

Týmto by som sa chcel poďakovať vedúcemu mojej práce prof. RNDr. Luděkovi Zajíčkovi, DrSc. za trpezlivé a poučné vedenie tejto práce a za jeho čas. Taktiež by som sa chcel poďakovať RNDr. Slávke Drahovskej za pomoc pri kontrole úpravy a gramatiky práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Vztah funkce a grafu funkce

Autor: Matej Drahovský

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V předložené práci studujeme vztah funkce, respektive zobrazení mezi metrickými prostory, a jejího grafu, tedy podmnožiny kartézského součinu dvou metrických prostorů. Hlavní oblastí zájmu pro nás budou reálné funkce jedné reálné proměnné, no jestli to bude možné, budou tvrzení formulována i pro zobrazení mezi jinými prostory. V první kapitole studujeme funkce s uzavřeným grafem. Tito funkce nejdříve charakterizujeme pomocí jejich hromadných hodnot a poté, za určitých předpokladů, charakterizujeme množinu bodů nespojitosti funkce s uzavřeným grafem. Ve druhé kapitole zavedeme pojem Hausdorffovy vzdálenosti podmnožin metrického prostoru a ukážeme vztah mezi různými druhy konvergence funkcí a konvergencí Hausdorffovy vzdálenosti jejich grafů k nule. V poslední kapitole formulujeme Gibbsův jev z teorie Fourierových řad jako konvergenci Hausdorffovy vzdálenosti grafů částečných součtů Fourierovej řady od vhodně upraveného grafu aproximované funkce k nule.

Klíčová slova: Graf funkce, Hausdorffova vzdálenost, Gibbsův jev

Title: Relations of a function and its graph

Author: Matej Drahovský

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In presented work we study relation between a real function, or a map between two metric spaces, and its graph, a subset of Cartesian product of two metric spaces. Mainly, we will focus on real function of one real variable, but if possible theorems will be concerning maps between other metric spaces. In first chapter we study functions with closed graph. First we characterize these functions by their limit points and then, under some additional conditions, we characterize set of points of discontinuity of a function with closed graph. In second chapter, we introduce Hausdorff distance of subsets of metric space and we will show relations between different types of convergence of functions and convergence of Hausdorff distance of their graphs to zero. In the last chapter, we define Gibbs phenomenon from the theory of Fourier series as convergence of Hausdorff distance of graphs of partial sums of Fourier series from modified graph of approximated function to zero.

Keywords: Graph of function, Hausdorff distance, Gibbs phenomenon

Názov práce: Vzťah funkcie a grafu funkcie

Autor: Matej Drahovský

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V predloženej práci študujeme vzťah funkcie, respektíve zobrazenia medzi metrickými priestormi, a jej grafu, teda podmnožiny kartézkeho súčinu dvoch metrických priestorov. Hlavnou oblasťou záujmu pre nás budú reálne funkcie jednej reálnej premennej, no ak to bude možné, budú tvrdenia formulované aj pre zobrazenia medzi inými priestormi. V prvej kapitole študujeme funkcie s uzavretým grafom. Tieto funkcie najskôr charakterizujeme pomocou ich hromadných hodnôt a potom, za určitých predpokladov, charakterizujeme množinu bodov nespojitosti funkcie s uzavretým grafom. V druhej kapitole zavedieme pojem Hausdorffovej vzdialenosti podmnožín metrického priestoru a ukážeme vzťah medzi rôznymi druhmi konvergenzie funkcií a konvergenciou Hausdorffovej vzdialenosti ich grafov k nule. V poslednej kapitole formulujeme Gibbsov jav z teórie Fourierových rád ako konvergenciu Hausdorffovej vzdialenosti grafov čiastočných súčtov Fourierovej rady od vhodne upraveného grafu aproximovanej funkcie k nule.

Kľúčové slová: Graf funkcie, Hausdorffova vzdialenosť, Gibbsov jav

Obsah

1	Funkcie s uzavretým grafom	3
2	Hausdorffova vzdialenosť	5
3	Gibbsov jav	9

Úvod

V následujúcej práci budeme vyšetřovať vzťah medzi funkciou a jej grafom. Budeme sa zaoberať prevažne reálnymi funkciami jednej reálnej premennej, ale vo viacerých prípadoch sú tvrdenia formulované pre zobrazenia medzi metrickými priestormi. Grafom zobrazenia $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ medzi metrickými priestormi (X, ρ) a (Y, σ) rozumieme množinu $\{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$, ktorú budeme značiť G_f . Ide teda o podmnožinu kartézského súčinu množín X a Y . Aby sme mohli hovoriť o väčšine z v tejto práci študovaných vlastností, musíme si na $X \times Y$ zaviesť metriku. Asi najprirodzenejšou voľbou metriky na $X \times Y$ je takzvaná “Euklidovská” metrika, definovaná pre $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$ ako $\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(\rho(x_1, x_2))^2 + (\sigma(y_1, y_2))^2}$. Dôkaz, že toto zobrazenie je na $X \times Y$ metrikou, môžeme nájsť napríklad v [Čech(1974)]. V tretej kapitole budeme viackrát používať $\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \rho(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2)$, čo dostaneme z nezápornosti metriky následujúcou úvahou:

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2\rho(x_1, x_2)\sigma(y_1, y_2) \\ \rho(x_1, x_2)^2 + \sigma(y_1, y_2)^2 &\leq (\rho(x_1, x_2))^2 + 2\rho(x_1, x_2)\sigma(y_1, y_2) + (\sigma(y_1, y_2))^2 \\ (\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)))^2 &\leq (\rho(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2))^2 \\ \rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\leq \rho(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2). \end{aligned}$$

V prvej kapitole budeme charakterizovať zobrazenia, ktorých graf je uzavretá množina pomocou množiny hromadných hodnôt funkcie v danom bode. Pre zobrazenie $f : (X, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ z metrického priestoru (X, ρ) do reálnej priamky so štandardnou metrikou a bod $x \in X$, týmto myslíme množinu

$$\{y \in \mathbb{R} : \text{existuje postupnosť } x_n \in X \text{ taká, že } x_n \rightarrow x \text{ a } f(x_n) \rightarrow y\},$$

a túto množinu budeme značiť $H_f(x)$. Ďalej guľu v metrickom priestore (X, ρ) so stredom v bode $x \in X$ a polomerom $\delta > 0$, budeme značiť $B_\rho(x, \delta)$, a rozumieme tým množinu $\{y \in X : \rho(x, y) < \delta\}$. Pre $M \subset X$, uzáver M budeme značiť \overline{M} . Značením $f^{-1}[K]$ rozumieme vzor množiny K v zobrazení f .

Prvé dve kapitoly sú zhrnutím výsledkov, ku ktorým som došiel riešením príkladov z Témy 24 v skriptách [Lukáš(1982)] respektíve námetov vedúceho práce. Posledná kapitola je z námetov vedúceho práce a z [Jarník(1955)], kapitola XIII, §5, cvičenie 5.

Kapitola 1

Funkcie s uzavretým grafom

Veta 1. *Nech (X, ρ) je metrický priestor a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je ľubovoľné zobrazenie. Potom f má uzavretý graf práve vtedy, keď pre každé $x \in X$ je množina hromadných hodnôt funkcie f v tomto bode podmnožinou množiny $\{f(x), \pm\infty\}$.*

Dôkaz. Nech pre nejaké $x \in X$ existuje postupnosť x_n , konvergujúca k x , pre ktorú platí: $f(x_n) \rightarrow y \neq f(x)$. Potom $\rho_2((x, y), G_f) \leq \rho_2((x, y), (x_n, f(x_n))) + \rho_2((x_n, f(x_n)), G_f) = \rho_2((x, y), (x_n, f(x_n)))$ a pravá strana konverguje k nule. Teda $(x, y) \in \overline{G_f}$. Keďže $(x, y) \notin G_f$ dostávame, že f nemá uzavretý graf.

Nech pre každé $x \in X$ je $H_f(x) \subset \{f(x), \pm\infty\}$ a nech $(x, y) \in \overline{G_f}$. Potom existuje postupnosť $(x_n, f(x_n))$ konvergujúca k (x, y) . Keďže konvergencia v súčine metrických priestorov je ekvivalentná konvergencii po zložkách dostávame, že $x_n \rightarrow x$ a $f(x_n) \rightarrow y$. Z toho $y \in H_f(x)$ a teda $y = f(x)$ a G_f je uzavretá množina. \square

Dôsledok. *Nech (X, ρ) je metrický priestor a zobrazenie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je spojité. Potom f má uzavretý graf.*

Dôkaz. Pre spojité zobrazenie platí v každom bode $H_f(x) = \{f(x)\}$. \square

Dôsledok. *Nech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lokálne obmedzená. Potom f je spojitá práve vtedy, keď má uzavretý graf.*

Dôkaz. Podľa predošlého dôsledku má spojitá funkcia uzavretý graf. Ak je funkcia lokálne obmedzená, tak množina jej hromadných hodnôt je v každom bode obmedzená. Takže ak má lokálne obmedzená funkcia uzavretý graf, musí mať v každom bode len jedinú hromadnú hodnotu a táto je rovná hodnote funkcie v danom bode. Potom ale je funkcia spojitá. \square

Veta 2. *Nech (X, ρ) je metrický priestor a $M \subset X$ je riedka, uzavretá množina. Potom existuje zobrazenie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, s uzavretým grafom, ktoré je nespojité práve na množine M .*

Dôkaz. Definujme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\rho(x, M)} & , x \notin M \\ 0 & , x \in M. \end{cases}$$

Potom f je spojité na množine $X \setminus M$, pretože $\rho(x, M)$ je spojité pre $x \in X$ a nenulové na $X \setminus M$ z uzavretosti množiny M . Keďže M je riedka, tak pre každé

$x \in M$ a každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in B_\rho(x, \frac{1}{n}) \cap X \setminus M$. Potom $f(x_n) > n$ a teda f nie je spojitá v žiadnom bode množiny M . Zostáva dokázať, že f má uzavretý graf. Ak $x \in X \setminus M$, tak f je spojitá v x a teda $H_f(x) = \{f(x)\}$. Ak $x \in M$, tak pre $y \in B_\rho(x, \delta)$ platí: $f(y) \in \{0\} \cup (\frac{1}{\delta}, \infty)$. Takže hromadnými hodnotami funkcie f v bode x môže byť len 0, čo je hodnota f v tomto bode, alebo ∞ . Teda f má uzavretý graf podľa vety (1). \square

Tvrdenie 3. *Nech (X, ρ) je metrický priestor a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazenie s uzavretým grafom. Potom množina bodov nespojitosti f je uzavrená.*

Dôkaz. Označme množinu bodov nespojitosti funkcie f ako M a nech $x \in \overline{M}$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje bod $y_n \in M$ taký, že $\rho(x, y_n) < \frac{1}{2n}$. Keďže f nie je spojitá v bode y_n , existuje k nemu podľa vety (1) bod $z_n \in B_\rho(y_n, \frac{1}{2n})$ taký, že $|f(z_n)| > n$. Potom $\rho(x, z_n) < \frac{1}{n}$ a teda ∞ je hromadnou hodnotou funkcie f v bode x . Takže x nie je bodom spojitosti a teda M je uzavretá množina. \square

Tvrdenie 4. *Nech (X, ρ) je metrický priestor a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je zobrazenie s uzavretým grafom. Potom vzor každej kompaktnej podmnožiny \mathbb{R} je uzavrená množina.*

Dôkaz. Nech $K \subset \mathbb{R}$ je kompaktná a $x \in \overline{f^{-1}[K]}$. Nech x_n je postupnosť bodov z $\overline{f^{-1}[K]}$, konvergujúca k x . Potom $f(x_n)$ je postupnosť bodov v kompakte a teda môžeme vybrať konvergentnú podpostupnosť $f(x_{n_k})$. Označme limitu tejto postupnosti $b \in K$. Keďže $x_{n_k} \rightarrow x$ dostávame, že $(x, b) \in \overline{G_f} = G_f$. Takže $b = f(x) \in K$ a teda $f^{-1}[K]$ je uzavrená. \square

Veta 5. *Nech (X, ρ) je Bairov metrický priestor. Nech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ má uzavretý graf a označme M množinu bodov nespojitosti zobrazenia f . Potom M je riedka, uzavretá množina.*

Dôkaz. Už vieme, že M je uzavretá množina. Nech existuje $a \in X$ a $\varepsilon > 0$ také, že f nie je spojitá v žiadnom bode množiny $\overline{B_\rho(a, \varepsilon)}$. Pre $k \in \mathbb{Z}$ definujme $F_k := f^{-1}([k, k+1]) \cap \overline{B_\rho(a, \varepsilon)}$. Podľa predošlého tvrdenia sú F_k uzavrené množiny a zjavne $\bigcup F_k = \overline{B_\rho(a, \varepsilon)}$. Ak $x \in F_k$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$ tak x je bodom nespojitosti f a teda podľa vety (1) pre každé $\delta > 0$ existuje $y \in B_\rho(x, \delta)$ také, že $|f(y)| > \max\{|k|, |k+1|\}$. Takže F_k je pre každé $k \in \mathbb{Z}$ riedka množina v X a teda aj v $\overline{B_\rho(a, \varepsilon)}$. Keďže (X, ρ) je Bairov, je aj $\overline{B_\rho(a, \varepsilon)}$ Bairov a teda zjednotenie F_k nemože byť hustou podmnožinou $\overline{B_\rho(a, \varepsilon)}$ čo je spor. Takže množina bodov spojitosti funkcie f je hustá, otvorená množina, z čoho M je riedka množina. \square

Kapitola 2

Hausdorffova vzdialenosť

Nech (X, ρ) je metrický priestor. Pre neprázdne množiny $A, B \subset X$ definujeme

$$\rho_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{x \in A} \rho(x, B), \sup_{x \in B} \rho(x, A) \right\}.$$

Túto hodnotu budeme nazývať Hausdorffovou odchýlkou množín A a B . V tejto kapitole budeme skúmať vzťah medzi konvergenciou funkcií a Hausdorffovou odchýlkou ich grafov.

Veta 6. *Nech (X, ρ) je metrický priestor. Označme \mathcal{K} systém všetkých neprázdnych, kompaktných podmnožín X . Potom (\mathcal{K}, ρ_H) je metrický priestor.*

Dôkaz. Jednoduchým dosadením do definície a z nezápornosti metriky dostávame pre $A, B \subset X$ neprázdne $\rho_H(A, B) = \rho_H(B, A) \geq 0$.

Nech $\rho_H(A, B) = 0$. Potom pre všetky $x \in A$ je $\rho(x, B) = 0$ a pre všetky $x \in B$ je $\rho(x, A) = 0$. Takže $A \subset \overline{B}$ a $B \subset \overline{A}$. Keďže A, B sú uzavreté, dostávame $A \subset \overline{B} \subset B \subset \overline{A} \subset A$ a teda $A = B$.

Nech A, B, C sú neprázdne podmnožiny (X, ρ) a nech $a \in A, b \in B$ a $c \in C$ potom z trojuholníkovej nerovnosti platí: $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$. Ďalej z definície vzdialenosti bodu od množiny platí: $\rho(a, C) \leq \rho(a, c)$, čím dostávame $\rho(a, C) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$, z čoho infimom cez $c \in C$ dostávame $\rho(a, C) \leq \rho(a, b) + \rho(b, C) \leq \rho(a, b) + \rho_H(B, C)$, kde posledná nerovnosť vyplýva z definície ρ_H . Infimom cez $b \in B$ a použitím $\rho(a, B) \leq \rho_H(A, B)$ dostávame $\rho(a, C) \leq \rho_H(A, B) + \rho_H(B, C)$ pre každé $a \in A$, z čoho vyplýva $\sup_{a \in A} \rho(a, C) \leq \rho_H(A, B) + \rho_H(B, C)$. Analogickým postupom dokážeme, že $\sup_{c \in C} \rho(c, A) \leq \rho_H(A, B) + \rho_H(B, C)$ a získavame, že pre každé $A, B, C \subset X$ neprázdne platí: $\rho_H(A, C) \leq \rho_H(A, B) + \rho_H(B, C)$.

Zostáva dokázať, že na množine všetkých kompaktných podmnožín X je ρ_H konečná. Ak $A, B \subset X$ sú neprázdne kompaktné množiny, potom existujú $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ také, že $A, B \subset B(x, n)$ a teda pre $a \in A$ a $b \in B$ platí $\rho(a, b) \leq 2n$ z čoho $\rho_H(A, B) \leq 2n$. \square

Z dôkazu je zrejmé, že ρ_H je metrikou na každom systéme neprázdnych, uzavrených podmnožín (X, ρ) na ktorom je konečná a tiež, že ak Hausdorffova vzdialenosť dvoch množín je nula, tak každá z týchto množín je podmnožinou uzáveru tej druhej, teda môžeme hovoriť aspoň čiastočne o konvergencii.

Veta 7. *Nech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ sú metrické priestory, nech $f_n, f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ sú funkcie a nech $f_n \rightrightarrows f$ na (X, ρ) . Potom $\rho_H(G_{f_n}, G_f) \rightarrow 0$.*

Dôkaz. Nech máme dané $\varepsilon > 0$. Z rovnomernej konvergencie funkcií nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \geq n_0$ a každé $x \in X$ platí: $\sigma(f_n(x) - f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pre $x \in X$ je $\rho_2((x, f_n(x)), G_f) \leq \rho_2((x, f_n(x)), (x, f(x))) < \frac{\varepsilon}{2}$, z čoho vyplýva $\sup_{y \in G_{f_n}} \rho_2(y, G_f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Podobne dostávame $\sup_{y \in G_f} \rho_2(y, G_{f_n}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ a teda $\rho_H(G_{f_n}, G_f) < \varepsilon$ pre každé $n \geq n_0$. \square

Obdobné tvrdenie všeobecne neplatí ak zameníme rovnomernú konvergenciu za lokálne rovnomernú, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad. *Za $f_n, f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ zvolíme funkcie $f_n(x) = x^n$ a f ako identicky nulovú funkciu. Potom f_n konvergujú lokálne rovnomerne k f a pritom pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\rho_H(G_{f_n}, G_f) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_2\left(\left(1 - \frac{1}{k}, \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n\right), G_f\right) = 1$.*

Existujú dve rôzne reálne funkcie, f, g , pre ktoré platí $\rho_H(G_f, G_g) = 0$. Túto vlastnosť majú napríklad funkcie $f(x) = g(x) = \sin \frac{1}{x}$ pre $x \neq 0$, $f(0) = 0, g(0) = 1$. Pre toto nie je možné bez dodatočných predpokladov na funkcie f_n a f implikáciu vo vete (7) obrátiť (ak uvažujeme $\varphi_n(x) = f(x)$ a $\varphi(x) = g(x)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, tak zjavne $\rho_H(G_{\varphi_n}, G_{\varphi}) \rightarrow 0$ a $\varphi_n \not\rightrightarrows \varphi$ takže nemôžu konvergovať ani rovnomerne). Nasledujúce tvrdenie ukazuje, že toto nenastáva, ak je f spojité zobrazenie.

Tvrdenie 8. *Nech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ sú metrické priestory a nech f je spojité zobrazenie z X do Y . Potom pre každé $g : X \rightarrow Y$ platí: ak $\rho_H(G_f, G_g) = 0$ tak $f = g$ na X .*

Dôkaz. Nech existuje $g : X \rightarrow Y$ také, že $\rho_H(G_f, G_g) = 0$ a pre $x_0 \in X$ platí $f(x_0) \neq g(x_0)$. Označme $\varepsilon := \sigma(f(x_0), h(x_0))$. Keďže f je spojité, existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in B_\rho(x_0, \delta)$ je $\sigma(f(x) - f(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Potom $\rho_2((x_0, g(x_0)), G_f) \geq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta\right\} > 0$ čo je spor s $\rho_H(G_f, G_g) = 0$. \square

Ako ukáže nasledujúci príklad, ani predpoklad spojitosti zobrazení f_n a f nestačí na to aby sme mohli implikáciu vo vete 7 obrátiť.

Príklad. *Nech $f(x) = x^2$ a $f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2$ pre $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ a pre každé $x \in \mathbb{R}$ je $\rho_2\left(\left(x, x^2\right), G_{f_n}\right) \leq \rho_2\left(\left(x, x^2\right), \left(x + \frac{1}{n}, x^2\right)\right) = \frac{1}{n}$. Ďalej pre $x \in \mathbb{R}$ je*

$$\rho_2\left(\left(x, \left(x - \frac{1}{n}\right)^2\right), G_f\right) \leq \rho_2\left(\left(x, \left(x - \frac{1}{n}\right)^2\right), \left(x - \frac{1}{n}, \left(x - \frac{1}{n}\right)^2\right)\right) = \frac{1}{n}.$$

Takže $\rho_H(G_{f_n}, G_f) \leq \frac{1}{n}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Na druhej strane ale f_n nekonvergujú rovnomerne k f , pretože ak pre $n \in \mathbb{N}$, a $\varepsilon > 0$ zvolíme $x > \frac{n\varepsilon}{2} + \frac{1}{2n}$, tak platí: $|f_n(x) - f(x)| = \left|x^2 - \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2} - x^2\right| = \frac{1}{n} \left|\frac{1}{n} - 2x\right| > \varepsilon$.

Následujúca veta ukazuje, že implikáciu môžeme otočiť za predpokladu rovnomernej spojitosti limitnej funkcie.

Veta 9. *Nech $(X, \rho), (Y, \sigma)$ sú metrické priestory, nech $f_n, f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ sú funkcie a nech f je rovnomerne spojitá. Nech $\rho_H(G_{f_n}, G_f) \rightarrow 0$. Potom $f_n \rightrightarrows f$.*

Dôkaz. Nech máme dané $\varepsilon > 0$. Nájdeme $\delta > 0$ také, že pre $x, y \in X$, $\rho(x, y) < \delta$ platí: $\sigma(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\delta < \varepsilon$. Ďalej nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pre $n \geq n_0$ platilo: $\rho_H(G_{f_n}, G_f) < \frac{\delta}{2}$. Zvoľme $n \in \mathbb{N}$ a $x \in X$ ľubovoľné. Potom existuje $y \in X$ také, že $\rho_2((x, f_n(x)), (y, f(y))) \leq \rho_H(G_{f_n}, G_f) < \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Naviac platí $\rho_2((x, f_n(x)), (y, f(y))) \geq \rho(x, y)$, čo dáva $\sigma(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, a $\frac{\varepsilon}{2} > \rho_2((x, f_n(x)), (y, f(y))) \geq \sigma(f_n(x), f(y))$. To nám dáva $\sigma(f_n(x) - f(x)) \leq \sigma(f_n(x), f(y)) + \sigma(f(y), f(x)) < \varepsilon$ a teda f_n konvergujú rovnomerne k f . \square

Veta 10. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pre neklesajúcu funkciu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ označme

$$A(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b), f(x_-) \leq y \leq f(x_+)\} \cup \\ \{(a, y) \in \mathbb{R}^2 : f(a) \leq y \leq f(a_+)\} \cup \\ \{(b, y) \in \mathbb{R}^2 : f(b_-) \leq y \leq f(b)\}.$$

Nech $f, f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sú neklesajúce funkcie. Potom je ekvivalentné:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ak x je bodom spojitosti f , alebo krajným bodom intervalu $[a, b]$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ pre všetky x z nejakej hustej množiny $W \subset [a, b]$, obsahujúcej a a b ;
3. $\rho_H(A(f_n), A(f)) \rightarrow 0$.

Dôkaz. 1. implikuje 2. pretože množina bodov spojitosti neklesajúcej funkcie je hustá.

Nech platí 2. a nech máme dané $\varepsilon > 0$. Pre $x \in (a, b)$ nájdeme $x_l \in [x - \frac{\varepsilon}{4}, x) \cap W$, $x_r \in (x, x + \frac{\varepsilon}{4}] \cap W$ a $n_0(x) \in \mathbb{N}$ také, že pre $n \geq n_0(x)$ je $|f_n(x_l) - f(x_l)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|f_n(x_r) - f(x_r)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Označme $\delta_x := \min\{x - x_l, x_r - x\}$. Pre a definujeme $a_l = a$, nájdeme $n_0(a)$ a definujeme $\delta_a = a_r - a$, pre b definujeme zasa $b_r := b$ a $n_0(b)$ a δ_b zvolíme obdobne ako pre a . Keďže $[a, b]$ je kompaktný a systém $\{B(x, \delta_x) : x \in [a, b]\}$ tvorí jeho otvorené pokrytie, existujú x_1, x_2, \dots, x_k také, že $\bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta_{x_i}) = [a, b]$. Položme $n_0 := \max_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \{n_0(x_i)\}$.

Nech $n \geq n_0$ a $(x_0, y_0) \in A(f_n)$. Potom existuje $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ také, že $x_0 \in B(x_i, \delta_{x_i})$. Nech x_l, x_r sú príslušné voľby $n_0(x_i)$ a δ_{x_i} . Potom z toho, že f_n je neklesajúca a voľby x_l, x_r dostávame nerovnosť

$$f(x_l) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f_n(x_l) \leq f_n(x_0) \leq f_n(x_r) \leq f(x_r) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.0.1)$$

Keďže $x_l \leq x_i - \delta_{x_i} < x_i + \delta_{x_i} \leq x_r$, tak $x_0 \in [x_l, x_r]$ a $y_0 \in [f_n(x_l), f_n(x_r)]$. Z definície $A(f)$ je zjavné, že pre $y \in [f(x_l), f(x_r)]$ existuje $x \in [x_l, x_r]$ také, že $(x, y) \in A(f)$ (stačí voliť x také, že $f(x_-) \leq y \leq f(x_+)$, čo môžeme na základe toho, že funkcia neklesá). Takže z nerovnosti 2.0.1 k y_0 existuje $y \in [f(x_l), f(x_r)]$ také, že $|y_0 - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom zjavne $\rho_2((x_0, y_0), A(f)) \leq \rho_2((x_0, y_0), (x, y)) \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon$ pretože $x, x_0 \in [x_l, x_r]$.

Nech $n \geq n_0$ a $(x_0, y_0) \in A(f)$. Nájdeme i, x_l, x_r ako v predošlom prípade. Tentokrát použijeme nerovnosť

$$f_n(x_l) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x_l) \leq f(x_0) \leq f(x_r) \leq f_n(x_r) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ktorá vznikla podobne ako predošlá nerovnosť. Použitím rovnakej úvahy ako minule dostávame $\rho_2((x_0, y_0), A(f_n)) < \varepsilon$, z čoho už vyplýva: $\rho_H(A(f), A(f_n)) < \varepsilon$ pre všetky $n \geq n_0$.

Nech teraz platí podmienka 3. Nech $x \in (a, b)$ je bodom spojitosti funkcie f a $f_n(x)$ nekonvergujú k $f(x)$.

Potom nájdeme $\varepsilon > 0$ také, že pre každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n \geq n_0$ také, že $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$. Zo spojitosti funkcie f v x nájdeme $\delta > 0$ také, že $\frac{\varepsilon}{2} > \delta$ a pre $y \in (x - \delta, x + \delta)$ platí: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Keďže $\rho_H(A(f_n), A(f))$ konverguje k nule, nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ je $\rho_H(A(f_n), A(f)) < \delta$. Nájdeme $n_1 > n_0$ také, že $|f_{n_1}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$. Potom $A(f) \cap [x - \delta, x + \delta] \times \mathbb{R} \subset [x - \delta, x + \delta] \times [f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}]$, z čoho $\rho_2((x, f_{n_1}(x)), A(f))$ sa buď nadobúda v bode $A(f)$ mimo $[x - \delta, x + \delta] \times \mathbb{R}$, alebo niekde v $[x - \delta, x + \delta] \times [f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}]$. Od oboch týchto množín je ale vzdialenosť bodu $(x, f_{n_1}(x))$ aspoň δ , z čoho $\rho_H(A(f_{n_1}), A(f)) \geq \rho_2((x, f_{n_1}(x)), A(f)) \geq \delta$, čo je spor s voľbou n_0 . Takže $(f_n(x))$ konverguje k $f(x)$, ak x je bodom spojitosti funkcie f .

Vyšetríme teraz konvergenciu $(f_n(a))$. Ak by množina $\{f_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ nebola obmedzená, dostávame spor s $\rho_H(A(f_n), A(f)) \rightarrow 0$, pretože $A(f)$ je obmedzená množina, a $(a, f_n(a)) \in A(f_n)$ by mali od tejto množiny ľubovoľne veľkú vzdialenosť pre vhodné $n \in \mathbb{N}$. Takže $\{f_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ je obmedzená množina a môžeme z nej vybrať konvergentnú podpostupnosť $\{f_{n_k}(a)\}_{k \in \mathbb{N}}$. Označme limitu tejto postupnosti ako $c \in \mathbb{R}$.

Z $\rho_H(A(f_n), A(f)) \rightarrow 0$ dostávame $\rho_2((a, c), A(f)) = 0$, inak nájdeme $k_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $k \geq k_0$ je $|f_{n_k}(a) - c| < \frac{\delta}{2}$ a zároveň $\rho_H(A(f), A(f_{n_k})) < \frac{\delta}{2}$. Potom ale z trojuholníkovej nerovnosti dostávame

$$\rho_2((a, f_{n_k}(a)), A(f)) \geq \rho_2((a, c), A(f)) - \rho_2((a, c), A(f)) \geq \frac{\delta}{2}$$

a zároveň $\rho_2((a, f_{n_k}(a)), A(f)) \leq \rho_H(A(f), A(f_{n_k})) < \frac{\delta}{2}$, čo je spor. Keďže $A(f)$ je uzavretá množina (ide o doplnenie grafu funkcie f o zvislé usečky tam, kde je f nespojitá, podrobný dôkaz uzavretosti $A(f)$ je podobný dôkazu uzavretosti množiny G z nasledujúcej vety, ktorý je uvedený v jednej z poznámok za touto vetou), dostávame $(a, c) \in A(f)$, z čoho $c \in [f(a), f(a_+)]$. Ak by $c - f(a) = \delta > 0$ tak nájdeme $k_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $k \geq k_0$ je $|f_{n_k}(a) - c| < \frac{\delta}{2}$, teda $f_{n_k}(a) - f(a) \geq \frac{\delta}{2}$, z čoho $\rho_H(A(f), A(f_{n_k})) \geq \rho_2((a, f(a)), A(f_{n_k})) \geq \frac{\delta}{2}$ pre všetky $k \geq k_0$ čo je spor s $\rho_H(A(f_n), A(f)) \rightarrow 0$. Takže $c = f(a)$ je jediný hromadný bod obmedzenej množiny $\{f_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ a teda aj limitou postupnosti $f_n(a)$.

Pre postupnosť $f_n(b)$ dostaneme požadovaný záver analogicky. \square

V prvom príklade v tejto kapitole sme ukázali, že tvrdenie neplatí ak definičný obor funkcií je otvorený interval. Nasledujúci príklad ukáže, že tvrdenie všeobecne neplatí ani bez predpokladu monotónie.

Príklad. Nech f je identicky nulová na $[0, 1]$ a nech $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sú definované nasledovne

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq \frac{1}{n}; \\ 2 - 2nx & , x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]; \\ 2nx & , x \in [0, \frac{1}{2n}]. \end{cases}$$

Potom f, f_n sú spojité na $[0, 1]$, takže $A(f) = G_f$ a $A(f_n) = G_{f_n}$. Ďalej pre každé $x \in [0, 1]$ $f_n(x)$ konverguje k $f(x)$ a konečne $\rho_H(G_f, G_{f_n}) = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Kapitola 3

Gibbsov jav

V tejto kapitole formulujeme Gibbsov jav ako približovanie sa grafov čiastočných súčtou Fourierovej rady k mierne pozmenenému grafu funkcie príslušnej tejto rade. Najprv ale pre zjednodušenie uvedieme tvrdenie, ktoré je trochu upravenou verziou vety 10.

Veta 11. *Nech $M \subset \mathbb{R}$ a existuje $\varepsilon_0 > 0$ také, že pre $x, y \in M$ rôzne, je $|x - y| > \varepsilon_0$. Nech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je taká funkcia, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $x < y \in \mathbb{R}$ splňajúce $[x, y] \cap M = \emptyset$ platí: ak $|x - y| < \delta$, potom $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ a nech f nie je spojitá v bodoch množiny M . Nech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sú spojité. Nech pre každé $c \in M$ sú a_c, b_c reálne čísla splňajúce $a_c \leq \min \{f(c_+), f(c_-)\} \leq \max \{f(c_+), f(c_-)\} \leq b_c$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

1. *Pre množinu $G := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \setminus M\} \cup \{(c, y) : c \in M, a_c \leq y \leq b_c\}$ platí: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_H(G, G_{f_n}) = 0$.*

2. *Pre každé $\varepsilon > 0$ platí:*

(a) *$f_n \rightrightarrows f$ na množine $F_\varepsilon := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{c \in M} (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$,*

(b) *existuje $\delta > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $c \in M$ a $n \geq n_0$ a pre všetky $x \in (c - \delta, c + \delta)$ je $a_c - \varepsilon < f_n(x) < b_c + \varepsilon$,*

(c) *pre každé $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre $n \geq n_0$ a $c \in M$ existujú $x', x'' \in (c - \delta, c + \delta)$ také, že $|f_n(x') - a_c| < \varepsilon$, $|f_n(x'') - b_c| < \varepsilon$.*

Poznámka. Prvý predpoklad na funkciu f môžeme preformulovať napríklad následovne: f je na každej komponente priestoru $\mathbb{R} \setminus M$ rovnomerne spojitá, a to dokonca rovnako (čiže δ z definície rovnomernej spojitosti je pre dané $\varepsilon > 0$ rovnaké pre všetky komponenty).

Poznámka. Nech $c \in M$ a $\varepsilon > 0$. Nájdeme $\delta > 0$ také, že pre x, y z rovnakej komponenty $\mathbb{R} \setminus M$ platí: ak $|x - y| < \delta$, tak $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $(c - \delta, c) \cap M = \emptyset$. Nech $x_n \nearrow c$. Nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $|x_n - c| < \delta$ pre $n \geq n_0$. Potom x_n, x_m sú pre $n, m \geq n_0$ v rovnakej komponente $\mathbb{R} \setminus M$ a teda $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Takže $f(x_n)$ je Cauchyovská postupnosť v úplnom priestore a teda konverguje k $y \in \mathbb{R}$. Potom nájdeme $n_1 \in \mathbb{N}$ také, že $n_1 \geq n_0$ a $|f(x_{n_1}) - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pre $x \in (c - \delta, c)$ potom platí: $|f(x) - y| \leq |f(x) - f(x_{n_1})| + |f(x_{n_1}) - y| < \varepsilon$ a teda $f(c_-) = y$. Analogicky by sme dokázali, že f má v bode c aj druhú jednostrannú limitu a

teda predpoklady na a_c a b_c majú zmysel. Tiež to znamená, že funkcia f má v každom bode \mathbb{R} vlastné jednostranné limity (pre body z $\mathbb{R} \setminus M$ dostávame zo spojivosti) a špeciálne, že v bodoch množiny M má funkcia f nespojivosti typu skok (t.j. pravá a ľavá jednostranná limita existuje, ale nerovnej sa).

Poznámka. Nech $(x_n, y_n) \in \{(c, y) : c \in M, a_c \leq y \leq b_c\}$ je konvergentná postupnosť. Potom konverguje po zložkách, teda existujú $x, y \in \mathbb{R}$ také, že $x_n \rightarrow x$ a $y_n \rightarrow y$. Keďže $[x - 1, x + 1]$ je kompaktná množina, je $M \cap [x - 1, x + 1]$ konečná množina, a teda existuje $\delta > 0$ také, že $M \cap [x - \delta, x + \delta] \subset \{x\}$. Ďalej existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre $n \geq n_0$ je $|x_n - x| < \delta$ a teda $x \in M$ a pre $n \geq n_1$ je $x_n = x$. Potom pre $n \geq n_0$ je $y_n \in [a_x, b_x]$, čo je uzavretá množina, teda $y \in [a_x, b_x]$. Čiže $(x, y) \in \{(c, y) : c \in M, a_c \leq y \leq b_c\}$ a táto množina je teda uzavretá.

Nech $(x, y) \in \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \setminus M\}}$. Nech x_n je postupnosť reálnych čísel spĺňajúca $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y)$. Ak $x \notin M$, tak je bodom spojivosti a teda $y = f(x)$ a $(x, y) \in \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \setminus M\}$. Nech $x \in M$. Potom od určitého n_0 sú buď všetky x_n väčšie ako x alebo sú všetky x_n menšie ako x , inak dostávame spor s tým, že $f(x_n)$ konverguje a $f(x_+) \neq f(x_-)$. Potom z existencie jednostranných limit dostávame, že y je buď $f(x_+)$ alebo $f(x_-)$. Takže z voľby a_c, b_c platí: $\overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \setminus M\}} \subset G$. Takže

$$\begin{aligned} \overline{G} &= \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \setminus M\} \cup \{(c, y) : c \in M, a_c \leq y \leq b_c\}} \\ &= \overline{\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \setminus M\}} \cup \{(c, y) : c \in M, a_c \leq y \leq b_c\} \subset G \end{aligned}$$

kde sme pri druhej rovnosti použili $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ a uzavretosť druhej množiny. Keďže z definície uzáveru platí: $\overline{G} \supset G$, dostávame $\overline{G} = G$ a teda G je uzavretá množina.

Dôkaz. Ak $M = \emptyset$, tak f je rovnomerne spojitá a tvrdenie platí podľa viet z predošlej kapitoly. Nech $M \neq \emptyset$.

Nech platí (1) a nech máme dané $\varepsilon > 0$.

Nech je dané $\eta > 0$. Z predpokladov na f nájdeme δ kladné, menšie ako ε také, že pre každé $x, y \in F_\varepsilon$ spĺňajúce $|x - y| < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \frac{\eta}{2}$ (z predpokladu $\varepsilon > \delta$ a $x, y \in F_\varepsilon$ platí: pre $x < y$, $[x, y] \cap M = \emptyset$). Zvoľme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\rho_H(G, G_{f_n}) < \min\{\frac{\eta}{2}, \frac{\delta}{2}\}$ pre $n \geq n_0$. Pre ľubovoľné $x \in F_\varepsilon$ a $n \geq n_0$ potom platí: $\frac{\delta}{2} \geq \rho_2((x, f_n(x)), G)$. Keďže G je uzavretá množina, existuje bod $(y, z) \in G$ taký, že $\rho_2((x, f_n(x)), G) = \rho_2((x, f_n(x)), (y, z)) \geq |x - y|$ a teda $y \notin M$, z čoho dostávame, že $z = f(y)$ a x, y sú v rovnakej komponente súvislosti množiny $\mathbb{R} \setminus M$, čo dáva $|f(x) - f(y)| < \frac{\eta}{2}$. Zároveň platí: $\frac{\eta}{2} \geq \rho_2((x, f_n(x)), G)$, a teda $\frac{\eta}{2} \geq \rho_2((x, f_n(x)), (y, f(y))) \geq |f_n(x) - f(y)|$. Dohromady dostávame: $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(y)| + |f(y) - f(x)| < \eta$ pre každé $x \in F_\varepsilon$ a $n \geq n_0$. Takže pre každé $\varepsilon > 0$ platí: $f_n \rightrightarrows f$ na F_ε .

Zvoľme $\delta > 0$ tak, aby pre x, y v rovnakej komponente $\mathbb{R} \setminus M$ spĺňajúce $|x - y| < \delta$, platilo: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$, $\delta < \varepsilon$ a $\delta < \varepsilon_0$. Zvoľme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pre každé $n \geq n_0$ platilo: $\rho_H(G, G_{f_n}) \leq \frac{\delta}{2}$. Nech máme $c \in M$, $x \in (c - \delta, c + \delta)$ a $n \geq n_0$. Potom $\rho_2((x, f_n(x)), G) < \frac{\delta}{2}$, a teda existuje bod $(y, z) \in G$ taký, že $\rho_2((x, f_n(x)), (y, z)) < \frac{\delta}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Ak $y = c$, tak $z \in [a_c, b_c]$ a $|f_n(x) - z| < \varepsilon$, čiže $a_c - \varepsilon < f_n(x) < b_c + \varepsilon$. Nech $y < c$. Potom $z = f(y)$ a pre každé $w \in (y, c)$ je $|y - w| < \delta$, pretože $w \in (y, c) \subset (c - \delta, c) \subset (c - \varepsilon_0, c) \subset \mathbb{R} \setminus M$ sú y, w v rovnakej komponente $\mathbb{R} \setminus M$ a teda $|f(y) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Nájdeme $w \in (y, c)$ také, že $|f(c_-) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{4}$ a dostávame: $|f(y) - f(c_-)| \leq |f(y) - f(w)| +$

$|f(w) - f(c_-)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže $|f_n(x) - f(c_-)| \leq |f_n(x) - f(y)| + |f(y) - f(c_-)| < \varepsilon$, kde sme použili $|f_n(x) - z| < \varepsilon$ a $f(y) = z$. Keďže $f(c_-) \in [a_c, b_c]$, dostávame $a_c - \varepsilon < f_n(x) < b_c + \varepsilon$. Pre $y > 0$ dokážeme analogicky. Takže platí aj podmienka (2b).

Nech máme dané $\delta > 0$. Nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $n \geq n_0$ platí: $\rho_H(G, G_{f_n}) < \min\{\delta, \varepsilon\}$. Nech $c \in M$ a $n \geq n_0$. Potom z $\rho_2((c, a_c), G_{f_n}) < \min\{\delta, \varepsilon\}$ existuje bod $x' \in \mathbb{R}$ taký, že $\rho_2((c, a_c), (x, f_n(x))) < \min\{\delta, \varepsilon\}$ a teda $|x - c| < \delta$ a $|f_n(x) - a_c| < \varepsilon$. Takže x je hľadané x' , x'' nájdeme analogicky z $\rho_2((c, b_c), G_{f_n}) < \min\{\delta, \varepsilon\}$. Takže sú splnené všetky tvrdenia v (2).

Nech platí druhá časť a nech máme dané $\varepsilon > 0$. Zvoľme $\delta_1 > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $c \in M$ a $n \geq n_0$ a pre všetky $x \in (c - \delta_1, c + \delta_1)$ je $a_c - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < b_c + \frac{\varepsilon}{2}$. Zvoľme $\delta_2 > 0$ také, že pre x, y v rovnakej komponente $\mathbb{R} \setminus M$ spĺňajúce $|x - y| < \delta_2$ platí: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4}$ a nech $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\varepsilon}{16}, \varepsilon_0\}$. Keďže $f_n \rightrightarrows f$ na F_δ , existuje $n_1 \geq n_0$ také, že pre $n \geq n_1$ a $x \in F_\delta$ je $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a teda aj

$$\rho_2((x, f(x)), G_{f_n}) \leq \rho_2((x, f(x)), (x, f_n(x))) = |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

a

$$\rho_2((x, f_n(x)), G) \leq \rho_2((x, f(x)), (x, f_n(x))) = |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nech teraz $x \in (c - \delta, c + \delta)$ pre nejaké $c \in M$ a $n \geq n_1$. Potom z $a_c - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) < b_c + \frac{\varepsilon}{2}$ existuje $z \in [a_c, b_c]$ také, že $|f_n(x) - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ a teda

$$\rho_2((x, f_n(x)), G) \leq \rho_2((x, f_n(x)), (c, z)) \leq |x - c| + |f_n(x) - z| < \frac{9}{16}\varepsilon.$$

Nech $(x, y) \in G$, $x \in (c - \delta, c + \delta)$ pre nejaké $c \in M$. Ak $x < c$, tak existuje $x < y < c$ také, že $|f(y) - f(c_-)| < \frac{\varepsilon}{4}$ potom, keďže $|x - y| \leq \delta$ a x, y sú v rovnakej komponente $\mathbb{R} \setminus M$, dostávame $|f(x) - f(c_-)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(c_-)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Analogicky dostávame pre $x > c$ nerovnosť $|f(x) - f(c_+)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže, z $f(c_-), f(c_+) \in [a_c, b_c]$ dostávame $f(x) \in [a_c - \frac{\varepsilon}{2}, b_c + \frac{\varepsilon}{2}]$ pre $x \in (c - \delta, c + \delta)$, $x \neq c$. Keďže pre $x = c$ je $y \in [a_c, b_c]$, máme $y \in [a_c - \frac{\varepsilon}{2}, b_c + \frac{\varepsilon}{2}]$. Nech máme $n_2 \geq n_1$ také, že pre $n \geq n_2$ a $c \in M$ existujú $x', x'' \in (c - \delta, c + \delta)$ také, že $|f_n(x') - a_c| < \frac{\varepsilon}{4}$ a $|f_n(x'') - b_c| < \frac{\varepsilon}{4}$. Nech máme $n \geq n_2$ a tomuto n príslušné x', x'' . Keďže f_n je spojitá, musí nadobúdať medzi x' a x'' všetky hodnoty z intervalu $[a_c + \frac{\varepsilon}{4}, b_c - \frac{\varepsilon}{4}]$ a teda k y nájdeme $z \in [a_c + \frac{\varepsilon}{4}, b_c - \frac{\varepsilon}{4}]$ také, že $|y - z| \leq \frac{3}{4}\varepsilon$, k tomuto z nájdeme $w \in (c - \delta, c + \delta)$ také, že $f_n(w) = z$. Potom

$$\rho_2((x, y), G_{f_n}) \leq \rho_2((x, y), (w, z)) \leq |x - z| + |y - z| < \frac{7}{8}\varepsilon.$$

Spojením predchádzajúcich nerovností dostávame: $\sup_{(x,y) \in G_{f_n}} \rho_2((x, y), G) \leq \frac{9}{16}\varepsilon < \varepsilon$ a $\sup_{(x,y) \in G} \rho_2((x, y), G_{f_n}) \leq \frac{7}{8}\varepsilon < \varepsilon$ pre každé $n \geq n_2$. Takže dostávame: $\rho_H(G_{f_n}, G) \rightarrow 0$. \square

Nasledujúce tri tvrdenia sú dokázané napríklad v [Jarník(1955)] (postupne ide o vetu 181, 182 a 185).

Veta 12. (Rieman) Nech $\varphi \in L(a, b)$ pre $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Potom pre $a \leq \alpha \leq b$ a $a \leq \beta \leq b$ platí:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \cos(\mu x) dx = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \sin(\mu x) dx = 0.$$

Navyše konvergencia je rovnomerná vzhľadom k $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$.

Veta 13. Nech $f \in P(2\pi)$. Zvoľme ľubovoľné $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ a položme

$$s_m(x, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+2t) + f(x-2t)) \frac{\sin[(2m+1)t]}{\sin t} dt.$$

Potom $\lim_{m \rightarrow \infty} (s_m(x) - s_m(x, \delta)) = 0$ a to rovnomerne pre každé $x \in \mathbb{R}$ a pevné δ .

Veta 14. (Dirichlet-Jordan) Nech $f \in P(2\pi)$ je reálna funkcia s konečnou variáciou na intervale $[a, b]$. Potom platí:

1. Pre každé $x \in (a, b)$ je Fourierova rada funkcie f v bode x konvergentná a ma súčet $\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$.
2. Ak f je spojitá na $[a, b]$, tak je jej Fourierova rada lokálne rovnomerne konvergentná na (a, b) .

Veta 15. Nech $f \in P(2\pi)$ je reálna funkcia s konečnou variáciou na $[-\pi, \pi]$. Nech množina bodov nespojitosti funkcie f je lokálne konečná. Nech $s_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ značí m -ty čiastočný súčet Fourierovej rady príslušnej funkcie f . Pre $a, b \in \mathbb{R}$ označme $\langle a, b \rangle$ uzavretý interval s krajnými bodmi a a b . Ďalej položme $k := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$, $d_x = (f(x_+) - f(x_-)) a$

$$G := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left\langle \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} + kd_x, \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} - kd_x \right\rangle \right\}.$$

Potom platí: $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_H(G, G_{s_m}) = 0$.

Poznámka. Množina G v tvrdení vety je špeciálnym prípadom množiny G vo vete 11 pretože ak x je bodom spojitosti f dostávame $d_x = 0$ a $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = f(x)$. Za a_c, b_c pre $c \in M$ potom položíme vhodnú z dvojice $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} + kd_x, \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} - kd_x$.

Dôkaz. Ak $M = \emptyset$ tak f je spojitá funkcia a teda z toho, že je periodická a z Dirichletovej-Jordanovej vety platí: $s_m \rightrightarrows f$ na \mathbb{R} . Ďalej $G = G_f$ a podľa vety v predošlej kapitole platí: $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_H(G, G_{s_m}) = 0$.

Nech ďalej $M \neq \emptyset$.

Keďže ani čiastočné súčty Fourierovej rady ani množina G sa nezmenia, ak zmeníme f na lokálne konečnej množine, môžeme predpokladať, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$.

Označme M množinu bodov nespojitosti funkcie f . Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ existujú $x_n, y_n \in M$ rôzne také, že $|x - y| \leq \frac{1}{n}$. Pre $n \in \mathbb{N}$ nájdeme k_n také, že $0 < x_n - 2k_n\pi < \pi$. Potom $-2\pi < y_n - 2k_n\pi < 2\pi$. Označme $\dot{x}_n := x_n - 2k_n\pi$ a $\dot{y}_n := y_n - 2k_n\pi$. Potom z toho, že f je 2π -periodická sú $\dot{x}_n, \dot{y}_n \in M$ a $|\dot{x}_n - \dot{y}_n| < \frac{1}{n}$. Potom ale musí byť množina $[-2\pi, 2\pi] \cap M$ nekonečná, pretože v nej existujú body o ľubovoľne malej vzdialenosti. To je spor s tým, že M je lokálne konečná. Takže množina M splňa predpoklady vety 11.

Nech K je komponenta $\mathbb{R} \setminus M$ potom K je otvorený a obmedzený interval (obmedzený, pretože ak $x \in M$ tak $x + 2\pi \in M$ a teda $\text{diam } K \leq 2\pi$, interval pretože je to súvislá podmnožina \mathbb{R} a otvorená je preto, lebo ak $x \in K$, tak

$\rho(x, M) = \delta > 0$, teda $(x - \delta, x + \delta) \subset K$, pretože to je súvislá množina s bodom v komponente K). Keďže f má v každom bode \mathbb{R} vlastné jednostranné limity, môžeme ju predefinovať tak, že $f|_{\overline{K}}$ je spojitá (stačí v krajných bodoch K položiť f rovné príslušnej jednostrannej limite). Potom $f|_{\overline{K}}$ je rovnomerne spojitá, pretože \overline{K} je kompaktná množina. Takže špeciálne $f|_K$ je rovnomerne spojitá (keďže K je otvorený interval, tak f bola rovnomerne spojitá na K aj pred predefinovaním). Nech K_1, \dots, K_n pre $n \in \mathbb{N}$ sú také komponenty $\mathbb{R} \setminus M$, že pre $x \in [-\pi, \pi] \cap \mathbb{R} \setminus M$ existuje $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, že $x \in K_i$ (keďže M je lokálne konečná množina, je týchto komponent skutočne konečne veľa).

Nech máme dané $\varepsilon > 0$. Z rovnomernej spojitosti f na K_i pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ nájdeme $\delta_i > 0$ také, že pre $x, y \in K_i$, $|x - y| < \delta_i$ platí: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Položme $\delta := \min\{\delta_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Nech x, y sú v rovnakej komponente $\mathbb{R} \setminus M$ a $|x - y| < \delta$. Nájdeme $k \in \mathbb{Z}$ také, že $x - 2k\pi \in [-\pi, \pi]$ a nech K_i je komponenta obsahujúca $x - 2k\pi$. Potom $y - 2k\pi \in K_i$, pretože aj komponenty sa periodicky opakujú. Ďalej $|x - 2k\pi - (y - 2k\pi)| = |x - y| < \delta \leq \delta_i$ a teda $\varepsilon > |f(x - 2k\pi) - f(y - 2k\pi)| = |f(x) - f(y)|$ a f spĺňa predpoklady vety 11. Funkcie s_m sú spojité z definície (ide o konečný súčet spojitých funkcií) takže tiež spĺňajú predpoklady vety 11.

Neskôr uvidíme, že $k > \frac{1}{2}$, nech $c \in M$ a $f(c_+) - f(c_-) > 0$. Potom

$$a_c = \frac{f(c_+) + f(c_-)}{2} - kd_c < \frac{f(c_+) + f(c_-)}{2} - \frac{f(c_+) - f(c_-)}{2} = f(c_-)$$

a

$$b_c = \frac{f(c_+) + f(c_-)}{2} + kd_c > \frac{f(c_+) + f(c_-)}{2} + \frac{f(c_+) - f(c_-)}{2} = f(c_+).$$

Podobne dostaneme pre $f(c_+) - f(c_-) > 0$ nerovnosti $a_c < f(c_-)$ a $b_c > f(c_+)$ (zachováваме $a_c < b_c$), teda aj a_c, b_c spĺňajú predpoklady vety 11.

Podľa Dirichlet-Jourdanovej vety na každom uzavretom intervale, neobsahujúcom bod nespojitosti konvergujú čiastočné súčty Fourierovej rady k funkcii rovnomerne a z periodicity funkcie ľahko dostávame, že pre každé $\varepsilon > 0$ platí: $f_n \rightrightarrows f$ na množine $F_\varepsilon := \mathbb{R} \setminus \bigcup_{c \in M} (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.

Zostáva dokázať, že čiastočné súčty spĺňajú aj podmienky (2b) a (2c) z vety (11). Predtým ale ešte vyšetříme priebeh funkcii s_m na okolí bodov nespojitosti funkcie f . Nech $c \in M$. Nech $\delta > 0$ je také, že f je spojitá na $(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$. Nech g je 2π -periodická funkcia spĺňajúca:

$$g_c(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & c - \pi < x < c, \\ 0 & x \in \{c, c + \pi\}, \\ \frac{1}{2} & c < x < c + \pi. \end{cases}$$

Označme $d := f(c_+) - f(c_-)$ a položme $h_c(x) := f(x) - d_c g_c(x)$. Potom h_c je spojitá funkcia na $(c - \delta, c + \delta)$, pretože

$$\lim_{x \rightarrow c_-} h_c(x) = f(c_-) + \frac{d}{2} = \frac{f(c_+) + f(c_-)}{2} = f(c_+) - \frac{d}{2} = \lim_{x \rightarrow c_+} h_c(x).$$

Pre $|\xi| \leq \frac{\delta}{2}$ platí:

$$\begin{aligned}
s_m \left(c + \xi, \frac{\delta}{4} \right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\delta}{4}} (f(c + \xi + 2t) + f(c + \xi - 2t)) \frac{\sin [(2m + 1)t]}{\sin t} dt \\
&= \frac{d}{\pi} \int_0^{\frac{\delta}{4}} (g_c(c + \xi + 2t) + g_c(c + \xi - 2t)) \frac{\sin [(2m + 1)t]}{\sin t} dt + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\delta}{4}} (h_c(c + \xi + 2t) + h_c(c + \xi - 2t)) \frac{\sin [(2m + 1)t]}{\sin t} dt \\
&= \frac{d}{\pi} \int_0^{\frac{\delta}{4}} \frac{1}{2} (\text{sign}(\xi + 2t) + \text{sign}(\xi - 2t)) \frac{\sin [(2m + 1)t]}{\sin t} dt \\
&\quad + s_m^{h_c} \left(c + \xi, \frac{\delta}{4} \right) \\
&= \frac{d}{\pi} \int_0^{\frac{\xi}{2}} \frac{\sin [(2m + 1)t]}{\sin t} dt + s_m^{h_c} \left(c + \xi, \frac{\delta}{4} \right).
\end{aligned}$$

Podľa vety (13) platí:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(s_m(c + \xi) - \frac{d}{\pi} \int_0^{\frac{\xi}{2}} \frac{\sin [(2m + 1)t]}{\sin t} dt - s_m^{h_c} \left(c + \xi, \frac{\delta}{4} \right) \right) = 0$$

a to rovnomerne pre $|\xi| \leq \frac{\delta}{2}$. Opätovným použitím tejto vety dostávame vzťah

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(s_m^{h_c}(c + \xi) - s_m^{h_c} \left(c + \xi, \frac{\delta}{4} \right) \right) = 0$$

rovnomerne pre $|\xi| \leq \frac{\delta}{2}$, kde $s_m^{h_c}(x)$ označuje m -ty čiastočný súčet Fourierovej rady funkcie h_c . Z Dirichletovej-Jordanovej vety vieme, že $s_m^{h_c} \rightrightarrows h_c$ na $[c - \frac{\delta}{2}, c + \frac{\delta}{2}]$ a dohromady dostávame

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(s_m(c + \xi) - \frac{d}{\pi} \int_0^{\frac{\xi}{2}} \frac{\sin [(2m + 1)t]}{\sin t} dt - h_c(c + \xi) \right) = 0 \frac{d}{2} \quad (3.0.1)$$

rovnomerne pre $|\xi| \leq \frac{\delta}{2}$.

Keďže $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$ je obmedzená funkcia na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a $\delta < \pi$ dostávame z Riemannovej vety

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d}{\pi} \int_0^{\frac{\xi}{2}} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) \sin [(2m + 1)t] dt = 0$$

rovnomerne pre $|\xi| \leq \frac{\delta}{2}$. Ďalej substitúciou $v = (2m + 1)t$ dostávame

$$\int_0^{\frac{\xi}{2}} \frac{\sin [(2m + 1)t]}{t} dt = \int_0^{m\xi} \frac{\sin v}{v} dv + \int_{m\xi}^{(m+\frac{1}{2})\xi} \frac{\sin v}{v} dv,$$

kde $\int_{m\xi}^{(m+\frac{1}{2})\xi} \frac{\sin v}{v} dv \rightrightarrows 0$ pre $|\xi| \leq \frac{\delta}{2}$. Položme $F(x) := \int_0^x \frac{\sin v}{v} dv$. Dosadením do (3.0.1) dostávame

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (s_m(c + \xi) - dF(m\xi) - h(c + \xi)) = 0,$$

a to rovnomerne pre $|\xi| \leq \frac{\delta}{2}$.

Vyšetríme priebeh funkcie F . Použitím substitúcie $v = -t$ a nepárnosti funkcie sínus dostávame

$$\begin{aligned} F(-x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{-x} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{-1}{\pi} \int_{-x}^0 \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(-v)}{-v} dv = \frac{-1}{\pi} \int_0^x \frac{\sin v}{v} dv = -F(x), \end{aligned}$$

takže F je nepárna funkcia, preto nám ju stačí vyšetrovať pre $x \geq 0$. Jej prvou deriváciou je funkcia $F'(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, jej druhá derivácia je v bodoch $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, nenulová a teda F ma lokálne extrémny práve v bodoch $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Z priebehu funkcie $\frac{\sin x}{x}$ zisťujeme, že F je rastúca na $(k\pi - \pi, k\pi)$ pre $k \in \mathbb{N}$ nepárne a klesajúca na $(k\pi - \pi, k\pi)$ pre $k \in \mathbb{N}$ párne. Pre $k \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left| \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right| = \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx > \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \left| \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right|.$$

Rovnosti platia, pretože $\frac{\sin x}{x}$ je na intervale $[k\pi, k\pi + \pi]$ buď nezáporná alebo nekladná. Nerovnosť dostávame zo vzťahu $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_{k\pi-\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} \right| dx = \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \left| \frac{\sin x}{x+\pi} \right| dx > \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ pre $x \geq 0$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je nepárne, potom máme: $\int_{k\pi}^{k\pi+2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{k\pi+\pi}^{k\pi+2\pi} \frac{\sin x}{x} dx < 0$ z predošlej nerovnosti a z toho, že $\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x} dx < 0$. Pre $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ párne z podobných dôvodov dostávame: $\int_{k\pi}^{k\pi+2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{k\pi+\pi}^{k\pi+2\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 0$. Keďže $F(k\pi + 2\pi) = F(k\pi) + \int_{k\pi}^{k\pi+2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ dostávame z predošlých výsledkov $F(\pi) > F(3\pi) > F(5\pi) > \dots$ a $0 = F(0) < F(2\pi) < F(4\pi) < \dots$. Ďalej platí: $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{2}$, ale výpočet tejto limity je pomerne zdĺhavý a preto ho nebudeme uvádzať (je to vypočítané napríklad v [Jarník(1955)], kapitola VIII, §4 príklad 1).

Takže F je v $x = 0$ nulová, potom rastie až po $x = \pi$, kde nadobúda svojho globálneho maxima, potom F s postupným klesaním amplitúdy osciluje okolo hodnoty $\frac{1}{2}$, ktorá je jej limitou. Pre x záporné dostávame priebeh F z toho, že ide o nepárnu funkciu.

Nech máme dané $\varepsilon > 0$. Zvoľme $\delta > 0$ tak, aby pre každé $c \in M$ bola f spojitá na $(c - \delta, c + \delta) \setminus \{c\}$ a pre $x \in (c - \delta, c)$ a $y \in (c, c + \delta)$ platilo: $|f(x) - f(c_-)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|f(y) - f(c_+)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (takéto δ existuje, pretože M je izolovaná množina a pre jednostranné limity nám z periodicity f stačí voliť najmenšie z konečne veľa δ pre jednotlivé limity). Nájdeme $m_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $c \in M$ a $|\xi| \leq \frac{\delta}{2}$ je $|s_m(c + \xi) - d_c F(m\xi) - h_c(c + \xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $m_0 \frac{\delta}{2} > \pi$. Nech $c \in M$, $m \geq m_0$ a $x \in (c, c + \frac{\delta}{2})$. Nech $\xi := x - c$ a $d_c > 0$, potom máme:

$$d_c F(m\xi) + h_c(c + \xi) - \frac{\varepsilon}{2} < s_m(c + \xi) < d_c F(m\xi) + h_c(c + \xi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

použijeme $-F(\pi) = F(-\pi) \leq F(m\xi) \leq F(\pi)$ a dostávame:

$$-d_c F(\pi) + h_c(c + \xi) - \frac{\varepsilon}{2} < s_m(c + \xi) < d_c F(\pi) + h_c(c + \xi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vieme: $h_c(c + \xi) = f(c + \xi) - d_c g_c(c + \xi) = f(c + \xi) - \frac{d_c}{2} = f(c + \xi) - \frac{f(c_+) - f(c_-)}{2}$
a $f(c_+) - \frac{\varepsilon}{2} < f(c + \xi) < f(c_+) + \frac{\varepsilon}{2}$. Použitím týchto vzťahov a $k = F(\pi)$ dostávame:

$$-d_c k + \frac{f(c_+) + f(c_-)}{2} - \varepsilon < s_m(c + \xi) < d_c k + \frac{f(c_+) + f(c_-)}{2} + \varepsilon.$$

Analogickým postupom dostávame podobné nerovnosti aj pre $x \in (c - \frac{\delta}{2}, c)$ a $d_c < 0$. Takže s_m spĺňajú aj predpoklad (2b).

Nech máme dané $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$. Nájdeme $\delta_0 > 0$ také, že pre každé $c \in M$ je f spojitá na $(c - \delta_0, c + \delta_0) \setminus \{c\}$, pre $x \in (c - \delta, c)$ a $y \in (c, c + \delta)$ platí: $|f(x) - f(c_-)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $|f(y) - f(c_+)| < \frac{\varepsilon}{2}$, a $\delta > \delta_0$. Nájdeme $m_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre každé $c \in M$ a $|\xi| \leq \frac{\delta_0}{2}$ je $|s_m(c + \xi) - d_c F(m\xi) - h_c(c + \xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $m_0 \frac{\delta_0}{2} > \pi$. Nech máme $c \in M$, $m \geq m_0$ a nech $\xi_0 > 0$ je také, že $m\xi_0 = \pi$. Chceme $|s_m(c + \xi_0) - f(c) - d_c k| < \varepsilon$. Z predpokladov je $f(c) = \frac{f(c_+) + f(c_-)}{2}$ a $k = F(\pi) = F(m\xi_0)$. Dosadením a jednoduchou úpravou dostávame:

$$|s_m(c + \xi_0) - f(c) - d_c k| = \left| s_m(c + \xi_0) + \frac{f(c_+) - f(c_-)}{2} - f(c_+) - d_c F(\pi) \right|.$$

Dosadíme za zlomok a použitím trojuholníkovej nerovnosti dostávame:

$$|s_m(c + \xi_0) - f(c) - d_c k| \leq \left| s_m(c + \xi_0) + \frac{d_c}{2} - f(c + \xi_0) - d_c F(\pi) \right| + |f(c + \xi_0) - f(c_+)|$$

Druhý člen môžeme odhadnúť $\frac{\varepsilon}{2}$ a $\frac{1}{2}$ nahradíme $g_c(c + \xi_0)$ a dostávame:

$$|s_m(c + \xi_0) - f(c) - d_c k| < |s_m(c + \xi_0) + d_c g_c(c + \xi_0) - f(c + \xi_0) - d_c F(\pi)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posledným dosadením dostávame:

$$|s_m(c + \xi_0) - f(c) - d_c k| < |s_m(c + \xi_0) - h_c(c + \xi_0) - d_c F(\pi)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Použijeme $|s_m(c + \xi) - d_c F(m\xi) - h_c(c + \xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ a dostávame požadovanú nerovnosť. Podobným postupom s využitím $-m\xi_0 = -\pi$ a $F(-\pi) = -F(\pi)$ dostávame nerovnosť $|s_m(c - \xi_0) - f(c) + d_c k| < \varepsilon$. Takže hľadané x' a x'' sú $c + \xi_0$ a $c - \xi_0$, a teda funkcie s_m spĺňajú aj posledný predpoklad na to, aby sme mohli použiť vetu 11.

Použitím vety 11 dostávame $\rho_H(G, G_{s_m}) \rightarrow 0$, čím je veta dokázaná. \square

Literatúra

[Čech(1974)] ČECH, E. (1974). *Bodové množiny*. Academia, Praha.

[Jarník(1955)] JARNÍK, V. (1955). *Integrální počet II*. Academia, Praha.

[Lukeš(1982)] LUKEŠ, J. (1982). *Problémy z matematické analýzy*. Univerzita Karlova, Praha.