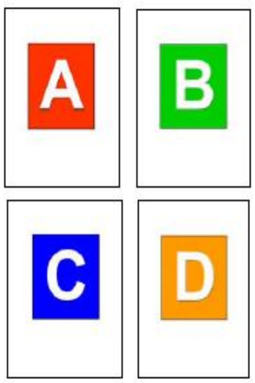
Hlasovanie môže prebiehať:

- Zdvihnutím ruky
- Zdvihnutím farebnej kartičky
- Pomocou formulárov s možnosťami odpovedí
- Pomocou hlasovacích zariadení
- Pomocou mobilných telefónov

2.3.1 Hlasovanie zdvihnutím ruky

Najmenej náročná metóda získavania spätnej väzby v Peer Instruction. Nevyžaduje si žiadne ďalšie pomôcky a je časovo nenáročná. Nevýhodou tohto spôsobu získavania spätnej väzby je nezachovanie anonymity pri hlasovaní, čo môže viesť niektorých študentov k tomu, že nehlasujú úplne podľa svojho presvedčenia, ale podľa toho, ako hlasovala väčšina spolužiakov alebo spolužiaci, ktorí sú považovaní za „dobrých v matematike“. Ďalšou nevýhodou je aj značná neprehľadnosť a problém s robením si záznamov o celkovom hlasovaní študentov. Stále je to však najjednoduchší spôsob hlasovania.

2.3.2 Hlasovanie zdvihnutím farebnej kartičky



Veľmi podobným spôsobom získavania spätnej väzby je aj hlasovanie pomocou farebných kartičiek. V tomto prípade musíme mať pre každého študenta k dispozícii farebné kartičky. Ich počet je taký, ako je počet možných odpovedí v koncepteste. Študent si vyberie možnosť, ktorú považuje za správnu a podľa toho zodvihne kartičku. Toto hlasovanie je taktiež finančne nenáročné a netrvá dlho. Nevýhodou je však opäť istá neprehľadnosť, aj keď to, že sú kartičky farebne odlíšené, môže do istej miery pomôcť. Anonymita pri hlasovaní nie je úplne zachovaná, pretože študenti pri hlasovaní vidia akú kartičku zodvihli ich spolužiaci. Avšak pri prvom hlasovaní nie sú študenti ovlyvnení ostatnými, keďže najprv si každý premyslí svoju odpoveď a kartičky sa potom dvíhajú súčasne.

2.3.3 Hlasovanie pomocou formulárov s možnosťami odpovedí

Ďalšou metódou sú formuláre s možnosťami odpovedí. Každý študent má pred sebou hárok papiera, na ktorý počas hodiny zaznačuje odpovede v koncepteste. Táto metóda je veľmi presná a poskytuje možnosť dôsledného zdokumentovania odpovedí študentov. Nevýhodou však zostáva to, že spätná väzba nie je okamžitá. Učiteľ sa k odpovediam študentom dostane najskôr po skončení hodiny a teda miskoncepcie, ktoré pomocou konceptestov objaví, môže riešiť až na nasledujúcej hodine. Preto tento spôsob nie je práve najvhodnejší pre metódu Peer Instructions.

2.3.4 Hlasovanie pomocou hlasovacích zariadení

Veľmi pohodlnou metódou je hlasovanie pomocou hlasovacích zariadení. Pri tomto spôsobe má každý študent k dispozícii hlasovacie zariadenie, na ktorom stlačením tlačidla zaznačí svoju odpoveď. Tieto zariadenia sú napojené na hlavný počítač, ktorý ma k dispozícii vyučujúci. Tento počítač zozbiera odpovede a hneď poskytne aj vyhodnotenie. Tento spôsob je rýchly, presný, zachováva anonymitu a poskytuje možnosť uloženia záznamov z hodiny. Jeho nevýhodou je však finančná náročnosť.

2.3.5 Hlasovanie pomocou mobilných telefónov

Poslednou spomenutou metódou hlasovania je hlasovanie pomocou mobilných telefónov. Spája v sebe všetky výhody hlasovania pomocou hlasovacích zariadení a navyše je finančne nenáročné. Je však nevyhnutné, aby každý študent mal mobilný telefón, na ktorom sa dá pripojiť na internet. Ďalšou podmienkou je wifi pripojenie na internet v triede. Vzhľadom na vývoj technológií a smerovanie školstva veríme, že je možné predpokladať, že práve tento spôsob spätnej väzby má najsvetlejšiu budúcnosť, čo sa týka jeho využitia v rámci metódy Peer Instruction.

Keďže metóda Peer Instruction si vyžaduje spätnú väzbu od študentov, je veľmi dôležité, aby sme vedeli zvážiť jednotlivé spôsoby získavania spätnej väzby a vybrať ten správny pre tú ktorú triedy. Kvôli väčšej prehľadnosti sú nasledujúcej tabuľke znázornené výhody a nevýhody spomínaných spôsobov získavania spätnej väzby.

	Poskytnutá anonymita	Prehľadnosť a možnosť zachovania výsledkov	Okamžitá spätná väzba	Finančná nenáročnosť
Zdvihnutie ruky	-	-	+	+
Zdvihnutie farebnej kartičky	+/-	-	+	+
Formuláre s možnosťami odpovedí	+	+	-	+/-
Hlasovacie zariadenia	+	+	+	-
Mobilné telefóny	+	+	+	+

Obr. 2 Tabuľka znázorňujúca výhody (+) a nevýhody (-) jednotlivých spôsobov spätnej väzby

3 METÓDA PEER INSTRUCTION V MATEMATIKE

Aj keď metóda Peer Instruction vznikla ako nová metóda vo vyučovaní fyziky na Harvardskej univerzite, táto metóda sa postupne rozšírila na iné univerzity, do iných krajín a v neposlednom rade do ďalších vyučovacích predmetov. Jedným z nich je aj matematika. V tejto kapitole sa pozrieme na začiatky a využitie konceptuálnych úloh vo vyučovaní matematiky.

3.1 Konceptuálne úlohy vo vyučovaní matematiky

D. Kadijevich

Je matematika predmet zameraný na naučené vedomosti alebo skutočné porozumenie? Je prístup študentov a učiteľov k výučbe povrchný alebo hĺbkový? Podľa **Djordje Kadijevicha** (Mathematical Institute, Serbian Academy of Siences and Arts) [5] je odpoveďou nepochybne prvá možnosť, keďže tradičný prísup k výučbe matematiky rozširuje naše poznatky pojmov bez ich skutočného porozumenia.

Tvrdí, že tieto zručnosti sú u študentov zvyčajne budované úlohami, ktoré sa dajú riešiť mechanicky, len pomocou naučených vzorcov a algoritmov bez toho, aby sme videli ich opodstatnenie.

Veľa študentov si myslí, že matematika je zbierka poučiek a návodov, učia sa ju pamäťovo. Následkom je, že aj v triede s veľkým množstvom študentov dosahujúcich výborné výsledky, len malé percento študentov skutočne rozumie tomu, čo sa skrýva za poznaním pojmov.

Stojí za to zvážiť, či by výučba matematiky nemala byť založená taktiež na konceptuálnych úlohách, pretože práve pomocou týchto sa dá určiť, či bolo dosiahnuté pravé porozumenie danej témy. Platí to obzvlášť dnes v čase, keď mnoho mechanických postupov je schopný vykonať počítač. Ten nám môže pomôcť tým, že už nemusíme toľko času venovať mechanickým výpočtom, ktoré dokáže počítač vykonať veľmi rýchlo, *ale ten čas môžeme venovať konceptuálnemu poznaniu, ktoré vedie k skutočnému porozumeniu.[5]*

K tomuto názoru sa pripájajú aj autori už viackrát spomínanej knihy Dítě, škola a matematika, ktorí jednu celú kapitolu venujú práve formálnym a neformálnym vedomostiam. Milan Hejný a František Kuřina tvrdia: *„Mnohí učitelia svojím prístupom k výučbe vyznávajú a v praxi presadzujú zásadu: bez učenia spamäti sa študent nezaobíde – najskôr sa musí naspamäť naučiť základné fakty, získať dostatočnú základňu poznatkov, vedieť si rýchlo spomenúť na tieto poznatky a tak možno niekedy v budúcnosti bude môcť riešiť problémy. Títo učitelia vyžadujú predovšetkým povrchný štýl učenia sa.*

Existujú však učitelia, ktorí dokážu počas svojich hodín stimulovať študentov k analytickému a kritickému mysleniu a to využitím učiva svojho oboru. Títo podporujú hĺbkový spôsob myslenia.“ [1]

Maria Terrell

Maria Terrell bola jedna z prvých medzi učiteľmi matematiky, ktorí sa zaoberali využitím metódy Peer Instruction v oblasti vyučovania matematiky.

Vo svojom článku *Asking good questions in the mathematics clasroom (Ako sa pýtať dobré otázky vo výučbe matematiky) [6]* predstavuje, ako nový prístup k učeniu zmenil jej postoj, aj postoj jej študentov k učeniu sa matematiky.

Maria Terrell začínala v roku 1972 ako učiteľka na Maloney High School v Meridene, Connecticut. Odvtedy učila aj na menších vysokých školách pre ženy, zameraných na humanitné vedy a dvoch štátnych univerzitách. V súčasnosti pôsobí na Matematickom oddelení Cornellskej univerzity. Ako spomína, väčšiu časť svojho života učila tzv. tradičným spôsobom. V roku 2000 dostala za úlohu pripravovať a viesť viac ako 80 budúcich učiteľov. Stala sa “expertom“ na učenie. Bola zodpovedná za to, aby pomáhala mladým nadšeným poslucháčom ich fakulty rozvíjať svoje učiteľské vlohy. Tak sa ponorila do kníh. Spomenula si, že už dávnejšie počula o nejakom novom prístupe k učeniu a čím viac o tom čítala, tým viac bola odhodlaná vyskúšať túto novú metódu v matematike. Najprv si určila ciele.

Ciele:

- Zabezpečiť prostredie aktívneho vyučovania
- Stimulovať zvedavosť a záujem študentov o matematiku
- Ponúknuť študentom dostatok príležitosti na vlastné závery a ich obhájenie v diskusii
- Pomôcť študentom zlepšovať porozumenie matematiky

Prvá otázka, ktorá sa vynorila, bola: **Ako sa vlastne študenti učia matematiku?** Študenti prichádzajú do triedy zvyčajne so základnými znalosťami pojmov, ale taktiež s miskoncepciami.

Z toho vyplynuli ďalšie otázky:

- Ako môžeme tieto vedomosti, ale aj chyby v porozumení identifikovať?
- Ako môžu študenti spojiť, porovnať a zopakovať si to, čo už vedia a včleniť do toho nové poznatky?

Potrebujeme metódu, ktorá by nám pomohla monitorovať, čo študenti už vedia a čo sa ešte iba učia. Potrebujeme metódu, ktorá nám rýchlo ukáže, ktorým smerom treba vyvíjať úsilie, aby sme budovali nielen poznatky, ale aj intuíciu a porozumenie.

Takáto metóda by sa mohla podobať na Sokratovský dialóg. Nie je to úplne nová myšlienka, ale zakladá sa na tom, že kľúč k úspechu leží v našej schopnosti opýtať sa správne otázky.

3.2 Ako sa pýtať dobré otázky vo vyučovaní matematiky

Uvažujúc nad touto otázkou sa Maria Terell stretla s metódou Peer Instuction, ktorú sme rozoberali v predchádzajúcej kapitole. Ako sama hovorí, bol to úžasný prístup k vyučovaniu, v tomto prípade fyziky. Základ tejto metódy tvorili dobré otázky. Otázky, ktoré stimulovali diskusiu. *Dobré otázky provokujú študentov k tomu, aby používali jazyk matematiky prirodzeným spôsobom na opísanie procesov a postupov, ktoré sú vo svojej podstate prirodzené a intuitívne známe. [7]* Rozmýšľala, či by bolo možné vymyslieť otázky podobného charakteru aj v matematike. Otázky, ktoré by neboli zamerané pamäťovo, ktoré by boli o skúsenostiach z reálneho života. Otázky, ktoré by boli prekvapujúce a pomáhali by budovať čiastkové hĺbkové porozumenie u študentov.

Jedna z vecí, ktorá bola taká zarážajúca na Mazurových konceptestoch, bola skutočnosť, že študenti sa pohrúžili do premýšľania o fyzike. Ako nájsť spôsob, aby študenti takto premýšľali o matematike? Aké sú kľúčové matematické pojmy, ktoré im chceme prezentovať?

Hľadala **vhodnú otázku** pre svojich študentov a vybrala nasledovnú:

„Raz si meral presne 1 meter. Rozhodni, či je to pravda alebo nie je."

Maria Terell vyskúšala položiť túto otázku vo svojej triede a študenti boli šokovaní. Samozrejme, že som niekedy meral 1 meter. Čo to má spoločné s matematikou? A ako o tom môžem presvedčiť svojho spolusediaceho? Ako to môžem dokázať? Potrebujem presne vedieť, kedy sa to stalo? Zaujímavé je, že niektorí študenti dospeli k záveru, že nikdy nemali presne 1 meter. Maria Terrell hovorí: *„Po chvíli sme si uvedomili, že nehovoríme len o Vete o strednej hodnote, ale aj o raste ako spojitej funkcii času."*

Ďalšia otázka, ktorá nasledovala, bola:

„Na začiatku druhej štvrtiny mal basketbalový tím 18 bodov. Na konci tejto štvrtiny mal 48 bodov. Je pravda, že niekedy počas tejto štvrtiny, mal basketbalový tím presne 36 bodov?"

Samozrejme, táto možnosť nemusela nastať (pretože jeden kôš v basketbale nemusí znamenať presne 1 bod), ale zaujímavé bolo, že niektorí študenti tvrdili, že to je pravda, lebo existuje taká MOŽNOSŤ, že tak mohlo byť.

Záver z tohto cvičenia bol pre Mariu Terell a jej študentov nasledovný:

- Debatovali o spojitosti. O tom, prečo tieto na prvý pohľad rovnaké otázky, majú rôzne odpovede.
- Diskutovali o logike a matematických dôkazoch. O tom, že ak chceme používať vetu na dokázanie nejakého tvrdenia, musia byť splnené predpoklady. O tom, že ak je tvrdenie niekedy pravdivé, ale neplatí to vždy, nemôžeme vyhlásiť, že je vo všeobecnosti pravdivé.

Celá diskusia trvala 10 – 15 minút. Podľa slov Marie Terell to bolo zábavné, študenti naozaj uvažovali nad spojitosťou a tým, čo to znamená. Nebola potom prekvapená, keď títo študenti dosiahli v otázkach o Vete o strednej hodnote v záverečných testoch lepšie výsledky, ako tí z minulých rokov. Čo však bolo dôležitejšie, študenti si začali uvedomovať, že matematika je zaujímavá. Že je to predmet o práci s myšlienkami, nielen o algoritmoch.

A presne o to by nám vo vyučovaní malo ísť. Povzbudiť študentov k tomu, aby matematiku nevnímali iba ako súbor poučiek a princípov, ktoré sa treba učiť spamäti, ale aby skutočne do hĺbky porozumeli preberanému učivu. A o tom je metóda Peer Instruction.

4 CHARAKTERISTIKA VYBRANÝCH UČEBNÍC

Táto kapitola sa zaoberá tematickým celkom **Deliteľnosť prirodzených čísel.** Bližšie sa pozrieme na to, ako je tento celok vyučovaný a ako ho zachytávajú vybrané slovenské, ale aj české učebnice pre 6. ročník základných škôl a pre 1. ročník gymnázií a stredných odborných škôl.

Keďže tento tematický celok sa doteraz preberal v 6. ročníku základných škôl, budeme sa venovať práve učebniciam z tohto ročníka. Najväčšiu pozornosť budeme venovať tomu, ako sú jednotlivé pojmy zavedené, či pomocou konkrétnych príkladov alebo formou definícii. Tiež budeme sledovať to akými úlohami sú precvičované nadobudnuté vedomosti u žiakov. V 1. ročníku strednej školy, poprípade gymnázia sa žiaci opäť stretávajú s týmto tematickým celkom. Pozrieme sa aj na to, ako učebnice pristupujú k opakovaniu tohto tematického celku.

Každá podkapitola sa začína členením tematického celku Deliteľnosť prirodzených čísel tak, ako ho podávajú jednotlivé učebnice. Prvých päť podkapitol sa venuje učebniciam základných škôl, z toho prvé dve podkapitoly sa venujú slovenským učebniciam, ostatné tripodkapitoly sú venované českým učebniciam. Dve posledné podkapitoly sa venujú stredoškolským učebniciam. V každej podkapitole sa nachádza stručný popis toho, ako je daný tematický celok vysvetľovaný. Poslednou časťou každej podkapitoly sú príklady konceptuálnych úloh, ktoré sa v jednotlivých učebniciach vyskytujú a môžu byť použité práve v metóde Peer Instruction.

4.1 Deliteľnosť prirodzených čísel

Podľa učebných osnov koordinovaných PhDr. L. Bálintom, CSc., ktoré schválilo Ministerstvo školstva Slovenskej republiky dňa 3. apríla 1997 výmerom číslo 1640/1997-151 s platnosťou od 1. septembra 1997 [8] sú ciele a obsah v rámci tematického celku **Deliteľnosť prirodzených čísel** pre 6. ročník základnej školy definované takto:

Ciele

- vedieť vytvárať násobky daného čísla
- vedieť určiť deliteľov čísla (pri číslach v obore do 100 všetkých)
- vedieť rozhodnúť o danom čísle, či je deliteľné bez zvyšku 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10
- vedieť odlíšiť prvočíslo od zloženého čísla
- vedieť vypočítať spoločné násobky dvoch čísel a ich najmenší spoločný násobok
- vedieť vypočítať spoločných deliteľov dvoch čísel a ich najväčšieho spoločného deliteľa
- dosiahnuť, aby v obore do 100 žiaci vykazovali pohotovosť a zručnosť v počítaní
- viesť žiakov k experimentovaniu
- viesť žiakov k hlbšiemu pohľadu do štruktúry desiatkovej číselnej sústavy

Obsah

Znaky deliteľnosti 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10. Prvočíslo, zložené číslo, rozklad na dvoch činiteľov a na prvočinitele. Deliteľ, spoločný deliteľ, násobok, spoločný násobok, najväčší spoločný deliteľ (D), najmenší spoločný násobok (*n*). Algoritmizácia výpočtu najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku.

Táto záverečná práca začala vznikať v čase, keď Štátny pedagogický ústav pripravoval zmeny ohľadom vyučovania niektorých tematických celkov. Tematický celok Deliteľnosť prirodzených čísel sa v tomto čase v dostupných osnovách nenachádza. Predpokladáme však, že vzhľadom na možnosť jednotlivých škôl prispôsobenia si vyučovacieho plánu sa bude tento celok, aj keď v menšom rozsahu, vyučovať buď v šiestom ročníku ako to bolo doteraz alebo v siedmom ročníku. Taktiež predpokladáme, že ciele a obsah v rámci tohto tematického celku sa budú meniť len málo.

Čo sa štvorročných gymnázií týka, podľa učebných osnov koordinovaných RNDr. Mariánom Hanulom a schválených Ministerstvom školstva Slovenskej republiky 24.2.1997 pod číslom 1252/96-15 s platnosťou od 1.9.1997 [9] sú ciele a obsah v rámci tematického celku **Deliteľnosť prirodzených čísel** pre 1. ročník gymnázia definované takto:

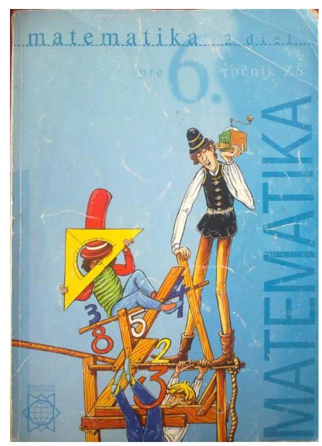
Ciele

- vypočítať prvočíselný rozklad prirodzeného čísla
- zisťovať deliteľnosť a zvyšky po delení
- vypočítať nsn a NSD

Obsah

Deliteľ, násobok, deliteľnosť, znaky deliteľnosti, prvočíslo, zlozené číslo, prvočíselný rozklad, [zvyškové triedy, aritmetika vo zvyškových triedach], najmenší spoločný násobok (nsn), najväčší spoločný deliteľ (NSD) a vzťah medzi nimi, výpočet nsn a NSD, základné vlastnosti deliteľnosti, [diofantovské rovnice, lineárna diofantovská rovnica].

4.2 Matematika pre 6. ročník základných škôl, Orbis Pictus Istropolitana, 1999 [10]



Deliteľnosť prirodzených čísel

Kapitoly:

- Násobok
- Deliteľ
- Kritéria deliteľnosti

CHARAKTERISTIKA

V prvej kapitole sa najskôr stretávame s pojmom „obdĺžnikové čísla“. Sú to čísla, ktoré sa dajú uložiť do obdĺžnikov. Je im venovaný dostatok priestoru, takže žiaci si ľahko privyknú na túto predstavu.

Pomocou obdĺžnikových čísel je vysvetlený pojem zložené číslo a prvočíslo. Ďalej pokračujú autori pojmom spoločný násobok. Vyslovujú tiež nasledujúce tvrdenia:

„Jedine číslo 1 je násobkom jediného čísla. 1 . 1 = 1.

Ostatné čísla sú násobkami aspoň seba samého a čísla 1.

Prvočísla sú násobkom práve dvoch čísel, zložené čísla aspoň troch."

Ako metódu hľadania prvočísel používajú Eratostenovo sito. Posledným pojmom v tejto kapitole je najmenší spoločný násobok. Ten je zadefinovaný ako spoločný násobok nejakých čísel a to ten najmenší. Algoritmus na hľadanie najmenšieho spoločného násobku sa v tejto kapitole ešte nespomína.

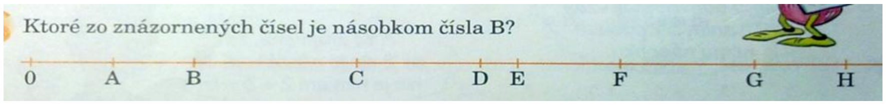
Druhá kapitola začína zavedením pojmu deliteľ. Ak je jedno číslo násobkom druhého, to druhé bude deliteľom prvého. Nasleduje zavedenie pojmu spoločný deliteľ na dvoch konkrétnych číslach. Následne sú zavedené pojmy nesúdeliteľnosť, súdeliteľnosť, najväčší spoločný deliteľ, ktorý je deliteľ dvoch čísel, ktorý je zo všetkých deliteľov najväčší. V tejto kapitole je vysvetlený aj Euklidov algoritmus, ktorý slúži na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa.

V poslednej časti nazvanej *Kritéria deliteľnosti* sú spomenuté a vysvetlené kritéria deliteľnosti pre 10, 5, 2, 4, 9, 3 a 12. Prvé štyri pomocou sledovania posledných číslic, ďalšie dve pomocou ciferného súčtu. Potom nasleduje zavedenie pojmu prvočíselný rozklad a metóda, ako tento rozklad robiť . Vzápätí je vysvetlený algoritmus na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku práve pomocou prvočíselného rozkladu. Kritéria sú vysvetlené na intuitívnej úrovni na konkrétnych príkladoch. Tak je to aj pri hľadaní najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa.

V učebnici začína tematický celok Deliteľnosť prirodzených čísel dosť netradične a to obdĺžnikovými číslami. Neštandardné je, že tento pojem je zavedený ešte pred pojmom násobok. Autori venujú množstvo úloh násobku, najmenšiemu spoločnému násobku, ale aj deliteľovi. Prinášajú žiakom aj netradičný spôsob hľadania najmenšieho spoločného násobku - Euklidov algoritmus, ktorý sa v iných učebniciach nenachádza. Náročnejšie úlohy, z ktorých mnohé by sa dali použiť v metóde Peer Instruction sú označované otáznikom.

Príklady konceptuálnych úloh:

1) *Ktoré zo znázornených čísel je násobkom čísla B?*



V tejto úlohe si žiaci môžu uvedomiť aké sú „vzdialenosti" medzi jednotlivými násobkami daného čísla.

2) *Vieš, že 437 : 23 = 19. Koľko deliteľov čísla 437 vieš bez ďalšieho výpočtu hneď povedať?*

Žiaci si musia uvedomiť, že 23 a 19 sú prvočísla, teda číslo 437 okrem spomenutých deliteľov, 1 a seba samého nemá ďalších deliteľov.

3) *Jakub tvrdí, že dve za sebou idúce čísla sú vždy nesúdeliteľné. Má pravdu?*

Veľmi pekná úloha, kde žiaci začnú uvažovať nad „vzdialenosťami" násobkov nejakého čísla.

4.3 Matematika pre 6. ročník základných škôl, SPN, 1998 [11]

Deliteľnosť prirodzených čísel

Kapitoly:

- Násobok a deliteľ
- Znaky deliteľnosti prirodzených čísel.

  Deliteľnosť dvoma, piatimi, desiatimi.
- Prvočísla a zložené čísla
- Najmenší spoločný násobok
- Najväčší spoločný deliteľ

CHARAKTERISTIKA

V úvode kapitoly zavádzajú autori pojmy násobok a deliteľ pomocou úloh. Napr.: *Cena jedného koláča je 5 Sk. Koľko Sk zaplatíme za 2, 3, 4, ... koláče?* Po vyriešení úlohy nasleduje zavedenie pojmu: *Čísla 5, 10, 15, 20, ..., ktoré sú uvedené v druhom riadku tabuľky, nazývame násobky čísla 5.* Pojem deliteľ je taktiež zavedený na konkrétnom príklade. Autori tu vyslovujú tvrdenia o tom, že každé prirodzené číslo má prvý násobok a súčasne má nekonečne veľa násobkov. Taktiež, že každé číslo je deliteľné 1 a samým sebou. V kapitole sa najviac sa precvičuje pojem násobok.

Tak ako v predchádzajúcej kapitole kritéria deliteľnosti sú taktiež vysvetľované na príkladoch. Pri deliteľnosti dvoma sú zavedené pojmy párne a nepárne čísla. Nájdeme tu aj kritéria deliteľnosti štyrmi, tromi aj deviatimi, aj keď to nie je spomenuté v názve kapitoly.

Ďalšia kapitola sa zaoberá prvočíslami a zloženými číslami. Začína zavedením pojmu prvočíslo: *Čísla, ktoré majú iba dva delitele, a to 1 a samo seba, nazývame prvočísla. Čísla, ktoré majú viac ako dva delitele, nazývame zložené čísla.* Autori učebnice upozorňujú na to, že číslo 1 je špeciálny prípad. Taktiež sa zavádza pojem rozklad prvočiniteľov a spôsob jeho hľadania. Úlohy sú zamerané na rozlišovanie, či je dané číslo prvočíslo alebo je to zložené číslo.

Pojem najmenší spoločný násobok je vysvetlený na konkrétnom príklade: *Napíšte prvých dvanásť násobkov čísel 4 a 6. Čo ste spozorovali?*

Odpoveď: *Násobky čísla 4 sú: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, ...*

Násobky čísla 6 sú: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, ...

Zo spoločných násobkov je jeden najmenší. Nazývame ho najmenší spoločný násobok. Označujeme ho $n(4, 6) = 12$. Hľadáme ho tak, že tvoríme násobky jedného z oboch čísel a sledujeme, ktorý je deliteľný druhým číslom. Okrem tohto spôsobu hľadania je v krátkosti vysvetlený aj spôsob, v ktorom sa využíva rozklad na prvočinitele.

V poslednej kapitole sa stretávame s pojmom najväčší spoločný deliteľ. Tento pojem je taktiež zavedený pomocou konkrétneho príkladu. Taktiež sú zavedené pojmy súdeliteľný a nesúdeliteľný. Nájdeme tu aj vyslovené tvrdenie, že najväčší spoločný deliteľ nesúdeliteľných čísel je 1. Veľmi krátko sú vysvetlené dva spôsoby ako hľadať najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel. Jeden spôsob je vypísať si všetky spoločné delitele a nájsť ten najväčší, ktorý delí obe čísla. Druhý spôsob využíva rozklad na prvočinitele.

Celkovo v učebnici prevládajú najmä úlohy na precvičovanie pojmu násobok. Úloh na precvičovanie pojmu deliteľ je tu pomenej. Všetky pojmy sú zavádzané pomocou konkrétnych príkladov. Kritéria deliteľnosti sú vysvetlené len povrchne. Pri hľadaní najmenšieho spoločného násobku a najväčšieho spoločného deliteľa je rozklad na prvočinitele len spomenutý ako jeden zo spôsobov riešenia. Úlohy sú zväčša formulované jasne a zrozumiteľne, sú však zamerané najmä na jednoduchú prácu s pojmami a pamäť.

Príklady konceptuálnych úloh:

1) *V päťcifernom čísle, ktorého posledné dve číslice boli v počítači omylom vymazané, vieme, že bolo deliteľné deviatimi a súčasne desiatimi. Ktoré číslo to bolo, keď z čísla zostalo: 54 2**?*

Ak žiaci poznajú kritéria deliteľnosti a vedia s nimi narábať, nemal by byť pre nich problém odpovedať na túto otázku. V prvom rade si musia uvedomiť, že ak je číslo deliteľné 9 a 10, znamená to, že poslednou číslicou musí byť 0 a taktiež, že ciferný súčet musí byť deliteľný 9. Z toho vyplýva, že predposlednou číslicou môže byť iba 7.

2) *Číslo 13 je prvočíslo. Zámenou jeho číslic dostaneme číslo 31, ktoré je tiež prvočíslom. Nájdite všetky dvojciferné čísla s touto vlastnosťou.*

Vedia žiaci rýchlo vylúčiť možnosti, ktoré určite nie sú riešením tejto úlohy? Určite to nemôže byť číslo, v ktorom sa nachádzajú číslice 2, 4, 5, 6 a 8. A zvyšných možností nie je až tak veľa. Táto úloha učí pracovať s prvočíslami.

4.4 Matematika s Betkou, Scientia, 1996 [12]

Hľadá sa najväčší deliteľ a najmenší násobok

Kapitoly:

- Určujeme násobky a delitele prirodzených čísel
- Ktoré čísla sú prvočísla a ktoré zložené čísla?
- Nemusíme vždy deliť, aby sme vedeli…
- Dom sa stavia z tehál, čísla z prvočiniteľov
- Najväčší, najmenší,...

CHARAKTERISTIKA

Autori venujú veľkú pozornosť prvej kapitole o násobkoch a deliteľoch. Ponúkajú žiakom mnoho úloh na precvičovanie tohto učiva. Od tabuliek násobkov, ktoré je treba doplniť cez vypisovanie deliteľov nejakého čísla, doplňovanie chýbajúcich čísel v rade násobkov, až po slovné úlohy.

V kapitole “*Ktoré čísla sú prvočísla a ktoré zložené čísla?”* sú zavedené pojmy prvočíslo a zložené číslo a to na príklade guličiek, ktoré je treba uložiť do obdĺžnika. Využíva sa tu predstava obdĺžnikových čísel tak ako v kapitole 4.2, avšak bez zavedenia tohto pojmu. Je tu taktiež vysvetlené Eratostenovo sito a pojem prvočíselné dvojčatá.

V nasledujúcej kapitole *Nemusíme vždy deliť, aby sme vedeli* oboznamujú autori žiakov s kritériami deliteľnosti. Začínajú s kritériom deliteľnosti 2, potom 10, 5, 4, 9 a nakoniec 3. Kritéria nie sú len vyslovené, ale taktiež aj postupne vysvetlené na modeli stavby kociek.

Napr. kritérium deliteľnosti desiatimi je vysvetlené takto: *Máme za úlohu zistiť, či je číslo 325 deliteľné desiatimi.*

Môžeme napísať: 325 = 3 . 100 + 2 . 10 + 5.

Vieme, že stovky sú deliteľné desiatimi, desiatky tiež. Deliteľnosť desiatimi teda závisí na počte jednotiek. Počet jednotiek je niektoré z čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jediné z nich ktoré je deliteľné desiatimi je 0. Preto číslo 325 zakončené 5, nie je deliteľné desiatimi. Podobne sú vysvetlené aj ostatné kritéria.

Následne je vysvetlený rozklad na prvočinitele. A za ním nasleduje časť o najväčšom spoločnom deliteľovi a najmenšom spoločnom násobku, kde sa práve tento rozklad využíva. Autori dokonca vyslovujú tvrdenie, že súčin dvoch čísel sa rovná súčinu ich najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku.

Učebnica je veľmi zaujímavo spracovaná, bohatá aj na netradičné úlohy, ktoré pomáhajú žiakom hlbšie nahliadnuť do jednotlivých pojmov. Autori venujú dostatok priestoru vysvetľovaniu princípov, ktoré stoja za kritériami deliteľnosti.

Na konci každej kapitoly sú cvičenia na všetky pojmy zavedené v kapitole, zaujímavé slovné úlohy a na záver aj krížovky.

Príklady konceptuálnych úloh:

1) *Doplňte aspoň dve možnosti: Najmenší spoločný násobok čísel 9 a ... je 45.*

Táto úloha je zaujímavá tým, že sa nepýta na výpočet najmenšieho spoločného násobku, ale na číslo, ktorého násobok hľadáme. Žiaci sa nestretli so žiadnym algoritmom ako takéto číslo hľadať, preto musia skutočne rozumieť tomuto pojmu na to, aby tieto čísla našli.

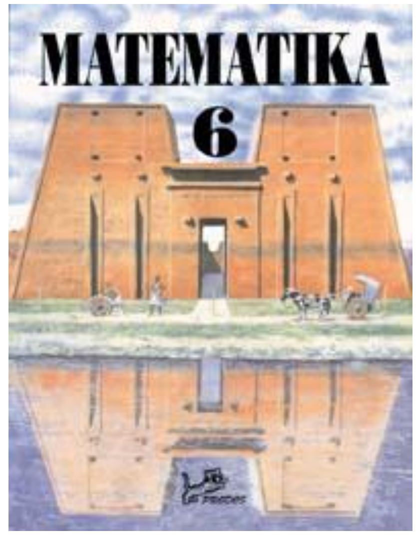
2) *Kryšpín jazdí do školy električkou. Môže ísť električkou číslo 5 alebo číslo 14. V dobe, keď sa Kryšpín vracia zo školy má linka číslo 5 interval 12 minút, linka číslo 14 interval 8 minút. O 13.00 odchádzajú zo zástavky rovnako. Za aký čas budú opäť odchádzať rovnako?*

Úloha zameraná na najmenší spoločný násobok.

3) *V kine Svetozár predávali lístky za 9 korún a za 12 korún. Po zatvorení pokladne spočítal pokladník, že má 1 820 Sk. Je to možné?*

Vedia žiaci, že ak sú dve čísla deliteľné nejakým číslom, je aj ich súčet deliteľný týmto číslom? Teda v tomto prípade je odpoveď: Nie je to možné, lebo 1 820 nie je deliteľné tromi.

4.5 Matematika 6, Prodos, 1998 [13]



Deliteľnosť

<u>Kapitoly:</u>

- Násobok a deliteľ
- Párne a nepárne čísla
- Prvočísla a zložené čísla
- Znaky deliteľnosti
- Najväčší spoločný deliteľ
- Súdeliteľné a nesúdeliteľné čísla
- Najmenší spoločný násobok

<u>CHARAKTERISTIKA</u>

Pojmy deliteľ a násobok sú najprv znázornené pomocou zapisovania do tabuľky, potom i graficky, veľký priestor je venovaný párnym a nepárnym číslam. Autori zavádzajú aj termín *„samozrejmý" deliteľ.*. Samozrejmými deliteľmi sú číslo samotné a jednotka. Môžeme teda konštatovať, že samozrejmých deliteľov má každé číslo, teda aj prvočíslo. Čísla, ktoré majú viac ako dvoch (samozrejmých) deliteľov sa nazývajú zložené. Následne je vysvetlený rozklad čísla na prvočísla.

V kapitole o znakoch deliteľnosti sú vyslovené jednotlivé kritéria a za každým sa nachádzajú úlohy na precvičenie. Kritériam nie je venovaná zvláštna pozornosť. Nájdeme ich v takomto poradí: Kritérium deliteľnosti 10, 5, 2, 3, 9, 4.

Najväčší spoločný deliteľ je zavedený ako číslo, ktoré je spoločným deliteľom daných čísel a je najväčšie zo všetkých spoločných deliteľov. Pri riešení príkladov používajú aj rozklad na prvočinitele, nie je to však explicitne vyjadrené. Ďalšie pojmy, ktoré tu vystupujú, sú pojmy súdeliteľný a nesúdeliteľný.

Poslednou kapitolou tematického celku Deliteľnosť je *Najmenší spoločný násobok*. Ten je definovaný podobne ako najväčší spoločný deliteľ a to ako číslo, ktoré je najmenšie zo všetkých spoločných násobkov. Prvý spôsob, ktorý je ukázaný, je vypisovanie násobkov jednotlivých čísel, až kým sa nenájde spoločný. Potom autori vysvetľujú spôsob, ktorý využíva rozklad na prvočinitele.

Poslednou časťou sú Súhrnne cvičenia, kde si žiaci môžu na úlohách precvičiť jednotlivé pojmy zavádzané v kapitole.

V učebnici je veľa úloh venovaných pojmu násobok a práci s týmto pojmom. Veľmi dobre spracovaná je téma o párnych a nepárnych číslach. Úlohy sú však viac-menej tradičné a môžeme ich nájsť aj v iných učebniciach. Málo z nich je zameraných na hlbšie porozumenie.

Príklady konceptuálnych úloh:

1) *V ktorom z nasledujúcich príkladov je najjednoduchšie nájsť najmenší spoločný násobok?*

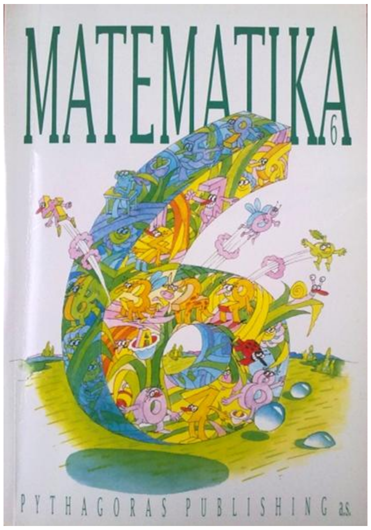
a) n(3, 7, 12)   b) n(4, 7, 14)   c) n(4, 7, 28)

Úloha zisťuje, či si žiaci uvedomujú, že ak nejaké dve čísla z trojice delia tretie číslo, potom je ono najmenším spoločným násobkom všetkých troch.

2) *Overte, poprípade opravte nasledujúce tvrdenia:*
   - A) *V dvojici nesúdeliteľných čísle môže jedno číslo deliť druhé.*
   - B) *Ľubovoľné dve nepárne čísla sú vždy nesúdeliteľné.*

Žiaci vďaka týmto úlohám nahliadnu za pojem nesúdeliteľnosť a sami zisťujú aké vlastnosti majú nesúdeliteľné čísla.

4.6 Matematika 6, Pythagoras Publishing a.s., Praha, 1997 [14]



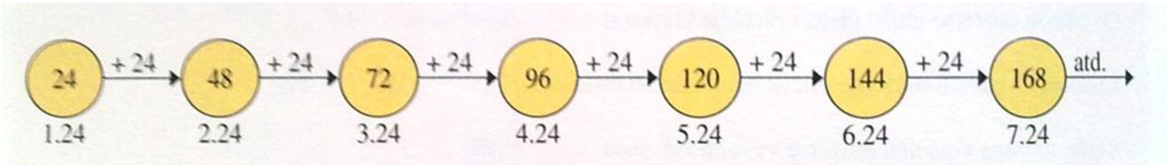
Deliteľnosť prirodzených čísel

<u>Kapitoly:</u>

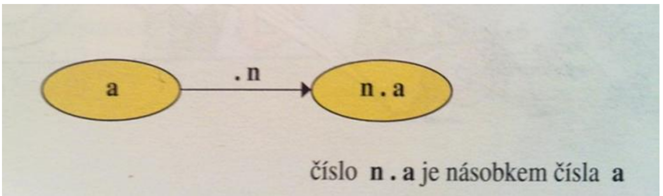
- Násobok a deliteľ
- Znaky deliteľnosti
- Prvočísla a zložené čísla
- Spoločný deliteľ a spoločný násobok

<u>CHARAKTERISTIKA</u>

Učebnica od vydavateľstva Pythagoras Publishing vysvetľuje násobok trochu iným spôsobom ako iné učebnice. Násobiť nejakým číslom znamená niekoľkokrát pripočítať to číslo. *Napr. 1 . 24 = 24, 2 . 24 = 24 + 24 = 48, 3 . 24 = 48 + 24 = 72,...*



Mnoho úloh a cvičení sa zaoberá práve precvičovaním tohto princípu. Taktiež tu nájdeme vyslovené tvrdenia o tom, že ak sčítame dva násobky čísla **a**, výsledok bude opäť násobkom čísla **a**. Násobok nejakého násobku čísla **a** je tiež násobkom čísla **a**. Na konci kapitoly je zavedený pojem deliteľ a to takýmto spôsobom: *Číslo **a** je deliteľom čísla **n . a**.*



Netradičné je, že v tejto učebnici nevystupujú vo vysvetľovaní pojmov konkrétne čísla ako v iných učebniciach, ale všeobecné písmená, napr. *a, b*...

Kapitolu **Znaky deliteľnosti** autori začínajú kritériom deliteľnosti 10, potom 5 a 2. Kritéria deliteľnosti 4 a 8 sú vysvetlené pomocou metódy odčítania násobkov. Pri tejto metóde postupne odpočítavame násobky čísla **a** až prídeme k malému číslu, o ktorom vieme jednoducho rozhodnúť, či je deliteľné číslom **a**. Po vysvetlení tejto metódy sú uvedené aj kritéria deliteľnosti 9, 3 a 6.

Pojmy prvočíslo a zložené číslo sú podobne ako aj v iných učebniciach zavedené pomocou samozrejmých deliteľov. Autori zdôrazňujú, že číslo 1 nie je ani prvočíslo ani zložené číslo. V tejto kapitole sa stretneme aj s rozkladom na prvočísla a algoritmom, ako prvočísla hľadať, ktorým je Eratostenovo sito.

Posledná kapitola nie je veľmi rozsiahla, ale autori výstižne vysvetľujú ako sa najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok dajú nájsť jednoducho pomocou rozkladu na prvočísla.

Táto učebnica ponúka mnoho odlišných nazeraní na preberané pojmy. Kritéria deliteľnosti sú tiež vysvetľované inak. Autori sa snažia ísť naozaj do hĺbky. Neprinášajú len tvrdenia, ale žiakov vedú k tomu, aby rozumeli, prečo je tomu tak. Pojmy vysvetľujú najprv pomocou príkladov, následne ich zovšeobecnia pre všetky čísla. Táto učebnica ako jediná používa na zavádzanie pojmov „písmená", nie konkrétne čísla. V každej kapitole je množstvo zaujímavých úloh od jednoduchších po náročné. Ich náročnosť je označená počtom hviezdičiek. Mnoho z týchto úloh by sa dalo využiť práve v metóde Peer Instruction.

Príklady konceptuálnych úloh:

1) *Teraz je otec štyrikrát starší ako Dávid. O päť rokov bude len trikrát starší. Koľko majú rokov? Koľko krát bol otec starší pred piatimi rokmi?*

Táto úloha je zameraná na pojem násobku a tomu ako žiaci rozumejú tomu, že nejaké číslo je štyrikrát väčšie ako iné.

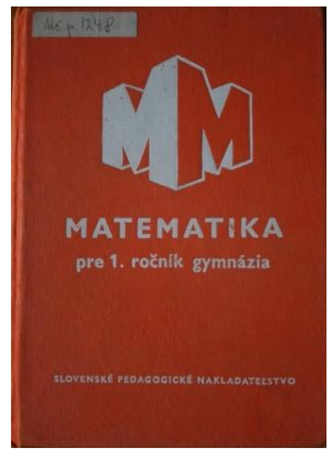
2) *Súčin troch po sebe idúcich čísel je vždy deliteľný 6. Viete vysvetliť prečo?*

Žiaci potrebujú spojiť vedomosti z kritérií deliteľnosti a „vzdialenosti" násobkov nejakého čísla.

3) *Martin sa pýtal starého otca, kedy sa narodil. Starý otec hovorí: „Ak vynásobíš deň, mesiac a rok, kedy som sa narodil, dostaneš číslo 445 137.“ Martin si s* touto *hádankou poradil. Dokážete to tiež?*

Veľmi netradičná úloha na rozklad na prvočinitele.

4.7 Matematika pre 1. ročník gymnázia, SPN, 1984 [15]



Elementárna teória čísel

Kapitoly:

- Zápisy prirodzených čísel
- Deliteľnosť prirodzených čísel
- Prvočísla a zložené čísla
- Najväčší spoločný deliteľ, najmenší spoločný násobok
- Dôkazové úlohy o deliteľnosti

CHARAKTERISTIKA

Prvá kapitola tejto učebnice je zameraná na spôsob, akým môžeme zapísať prirodzené číslo. Tiež sa tu autori snažia definovať pojem prirodzené číslo. Robia tak nasledovným spôsobom: *Vieme, že prirodzené čísla udávajú napríklad počet predmetov alebo osôb.* Je tu zdôraznené, že medzi prirodzené čísla nie je zaradená 0 a že medzi pojmom *číslo* a *číslica* je veľký rozdiel.

V kapitole o deliteľnosti čísel sú najprv zopakované pojmy násobok, deliteľ a byť deliteľný. Tie nie sú zavedené len pomocou konkrétnych čísel, ale aj cez premenné. Ako sami autori v úvode uvádzajú, pri opakovaní tohto tematického celku *nadviažeme na poznatky zo základnej školy, no pomocou premenných ich vyjadríme presnejšie a odôvodníme ich [16]*. Kapitola pokračuje kritériami deliteľnosti desiatimi, piatimi a dvoma. Tieto kritéria nie sú len vysvetlené, ale sú tu aj dokázané pomocou zápisu prirodzeného čísla, ktorý je vysvetlený v prvej kapitole. Veľmi zaujímavo je tu načrtnutá súvislosť medzi kritériami deliteľnosti čísel, ktoré sú deliteľmi 100. *Prirodzené číslo je deliteľné štyrmi (20, 25, 50) práve vtedy, keď je deliteľné štyrmi (20, 25, 50) jeho posledné dvojčíslie.*

Pri zavádzaní pojmov prvočíslo a zložené číslo majú žiaci za úlohu doplniť tabuľku, kde v prvom riadku je prirodzené číslo a v druhom riadku žiaci majú doplniť počet jeho deliteľov. O číslach, ktoré majú práve delitele je povedané, že ich nazývame prvočísla. Zložené číslo je také, ktoré ma aspoň tri rôzne delitele. V tejto kapitole je vyslovená aj nasledujúce veta: *Každé zložené číslo n je deliteľné aspoň jedným prvočíslom p, pre ktoré platí* $p \leq \sqrt{n}$. Tiež je tu spomenutá základná veta aritmetiky. Obe sú uvedené bez dôkazov.

V kapitole o NSD a nsn sú najprv zavedené symboly, ktoré sa budú používať. Tieto pojmy sú definované inak ako v predchádzajúcich učebniciach. NSD je definovaný ako *najväčší prvok prieniku množín deliteľov.* Na druhej strane nsn je definovaný ako *najmenší prvok prieniku množín násobkov*. Ako algoritmus hľadania NSD a nsn je vedený rozklad na prvočinitele.

Posledná kapitola sa venuje dôkazovým úlohám o deliteľnosti. Dôkazy sú rozdelené do viacerých podkapitol: *Dôkazy vynímaním deliteľa*, *Nepriame dôkazy viet* a *Dôkaz sporom*. Táto kapitola vedie žiakov k tomu, aby zvládli niektoré dôkazové metódy. Tieto metódy sú postupne vysvetlené na dôkazoch tvrdení týkajúcich sa deliteľnosti prirodzených čísel.

Preberané učivo je podstatne náročnejšie ako v učebniciach pre základné školy. Žiaci sú vedení nielen k pamätaniu si poznatkov, ale aj k tomu, aby ich vedeli odvodiť a aj dokázať. Poznatky sú budované systematicky, avšak podľa nášho názoru pre mnohých žiakov príliš náročným spôsobom – bez uvádzania pomocných znázorňujúcich úloh. Úlohy sú zameriavané predovšetkým na formálne vedomosti. V učebnici sa nachádza len pár úloh, ktoré bysa bez zásadnej zmeny dali použiť v metóde Peer Instruction.

Príklady konceptuálnych úloh:

1) *Určte najúspornejšiu dĺžku dosák, z ktorých sa majú podľa potreby vyrábať poličky dlhé 60 cm alebo 75 cm alebo 50 cm.*

Zadanie je dosť nejasné, ale predpokladáme, že dosky majú byť čo najdlhšie. To znamená, že úlohou žiakov je vyrátať NSD.

2) *Nepoznáme počet cvičencov, ale vieme, že ich cvičiteľ sa sťažoval, že pri nastúpení do dvojstupov, trojstupov, štvorstupov, päťstupov či šesťstupov vždy jeden do úplného (obdĺžnikového) tvaru chýba. Koľko je cvičencov.*

Aj v tejto úlohe majú žiaci vyrátať NSD, avšak od výsledku bude treba odrátať jednotku, pretože vieme, že 1 žiak chýba do toho, aby vznikli úplné dvojstupy, trojstupy,...

4.8 Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, Orbis Pictus Istropolitana, 2001 [17]

Prirodzené čísla, deliteľnosť

Kapitoly:

- Deliteľnosť
- Kritéria deliteľnosti
- Delenie so zvyškom
- Prvočísla
- Najväčší spoločný deliteľ, najmenší spoločný násobok
- Bazár
- Ťahák, alebo, čo je dôležité

CHARAKTERISTIKA

Hneď v úvode kapitoly autori naznačujú, že deliteľnosť prirodzených čísel je síce pekná téma, má však málo praktického využitia: *Ťažko hovoriť o užitočnosti, či neužitočnosti teórie čísel rovnako ako nehovoríme o tom, aký úžitok je z pohľadu na umelecké diela minulosti alebo z počúvania hudby.* Takýto prístup autorov je dosť zarážajúci a pre žiakov nie veľmi motivačný.

Text v kapitolách je členený dosť neprehľadne. Ťažko vidieť, čo je definícia, tvrdenie alebo úloha. V kapitole o deliteľnosti autori opakujú pojmy deliteľ a deliteľný.

V ďalšej kapitole sú uvedené tvrdenia ohľadom kritérií deliteľnosti piatimi, dvoma, štyrmi a ôsmimi. Pri kritériu deliteľnosti štyrmi je (ako uvádzajú autori) *naznačené, prečo je toto kritérium správne.* Nasleduje príklad zameraný na dôkaz deliteľnosti deviatimi. Po tomto príklade sú vyslovené tvrdenia pre kritérium deliteľnosti deviatimi a tromi.

Kapitola s názvom *Prvočísla* začína netradične - rozkladom na prvočinitele. Prvočísla sú následne definované ako nerozložiteľné činitele, atómy, z ktorých sú dané čísla zložené. Potom už nasleduje klasická definícia pojmu prvočíslo. Autori vyslovujú aj tieto tvrdenia: *Každé zložené číslo sa dá rozložiť na súčin prvočísel. Rozklad zloženého čísla na súčin prvočísel je až na poradie činiteľov jednoznačný.* Tieto sú vyslovené bez dôkazu. Je tu však dôkaz tvrdenia, že prvočísel je nekonečne veľa.

V kapitole o najväčšom spoločnom deliteľovi a najmenšom spoločnom násobku sa autori odvolávajú na vedomosti zo základnej školy. Najprv definujú pojem spoločný deliteľ, potom pokračujú pojmom NSD. Definíciu nsn tu nenájdeme. Je iba spomenuté, že nsn sa definuje podobne ako NSD. Na konci tematického celku sa nachádza *Bazár,* v ktorom sú riešenia dvoch príkladov z celku, ďalej dva príklady a hra. Posledná časť je venovaná zopakovaniu prebratých pojmov.

Aj keď učebnica nie je veľmi prehľadná a pri zavádzaní pojmov nie je veľmi dôsledná, nachádzajú sa v nej vhodné konceptuálne úlohy do metódy Peer Instruction.

Príklady konceptuálnych úloh:

1) *Marienka vyslovila hypotézy: Nepárne čísla majú iba nepárne delitele. Párne čísla majú len párne delitele. Má pravdu? Platia obe tvrdenia? Platí niektoré z nich?*

Veľmi pekná úloha, pri ktorej žiaci uvažujú vo všeobecnosti nad deliteľmi čísel.

2) *Ferova hypotéza: Neexistuje číslo, ktoré je deliteľné číslom 99 999 i číslom 13. Je pravdivá?*

Úloha je zameraná na vyvrátenie hypotézy. Vedia žiaci nájsť konkrétne číslo, ktoré bude deliteľné 99 999 a 13? Alebo vedia dokázať, že takéto číslo existuje?

3) *Zistite, či každé prirodzené číslo deliteľné 11 má párny súčet cifier.*

Úloha zameraná na kritérium deliteľnosti 11 a vlastnosti z toho vyplývajúce.

V tejto kapitole sme sa venovali siedmim učebniciam. Každá z nich pristupuje k tematickému celku Deliteľnosť prirodzených čísel trochu iným spôsobom. Niektoré začínajú príkladmi, iné zavedením pojmov. Tiež bolo vidno rozdiel v tom, či študentom jednoducho predkladajú pojmy alebo ich vedú k tomu, aby samostatne objavovali vlastnosti daných pojmov. V každej učebnici sme hľadali konceptuálne úlohy použiteľné pri metóde Peer Instruction. Aj keď učebnica od Pythagoras Publishing bola na takéto úlohy najbohatšia, každá z nich sa pri vyučovaní touto metódou dá aspoň čiastočne využiť.

5 POUŽITIE KONCEPTUÁLNYCH ÚLOH VO VYUČOVANÍ

V nasledujúcej kapitole uvedieme konceptuálne úlohy k tematickému celku Deliteľnosť prirodzených čísel. Sú rozdelené do týchto podkapitol:

- Násobok a deliteľ (5.1) – 7 úloh
- Kritéria deliteľnosti (5.2) – 28 úloh
- Prvočísla a zložené čísla (5.3) – 11 úloh
- Najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ (5.4) – 9 úloh

Všetky úlohy sú pôvodné alebo zozbierané. Pri formulácii niektorých úloh sme sa inšpirovali úlohami v učebniciach a prispôsobili sme ich požiadavkám metódy Peer Instruction.

Štruktúra textu je nasledovná:

- znenie úlohy, v znení úlohy je podčiarknutím zvýraznená správna odpoveď
- za znením úlohy nasleduje krátky popis o tom, prečo je úloha konceptuálna alebo na akú miskoncepciu je zameraná
- ak bola úloha odučená, nasledujú výsledky hlasovania spolu s komentárom, poprípade návrh na zmenu úlohy, ktorý bol podnietený skúsenosťami z vyučovacej hodiny.

Úlohy boli odskúšané na vyučovacích hodinách matematiky na dvoch školách - Evanjelickom kolegiálnom gymnáziu v Prešove (ďalej EKG) – 4 vyučovacie hodiny a na Gymnáziu Alejová v Košiciach (ďalej GA) – 2 vyučovacie hodiny. Na EKG boli úlohy zaradené v rámci klasickej vyučovacej hodiny, preto je za každou odučenou úlohou uvedený odkaz na prípravu vyučovacej hodiny, v ktorej sa daná konceptuálne úloha nachádza. Odkaz je v zátvorke v tvare – skratka školy, číslo prípravy, číslo úlohy. Tieto prípravy sa nachádzajú v prílohe. Vyučovacie hodiny na GA pozostávali iba z konceptuálnych úloh, diskusií k nim a následného hlasovania. Takéto úlohy sú označené skratkou školy v zátvorke za úlohou. Prezentácie v MS Powerpoint, ktoré boli použité na oboch gymnáziách sa nachádzajú v elektronickej prílohe práce.

5.1 NÁSOBOK A DELITEĽ

Úloha 5.1.1

Vypíšte prvé tri násobky čísla 8

A) **24, 8, 16**
B) **32, 24 , 16**
C) **8, 2, 4**

Úloha je zameraná na porozumenie pojmu násobok. Odpoveď A) je správna. Odpoveď B) súvisí s častou miskoncepciou, že pôvodné číslo nie je násobok. V odpovedi C) sa nachádzajú delitele čísla 8. Táto možnosť odhalí, či si žiaci nepletú pojem násobok a deliteľ.

Úloha 5.1.2 (EKG, príprava 1, úloha 2)

Ktoré z nasledujúcich tvrdení je nesprávne?

A) **Číslo 5 je deliteľom čísla 25.**
B) **Číslo 5 je násobkom čísla 1.**
C) **Číslo 30 je deliteľné 6.**
D) **Číslo 1 je deliteľné číslom 6.**

Úloha je zameraná na zopakovanie pojmov násobok, deliteľ, deliteľný. Zadáme ju predtým ako sa začneme venovať kritériám deliteľnosti, keďže kritéria deliteľnosti si vyžadujú porozumenie týchto pojmov. Jednotlivé možnosti sme vyberali s cieľom zistiť, či si žiaci uvedomujú, že každé číslo je násobkom jednotky, a že 1 je deliteľom každého prirodzeného čísla. To je zahrnuté v možnostiach A) a D). Tiež sme sa zamerali na to, či žiaci rozlišujú medzi slovným spojením „je deliteľom“ a „je deliteľný“.- možnosti A), C) a D) a či sa žiaci nerozhodujú podľa zoradenia čísel v zadaní. Preto sa v možnostiach B) a C) objavuje najprv väčšie číslo a až za ním menšie.

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	0	6	3	12
2. hlasovanie	0	0	0	21

Z prvého hlasovania vidieť, že formulácia v možnosti A) je žiakom najbližšia, rozumejú jej a preto vedia, že daný výrok je pravdivý. V prvom hlasovaní boli pre žiakov ako nesprávne lákavé aj možnosti B) a C). Ako sme už spomínali, možné vysvetlenie je, že žiaci si neuvedomujú, že každé číslo je násobkom jednotky. Voľba možnosti C) naznačuje problém nepozorného prečítania možnosti, ďalej neisté rozlišovanie medzi pojmami „byť deliteľný" a „je deliteľom". Problémom tiež môže byť vymenené poradie čísel. Následná diskusia medzi žiakmi navzájom im zrejme pomohla a druhé hlasovanie bolo úspešné na 100%.

Ak všetci žiaci úlohu nevyriešia správne ani po druhom hlasovaní, prípadne ak učiteľ odhadne, že žiaci slovným spojeniam „je deliteľný", „je deliteľom" nerozumejú, tak navrhujeme precvičiť vyššie spomínané pojmy na jednoduchých úlohách.

Úloha 5.1.2

Vieme, že trojnásobok neznámeho čísla je o 15 väčší ako dvojnásobok. Koľko takýchto čísel existuje?

- **A) Žiadne**
- **B) <u>Jedno</u>**
- **C) Nekonečne veľa**
- **D) Nedá sa určiť**

Úloha je zameraná na manipuláciu s pojmami dvojnásobok a trojnásobok bez uvedenia konkrétnych čísel. Vedia žiaci uvažovať o násobkoch bez konkrétneho čísla? Vedia, že ak je rozdiel medzi dvojnásobkom a trojnásobkom 15, musí byť hľadané číslo 15? Správna odpoveď je B).

Úloha 5.1.3

Ktoré tvrdenie je nesprávne?

A) **číslo 12 je deliteľom čísla 82 a násobkom čísla 4**

B) **<u>číslo 111 je násobkom čísla 11</u>**

C) **číslo 8 je deliteľom čísla 8**

Úloha je opäť zameraná na prácu s pojmami deliteľ a násobok. Odpoveď A) spája pojmy deliteľ a násobok. Rozumie žiak rozdielu? Tvrdenie v možnosti B) je nesprávne, aj keď mnohým sa môže zdať, že 11 . 11 je práve 111 kvôli tomu, že 11 . 2 = 22 alebo 11 . 9 = 99. Odpoveď C) môže byť zavádzajúca pre tých, ktorí si neuvedomujú, že každé číslo je zároveň svojím deliteľom.

Úloha 5.1.4

Anka má Pexeso, v ktorom je 60 kartičiek. Rozkladá ich do obdĺžnikového tvaru. Koľko rôznych obdĺžnikov môže dostať?

A) **5**

B) **<u>6</u>**

C) **10**

Táto úloha je zameraná na predstavu toho, koľkými rôznymi spôsobmi viem dané číslo napísať ako súčin dvoch iných čísel. To je prvá vec, ktorú si žiaci pri tejto úlohe musia uvedomiť. Ďalej potrebujú prísť na to, že hľadaný obdĺžnik môže mať rozmery 1 x 60, 2 x 30, 3 x 20, 4 x 15, 5 x 12 a 6 x 10. Mnoho žiakov môže zabudnúť na to, že ak poukladám všetky kartičky do jedného radu, tiež dostanem obdĺžnik. Títo žiaci označia odpoveď A). V odpovedi C) sú zahrnuté taktiež možnosti akoby opačné k tým vyššie uvedeným, 30 x 2, 20 x 3,... Ak si žiaci neuvedomujú, že obdĺžnik s rozmermi 2 x 30 je taký istý ako ten s rozmermi 30 x 2, vyberú si túto možnosť ako správnu. To môže podnietiť diskusiu o komutatívnosti násobenia. Správnou odpoveďou je teda možnosť B).

Úloha 5.1.5

V divadle je 26 radov, v každom rade je 24 sedadiel. Všetky sedadlá sú očíslované počnúc od prvého radu. V ktorom rade sa nachádza sedadlo s číslom 374?

A) 14

B) 15

C) <u>16</u>

Úloha je zameraná na interpretáciu výsledku delenia prirodzeného čísla so zvyškom. Ak žiaci delia 374 : 24, vyjde im podiel 15, zvyšok 14. Mnohí si môžu myslieť, že A) alebo B) je správna odpoveď. Treba si však uvedomiť, že ak podiel vyjde 15, znamená to, že 15. rad je už ukončený, a teda sedadlo 374 sa nachádza až v nasledujúcom rade. Teda správna odpoveď je C). Ak sa žiaci rozhodnú číslo 374 radšej deliť 26 namiesto 24, správnou odpoveďou sa im bude zdať A).

Úloha 5.1.6

Pes je deväťkrát ťažší ako mačka. Myš je dvadsaťkrát ľahšia ako mačka a repa je šesťkrát ťažšia ako myš. Koľkokrát je pes ťažší ako repa?

A) <u>30 krát</u>

B) 35 krát

C) 1080 krát

Pri tejto úlohe musia žiaci porovnávať hmotnosti na základe toho, že majú vedomosti o niektorých vzťahoch medzi danými hmotnosťami. Tie sú vyjadrené ako niekoľkonásobok inej hmotnosti. Ak žiaci poznajú pojmy násobok a deliteľ a vedia ich aj použiť, nemal by byť pre nich problém nájsť správne riešenie. Správna odpoveď je A). Ak sa im zdá v zadaní veľa údajov, môžu si povedať, že tieto násobky (deväť násobok, dvadsať násobok a šesť násobok) jednoducho sčítajú alebo vynásobia navzájom. Možnosti týchto odpovedí sú B) a C).

Úloha 5.1.7

Je daná takáto úloha: ***Sedem škriatkov sa delilo o korisť. Postupne dostáva každý jednu zlatku. Keď už má každý z nich 15 zlatiek, to čo zostane, nestačí na to, aby každý z nich dostal ešte jednu zlatku. Koľko zlatiek mohli ulúpiť?***

Koľko rôznych riešení môže mať táto úloha:

- **A) žiadne**
- **B) jedno**
- **C) <u>šesť</u>**
- **D) sedem**
- **E) viac ako 7**

Táto úloha sa zameriava na zvyšok po delení. Ak by bol nulový, platila by možnosť B), ktorú si vyberú žiaci, ktorí si neuvedomia, že zlatky neboli rozdelené bezo zvyšku. Väčšina žiakov sa bude pravdepodobne rozhodovať medzi možnosťami C) a D). Možnosť D) označia tí, ktorí si neuvedomia, že počet nenulových zvyškov po delení siedmimi je šesť a to zvyšok 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Správna odpoveď je C).

5.2 KRITÉRIA DELITEĽNOSTI

Úloha 5.2.1 (EKG, príprava 1, úloha 5)

Máme číslo 5915. Ktorými z čísel je deliteľné:

- **A) 2, 5 a 10**
- **B) 2 a 5**
- **C) <u>5</u>**
- **D) žiadna z odpovedí nie je správna**

Úloha slúži na zopakovanie toho, či žiaci vedia rozhodnúť o deliteľnosti daného čísla číslami 2, 5 a 10. To, že je dané číslo deliteľné 5 je žiakom zrejmé, keďže posledná číslica je 5 a tomuto kritériu rozumejú. Možnosti A) a B) slúžia na overenie toho, či sú žiakom zrejmé kritéria deliteľnosti 2 a 10.

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	1	0	20	0

Keďže sa takmer všetci zhodli na správnej odpovedi, nebolo potrebné druhé hlasovanie. Ako sa ukázalo, kritéria deliteľnosti 2, 5 a 10 sú žiakom veľmi blízke, preto nemajú problém odpovedať na zadanú otázku. Taktiež povačšine nemajú problém tieto kritéria vysloviť. Po úlohe navrhujeme žiakom nechať priestor na presné sformulovanie kritérií deliteľnosti 2, 5 a 10.

Na základe skúsenosti z praxe, navrhujeme predchádzajúcu úlohu 5.2.1 nahradiť úlohou 5.2.2:

Úloha 5.2.2

Ktoré tvrdenie je nesprávne:

A) **Číslo je deliteľné piatimi, ak končí číslicou 5.**
B) **Číslo je deliteľné piatimi, ak končí číslicou 0.**
C) **<u>Číslo je deliteľné piatimi práve vtedy, keď je na mieste jednotiek číslica 5.</u>**
D) **Číslo je deliteľné piatimi práve vtedy, keď je na mieste jednotiek číslica 5 alebo 0.**

Táto úloha je zameraná na postačujúcu a nutnú podmienku deliteľnosti piatimi. Možnosť C) obsahuje nesprávne tvrdenie, keďže na mieste jednotiek môže byť aj 0.

Úloha 5.2.3

Máme číslo 123 628. Ktorými z čísel je deliteľné a prečo?

A) **4, lebo na mieste jednotiek je číslica 8 a 4 delí 8**
B) **<u>4, lebo posledné dve číslice tvoria číslo 28 a 4 delí 28</u>**

C) 8, lebo na mieste jednotiek je číslica 8 a 8 delí 8

D) 4 a 8, lebo na mieste jednotiek je číslica 8 a 4 delí 8 a tiež 8 delí 8

E) žiadna z odpovedí nie je správna

Úloha je zameraná na častú miskoncepciu, podľa ktorej sa o deliteľnosti čísla rozhodujeme na základe poslednej číslice (nesprávne vytvorená analógia s kritériami deliteľnosti 2, 5 a 10).

Úloha 5.2.4

Máme číslo 133 609. Ktorými z čísel je deliteľné?

A) 3

B) 9

C) 3 a 9

D) <u>žiadna z odpovedí nie je správna</u>

V tejto úlohe majú žiaci opäť určiť, či je dané číslo deliteľné tentoraz 3, 9 alebo oboma. Opäť je vybrané také číslo, ktoré sa končí číslicou, ktorá je aj v možnostiach, konkrétne číslicou 9. Ak by žiaci chceli použiť analógiu kritéria deliteľnosti pre číslo 4, resp. 8, označia možnosť C), keďže posledné dvojčíslie, dokonca aj trojčíslie je deliteľné tromi aj deviatimi. Tí, ktorí poznajú kritérium deliteľnosti tromi a deviatimi, vedia, že dané číslo nie je deliteľné ani 3, ani 9, pretože jeho ciferný súčet nie je deliteľný ani 3, ani 9.

Úloha 5.2.5 (EKG, príprava 1, úloha 6)

Máme číslo 860,50. Ktorými z čísel je deliteľné:

A) 2, 5 a 10

B) 2, 5 a 7

C) 5, 7 a 10

D) <u>žiadna z odpovedí nie je správna</u>

Úlohou chceme zistiť, či si žiaci uvedomujú, že všetky pojmy a tvrdenia o deliteľnosti platia pre množinu celých (na strednej a základnej škole prirodzených) čísel alebo to len formálne opakujú. V možnosti A) sú zahrnuté tie delitele, ktoré by dané číslo delili, ak by v ňom chýbala desatinná čiarka.

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	14	2	0	5
2. hlasovanie	9	0	0	12

Úloha je chyták, a preto sa dalo predpokladať, že viacerí žiaci môžu mať s touto úlohou problém. Už po prečítaní úlohy bolo vidno, že desatinné číslo v zadaní sa im nezdá a nevedeli, či si môžu desatinnú čiarku „odmysliet“. Piati žiaci už pri prvom hlasovaní zistili, že žiadna z odpovedí nie je správna. Po diskusii ešte stále zostalo pár žiakov, ktorí boli presvedčení o tom, že 860,50 je deliteľné 2, 5 aj 10, ale viac ako polovica sa už priklonila k možnosti D), keďže spolužiaci, ktorí už v prvom hlasovaní zvolili možnosť D), vysvetlili ostatným prečo žiadna z možností nie je správna. Po vyzvaní žiaci vedeli zdôvodniť svoje hlasovanie tým, že o deliteľnosti uvažujeme iba pri prirodzených číslach.

Pri opätovnom odučení tejto úlohy sme sa rozhodli zmeniť predchádzajúcu úlohu nasledovne (úloha 5.2.6):

- Zmenili sme možnosti, keďže žiaci sa nestretli s kritériom deliteľnosti siedmimi. V možnostiach sa teda vyskytujú len čísla, ktorých kritériá deliteľnosti žiaci ovládajú a to: 2, 3, 5, 9 a 10.
- Zároveň sme zmenili číslo v zadaní, kvôli tomu, aby ciferný súčet čísla bez desatinnej čiarky bol deliteľný 3 a 9.

Úloha 5.2.6 (GA)

Máme číslo 850,50. Ktorými z čísel je deliteľné:

A) 2, 5 a 10

B) 2, 3, 5 a 10

C) 2, 5, 9 a 10

D) žiadna z odpovedí nie je správna

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	5	2	2	4
2. hlasovanie	5	0	2	6

Z týchto hlasovaní je vidieť, že odstránenie možnosti s číslom 7 zvýšilo počet hlasov pre možnosti B a C. Aj pri tomto hlasovaní sa jasne ukázala miskoncepcia mnohých žiakov, ktorí si neuvedomujú, že deliteľnosť sa týka iba prirodzených čísel. Žiaci môžu síce ovládať kritéria deliteľnosti, chýba im však základný poznatok a tým je predpoklad, za splnenie ktorého tieto kritéria platia. V druhom hlasovaní sa stále menej ako 50% žiakov priklonilo k správnej odpovedi.

Nasledujúce 3 úlohy sú zamerané na kritéria deliteľnosti zloženými číslami. Sú zadané vo forme výrokov, o ktorých žiaci majú určiť, či sú pravdivé alebo nie. Žiaci by preto mali mať základné vedomosti o výrokoch a výrokových formách.

Úloha 5.2.7 (EKG, príprava 2, úloha 11)

Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný číslom 6.

Súhlasíte?

A) Áno

B) Nie

Žiaci sa už stretli s viacerými kritériami deliteľnosti. Medzi nimi boli aj kritéria, ktoré používali ciferný súčet (kritérium deliteľnosti 3 a 9). Číslo 6 sa mnohým žiakom zdá veľmi podobné ako čísla 3 a 9 kvôli tomu, že je tiež násobkom trojky. Preto pre nich môže byť lákavé použiť aj pre toto číslo podobné kritérium ako pre 3 a 9.

Výsledky hlasovania

	A	B
1. hlasovanie	6	13
2. hlasovanie	1	18

Pri tejto úlohe však väčšina žiakov nemala problém určiť správnu odpoveď. Už pri prvom hlasovaní ich 13 označilo, že daný výrok nie je pravdivý. Vyzveme ich k tomu, aby svoje tvrdenie odôvodnili.

Stačí nájsť konkrétny príklad, napr. 15. Ciferný súčet je 6, čiže je deliteľný šiestimi, číslo 15 však šiestimi deliteľné nie je. Ďalej žiakov vyzveme k tomu, aby vysvetlili, prečo dané tvrdenie funguje pre 3 aj pre 9, ale pre 6 nie.

Úloha 5.2.8 (EKG, príprava 2, úloha 12)

Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je deliteľné 2 alebo 3.

Súhlasíte?

- **A) Áno**
- **B) <u>Nie</u>**

Výsledky hlasovania

	A	B
1. hlasovanie	14	5
2. hlasovanie	2	17

Táto možnosť už bola pre žiakov lákavejšia. V prvom hlasovaní až 14 žiakov označilo ako správnu odpoveď A). Zrejme to bolo spôsobené tým, že spojkám „a“ a „alebo“

nepripisujú veľký význam. Vo výroku sa objavili čísla 2 a 3, takže túto možnosť považujú za správnu.

Po tom ako žiaci mali priestor na diskusiu, je zrejmé, že 5 žiakov dokázalo „presvedčiť“ spolužiakov o tom, že výrok nie je pravdivý. To naznačuje, že po pozornejšom prečítaní a uvedomení si spojky „alebo“ v danom výroku, žiaci nemali problém označiť výrok za nepravdivý.

Na záver sa žiaci snažia zdôvodniť svoje tvrdenie. Hľadajú konkrétny príklad, kedy to neplatí. Takýmto môže byť napr. Číslo 8. To je deliteľné 2, čiže spĺňa podmienku, nie je však deliteľné šiestimi.

Úloha 5.2.9 (EKG, príprava 2, úloha 13)

Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je deliteľné 2 a 3.

Súhlasite?

A) <u>Áno</u>

B) Nie

Výsledky hlasovania

	A	B
1. hlasovanie	16	3
2. hlasovanie	19	0

Toto tvrdenie je už správne. Po predchádzajúcej úlohe už väčšina žiakov vie, že na to aby bolo číslo deliteľné šiestimi, musí byť deliteľné 2 a 3.

Pri opätovnom odučení, navrhujeme úlohy 5.2.7, 5.2.8 a 5.2.9 nahradiť jednou úlohou 5.2.10. Táto úloha skráti čas potrebný na hlasovanie. Predchádzajúca postupnosť úloh žiakov navyše navedie k tomu, že v poslednom hlasovaní (úloha 5.2.9) všetci zahlasovali správne a teda miskoncepcia bola odstránená už pri úlohách 5.2.7 a 5.2.8.

Úloha 5.2.10

Ktoré tvrdenie je pravdivé:

<u>A) Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je deliteľné 2 a 3.</u>

B) Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je deliteľné 2 alebo 3.

C) Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný číslom 6.

Po tejto úlohe pokračujeme úvahami o kritériách deliteľnosti ďalšími zloženými číslami. Môžeme použiť úlohy 5.2.11 a 5.2.12:

Úloha 5.2.11

Prirodzené číslo je deliteľné číslom 12 práve vtedy, ak je deliteľné

- **A) <u>3 a 4</u>**
- **B) 2 a 6**
- **C) obe možnosti sú správne**
- **D) ani jedna možnosť nie je správna**

Táto úloha môže slúžiť aj ako motivácia na začiatok diskusie o kritériách deliteľnosti zloženými číslami. Žiakov vedieme k tomu, aby vedeli zdôvodniť, prečo nemôžu byť správne obe možnosti. Žiaci predkladajú učiteľovi návrhy ako by mohli vyzerať kritéria deliteľnosti napr. číslami 26, 63, alebo 100. Vieme nájsť také čísla, ktorých súčin je napr. 100 a navzájom nie sú súdeliteľné? Vieme pre každé zložené číslo nájsť takúto dvojicu čísel? Ak nie, prečo? Takáto diskusia má za dôvod viesť žiakov k hlbšiemu porozumeniu kritérií deliteľnosti.

Úloha 5.2.12

Vyberte nesprávne tvrdenie: Ak viem, že číslo je deliteľné 2 a 30, tak

- **A) <u>je deliteľné aj 15 a 60.</u>**
- **B) je deliteľné 6 a 10.**
- **C) je deliteľné 5 a 3.**

Táto úloha je v istom zmysle „opačná“ k predchádzajúcej. Žiaci tentoraz vedia, že číslo je deliteľné 2 a 30 (tieto sú súdeliteľné). Vedia z tohto zadania zistiť, čím všetkým môže byť dané číslo deliteľné?

Úloha 5.2.13 (EKG, príprava 2, úloha 14)

Medzi číslami 18, 36, 56, 72 a 216 je číslo, ktoré nemá vlastnosť spoločnú pre ostatné z hľadiska ich deliteľnosti. Ktoré je to číslo?

A) <u>56</u>

B) 72

C) 216

Táto úloha slúži na to, aby žiaci vedeli porovnať a roztriediť čísla na základe ich deliteľnosti. Znamená to, že hľadám číslo, ktorým budú všetky dané čísla až na jedno deliteľné. Hneď si všimneme, že všetky čísla sú párne, takže kritérium deliteľnosti 2 nebude hrať žiadnu rolu. Z toho hneď vyplýva, že ani kritérium 4, 8, … Vedia žiaci, že tieto kritéria spolu súvisia a vedia ich vylúčiť zároveň s dvojkou?

Pomocou ďalších kritérií deliteľnosti žiaci jednoducho zisťujú, že žiadne z nich nie je deliteľné 5 alebo 10. Číslo 56 však nie je deliteľné ani 3, ani 6 a ani 9, kým ostatné sú. Správna odpoveď je teda A).

Výsledky hlasovania

	A	B	C
1. hlasovanie	9	2	8
2. hlasovanie	15	0	4

Pri prvom hlasovaní 8 žiakov označilo ako správnu odpoveď možnosť C). Mohlo to byť spôsobené tým, že je to najväčšie číslo zo všetkých alebo že si neuvedomili, že jeho ciferný súčet je 9 a teda je to číslo deliteľné troma. Zdá sa, že diskusia žiakom pomohla, keďže po nej až 15 žiakov označilo správnu odpoveď.

Nasledovná úloha 5.2.14 bola odučená na oboch gymnáziách. Na prvom gymnáziu hlasovanie nebolo veľmi úspešné (úloha je označená 5.2.14a), preto sme sa pri opätovnom odučení na druhom gymnáziu (úloha označená 5.2.14b) rozhodli, že do vyučovania zaradíme úlohy, ktoré jej budú predchádzať (úlohy 5.2.15, 5.2.16 a 5.2.17).

Úloha 5.2.14a (EKG, príprava 2, úloha 15)

Koľko z čísel 120, 121, …, 189, 190 je deliteľné siedmimi a zároveň deviatimi?

A) 1

B) 2

C) 18

D) Viac ako 18

Úloha je zameraná na deliteľnosť zloženými číslami a taktiež na „vzdialenosť" jednotlivých násobkov. Pri tejto úlohe si žiaci musia uvedomiť, že ak je číslo deliteľné siedmimi a zároveň aj deviatimi, musí byť deliteľné 63, keďže tieto dve čísla sú nesúdeliteľné.

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	4	7	8	0
2. hlasovanie	5	7	7	0

Dve takéto čísla (deliteľné 63) sú od seba vzdialené o 63. A keďže medzi 120 a 190 je 70 čísel, musí sa tam vyskytovať aspoň jedno také číslo. Žiaci, ktorí uvažovali takto boli štyria, označili odpoveď A).

Takáto úvaha však nie je úplne dotiahnutá dokonca. Tieto čísla môžu byť aj dve. Žiaci potrebovali nájsť prvé také číslo, tým je 126. Ďalšie teda bude 189. Správna odpoveď je B). Tú označilo v prvom aj druhom hlasovaní 7 žiakov.

Mohlo sa stať, že žiaci presne nerozumejú tomu, čo to znamená, že nejaké číslo je deliteľné siedmimi aj deviatimi súčasne a za správnu odpoveď považujú C), keďže v nej sú zahrnuté všetky čísla od 120 do 190, ktoré sú deliteľné siedmimi alebo deviatimi.

Zaujímavé na tejto úlohe je, že druhé hlasovanie dopadlo takmer totožne s prvým. Mohlo to byť spôsobené tým, že aj keď niekoľkí žiaci poznali správnu odpoveď, nevedeli ju vysvetliť svojim spolužiakom.

Preto navrhujeme do výučby zaradiť úlohy 5.2.15, 5.2.16 a 5.2.17, ktoré jej budú vo výučbe predchádzať:

Úloha 5.2.15 (GA)

Výrok: „Medzi číslami 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006 sa určite nachádza číslo deliteľné siedmimi." je:

A) **pravdivý**

B) **nepravdivý**

V tejto úlohe sme sa zamerali na porozumenie vzdialenosti násobkov. Máme 7 za sebou idúcich čísel. Je medzi nimi nejaké deliteľné siedmimi?

Výsledky hlasovania

	A	B	Neplatný
1. hlasovanie	8	4	1
2. hlasovanie	9	4	0

Už po prvom hlasovaní 8 žiakov vedelo rozhodnúť, že tento výrok je pravdivý. Svoju odpoveď vedeli aj zdôvodniť tým, že medzi siedmimi za sebou idúcimi číslami, musí byť nejaké deliteľné siedmimi. Potom sme pokračovali diskusiou o násobkoch sedmičky a o ich vzdialenosti. Nakoniec mali žiaci za úlohu vysloviť pravdivé výroky o 20 za sebou idúcich číslach. Napr. „Určite tam budú aspoň 2 čísla deliteľné siedmimi." „Budú medzi nimi aspoň 2 čísla deliteľné desiatimi." Bude medzi nimi jedno číslo deliteľné dvadsiatimi."

Úloha 5.2.16 (GA)

Koľko z čísel 100, 101, …, 149, 150 je deliteľné ôsmimi?

A) **4**

B) **5**

C) **<u>6</u>**

D) **8**

Po úlohe 5.2.15 už žiaci vedia, že každé ôsme číslo je deliteľné ôsmimi. Táto úloha je zameraná na porozumenie toho, koľko čísel deliteľných konkrétnym číslom sa nachádza v určitej sekvencii prirodzených čísel. Na to, aby vedeli zistiť, koľko čísel deliteľných ôsmimi sa nachádza v tejto sekvencii, potrebujú zistiť, koľko čísel sa nachádza medzi 100 a 150. Je to 51 čísel. Nie každé z nich je však deliteľné ôsmimi, iba každé ôsme. 51 : 8 = 6, zv. 3. žiaci by teda mali vedieť, že týchto čísel bude najmenej 6. Čo však urobiť so zvyškom? Potrebujeme nájsť prvé také číslo deliteľné ôsmimi, aby sme vedeli určiť, či tých čísel nebude sedem. Prvým číslom deliteľným ôsmimi z danej sekvencie je číslo 104. Správna odpoveď je C).

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	0	4	9	0
2. hlasovanie	0	2	11	0

Väčšina žiakov už po prvom hlasovaní vedela označiť správnu odpoveď. Zdá sa, že predošlá otázka im pomohla uvedomiť si, ako často sa pri za sebou idúcich číslach vyskytuje deliteľné ôsmimi. Tí žiaci, ktorí označili možnosť B) mohli mať problém s porozumením toho, čo znamená, že pri delení 51 : 8 nám vyšiel zvyšok. Zrejme si mysleli, že to znamená, že čísel deliteľných ôsmimi tam bude o jedno menej.

Pri ďalšom odučení by sme navrhovali úlohu zmeniť nasledovne:

Úloha 5.2.17

Koľko z čísel 101, …, 149, 155 je deliteľné ôsmimi?

A) 5

B) 6

C) <u>7</u>

D) 8

Napriek tomu, že sa nám zmenil počet čísel v danom rade, opäť nám vyjde, že čísel deliteľných ôsmimi by malo byť 6 (55 : 8 = 6, zv. 7). V tomto prípade to však nebude pravda, lebo medzi tými „zvyšnými“ siedmimi číslami sa nachádza ešte jedno deliteľné ôsmimi. Táto úloha by mala preveriť, či žiaci do hĺbky rozumejú tomu, ako hľadať deliteľné čísla v rade za sebou idúcich prirodzených čísel.

Po tejto úlohe už môže nasledovať úloha 5.2.14b:

Úloha 5.2.14b (GA)

Koľko z čísel 120, 121, …, 189, 190 je deliteľné siedmimi a zároveň deviatimi?

A) 1

B) <u>2</u>

C) 18

D) Viac ako 18

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	1	7	5	0
2. hlasovanie	0	9	4	0

Na týchto hlasovaniach je vidno, že nájsť počet čísel deliteľných iným číslom nie je pre žiakov vôbec problém. S čím však problém mali, bolo uvedomenie si, čo to znamená, že číslo je deliteľné siedmimi a zároveň deviatimi. Väčšina z nich prišla na to, že to znamená, že číslo musí byť deliteľné 63. 4 žiaci však spočítali čísla deliteľné siedmimi a čísla deliteľné deviatimi. Preto im vyšlo 18.

Navrhujeme ešte žiakom zadať nasledujúcu úlohu:

Úloha 5.2.18 (GA)

Koľko z čísel 299, 300, …, 400, 401 je deliteľné tromi a zároveň dvanástimi?

A) 2

B) 3

C) 8

D) <u>9</u>

Táto úloha je malou obmenou predchádzajúcej a to v tom, že kým čísla 7 a 9 sú nesúdeliteľné a preto, keď hovoríme o tom, že nejaké číslo je deliteľné oboma zároveň, vieme, že toznamená, že musí byť deliteľné 63, pri číslach 3 a 12 to nie je tak. Keďže 3 delí 12, každé číslo deliteľné dvanástimi bude určite deliteľné aj troma.

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D	neplatný
1. hlasovanie	0	9	2	1	0
2. hlasovanie	0	2	4	5	1

Hlasovanie ukazuje, že žiakov spočiatku táto úloha zmiatla. V prvom hlasovaní až 9 žiakov označilo ako správnu odpoveď B), ktorú dostali nasledovným spôsobom: Keďže čísla majú byť deliteľné 3 a 12 zároveň, musia byť deliteľné 36. Takéto čísla sú v tejto sekvencii 3 (a to: 324, 360, 396). Iba 1 žiak v prvom hlasovaní označil správnu odpoveď. V následnej diskusii však tento žiak upozornil svojich spolužiakov na to, že ak je číslo deliteľné 12, musí byť deliteľné 3. Preto sa už dokopy 9 žiakov rozhodovalo medzi možnosťami C) a D). Keďže 102 : 12 = 8, zv. 6, našli sa aj takí (4 žiaci), ktorí si mysleli, že tam bude 8 čísel deliteľných

12. Tí, ktorí našli prvé také číslo, ktorým bolo číslo 300, vedeli, že takýchto čísel deliteľných 12 bude 9 (a to: 300, 312, 324, 336, 348, 360, 372, 384, 396).

Úloha 5.2.19 (EKG, príprava 3, úloha 1)

Janko má na Facebook-u sedem miestne heslo skladajúce sa len z číslic. Dlho sa neprihlasoval a tak toto heslo zabudol. Pamätá si len každú druhú číslicu 4*1*2*3 a že heslo bolo deliteľné tromi. Taktiež si spomenul, že tie číslice, ktoré zabudol boli rovnaké. Najneskôr na koľký krát sa mu podarí prihlásiť?

- **A) Na prvýkrát, lebo existuje len jedna taká možnosť**
- **B) Najneskôr na deviaty krát**
- **C) Najneskôr na desiaty krát**
- **D) <u>Neprihlási sa, lebo sa nedá nájsť taká číslica</u>**

Žiaci sa s kritériom deliteľnosti tromi už stretli. Vedia rozhodnúť, či nejaké číslo je alebo nie je deliteľné tromi na základe jeho ciferného súčtu. Táto úloha ide však viac do hĺbky. Žiaci musia určiť akú číslicu je potrebné dosadiť za hviezdičky. Aj keď vedia, že ciferný súčet má byť deliteľný tromi, v tejto úlohu musia prísť na to, ako ciferný súčet ovplyvní dosadzovanie troch rovnakých číslic.

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	1	5	4	10
2. hlasovanie	0	2	2	16

Vzhľadom na to, že číslicu dosadíme namiesto hviezdičky práve trikrát, môže sa žiakom na prvý pohľad zdať, že na dosadenej číslici nezáleží, lebo súčet troch rovnakých čísel je vždy deliteľný tromi. Takéto uvažovanie je zahrnuté v možnostiach B) a C). Rozdiel medzi týmito možnosťami spočíva v tom, že v prvej možnosti nie je zahrnutá 0, kým v druhej áno. Aj keď si túto možnosť zvolilo dokopy 9 žiakov v prvom hlasovaní, pri diskusii o správnosti tejto možnosti bolo zrejmé, že žiakom ani nenapadlo, že ak spočítam 3 rovnaké čísla, ktoré vôbec nemusia byť deliteľné troma, ich súčet už deliteľný troma musí byť. Bolo by vhodné zaradiť do vyučovacej hodiny aj úlohu zameranú práve na tento fakt (viď úlohy 5.2.22 – 5.2.26).

Dôležité však bolo uvedomiť si, že súčet zvyšných číslic je 10 a teda toto číslo nebude nikdy deliteľné tromi. Správnu možnosť označilo v prvom hlasovaní 10 žiakov. V rámci diskusie sa im podarilo presvedčiť ďalších 6. Žiaci vedeli svoju odpoveď zdôvodniť presne tým, že súčet zvyšných číslic je 10 a teda dané číslo nebude deliteľné tromi nech dosadíme za hviezdičky akúkoľvek číslicu.

Prvá možnosť nebola pre žiakov vôbec zaujímavá, preto možnosti navrhujeme zmeniť nasledovne:

A) Najneskôr na deviaty krát

B) Najneskôr na desiaty krát

C) Najneskôr na jedenásty krát

D) <u>Neprihlási sa, lebo sa nedá nájsť taká číslica</u>

Predchádzajúca úloha 5.2.19 môže mať aj rôzne variácie, podľa toho na čo sa chceme pri vyučovaní zamerať. Napríklad v úlohe 5.2.20 si žiaci musia uvedomiť, že súčet už známych číslic je deliteľný tromi a preto nech dosadíme akúkoľvek číslicu, výsledné číslo bude deliteľné tromi. Preto je správnou možnosťou B).

Úloha 5.2.20

Janko má na Facebook-u sedem miestne heslo skladajúce sa len z číslic. Dlho sa neprihlasoval a tak toto heslo zabudol. Pamätá si len každú druhú číslicu 5*2*7*4 a že heslo bolo deliteľné tromi. Taktiež si spomenul, že tie číslice, ktoré zabudol boli rovnaké. Podarí sa mu prihlásiť už na prvýkrát?

A) Áno, lebo existuje len jedna taká možnosť

B) <u>Áno, lebo môže dosadiť akéhokoľvek číslo</u>

C) Nie, lebo žiadna taká možnosť neexistuje

D) Možno, lebo existuje viacero číslic, ktoré môže dosadiť, ale nie všetky

Ak počet dosadzovaných čísle pozmeníme ako v úlohe 5.2.21, žiaci si teraz musia uvedomiť, že aj keď je súčet zatiaľ známych číslic deliteľný tromi, nemôžeme dosadiť akúkoľvek číslicu, pretože ju tento raz dosadzujeme štyrikrát. Môžeme dosadiť iba číslice 0, 3 alebo 9, keďže iba tieto ak ich pripočítame štyrikrát, budú dávať spolu už so známymi číslicami súčet, ktorý je deliteľný tromi.

Úloha 5.2.21

Janko má na Facebook-u sedem miestne heslo skladajúce sa len z číslic. Dlho sa neprihlasoval a tak toto heslo zabudol. Pamätá si len každú druhú číslicu *2*7*3* a že heslo bolo deliteľné tromi. Taktiež si spomenul, že tie číslice, ktoré zabudol boli rovnaké. Podarí sa mu prihlásiť už na prvýkrát?

- **A) Áno, lebo existuje len jedna taká možnosť**
- **B) Áno, lebo môže dosadiť akéhokoľvek číslo**
- **C) Nie, lebo žiadna taká možnosť neexistuje**
- **D) <u>Možno, lebo existuje viacero číslic, ktoré môže dosadiť, ale nie všetky</u>**

Úlohy 5.2.22 – 5.2.26 sú zamerané na deliteľnosť tromi.

Úloha 5.2.22

Pri ktorej kombinácii čísel viem bez rátania zistiť, či je deliteľná tromi?

- **A) 101 + 1 + 101**
- **B) <u>58 + 58 + 58</u>**
- **C) 4 + 8 + 16**

Úloha 5.2.23

Súčet ktorých čísel nie je deliteľný tromi

- **A) 1899 + 1900 + 1901**
- **B) 6875 + 6875 + 6875**
- **C) <u>350 + 350 + 350 +350</u>**
- **D) 1230 + 1230 + 1230 + 1230**

Úloha 5.2.24

Výrok: „Súčet deviatich rovnakých čísel je vždy deliteľný tromi." je

A) **<u>pravdivý</u>**

B) **nepravdivý**

Úloha 5.2.25

Výrok: „Súčet troch rovnakých čísel je vždy deliteľný tromi." je

A) **<u>pravdivý</u>**

B) **nepravdivý**

Úloha 5.2.26

Výrok: „Súčin troch rovnakých čísel je vždy deliteľný tromi." je

A) **pravdivý**

B) **<u>nepravdivý</u>**

Úloha 5.2.27

Doplňte namiesto písmen X a Y vo výraze 175X94Y2 číslice tak, aby vzniklo čo najväčšie číslo deliteľné 12.

A) **<u>X = 9, Y = 5</u>**

B) **X = 9, Y = 8**

C) **X = 8, Y = 3**

Žiaci si v prvom rade musia uvedomiť, že číslo je deliteľné 12, ak je deliteľné 3 a súčasne 4. Niektorí si myslia, že toto pravidlo sa dá pozmeniť na: číslo je deliteľné 12, ak je deliteľné 2 a 6. Na túto miskoncepciu sa zameriava odpoveď B). Ak aj žiaci vedia, že kritérium deliteľnosti 4 hovorí, že posledné dvojčíslo musí byť deliteľné 4, často krát uvažujú len v rámci malej násobilky a teda o 32 ako o poslednom možnom dvojčísle. Toto je zachytené v odpovedi C). Správna odpoveď je A).

Úloha 5.2.28

Výrok: *„Ak delíme štvorciferné číslo 82 deväťdesiatimi a zvyšok je 0, vieme jednoznačne určiť podiel.”* je**

A) **<u>pravdivý</u>**

B) **nepravdivý**

Úloha je zameraná na kritéria deliteľnosti zložených čísel, konkrétne 90. Ak je číslo deliteľné deväťdesiatimi, vieme, že musí byť deliteľné deviatimi aj desiatimi zároveň. Teda vieme, že poslednou číslicou musí byť 0. A ak má byť ciferný súčet deliteľný deviatimi, neznáme číslo musí byť 8280. Teda jednoznačne vieme, že podiel je rovný 92.

5.3 PRVOČÍSLA A ZLOŽENÉ ČÍSLA

Úloha 5.3.1 (EKG, príprava 3, úloha 2)

Medzi číslami: 1, 29, 13, 2, 91, 2325, 57 a 37

A) **sú 4 prvočísla**

B) **<u>je 5 prvočísel</u>**

C) **všetky sú prvočísla**

Úloha je zameraná na určovanie toho, či je dané číslo prvočíslo alebo nie. Najčastejšie miskoncepcie, s ktorými sa pri pojme „prvočíslo“ stretávame môžu byť nasledovné: Niektorí žiaci nepovažujú číslo 2 za prvočíslo, pretože je párne a preto sa im zdá, že by malo byť zložené. Je taktiež možné, že nerátajú medzi prvočísla 29, pretože jej poslednou číslicou je 9 a vyzerá to tak, že by mohla byť deliteľná práve deviatkou. Alebo číslo 57 sa im môže zdať príliš veľké na to, aby mohlo byť prvočíslom.

Výsledky hlasovania

	A	B	C
1. hlasovanie	4	15	1
2. hlasovanie	0	20	0

Z hlasovania je očividné, že žiaci s touto úlohou nemali problém. V prvom hlasovaní už 15 žiakov vedelo označiť správnu odpoveď B). Medzi prvočísla teda patria: 29, 13, 2, 57 a 37.

4 žiaci jedno z týchto čísel nepovažovali za prvočíslo. Taktiež je zrejmé, že poslednú možnosť vedeli všetci až na jedného žiaka vylúčiť, keďže hneď si všimli, že číslo 2325 je deliteľné piatimi.

Po diskusii sa už všetci zhodli na tom, že prvočísel je medzi danými číslami práve 5. Tí, ktorí v prvom hlasovaní vedeli určiť správnu odpoveď, nemali problém presvedčiť spolužiakov o jej správnosti.

Predchádzajúcu úlohu navrhujeme zmeniť nasledovne:

Úloha 5.3.2

Ktorá z možností obsahuje iba prvočísla:

A) **29, 13, 1, 37**
B) **57, 2223, 47, 19**
C) **<u>97, 103, 2, 31</u>**

Úloha 5.3.3 (EKG, príprava 3, úloha 3)

Jedného dňa sa vlk Kleofáš vlúpal do košiara, kde bolo sto oviec. Každá z nich bola označená číslom od 1 do 100. Kým si vlk uvedomil, koľko šťastia ho stretlo, ovečka s číslom 1 mu utiekla. Keďže bol veľmi hladný, rozhodol sa, že všetky ovečky zje. Ale keďže bol aj veľmi poverčivý, prvý deň už žiadnu nezjedol. Na druhý deň zjedol všetky ovečky, ktoré boli označené číslom deliteľným dvoma. Tretí deň zjedol všetky

násobky trojky, štvrtý deň všetky násobky štvorky atď. Na konci bol už taký plný, že posledná ovečka mu utiekla. Akým číslom bola označená?

A) 100

B) 99

C) <u>97</u>

D) 91

Táto slovná úloha je zameraná hľadanie najväčšieho prvočísla menšieho ako 100. Žiaci si musia uvedomiť, že hľadané číslo je prvočíslom, pretože ak by nebolo, vlk Kleofáš by ovečku zjedol v deň, ktorý bol deliteľom toho čísla.

Výsledky hlasovania

	A	B	C	D
1. hlasovanie	1	0	11	8
2. hlasovanie	0	0	18	2

Žiaci nemali problém uvažovať takýmto spôsobom a už pri prvom hlasovaní im bolo jasné, že hľadajú najväčšie dvojciferné prvočíslo. Takže možnosti A) a B) vedeli vylúčiť pomerne rýchlo. Menší problém už nastal, keď sa mali rozhodnúť medzi číslami 97 a 91. Tu sa dalo uvažovať dvomi spôsobmi. Po prvé, 91 nie je prvočíslo a teda správna odpoveď je C). Alebo stačilo len zistiť, že 97 je prvočíslom a 91 je menšie ako 97, takže správna odpoveď je C).

V druhom hlasovaní sa už k správnej odpovedi priklonilo 18 žiakov.

Úloha 5.3.4

Súčet ktorých dvoch prvočísel je 31?

A) <u>29 a 2</u>

B) 0 a 31

C) žiadne dve prvočísla nedávajú súčet 31

Úloha odhaľuje miskoncepciu, že číslo 2 nie je prvočíslo, pretože je párne a ukáže nám ako žiaci rozmýšľajú o čísle 0. Možnosť B) si teda zvolia žiaci, ktorí považujú 0 za prvočíslo. Možnosť C) je pre tých, ktorí majú predstavu, že ak je číslo 31 prvočíslo a dá sa zapísať iba ako súčin 1 a samého seba, tak sa nedá zapísať ani ako súčet prvočísel. Správna odpoveď je A).

Úloha 5.3.5

Ak vieme, že súčet dvoch rôznych prvočísel je prvočíslo, potom

A) obidva sčítance sú nepárne

B) obidva sčítance sú párne

C) <u>jedno číslo je párne, druhé nepárne</u>

D) nedá sa určiť

Úloha je zameraná na rovnakú miskoncepciu ako predchádzajúca (žiadne párne číslo nie je prvočíslo). Avšak nevyskytuje sa v nej konkrétne číslo. Vo výučbe môže nasledovať ako doplňujúca k predchádzajúcej.

Odpoveď A) je nesprávna, pretože ak sčítavame dve nepárne čísla, vieme, že ich súčet je číslo párne. Taktiež vieme určiť, že nemôžu byť obidva sčítance párne a to hneď z dvoch dôvodov. Prvý je ten, že existuje len jedno párne prvočíslo, teda neexistujú dve rôzne párne prvočísla, ktorých súčet by sme mohli uvažovať. Druhý je ten, že súčet dvoch párnych čísel je tiež párne číslo. Odpoveď B) je teda nesprávna. Správna je odpoveď C) pričom vieme povedať, že jeden párny sčítanec musí byť číslo 2.

Úloha 5.3.6

Súčet ktorých dvoch prvočísel je 89?

A) 87 a 2

B) 0 a 87

C) <u>žiadne dve prvočísla nedávajú súčet 89</u>

Táto úloha odhaľuje miskoncepciu, že veľké nepárne číslo, ktoré sa nekončí číslicou 5 je prvočíslo. Žiaci vďaka predchádzajúcim úlohám (5.3.4 a 5.3.5) už vedia, že ak 89 je prvočíslo a majú ho zapísať ako súčet dvoch čísle musí to byť 2 a 87. Správnou odpoveďou sa im zdá byť A), pretože si neuvedomujú, že číslo 87 nie je prvočíslo (jeho ciferný súčet je 15). Správnou odpoveďou je teda C).

Úloha 5.3.7

Koľko trojciferných prvočísel končí číslicou 5?

A) 90

B) 10

C) <u>ani jedno</u>

Táto úloha nie je vôbec náročná, ak si žiaci uvedomia, že trojciferné prvočíslo nemôže končiť číslicou 5, pretože by muselo byť deliteľné piatimi. Odpoveď C) je správna a žiaci, ktorí ovládajú kritérium deliteľnosti piatimi by nemali mať problém určiť túto možnosť ako vyhovujúcu. V odpovedi A) sú zahrnuté všetky trojciferné čísla končiace číslicou 5. Predpokladáme, že druhé hlasovanie dopadne podstatne lepšie ako prvé, pretože stačí, ak si jeden žiak z triedy uvedomí, že takéto prvočíslo neexistuje a nebude mať problém presvedčiť o tom spolužiakov.

Úloha 5.3.8

Koľko 3- ciferných čísel má vo svojom prvočíselnom rozklade čísla 3, 5 a 7?

A) 4

B) 5

C) <u>9</u>

D) viac ako 9

Väčšine žiakov príde na um, že prvé také číslo je 105. Možnosť A) je pre tých, ktorí číslo 105 vynásobia 2, zistia, že je to 210, potom aj toto číslo vynásobia 2, dostanú 420 a nakoniec 840. Keďže považujú dvojnásobok za najmenší možný násobok, výsledok 4 čísla sa im zdá pochopiteľný. Neuvedomia si však, že vlastne číslo 105 vynásobili dvomi, štyrmi a ôsmimi. Zabudli však násobiť tromi, piatimi, šiestimi, siedmimi a deviatimi. Takže správna je odpoveď C).

Nájdu sa aj taký, ktorí si uvedomia, že súčin 3 . 5 . 7 majú násobiť rôznymi číslami a keďže ide o prvočíselný rozklad, vedia, že musia používať prvočísla. Uvažujú teda 105, 2 . 105, 3 . 105, 5 . 105, 7. 105 a zabudnú, že napr. číslo 6 sa dá tiež napísať ako súčin prvočísel. Čiže počet 5 sa nachádza v možnosti B). Ak žiaci neprídu na žiaden spôsob ako tieto čísla vyhľadať, môže sa im zdať, že takýchto čísel je veľa, preto odpoveď D).

Úloha 5.3.9 (EKG, príprava 4, úloha 1), (GA)

Ktoré z týchto čísel je rozložené na prvočinitele?

- **A) 126 = 1.2.3.3.7**
- **B) <u>127 = 127</u>**
- **C) 128 = 2.2.2.4.4**

Pri tejto konceptuálnej úlohe ide najmä o miskoncepcie spojené s tým, že číslo 1 je prvočíslo a taktiež o miskoncepciu, že ak má byť číslo rozložené na prvočísla, musí byť v odpovedi súčin aspoň dvoch čísel.

Výsledky hlasovania (EKG)

	A	B	C
1. hlasovanie	6	0	14
2. hlasovanie	3	0	17

Ani v prvom, ani v druhom hlasovaní si žiaden žiak neuvedomil, že správna odpoveď je B). Zrejme sa im zdalo, že keďže nie je rozložené na menšie, nemôže byť rozložené na prvočísla. Na hodine bolo preto potrebné žiakov upozorniť na to, čo znamená rozklad na prvočísla.

Táto úloha bola zadaná aj na druhom gymnáziu. Hlasovanie dopadlo nasledovne:

Výsledky hlasovania (GA)

	A	B	C
1. hlasovanie	5	4	3
2. hlasovanie	7	5	0

Diskusia medzi žiakmi bola veľmi zaujímavá, vzhľadom na to, že jeden žiak tvrdil, že možnosti C) a A) nemôžu byť správne, pretože 4 v možnosti C), ani 1 v možnosti A) nie sú prvočísla, takže sa nemôžu nachádzať v rozklade na prvočinitele. Na druhej strane mu oponovala druhá spolužiačka, ktorá tvrdila, že možnosť B) nemôže byť správna, keďže to že nejaké číslo je rozložené na prvočinitele, musí znamenať, že v rozklade musí byť viac ako jedno číslo. Preto sa ona aj ďalší spolužiaci (v 1. hlasovaní 5, v 2. hlasovaní 7) priklonili k možnosti A), keďže sa im zdala pravdepodobnejšia ako C).

Na hodine sa jasne ukázalo, že žiaci majú problém s porozumením toho, čo to znamená rozložiť nejaké číslo na prvočísla a že samotné prvočíslo už takto rozložené je.

Úloha 5.3.10

Koľko dvojciferných čísel má vo svojom prvočíselnom rozklade 11?

A) žiadne

B) 1

C) <u>9</u>

D) 10

Úlohou žiakov je pracovať s prvočíselnym rozkladom čísel. Musia vedieť, že ak sa v rozklade nachádza číslo 11, znamená to, že dané čísla viem napísať v tvare 11*x. Prvý spôsob je, že si dané čísla vypíšeme: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 a 99. Alebo jednoducho prídeme na to, že číslo 11 môžeme násobiť nanajvýš deviatimi, aby výsledné číslo bolo dvojciferné. Správna odpoveď je C).

Úloha 5.3.11

Koľko trojciferných čísel má vo svojom prvočíselnom rozklade číslo 10 viac ako raz ?

A) <u>žiadne</u>

B) jedno

C) deväť

D) desať

Táto úloha je veľmi podobná predchádzajúcej. Pýtame sa však na to, koľkokrát sa v prvočíselnom rozklade nachádza číslo 10. Žiaci by si mali uvedomiť, že vzhľadom na to, že číslo 10 nie je prvočíslo, nemôže sa vyskytovať v prvočíselnom rozklade. Ak sme na vyučovaní zadali aj úlohu 5.3.10, táto môže slúžiť na uistenie sa, že žiaci naozaj rozumejú pojmu rozklad na prvočísla.

5.4 NAJMENŠÍ SPOLOČNÝ NÁSOBOK a NAJVÄČŠÍ SPOLOČNÝ DELITEĽ

Úloha 5.4.1 (EKG, príprava 4, úloha 4), (GA)

Najmenší spoločný násobok čísel 77 a 121

A) <u>je deliteľný 11</u>

B) je rovný súčinu 77 * 121

C)je menší ako 200

Pri tejto úlohe bolo potrebné si uvedomiť, že najmenší spoločný násobok dvoch čísel, bude aj násobkom nejakého ich deliteľa. V tomto konkrétnom prípade bolo zrejmé, že 11 delí 77 a teda aj spoločný násobok (aj ten najmenší) akéhokoľvek čísla a 77 bude určite deliteľný 11. Ak žiaci do hĺbky rozumejú ako sa hľadá najmenší spoločný násobok dvoch čísel (napríklad aj pomocou rozkladu na prvočinitele), táto úloha by nemala byť problém.

Výsledky 1.hlasovania (EKG)

	A	B	C
1. hlasovanie	0	14	6

Hlasovanie pre túto úlohu prebehlo inak ako zvyčajne, keďže hneď po prvom hlasovaní zazvonilo, bolo možné opakovať hlasovanie až na ďalšej hodine, čo bolo až nasledujúci deň.

V prvom hlasovaní si až 14 žiakov zvolilo možnosť B). Táto možnosť sa spája s bežnou miskoncepciou o tom, že najmenší spoločný násobok sa vyráta ako súčin daných dvoch čísel.

Žiaci, ktorí vedia narábať s pojmom najmenší spoločný násobok, možnosť C) rýchlo vylúčia, lebo hneď vidno, že 77 nedelí 121 a teda 121 nie je najmenší spoločný násobok a každý ďalší násobok čísla 121 je už väčší ako 200.

Výsledky 2.hlasovania (EKG)

	A	B	C
2. hlasovanie	21	1	1

Výsledky tohto hlasovania mohli byť ovplyvnené dlhým časovým odstupom medzi prvým a druhým hlasovaním. Žiaci mali zrejme viac času na rozmyslenie aj na poradenie medzi sebou, možno aj s rodičmi. Takmer všetci tentoraz označili správnu odpoveď.

Táto úloha bola odučená aj na Gymnáziu Alejová

Výsledky hlasovania (GA)

	A	B	C	neplatný
1. hlasovanie	7	3	2	0
2. hlasovanie	10	1	0	1

Už pri prvom hlasovaní si 7 z 12 žiakov uvedomilo, že najmenší spoločný násobok čísel 77 a 121 musí byť deliteľný 11. Podarilo sa im dokonca presvedčiť 3 svojich spolužiakov. Žiaci, ktorí označili správnu odpoveď, nemali problém vysvetliť, že číslo 77, aj 121 sú deliteľné jedenástimi a teda aj ich spoločný násobok (čiže aj ten najmenší) musí byť deliteľný 11.

Úloha 5.4.2

V ktorom z nasledujúcich príkladov viete najrýchlejšie určiť výsledok?

A) n(3, 7, 12)

B) n(4, 7, 14)

C) <u>n(4, 7, 28)</u>

V tejto úlohe sa pýtame na najmenší spoločný násobok troch čísel. Žiaci sú mnohokrát zvyknutí používať algoritmus rozkladu na prvočinitele a tak prísť k výsledku. V tejto úlohe si však stačí uvedomiť, že v prípade, kedy jedno z čísel je súčinom druhých dvoch, ono bude najmenší spoločný násobok. Správna odpoveď je teda C). Niektorí žiaci môžu namietnuť, že oni by prišli na výsledok rýchlejšie v prípade A) alebo B). Táto úloha má za úlohu podnietiť diskusiu o vlastnostiach najmenšieho spoločného násobku, preto môžeme nechať žiakov diskutovať o tejto téme a obhajovať svoj názor, keďže v úlohe, kde sa pýtame na „rýchlosť výpočtu“ by sme nemali za každú cenu chcieť ukázať, že jedna odpoveď je správna a ostatné vôbec nie.

Úloha 5.4.3 (GA)

Najmenší spoločný násobok dvoch čísel je 108. Ich ďalší spoločný násobok je

A) <u>216</u>

B) 1080

C) nedá sa to určiť, kým nepoznám tie čísla

Táto úloha je zameraná na porozumenie spôsobu ako zistíme ďalší násobok dvoch čísel. Ak by sa jednalo iba o jedno číslo, žiaci jednoducho vedia, že na to aby sme dostali ďalší násobok tohto čísla, potrebujeme ho vynásobiť dvoma. Napr. mám číslo 108, jeho ďalší (najbližší) násobok musí byť 2 . 108 = 216. Ak však do zadania pridám, že číslo 108 je najmenším spoločným násobkom dvoch neznámych čísel, žiaci začínajú o tomto čísle uvažovať úplne iným spôsobom.

Výsledky hlasovania

	A	B	C
1. hlasovanie	4	1	7
2. hlasovanie	4	1	7

Z oboch hlasovaní je vidno, že žiaci mali s touto úlohou problém. Hoci niektorí žiaci poznali správnu odpoveď, nevedeli o jej správnosti presvedčiť svojich spolužiakov. V oboch hlasovaniach bola odpoveď C) – nedá sa to určiť, kým nepoznám konkrétne čísla – najčastejšia. To poukazuje na to, že žiaci síce môžu mať vedomosti o najmenšom spoločnom násobku, poznajú algoritmus na výpočet, ale keď ideme do hĺbky, nie sú schopní tieto, často formálne, vedomosti uplatniť pri riešení neštandardnej úlohy.

Úloha 5.4.4

Výrok: *„Existuje taká štvorica čísel, že každé dve z čísel sú súdeliteľné, ale celá štvorica má najväčšieho spoločného deliteľa 1."* je

A) <u>pravdivý</u>

B) nepravdivý

Úloha je zameraná na vlastnosti súdeliteľných a nesúdeliteľných čísel. Keď si predstavíme prvočíselný rozklad jednotlivých čísel, budú to očividne čísla, z ktorých každé dve majú vo svojom rozklade nejaké rovnaké prvočíslo, ale zároveň sa to prvočíslo nenachádza vo všetkých číslach. Napríklad: 2 . 3 . 5 = (30), 2 . 3 . 7 = (42), 2 . 5. 7 = (70), 3 . 5 . 7 = (105). Takáto štvorica teda existuje.

Úloha 5.4.5

Na železničnej stanici sa dajú kúpiť dva druhy lístkov. Do druhej triedy stojí lístok 8 eur a do prvej 14 eur. Na konci dňa pokladník Alfréd nahlásil tržbu 3 908 eur, pokladník Boris 3 164 a Cyril 3 841 eur. Kto z nich zle spočítal tržbu?

A) Alfréd

B) Boris

C) <u>Cyril</u>

D) nikto

Táto úloha je zameraná na deliteľnosť súčtu. Prvá vec, ktorú si žiaci potrebujú uvedomiť je, akým spôsobom pokladníci počítajú tržbu.

8 . x + 14 . y (kde x je počet lístkov, ktoré stoja 8 eur, y je počet lístkov, ktoré stoja 14 eur) samá rovnať podľa Alfréda 3 908, podľa Borisa 3 164 a podľa Cyrila 3 841 eur.

Keďže 8 a 14 je deliteľné dvomi, tak aj 8 . x a 14 . y musia byť deliteľné dvomi a teda aj ich súčet. Z toho vyplýva, že Cyril nemohol mať tržbu 3 841, pretože toto číslo nie je deliteľné dvomi. Správna odpoveď je teda C).

Úloha 5.4.6 (GA)

V kine Cinema predávali lístky za 9 eur a za 12 eur. Po zatvorení pokladne spočítal pokladník, že má 1820 eur. Je to možné?

A) áno

B) <u>nie</u>

C) nedá sa určiť

Táto úloha je tiež zameraná na deliteľnosť súčtu. Teraz na deliteľnosť tromi.

9.x + 12.y = 1820 (kde x je počet lístkov, ktoré stoja 9, y je počet lístkov, ktoré stoja 12 eur).

Žiaci väčšinou nemajú problém dôjsť k takejto rovnici. Čo im však už problém robí, je zistiť, čo nám táto rovnica hovorí o deliteľnosti čísla 1820. Ak by si žiaci uvedomili, že ak má byť číslo 1820 riešením tejto rovnice, musí byť deliteľné troma, pretože 9 aj 12 sú deliteľné troma, nemali by problém určiť správnu odpoveď B).

Výsledky hlasovania

	A	B	C	neplatný
1. hlasovanie	6	5	1	0
2. hlasovanie	8	3	0	1

Čo je však na tomto hlasovaní zaujímavé, že po diskusii počet správnych odpovedí dokonca klesol. Zdá sa, že žiaci pri tejto úlohe iba hádali. Ich argumentom bolo, že keďže výsledné číslo môže byť akoukoľvek kombináciou 9 eurových a 12 eurových lístkov, pokojne to môže byť aj číslo 1820 alebo aj akéhokoľvek iné.

Po tejto úlohe sa bolo potrebné dlhšie venovať deliteľnosti súčtu čísel, ktoré sú násobkami súdeliteľných čísel.

Možný dôvod je aj v tom, že žiaci sú zvyknutí, že zostavená rovnica má v množine reálnych čísel nekonečne veľa riešení. Málo sa stretávajú s riešením diofantických rovníc (rovnice s viacerými neznámymi v obore celých čísel).

Úloha 5.4.7

Počet žiakov v jednej škole je väčší ako 500 a menší ako 1000. Ak by sme ich rozdeľovali do tried po 18 alebo po 20 alebo po 24, vždy nám zostane 9 žiakov. Koľko žiakov je v tejto škole?

- **A) 711**
- **B) 720**
- **C) <u>729</u>**

Pri tejto úlohe je dôležité vedieť vypočítať najmenší spoločný násobok troch čísel, ktorým je číslo 360. Keďže toto nie je väčšie ako 500 žiaci musia vedieť, že ak toto číslo vynásobia dvoma, stále bude násobkom 18, 20 a 24. A ak nám stále zostane deväť žiakov, musia vedieť, či majú deviatku odpočítať alebo ju pripočítať k 720. Správna odpoveď je C).

Úloha 5.4.8

Obdĺžnikovú halu s rozmermi 910 cm a 1330 cm treba pokryť čo najmenším počtom rovnakých štvorcových dlaždíc. Koľko ich bude?

- **A) 70**
- **B) <u>247</u>**
- **C) 17 290**

Sú žiaci, ktorí keď vidia v zadaní slovo najmenší, bez uvažovania začnú rátať najmenší spoločný násobok. Ten je v možnosti C). Nájdu sa aj takí, ktorí prídu na to, že majú vyrátať najväčší spoločný deliteľ. Ale iba tí, ktorí skutočne do hĺbky rozumejú tomuto pojmu, vedia, že takto vypočítali len rozmer tejto dlaždice, ktorý je 70. Správna odpoveď je B).

Úloha 5.4.9

Kvetinárka vytvára rovnako veľké kytice z 52 tulipánov, 91 narcisov a 65 ruží tak, aby v každej kytici bol iba jeden druh kvetov. Chce zistiť koľko kytíc vytvorí, ak použije všetky kvety. Ktorá z kolegýň má pravdu?

A) **Monika jej navrhla, aby vypočítala najmenší spoločný násobok. To bude počet kytíc.**
B) **Žaneta jej navrhla, aby vypočítala najväčší spoločný deliteľ. To bude počet kytíc.**
C) **<u>Andrea tvrdí, že ani nsn ani NSD nevyjadruje počet kytíc.</u>**

Žiaci majú často problém rozsúdiť, či majú rátať najmenší spoločný násobok alebo najväčší spoločný deliteľ. Táto úloha sa zameriava práve na to. Ak chceme zistiť počet kvetov v kytici, potrebujeme vypočítať najväčší spoločný deliteľ týchto čísel, čo je 13, ale na to, aby sme vedeli koľko kytíc skutočne vytvorí, musíme vedieť, že z tulipánov to budú 4 kytice, z narcisov 7 kytíc a z ruží 5 kytíc. Dokopy 16. Správna odpoveď je teda C).

6 SKÚSENOSTI Z REALIZÁCIE

V rámci tejto diplomovej práce boli niektoré úlohy z kapitoly štyri odučené na Evanjelickom kolegiálnom gymnáziu v Prešove v V.O a na Gymnáziu Alejová v Košiciach v 2. ročníku. V tejto kapitole sa pokúsime zhrnúť postrehy a skúsenosti z vyučovania metódou Peer Instruction.

Keďže metóda Peer Instruction bola zatiaľ vyskúšaná iba v malom počte tried (4 hodiny v V.O na a 2 hodiny v 4.A na Evanjelickom kolegiálnom gymnáziu a 2 hodiny v 2. ročníku na Gymnáziu Alejová), ťažko hovoriť o nejakých všeobecných záveroch. Zo skúseností s týmito triedami však vznikli tieto závery:

Evanjelické kolegiálne gymnázium, Prešov

Na hlasovanie žiaci používali farebné kartičky (viď podkapitolu 2.3.2 Hlasovanie zdvihnutím farebnej kartičky), ktoré sú zobrazené na obrázku v elektronickej prílohe práce.

Konceptuálne úlohy boli zaradené do klasickej vyučovacej hodiny v rôznych etapách vyučovania. Presné zaradenie je v prípravách na vyučovaciu hodinu, ktoré sú súčasťou príloh 1-4.

<u>Závery z vyučovania sú nasledovné:</u>

- žiaci príliš sledujú, akou kartičkou hlasujú ostatní
- väčšina triedy sa dá strhnúť tými, čo sú považovaní za dobrých v matematike
- sú žiaci, ktorí odmietajú komunikovať s ostatnými
- kartičky používajú aj iným spôsobom ako na to, na čo boli určené

<u>Tieto nedostatky by bolo možné odstrániť nasledovne:</u>

- používanie hlasovacích zariadení
- rozsadenie v triede tak, aby „slabší“ žiaci sedeli pri tých „lepších“
- vytvoriť v triede priateľskú atmosféru, kde sa nikto nebude báť vyjadriť svoj názor

Gymnázium Alejová, Košice

Na vyučovaní žiaci používali hlasovacie zariadenia (viď podkapitolu 2.3.4 Hlasovanie pomocou hlasovacích zariadení). Použitie hlasovacích zariadení jasne ukázalo, že problémy, ktoré sa vyskytli na predchádzajúcom gymnáziu, môžu byť jednoducho odstránené. Títo žiaci neboli natoľko ovplyvnení tým, čo si vybrali ich spolužiaci, keďže výsledky hlasovania sa ukázali až po tom, ako bolo hlasovanie ukončené. Čomu sme však nedokázali zabrániť, boli neplatné hlasy, ktoré sa z času na čas vyskytli. Mohlo to byť spôsobené nepozornosťou, keďže niektorí zo žiakov zaznačili odpoveď, ktorá nebola v možnostiach.

Opäť sa nám však potvrdilo, že mnohí zo žiakov sa v druhom hlasovaní nechajú presvedčiť nie argumentmi, ale jednoducho tým, že vedia o niekom, že je „dobrý v matematike“ a to je pre nich dostačujúci argument. Po druhom hlasovaní je vhodné žiadať od žiakov aj vysvetlenie, prečo zmenili svoju odpoveď. Tak sa môžeme presvedčiť o tom, či bola miskoncepcia odstránená alebo žiak len zahlasoval podľa svojho „šikovnejšieho“ kolegu.

Keďže cieľom vyučovacej hodiny bola aktualizácia učiva zo základnej školy (tematický celok Deliteľnosť prirodzených čísel) pomocou metódy Peer Instruction, hodina prebiehala nasledovným spôsobom:

- Zadanie úlohy
- 1. hlasovanie
- Diskusia
- 2. Hlasovanie
- Vysvetlenie správneho riešenia

Na oboch hodinách sme prešli približne 9 úloh.

Počas takejto formy vyučovacej hodiny sme si všimli, že žiaci majú problém robiť si poznámky, aj keď na začiatku každej hodiny dostali hárky s úlohami a priestorom na vlastné výpočty a poznámky. Z tohto dôvodu je naozaj lepšia organizácia hodiny, ako prebiehala na Evanjelickom kolegiálnom gymnáziu, kde boli konceptuálne úlohy včlenené do rôznych etáp vyučovacieho procesu.

Závery z vyučovania sú nasledovné:

- hlasovacie zariadenia pozitívne ovplyvnili vyučovací proces
- väčšina triedy sa dá strhnúť tými, čo sú považovaní za dobrých v matematike
- žiaci majú problém robiť si poznámky z hodiny

Všeobecné závery

Keďže metóda Peer Instruction je pre žiakov úplne nová, bolo potrebné venovať dosť času vysvetľovaniu toho, ako budeme hlasovať a ako bude prebiehať diskusia. Preto sa každá úvodná hodina začínala zahrievacou otázkou, napr.

Aký je dnes deň?

A) Pondelok
B) Utorok
C) Streda
D) Piatok

Potom sme pokračovali otázkami z celku Deliteľnosť prirodzených čísel. Na Evanjelickom kolegiálnom gymnáziu sme mali k dispozícii 4 vyučovacie hodiny, počas ktorých sme dodržiavali štruktúru vyučovacej hodiny podobnú ako bola vysvetlená v kapitole 2.2 Použitie konceptuálnych úloh vo vyučovaní. Konkrétne vyučovacie hodiny sú k nahliadnutiu v prílohách 1 – 4.

Žiaci na oboch školách prejavili veľký záujem o tento spôsob vyučovania. Všetci sa aktívne zúčastňoval hodiny, keďže sa každý musel v 1. hlasovaní rozhodovať sám za seba. Za najprínosnejšiu považujeme fázu po prvom hlasovaní, kedy sa žiaci radili medzi sebou a navzájom sa presviedčali o správnosti svojich odpovedí. Viackrát sa stalo, že jeden žiak bol schopný vysvetliť daný princíp viacerým spolužiakom. Ak sme po druhom hlasovaní vyzvali niekoho, kto zmenil svoju odpoveď, vysvetliť zmenu v svojom hlasovaní, boli žiaci poväčšine schopní vysvetliť zmenu svojho hlasovania. Bolo teda zrejmé, že miskoncepcia bola odstránená. Prezentácie v MS Powerpoint, ktoré boli použité na oboch gymnáziách sú v elektronickej prílohe práce.

Potvrdilo sa nám, že úlohy, v ktorých žiaci nepracujú s konkrétnymi číslami, sú vždy náročnejšie, keďže je potrebné zovšeobecniť a aplikovať nejaký princíp, kým pri konkrétnych číslach sa dá použiť aj metóda „pokus omyl“. Keďže žiaci ešte nie sú zvyknutí na takýto spôsob výučby, niektorí mali problém robiť si z takejto hodiny poznámky. Z hodiny na hodinu sa to však zlepšovalo.

Skúsenosti z realizácie vyučovacích hodín odučených metódou Peer Instruction naznačujú, že ak sa konceptuálne otázky stanú bežnou súčasťou vyučovania môže to výrazne napomôcť hlbšiemu porozumeniu pojmov a metód riešenia u väčšiny žiakov.

ZÁVER

Najbežnejšia otázka, akú mi ľudia posledných päť rokov kladú, je: *„Čo študuješ?“* Hneď ako sa dozvedia, že matematiku a že sa ju dokonca chystám aj učiť, začnú sa na mňa pozerať trochu prekvapene a zároveň aj ľútostivo. Matematika je z ich pohľadu ten najhorší a najťažší predmet, s akým sa kedy stretli.

Aj keď je tento postoj k matematike rozšírený, môže sa u mnohých študentov zmeniť, ak vedomosti, ktoré budú získavať nebudú len formálneho charakteru, ale budú založené na skutočnom porozumení preberaného učiva. Metóda Peer Instruction je vhodným nástrojom práve na budovanie tohto hĺbkového porozumenia. Dokazujú to niekoľkoročné skúsenosti z fyziky, chémie ale aj matematiky. Prínosom tejto metódy je, že študent nie je iba pasívnym divákom, ale sa do vyučovacieho procesu aktívne zapája, a to najmä počas diskusií, ktoré sú neodmysliteľnou súčasťou tejto metódy.

Najnáročnejšia úloha pre vyučujúceho je nájsť alebo vytvoriť konceptuálne otázky, ktoré budú použiteľné vo vyučovaní. V kapitole štyri sme takéto úlohy hľadali vo viacerých slovenských a českých učebniciach. Česká učebnica Matematika pre 6. ročník od vydavateľstva Pythagoras Publishing by bola pre metódu Peer Instruction najviac použiteľná. V snahe poskytnúť materiál pre vyučovacie hodiny zamerané na Deliteľnosť prirodzených čísel sme vytvorili aj nové úlohy, ktoré by sa dali použiť pri vyučovaní tohto tematického celku. Tieto úlohy boli inšpirované rôznymi slovenskými učebnicami a matematickými súťažami, ale aj skúsenosťami z odučených hodín metódou Peer Instruction.

Pri vyučovaní metódou Peer Instruction na Evanjelickom kolegiálnom gymnáziu v Prešove a na Gymnáziu Alejová v Košiciach, sme sa stretli s mnohými miskoncepciami, ktoré študenti v rámci spomínaného tematického celku majú. Po odhalení týchto miskoncepcií nasleduje nahradenie nesprávnej predstavy, správnym pohľadom. Veríme, že aspoň v rámci tohto tematického celku, majú títo študenti korektnejšiu predstavu o pojmoch a tvrdeniach a teda aj hlbšie porozumenie deliteľnosti prirodzených čísel.

Pri písaní tejto záverečnej práce som si viac uvedomila, že vyučovanie matematiky môže byť inovatívne, ísť do hĺbky a priniesť študentom skutočné porozumenie preberaného učiva. Bolo obohacujúce spracovávať informácie o priekopníkoch tejto metódy.

Mám sa od nich, čo učiť. Pri tvorbe konceptuálnych otázok som sa musela vcítiť do role študenta, rozumieť s akými miskoncepciami prichádza do triedy a následne sformulovať možností odpovede, ktoré by tieto miskoncepcie odstránili. Tiež bolo podnetné sledovať reakcie študentov počas hodín, ktoré boli odučené touto metódou. Bolo vidieť, že s takýmito úlohami sa bežne nestretávajú a že ich baví rozprávať sa o matematike aj inak ako doteraz.

Metóda Peer Instruction prináša nový uhol pohľadu na vyučovanie matematiky, zdôrazňuje dôležitosť kladenia dobrých otázok a hĺbkového porozumenia. Matematika môže byť obľúbeným predmetom pre čoraz viac študentov a konceptuálne otázky môžu zohrať v tomto procese dôležitú úlohu.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika*: *konstruktivistické přístupy k vyučování*., s.145, 2. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 232 s. Pedagogická praxe. ISBN 978-807-3673-970.

[2] HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika*: *konstruktivistické přístupy k vyučování*., s.148-149, 2. aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 232 s. Pedagogická praxe. ISBN 978-807-3673-970.

[3] MAZUR, E. 1997. Understanding or memorization: Are we teaching the right thing? In *Conference on the Introductory Physics Course on the occasion of the retirement of Robert Resnick*, Ed. Jack Wilson, p. 113-124 (Wiley, New York, 1997)

[4] PILZER, S. 2001. Peer Instruction in physics and mathematics. In *Primus*, June 2001, Volume 11, Issue 2, p. 185-192

[5] KADIJEVICH, D. 1999. Conteptual tasks in mathematics education. In *The teaching of Mathematics*, 2, 1, 59-54

[6] TERRELL, M.S. 2003. Asking good questions in the mathematics classroom. In workshop *Excellence in Undergraduate Mathematics: Mathematics for Teachers and Mathematics for Teaching*, Ithaca College, Ithaca, New York

[7] MILLER, R. L. – SANTANA-VEGA, E. – TERRELL, M. S. 2006. Can good questions and Peer discussion improve calculus instruction? In *Primus*, September 2006, Volume 16, Issue 3, p. 193-203

[8] Slovenská republika. Učebné osnovy MATEMATIKA pre 5. až 9. ročník základnej školy. In: *Učebné osnovy pre základné školy - 2. stupeň*. Ministerstvo školstva Slovenskej republiky, 1. september 1997.

[9] Slovenská republika. MATEMATIKA povinný učebný predmet. In: *UČEBNÉ OSNOVY GYMNÁZIA štvorročné štúdium*. Ministerstvo školstva Slovenskej republiky, 1. september 1997

[10] REPÁŠ, V. a kol. 1999. Matematika pre 6. ročník základných škôl, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 1999

[11] ŠEDIVÝ, O. a kol. 1998. Matematika pre 6. ročník základných škôl, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1998

[12] NOVOTNÁ, J. a kol. 1996. Matematika s Betkou pro 6. ročník základní školy, Scientia, Praha, 1996

[13] MOLNÁR, J. a kol. 1998. Matematika 6, Prodos, 1998, ISBN: 978-80-85806-98-3

[14] CIHLÁŘ, J. a kol. 1997. Matematika 6, Pythagoras Publishing a.s., Praha, 1997

[15] SMIDA, J. a kol. 1984. Matematika pre 1. ročník gymnázia, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1984, ISBN: 67-180-84

[16] SMIDA, J. a kol. 1984. Matematika pre 1. ročník gymnázia, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1984, s.86, ISBN: 67-180-84

[17] HECHT, T. a kol. 2001. Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2001, ISBN: 80-7158-342-1

ZOZNAM PRÍLOH

Príloha A: Návrh písomnej prípravy na vyučovaciu hodinu I

Príloha B: Návrh písomnej prípravy na vyučovaciu hodinu II

Príloha C: Návrh písomnej prípravy na vyučovaciu hodinu III

Príloha D: Návrh písomnej prípravy na vyučovaciu hodinu IV

Príloha E: CD médium

CD médium obsahuje

- Elektronická podoba práce
- Fotografia hlasovacích kartičiek (Evanjelické kolegiálne gymnázium)
- Fotografie z vyučovania (Gymnázium Alejová)
- Prezentácie MS Powerpoint – Evanjelické kolegiálne gymnázium
- Prezentácie MS Powerpoint – Gymnázium Alejová

PRÍLOHA A:

NÁVRH PÍSOMNEJ PRÍPRAVY NA VYUČOVACIU HODINU I

Peer Instruction v etape aktualizácie učiva

Názov školy: Evanjelické kolegiálne gymnázium, Prešov

Predmet: Matematika

Ročník: V.O

Tematický celok: Deliteľnosť prirodzených čísel

Téma: Kritéria deliteľnosti

Vstupné vedomosti: násobok, deliteľ, počet deliteľov

Ciele vyučovacej hodiny:

- Zopakovať pojmy deliteľ a násobok
- Zopakovať kritéria deliteľnosti 2, 5, 10
- Sformulovať a dokázať kritéria deliteľnosti 3 a 9

Rozpracovanie etáp vyučovacej hodiny

ETAPY VH	*VYUČOVACIE METÓDY*	*ORGANIZAČNÉ FORMY*	*MATERIÁLNE PROSTRIEDKY*
1.organizačná časť	-	Hromadná	triedna kniha
2. úvodná časť	-	Individuálna	PC, projektor, hlasovacie kartičky
3. aktualizácia prv osvojeného učiva	Metóda Peer Instruction	Individuálna/ Skupinová	PC, projektor, hlasovacie kartičky
4. osvojovanie nového učiva	Vysvetľovanie	Individuálna/ Hromadná	tabuľa
5. zhodnotenie VH, záver	-	Hromadná	-

Úvodná časť

Vyučovacia hodina bude zameraná na kritéria deliteľnosti. Budeme sa venovať opakovaniu pojmov násobok a deliteľ, tiež kritériám deliteľnosti 2, 5, 10. V tejto etape opakovania – aktualizácie učiva budeme používať metódu Peer Instruction.

Predtým než začneme aktualizovať už osvojené učivo použitím metódy Peer Instruction, uistíme sa, že žiaci rozumejú princípu hlasovania.

To si overíme na jednoduchej „zahrievacej“ otázke. Keďže na posledných hodinách sa žiaci venovali výrokom, bude otázka zameraná na určenie pravdivosti jednoduchého výroku. Na projekcii sa objaví nasledujúca úloha.

ÚLOHA 1

Určte, či je nasledujúci výrok pravdivý.

Mám 14 rokov.

A) Pravda.

B) Nepravda.

Nasleduje hlasovanie. Žiaci sú vyzvaní vybrať jednu z farebných kartičiek – v tomto prípade A) alebo B). Ak sú žiaci rozhodnutí, vyzveme ich, aby kartičku zodvihli a tak označili odpoveď, ktorú považujú za správnu.

Očakávame, že žiaci po jednom hlasovaní pochopia princíp. Ak by mali žiaci s hlasovaním problém, tak ho zopakujeme ešte raz.

Po tom, čo sme si overili, že žiakom je jasný spôsob ako hlasovať, môžeme pokračovať ďalej.

Aktualizácia prv osvojeného učiva

Žiaci sa s pojmami násobok a deliteľ stretli už na základnej škole, úvodná úloha bude venovaná práve aktualizácii daných pojmov.

ÚLOHA 2

Ktoré z nasledujúcich tvrdení je nesprávne?

A) Číslo 5 je deliteľom čísla 25.

B) Číslo 5 je násobkom čísla 1.

C) Číslo 30 je deliteľné 6.

D) Číslo 1 je deliteľné číslom 6.

RIEŠENIE

Správna odpoveď je D).

Nasleduje prvé hlasovanie. Výsledky zapíšeme na papier. Žiakom oznámime koľko z nich si vybralo možnosť A), možnosť B), atď. Teraz majú žiaci možnosť presviedčať sa navzájom v dvojiciach o správnosti svojich odpovedí. Vyzveme žiakov, aby našli niekoho, kto odpovedal inak ako oni. V rámci tejto diskusie im umožníme otočiť sa k spolužiakom v inej lavici, poprípade aj presun v rámci triedy, ktorý však nenaruší plynulosť hodiny. Takáto diskusia by mala trvať max. 5 minút. Nasleduje druhé hlasovanie. Ak žiaci hlasovali povačšine správne, poprosím jedného z nich, aby svoju odpoveď v krátkosti vysvetlil. Ak majú s touto úlohou problém, môžeme im zadať nasledovné úlohy:

ÚLOHA 3

Vymenujte prvých päť násobkov čísla 7.

RIEŠENIE

7, 14, 21, 28, 35

Žiaci majú za úlohu vypisovať do zošita násobky určitého čísla. Hneď pri prvom násobku mnoho žiakov zabúda na to, že je to 7 . 1 = 7 a za prvý násobok považujú 14. Pri tejto úlohe môžeme túto miskoncepciu odstrániť a poukázať na to, že najmenším násobkom nejakého čísla je práve to číslo – v našom prípade 7. Žiaci by nemali mať problém vypísať ďalšie násobky daného čísla.

ÚLOHA 4

Doplňte slová násobok, deliteľ, deliteľný do nasledujúcich výrokov tak, aby boli pravdivé.

Výrok 1: Číslo je 1 je … všetkých prirodzených čísel.

Výrok 2: Číslo 16 je … 8.

Výrok 3: Každé prirodzené číslo má aspoň 2 rôzne …

Výrok 4: Čísla 10 a 20 sú … 2, 5 a 10.

RIEŠENIE

Výrok 1: Číslo je 1 je **DELITEĽ** všetkých prirodzených čísel.

Výrok 2: Číslo 16 je **NÁSOBKOM / DELITEĽNÉ** 8.

Výrok 3: Každé prirodzené číslo má aspoň 2 rôzne **NÁSOBKY.**

Výrok 4: Čísla 10 a 20 sú **NÁSOBKY / DELITEĽNÉ** 2, 5 a 10.

Žiaci si výroky, ktoré sa zobrazia na projekcii opíšu do zošitov a dopĺňajú slová tak, aby boli výroky pravdivé. Tieto výroky majú za úlohu pomôcť žiakom uvedomiť si, že číslo 1 je deliteľom všetkým prirodzených čísel, takže všetky čísla sú násobkom jednotky (výrok č.1). Výroky č.2 a č.4 sú zamerané na zistenie vzťahu medzi dvoma alebo viacerými číslami. Výrok č. 3 sa môže zdať žiakom najťažší, keďže majú pocit, že do úvahy prichádzajú hneď dve správne možnosti a to, že každé prirodzené číslo má 2 rôzne násobky, ale aj 2 rôzne delitele. To však nie je pravda, vzhľadom na to, že číslo 1 má iba jedného deliteľa, seba samého.

Pokračujeme úlohou zameranou na kritéria deliteľnosti, ktoré by mali byť žiakom známe. Kritéria deliteľnosti slúžia na jednoduché a rýchle rozpoznávanie deliteľov daného čísla, bez toho aby sme ho museli naozaj deliť.

<u>ÚLOHA 5</u>

Máme číslo 5915. Ktorými z čísel je deliteľné:

- **A) 2, 5 a 10**
- **B) 2 a 5**
- **C) 5**
- **D) žiadna z odpovedí nie je správna**

<u>RIEŠENIE</u>

Správna odpoveď je C).

Nasleduje hlasovanie, potom následná diskusia a druhé hlasovanie (priebeh je podobný ako pri Úlohe 2).

Po tejto úlohe vedieme dialóg so žiakmi ohľadom kritérií deliteľnosti 2, 5 a 10.

- **Otázka:** Kedy je prirodzené číslo deliteľné 2?
- **Očakávaná odpoveď:** Keď je párne. Keď má na mieste jednotiek 0, 2, 4, 6, 8.

Vyzveme žiakov, aby si napísali do zošitov: *Číslo je deliteľné 2 práve vtedy, ak má na mieste jednotiek párnu číslicu (t.j. 0, 2, 4, 6, 8).*

- **Otázka:** Kedy je prirodzené číslo deliteľné 10?
- **Očakávaná odpoveď:** Keď má na mieste jednotiek 0.
- **Otázka:** Prečo? Čo môžeme sledovať, keď si vypíšeme niekoľko násobkov čísla 10? Vedeli by ste odôvodniť toto kritérium deliteľnosti?
- **Očakávaná odpoveď:** Každý násobok desiatky sa končí nulou. Keď násobím desiatimi pod seba, na konci je nula – takže vždy vyjde nula na konci. Znamená to pripočítať 10 k predchádzajúcemu číslu, preto sa stále končí nulou.

Vyzveme žiakov, aby si napísali do zošitov: *Číslo je deliteľné 10 práve vtedy, ak má na mieste jednotiek číslicu 0.*

- **Otázka:** Vedeli by ste sformulovať a ukázať aj kritéria deliteľnosti 100, 1000,...?
- **Očakávaná odpoveď:** Číslo je deliteľné 100 práve vtedy, ak sa končí dvoma nulami. Číslo je deliteľné práve 1000, ak sa končí troma nulami.

- **Otázka:** Kedy je prirodzené číslo deliteľné 5?
- **Očakávaná odpoveď:** Ak má na mieste jednotiek číslicu 0 alebo 5. Viete toto tvrdenie aj odôvodniť? Opäť vyzveme žiakov, aby si vypísali niekoľko násobkov a po vytvorení hypotézy sa ju snažili aj odôvodniť.

Vyzveme žiakov, aby si napísali do zošitov: *Číslo je deliteľné 5 práve vtedy, ak má na mieste jednotiek číslicu 0 alebo 5.*

Ďalšia úloha je zaujímavá tým, že sa budeme pýtať na deliteľnosť čísla, ktoré nie je prirodzené. Pripomenieme si, že keď hovoríme o deliteľnosti, pohybujeme sa vyslovene v množine prirodzených čísel.

ÚLOHA 6

Máme číslo 860,50. Ktorými z čísel je deliteľné:

A) 2, 5 a 10

B) 2, 5 a 7

C) 5, 7 a 10

D) žiadna z odpovedí nie je správna

RIEŠENIE

Správna odpoveď je D).

Úloha bude znázornená na projekcii. Prebehne prvé hlasovanie, potom diskusia a druhé hlasovanie.

Keď žiakom zadáme túto úlohu, je pravdepodobné, že nebudú vedieť, čo s tým, keďže sa ešte nestretli s tým, že by sme sa pýtali na deliteľnosť desatinného čísla. Táto úloha núti žiakov rozmýšľať o tom, s čím sa ešte nestretli a tak môžu aplikovať svoje doterajšie poznatky o kritériách deliteľnosti na novú oblasť. Uvedomia si, že deliteľnosť sa týka iba prirodzených čísel?

Osvojovanie nového učiva

Nasledujúce úlohy budú zobrazené na projekcii, žiaci si ich prepíšu do zošitov, kde ich aj samostatne riešia. Jeden zo žiakov zapíše výsledky na tabuľu.

ÚLOHA 7

V cirkuse predávali lístky po 3 eurá. Pokladníčka odovzdala riaditeľovi tržbu za mesiac v sume 14 639 eur. Riaditeľovi sa suma nepozdáva. Mohla pokladníčka za mesiac vyzbierať takúto sumu?

RIEŠENIE

Ciferný súčet čísla 14 639 nie je deliteľný tromi. Suma je teda nesprávna.

ÚLOHA 8

Ktoré z nasledujúcich čísel sú deliteľné tromi?

13, 84, 9 823, 369 006, 433

RIEŠENIE

84, 369 006

<u>ÚLOHA 9</u>

Doplňte čísla namiesto písmen tak, aby boli dané čísla deliteľné deviatimi.

909 23a

b2 000

256 4cc

77 13d

V ktorých prípadoch existuje viac riešení?

<u>RIEŠENIE</u>

a = 4

b = 7

c = 5

d = 0, 9

Vyzveme žiakov, aby sformulovali kritéria deliteľnosti 3 a 9. Ak ich budú vedieť vysloviť, pokračujeme otázkou, či vedia odôvodniť, že je to skutočne tak. Tiež ich vyzveme, aby vysvetlili pojem ciferný súčet.

Ak kritéria nevedia vysloviť alebo odôvodniť, môžeme pokračovať riešením nasledujúcich úloh:

<u>ÚLOHA 10</u>

Určte zvyšky daných čísel po delení 9:

10, 100, 1000, 9, 999, 9 999.

<u>RIEŠENIE</u>

Zvyšky sú: 1, 1 , 1, 0, 0, 0

<u>ÚLOHA 11</u>

Určte zvyšky daných čísel po delení 9 bez delenia:

3000, 600, 20

4000, 800, 50

60 000, 7000, 50

<u>RIEŠENIE</u>

3, 6, 2

4, 8, 5

6, 7, 5

<u>ÚLOHA 12</u>

Určte zvyšky daných čísel po delení 9 bez delenia:

3620

4850

67 050

<u>RIEŠENIE</u>

3+6+2 = 11, zvyšok po delení je 2

4+8+5 = 17, zvyšok po delení je 8

6+7+5 = 18, zvyšok po delení je 0

Vezmime si napríklad číslo 3 627

- Vieme ho rozdeliť na tisícky, stovky, desiatky a jednotky?

3 627 = 3000 + 600 + 20 + 7 = 3 . 1000 + 6 . 100 + 2 . 10 + 7

- Ak využijeme rozpisy pre 10, 100 a 1000, môžeme ďalej pokračovať takto:

  3 627 = 3 . (999 + 1) + 6 . (99 + 1) + 2 . (9 + 1) + 7 =

  = (3 . 999 + 6 . 99 + 2 . 9) + (3 . 1 + 6 . 1 + 2 . 1 + 7) =

  = **(3 . 999 + 6 . 99 + 2 . 9)** + (3 + 6 + 2 + 7)

- Vieme, že výraz v prvej zátvorke je deliteľný deviatimi. Môžeme vyvolať jedného zo žiakov, ktorý to zdôvodní.
- Deliteľnosť celého čísla teda závisí od toho, či je deliteľný výraz v druhej zátvorke. Keďže 3 + 6+ 2 + 7 = 18,

18 je deliteľné deviatimi, tak je aj celé číslo 3 627 deliteľné deviatimi.

- Žiakov sa opýtame, čo im tieto číslice (3 + 6+ 2 + 7) pripomínajú a odkiaľ sme ich získali.
- Žiaci si uvedomia, že je to práve ciferný súčet čísla 3 627.

Vyzveme žiakov, aby sformulovali a zapísali si kritérium deliteľnosti deviatimi:

Číslo je deliteľné 9 práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi.

Z časových dôvodov kritérium formálne nedokazujeme.

Teraz sa študentov opýtame na deliteľnosť tromi. Vedeli by podľa predchádzajúceho odvodzovania, odvodiť aj kritérium deliteľnosti tromi?

Ak áno, poprosíme jedného zo študentov, aby nám to predviedol. Ak nie, ukážeme, že v predchádzajúcom príklade sme mali v zátvorke výraz, ktorý je deliteľný deviatimi a z toho vyplýva, že je deliteľný aj tromi. Takže to, či celé číslo bude deliteľné tromi závisí od výrazu v druhej zátvorke, o ktorom už vieme, že je ciferným súčtom daného čísla.

Vyzveme študentov, aby sformulovali a zapísali si kritérium deliteľnosti tromi:

Číslo je deliteľné 3 práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný tromi.

Upevňovanie osvojeného učiva

Nasledujúce úlohy slúžia na precvičenie a upevnenie kritérií deliteľnosti 3 a 9.

ÚLOHA 13

Medzi nasledujúcimi číslami nájdite také, ktoré sú deliteľné 3.

123 456, 425 362, 3 333, 565 650,

RIEŠENIE

123 456, 3 333

ÚLOHA 14

Medzi nasledujúcimi číslami nájdite také, ktoré sú deliteľné 9.

3 852, 219 222, 93 616, 123 456

RIEŠENIE

3 852, 219 222

Zhodnotenie vyučovacej hodiny a záver

Na záver vyzveme žiakov, aby zopakovali kritéria deliteľnosti 2, 5, 10, 3 a 9.

PRÍLOHA B:

NÁVRH PÍSOMNEJ PRÍPRAVY NA VYUČOVACIU HODINU II

Peer Instruction v etape osvojovania a upevňovania nového učiva

Názov školy: Evanjelické kolegiálne gymnázium, Prešov

Predmet: Matematika

Ročník: V.O

Tematický celok: Deliteľnosť prirodzených čísel

Téma: Kritéria deliteľnosti

Vstupné vedomosti: násobok, deliteľ, počet deliteľov, kritéria deliteľnosti 2, 5, 10, 3 a 9

Ciele vyučovacej hodiny:

- Zopakovať kritéria deliteľnosti 3 a 9
- Sformulovať a dokázať kritéria deliteľnosti 4 a 8
- Sformulovať a dokázať kritéria deliteľnosti vybraných zložených čísel
- Precvičiť kritéria deliteľnosti na úlohách

Rozpracovanie etáp vyučovacej hodiny

ETAPY VH	*VYUČOVACIE METÓDY*	*ORGANIZAČNÉ FORMY*	*MATERIÁLNE PROSTRIEDKY*
1.organizačná časť	-	Hromadná	Triedna kniha
2. aktualizácia prv osvojeného učiva	Cvičenie	Individuálna	-
3. osvojovanie nového učiva	Metóda Peer Instruction	Individuálna/ Hromadná	PC, projektor, hlasovacie kartičky
4. upevňovanie a prehlbovanie učiva	Cvičenie	Individuálna/ Hromadná	-
5. osvojovanie nového učiva	Metóda Peer Instruction	Individuálna/ Hromadná	PC, projektor, hlasovacie kartičky
6. upevňovanie a prehlbovanie učiva	Cvičenie	Individuálna/ Hromadná	-
5. zhodnotenie VH, záver	-	Hromadná	-

Aktualizácia prv osvojeného učiva

Keďže sme na minulej hodine preberali kritéria deliteľnosti 3 a 9, prvá úloha bude zameraná práve na kritérium deliteľnosti 3:

ÚLOHA 1

Určte, či je nasledujúce tvrdenie pravdivé:

"Zlomok 12 345/54321 je v základnom tvare."

RIEŠENIE

Tvrdenie je nepravdivé. Použitím kritéria deliteľnosti sa veľmi jednoducho sa dá prísť na to, že čitateľ aj menovateľ sú deliteľné tromi. Zlomok nie je v základnom tvare.

<u>ÚLOHA 2</u>

Na letnom tábore sa vo veľkej mise nachádza 265 410 cukríkov. Dajú sa cukríky spravodlivo rozdeliť medzi 9 oddielov?

<u>RIEŠENIE</u>

Ciferný súčet čísla 256 410 je deliteľný 9. Cukríky sa dajú spravodlivo rozdeliť.

Žiaci vypracujú úlohy samostatne do zošitov. Jeden z nich sa postaví a vysvetlí svoju odpoveď spolužiakom.

<u>Osvojovanie nového učiva</u>

Ďalej pokračujeme kritériom deliteľnosti 4.

<u>ÚLOHA 3</u>

Bez delenia určte, či je číslo 336 deliteľné 4.

Bez delenia určte, či je číslo 354 deliteľné 4.

<u>RIEŠENIE</u>

336 nie je deliteľné 4.

354 je deliteľné 4.

Podobne ako pri deliteľnosti 3 a 9 začneme otázkou, či žiaci vedia toto kritérium sformulovať. Ak áno, pokračujeme otázkou, či by to vedeli aj odôvodniť. Následne môžeme pokračujeme odvodzovaním tohto kritéria cez nasledovné úlohy:

<u>ÚLOHA 4</u>

Určte zvyšok po delení 4.

100, 200, 500, 1000, 2000, 2300, 143 600

10, 15, 20, 21, 1450, 1386

RIEŠENIE

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0

2, 3, 0, 1, 2, 2

Po tejto úlohe sa žiakov spýtame, čo si v danej úlohe všimli. Čo majú spoločné čísla, ktoré sú deliteľné 4?

Žiakov vedieme k tomu, aby si všimli, že každé číslo končiace aspoň dvoma nulami (deliteľné 100) je deliteľné štyrmi.

Vezmime si napríklad čísla 336 a 354. Platí

- 336 = 300 + 30 + 6 = 3 . 100 + 3 . 10 + 6
- 354 = 300 + 50 + 4 = 3 . 100 + 5 . 10 + 4
- Vieme, že každá stovka je deliteľná 4. Takže deliteľnosť celého čísla závisí od desiatok a jednotiek. Ak posledné dvojčíslie bude deliteľné 4, celé číslo bude deliteľné štyrmi.
- Takže 336 je deliteľné štyrmi, kým 354 nie je.

Následne vyzveme žiakov, aby toto kritérium presne sformulovali a zapísali si ho do zošitov:

Číslo je deliteľné 4 práve vtedy, ak je jeho posledné dvojčíslie deliteľné 4.

ÚLOHA 5

Doplňte čísla namiesto písmen tak, aby boli dané čísla deliteľné 4.

52a

b 13b

8 5cc

d85 1d0

RIEŠENIE

a = 0, 4, 8

b = 2, 6

c = 4, 8

d = 2, 4, 6, 8

Nasledujú úlohy zamerané na deliteľnosť ôsmimi.

ÚLOHA 6

Určte, či je číslo 3 168 deliteľné 8.

Určte, či je číslo 3 023 deliteľné 8.

RIEŠENIE

3 168 je deliteľné 8.

3 023 nie je deliteľné 8.

Podobne ako pri deliteľnosti 4 začneme otázkou, či žiaci vedia toto kritérium sformulovať. Ak áno, pokračujeme otázkou, či by to vedeli aj odôvodniť. Potom môžeme pokračovať odvodzovaním tohto kritéria cez nasledovné úlohy:

ÚLOHA 7

Určte zvyšok po delení 8.

10, 15, 20, 21, 100, 200, 500, 1000, 2000, 9000, 124 000, 1 000 000

RIEŠENIE

2, 7, 4, 5, 4, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0

Úloha 7 je analogická k Úlohe 4. Žiakov sa pýtame na to, čo si všimli pri zisťovaní zvyškov. Vedieme ich k uvedomeniu si toho, že číslo 1000 a teda aj každý jeho násobok je deliteľný 8. Pri odvodzovaní kritéria deliteľnosti 8 postupujeme podobne ako pri kritériu deliteľnosti 4.

Vezmime si napríklad číslo 3 168. Platí

- 3 168 = 3 000 + 100 + 60 +8 = 3 . 1 000 + 1 . 100 + 6 . 10 + 8
- Teraz nestačí hovoriť len o stovkách, pretože 100 nie je deliteľné ôsmimi. A čo tak 1 000? 1 000 je deliteľné 8, takže aj každý násobok tisícky. Stačí nám teda uvažovať posledné trojčíslie. Ak to bude deliteľné 8, celé číslo bude deliteľné ôsmimi. 3 168 je teda deliteľné ôsmimi, lebo 168 je deliteľné ôsmimi.

Opäť vyzvem žiakov, aby toto kritérium sformulovali a zapísali ho do zošitov.

Číslo je deliteľné 8 práve vtedy, ak je jeho posledné trojčíslie deliteľné 8.

ÚLOHA 8

Doplňte čísla namiesto písmen tak, aby boli dané čísla deliteľné 8.

e00

4 f6f

12 0gg

hh 18h

RIEŠENIE

e = 2, 4, 6, 8

f = 4

g = 0, 8

h = 4

Upevňovanie a prehlbovanie učiva

Pokračujeme úlohami na upevnenie osvojeného učiva.

ÚLOHA 9

K číslu 567 nájdite najbližšie číslo deliteľné 4.

RIEŠENIE

556

Žiaci už vedia, že dôležité je posledné dvojčíslie, tým je 67. Číslo 67 nie je deliteľné štyrmi, takže musíme nájsť číslo najbližšie k nemu.

67 = 4 . 14 + 1

Vidíme, že 66 je deliteľné štyroma (je to číslo o jedna menšie ako 67).

Najbližšie číslo k 567, ktoré je deliteľné štyroma je teda 566.

ÚLOHA 10

K číslu 45 708 110 nájdite najbližšie číslo deliteľné 8.

RIEŠENIE

45 708 112

45 708 110, posledné trojčíslie je 110

110 = 8. 13 + 6

Ak máme mať zvyšok 0, musíme pripočítať k 110 číslo 2. Vtedy 112 = 8.13 + 8 = 9.13. Riešením je číslo 45 708 112.

Osvojovanie nového učiva

Pokračujeme kritériami deliteľnosti niektorými zloženými číslami. To môžeme urobiť na základe nasledujúcich troch úloh. Okrem kritéria deliteľnosti šiestimi, tieto úlohy slúžia na zopakovanie výrokov a logických spojok, keďže úlohy sú zadávané vo forme výrokov, o ktorých majú žiaci určiť, či sú pravdivé alebo nie. Tieto úlohy sa zobrazia na projekcii, žiaci hlasujú prvýkrát, potom nasleduje diskusia medzi žiakmi a druhé hlasovanie.

ÚLOHA 11

Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je jeho ciferný súčet deliteľný číslom 6.

Súhlasíte?

A) Áno

B) Nie

RIEŠENIE

Správna odpoveď je B).

Pri tejto úlohe budú žiaci pravdepodobne poznať správnu odpoveď, tak ich vyzveme k tomu, aby svoje tvrdenie odôvodnili.

Stačí nájsť konkrétny príklad, napr. 15. Ciferný súčet je 6, čiže je deliteľný šiestimi, číslo 15 však šiestimi deliteľné nie je.

ÚLOHA 12

Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je deliteľné 2 alebo 3.

Súhlasíte?

A) Áno

B) Nie

RIEŠENIE

Správna odpoveď je B).

Teraz sa pravdepodobne nájde viacero takých, ktorí označia odpoveď A). Opäť žiakov vyzveme, aby svoje tvrdenia odôvodnili.

Takýmto príkladom môže byť napr. Číslo 8. To je deliteľné 2, čiže spĺňa podmienku, nie je však deliteľné šiestimi.

ÚLOHA 13

Prirodzené číslo je deliteľné číslom 6 práve vtedy, ak je deliteľné 2 a 3.

Súhlasíte?

A) **Áno**
B) **Nie**

RIEŠENIE

Správna odpoveď je A).

Toto tvrdenie je už správne. Opäť vyzveme žiakov, aby svoje tvrdenie odôvodnili a následne si ho zapísali do zošitov.

Upevňovanie a prehlbovanie učiva

Poprosíme študentov, aby vyslovili kritérium deliteľnosti pre 12. Pravdepodobne budú vedieť prísť na to, že číslo je deliteľné 12 práve vtedy, keď je deliteľné 3 a 4. Spýtame sa aj na to, či by sme mohli použiť aj takéto kritérium – číslo je deliteľné 12, ak je deliteľné 2 a 6. Tu sa názory môžu rôzniť. Opäť si vezmeme konkrétne číslo, napr. 30. To je deliteľné aj 2 aj 6, ale nie je deliteľné 12.

Všimli si žiaci rozdiel medzi danými dvojicami?

Ak áno, mali by si uvedomiť, že dvojica daných čísel musí byť nesúdeliteľná.

Teraz sa opýtame na deliteľnosť číslom 36. Žiaci by už mali vedieť, že číslo je deliteľné 36 práve vtedy, keď je deliteľné 4 a 9 alebo 2 a 15.

Pokračujeme úlohou zameranou na precvičenie kritérií deliteľnosti.

ÚLOHA 14

Medzi číslami 18, 36, 56, 72 a 216 je číslo, ktoré nemá vlastnosť spoločnú pre ostatné z hľadiska ich deliteľnosti. Ktoré je to číslo?

A) 56
B) 72
C) 216

RIEŠENIE

Správna odpoveď je A).

Pomocou kritérií deliteľnosti by žiaci mali zistiť, že číslo 56 nie je deliteľné ani 3, ani 6 a ani 9, kým ostatné sú.

ÚLOHA 15

Koľko z čísel 120, 121, …, 189, 190 je deliteľné siedmimi a zároveň deviatimi?

A) 1
B) 2
C) 18
D) Viac ako 18

RIEŠENIE

Správna odpoveď je B).

Pri tejto úlohe si žiaci musia uvedomiť, že ak je číslo deliteľné siedmimi a zároveň aj deviatimi, musí byť deliteľné 63. Čiže dve takéto čísla sú od seba vzdialené o 63. A keďže medzi 120 a 190 je 70 čísel, musí sa tam vyskytovať aspoň jedno také číslo. Nanajvýš však dve. Na to potrebujeme zistiť prvé také číslo. Je to 126. Ďalšie teda bude 189. Môže sa stať, že žiaci presne nerozumejú tomu, čo to znamená, že nejaké číslo je deliteľné siedmimi aj deviatimi súčasne a za správnu odpoveď považujú C), keďže v nej sú zahrnuté všetky čísla od 120 do 190, ktoré sú deliteľné siedmimi alebo deviatimi.

Zhodnotenie vyučovacej hodiny a záver

Žiakov vyzveme, aby zopakovali kritériá deliteľnosti 4 a 8. Potom ich vyzveme, aby sformulovali kritériá deliteľnosti 6, 12 a 30.

PRÍLOHA C:

NÁVRH PÍSOMNEJ PRÍPRAVY NA VYUČOVACIU HODINU III

Peer Instruction v etape aktualizácie a upevňovania učiva

Názov školy: Evanjelická spojená škola, Prešov

Predmet: Matematika

Ročník: V.O

Tematický celok: Deliteľnosť prirodzených čísel

Téma: Prvočísla a zložené čísla

Vstupné vedomosti: násobok, deliteľ, počet deliteľov, kritéria deliteľnosti

Ciele vyučovacej hodiny:

- Rozdeliť prirodzené čísla podľa počtu deliteľov
- Definovať pojmy prvočíslo a zložené číslo
- Vedieť určiť o prirodzenom čísle, či je prvočíslo alebo zložené číslo
- Rozložiť číslo na súčin prvočiniteľov

Rozpracovanie etáp vyučovacej hodiny

ETAPY VH	*VYUČOVACIE METÓDY*	*ORGANIZAČNÉ FORMY*	*MATERIÁLNE PROSTRIEDKY*
1.organizačná časť	-	Hromadná	Triedna kniha
2. aktualizácia prv osvojeného učiva	Metóda Peer Instruction	Individuálna/ Skupinová	PC, projektor, hlasovacie kartičky
3. osvojovanie nového učiva	Heuristika, Vysvetľovanie	Individuálna/ Hromadná	-
4. upevňovanie a prehlbovanie učiva	Metóda Peer Instruction, Cvičenie	Individuálna/ Skupinová	PC, projektor, hlasovacie kartičky
5. osvojovanie nového učiva	Heuristika, Vysvetľovanie	Individuálna/ Hromadná	-
6. upevňovanie a prehlbovanie učiva	Metóda Peer Instruction, Cvičenie	Individuálna/ Skupinová	PC, projektor, hlasovacie kartičky
7. zhodnotenie VH, záver	-	Hromadná	-

Aktualizácia prv osvojeného učiva

Na predchádzajúcej hodine sme preberali kritéria deliteľnosti, zopakujeme si ich pri riešení úlohy. Úloha sa zobrazí na projekcii, žiaci hlasujú. Po prvom hlasovaní nasleduje ich vzájomná diskusia a druhé hlasovanie.

ÚLOHA 1

Janko má na ICQ sedem miestne heslo skladajúce sa len z číslic. Dlho sa neprihlasoval a tak toto heslo zabudol. Pamätá si len každú druhú číslicu 4*1*2*3 a že heslo bolo deliteľné tromi. Taktiež si spomenul, že tie číslice, ktoré zabudol boli rovnaké. Na koľký krát sa mu podarí prihlásiť?

A) Na prvýkrát, lebo existuje len jedna taká možnosť.

B) Najneskôr na deviaty krát

C) Najneskôr na desiaty krát

D) Neprihlási sa, lebo sa nedá nájsť taká číslica.

RIEŠENIE

Správna odpoveď je D).

Vzhľadom na to, že číslicu dosadíme namiesto hviezdičky práve trikrát, môže sa na prvý pohľad zdať, že na dosadenej číslici nezáleží, lebo súčet troch rovnakých čísel je vždy deliteľný tromi. Preto si mnoho žiakov zvolí práve možnosť C). Tí, ktorí uvažujú takýmto spôsobom, ale zabudnú uvažovať nulu ako číslicu, si vyberú možnosť B).

Dôležité je však uvedomiť si, že súčet zvyšných číslic je 10 a teda toto číslo nebude nikdy deliteľné tromi.

Po druhom hlasovaní môžeme vyzvať jedného žiaka, aby svoju odpoveď zdôvodnil.

Osvojovanie nového učiva

Doteraz sme hovorili o tom, ako zistiť, či je nejaké číslo deliteľné iným číslom. Teraz si skúsime položiť inú otázku: Aký počet deliteľov môžu mať prirodzené čísla?

Vyzveme žiakov, aby hľadali čísla, ktoré majú práve jedného, dvoch, troch... rôznych deliteľov. Svoje zistenia zapisujú do pripravenej tabuľky:

Počet deliteľov	**Čísla**	**Poznámka**
jeden		
dva		
tri		
štyri		
päť		
šesť		

Vypĺňanie tabuľky smeruje k zavedeniu pojmov **prvočíslo** a **zložené číslo.**

Vyplnená tabuľka môže vyzerať napr. takto:

Počet deliteľov	**Čísla**	**Poznámka**
jeden	1,	
dva	2,3,5,7,11,13,17,19,	prvočísla
tri	4,9,	zložené čísla
štyri	6,8,10,14,15,	zložené čísla
päť	16,	zložené čísla
šesť	12,18,20,	zložené čísla

- Všimneme si čísla, ktoré majú práve dvoch rôznych deliteľov. Aké sú to čísla? Nepárne? Nie, je tam aj číslo 2. A nie sú tam všetky nepárne, napr. číslo 9 je o riadok nižšie.
- Čo majú spoločné čísla v riadku tri? Sú tam čísla 4, 9,... Tieto sú mocniny čísel z prvého riadku.
- Podobnými otázkami upozorníme žiakov na tieto čísla a následne definujeme prvočísla a tiež aj zložené čísla.
- Žiaci si zapíšu:

Prirodzené číslo, ktoré má práve dvoch deliteľov a to jednotku a samého seba, nazývame prvočíslo.

Prirodzené číslo, ktoré má viac ako dvoch deliteľov, nazývame zložené číslo.

Žiakov upozorníme na to, že jednotka nie je ani prvočíslo, ani zložené číslo.

<u>Upevňovanie a prehlbovanie učiva</u>

Na začiatku tejto etapy vyučovania sa venujeme spôsobu, ako prvočísla hľadať. Keďže pre žiakov je to opakovanie zo základnej školy, predpokladáme, že poznajú Eratostenovo sito. Tento postup s nimi zopakujeme. Všetko zapisujeme na tabuľu, žiaci si píšu do zošitov.

Pokračujeme úlohami na upevňovanie a prehlbovanie učiva metódou Peer Instruction. Na projekcii sa zobrazia postupne nasledovné úlohy. Žiaci hlasujú. Po prvom hlasovaní diskutujú medzi sebou a hlasujú druhýkrát. Po druhom hlasovaní vyzveme jedného žiaka, aby svoju odpoveď zdôvodnil pred celou triedou.

ÚLOHA 2

Medzi číslami: 1, 29, 13, 2, 91, 2325, 57 a 37

A) sú 4 prvočísla

B) je 5 prvočísel

C) všetky sú prvočísla

RIEŠENIE

Správna odpoveď je B).

Jednotlivé možnosti v úlohe sú zamerané na to, či žiaci vedia, že 1 nie je prvočíslo. Či vedia, že 2 je prvočíslo, aj keď je párna. Či vedia o 2325 bez rátania zistiť, že je to zložené číslo.

Medzi prvočísla patria: 29, 13, 2, 57 a 37.

Ďalšia úloha je zameraná na prácu s naučeným pojmami bez toho, aby sa explicitne vyžadovalo ich použitie.

ÚLOHA 3

Jedného dňa sa vlk Kleofáš vlúpal do košiara, kde bolo sto oviec. Každá z nich bola označená číslom od 1 do 100. Kým si vlk uvedomil, koľko šťastia ho stretlo, ovečka s číslom 1 mu utiekla. Keďže bol veľmi hladný, rozhodol sa, že všetky ovečky zje. Ale keďže bol aj veľmi poverčivý, prvý deň už žiadnu nezjedol. Na druhý deň zjedol všetky ovečky, ktoré boli označené číslom deliteľným dvoma. Tretí deň zjedol všetky násobky trojky, štvrtý deň všetky násobky štvorky atď. Na konci bol už taký plný, že posledná ovečka mu utiekla. Akým číslom bola označená?

A) 100
B) 99
C) 97
D) 91

RIEŠENIE

Správna odpoveď je C).

Žiaci si musia uvedomiť, že hľadané číslo je prvočíslom, pretože ak by nebolo, vlk Kleofáš by ovečku už zjedol v deň, ktorý bol deliteľom toho čísla. Napr. Ovečku 95 by zjedol už v piaty deň.

Ak si žiaci uvedomia túto skutočnosť, nebude pre nich problém, úlohu vyriešiť, pretože 97 je najväčším prvočíslom menším ako 100.

Po tejto úlohe vedieme diskusiu so žiakmi pomocou týchto otázok:

- **Otázka:** Ktorý deň bol vlk úplne hladný?
- **Očakávaná odpoveď:** V deň, ktorý je označený zloženým číslom.
- **Otázka:** Ktorý deň sa najedol najlepšie?
- **Očakávaná odpoveď: V druhý deň.** Vtedy zjedol všetky ovečky označené párnym číslom.
- **Otázka:** Ktorý deň zjedol práve 1 ovečku?
- **Očakávaná odpoveď:** V deň označený prvočíslom, ale iba ak bolo väčšie ako 10.

Osvojovanie nového učiva

Následne opakujeme so žiakmi rozklad na prvočísla.

ÚLOHA 4

Napíšte číslo 120 ako súčin čo najväčšieho počtu činiteľov rôznych od 1.

RIEŠENIE

120 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5

Ak majú žiaci s touto úlohou problém, môžeme im pomôcť nasledovnými otázkami počas riešenia úlohy:

- **Otázka:** Dá sa číslo 120 zapísať ako súčin dvoch menších čísel. Akých?
- **Očakávaná odpoveď:** Napr. 10 . 12.
- **Otázka:** Dajú sa čísla 10 a 12 zapísať ako súčin dvoch menších čísel?
- **Očakávaná odpoveď:** Tiež ich vieme zapísať ako súčin dvoch čísel. Napr. 2 . 5 a 3 . 4, inak 120 = 2 . 5 . 3 . 4
- **Otázka:** Dá sa ešte niektoré z týchto čísel: 2, 5, 3 a 4 zapísať ako súčin dvoch menších čísel?
- **Očakávaná odpoveď:** 4 sa dá zapísať ako 2.2
- Záver: Takže 120 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5

Takýto zápis čísla, v ktorom sa nachádzajú iba prvočísla nazývame rozklad na prvočinitele.

Na precvičenie dáme žiakom za úlohu rozložiť na prvočinitele číslo 625.

ÚLOHA 5

Rozložte na prvočinitele číslo 625.

RIEŠENIE

725 = 5 .5 . 29

Zhodnotenie vyučovacej hodiny a záver

Na záver si v dialógu so žiakmi zopakujeme pojmy prvočíslo, zložené číslo a rozklad na prvočinitele.

PRÍLOHA D:

NÁVRH PÍSOMNEJ PRÍPRAVY NA VYUČOVACIU HODINU IV

Peer Instruction v etape aktualizácie, osvojovania a upevňovania učiva

Názov školy: Evanjelická spojená škola, Prešov

Predmet: Matematika

Ročník: V.O

Tematický celok: Deliteľnosť prirodzených čísel

Téma: Najmenší spoločný násobok

Vstupné vedomosti: násobok, deliteľ, počet deliteľov, kritéria deliteľnosti, prvočísla, zložené čísla, rozklad na prvočinitele

Ciele vyučovacej hodiny:

- Zopakovať pojem spoločný násobok dvoch prirodzených čísel.
- Zopakovať pojem najmenší spoločný násobok dvoch prirodzených čísel.
- Určovať nsn vypisovaním násobkov daných čísel.
- Určiť nsn z prvočíselného rozkladu daných čísel.

Rozpracovanie etáp vyučovacej hodiny

ETAPY VH	*VYUČOVACIE METÓDY*	*ORGANIZAČNÉ FORMY*	*MATERIÁLNE PROSTRIEDKY*
1.organizačná časť	-	Hromadná	Triedna kniha
2. aktualizácia prv osvojeného učiva	Metóda Peer Instruction	Individuálna/ Skupinová	PC, projektor, hlasovacie kartičky
3. osvojovanie nového učiva	Metóda Peer Instruction, Heuristika, Vysvetľovanie	Individuálna/ Hromadná/ Skupinová	PC, projektor, hlasovacie kartičky
4. upevňovanie a prehlbovanie učiva	Metóda Peer Instruction, Cvičenie	Individuálna/ Skupinová	PC, projektor, hlasovacie kartičky
5. zhodnotenie VH, záver	-	Hromadná	-

Aktualizácia prv osvojeného učiva

Na minulej hodine sme sa venovali prvočíslam, zloženým číslam a rozkladu na prvočinitele. To ako si to žiaci osvojili si zopakujeme v nasledujúcej úlohe. Úloha bude zobrazená na projekcii. Žiaci hlasujú prvýkrát, nasleduje diskusia medzi žiakmi, na čo žiaci opäť hlasujú.

ÚLOHA 1

Ktoré z týchto čísel je rozložené na prvočinitele?

A) 126 = 1.2.3.3.7

B) 127 = 127

C) 128 = 2.2.2.4.4

RIEŠENIE

Správna odpoveď je B).

V možnosti A) je uvedené aj číslo 1, ktoré nie je prvočíslom. Aj keď sa možnosť B) zdá zvláštnou, v tomto prípade ide naozaj o rozklad na prvočinitele, keďže 127 je prvočíslom. V poslednej možnosti číslo 4 nie je prvočíslom.

Osvojovanie nového učiva

Nasleduje úloha, ktorá má za úlohu žiakov motivovať a následne priviesť k zavedeniu pojmu najmenší spoločný násobok. Žiaci hlasujú prvýkrát.

ÚLOHA 2

Katka kupuje poháre džúsu po 5 dcl. Mirka po 3 dcl. Veľký pohár stojí 60 centov, malý 45 centov. Kto nakupuje výhodnejšie?

A) Katka

B) Mirka

C) obe rovnako

RIEŠENIE

Správna odpoveď je A).

Táto úloha je zameraná na najmenší spoločný násobok. Na to aby sme zistili, ktoré z dievčat nakupuje výhodnejšie, musíme porovnať ceny rovnakého množstva nápoja. V tomto prípade to bude 15 dcl. Ak sa žiaci dopracujú k tomuto kroku, nie je pre nich zväčša problém určiť, že výhodnejšie nakupuje Katka. Tento príklad sa dá vyrátať aj bez toho, aby sme poznali pojem najmenší spoločný násobok. Môžeme napríklad vypočítať koľko platí za 1 dcl Katka a koľko Mirka.

Ak by sme v predchádzajúcej úlohe zmenili sumu na 62 centov a 43 centov, vedeli by sme uvažovať rovnakým spôsobom? Bolo by to komplikované, kvôli tomu, že 62:5, ani 43:3 nie sú celé čísla. Bolo by teda pre nás jednoduchšie zistiť, koľko by dievčatá zaplatili za 15 dcl nápoja.

Následne im môžeme vysvetliť dôležitosť používania NSN a taktiež jeho vlastnosti.

Žiakov vyzveme, aby si do zošitov zapísali:

Najmenší spoločný násobok dvoch prirodzených čísel a je najmenšie nenulové prirodzené číslo, ktoré je deliteľné oboma číslami.

Ukážeme si, že nsn môžeme hľadať tak, že budeme vypisovať všetky násobky alebo pomocou rozkladu na prvočinitele. Vedieme so žiakmi diskusiu:

- **Otázka:** Vezmime si napríklad čísla 150 a 420. Aké sú násobky týchto čísel? Koľko ich musíme vypísať, aby sme našli ten spoločný?
- **Očakávaná odpoveď:** Násobky 150 sú: 150, 300, 450, 600, 750, 900, 1 050, 1 200, 1 350, 1 500, 1 650, 1 800, 1 950, 2 100

  Násobky 420 sú: 420, 840, 1 260, 1 680, 2 100
- **Otázka:** Našli sme najmenší spoločný násobok, ale bolo to dosť zdĺhavé. A to ešte nehovoríme o štvorciferných alebo päťciferných číslach. Neexistuje jednoduchší

spôsob?

- **Očakávaná odpoveď:** Keďže žiaci učivo preberali už na základnej škole, predpokladáme, že budú vedieť vysvetliť hľadanie nsn pomocou rozkladu na prvočinitele. Ak nie, pokračujeme ďalšími otázkami.
- **Otázka:**

Vezmime si prvočíselný rozklad daných čísel a ich nsn:

150 = 2 . 3 . 5 . 5

420 = 2 . 2 . 3 . 5 . 7

2 100 = 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 7

Všimli ste si nejaký vzťah medzi týmito číslami?

- **Očakávaná odpoveď:** Číslo 2 100 je vyskladané z čísel 150 a 420. Nie je však úplným spojením daných čísel.

Ak má byť nejaké číslo spoločným násobkom, musia ho deliť obe čísla. Teda, z jeho prvočíselného rozkladu sa musia dať vyskladať obe čísla. Ak má byť najmenší spoločný násobok, nesmie tam byť nič navyše.

- Čiže nsn(150,420) = 2 . 3 . 5 . 5 . 2 . 7 = 2 100

Upevňovanie a prehlbovanie učiva

Nasleduje úloha na precvičenie hľadania NSN nsn sa zvykne písať malými písmenami a NSD veľkými pomocou rozkladu na prvočísla.

ÚLOHA 3

Určte nsn čísel 130 a 75.

RIEŠENIE

130 = 2 . 5 . 13,   75 = 3 . 5 . 5

nsn(130,75) = 2 . 5 . 13 . 3 . 5 = 1 950

To, či žiaci porozumeli pojmu najmenší spoločný násobok nám pomôže zistiť aj nasledujúca konceptuálna úloha. Opäť prebehne prvé hlasovanie, následne diskusia medzi žiakmi a druhé hlasovanie.

ÚLOHA 4

Najmenší spoločný násobok čísel 77 a 121

A) je deliteľný 11

B) je rovný súčinu 77 * 121

C) je menší ako 200

RIEŠENIE

Správna odpoveď je A).

Žiaci dokonca ani nepotrebujú poznať (vypočítať) násobok oboch čísel. Stačí, ak si uvedomia, že 77 je deliteľné 11 a teda aj najmenší spoločný násobok 77 a nejakého iného čísla bude deliteľný 11.

Odpoveď B) sa spája s bežnou miskoncepciou o tom, že najmenší spoločný násobok sa vyráta ako súčin daných dvoch čísel.

Žiaci, ktorí vedia narábať s pojmom najmenší spoločný násobok možnosť C) rýchlo vylúčia, lebo hneď vidno, že 77 nedelí 121 a teda 121 nie je najmenší spoločný násobok a každý ďalší násobok čísla 121 je už väčší ako 200.

Nasledujúca slovná úloha slúži na precvičenie pojmu najmenší spoločný násobok.

ÚLOHA 5

Športovci na štadióne mohli nastúpiť do dvojstupov, trojstupov, štvorstupov, päťstupov, šesťstupov alebo osemstupov a nikto nezvýšil. Bolo ich viac ako 100 ale menej ako 200. Koľko ich bolo?

RIEŠENIE

Hľadáme číslo, ktoré je deliteľné 2, 3, 4, 5, 6 a 8. Najmenšie také číslo je 120.

nsn (2,3,4,5,6,8) = 120

Športovcov bolo 120.

Žiaci úlohu počítajú samostatne v zošitoch. Jeden z nich potom vysvetlí riešenie.

Zhodnotenie vyučovacej hodiny a záver

Na záver so žiakmi zopakujeme pojem najmenší spoločný násobok a spôsoby jeho hľadania.