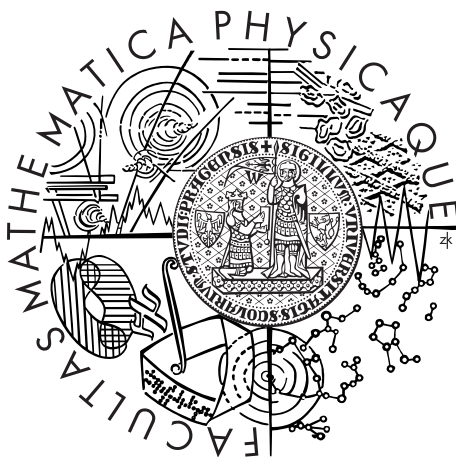


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Adam Ivánek

Synchronizace automatů

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Štěpán Holub, Ph.D. et Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematické metody informační bezpečnosti

Praha 2013

Ďakujem doc. Mgr. Štěpánovi Holubovi, Ph.D. et Ph.D. za vedenie práce, dotazy a komentáre, ktoré mi pomohli k porozumeniu problému synchronizácie automatov a k napísaniu tejto práce. Taktiež ďakujem svojej rodine za podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Synchronizace automatů

Autor: Adam Ivánek

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Štěpán Holub, Ph.D. et Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V této práci studujeme Trahtmanův důkaz Problému barvení cesty a související algoritmus. Pro každý silně souvislý orientovaný multigraf výstupně d s periodou 1 existuje synchronizující barvení. Béal a Perrin dokázali, že Trahtmanův důkaz lze jednoduše zobecnit pro každou periodu a k -synchronizující barvení. Ukážeme dané zobecnění. Trahtmanův důkaz je konstruktivní a je založený na hledání barvení s netriviální stabilní dvojicí. Dokážeme, že pokud v P_α je právě jeden maximální strom, potom barvení má netriviální stabilní dvojici. Podgraf P_α obsahuje všechny hrany se stejnou barvou. Ukážeme jak také barvení nalézt. Potom popíšeme algoritmy na nalezení k -synchronizujícího barvení. První je přímočarou aplikací tvrzení z Trahtmanova důkazu se složitostí $\mathcal{O}((n-k)dn^2)$. Potom ukážeme Trahtmanovu redukci a Béal a Perrinův algoritmus založený na Trahtmanově důkazu, ale se složitostí $\mathcal{O}((n-k)dn)$, kde n je počet vrcholů.

Klíčová slova: automat, orientovaný multigraf, k -synchronizující barvení

Title: Synchronizing automata

Author: Adam Ivánek

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. Mgr. Štěpán Holub, Ph.D. et Ph.D., Department of Algebra

Abstract: In this thesis we study Trahtman's proof of Road coloring problem and related algorithm. For every strongly connected directed multigraph with outdegree d and period 1, there exists synchronizing coloring. Béal and Perrin prove that Trahtman's proof can be simply generalized for every period and k -synchronizing coloring. We show generalized proof too. Trahtman's proof is constructive and is based on finding coloring with nontrivial stable states. We prove if there is only one maximal tree in P_α then the coloring is with nontrivial stable states. Subgraph P_α contains all edges with same color. We show how to find such coloring. Then we describe algorithms for finding k -synchronizing coloring. First algorithm uses proposition from Trahtman's proof with time complexity $\mathcal{O}((n-k)dn^2)$. Then we show Trahtman's reduction and Béal and Perrin's algorithm based on Trahtman's proof but time complexity is $\mathcal{O}((n-k)dn)$ where n is the number of vertices.

Keywords: automata, directed multigraph, k -synchronizing coloring

Názov práce: Synchronizácia automatov

Autor: Adam Ivánek

Katedra: Katedra algebry

Vedúci bakalárskej práce: doc. Mgr. Štěpán Holub, Ph.D. et Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: V tejto práci študujeme Trahtmanov dôkaz Problému farbenia cesty a súvisiaci algoritmus. Pre každý silne súvislý orientovaný multigraf výstupňa d s periódou 1 existuje synchronizujúce farbenie. Béal a Perrin dokázali, že Trahtmanov dôkaz ide jednoducho zobecniť pre každú periódu a k -synchronizujúce farbenie. Ukážeme dané zobecnenie. Trahtmanov dôkaz je konštruktívny a je založený na hľadaní farbenia s netriviálnou stabilnou dvojicou. Dokážeme, že ak v P_α je práve jeden maximálny strom, potom farbenie má netriviálnu stabilnú dvojicu. Podgraf P_α obsahuje všetky hrany s rovnakou farbou. Ukážeme ako farbenie nájsť. Potom popíšeme algoritmy na nájdenie k -synchronizujúceho farbenia. Prvý je priamočiarou aplikáciou tvrdenia z Trahtmanovho dôkazu so zložitou $\mathcal{O}((n-k)dn^2)$. Potom ukážeme Trahtmanovu redukciu a Béalovej a Perrinovej algoritmus založený na Trahtmanovom dôkazu, ale so zložitou $\mathcal{O}((n-k)dn)$, kde n je počet vrcholov.

Kľúčové slová: automat, orientovaný multigraf, k -synchronizujúce farbenie

Obsah

Úvod	3
1 (k-)synchronizujúce farbenie	5
1.1 Základné pojmy a značenie	5
1.1.1 Synchronizujúce slovo	5
1.1.2 Stavový graf, farbenie a automat	6
1.1.3 Problém farbenia cesty	10
1.2 Nutná a postačujúca podmienka	12
1.3 Faktorový automat a stabilná kongruencia	14
1.3.1 Vlastnosti faktorového automatu	18
1.4 Farbenie s netriviálnou stabilnou dvojicou	23
1.5 Dôsledky dôkazu hlavnej vety	34
2 Algoritmus	37
2.1 Spoločný základ	37
2.2 FARBENIEMAXSTROM podľa dôkazu Vety 47, $\mathcal{O}(dn^2)$	41
2.3 Trahmanova redukcia	42
2.4 Béalovej a Perrinov algoritmus, $\mathcal{O}(dn)$	44
2.4.1 Funkcia FINDEDGES	47
2.4.2 Funkcia FlipEdges	48
Záver	59
Zoznam použitej literatúry	61
Zoznam obrázkov	63

Úvod

V roku 1977 Adler, Goodwyn a Weiss v článku *Equivalence of topological Markov shifts* (Adler a kol. (1977)) formulovali hypotézu nazývanú Problém farbenia cesty. Máme orientovaný multigraf taký, že z každého vrcholu vychádza práve d hrán. Ďalej predpokladajme, že máme d rôznych farieb. Priradíme práve jednu farbu každej hrane tak, aby z každého vrcholu vychádzala hrana každej farby. Toto priradenie nazveme *farbením*. Vrchol a farba jednoznačne určujú hranu vychádzajúcu z daného vrcholu. Potom vrchol a konečná postupnosť farieb určujú orientovaný sled v orientovanom multigrafe.

Konečnú postupnosť farieb nazývame slovom. Slovo nazveme *synchronizujúcim*, ak všetky vrcholy a dané slovo určujú orientované sledy také, že všetky majú rovnaký koncový vrchol. Ak existuje synchronizujúce slovo, potom farbenie nazveme *synchronizujúcim*.

Hypotéza hovorila, že pre každý aperiodický silne súvislý orientovaný multigraf existuje farbenie také, že existuje synchronizujúce slovo.

Problém je radený do oblasti teórie grafov, automatov a symbolickej dynamiky, ktorá bola inšpiráciou problému. Postupne boli publikované dôkazy pre rôzne typy orientovaných multigrafů. Významným posunom k úplnému dôkazu bola práca Čulík II a kol. (2002). Problém bol prevedený na ekvivalentný problém existencie farbenia s „netriviálnou stabilnou dvojicou“. V roku 2007 A. N. Trahtman publikoval konštruktívny dôkaz Trahtman (2007) existencie farbenia s netriviálnou stabilnou dvojicou. Teda hypotéza bola dokázaná.

V prvej verzii dôkazu sa využívali výsledky teórie grafov a lineárnej algebry (Perron-Frobeniovej vety). Krátko na to však Trahtman uviedol zjednotený dôkaz bez použitia Perron-Frobeniovej vety a ponechaním zvyšku dôkazu s upravenou definíciou množiny F -clique. V práci však použijeme ekvivalentnú definíciu pôvodnej F -clique, ale budeme ju nazývať minimálnym obrazom, viď Béal a Perrin (2012).

Algoritmus plynúci z dôkazu má časovú zložitosť v najhoršom prípade $\mathcal{O}(dn^3)$, kde n je počet vrcholov orientovaného multigrafu a d je počet hrán vychádzajúcich z jedného vrcholu tj. výstupeň. Trahtman navrhol redukciu, ktorá funguje len za niektorých podmienok s časovou zložitosťou $\mathcal{O}(dn^2)$. Uviedol, že veľa prípadov je tohto typu bez konkrétnejšieho odhadu počtu. V práci Béal a Perrin (2012) podrobnejším rozborom grafu navrhli algoritmus s časovou zložitosťou $\mathcal{O}(dn^2)$ v najhoršom prípade a zobecnili problém pre periodické grafy. Nezávisle na predchádzajúcej práci dvojica Budzban a Feinsilver (2011) dokázala zobecnený problém pomocou teórie pologrúp a Markovských reťazcov.

Cieľom práve je popísať Trahtmanovo riešenie Problému farbenia cesty a jeho algoritmus. Spracovať známe informácie o zložitosti tohto algoritmu.

Práca je rozdelená do dvoch hlavných kapitol. Prvej dokazujeme Problém

farbenia cesty pomocou matematickej indukcie. Najprv definujeme automat, minimálny obraz, synchronizujúce slovo, stavový graf a synchronizujúce farbenie (pomocou všeobecného pojmu k -synchronizujúceho farbenia). Stavový graf spolu s farbením prirodzene definujú automat. Ukážeme, že každý stavový graf s farbením indukuje automat a naopak. Potom definujeme faktorový automat a dokážeme jeho vlastnosti. Dokážeme, že stačí nájsť farbenie s netriviálnou stabilnou dvojicou. Potom uvidíme Trahtmanov dôkaz existencie farbenia s netriviálnou stabilnou dvojicou pomocou farbenia takého, že v P_α je práve jeden maximálny strom. Jednoduchým zobecnením tvrdenia o vlastnostiach faktorového automatu dostaneme dôkaz pre všeobecný stavový graf a existenciu k -synchronizujúceho farbenia. V druhej kapitole popisujeme zovšeobecnený algoritmus na hľadanie k -synchronizujúceho farbenia a jeho časovú zložitosť. Uvádžeme tri algoritmy, ktoré hľadajú farbenie také, že v P_α je práve jeden maximálny strom. Prvý využíva priamo tvrdenie z dôkazu. Druhý je Trahtmanova redukcia a tretí je Béalovej a Perrinov algoritmus.

Práca je kompilačná. Hlavným zdrojom práce sú články Trahtman (2007), Trahtman (2012) a Béal a Perrin (2012). U jednotlivých tvrdení je uvedený priamy odkaz na formuláciu tvrdenia v príslušnom článku, ak existuje. Podobne pre dôkazy.

Kapitola 1

$(k-)$ synchronizujúce farbenie

1.1 Základné pojmy a značenie

1.1.1 Synchronizujúce slovo

Definícia 1. *Automatom* nazývame usporiadanú trojicu $A = (Q, \Sigma, \delta)$, kde Q, Σ sú konečné neprázdne množiny a funkcia

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q.$$

je definovaná pre všetky dvojice $(p, \alpha) \in Q \times \Sigma$.

Prvky množiny Q nazývame *stavmi*, množinu Σ *abecedou*, prvky abecedy *písmenami* a funkciu δ *prechodovou funkciou*.

Množinu všetkých prirodzených čísiel $\{1, 2, \dots\}$ značíme $\mathbb{N}$.

Slovom w nad abecedou Σ rozumieme konečnú postupnosť písmen

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Čiarky oddeľujúce písmená v zápise postupnosti vynechávame, a teda píšeme len $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$. Číslo n nazývame *dĺžkou slova* w a značíme ju $|w|$. Množinu všetkých slov nad abecedou Σ značíme Σ^+ .

Slovo $\alpha\alpha\dots\alpha$ dĺžky $m \in \mathbb{N}$, kde $\alpha \in \Sigma$, skrátene zapisujeme α^m .

Nech $a = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ a $b = \beta_1\beta_2\dots\beta_m$ sú slová z množiny Σ^+ , potom zápisom ab rozumieme slovo $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\beta_1\beta_2\dots\beta_m$ (tj. konkaténáciu reťazcov a, b). Táto operácia je zrejme asociatívna tj. $(ab)c = a(bc)$, kde $c \in \Sigma^+$. A teda vynechávame zátvorky a píšeme len abc .

Nech $w = \omega_1\omega_2\dots\omega_n \in \Sigma^+$, kde $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Sigma$. Výsledkom pôsobenia slova w na stav $p \in Q$ rozumieme stav

$$q = \delta(\delta(\dots\delta(\delta(p, \omega_1), \omega_2) \dots, \omega_{n-1}), \omega_n).$$

Tento stav značíme $p \cdot w$ (tj. $q = p \cdot w$). Obdobne definujeme pôsobenie slova w na množinu stavov $P \subseteq Q$. Výsledkom je množina $\{p \cdot w : p \in P\}$, ktorú značíme $P \cdot w$.

Mohutnosť nejakej množiny N značíme $|N|$.

Definícia 2 (minimálny obraz, *rank*, Béal a Perrin (2012)). Nech $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je automat. Potom *minimálnym obrazom automatu A* rozumíme množinu $Q \cdot w$, kde $w \in \Sigma^+$ a platí

$$|Q \cdot w| = \min\{|Q \cdot v| : v \in \Sigma^+\}.$$

Mohutnosť minimálneho obrazu automatu A značíme $\text{rank}(A)$.

Ak pre slovo $w \in \Sigma^+$ je $|Q \cdot w| = 1$, potom hovoríme, že automat A má *synchronizujúce slovo* w .

Z definície pôsobenia slova plynie nerovnosť $1 \leq |Q \cdot v| \leq |Q|$ pre každé slovo $v \in \Sigma^+$. Teda existuje $\min\{|Q \cdot v| : v \in \Sigma^+\}$ a Definícia 2 je korektná.

Definícia 3 (Trahtman (2007)). Nech $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je automat. Dvojicu stavov $p, q \in Q$ nazývame *synchronizovateľnou*, ak existuje slovo $v \in \Sigma^+$ také, že $p \cdot v = q \cdot v$.

Naopak, ak pre každé slovo $u \in \Sigma^+$ platí $p \cdot u \neq q \cdot u$, potom dvojicu stavov p, q nazveme *nesynchronizovateľnou*.

Poznámka 4. Existencia synchronizujúceho slova w implikuje existenciu stavu $s \in Q$ takého, že $Q \cdot w = \{s\}$. Pre každú dvojicu stavov $p, q \in Q$ platí $p \cdot w = s = q \cdot w$, a teda každá dvojica z Q je synchronizovateľná.

Každé dva rôzne stavy z minimálneho obrazu sú nesynchronizovateľné, inak by sme dostali spor s minimalitou minimálneho obrazu.

Ak N je minimálny obraz, potom zrejme $N \cdot v$ je minimálny obraz pre každé $v \in \Sigma^+$.

Poznámka 5. Trahtman v článku Trahtman (2007) definuje množinu *F-clique* nasledovne. Množina N je *F-clique*, ak $N = Q \cdot v$ pre nejaké slovo $v \in \Sigma^+$ a každé dva stavy z N sú nesynchronizovateľné. Ľahko sa nahliadne, že *F-clique* a minimálny obraz sú ekvivaletné definície.

1.1.2 Stavový graf, farbenie a automat

Popíšeme vzťah automatu a orientovaného multigrafu, kde každej hrane je priradené písmeno z abecedy.

Orientovaným grafom sa rozumie usporiadaná dvojica množiny vrcholov V a množiny hrán E , kde E je podmnožina kartézkeho súčinu $V \times V$. Prvky množiny E tj. hrany sú dvojice (p, q) , kde p je začiatkový vrchol hrany a q jej koncový vrchol. Ak povolíme viacnásobné hrany, teda E je multimnožina, potom usporiadaná dvojica (V, E) sa nazýva *orientovaným multigrafom*. V celom texte predpokladáme, že množina V je konečná neprázdna a taktiež E je konečná neprázdna multimnožina.

Hrana orientovaného grafu je dvojica vrcholov. Pre multigrafy je toto značenie nevhodné z dôvodu viacnásobných hrán. Preto vyvstáva potreba značiť hranu usporiadanou trojicou (p, i, q) , kde p je začiatkový vrchol, q je koncový vrchol hrany a i je nejaký index rozlišujúci viacnásobné hrany.

Index i volíme nasledovne. Nech d je počet hrán so začiatkovým vrcholom p . Jednoznačne očísľujeme hrany vychádzajúce z p číslami $1, 2, \dots, d$ tj. priradíme index. Potom trojica (p, i, q) určuje jednoznačne hranu, kde p je začiatkový vrchol a q je koncový vrchol hrany. Zrejme začiatkový vrchol a index hrany určujú jednoznačne koncový vrchol q . Táto úvaha vysvetľuje nasledovnú definíciu a značenie.

Definícia 6 (výstupeň, stavový graf). Nech $G = (V, E)$ je orientovaný multigraf.

Výstupeň vrcholu $v \in V$ definujeme ako počet hrán z E so začiatočným vrcholom v .

Nech každý vrchol z V má rovnaký výstupeň d , potom G nazývame *stavovým grafom výstupňa d* alebo skrátene len *stavovým grafom*.

Značenie 7. Nech $G = (V, E)$ je orientovaný multigraf, kde V je množina vrcholov. Potom predpokladáme, že máme nasledovné značenie hrán

$$E = \{(p, i, \delta_0(p, i)) : p \in V, i = 1, 2, \dots, d(p)\}.$$

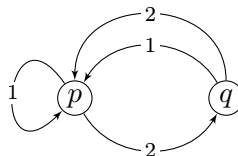
Funkcia $d : V \rightarrow \mathbb{N}$ priraduje vrcholu jeho výstupeň a δ_0 je zobrazenie

$$\delta_0 : \bigcup_{p \in V} \{(p, 1), (p, 2), \dots, (p, d(p))\} \rightarrow V.$$

Podgrafom orientovaného multigrafu G rozumieme orientovaný multigraf $P = (V_p, E_p)$ taký, že $V_p \subseteq V$ a hrany majú „zdedené“ značenie od G tj. $E_p \subseteq E$.

Zobrazenie δ_0 v Značení 7 priraduje vrchol dvojici $p \in V$ a $i \in \{1, 2, \dots, d(p)\}$ tj. koncový vrchol hrany určenej vrcholom p a i . Z dôvodu nového značenia hrán odteraz E je množina.

Na Obrázku 1.1 je príklad stavového grafu (V, E) , kde $V = \{p, q\}$ a množina hrán $E = \{(p, 1, p), (p, 2, q), (q, 1, p), (q, 2, p)\}$.



Obrázok 1.1: Príklad stavového grafu.

Definícia 8 (farbenie stavového grafu). Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d , $n = |V|$ a Σ je d -prvková množina. Funkciu

$$f : V \times \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \Sigma$$

nazývame *farbením stavového grafu G* , ak $f_v : \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \Sigma$ je bijekcia pre každé $v \in V$, kde $f_v(i) := f(v, i)$.

Farbením rozumieme priradenie, ktoré hrane $(v, i, \delta_0(v, i))$ stavového grafu priradí prvok $f(v, i) \in \Sigma$. Pretože hrany stavového grafu je možné farebne odlišovať pri kreslení, prvky množiny Σ sa zvyknú nazývať *farby*. Zobrazenie f_v je bijekcia pre každé $v \in V$, teda žiadnym dvom hranám s rovnakým začiatočným vrcholom farbenie nepriradí rovnaké farby.

Teraz dáme do súvislosti stavový graf, farbenie stavového grafu a automat. Definujeme prechodovú funkciu tak, že $\delta(p, \alpha) = q$, ak existuje hrana z p do q s priradenou farbou α .

Definícia 9 (stavový graf a farbenie indukuje automat). Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d a f je farbenie stavového grafu G s d -prvkovou množinou Σ . Potom definujeme automat (V, Σ, δ) tak, že pre každú dvojicu $(p, \alpha) \in V \times \Sigma$ položíme

$$\delta(p, \alpha) := q$$

práve vtedy, keď $\delta_0(p, i) = q$ a $f(p, i) = \alpha$ pre nejaké $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Tento automat značíme G^f a hovoríme, že G a f *indukuje automat* G^f .

Z definície zobrazenie δ_0 v Značení 7 a farbenia f plynú korektnosť definície prechodovej funkcie v Definícii 9.

V Značení 7 predpokladáme, že hrany stavového grafu majú priradené indexy tak, že neexistujú dve hrany s rovnakými indexami a rovnakými začiatočnými vrcholami. Teda označenie hrán indexami je už vlastne „farbením“ s množinou $\{1, 2, \dots, d\}$. A teda funkcia δ_0 je už „prechodovou funkciou“.

Príklad 1. Na Obrázku 1.5 je stavový graf $G = (V, E)$, kde $V = \{p, q\}$ a

$$E = \{(p, 1, p), (p, 2, q), (q, 1, q), (q, 2, p)\}.$$

Ďalej farbenia $f, g : V \times \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \Sigma$ stavového grafu G , kde $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$, sú definované obrázkom.



Obrázok 1.2: Stavový graf G s farbením f vľavo a s farbením g vpravo.

Stavový graf G a f indukujú automat G^f a G s g automat G^g . Ak by G^f mal synchronizujúce slovo, potom nutne p, q by bola synchronizovateľná dvojica podľa Poznámky 4. V automate G^f platí

$$p \cdot \alpha = q, \quad q \cdot \alpha = p,$$

$$p \cdot \beta = p, \quad q \cdot \beta = q.$$

Výsledkom aplikácie slov α, β na množinu V je vždy množina V . Teda p, q je nesynchronizovateľná dvojica a G^f nemá synchronizujúce slovo.

Naopak, pre automat G^g platí $|V \cdot \beta| = 1$, a teda G^g má synchronizujúce slovo β .

Z príkladu vidíme, že má zmysel skúmať, pre ktoré farbenie stavového grafu indukovaný automat má synchronizujúce slovo. Uvedieme zrejmu opačnú súvislosť automatu, stavového grafu a farbenia ako v Definícii 9.

Definícia 10 (automat indukuje stavový graf a farbenie). Nech $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je automat a $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$. Potom definujeme stavový graf $G = (V, E)$ taký, že $V := Q$ a

$$E := \{(v, i, \delta(v, \alpha_i)) : v \in V, i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Definujeme farbenie $f : V \times \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \Sigma$ stavového grafu G s abecedou Σ tak, že $f(p, j) := \alpha_j$ pre $p \in V$, $j = 1, 2, \dots, d$. Vzhľadom k Značeniu 7 sme položili $\delta_0(p, j) := \delta(p, \alpha_j)$. Stavový graf G nazývame *indukovaným stavovým grafom automatu* A .

Z definície prechodovej funkcie δ plynie korektnosť definície stavového grafu G a farbenia f v Definícii 10. Zrejme G a f indukuje automat A .

V Definícii 10 sme prirodzene mohli zvoliť iné indexy hrán, ale toto značenie využijeme pri definícii indukovaného farbenia.

Z dôvodu korešpondencie automatu a stavového grafu označenie stav a vrchol používame ako synonymá, podobne písmeno a farba. Preto množinu farieb Σ v definícii farbenia nazýva tiež abecedou. Teraz uvedieme potrebné definície z teórie garfov.

Definícia 11. Nech $G = (V, E)$ je orientovaný multigraf.

Sledom dĺžky $m \in \mathbb{N}$ z u_0 do u_m rozumieme postupnosť hrán

$$e_0 = (u_0, i_0, u_1), \dots, e_l = (u_l, i_l, u_{l+1}), \dots, e_{m-1} = (u_{m-1}, i_{m-1}, u_m),$$

kde $e_j \in E$ pre $j = 0, \dots, m-1$. Dĺžku sledu P značíme $|P|$. Ak $u_0 = u_m$, potom sled nazývame *uzavretým*. O vrchole u_t , kde $t = 0, 1, \dots, m$, hovoríme, že sled P prechádza vrcholom u_t alebo u_t leží na slede P . Podobne hovoríme, že hrana e leží na slede P . Vrchol u_0 nazýva *začiatočným* a u_m *koncovým* vrchol sledu P .

Kružnicou rozumieme uzavretý sled

$$e_0 = (u_0, i_0, u_1), \dots, e_l = (u_l, i_l, u_{l+1}), \dots, e_{m-1} = (u_{m-1}, i_{m-1}, u_0),$$

kde $u_k \neq u_l$, pre $k \neq l \in \{0, \dots, m-1\}$. Teda kružnica prechádza vrcholom maximálne raz.

Nech P_1 a P_2 sú dva sledy také, že

$$P_1 = (u_0, i_0, u_1), \dots, (u_{n-1}, i_{n-1}, u_n), \quad P_2 = (u_n, i_n, u_{n+1}), \dots, (u_{m-1}, i_{m-1}, u_m).$$

Potom zápisom $P_1 P_2$ rozumieme sled z u_0 do u_m taký, že

$$P_1 P_2 = (u_0, i_0, u_1), \dots, (u_{n-1}, i_{n-1}, u_n), (u_n, i_n, u_{n+1}), \dots, (u_{m-1}, i_{m-1}, u_m).$$

Orientovaný multigraf je *silne súvislý* práve vtedy, keď pre každé dva vrcholy p a q existuje sled z p do q a sled z q do p .

Podgraf P orientovaného multigrafu G nazývame *silne súvislou komponentou* práve vtedy, keď P je silne súvislý a neexistuje žiadny silne súvislý podgraf P' orientovaného multigrafu G rôzny od P taký, že P by bol podgrafom P' .

Inverznú funkciu k funkcii f_p značíme f_p^{-1} . Hranu $(p, f_p^{-1}(\alpha), q)$ skrátene jednoznačne zapisujeme ako $(p, \alpha, q)_f$.

Definícia 12 (slovo a sled). Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d a f je farbenie stavového grafu G s d -prvkovou abecedou Σ . Potom G a f indukuje automat G^f . Hrana $(p, \alpha, q)_f \in E$ podľa Definície 9 reprezentuje pôsobenie písmená

α na stav p s výsledným stavom $q = p \cdot \alpha$. Nech $w = \omega_1\omega_2 \dots \omega_n$, kde $\omega_i \in \Sigma$ pre $i = 1, 2, \dots, n$. Potom slovo w pôsobiacie na stav p definuje sled P z p do $p \cdot w$ tj.

$$\begin{aligned} & (p, \omega_1, p \cdot \omega_1)_f, \dots \\ & (p \cdot \omega_1\omega_2 \dots \omega_{i-1}, \omega_i, p \cdot \omega_1\omega_2 \dots \omega_i)_f, \dots \\ & (p \cdot \omega_1\omega_2 \dots \omega_{n-1}, \omega_n, p \cdot \omega_1\omega_2 \dots \omega_n)_f. \end{aligned}$$

Z každého vrcholu vedie práve jedna hrana danej farby, preto sled je určený jednoznačne začiatočným vrcholom a nejakým slovom zo Σ^+ . Zrejme $|w| = |P|$. Naopak, každý stav a nejaké slovo určuje jednoznačne sled.

Definícia 13 (výmena farieb). Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d a f je farbenie stavového grafu G s d -prvkovou abecedou Σ . Definujeme *výmenu farieb hranám* $(p, \alpha, q)_f, (p, \beta, q')_f \in E$, kde $\alpha \neq \beta \in \Sigma$, ako farbenie $f' : V \times \{1, 2, \dots, d\} \rightarrow \Sigma$ také, že

$$\begin{aligned} f'(p, f_p^{-1}(\alpha)) &= \beta, \\ f'(p, f_p^{-1}(\beta)) &= \alpha, \end{aligned}$$

pre $i \neq f_p^{-1}(\alpha), f_p^{-1}(\beta) \in \{1, 2, \dots, d\}$

$$f'(p, i) = f(p, i)$$

a pre $v \neq p \in V, j \in \{1, 2, \dots, d\}$

$$f'(v, j) = f(v, j).$$

1.1.3 Problém farbenia cesty

Definícia 14 (k -synchronizujúce farbenie). Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d a f je farbenie stavového grafu G s abecedou Σ . Farbenie f stavového grafu G nazveme *k -synchronizujúcim*, ak $k = \text{rank}(G^f)$ a zo všetkých farbení stavového grafu G automat G^f má najmenší *rank* tj. pre každé farbenie g stavového grafu G platí

$$\text{rank}(G^f) \leq \text{rank}(G^g).$$

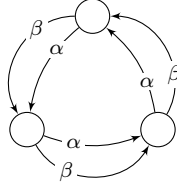
Ak $k = 1$, potom farbenie f nazývame skrátené *synchronizujúcim*.

Zrejme počet všetkých farbení stavového grafu je konečný, a teda Definícia 14 je korektná.

Poznamenajme, že k -synchronizujúce farbenie je najlepšie zo všetkých farbení. Najlepšie v zmysle, že neexistuje farbenie a slovo také, že výsledkom pôsobenia tohto slova na množinu všetkých stavov v indukovanom automate je množina mohutnosti menšej ako k .

Vidíme, že f je synchronizujúce farbenie stavového grafu G práve vtedy, keď G^f má synchronizujúce slovo.

Na Obrázku 1.3 je jednoduchý príklad stavového grafu s 3-synchronizujúcim farbením.



Obrázok 1.3: Príklad 3-synchronizujúceho farbenia.

Definícia 15 (perióda). Pre stavový graf G definujeme *periódu* ako najväčší spoločný deliteľ dĺžok všetkých kružníc v G . Periódu značíme $\text{per}(G)$.

Ak $\text{per}(G) = 1$, potom stavový graf G nazývame *aperiodickým*.

Z definície kružnice a konečného počtu hrán plynie, že perióda vždy existuje.

Definícia 16. Nech $G = (V, E)$ je stavový graf. Vrchol $u \in V$ nazývame *ústím*, ak pre každý vrchol $p \in V$ existuje sled z p do u .

Teraz sformulujeme hlavnú vetu.

Veta 17 (Problém farbenia cesty, Trahtman (2008b) Theorem 6). *Pre stavový graf $G = (V, E)$ existuje synchronizujúce farbenie práve vtedy, keď existuje ústie $u \in V$ a silne súvislá komponenta $C_u = (V_u, E_u)$ stavového grafu G obsahujúca ústie u (tj. $u \in V_u$) má periódu 1.*

V súvislosti s hľadaním synchronizujúceho farbenia sa aperiodický silne súvislý stavový graf označuje aj ako *AGW*. Skratka *AGW* sú prvé písmená mien Adler, Goodwyn a Weiss. Ich formulácia problému bola, že pre každý *AGW* graf existuje synchronizujúce farbenie. Viď článok Adler a kol. (1977).

V zbytku kapitoly dokážeme hlavnú vetu. Uvádžame Trahtmanov dôkaz. Nakoniec ukážeme, že dôkaz ide jednoducho zovšeobecniť pre k -synchronizujúce farbenie (Béal a Perrin (2013)). Nasledovný odstavec je stručným zhrnutím dôkazu hlavnej vety.

Dôkaz je založený na matematickej indukcii. Najprv dokážeme, že existencia synchronizujúceho farbenia je ekvivaentná existencii farbenia s netriviálnou stabilnou dvojicou (viď Čulík II a kol. (2002)). V druhej časti dokážeme, ak v podgrafe P_α , ktorý je tvorený hranami s farbou α , existuje práve jeden maximálny strom, potom farbenie je už s netriviálnou stabilnou dvojicou.

Všeobecne pre stavový graf a k -synchronizujúce farbenie platí nasledovná veta.

Veta 18 (všeobecný stavový graf, Trahtman (2008a) Corollary 1). *Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d a $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$ je d -prvková abeceda. Označme všetky silne súvislé komponenty*

$$C_1 = (V_1, E_1), C_2 = (V_2, E_2), \dots, C_m = (V_m, E_m)$$

stavového grafu G také, že každá hrana z E so začiatočným vrcholom z V_j má koncový vrchol v množine V_j , kde $j = 1, 2, \dots, m$. Označme postupne periódy komponent $k_1, k_2, \dots, k_m$. Potom pre G existuje $\sum_{j=1}^m k_j$ -synchronizujúce farbenie.

Vetu 18 dokážeme v poslednej sekcii prvej kapitoly.

1.2 Nutná a postačujúca podmienka

Dokážeme implikáciu zľava doprava z Vety 17. Ak pre stavový graf existuje synchronizujúce farbenie, potom existuje ústie a silne súvislá komponenta obsahujúca ústie má periódu 1.

Tvrdenie 19. *Nech pre stavový graf $G = (V, E)$ existuje synchronizujúce farbenie f s abecedou Σ . Potom existuje ústie $u \in V$ stavového grafu G .*

Dôkaz. Podľa predpokladu automat G^f má synchronizujúce slovo $w \in \Sigma^+$. Potom pre nejaký vrchol $u \in V$ platí, že $V \cdot w = \{u\}$. Podľa Definície 12 slovo w a každý vrchol z V definujú sled z daného vrcholu do u . Teda u je ústie stavového grafu G . □

Hneď vidíme, že nie pre každý stavový graf existuje synchronizujúce farbenie. Ľahko pre každé prirodzené číslo n väčšie ako 2 najdeme stavový graf s n vrcholmi a bez ústia.

Tvrdenie 20. *Nech $G = (V, E)$ je stavový graf a $k = \text{per}(G)$. Potom k delí dĺžku každého uzavretého sledu.*

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa dĺžky sledu. Tvrdenie platí pre uzavretý sled T najmenej dĺžky, pretože T je kružnica. Ak by T nebola kružnica, potom pre

$$T = (u_0, i_0, u_1), (u_1, i_1, u_2), \dots, (u_{m-1}, i_{m-1}, u_m = u_0)$$

je nutne $u_j = u_l$ pre nejaké $0 \leq j < l < m$. Teda

$$(u_j, i_j, u_{j+1}), (u_{j+1}, i_{j+1}, u_{j+2}), \dots, (u_{l-1}, i_{l-1}, u_l)$$

by bol uzavretý sled menšej dĺžky ako T a to by bol spor.

Dokážeme, že k delí dĺžku m' uzavretého sledu. Predpokladajme, že dĺžka každého uzavretého sledu menšia ako m' je deliteľná k . Označme P nejaký uzavretý sled $(v_0, i'_0, v_1), (v_1, i'_1, v_2), \dots, (v_{m'-1}, i'_{m'-1}, v_{m'} = v_0)$ dĺžky m' .

Ak P je kružnica, potom podľa predpokladu k delí m' . Ďalej predpokladajme, že P nie je kružnica. To znamená, že $v_{j'} = v_{l'}$ pre nejaké $0 \leq j' < l' < m'$. Potom $P_1 = (v_{j'}, i'_{j'}, v_{j'+1}), \dots, (v_{l'-1}, i'_{l'-1}, v_{l'})$ je sled z $v_{j'}$ do $v_{j'}$. Označme sled $P_2 = (v_{l'}, i'_{l'}, v_{l'+1}), \dots, (v_{m'-1}, i'_{m'-1}, v_{m'} = v_0)$.

Ak $j' = 0$, potom $v_{l'} = v_0$ a $P = P_1 P_2$. Viď Obrázok 1.4. Zrejme $|P_1|, |P_2| < m'$ a $|P| = |P_1| + |P_2| = m'$, teda z indukčného predpokladu k delí m' .

Ak $j' \neq 0$, potom $P = (P_0 P_1) P_2$, kde $P_0 = (v_0, i'_0, v_1), \dots, (v_{j'-1}, i'_{j'-1}, v_{j'})$. Viď Obrázok 1.4. Postupnosť $P_0 P_2$ je uzavretý sled

$$P_0 P_2 = (v_0, i'_0, v_1), \dots, (v_{j'-1}, i'_{j'-1}, v_{j'}), (v_{j'} = v_{l'}, i'_{j'}, v_{l'+1}), \dots, (v_{m'-1}, i'_{m'-1}, v_{m'} = v_0)$$

dĺžky menšej ako m' , preto podľa indukčného predpokladu jeho dĺžka je deliteľná k . Zrejme $|P| = |P_0| + |P_1| + |P_2|$ a teda k delí m' . □



Obrázok 1.4: Vľavo $P = P_1P_2$ a vpravo $P = (P_0P_1)P_2$.

Poznamenajme, že jednoducho sa dokáza nasledovná implikácia. Nech l je najväčší spoločný deliteľ všetkých dĺžok uzavretých sledov, potom $\text{per}(G) = l$. Teda podmienku v hlavnej vete na periódu môžeme ekvivalentne formulovať tak, že najväčší spoločný deliteľ dĺžok všetkých uzavretých sledov je 1.

Tvrdenie 21. *Nech $G = (V, E)$ je stavový graf. Ak $k = \text{per}(G) > 1$, potom neexistuje synchronizujúce farbenie G .*

Dôkaz. Predpokladajme, že f je synchronizujúce farbenie G s abecedou Σ . Nech G^f má synchronizujúce slovo $w \in \Sigma^+$. Označme p stav takový, že $V \cdot w = \{p\}$. Z definície synchronizujúceho slova w plynie, že $p \cdot \alpha w = p$ pre ľubovoľné $\alpha \in \Sigma$. Slová w a αw definujú uzavreté sledy z p do p , a preto k delí $|w|$ a $|\alpha w|$ podľa Tvrdenia 20. To je spor, pretože $|w| = |\alpha w| - 1$ a $k > 1$. □

Veta 22. *Nech pre stavový graf G výstupňa d existuje synchronizujúce farbenie f s abecedou Σ , potom existuje ústie a silne súvislá komponenta obsahujúca ústie má periódu 1.*

Dôkaz. Existencia ústia u plynie z Tvrdenia 21 a silne súvislá komponenta $C_u = (V_u, E_u)$ obsahujúca ústie existuje zrejme tiež. Z definície silne súvislej komponenty a ústia plynie, že C_u je stavový graf. Nech f^u je zúžené zobrazenie f na $V_u \times \{1, 2, \dots, d\}$.

Pre každé $p \in V_u$ a každé slovo $w \in \Sigma^+$ platí $p \cdot w \in V_u$ v automate G^f . Teda f^u musí byť synchronizujúce farbenie stavového grafu C_u , a teda podľa predchádzajúcej tvrdenia je $\text{per}(C_u) = 1$. □

Nasledujúca tvrdenie ukazuje, že pri hľadaní synchronizujúceho farbenia sa stačí obmedziť na silne súvislé aperiodické stavové grafy.

Tvrdenie 23. *Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d , existuje ústie $u \in V$ a označme $C_u = (V_u, E_u)$ silne súvislú komponentu obsahujúcu u tj. $u \in V_u$.*

Ak existuje synchronizujúce farbenie stavového grafu C_u s abecedou Σ , potom existuje synchronizujúce farbenie stavového grafu G .

Dôkaz. Z definície ústia a silnej súvislosti plynie, že C_u je stavový graf výstupňa d . Nech $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$ a f' je synchronizujúce farbenie C_u s abecedou Σ .

Tvrdenie triviálne platí ak $V_u = V$. Predpokladajme, že existuje vrchol z z V nepatriaci do V_u . Potom definujeme synchronizujúce farbenie f pre G tak, že

$$p \in V_u \Rightarrow f(p, i) := f'(p, i) \text{ pre } i = 1, 2, \dots, d$$

a pre vrcholy $z \in V \setminus V_u$ definujeme farbenie f ľubovoľne, napríklad

$$v \in V \setminus V_u \Rightarrow f(v, j) := \alpha_j \text{ pre } j = 1, 2, \dots, d.$$

Inak povedané f' je zúženie zobrazenia f na množinu $V_u \times \{1, 2, \dots, d\}$ tj. hrany E_u .

Ďalej uvažujeme pôsobenia slov v automate G^f . Ak $p \in V_u$, potom z definície C_u plynie, že pre každé slovo $v \in \Sigma^+$ platí $p \cdot v \in V_u$. Nech w_2 je synchronizujúce slovo pre stavový graf C_u . Stačí nájsť slovo w_1 také, že $V \cdot w_1 \subseteq V_u$. Potom zrejme $w_1 w_2$ je synchronizujúce slovo pre G^f , a teda f je synchronizujúce farbenie.

Vezmime ľubovoľný vrchol $p \in V$, ktorý nepatrí do V_u . Z definície ústia existuje slovo u_1 také, že $p \cdot u_1 = u$. Teda $p \cdot u_1$ patrí do V_u . Potom počet vrcholov z $V \cdot u_1$, ktoré nepatria do V_u je ostro menší ako počet vrcholov z V , ktoré nepatria do V_u .

Ak existuje, z $V \cdot u_1$ zoberieme vrchol q , ktorý nepatrí do V_u . Nájdeme slovo u_2 , aby $q \cdot u_2$ patrilo do V_u . Analogicky postupujeme kým nenájdeme slovo $u_1 u_2 \dots u_m$ také, že $V \cdot u_1 u_2 \dots u_m \subseteq V_u$. Z konečnosti množiny V plynie, že existuje $w_1 = u_1 u_2 \dots u_m$. □

Vidíme, že k dôkazu hlavnej vety stačí dokázať implikáciu, pre každý aperiódický silne súvislý stavový graf existuje synchronizujúce farbenie. To dokážeme v zvyšku kapitoly.

1.3 Faktorový automat a stabilná kongruencia

Definujeme „faktorový automat“ a „stabilnú kongruenciu“, aby sme previedli hľadanie synchronizujúceho farbenia na stavový graf s menším počtom vrcholov. Zo synchronizujúceho farbenia menšieho stavového grafu definujeme synchronizujúce farbenie pre pôvodný stavový graf. Tým dostaneme základ pre dôkaz hlavnej vety pomocou matematickej indukcie.

Hlavným výsledkom tejto podkapitoly je, že ak existuje farbenia s netriviálnou stabilnou dvojicou pre každý silne súvislý aperiódický stavový graf, potom existuje synchronizujúce farbenie pre každý silne súvislý aperiódický stavový graf.

Definícia 24 (kongruencia). Nech $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je automat. Ekvivalenciu $\sim$ na množine Q nazývame *kongruenciou*, ak pre všetky $p, q \in Q$ a $\alpha \in \Sigma$ platí, ak $p \sim q$, potom $p \cdot \alpha \sim q \cdot \alpha$.

Definícia 25 (faktorový automat). Nech $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je automat a $\sim$ kongruencia. Potom definujeme *faktorový automat* $A_\sim = (Q_\sim, \Sigma, \delta_\sim)$, kde $Q_\sim$ je množina tried ekvivalencie $\sim$, teda $Q_\sim = \{[p]_\sim : p \in Q\}$. Prechodovú funkciu

$$\delta_\sim : Q_\sim \times \Sigma \rightarrow Q_\sim$$

definujeme tak, že

$$\delta_\sim([p]_\sim, \alpha) := [p \cdot \alpha]_\sim,$$

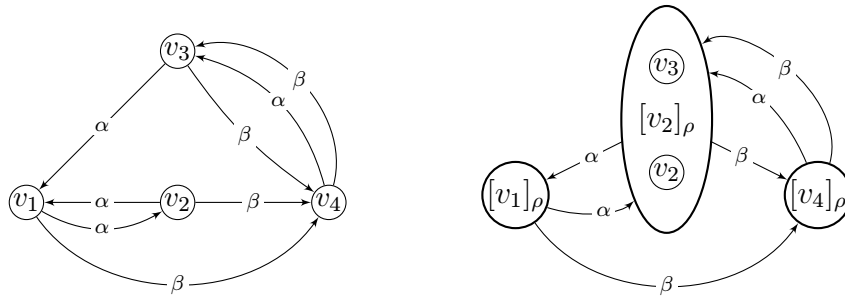
pre $[p]_\sim \in Q_\sim$ a $\alpha \in \Sigma$.

Z definície kongruencie plynie, že $\delta_{\sim}$ je dobre definovaná prechodová funkcia a faktorový automat je automat.

Príklad 2. Vľavo na Obrázku 1.5 je stavový graf $G = (V, E)$ a jeho farbenie f s abecedou $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$, ktorý indukuje automat G^f . Vpravo je faktorový automat G_{ρ}^f , kde ρ je ekvivalencia na V taká, že

$$V/\rho = \{\{v_1\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4\}\}.$$

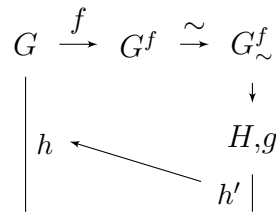
Lahko sa overí, že ρ je kongruencia automatu G^f . Teda $\{[v_1]_{\rho}, [v_2]_{\rho}, [v_4]_{\rho}\}$ je množina stavov automatu G_{ρ}^f .



Obrázok 1.5: Automat G^f a faktorový automat G_{ρ}^f .

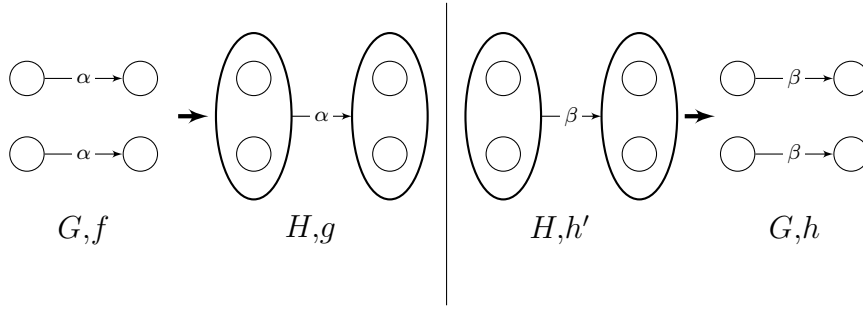
Nasledovná úvaha je vysvetlením a zdôvodnením korektnosti definície indukovaného farbenia.

Nech G je stavový graf, f jeho farbenie a $\sim$ kongruencia automatu G^f . Potom stavy faktorového automatu $G_{\sim}^f$ sú triedy ekvivalencie $\sim$. Označme H stavový graf a farbenie g indukované automatom $G_{\sim}^f$. Nech h' je nejaké farbenie pre H s farbami Σ . Vid' vzťah stavových grafov a farbení na Obrázku 1.6.



Obrázok 1.6: Vzťah stavových grafov a farbení z úvahy o indukovanom farbení, do obrázk ešte doplníme ďalšie informácie.

Z definície kongruencie plynie, že všetky hrany v G , ktoré vedú z vrcholov jednej triedy ekvivalencie $\sim$ a majú farbu α priradené farbením f , potom nutne majú koncový vrchol tiež v rovnakej triede. Tieto hrany spolu s farbením f definujú jednu hranu s farbou α v stavovom grafe H s farbením g , podľa Definície 25 a 10. Vid' ľavú časť na Obrázku 1.7.



Obrázok 1.7: Vysvetlenie indukovaného farbenia.

Definujeme nové farbenie h stavového grafu G . Nech hrane e stavového grafu H farbenie h' priradí farbu β . Potom všetkým hranám z G , ktoré spolu s farbením f definovali hranu e , farbenie h priradí farbu β . Takto definované farbenie h stavového grafu G nazveme indukovaným farbením h' . Viď pravú časť Obrázka 1.7. Nasleduje formálna definícia indukovaného farbenia.

Definícia 26 (indukované farbenie). Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d , f jeho farbenie s abecedou $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$ a G^f indukovaný automat. Ďalej nech $\sim$ je kongruencia automatu G^f . Označme H stavový graf indukovaný faktorovým automatom $G^f_{\sim}$.

Nech h' je nejaké farbenie H , potom definujeme farbenie h stavového grafu G tak, že

$$h(v, i) := \beta$$

práve vtedy, keď $f(v, i) = \alpha_j$ a $h'([v]_{\sim}, j) = \beta$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, d\}$ a $v \in V$.

Farbenie h nazývame *indukovaným farbením* h' .

Poznamenajme, že pri definícii indukovaného farbenia sme využili značenie hrán z Definície 10.

Definícia 27 (stabilita, Čulík II a kol. (2002)). Nech $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je automat. Dvojicu stavov p, q z Q nazývame *stabilnou*, ak pre všetky slová $w \in \Sigma^+$ je dvojica $p \cdot w, q \cdot w$ synchronizovateľná. Ak navyše stavy p, q sú rôzne, hovoríme o *netriviálnej stabilnej dvojici*.

Kongruenciu $\sim$ na $Q \times Q$ nazývame *stabilnou*, ak pre všetky $p, q \in Q$ platí, ak $p \sim q$, potom p, q je stabilná dvojica.

Pokračovanie Príkladu 2. Z Obrázku 1.5 je vidieť, že ρ je stabilná kongruencia.

Tvrdenie 28 (existencia stabilnej kongruencie Čulík II a kol. (2002), Lemma 3). Nech $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je automat a p, q je stabilná dvojica. Potom existuje stabilná kongruencia $\sim_s$ taká, že $p \sim_s q$.

Dôkaz. Definujeme reláciu $\sim_s$ na množine Q tak, že

$$x \sim_s y \Leftrightarrow x, y \text{ je stabilná dvojica.}$$

Najprv dokážeme, že relácia $\sim_s$ je ekvivalencia. Symetria a reflexivita sú zrejmé z definície stabilnej dvojice. Ukážme tranzitivitu. Nech $x \sim_s y$ a $y \sim_s z$, potom

chceme $x \sim_s z$. Dvojica x, y je stabilná. Preto pre ľubovoľné slovo $u \in \Sigma^+$ existuje slovo $s \in \Sigma^+$ také, že $x \cdot us = y \cdot us$. Podobne pre stabilnú dvojicu y, z a slovo us platí $y \cdot ust = z \cdot ust$ pre nejaké slovo $t \in \Sigma^+$. Z rovnosti $x \cdot us = y \cdot us$ plynie, že $x \cdot ust = y \cdot ust$. Pre ľubovoľné slovo u sme našli slovo st s vlastnosťou $x \cdot ust = z \cdot ust$. Teda dvojica x, z je stabilná.

Ak a, b je stabilná dvojica, potom zrejme $a \cdot \alpha, b \cdot \alpha$ je stabilná dvojica pre každé písmeno $\alpha \in \Sigma$. Vidíme, že $\sim_s$ je stabilná kongruencia. $\square$

Všetky tvrdenia, ktoré potrebujeme k dôkazu hlavnej vety požadujú existenciu stabilnej kongruencie $\sim$ takej, že pre zadanú stabilnú dvojicu p, q platí $p \sim q$. Preto sme dokázali, že vždy nejaká s požadovanou vlastnosťou existuje. Z dôvodu časovej zložitosti algoritmu použijeme v druhej kapitole inú kongruenciu ako $\sim_s$. Pomocou Tvrdenia 28 dokážeme, že je stabilná.

Nasledujúca veta ukazuje, že indukované farbenie zachováva stabilitu ekvivalentných stavov.

Tvrdenie 29. *Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d, f jeho farbenie s d-prvkovou abecedou Σ a $\sim$ stabilná kongruencia automatu G^f . Označme H stavový graf faktorového automatu $G_\sim^f$. Nech h' je nejaké farbenie stavového grafu H a h' indukuje farbenie h .*

Potom $\sim$ je stabilná kongruencia automatu G^h a automaty $G_\sim^h, H^{h'}$ sú rovnaké tj. množiny stavov, abecedy a predchodové funkcie sú rovnaké.

Pre lepšiu predstavu o vzťahu stavového grafu, farbenia a automatu z predchádzajúceho tvrdenia viď Obrázok 1.8.

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{f} & G^f & \xrightarrow{\sim} & G_\sim^f \\
 \downarrow h & & & & \downarrow \\
 & & & \swarrow & H \\
 & & & h' \downarrow & \\
 G^h & \xrightarrow{\sim} & G_\sim^h & = & H^{h'}
 \end{array}$$

Obrázok 1.8: Vzťah stavového grafu, farbenia a automatu z Tvrdenia 29.

Dôkaz. Najprv dokážeme, že $\sim$ je stabilná kongruencia pre automat G^h . Nech $u = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \in \Sigma^+$ je nejaké slovo. Potom slovo u a stavy p_0, q_0 definujú sledy v G

$$\begin{aligned}
 & (p_0, \alpha_1, p_1)_f, (p_1, \alpha_2, p_2)_f, \dots, (p_{m-1}, \alpha_m, p_m)_f \\
 & (q_0, \alpha_1, q_1)_f, (q_1, \alpha_2, q_2)_f, \dots, (q_{m-1}, \alpha_m, q_m)_f
 \end{aligned}$$

a $p_0 \cdot u = p_m, q_0 \cdot u = q_m$ v automate G^f . Nech p_0, q_0 je stabilná dvojica. Potom zrejme každá dvojica p_i, q_i je stabilná v G^f . Predpokladajme, že $p_0 \sim q_0$. Potom z definície kongruencie $\sim$ plynie, že $p_i \sim q_i$ pre $i = 1, 2, \dots, m$.

Z definície indukovaného farbenia h máme rovnosť

$$\beta_i = h(p_i, f_{p_i}^{-1}(\alpha_{i+1})) = h(q_i, f_{q_i}^{-1}(\alpha_{i+1})).$$

Teda hranám sledov farbenie h priradí farby tak, že $\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$ a p_0, q_0 definujú sledy, ktoré sú rovnaké ako predchádzajúce

$$(p_0, \beta_1, p_1)_h, (p_1, \beta_2, p_2)_h, \dots, (p_{m-1}, \beta_m, p_m)_h$$

$$(q_0, \beta_1, q_1)_h, (q_1, \beta_2, q_2)_h, \dots, (q_{m-1}, \beta_m, q_m)_h.$$

Vidíme, že $p_0 \cdot \beta_1 \ldots \beta_m = p_m$ a $q_0 \cdot \beta_1 \ldots \beta_m = q_m$ v automate G^h , teda $\sim$ je kongruencia pre automat G^h .

Ak p_0, q_0 je stabilná dvojica v automate G^f , potom je stabilná aj v G^h . Teda $\sim$ je stabilná kongruencia pre G^h .

Abecedy sú zrejme rovnaké, a preto stačí dokázať rovnosť prechodových funkcií. Označme prechodovú funkciu δ_h automatu G^h a $\delta_{h'}$ automatu $H^{h'}$.

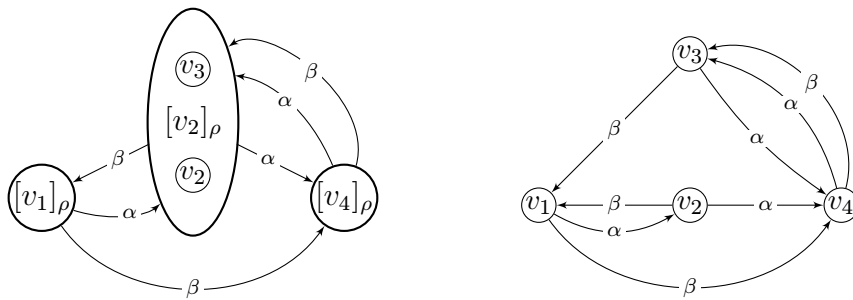
Nech $(p, i, q) \in E$ je hrana s farbou α_j tj. $f(p, i) = \alpha_j$ pre nejaké $j \in \{1, 2, \dots, d\}$. Faktorový automat $G_\sim^f = (Q_\sim, \Sigma, \delta_\sim)$, indukuje stavový graf H s farbením g .

Podľa Definície 25 platí, že $\delta_\sim([p]_\sim, \alpha_j) = [q]_\sim$. Potom podľa Definície 10 je v H hrana $([p]_\sim, j, [q]_\sim)$ a $g([p]_\sim, j) = \alpha_j$.

Nech $h'([p]_\sim, j) = \beta$, potom $\delta_{h'}([p]_\sim, \beta) = [q]_\sim$. Podľa Definície 26 indukované farbenie $h(p, i) = \beta$, a teda $\delta_h([p]_\sim, \beta) = [q]_\sim$ podľa Definície 25. Z tejto úvahy plynie rovnosť prechodových funkcií δ_h a $\delta_{h'}$. □

Pokračovanie Príkladu 2 . Označme H stavový graf a g farbenie indukované automatom G_ρ^f . Definujeme nové farbenie h' stavového grafu H výmenou farieb hranám $([v_2]_\rho, \alpha, [v_1]_\rho)_g, ([v_2]_\rho, \beta, [v_4]_\rho)_g$. Stavový graf H s farbením h' je vľavo na Obrázku 1.9. Nech farbenie h' indukuje farbenie h . Vpravo na Obrázku 1.9 je G s farbením h .

Kongruencia ρ je stabilná kongruencia automatu G^f , potom ρ je stabilná kongruencia automatu G^h podľa dokázaného Tvrdenia 29.



Obrázok 1.9: Automat $G_\rho^{h'}$ a automat G^h .

1.3.1 Vlastnosti faktorového automatu

Teraz dokážeme, že automat a jeho faktorový automat podľa stabilnej kongruencie „zachovávajú“ silnú súvislosť, periódu a rank. Ako sme naznačili, hlavnú vetu budeme dokazovať matematickou indukciou, a teda tieto vlastnosti použijeme v indukčnom kroku.

Tvrdenie 30 (silne súvislý stavový graf). *Nech $G = (V, E)$ je silne súvislý stavový graf, f nejaké jeho farbenie s abecedou Σ a $\sim$ stabilná kongruencia automatu G^f . Potom stavový graf H indukovaný faktorovým automatom $G^f_\sim$ je silne súvislý.*

Dôkaz. Nech $[p]_\sim, [q]_\sim$ sú vrcholy H . Zo silnej súvislosti stavového grafu G pre dvojicu $p, q \in V$ existuje sled z p do q . Tomuto sledu odpovedá nejaké slovo $u \in \Sigma^+$. Potom z definície prechodovej funkcie faktorového automatu plynie, že $[p]_\sim$ a slovo u definujú sled z $[p]_\sim$ do $[q]_\sim$ v stavovom grafe H .

Analogicky sa ukáže, že existuje sled z $[q]_\sim$ do $[p]_\sim$. Teda stavový graf H je silne súvislý. □

Ďalej dokážeme pomocné tvrdenie, ktoré použijeme k dôkazu vety o perióde stavového grafu indukovaného faktorovým automatom.

Tvrdenie 31. *Nech $G = (V, E)$ je silne súvislý stavový graf a $k = \text{per}(G)$. Potom $l \in \mathbb{N}$ delí k práve vtedy, keď existuje rozklad $V_0, \dots, V_{l-1}$ množiny V taký, že pre každú hranu $(p, i, q) \in E$ platí*

$$p \in V_j, \text{ kde } j \in \{0, 1, \dots, l-1\} \Rightarrow q \in V_{j+1 \bmod l}. \quad (1.1)$$

Najprv dokážeme pomocné Lema 32. Myšlienka definovať ekvivalenciu $\approx$ je prevzatá z článku Jarvis a Shier (1996) str. 9.

Lema 32. *Nech G je stavový graf z Tvrdenia 31 a nech l delí $k = \text{per}(G)$. Na množine V definujeme reláciu $\approx$ tak, že*

$$p \approx q \Leftrightarrow m \equiv 0 \pmod{l},$$

kde m je dĺžka nejakého sledu z p do q . Potom $\approx$ je ekvivalencia.

Dôkaz. Pre vrcholy p, q platí $p \approx q$ práve vtedy, keď sled z p do q má dĺžku rovnú násobku l . K overeniu korektnosti definície $\approx$ ukážeme, že dĺžky rôznych sledov L_1, L_2 z p do q spĺňajú rovnosť

$$|L_1| \equiv |L_2| \pmod{l}.$$

Zo silnej súvislosti G plynie existencia sledu P z q do p . Potom L_1P a L_2P sú sledy z p do p . Podľa Tvrdenia 20 platí, že

$$|L_1P| \equiv 0 \equiv |L_2P| \pmod{k}.$$

Z tejto rovnosti a predpokladu $l \mid k$ plynie, že $|L_1| \equiv |L_2| \pmod{l}$. Teda definícia relácie $\approx$ je korektná.

Dokážeme, že $\approx$ je ekvivalencia. Reflexivita a tranzitivita sú zrejmé. Potrebujeme dokázať symetriu. Nech platí $p \approx q$, potom ukážeme, že $q \approx p$. Nech R_1 je sled z q do p . Zo silnej súvislosti existuje sled R_2 z p do q . Potom R_1R_2 je sled z q do q . Podľa Tvrdenia 20 k delí $|R_1R_2|$. Pretože $p \approx q$, potom l delí R_2 , a teda aj R_1 . □

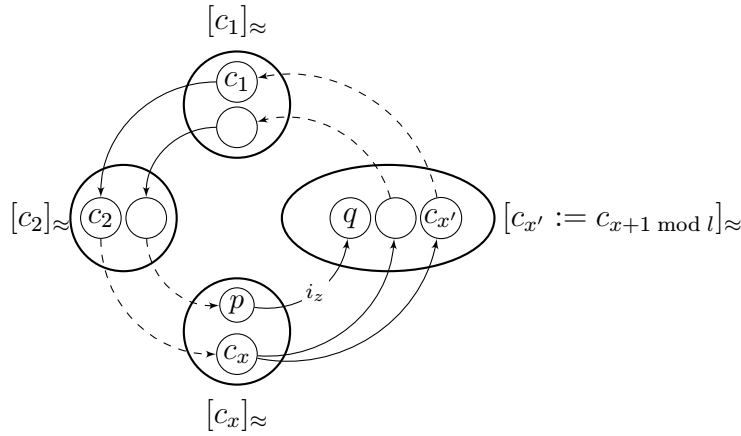
Dôkaz Tvrdenia 31. Nech $V_0, \dots, V_{l-1}$ je rozklad s vlastnosťou (1.1). Potom každá kružnica (sled) začína aj končí v jednej množine V_y z rozkladu. Preto l delí dĺžku každej kružnice, a teda aj periódu k .

Dokážme implikáciu zľava doprava. Pretože $\text{per}(G) \geq k$, existuje kružnica $(c_0, i_0, c_1), (c_1, i_1, c_2), \dots, (c_{m-1}, i_{m-1}, c_0)$, kde $m \geq k$. Platí $l \mid m$ a

$$[c_0]_{\approx}, [c_1]_{\approx}, \dots, [c_{l-1}]_{\approx}$$

je l rôznych tried ekvivalencie, pretože medzi každými dvomi vrcholmi z množiny $\{c_0, c_1, \dots, c_{l-1}\}$ existuje sled dĺžky menšej ako l . Každý vrchol z V patrí do jednej z tried podľa definície $\approx$. Zostáva overiť vlastnosť (1.1).

Nech (p, i_z, q) je hrana a $p \in [c_x]_{\approx}$, kde $x \in \{0, 1, \dots, l-1\}$. Potom ukážeme, že $q \in [c_{x+1 \bmod l}]_{\approx}$. Situácia je znázornená na Obrázku 1.10.



Obrázok 1.10: Rozklad $[c_0]_{\approx}, [c_1]_{\approx}, \dots, [c_{l-1}]_{\approx}$ množiny V s vlasnosťou (1.1).

Sled C z $c_{x+1 \bmod l}$ do c_x má dĺžku rovnú $l \cdot s + (l-1)$, kde $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. To plyní z toho, že buď z c_x vedie hrana do $c_{x+1 \bmod l}$ alebo $x+1 = l$, a teda z $c_{x+1 \bmod l} = c_0$ do $c_x = c_{l-1}$ vedie sled dĺžky $l-1$.

Zo silnej súvislosti existuje sled M z c_x do p . Dĺžka $|M|$ je násobok l , pretože c_x a p ležia v triede $[c_x]_{\approx}$. Nech $|M| = t \cdot l$ pre nejaké $t \in \mathbb{N}$. Sled $CM(p, i_z, q)$ z $c_{x+1 \bmod l}$ do q má dĺžku $l \cdot s + (l-1) + t \cdot l + 1$. Vidíme, že l delí $|CM(p, i_z, q)|$, a teda $q \in [c_{x+1 \bmod l}]_{\approx}$. □

Tvrdenie 33 (o perióde). *Nech $G = (V, E)$ je silne súvislý stavový graf, f nejaké jeho farbenie s abecedou Σ a G^f indukovaný automat. Označme $H = (V_{\sim}, E_{\sim})$ stavový graf faktorového automatu $G_{\sim}^f$, kde $\sim$ je stabilná kongruencia pre G^f . Potom*

$$\text{per}(G) = \text{per}(H).$$

Nasledovný dôkaz je založený na dôkaze Theorem 6 z Béal a Perrin (2012).

Dôkaz. Označme periódy $k = \text{per}(G)$ a $k_{\sim} = \text{per}(H)$. Najprv dokážeme, že $k_{\sim} \mid k$ a potom $k \mid k_{\sim}$.

Z predchádzajúceho Tvrdenia 31 máme rozklad $A_0, \dots, A_{k_{\sim}-1}$ množiny $V_{\sim}$ splňujúci vlastnosť (1.1). Ukážeme, že množiny

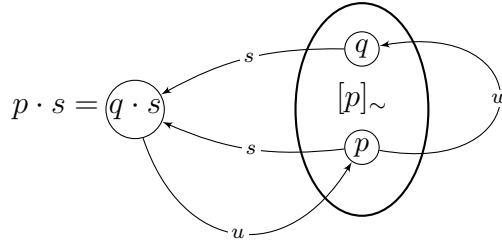
$$B_i := \{p : [p]_{\sim} \in A_i\} \quad i = 0, \dots, k_{\sim} - 1$$

tvoria rozklad V s vlastnosťou (1.1), a teda $k_\sim$ delí k .

Zrejme množiny B_i tvoria rozklad V . Nech $(u, \alpha, v)_f \in E$ a $u \in B_i$, kde α je ľubovoľná farba zo Σ , potom $[u]_\sim \in A_i$. Platí $[u]_\sim \cdot \alpha = [v]_\sim$. Teda $[v]_\sim \in A_{i+1 \bmod k_\sim}$. Vidíme, že $v \in B_{i+1 \bmod k_\sim}$ a je splnená podmienka (1.1). Teda $k_\sim$ delí k .

Ukážeme, že dĺžka každej kružnice v H je deliteľná k , a preto k delí $k_\sim$. Nech je daná nejaká kružnica tj. sled z $[p]_\sim$ do $[p]_\sim$ v H dĺžky m .

Dôkaz ilustrujeme na Obrázku 1.11.



Obrázok 1.11: K dôkazu Tvrdenia 33, že k delí $|w|$.

Tomuto sledu podľa Poznámky 12 odpovedá slovo $w \in \Sigma^+$ také, že $[p]_\sim = [p]_\sim \cdot w$ a $|w| = m$ v $G_\sim^f$. Slovo w a stav p podľa Poznámky 12 definuje sled z p do $p \cdot w$ v G s farbením f . Označme vrchol $q = p \cdot w$. Stav q odpovedá triede $[q]_\sim = [p]_\sim$, ale nemusí platiť $p = q$. Pretože $\sim$ je stabilná kongruencia a $p \sim q$, existuje slovo $s \in \Sigma^+$ s vlastnosťou $p \cdot s = q \cdot s$. Zo silnej súvislosti existuje slovo $u \in \Sigma^+$ také, že $p = (p \cdot s) \cdot u$. Potom $p = q \cdot su$. Z toho plynie, že $p = q \cdot su = p \cdot wsu$. Slová su a wsu a vrchol p definujú uzavreté sledy z p do p v G . Podľa Tvrdenia 20 platí, že k delí $|su|$, $|wsu|$, a teda aj $|wsu| - |su| = |w| = m$. Tým je dôkaz dokončený. □

Pre dôkaz hlavnej vety nepotrebujeme nasledovné tvrdenie v tak silnom znení, ale tvrdenie použijeme pri dôkaze vety 18. Postačujúce tvrdenie dokazujeme v poznámke za dôkazom.

Tvrdenie 34 (rank faktorového automatu). *Nech $G^f = (Q, \Sigma, \delta)$ je nejaký automat a $\sim$ je jeho stabilná kongruencia. Označme $G_\sim^f = (Q_\sim, \Sigma, \delta_\sim)$ faktorový automat automatu G^f . Potom platí*

$$\text{rank}(G^f) = \text{rank}(G_\sim^f).$$

Nasledovný dôkaz je doplnený dôkaz z Béal a Perrin (2012), Theorem 6.

Dôkaz. Nech $Q \cdot v$ je minimálny obraz G^f , kde $v \in \Sigma^+$. Ukážeme, že $|Q_\sim \cdot v| = |Q \cdot v|$ a $Q_\sim \cdot v$ je minimálny obraz $G_\sim^f$, tým bude veta dokázaná.

Podľa Poznámky 4 žiadne dva rôzne stavy z $Q \cdot v$ netvoria synchronizovateľnú dvojicu, a preto nepatria do rovnakej triedy ekvivalencie $\sim$. Zrejme neplatí nerovnosť $|Q_\sim \cdot v| > |Q \cdot v|$. Ak by $|Q_\sim \cdot v| < |Q \cdot v|$, potom nejaké dva stavy z $Q \cdot v$ patria do rovnakej triedy ekvivalencie $\sim$. To by bol spor. Teda $|Q \cdot v| = |Q_\sim \cdot v|$.

Zostáva dokázať, že $Q_\sim \cdot v$ má minimálnu mohutnosť. Pre spor predpokladajme, že $Q_\sim \cdot v$ nie je minimálny obraz. Teda existuje slovo w také, že

$$|Q_\sim \cdot w| < |Q_\sim \cdot v|.$$

Pretože $Q_{\sim} \cdot v \subseteq Q_{\sim}$, potom $|(Q_{\sim} \cdot v) \cdot w| < |Q_{\sim} \cdot v|$. To znamená, že v $Q_{\sim} \cdot v$ sú dva rôzne stavy, ktoré tvoria synchronizovateľnú dvojicu. Nech $[i]_{\sim}, [j]_{\sim}$ sú také dve triedy, kde $i, j \in Q \cdot v$. Máme $[i]_{\sim} \cdot w = [j]_{\sim} \cdot w$. Potom dostávame, že $i \cdot w$ a $j \cdot w$ patria do rovnakej triedy. Pretože $\sim$ je stabilná kongruencia, v triede $\sim$ sú každé dva stavy stabilné (v G^f), platí $i \cdot wu = j \cdot wu$ pre nejaké slovo $u \in \Sigma^+$. To znamená, že i, j je synchronizovateľná dvojica, ale to je spor, pretože i, j sú prvky minimálneho obrazu $Q \cdot v$, viď Poznámku 4. □

Poznámka 35. Ukážme dôkaz z pohľadu synchronizujúceho slova. Nech automat G^f má synchronizujúce slovo v , potom nájdeme synchronizujúce slovo pre G^f . Vieme, že $Q_{\sim} \cdot v = \{[p]_{\sim}\}$ pre nejaký stav $p \in Q$. Potom $Q \cdot v \subseteq [p]_{\sim}$.

Postupne vytvoríme slovo w také, že $|[p]_{\sim} \cdot w| = 1$. Zápisom $[p]_{\sim}$ rozumieme množinu stavov z Q . Potom automat G^f má synchronizujúce slovo vw , pretože $|Q \cdot vw| = 1$.

Ak množina $[p]_{\sim}$ je jednoprvková, potom v je zrejme synchronizujúcim slovom pre G^f . Pripomeňme, že všetky dvojice stavov z množiny triedy stabilnej ekvivalencie $\sim$ sú stabilné v G^f .

Predpokladajme, že v $[p]_{\sim}$ sú aspoň dva rôzne stavy. Vieme, že pre dva rôzne stavy $q_1, q_2 \in [p]_{\sim}$ existuje slovo $w_1 \in \Sigma^+$ s vlastnosťou $q_1 \cdot w_1 = q_2 \cdot w_1$. Potom určite platí nerovnosť $|[p]_{\sim} \cdot w_1| < |[p]_{\sim}|$ v G^f . Z definície stabilnej kongruencie plynie, že $[p]_{\sim} \cdot w_1 \subseteq [p \cdot w_1]_{\sim}$.

Ak existujú, z množiny $[p]_{\sim} \cdot w_1$ vezmeme dva rôzne stavy q'_1, q'_2 . Z predpokladu existuje slovo w_2 také, že $q'_1 \cdot w_2 = q'_2 \cdot w_2$. Potom dostaneme

$$|([p]_{\sim} \cdot w_1) \cdot w_2| < |[p]_{\sim} \cdot w_1|.$$

Postup opakujeme, až kým nedostaneme slovo $w_1 w_2 \dots w_m$ také, že

$$|[p]_{\sim} \cdot w_1 w_2 \dots w_m| = 1.$$

Pretože Q je konečná, po konečnom počte opakovaní dostaneme slovo $w = w_1 w_2 \dots w_m$.

Predpokladajme, že existuje farbenie pre aperiodický silne súvislý stavový graf také, že indukuje automat s netriviálnou stabilnou dvojicou. Potom z predchádzajúcich tvrdení plynie, že sme problém hľadania synchronizujúceho farbenia pre aperiodický silne súvislý stavový graf previedli na menší stavový graf rovnakého „typu“. Tento poznatok je obsiahnutý v nasledovnej vete.

Veta 36 (Čulík II a kol. (2002), Theorem 2). *Nech pre každý aperiodický silne súvislý stavový graf G s aspoň dvomi vrcholmi existuje farbenie také, že automat G^f má netriviálnu stabilnú dvojicu. Potom pre každý aperiodický silne súvislý stavový graf existuje synchronizujúce farbenie.*

Dôkaz. Schéma vzťahu stavových grafov, farbení a automatov je rovnaká ako na Obrázku 1.8. Tvrdenie budeme dokazovať matematickou indukciou podľa počtu vrcholov. Špeciálne z predpokladu pre stavový graf s dvomi vrcholmi existuje farbenie také, že existuje netriviálna stabilná dvojica. Zrejme je toto farbenie

synchronizujúce. Pre stavový graf s jedným vrcholom je každé farbenie synchronizujúce. Predpokladajme platnosť vety pre počet stavov menší ako n . Dokážeme vetu pre aperiodický silne súvislý stavový graf s n vrcholmi.

Nech G je nejaký aperiodický silne súvislý stavový graf s n vrcholmi. Z predpokladu existuje farbenie f také, že v automate G^f existuje netriviálna stabilná dvojica stavov. Označme netriviálnu stabilnú dvojicu p, q . Podľa Tvrdenia 28 existuje stabilná kongruencia $\sim$ automatu G^f taká, že $p \sim q$. Potom faktorový automat $G^f_{\sim}$ má najviac $n-1$ stavov a jeho stavový graf je silne súvislý podľa Tvrdenia 30 a aperiodický podľa Tvrdenia 33. Označme H stavový graf indukovaný faktorovým automatom $G^f_{\sim}$.

Z indukčného predpokladu plynie existencia synchronizujúceho farbenia h' pre stavový graf H . Nech h' indukuje farbenie h pre stavový graf G . Podľa Tvrdenia 29 faktorové automaty $G^h_{\sim}$ a $H^{h'}$ sú rovnaké, a teda podľa Tvrdenia 34 farbenie h je synchronizujúce pre G . □

K dôkazu hlavnej Vety 17 zostáva nájsť farbenie stavového grafu indukujúce automat s netriviálnou stabilnou dvojicou. To dokážeme v ďalšej sekcii.

1.4 Farbenie s netriviálnou stabilnou dvojicou

K dôkazu hlavnej vety stačí nájsť farbenie pre aperiodický silne súvislý stavový graf také, že indukovaný automat má netriviálnu stabilnú dvojicu. To plynie z Vety 36. Uvedieme mierne upravený dôkaz z článkov Trahtman (2007) a Trahtman (2012). Dvojica Béal a Perrin (2012) si všimla, že dôkaz platí pre každý silne súvislý stavový graf, ktorý nie je „kružnicový“. Toto zobecnenie spolu s vlastnosťami faktorového automatu použijeme v závere kapitoly pri dôkaze existencie k -synchronizujúceho farbenia, ktorý je dôsledkom dôkazu hlavnej vety.

Kľúčovým pozorovaním je vzťah minimálneho obrazu, netriviálnej stabilnej dvojice a podgrafu, kde z každého vrcholu vychádza práve jedna hrana.

Definícia 37 (kružnicový graf). Stavový graf $G = (V, E)$ nazveme *kružnicovým*, ak

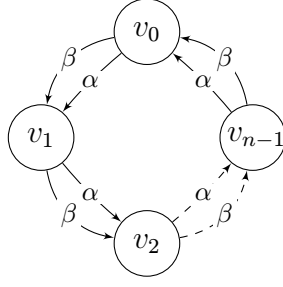
$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

a

$$E = \{(v_j, i, v_{j+1 \bmod n}) : v_j \in V, i = 1, 2, \dots, d\}.$$

Podľa definície kružnicového grafu máme $\delta_0(v_j, i) = v_{j+1 \bmod n}$ pre všetky $v_j \in V$ a $i = 1, 2, \dots, d$.

Príklad 3. Z Obrázku 1.12 je zrejmé, že každý kružnicový stavový graf G a nejaké jeho farbenie f indukuje automat G^f , ktorý nemá netriviálnu stabilnú dvojicu. Navyše je vidieť, že $n = \text{per}(G)$ a každé farbenie je n -synchronizujúce, kde n je počet vrcholov grafu G .



Obrázok 1.12: Kružnicový stavový graf výstupňa 2 s n vrcholmi a n -synchronizujúcim farbením.

Pozrime sa na vlastnosť dvoch špeciálnych minimálnych obrazov a netriviálnej stabilnej dvojice.

Tvrdenie 38 (Béal a Perrin (2012), Lemma 4). *Nech $A = (Q, \Sigma, \delta)$ je automat a N_1, N_2 sú minimálne obrazy automatu A také, že*

$$N_1 = N \cup \{n_1\} \quad N_2 = N \cup \{n_2\},$$

kde $N \subseteq Q$ a n_1, n_2 sú dva rôzne stavy z $Q \setminus N$. Potom n_1, n_2 je netriviálna stabilná dvojica.

Dôkaz. Nech v je ľubovoľné slovo z Σ^+ , nájdeme slovo $w \in \Sigma^+$ také, že $n_1 \cdot vw = n_1 \cdot vw$ tj. n_1, n_2 je stabilná dvojica.

Zrejme množiny $N_1 \cdot v$ a $N_2 \cdot v$ sú minimálne obrazy. Nech $Q \cdot u$ je nejaký minimálny obraz. Vieme, že $N_1 \cdot v \cup N_2 \cdot v \subseteq Q$. Potom určite platí

$$N_1 \cdot vu \subseteq (N_1 \cdot v \cup N_2 \cdot v) \cdot u \subseteq Q \cdot u.$$

Z rovnosti mohutností minimálnych obrazov plynie, že $|(N_1 \cdot v \cup N_2 \cdot v) \cdot u| = |N_1|$.

Vieme, že

$$\begin{aligned} N_1 \cdot v &= N \cdot v \cup \{n_1 \cdot v\}, \\ N_2 \cdot v &= N \cdot v \cup \{n_2 \cdot v\}. \end{aligned}$$

Z definícií minimálneho obrazu plynie, že $|N \cdot v| = |N|$. Potom buď $|(N_1 \cdot v \cup N_2 \cdot v)| = |N_1|$, a teda $n_1 \cdot v = n_2 \cdot v$, alebo $|(N_1 \cdot v \cup N_2 \cdot v)| = |N_1| + 1$. Potom pre nejaké dva stavy p, q z množiny

$$(N_1 \cdot v \cup N_2 \cdot v) = N \cdot v \cup \{n_1 \cdot v, n_2 \cdot v\}$$

musí platiť, že $p \cdot u = q \cdot u$, pretože $|(N_1 \cdot v \cup N_2 \cdot v) \cdot u| = |N_1|$.

Zrejme nemôže $p, q \in N \cdot v$, pretože každé dva stavy v minimálnom obraze sú nesynchronizovateľné. Ak $p \in N \cdot v$ a $q \in \{n_1 \cdot v, n_2 \cdot v\}$, opäť sme dostali spor, pretože $N_1 \cdot v$ a $N_2 \cdot v$ sú minimálne obrazy. Jediná možnosť je, že $p = n_1 \cdot v$ a $q = n_2 \cdot v$. Teda hľadané slovo $w = u$. □

Teraz musíme nájsť farbenie také, že existujú minimálne obrazy N_1, N_2 z predpokladu Tvrdenia 38. To dosiahneme vhodnou voľbou hrán, ktorým priradíme rovnakú farbu.

Ak by pre každé farbenie vždy existovali dve také množiny, potom by zrejme každé farbenie bolo synchronizujúce. To plynie z Vety 36. Ale už sme videli príklad nesynchronizujúceho farbenia.

Nech $G = (V, E)$ je orientovaný multigraf.

Stromom v G nazývame podgraf $T = (V_T, E_T)$ taký, že jeden vrchol $r \in V_T$ má výstupnosť 0, všetky vrcholy z $V_T \setminus \{r\}$ majú výstupnosť 1 a z každého vedie sled do r v T . Vrchol r nazývame *koreňom*. Navyše neexistuje žiadny podgraf T' orientovaného multigrafu G rôznej od T taký, že T by bol podgrafom T' .

Hĺbkou vrcholu $p \in V_T$ rozumieme počet hrán sledu z p do r v T . Pre koreň definujeme hĺbku rovnú 0.

Hĺbkou stromu T rozumieme maximálnu hĺbku vrcholu v T . Strom s kladnou hĺbkou nazývame *netriviálnym*.

Nech a je vrchol stromu T . Potom vrchol b nazveme *potomkom* vrcholu a , ak $b = a$ alebo existuje sled z b do a v T .

Podgraf $P = (V_P, E_P)$ orientovaného multigrafu G nazývame *súvislou komponentou*, ak pre každé dva vrcholy $x, y \in V_P$ existuje postupnosť vrcholov $a_1 = x, a_2, \dots, a_m = y$ taká, že pre každé $j = 1, 2, \dots, m-1$ platí $(a_j, i, a_{j+1}) \in E_P$ alebo $(a_{j+1}, i', a_j) \in E_P$ pre nejaké $i, i' \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Neformálne povedané, v súvislej komponente každé dva vrcholy x, y sú spojené neorientovaným sledom. Viď Obrázok 1.13, kde pre dvojicu p_1, n_2 existuje postupnosť p_1, n_1, r, n_2 a príslušné hrany sú

$$(p_1, \alpha, n_1)_f, (n_1, \alpha, r)_f, (n_2, \alpha, r)_f.$$

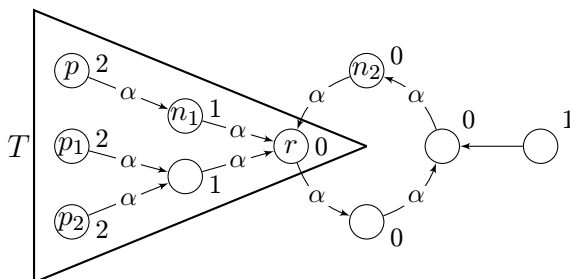
Značenie 39. Nech $G = (V, E)$ je stavový graf, f jeho farbenie s abecedou Σ a $\alpha \in \Sigma$. Potom $P_\alpha = (V, E_\alpha)$ označíme podgraf taký, že

$$E_\alpha = \{(p, \alpha, q)_f \in E : p \in V\}.$$

Hrany podgrafu P_α sú všetky hrany z G s farbou α . Z každého vrcholu z V vedie práve jedna hrana s farbou α , preto výstupnosť každého vrcholu v P_α je 1.

Súvislú komponentu v P_α nazývame *klastrom*.

Na Obrázku 1.13 je konkrétny príklad klastru a vyznačený strom T s koreňom r .



Obrázok 1.13: Príklad klastru.

V nasledujúcom tvrdení dokážeme, že všetky klastre majú rovnaký „tvar“ ako na Obrázku 1.13.

Tvrdenie 40 (nástin dôkazu Š. Holub, znenie z Trahtman (2007), Remark 1). *Nech $G = (V, E)$ je stavový graf a f jeho farbenie s abecedou Σ . Označme $K = (V_K, E_K)$ nejaký klaster v P_α , kde $\alpha \in \Sigma$. Potom v klastre K existuje práve jedna kružnica a z každého vrcholu, ktorým neprechádza táto kružnica, vedie sled do vrcholu ležiacom na tejto kružnici.*

Dôkaz. Každý vrchol v P_α má výstupeň 1. Potom existuje z každého vrcholu $v_0 \in V$ sled

$$(v_0, \alpha, v_1)_f, (v_1, \alpha, v_2)_f, \dots, (v_{m-1}, \alpha, v_m)_f$$

dĺžky $m > |V|$. Nutne sled prechádza niektorým vrcholom dvakrát. Teda v P_α z každého vrcholu vedie sled do vrcholu nejakej kružnice. Pretože v P_α má každý vrchol výstupeň 1, z každého vrcholu vedie sled do práve jednej kružnice.

Zrejme v každom v klastre $K = (V_K, E_K)$ existuje kružnica, označme ju C . Označme množinu vrcholov $N \subseteq V$ takých, že z každého vedie sled do vrcholu kružnice C . Tvrdíme, že $N = V_K$.

Zrejme $N \subseteq V_K$. Predpokladajme, že existuje nejaký vrchol n z $V_K \setminus N$. Potom zo súvislosti K existuje postupnosť vrcholov $n = a_1, a_2, \dots, a_m$, kde a_m je nejaký vrchol z N .

Zrejme neexistuje sled z n do a_m ani z a_m do n v P_α , inak by nutne $n \in N$. To znamená, že niektorý vrchol a_i , kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, má výstupeň aspoň 2. Dostali sme spor, a teda $N = V_K$. Pretože z vrcholu vedie sled do práve jednej kružnice, v klastre K existuje práve jedna kružnica. □

Nech K je klaster, ktorý obsahuje kružnicu C . Potom po odobratí hrán kružnice C zostanú stromy, ktorých korene ležia na kružnici C . Vid' Obrázok 1.13. Tento strom nazývame *stromom* v P_α 0.

Strom T v P_α nazveme *maximálnym*, ak všetky stromy v P_α majú hĺbku menšiu alebo rovnú ako T .

Na Obrázku 1.13 je zrejme T maximálny strom s hĺbkou 2. U každého vrcholu je poznačená jeho hĺbka.

Tvrdenie 41 (Trahtman (2007), Lemma 5). *Nech G je stavový graf a f jeho farbenie s abecedou Σ . Označme T nejaký strom v P_α a N nejaký minimálny obraz. Ak dva rôzne vrcholy p_1, p_2 stromu T majú rovnakú hĺbku, potom p_1 alebo p_2 neleží v N .*

Poznamenajme, že každý stav p patrí do nejakého minimálneho obrazu.

Konkrétny príklad stromu T je na Obrázku 1.13, kde sú vyznačené vrcholy p_1 a p_2 z Tvrdenia 41.

Dôkaz. Označme r koreň stromu T a n hĺbku vrcholov p_1, p_2 . Vrcholy majú rovnakú hĺbku, preto $p \cdot \alpha^n = r = q \cdot \alpha^n$. To znamená, že p_1, p_2 sú synchronizovateľné, a preto p_1 alebo p_2 nepatrí do N .

Nech $r \in N$, potom zo silnej súvislosti existuje sled z p do r , ktorému odpovedá nejaké slovo $v \in \Sigma^+$ vzhľadom k farbeniu f . Teda $p \in N \cdot v$, kde $N \cdot v$ je zrejme minimálny obraz. □

Tvrdenie 42 (maximálny strom a stabilná dvojica, Trahtman (2007), Lemma 5). *Nech $G = (V, E)$ je stavový graf s farbením f . Nech v P_α existuje práve jeden maximálny strom hĺbky l a $p \in V$ má hĺbku l . Označme m spoločný násobok dĺžok kružníc v P_α . Potom dvojica $p \cdot \alpha^{l-1}, p \cdot \alpha^{l-1+m}$ je netriviálna stabilná dvojica.*

Dôkaz. Označme vrcholy $n_1 = p \cdot \alpha^{l-1}, n_2 = p \cdot \alpha^{l-1+m}$. Podľa Tvrdenia 41 existuje minimálny obraz $I \subseteq V$ taký, že $p \in I$.

Položíme $N_1 = I \cdot \alpha^{l-1}, N_2 = I \cdot \alpha^{l-1+m}$. Zrejme N_1 a N_2 sú minimálne obrazy. Dokážeme, že $N_1 = N \cup \{n_1\}$ a $N_2 = N \cup \{n_2\}$, kde $N = (I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{l-1}$, a n_1, n_2 sú rôzne stavy z $V \setminus N$. Teda sú splnené podmienky Tvrdenia 38, a teda n_1, n_2 je netriviálna stabilná dvojica.

Z predpokladu a Tvrdenia 41 všetky vrcholy z $I \setminus \{p\}$ majú určite hĺbku menšiu ako l . Preto všetky vrcholy z $(I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{l-1}$ ležia na kružniciach v P_α .

Pre každý stav $q \in (I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{l-1}$ platí $q \cdot \alpha^m = q$, pretože q leží na kružnici, teda $(I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{l-1} = (I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{m+l-1}$.

Vrchol n_1 zreme neleží na žiadnej kružnici a n_2 leží na nejakej kružnici v P_α , preto $n_1 \neq n_2$. Zostáva ukázať, že $n_1, n_2 \notin N = (I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{l-1} = (I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{m+l-1}$. Ak by $n_1 = p \cdot \alpha^{l-1} \in (I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{l-1}$, potom pre nejaké $p_1 \in (I \setminus \{p\})$ by nutne $p_1 \cdot \alpha^{l-1} = p \cdot \alpha^{l-1}$ a to je spor, pretože v minimálnom obraze sú každé dva stavy nesynchronizovateľné. Analogicky pre $n_2 = p \cdot \alpha^{m+l-1} \in (I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{m+l-1} = (I \setminus \{p\}) \cdot \alpha^{l-1}$.

Množiny spĺňajú predpoklad z Tvrdenia 38, a teda n_1, n_2 je netriviálna stabilná dvojica. □

Predpokladajme, že v P_α je jeden klaster z Obrázku 1.13. Vrchol maximálnej hĺbky je p . Potom podľa predchádzajúceho tvrdenia n_1, n_2 je netriviálna stabilná dvojica, pretože $n_1 = p \cdot \alpha^{l-1}, n_2 = p \cdot \alpha^{l-1+m}$, kde $l = 2$ a $m = 4$.

Zostáva ukázať, že existuje farbenie f také, že podgraf P_α má práve jeden maximálny strom. Predtým si ukážeme stavový graf so slučkou, kde existencia takéhoto farbenia je jednoduchá. Navyše farbenie z dôkazu je synchronizujúce.

Tvrdenie 43 (stavový graf so slučkou). *Nech $G = (V, E)$ je silne súvislý stavový graf výstupňa d so slučkou $(p, i, p) \in E$. Potom existuje synchronizujúce farbenie s d -prvkovou abecedou Σ .*

Dôkaz. Postupne budeme vytvárať farbenie f . Pre každý vrchol q určíme hranu z q , ktorej priradíme farbu α t.j. $f(q, j) := \alpha$ pre nejaké $j \in \{1, 2, \dots, d\}$. Tým určíme jednoznačne P_α a ostatným hrán priradíme ľubovoľne farby tak, aby f bolo farbenie.

Najprv nech žiadna hrana nemá priradenú farbu. Slučke (p, i, p) priradíme farbu α . Zo silnej súvislosti existuje sled z každého vrcholu z V do p . Postupne pre každý vrchol prevedieme nasledujúce operácie. Nech $v \in V$ je vrchol a sled z v do p zo silnej súvislosti

$$(v = v_0, i_0, v_1), (v_1, i_1, v_2), \dots, (v_{m-1}, i_{m-1}, v_m = p).$$

Označme prvý vrchol v_x , $0 \leq x \leq m$, na tomto slede, z ktorého vedie nejaká hrana z E s farbou α . Hranám sledu

$$(v, i_0, v_1), (v_1, i_1, v_2), \dots, (v_{x-1}, i_{x-1}, v_x)$$

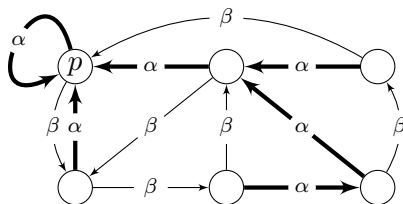
priradíme farbu α . V prípade, že existuje hrana z v s farbou α nerobíme nič. Poznamenajme, že vrchol v_x vždy existuje, pretože z p vedie hrana (p, i, p) a $f(p, i) = \alpha$.

Práve jednej hrane z každého vrcholu sme priradili farbu α . Z každého vrcholu existuje sled do p , ktorú tvoria len hrany s farbou α . Ostaným hranám priradíme farby tak, aby výsledné priradenie splňovalo podmienky na farbenie.

Pre každý stav v platí $v \cdot \alpha^{\text{hlbka}(v)} = p$ a zrejme $p \cdot \alpha = p$. Nech l je maximálna hĺbka v P_α , potom $V \cdot \alpha^l = \{p\}$. Vidíme, že α^l je synchronizujúce slovo, a teda f je synchronizujúce farbenie G . □

V dôkaze Tvrdenia 43 sme definovali také farbenie, že v P_α je práve jedna kružnica a to (p, i, p) , a teda práve jeden maximálny strom. Avšak k dôkazu, že výsledné farbenie je synchronizujúce sme nepoužili Tvrdenie 42.

Na Obrázku 1.15 je príklad silne súvislého stavového grafu so synchronizujúcim farbením, kde $(p, \alpha, p)_f$ je slučka. Synchronizujúce slovo je α^3 podľa Tvrdenia 43.

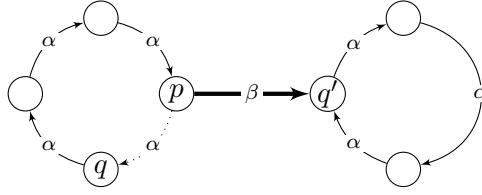


Obrázok 1.14: Stavový graf so slučkou z vrcholu p a synchronizujúcim farbením.

Tvrdenie 44 (nulové hĺbky implikujú farbenie s práve jedným maximálnym stromom, Trahtman (2007), Lemma 6). *Nech G je silne súvislý stavový graf a nie je kružnicový graf. Nech existuje farbenie g pre G také, že všetky vrcholy majú v P_α hĺbku 0. Potom existuje synchronizujúce farbenie f .*

Dôkaz. Nech g je nejaké farbenie G s abecedou Σ také, že všetky vrcholy v P_α majú hĺbku 0. Teda každý klaster v P_α je kružnica. Z predpokladu existuje vrchol p , z ktorého vedú dve hrany $(p, \alpha, q)_g$ a $(p, \beta, q')_g$ s rôznymi koncovými vrcholmi. Ak by také dve hrany neexistovali, potom nutne G je kružnicový graf.

Definujme farbenie f výmenou farieb hranám $(p, \alpha, q)_g$ a $(p, \beta, q')_g$, kde $\beta \in \Sigma$. Teraz vrchol q je jediný, do ktorého nevedie hrana v P_α . Potom q neleží na kružnici a má hĺbku aspoň 1. Teda v P_α je jeden netriviálny strom a veta je dokázaná. Vid' Obrázok 1.15. □



Obrázok 1.15: Podgraf P_α , všetky vrcholy majú hĺbku 0.

Definícia 45 (zvázok, centrované stavy). Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d . Ak hrany z vrcholu $v \in V$ majú rovnaký koncový vrchol u t.j. $\delta_0(v, i) = u$ pre $i = 1, 2, \dots, d$, potom hovoríme, že z v vedie *zvázok* do u .

Nech pre vrcholy $p \neq q$ platí $\delta_0(p, j) = \delta_0(q, k)$ pre všetky $j, k \in \{1, 2, \dots, d\}$, potom stavy p, q nazývame *centrovanými*.

Zrejme stavy p, q sú centrované práve vtedy, keď z p, q vedú zvázky do rovnakého vrcholu. Na Obrázku 1.16 je príklad stavového grafu s centrovanými stavmi p, q .



Obrázok 1.16: Centrované stavy p, q .

Tvrdenie 46 (Trahtman (2007), Lemma 4). Nech v stavovom grafe $G = (V, E)$ existujú centrované stavy p, q . Potom p, q je netriviálna stabilná dvojica v automate G^f pre ľubovoľné farbenie f s abecedou Σ .

Dôkaz. Pre všetky písmená $\alpha \in \Sigma$ platí

$$p \cdot \alpha = q \cdot \alpha$$

v automate G^f . Zrejme p, q je netriviálna stabilná dvojica. □

Tvrdenie 47 (existencia práve jedného maximálneho stromu). Nech G je silne súvislý stavový graf výstupňa d , ktorý nie je kružnicový graf, neobsahuje slučky a centrované stavy. Potom existuje farbenie stavového grafu G také, že v P_α je práve jeden maximálny strom.

Nasledovný dôkaz je pozmenený dôkaz z Trahtman (2007) (Lemma 7).

Dôkaz. Vzhľadom na to, že v G je končený počet hrán, existuje farbenie stavového grafu G s d -prvkovou abecedou Σ také, že v P_α je maximálny počet hrán na kružniciach. Predpokladajme, že máme takéto farbenie a označme ho f .

Ak v P_α je práve jeden maximálny strom, potom dôkaz skončíme. Ak všetky vrcholy z P_α majú hĺbku 0, potom podľa Tvrdenia 44 existuje farbenie také, že v P_α je práve jeden maximálny strom. Zostáva prípad, kedy v P_α sú aspoň dva maximálne netriviálne stromy.

Označme T jeden maximálny strom s koreňom r . Nech K je klaster obsahujúci T s kružnicou C v P_α . Označme t vrchol z T maximálnej hĺbky.

Dôkaz rozdelíme do dvoch hlavných krokov na základe umiestenia vrcholov a hrán.

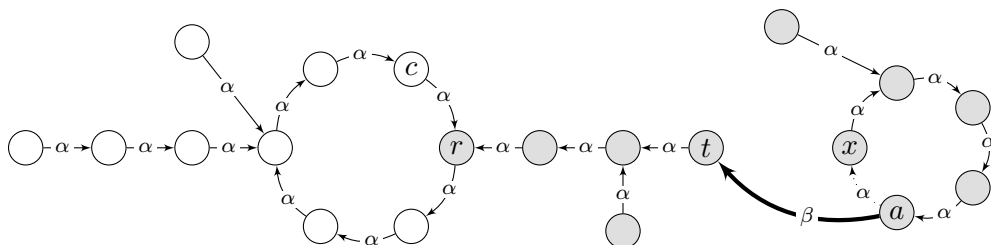
1.krok. Zo silnej súvislosti G existuje vrchol a , z ktorého vedie hrana do t . Nech $(a,\beta,t)_f$ je hrana pre $\beta \in \Sigma$ a $\beta \neq \alpha$. Nech x je koncový vrchol hrany z a s farbou α tj. $(a,\alpha,x)_f \in E$.

V každom kroku robíme vždy rovnakú výmenu farieb hranám

$$(a,\alpha,x)_f \text{ a } (a,\beta,t)_f. \quad (1.2)$$

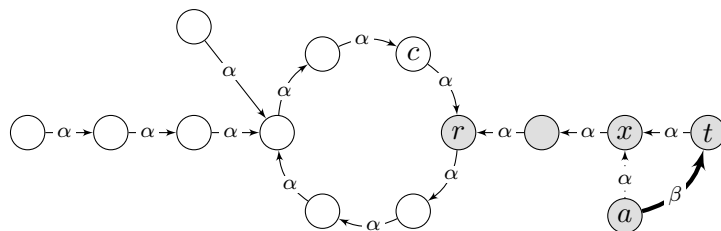
Teraz rozoberieme prípady podľa toho kam patrí vrchol a a vplyv výmeny (1.2).

1.1. Nech a nepatrí do klastru K , potom po výmene (1.2) sme k vrcholu t pripojili vrchol a . Touto výmenou dostaneme práve jeden maximálny strom v P_α , ktorého koreň je r . Viď Obrázok 1.17.



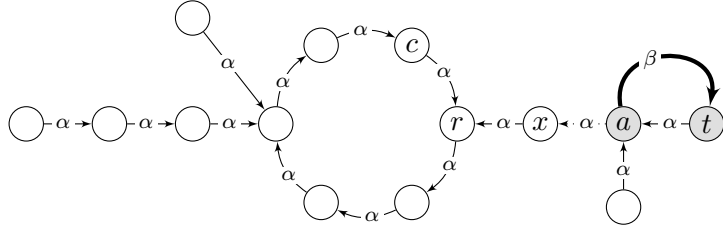
Obrázok 1.17: Prípád 1.1, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu po výmene (1.2).

1.2. Nech a patrí do klastru K , má kladnú hĺbku a t nie je potomkom a . Po výmene (1.2) sme k vrcholu t pripojili vrchol a . Touto výmenou dostaneme maximálny strom v P_α , ktorého koreň je r . Viď Obrázok 1.18.



Obrázok 1.18: Prípád 1.2, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu po výmene (1.2).

1.3. Nech $a \neq r$ a t je potomkom a . Poznamenajme, že $t \neq a$, pretože sme v predpoklade vylúčili prítomnosť slučiek. Po výmene (1.2) dostaneme novú kružnicu, ktorá je tvorená sledom z t do a v P_α a hranou $(a,\beta,t)_f$. Ostatné kružnice sa nezmenili. To je spor s predpokladom, že v P_α je maximálny počet hrán na kružniciach. Teda tento prípad nenastaneme. Viď Obrázok 1.19.



Obrázok 1.19: Prípád 1.3., šedou farbou sú vyznačené vrcholy novej kružnice.

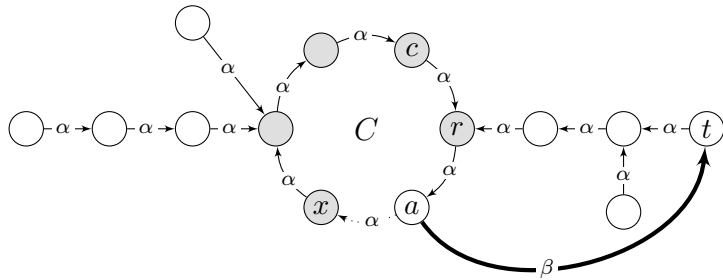
1.4. Nakoniec nech a leží na kružnici C . Nech x je vrchol taký, že $(a, \alpha, x)_f$ leží na kružnici C . Sled najmenšej dĺžky na kružnici C z koreňa r do a označme L_1 a L_2 z x do r . Ak $a = r$, potom sledom L_1 rozumieme prázdnu postupnosť a položíme $|L_1| = 0$. Ak $x = r$, potom opäť L_2 je prázdna postupnosť a $|L_2| = 0$. Pre dĺžku kružnice C dostaneme rovnosť $|C| = |L_1| + 1 + |L_2|$. Po výmene (1.2) vznikne nová kružnica tvorená sledmi L , L_1 a hranou $(a, \beta, x)_f$ s dĺžkou $|L| + |L_1| + 1$. Kružnica C zanikne a ostatné kružnice sa nezmenia. Označme nový strom T' s koreňom r . Zrejme x leží na strome T' , a teda hĺbka stromu je aspoň $|L_2|$.

Z predpokladu maximálneho počtu hrán na kružniciach plynie, že

$$|C| = |L_1| + 1 + |L_2| \geq |L| + |L_1| + 1,$$

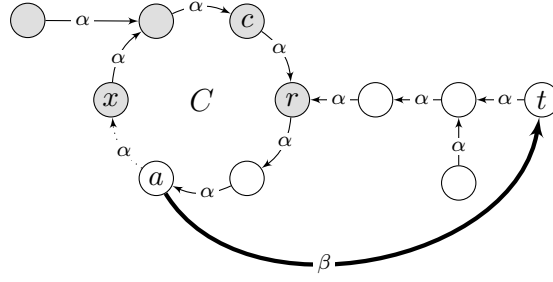
a teda $|L_2| \geq |L|$.

Ak $|L_2| > |L|$, potom T' je práve jeden maximálny strom v P_α . Vid' Obrázok 1.20.



Obrázok 1.20: Prípád 1.4, šedou farbou sú vyznačené vrcholy sledu L_2 . Sled L_1 je tvorený hranou $(r, \alpha, a)_f$.

Zostáva prípad, kedy hĺbka stromu je $|L|$. Teda $|L_2| = |L|$, pretože hĺbka T' je aspoň L_2 . Vid' Obrázok 1.21.

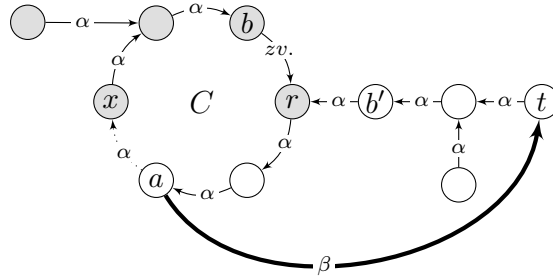


Obrázok 1.21: Prípád 1.4, šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T' , ktorého hĺbka je L .

2.krok. Z predchádzajúcich úvah plynie, že zostáva rozobrať prípad, kedy hĺbka T' je $|L| = |L_2|$, kde T' a L_2 sú definované v bode 1.4 (stále máme farbenie zo začiatku dôkazu tj. v P_α je maximálny počet hrán na kružniciach). Označme b vrchol taký, že leží na kružnici C a $(b, \alpha, r)_f \in E$. Ak z b vedie zväzok do r , potom vymeníme farby hranám z 1. kroku tj.

$$(a, \alpha, x)_f \text{ a } (a, \beta, t)_f.$$

Vid' Obrázok 1.22.



Obrázok 1.22: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T' , ktorého hĺbka je L , z vrcholu b vedie zväzok.

Touto výmenou v P_α máme stále rovnaký počet hrán na kružniciach ako pred výmenou. Navyše strom T' je maximálnym stromom v P_α . Označme nový vrchol b' taký, že leží na kružnici C a z b' vedie hrana do r . Nutne z b' nevedie zväzok do r . Potom vrchol x plní úlohu vrcholu t a stromu T' úlohu T . Teda predpokladajme, že z vrcholu c , ktorý leží na kružnici a vedie z neho hrana do r , nevedie zväzok.

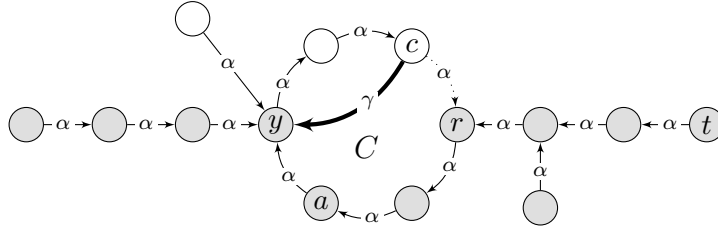
Teda existuje nejaká hrana z c , ktorá nevedie do r . Nech to je $(c, \gamma, y)_f$ pre nejaké $y \neq r$ a $\gamma \neq \alpha \in \Sigma$. Prevedieme výmenu farieb hrán

$$(c, \alpha, r)_f \text{ a } (c, \gamma, y)_f. \quad (1.3)$$

Teraz rozoberieme prípady podľa toho kam patrí vrchol y a výsledku výmeny (1.3).

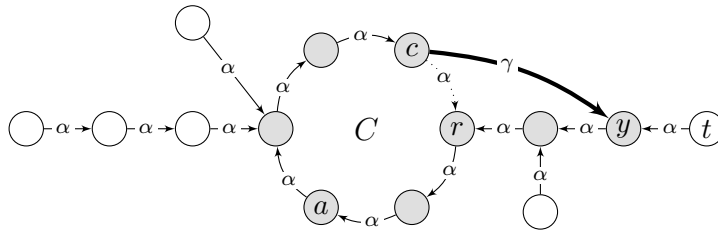
2.1. Ak y leží na kružnici C , po výmene (1.3) označme najkratší sled F z r do y v novom P_α . Potom sme vytvorili nový strom s koreňom y , ktorý má hĺbku

$|LF|$. A teda v P_α je práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je y . Vid' Obrázok 1.23.



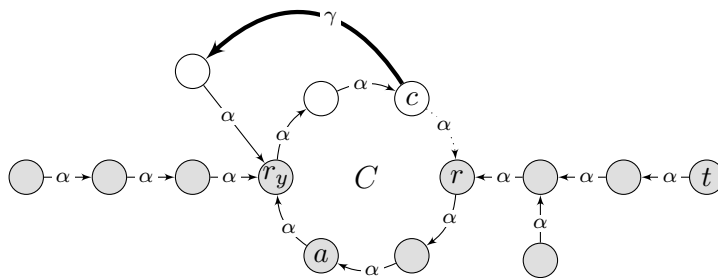
Obrázok 1.23: Prípád **2.1**, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu.

2.2. Ak y leží na strome T , po výmene (1.3) dostaneme dlhšiu kružnicu, a teda spor s maximálnym počtom hrán v cykloch. Teda tento prípad nenastaneme. Vid' Obrázok 1.24.



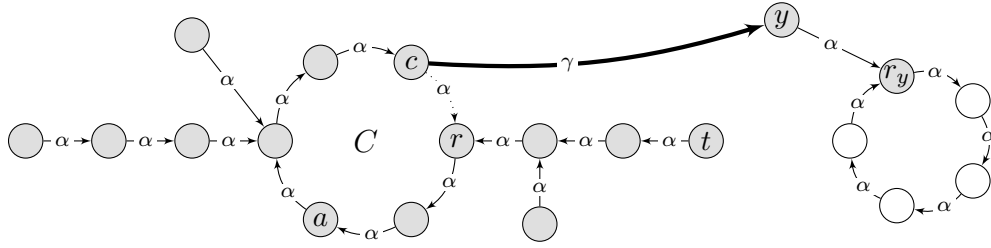
Obrázok 1.24: Prípád **2.2**, šedou farbou sú vyznačené vrcholy dlhšej kružnice.

2.3. Ak $y \in K$, má kladnú hĺbku a nepatrí do T . Po výmene (1.3) sa hĺbky vrchol z T zväčšia aspoň o 1. Označme r_y koreň stromu, do ktorého patrí y . Potom v P_α je práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r_y . Vid' Obrázok 1.25.



Obrázok 1.25: Prípád **2.3**, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu.

2.4. Ak $y \notin K$. Označme r_y koreň stromu, do ktorého patrí y . Po výmene (1.3) dostaneme práve jeden maximálny strom v P_α , ktorého koreň je r_y . Vid' Obrázok 1.26.



Obrázok 1.26: Prípád 2.4, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu.

Záver, pre každý stavový graf z predpokladu vety vieme nájsť také farbenie, že v podgrafe P_α existuje práve jeden maximálny strom. □

Ak silne súvislý stavový graf má slučku, potom vieme nájsť synchronizujúce farbenie. Existencia centrovaných stavov implikuje netriviálnu stabilnú dvojicu pre každé farbenie. Pre ostatné silne súvislé stavové graf, okrem kružnicových, vieme nájsť farbenie také, že P_α má práve jeden maximálny strom podľa Tvrdenia 47. Potom podľa Tvrdenia 42 existuje netriviálna stabilná dvojica.

1.5 Dôsledky dôkazu hlavnej vety

Béal a Perrin zobecnili hlavnú vetu pre silne súvislé stavové grafy s kladnou periódou. Trahtman následne uviedol úplnú charakteristiku stavového grafu a existencie k -synchronizujúceho farbenia. Obidve vety sú dôsledkom dôkazu hlavnej vety.

Veta 48 (Béal a Perrin (2012)). *Nech G je silne súvislý stavový graf. Potom pre G existuje $\text{per}(G)$ -synchronizujúce farbenie.*

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{f} & G^f & \xrightarrow{\sim} & G_{\sim}^f \\
 \downarrow h & & & & \downarrow H \\
 & & & \swarrow h' & \\
 & & & h' \downarrow & \\
 G^h & \xrightarrow{\sim} & G_{\sim}^h & = & H^{h'}
 \end{array}$$

Dôkaz. Dôkaz prevedieme matematickou indukciou podľa počtu vrcholov stavového grafu G . Ak G je kružnicový stavový graf, potom zrejme každé jeho farbenie je $\text{per}(G)$ -synchronizujúce, viď Obrázok 1.12. Špeciálne pre stavový graf s jedným vrcholom veta platí. Predpokladajme, že veta platí pre silne súvislé stavové grafy s menej ako n vrcholmi. Dokážeme, že pre silne súvislý stavový graf G s n vrcholmi existuje $\text{per}(G)$ -synchronizujúce farbenie. Z vyššie uvedeného dôvodu predpokladajme, že G nie je kružnicový.

Z predchádzajúcej sekcie 1.4 plynie existencia farbenia f pre G takého, že existuje netriviálna stabilná dvojica p, q v automate G^f . Podľa Vety 28 existuje

stabilná kongruencia $\sim$ s vlasnosťou $p \sim q$. Potom počet stavov faktorového automatu $G_{\sim}^f$ je menší ako n . Označme H stavový graf automatu $G_{\sim}^f$. Z Vety 30 plynie, že stavový graf H je silne súvislý. Z indukčného predpokladu existuje $per(H)$ -synchronizujúce farbenie h' pre H . Označme h farbenie stavového grafu G , ktoré je indukované farbením h' . Faktorový automat $G_{\sim}^h$ a automat $H^{h'}$ sú rovnaké podľa Vety 29. Podľa Vety 34 a Vety 33 farbenie h je $per(G)$ -synchronizujúce farbenie. □

Teraz uvidíme znovu už sformulovanú Vetu 18, ktorú dokážeme.

Veta 17 (všeobecný stavový graf, Trahtman (2008a)). *Nech $G = (V, E)$ je stavový graf výstupňa d a $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d\}$ je d -prvková abeceda. Označme všetky silne súvislé komponenty*

$$C_1 = (V_1, E_1), C_2 = (V_2, E_2), \dots, C_m = (V_m, E_m)$$

stavového grafu G také, že každá hrana z E so začiatočným vrcholom z V_j má koncový vrchol v množine V_j , kde $j = 1, 2, \dots, m$. Označme postupne periódy komponent $k_1, k_2, \dots, k_m$. Potom pre G existuje $\sum_{j=1}^m k_j$ -synchronizujúce farbenie.

Dôkaz. Najprv poznamenajme, že zrejme aspoň jedna komponenta z vety existuje.

Každá silne súvislá komponenta $C_1, C_2, \dots, C_m$ je zrejme stavový graf výstupňa d . Z predchádzajúcej vety plynie, že pre stavový graf C_j existuje k_j -synchronizujúce farbenie g_j , kde $j = 1, 2, \dots, m$. Definujeme farbenie f pre G tak, že hranám, ktoré patria do nejakej komponenty, farbenie f priradí rovnakú farbu ako g a pre iné hrany definujeme farbenie ľubovoľne tj.

$$p \in V_j, \text{ kde } j \in \{1, 2, \dots, m\} \Rightarrow f(p, i) := g(p, i) \text{ pre } i = 1, 2, \dots, d$$

$$p \in V \setminus \bigcup_{l=1, 2, \dots, m} V_l \Rightarrow f(p, i) := \alpha_i \text{ pre } i = 1, 2, \dots, d.$$

Ukážeme, že f je $\sum_{j=1}^m k_j$ -synchronizujúce farbenie.

Označme $V_C = \bigcup_{l=1}^m V_l$. Nájdeme slovo $w \in \Sigma^+$ také, že $V \cdot w \subseteq V_C$. Potom z definícií g_j -synchronizujúcich farbení plynie, že f je $\sum_{i=1}^m k_i$ -synchronizujúce farbenie.

Ak existuje, označme $p_1 \in V \setminus V_C$, potom nájdeme slovo $w_{p_1} \in \Sigma^+$ také, že $p_1 \cdot w_{p_1} \in V_C$.

Označme množinu všetkých vrcholov $M \subseteq V$, do ktorých vedie sled z p_1 . Nech E_M je množina všetkých hrán, ktorých začiatočný vrchol patrí do M . Potom (M, E_M) je stavový graf výstupňa d . Nech $M_1, M_2, \dots, M_e$ sú silne súvislé komponenty v (M, E_M) . Zrejme sú to silne súvislé komponenty aj v G . Potom nutne aspoň jedna z nich je taká, že z nej nevychádza žiadna hrana. Teda pre nejaké $s, t \in \{1, 2, \dots, m\}$ je $M_s = C_t$. Teda existuje sled z p_1 do vrcholu z V_C . Tento sled odpovedá nejakému slovu $w_{p_1} \in \Sigma^+$.

Pre každý vrchol $q \in V_y$, kde $y \in \{1, 2, \dots, m\}$ a každé slovo $v \in \Sigma^+$ platí $q \cdot v \in V_y$.

Ak existuje, z množiny $V \cdot w_{p_1}$ vezmeme nejaký vrchol p_2 , ktorý nepatrí do V_C a opäť nájdeme slovo $w_{p_2} \in \Sigma^+$ také, že $p_2 \cdot w_{p_2} \in V_C$. Z konečnosti množiny

V a predchádzajúceho odstavca plyní, že opakovaním postupu nájdeme slovo $w_{p_1}w_{p_2}\dots w_{p_x}$, kde $x \in \mathbb{N}$, také, že $V \cdot w_{p_1}w_{p_2}\dots w_{p_x} \subseteq V_C$.



Kapitola 2

Algoritmus

Nasledovná kapitola je prevzatá z článkov Béal a Perrin (2013) a Trahtman (2012). Algoritmus na hľadanie k -synchronizujúceho farbenia je jednoduchým zovšeobecnením algoritmu na hľadanie synchronizujúceho farbenia, a teda popíšeme zovšeobecnený algoritmus.

2.1 Spoločný základ

Podľa predchádzajúcej kapitoly hľadanie k -synchronizujúceho farbenia sa redukuje na hľadanie farbenia s netriviálnou stabilnou dvojicou. Podľa Tvrdenia 42, ak v P_α je práve jeden maximálny strom, potom dané farbenie je s netriviálnou stabilnou dvojicou.

Predpokladáme, že na vstupe máme silne súvislý stavový graf $G = (V, E)$ výstupňa d s periódou k , pre ktorý hľadáme k -synchronizujúce farbenie. Označme n počet vrcholov V a nech Σ je nejaká d -prvková abeceda.

V prípade všeobecného stavového grafu stačí podľa dôkazu Tvrdenia 18 nájsť silne súvislé komponenty a nájsť pre niektoré z nich k_i -synchronizujúce farbenie (k_i závisí na komponente).

Všetky známe algoritmy na hľadanie k -synchronizujúceho farbenia hľadajú farbenie také, že v P_α je práve jeden maximálny strom. Uvedieme tri rôzne algoritmy. Prvý je založený na dôkaze Tvrdenia 47, druhý je Trahtmanova redukcia (viď Trahtman (2012), TwoCyclesWithIntersection) a nakoniec Béalovej a Perrinovej algoritmus (viď Béal a Perrin (2013)).

Postupne hľadáme farbenie pre stavový graf faktorového automatu také, že v P_α je práve jeden maximálny strom. Počet vrcholov stavového grafu sa znižuje, až kým nie je kružnicový. Známé algoritmy na hľadanie k -synchronizujúceho farbenia majú rovnaký nasledovný pseudokód.

Na začiatku algoritmu predpokladáme, že máme nejaké farbenie f . Z formálneho dôvodu automat G^f vyfaktorujeme podľa triviálnej ekvivalencie, ktorá je zrejme stabilnou kongruenciou v G^f . Viď pseudokód na novej strane.

Algoritmus 1 SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE(G)

```
1:  $\sim_g \leftarrow$  triviálna kongruencia automatu  $G^f$ , kde  $f$  je nejaké farbenie
2:  $H \leftarrow$  stavový graf  $G_{\sim_g}^f$ 
3: while  $H$  nie je kružnicový graf do
4:   if v  $H$  existuje slučka then
5:     nájdí synchronizujúce farbenie  $h'$  stavového grafu  $H$  (dôkaz Vety 43)
6:     nájdí synchronizujúce farbenie  $h$  stavového grafu  $G$  indukované  $h'$ 
7:     break
8:   else
9:     if existujú centrované stavy  $[n_1]_{\sim_g}, [n_2]_{\sim_g}$  v  $H$  then
10:       $h' \leftarrow$  nejaké farbenie  $H$ 
11:    else
12:       $(h', [n_1]_{\sim_g}, [n_2]_{\sim_g}) \leftarrow \text{FARBENIEMAXSTROM}(H)$ 
13:    nájdí farbenie  $h$  indukované farbením  $h'$ 
14:     $\sim_g \leftarrow \text{GENEROVANAKONGRUENCIA}([n_1]_{\sim_g}, [n_2]_{\sim_g}, \sim_g, G^h)$ 
15:     $H \leftarrow$  stavový graf faktorového automatu  $G_{\sim_g}^h$ 
16: return  $k$ -synchronizujúce farbenie  $h$  stavového grafu  $G$ 
```

Funkcia FARBENIEMAXSTROM vráti $(h', [n_1]_{\sim_g}, [n_2]_{\sim_g})$, kde h' je farbenie stavového grafu H také, že v P_α (podgraf H) je práve jeden maximálny strom a $[n_1]_{\sim_g}, [n_2]_{\sim_g}$ je netriviálna stabilná dvojica podľa Tvrdenia 42.

Ako sme už uviedli, ukážeme tri rôzne funkcie FARBENIEMAXSTROM vo vzájomných sekcích. Teraz popíšeme funkciu GENEROVANAKONGRUENCIA.

Algoritmus 2 GENEROVANAKONGRUENCIA($[n_1]_{\sim_g}, [n_2]_{\sim_g}, \sim_g, G^h$)

```
1:  $F$  je fronta,  $F \leftarrow ([n_1]_{\sim_g}, [n_2]_{\sim_g})$ 
2: while  $F$  je neprázdna do
3:    $([x]_{\sim_g}, [y]_{\sim_g}) \leftarrow F$ 
4:    $\text{UNION}([x]_{\sim_g}, [y]_{\sim_g})$ 
5:    $\sim_g \leftarrow$  ekvivalencia definovaná novým rozkladom
6:   for all  $\alpha \in \Sigma$  do
7:     if  $[x \cdot \alpha]_{\sim_g} \neq [y \cdot \alpha]_{\sim_g}$  then
8:        $([x \cdot \alpha]_{\sim_g}, [y \cdot \alpha]_{\sim_g}) \rightarrow F$ 
9: return stabilná kongruencia  $\sim_g$  automatu  $G^h$ 
```

Funkcia UNION zjednocuje dve triedy ekvivalencie. Ak na Q máme rozklad $\{[a_1]_{\sim_g}, [a_2]_{\sim_g}, \dots, [a_m]_{\sim_g}\}$, potom výsledkom

$$\text{UNION}([a_i]_{\sim_g}, [a_j]_{\sim_g})$$

je nový rozklad množiny Q

$$\{[a_i]_{\sim_g} \cup [a_j]_{\sim_g}\} \cup \bigcup_{l=1, l \neq i, j}^m \{[a_l]_{\sim_g}\}.$$

Algoritmus GENEROVANAKONGRUENCIA zrejme skončí vďaka podmienke na riadku 7.

Tvrdenie 50. Funkcia GENEROVANAKONGRUENCIA vráti stabilnú kongruenciu $\sim_g$ pre automat G^h .

Dôkaz. Predpokladáme, že na začiatku $\sim_g$ je stabilná kongruencia pre automat G^h . Z 6. riadku v pseudokóde GENEROVANAKONGRUENCIA je vidieť, že výsledná $\sim_g$ je kongruencia.

Hneď na začiatku funkcie GENEROVANAKONGRUENCIA stavy $[n_1]_{\sim_g}, [n_2]_{\sim_g}$ sú stabilné stavy automatu $H^{h'}$. Teda pre ľubovoľné slovo $u \in \Sigma^+$ existuje slovo $v \in \Sigma^+$ také, že $[n_1]_{\sim_g} \cdot uv = [n_2]_{\sim_g} \cdot uv$. To znamená, že pre každú dvojicu stavov x, y , kde $x \in [n_1]_{\sim_g}$ a $y \in [n_2]_{\sim_g}$ platí, že $x \cdot uv, y \cdot uv$ patria do rovnakej triedy ekvivalencie $\sim_g$, teda x, y je stabilná dvojica. Teda v množine $[n_1]_{\sim_g} \cup [n_2]_{\sim_g}$ sú každé dva stavy stabilné v G^h .

Podobne dokazujeme pre ostatné zjednotenia s tým rozdielom, že teraz triedy ekvivalencie $\sim_g$ už nie sú stavy $H^{h'}$, ale sú zjednotením nejakých tried (stavov z $H^{h'}$, z ktorých každé dva sú stabilné). □

Tvrdenie 51. Algoritmus SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE nájde k -synchronizujúce farbenie pre stavový graf G .

Dôkaz. Indukciou a pomocou predchádzajúceho tvrdenia dostaneme, že funkcia GENEROVANAKONGRUENCIA vždy vráti stabilnú kongruenciu $\sim_g$ počas výpočtu vo funkcii FARBENIEMAXSTROM.

Z definície GENEROVANAKONGRUENCIA plynie, že v každom while cykle sa počet stavov H ostro zmenší. Z tvrdenia o ranku a Tvrdenia 29 plynie správnosť algoritmu. □

Stavový graf $G = (V, E)$ spolu s farbením f reprezentujeme dvojrozmerným poľom $M[,]$ obsahujúcim vrcholy, kde stĺpce sú indexované vrcholmi z V a riadky farbami z abecedy Σ . Ak v $M[i, j]$ je uložený vrchol v , potom existuje hrana $(v_i, \alpha_j, v)_f$. Podobne reprezentujeme stavový graf H . Teda výmena farieb hranám znamená výmenu dvoch vrcholov v poli reprezentujúcom stavový graf s farbením.

Podľa definície indukovaného farbenia $h(v, i) := \beta$ práve vtedy, keď $f(v, i) = \alpha_j$ a $h'([v]_{\sim_g}, j) = \beta$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, d\}$ a $v \in V$. Vidíme, že k definícii potrebujeme mať poznačené u vrcholu $[v]_{\sim_g}$ stavového grafu H index j . Potom časová zložitosť nájdania indukovaného farbenia je $\mathcal{O}(dn)$.

Taktiež pre stavový graf s farbením použijeme inverznú reprezentáciu tj. u každého vrcholu p si poznačíme dvojicu (q, β) , ak existuje hrana z vrcholu q do p s farbou β . Inverznú reprezentáciu spočítame v čase $\mathcal{O}(dn)$ z reprezentácie dvojrozmerného poľa.

Tvrdenie 52. Časová zložitosť jedného behu while cyklu vo funkcii GENEROVANAKONGRUENCIA je $\mathcal{O}(d + n)$.

Dôkaz. Problém ako efektívne zjednotiť dve triedy ekvivalencie a overiť, či dve triedy ekvivalencie sú rovnaké riešime nasledovne. V každej triede ekvivalencie

zvolíme jeden vrchol ako reprezentanta danej triedy. U každého vrcholu poznačíme reprezentanta triedy ekvivalencie, do ktorej patrí.

Teda overiť podmienku na riadku 7 v algoritme GENEROVANAKONGRUENCIA má časovú zložitosť $\mathcal{O}(1)$. V priebehu jedného while cyklu overujeme podmienku d -krát. Ak zjednotíme dve triedy ekvivalencie, musíme prepísať u príslušných vrcholov reprezentantov, a teda časová zložitosť UNION je $\mathcal{O}(n)$. Vidíme, že jeden priebeh while cyklu má časovú zložitosť $\mathcal{O}(d + n)$. □

Poznamenajme, že problém z predchádzajúceho dôkazu sa nazýva Union-find a má rôzne riešenia s rôznymi časovými zložitosťami, viď Černý (2010).

Veta 53. Označme $F(n, d)$ časovú zložitosť funkcie FARBENIEMAXSTROM. Potom časová zložitosť algoritmu SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE je

$$\mathcal{O}((n - k) \cdot (F(n, d) + 2dn))$$

a pamäťová zložitosť je $\mathcal{O}(dn)$.

Dôkaz. Algoritmus SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE skončí, ak H je kružnicový graf tj. počet stavov H je $k = \text{per}(G)$. Na začiatku počet tried ekvivalencie $\sim_g$ je n . Teda funkcia UNION sa musí zavolať presne $n - k$. Preto v najhoršom prípade počet behov while cyklu vo funkcii SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE je $n - k$. Z tejto úvahy plynie, že v algoritme SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE v najhoršom prípade musí $(n - k)$ -krát

- overiť sa, či stavový graf je kružnicový, existuje slučka alebo existujú centrovane stavy (riadky 3, 4, 9 v Alg. 1)
- prebehnúť algoritmus FARBENIEMAXSTROM (riadok 12 v Alg. 1)
- prebehnúť práve jeden while cyklus v GENEROVANAKONGRUENCIA (riadok 14 v Alg. 1 resp. riadok 2 v Alg. 2),
- nájsť indukované farbenie pre G (riadky 6, 13 v Alg 1.).

Overiť, či stavový graf obsahuje slučku, je kružnicový alebo existujú centrovane stavy má zrejme časovú zložitosť $\mathcal{O}(dn)$.

Nájsť synchronizujúce farbenie, v prípade existencie slučky, má zložitosť $\mathcal{O}(dn)$ a prebehne maximálne jedenkrát počas SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE. Algoritmus z dôkazu Tvrdenia 43 má časovú zložitosť $\mathcal{O}(dn^2)$. Avšak pomocou inverznej reprezentácie môžeme nájsť synchronizujúce farbenie s časovou zložitosťou $\mathcal{O}(dn)$ tak, že z vrcholu, z ktorého vedie slučka, začneme prehľadávať stavový graf „vproti smere hrán“ a pritom priradovať farbu α hranám. Zo silnej súvislosti plynie správnosť tohto postupu. Časovú zložitosť spočítame pomocou hrán v H , ktorých v najhoršom prípade je dn .

Teda výsledná časová časová zložitosť je

$$\begin{aligned} \mathcal{O}((n - k) \cdot (dn + F(n, d) + (d + n) + dn)) + \mathcal{O}(dn) = \\ = \mathcal{O}((n - k) \cdot (F(n, d) + 2dn)). \end{aligned}$$

Pamäťová zložitosť algoritmu SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE je $\mathcal{O}(dn)$. Potrebujeme dve dvojrozmerné poľa na reprezentáciu G a H a ostatné pomocné informácie o vrchoch sú konštatné pre každé d, n ako bude vidieť z nasledovného popisu. □

2.2 FarbenieMaxStrom podľa dôkazu Vety 47, $\mathcal{O}(dn^2)$

Cieľom je nájsť farbenie také, že v P_α je práve jeden maximálny strom. Nasledovný algoritmus FARBENIEMAXSTROM založený na dôkaze Tvrdenia 47 má časovú zložitosť $\mathcal{O}(dn^2)$. Nasledovná myšlienka počítania časovej zložitosti je z článku Trahtman (2012).

Na začiatku dôkazu sme predpokladali, že máme farbenie, pre ktoré v P_α je maximálny počet hrán na kružniciach. Z dôvodu časovej zložitosti je výhodnejšie začať s nejakým farbením stavového grafu G . Potom postupujeme ako v dôkaze Tvrdenia 47, ak sa zväčší počet hrán na kružniciach, začneme odznovu. V nasledujúcom postupe používame značenie z dôkazu Tvrdenia 47.

1. Spočítame hĺbky vrcholov a u každého vrcholu poznačíme klaster, do ktorého patrí. Ak všetky vrcholy v P_α majú hĺbku 0, použijeme Tvrdenie 44 a skončíme. Inak najdeme nejaký vrchol t maximálnej hĺbky.
2. Najdeme vrchol a , z ktorého vedie hrana do t . Ak hĺbka stromu T' je väčšia ako L , prevedieme výmenu z 1.kroku tj. (1.2), inak prejdeme do bodu 3. Ak sa zväčšil počet hrán na kružniciach, potom začneme odznovu v bode 1. Inak dostaneme práve jeden maximálny strom a skončíme.
3. Hĺbka stromu T' je L . Ak z c vedie zväzok, prevedieme výmenu z 1.kroku tj.(1.2). Prevedieme výmenu z 2.kroku v závislosti na predchádzajúcej výmene tj. (1.3). Ak sa zväčšil počet hrán na kružniciach, začneme odznovu v bode 1. Inak dostaneme práve jeden maximálny strom a skončíme.

Veta 54. *Algoritmus FARBENIEMAXSTROM z prechádzajúceho odstavca má časovú zložitosť $\mathcal{O}(dn^2)$.*

Dôkaz. Najprv spočítame hĺbky vrcholov v P_α a súčasne poznačíme u každého vrcholu klaster, do ktorého patrí. Napríklad tak, že z nejakého vrcholu (bez spočítanej hĺbky) začneme prechádzať vrcholy cez hrany s farbou α . Priebežne označíme vrchol ako navštívený a vložíme ho do zásobníku (datová štruktúra). Ak sa dostaneme do už navštíveného vrcholu, potom spätne dopočítame hĺbky vrcholov zo zásobníku a určíme klaster. Tento postup má časovú zložitosť $\mathcal{O}(n)$.

Každý bod z algoritmu má zrejme časovú zložitosť $\mathcal{O}(dn)$. Maximálny počet hrán na kružniciach v P_α je obmedzený počtom vrcholov n . Preto v najhoršom prípade počet zväčšení počtu hrán na kružniciach nepresiahne n . Teda v najhoršom prípade algoritmus FARBENIEMAXSTROM má časovú zložitosť $\mathcal{O}(dn^2)$. □

Celková časová zložitosť algoritmu SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE s vyššie uvedeným algoritmom FARBENIEMAXSTROM je

$$\mathcal{O}((n - k) \cdot (F(n, d) + 2dn)) = \mathcal{O}((n - k)dn^2).$$

V článku Trahtman (2012) je popísaná iná postupnosť výmen farieb ako v dôkaze Tvrdenia 44, a teda iný algoritmus FARBENIEMAXSTROM. Avšak rovnakou argumentáciou ako z predchádzajúceho dôkazu dostaneme, že časová zložitosť algoritmu FARBENIEMAXSTROM z článku Trahtman (2012) je $\mathcal{O}((n - k)dn^2)$.

2.3 Trahtmanova redukcia

Trahtman navrhol algoritmus FARBENIEMAXSTROM, ktorý funguje len za určitých podmienok. Ak sú splnené podmienky, algoritmus má časovú zložitosť $\mathcal{O}(dn)$. Viď článok Trahtman (2012) Lemma 10 a pseudokód TwoCyclesWithIntersection. Uviedol, že pre veľa stavových grafov tento algoritmus funguje bez presnejšieho odhadu. Podmienkou je existencia dvoch kružníc, ktorých „priemik je izolovaná cesta“. Avšak v pseudokóde sa využíva asi tvrdenie v inom tvare, tj. priemikom je sled a do jeho vrcholov vedú hrany len z vrcholov týchto dvoch kružníc. Viď riadok 12 v pseudokóde TwoCyclesWithIntersection. Dôkaz je pre obidve verzie rovnaký. Hlavnú myšlienku ukážeme na príklade.

Sled nazývame *jednoduchým*, ak prechádza vrcholom maximálne jedenkrát, ale koncový a začiatkový vrchol môžu byť rovnaké.

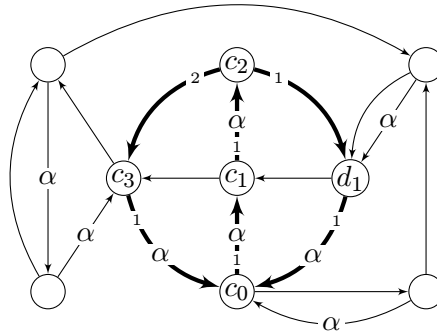
Predpokladajme, že sme našli v stavovom grafe G kružnicu C a jednoduchý sled L také, že

$$\begin{aligned} C &= (a_0, i_0, a_1), (a_1, i_1, a_2), \dots, (a_{j-1}, i_{j-1}, a_0) \\ L &= (b_0 = a_t, k_0, b_1), (b_1, k_1, b_2), \dots, (b_{l-2}, k_{l-2}, b_{l-1} = a_0), \end{aligned}$$

kde $t \in \{0, 1, \dots, j-1\}$ a $b_{l'} \neq a_{i'}$ pre každé $l' \in \{1, \dots, l-2\}$, $i' \in \{0, 1, \dots, j-1\}$. Navyše, ak $a_0 \neq a_t$, potom do vrcholov $a_1, \dots, a_t$ vedú hrany len z vrcholov $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, b_0, b_1, \dots, b_{l-1}$.

Na Obrázku 2.1 je príklad silne súvislého stavového grafu s vyznačenými sledmi C' a L' , kde

$$C' = (c_0, 1, c_1), (c_1, 1, c_2), (c_2, 2, c_3), (c_3, 1, c_0), \quad L' = (d_0 = c_2, 1, d_1), (d_1, 1, d_2 = c_0).$$



Obrázok 2.1: Kružnica C a sled L .

Vidíme, že C' , L' spĺňajú uvedené podmienky (do vrcholu c_1 vedie hrana z c_0 , d_1 a do c_2 z c_1).

Priradíme farbu α hranám kružnice C a L okrem hrán zo začiatočného vrcholu L tj.

$$(a_t, i_t, a_{(t+1 \bmod j)}), \quad (a_t, k_0, b_1).$$

V príklade nepriradíme farbu hranám $(c_2, 2, c_3)$ a $(c_2, 1, d_1)$. Viď Obrázok 2.1.

Teraz chceme, aby z každého vrcholu okrem $a_0, a_1, \dots, a_t$ viedol sled do a_0 a jeho hrany mali farbu α . Farby už priradeným hranám nemeníme. Dôležité je, že žiaden takýto sled neprechádza cez vrcholy $a_1, \dots, a_t$, to plynie z predpokladu na kružnice C a L . Viď Obrázok 2.1.

Teraz z každého vrcholu okrem a_0 vychádza hrana s farbou α . Jednej z hrán

$$(a_t, i_t, a_{(t+1 \bmod j)}), \quad (a_t, k_0, b_1)$$

priradíme farbu α tak, aby v P_α bol práve jeden maximálny strom. Na Obrázku 2.2 je to hrana $(c_2, 1, d_1)$.

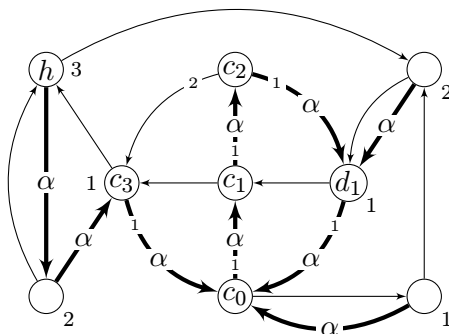
Ako rozhodnúť, ktorej hrane

$$(a_t, i_t, a_{(t+1 \bmod j)}), \quad (a_t, k_0, b_1)$$

priradiť farbu α ? Pre každý vrchol (okrem $a_0, a_1, \dots, a_t$) spočítame dĺžku sledu z daného vrcholu do a_0 , ktorý je tvorený len hranami s farbou α . Ak vrchol v , z ktorého vedie sled najväčšej dĺžky vedie cez vrchol z $\{a_t, a_{t+1}, \dots, a_{j-1}\}$, potom priradíme farbu α hrane (a_t, k_0, b_1) (v prípade cez vrchol z množiny $\{b_1, b_2, \dots, b_{l-2}\}$ priradíme farbu α hrane $(a_t, i_t, a_{(t+1 \bmod j)})$). V prípade, že sled z v nevedie cez žiaden vrchol $\{a_t, a_{t+1}, \dots, a_{j-1}, b_1, b_2, \dots, b_{l-2}\}$, potom priradíme farbu α napr. hrane (a_t, k_0, b_1) . Tým zaistíme, že hĺbka v v P_α je rovná dĺžke sledu (cez hrany s farbou α) do a_0 a existuje práve jeden maximálny strom s koreňom a_0 v P_α .

Viď obrázok a čísla u vrcholov, ktoré vyjadrujú dĺžku sledu do a_0 . Z vrcholu h vedie sled najväčšej dĺžky tj. 3 cez vrchol c_3 . Preto priradíme farbu α hrane $(a_2, 1, d_1)$.

Zárukou, že dostaneme práve jeden maximálny strom v P_α vyššie popísaným postupom je, že pre $t > 0$ do vrcholov $a_1, a_2, \dots, a_t$ vedú hraný len z vrcholov C a L , a teda žiadna hrana s farbou α .



Obrázok 2.2: Výsledok priradenia farby α , Trahtmanova redukcia.

Ako nájsť kružnicu C a sled L ? Nasledovný algoritmus nemusí vždy nájsť C , L a to ani v prípade, že existujú.

Predpokladáme, že máme nejaké farbenie. Zvolíme ľubovoľný vrchol v a postupne prechádzame do vrcholov cez hrany s farbou α , až kým nenájdeme už navštívený vrchol. Označme ho a_0 . Teda našli sme kružnicu

$$C = (a_0, i_0, a_1), (a_1, i_1, a_2), \dots, (a_{j-1}, i_{j-1}, a_0).$$

Nájdeme vrchol a_t tak, že do vrcholov $a_1, a_2, \dots, a_t$ vedú hrany len z vrcholov C a t je čo najväčšie.

Potom z vrcholu a_t začneme prehľadávať graf do šírky. Ak nájdeme sled do vrcholu z $a_0, a_1, \dots, a_t$, potom sme našli sled L (poznamenajme, že koncový vrchol nemusí byť a_0 , ale podmienky kladené na C a L sú splnené s preznačením vrcholov). Ak narazíme na vrchol už navštívený alebo $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_{j-1}$, potom týmto vrcholom nepokračujeme v prehľadávaní. Časová zložitosť tohto algoritmu je zložitosť prehľadávania do šírky, teda $\mathcal{O}(dn)$.

Teraz zostáva nájsť z každého vrcholu sled cez hrany s farbou α do a_0 , prípadne zmeniť farbenie, aby taký sled existoval. To ide zrejme s časovou zložitosťou $\mathcal{O}(dn)$ napr. tak, že z a_0 začneme prehľadávať stavový graf do šírky, ale cez hrany „v opačnom smere“ tj. pomocou invernej reprezentácie.

Prípad, kedy algoritmus nefunguje je, keď nenájde sled L . V opačnom prípade je časová zložitosť $\mathcal{O}(dn)$.

2.4 Béalovej a Perrinov algoritmus, $\mathcal{O}(dn)$

Cieľom je nájsť farbenie také, že v P_α je práve jeden maximálny strom. Prístup Béalovej a Perrina je založený na podrobnom rozbere stavového grafu a výmene farieb hranám. Nasledovná sekcia je prevzatá z článku Béal a Perrin (2013), časti 4.2 a 5.

Ak všetky vrcholy v P_α majú hĺbku 0, použijeme Tvrdenie 44. Ďalej predpokladáme, že nejaký vrchol má nenulovú hĺbku v P_α . Koreň nejakého maximálneho stromu v P_α nazývame *maximálnym koreňom*.

Hlavnou funkciou celého algoritmu FARBENIEMAXSTROM je FLIPEGES, ktorej vstup je maximálny koreň. Označme S maximálny strom v P_α a jeho koreň r' . Výsledkom funkcie FLIPEGES(r') je buď farbenie také, že v P_α je práve jeden maximálny strom alebo sa prevedie výmena farieb dvoch hrán taká, že r' prestane byť maximálny koreň. Dôležité je, že táto výmena nespôsobí vznik nových maximálnych koreňov v P_α a nezmení maximálne stromy v P_α okrem S . Ak funkcia FLIPEGES nájde farbenie také, že v P_α je práve jeden maximálny strom, funkcia FARBENIEMAXSTROM skončí. Teda budeme opakovane volať funkciu FLIPEGES na maximálne korene, kým nebude v P_α práve jeden maximálny strom.

Teraz uvedieme potrebné značenie pre popis funkcie FLIPEGES. Opravené značenie množín $I()$ a $J()$ je prevzaté z článkov Béal a Perrin (2013), str. 9 a Béal a Perrin (2012), str. 8. Zároveň na Obrázku 2.3 je príklad klastru, na ktorom popisujeme značenie.

Značenie 55. Označme klastre v P_α ako $K_1, K_2, \dots, K_{p_k}$, kde $p_k \in \mathbb{N}$. Pre každé $a \in \{1, 2, \dots, p_k\}$ označme C_a kružnicu v K_a a maximálne korene ležiace na C_a tak, že jeden označíme r_0^a a ďalšie označíme po smere orientácie hrán na kružnici C_a ako $r_1^a, r_2^a, \dots, r_{l_a-1}^a$, kde $l_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je počet maximálnych koreňov v K_a .

Na obrázku je jeden klaster, teda $p_k = 1$ a $l_1 = 3$. Na obrázku vynechávame horný index určujúci klaster.

Ak $l_a > 1$, potom pre $0 \leq i \leq l_a - 1$ označíme $I(r_i^a)$ množinu vrcholov, ktorými prechádza najkratší sled v P_α z r_j^a do r_i^a , kde $j = i - 1 \bmod l$ a vrchol r_i^a neleží v $I(r_i^a)$. Neformálne, vrchol r_j^a je prvý maximálny koreň na kružnici C_a v protismere orientácie hrán od r_i^a .

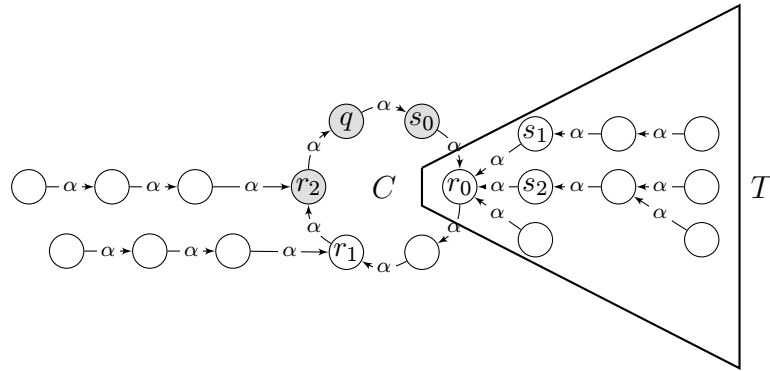
Pre $l_a > 1$ definujeme množinu $J(r_i^a)$, ktorá obsahuje vrcholy, ktorými prechádza najkratší sled v P_α z r_j^a do r_i^a , kde $j = i - 1 \bmod l$ a vrchol r_j^a neleží v $J(r_i^a)$.

Ak $l_a = 1$, potom každá množina $I(r_0^a)$, $J(r_0^a)$ obsahuje všetky vrcholy, ktoré ležia na kružnici C_a .

Na obrázku vrcholy množiny $I(r_0)$ sú vyznačené šedou farbou ($i = 0, j = 2, l = 3$) a $J(r_0) = \{q, s_0, r_0\}$.

Vrchol s taký, že existuje hrana $(s, \alpha, r_i^a)_f$ a jeho potomok je vrchol maximálnej hĺbky, nazývame *maximálnym synom* koreňa r_i^a . Na obrázku r_0 má dvoch maximálnych synov s_1 a s_2 .

Vrchol na kružnici C_a , z ktorého vedie hrana s farbou α do r_i^a označíme s_i^a . Na obrázku je vyznačený vrchol s_0 .



Obrázok 2.3: Znázornené značenie.

Teraz definujeme jednotlivé typy hrán, ktoré použijeme pri rozbere prípadov vo funkcii FLIPEDGES so vstupom r , kde $r \in \{r_j^i : i = 1, 2, \dots, p_k; j = 0, 1, \dots, l_i - 1\}$. Strom s koreňom r označme T , klaster so stromom T ako K a kružnicu v K ako C . Každá hrana $(t, \beta, p)_f \in E$, kde $\beta \in \Sigma$ a p je vrchol maximálnej hĺbky stromu T , je práve jedného z nasledujúcich typov. Hrana je daného typu, ak splňuje jej podmienky.

- **typ 0:** t nepatrí do K alebo t patrí do K , má kladnú hĺbku a p nie je potomkom t
- **typ 1:** $l > 1$, t leží na kružnici C a $t \notin I(r)$
- **typ 2:** $l > 1$, $t \in I(r)$ alebo $l = 1$ a t leží na kružnici C
- **typ 3:** $t \neq r$ a zároveň p je potomkom t

Funkcia FLIPEDGES(r) najprv zavolá funkciu FINDEDGES(r), ktorá vráti jednu z nasledujúcich štyroch hodnôt.

- $(0, e_0)$: e_0 je hrana typu 0
- $(1, e_1, e_2)$: e_1, e_2 sú hrany typov 1 alebo 2 a zároveň ich koncové vrcholy sú potomkami rôznych maximálnych synov
- $(2, e_3)$: e_3 je hrana typu 1 alebo 2 a T má práve jedného maximálneho syna
- $(3, e_4)$: e_4 je hrana typu 3, označme t_e začiatočný vrchol hrany e_4 , potom všetky vrcholy maximálnej hĺbky z T sú potomkovia t_e

Funkcia $\text{FLIPEDGES}(r)$ na základe hodnoty vrátenej funkciou $\text{FINDEDGES}(r)$ prevedie výmenu farieb. Predtým než popíšeme ako fungujú funkcie FLIPEDGES a FINDEDGES , vysvetlíme ako sa počíta časová zložitosť.

Nasledovné tvrdenia uvádzame ako fakt. Dôkaz plyní až z popisu funkcií FINDEDGES a FLIPEDGES , ktorý uvedieme v jednotlivých sekciách.

V prípade, že funkcia FINDEDGES vráti hodnotu $(0, e_0)$ alebo $(1, e_1, e_2)$ a jedna z hrán e_1, e_2 je typu 1 alebo $(2, e_3)$ a e_3 je typu 1, potom výsledkom funkcie FLIPEDGES je práve jeden maximálny strom v P_α . V tomto prípade má časovú zložitosť $\mathcal{O}(1)$, pretože sa prevedie jedna výmena farieb.

V prípadoch $(1, e_1, e_2)$ a e_1, e_2 sú typu 2 alebo $(2, e_3)$ a e_3 je typu 2 alebo $(3, e_4)$ sa môže stať, že FLIPEDGES nenájde požadované farbenie, a teda prevedie výmenu farieb takú, že vstupný maximálny koreň prestane byť maximálnym.

Teda predpokladáme, že v najhoršom prípade FINDEDGES vráti vždy hodnotu $(1, e_1, e_2)$ a e_1, e_2 sú typu 2 alebo $(2, e_3)$ a e_3 je typu 2 alebo $(3, e_4)$ a FLIPEDGES urobí výmenu farieb takú, že vstupný maximálny koreň prestane byť maximálny.

Označme $E(r)$ množinu hrán takých, že koncový alebo začiatočný vrchol hrany patrí do maximálneho stromu T s koreňom r . Potom funkcia $\text{FINDEDGES}(r)$ má časovú zložitosť $\mathcal{O}(|E(r)|)$.

Označme $\text{Sect}(r)$ množinu hrán takých, že koncový alebo začiatočný vrchol hrany ležia na strome v P_α , ktorý má koreň v množine $J(r)$. Časová zložitosť funkcie FLIPEDGES , ak jej FINDEDGES vráti jednu z hodnôt $(1, e_1, e_2)$ a e_1, e_2 sú typu 2 alebo $(2, e_3)$ a e_3 je typu 2 alebo $(3, e_4)$, je $\mathcal{O}(|\text{Sect}(r)|)$ (bez započítania časovej zložitosti funkcie FINDEDGES).

Výsledná časová zložitosť funkcie FARBENIEMAXSTROM je

$$\mathcal{O}\left(\sum_{r'} (|E(r')| + |\text{Sect}(r')|)\right) + \mathcal{O}(1),$$

kde sčítame cez všetky maximálne korene $r' \in \{r_j^i : i = 1, 2, \dots, p_k; j = 0, 1, \dots, l_i - 1\}$ a $\mathcal{O}(1)$ započítavame za prípad, kedy funkcia vráti hodnotu $(0, e_0)$ alebo $(1, e_1, e_2)$ a jedna z hrán e_1, e_2 je typu 1 alebo $(2, e_3)$ a e_3 je typu 1. Každú hranu sme v najhoršom prípade započítali štyrikrát, a teda výsledná časová zložitosť je

$$\mathcal{O}\left(\sum_{r'} |E(r')| + |\text{Sect}(r')|\right) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(4dn) = \mathcal{O}(dn).$$

Celková časová zložitosť algoritmu $\text{SYNCHRONIZUJUCEFARBENIE}$ s vyššie uvedeným algoritmom FARBENIEMAXSTROM je $\mathcal{O}((n - k)dn)$. Teraz popíšeme funkcie FINDEDGES a FLIPEDGES .

2.4.1 Funkcia FindEdges

Ukážeme ako FINDEDGES hľadá pre koreň r návratovú hodnotu.

Označme $s_1, s_2, \dots, s_{p_s}$ maximálnych synov r , kde p_s je počet maximálnych synov r . Označme T_{s_i} strom s koreňom s_i v P_α , kde $i \in \{1, 2, \dots, p_s\}$. Spočítame pre s_i množinu hrán L_{s_i} nasledovne. Z každého vrcholu $p \in T_{s_i}$ maximálnej hĺbky postupne prechádzame vrcholy cez hrany s farbou α až do vrcholu s_i . Pri prechádzaní vrcholami kontrolujeme, či nevedie z daného vrcholu nejaká hrana do p . Prehľadávanie z vrcholu p ukončíme, ak nájdeme vrchol, z ktorého vedie hrana do p alebo sa dostaneme do už navštíveného vrcholu alebo sme sa dostali do vrcholu s_i . Teraz popíšeme čo jednotlivé situácie znamenajú.

Ak nájdeme (nenavštívený) vrchol t , z ktorého vedie hrana $(t, \beta_t, p)_f$ do p , potom $(t, \beta_t, p)_f$ vložíme do L_{s_i} . Táto hrana je typu 3. Výmena farieb tejto hrany a hrany s farbou α z t tj.

$$(t, \beta_t, p)_f \quad (t, \alpha, t \cdot \alpha)_f$$

spôsobí, že p už nemá maximálnu hĺbku. Viď Obrázok 2.4 prípad a).

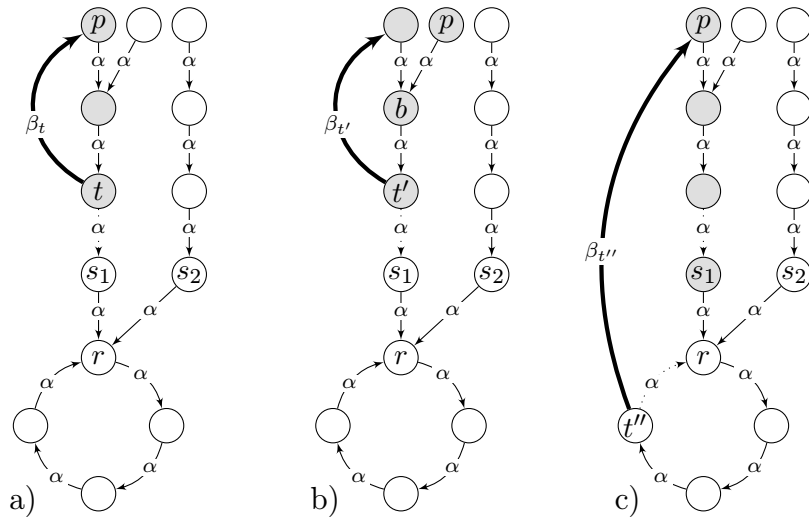
Ak sme sa pri prehľadávaní dostali do už navštíveného vrcholu b . Znamená to, že pre nejaký vrchol q maximálnej hĺbky z T_{s_i} sme už pridali do L_{s_i} hranu $(t', \beta_{t'}, q)_f$ takú, že keď vymeníme farby tejto hrane a hrane z t' s farbou α tj.

$$(t', \beta_{t'}, q)_f \quad (t', \alpha, t' \cdot \alpha)_f,$$

vrcholy q a p prestanú mať maximálnu hĺbku. Viď Obrázok 2.4 prípad b).

Ak sme sa dostali až do s_i a ani z s_i nevedie hrana do p , potom zo silnej súvislosti G plynie, že existuje hrana e s koncovým vrcholom p jedného z typov 0, 1 alebo 2. Ak hrana e je typu 0, potom funkcia skončí a vráti túto hranu, tj. hodnotu $(0, e_0 = e)$. Hranu e hľadáme pomocou inverznej reprezentácie. Nájdenu hranu pridáme do L_{s_i} . Viď Obrázok 2.4 prípad c), kde $e = (t'', \beta_{t''}, p)_f$ je hrana typu 2.

Toto opakujeme pre každé $i = 1, 2, \dots, l$ tj. pre všetkých maximálnych synov.



Obrázok 2.4: Šedou farbou sú vyznačené už navštívené vrcholy.

Všetky hrany z množín L_{s_i} sú typu 1, 2 alebo 3.

Ak existujú dva maximálny synovia s_m a $s_{m'}$ taký, že existujú hrany e_1 z L_{s_m} a e_2 z $L_{s_{m'}}$ typu 1 alebo 2, potom `FIND_EDGES` skončí a vráti hodnotu $(1, e_1, e_2)$. Podmienka, že koncové vrcholy hrán e_1, e_2 sú potomkami rôznych maximálnych synov je splnená.

Inak predpokladajme, že existuje len jeden maximálny syn $s_{m''}$ taký, že v L_{s_l} je hrana e_3 typu 1 alebo 2. Potom pre ostatné maximálne syny s_x hrany v L_{s_x} sú typu 3. Potom pre každú takúto hranu $(y, \beta_x, y')_f$ z množín L_{s_x} vymeníme farby hranám

$$(y, \beta_x, y')_f \quad (y, \alpha, y \cdot \alpha)_f.$$

Po týchto výmenách zostane práve jeden maximálny syn $s_{m''}$ a vrátime hodnotu $(2, e_3)$.

Zostáva prípad, kedy všetky hrany v množinách L_{s_i} sú typu 3. Potom všetky hrany z týchto množín vymeníme až na jednu, označme ju e_4 . Označme t_e začiatkový vrchol hrany e_4 , potom všetky vrcholy maximálnej hĺbky z nového T sú potomkovia t_e . Teda vrátime hodnotu $(4, e_4)$.

Každú hranu zo stromu T prejdeme maximálne raz. Z každého maximálneho vrcholu prejdeme hrany vchádzajúce do daného vrcholu maximálne raz pomocou inverznej reprezentácie. Teda časová zložitosť funkcie `FIND_EDGES` je $\mathcal{O}(|E(r)|)$.

2.4.2 Funkcia FlipEdges

Nakoniec popíšeme funkciu `FLIP_EDGES`, ktorej vstupom je maximálny koreň r . Najprv sa zavolá funkcia `FIND_EDGES` so vstupom r , ktorá vráti jednu zo štyroch popisovaných hodnôt a prípadne vymení farby, čím zmení strom T , ktorého koreň je r . V závislosti na vrátenej hodnote funkcia `FLIP_EDGES` vymení farby hranám. Výsledkom je farbenie také, že v novom P_α je práve jeden maximálny strom alebo vrchol r nie je maximálnym koreňom a nepribudnú nové maximálne stromy a ostatné maximálne stromy sa nezmenia okrem stromu T s koreňom r .

V prípade, že funkcia `FIND_EDGES` vráti hodnotu $(0, e_0)$ alebo $(1, e_1, e_2)$ a jedna z hrán e_1, e_2 je typu 1 alebo $(2, e_3)$ a e_3 je hrana typu 1, funkcia `FLIP_EDGES` má časovú zložitosť $\mathcal{O}(1)$. Pretože sa prevedie len jedna výmena farieb a vieme, že výsledkom je požadované farbenie.

V prípade hodnôt $(1, e_1, e_2)$ a e_1, e_2 sú typu 2 alebo $(2, e_3)$ a hrana e_3 je typu 2 alebo $(3, e_4)$, funkcia `FLIP_EDGES` má časovú zložitosť $\mathcal{O}(|Sect(r)|)$. V najhoršom prípade budeme musieť trikrát znovu zavolať funkciu `FLIP_EDGES` na rovnaký koreň. Pred každým volaním aktualizujeme inverznú reprezentáciu, hĺbky vrcholov len pre množinu vrcholov, ktoré patria do stromu, ktorého koreň je v $J(r)$. Len u týchto vrcholov sa hĺbky a inverzná reprezentácie môžu zmeniť, po výmene farieb, ktorú prevedie funkcia `FLIP_EDGES`. Z toho plynie zložitosť $\mathcal{O}(|Sect(r)|)$. Prípady kedy voláme znovu funkciu `FLIP_EDGES` na daný koreň sú prípad 1.3.2, 1.3.3.2 a z s_0 vedie zväzok, prípad 2.2.3.2 a z s_0 vedie zväzok.

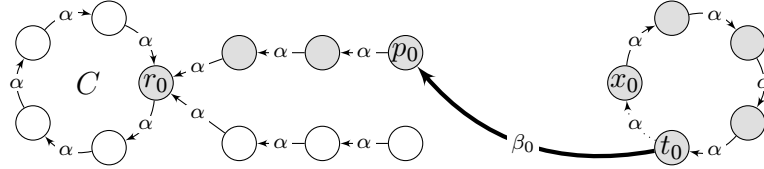
Teraz popíšeme aké výmeny farieb urobí funkcia `FLIP_EDGES(r)` na základe vrátenej hodnote funkciou `FIND_EDGES`. Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že $r = r_0$. Pre ostatné maximálne korene sú výmeny analogické a zrejme s nasledujúceho popisu.

0. Funkcia `FIND_EDGES(r)` vráti hodnotu $(0, e_0)$, kde $e_0 = (t_0, \beta_0, p_0)_f$ je typu 0.

Po výmene farieb hranám

$$(t_0, \beta_0, p_0)_f \quad (t_0, \alpha, x_0)_f,$$

kde x_0 je taký vrchol, že $(t_0, \alpha, x_0)_f \in E$, dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Na Obrázku 2.5 t_0 patrí do iného klastru ako r .



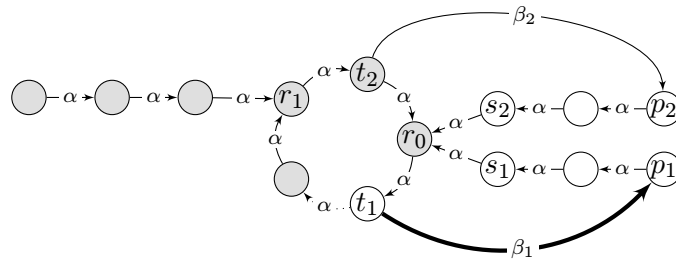
Obrázok 2.5: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu, prípad 0.

1. Funkcia $\text{FINDEDGES}(r)$ vráti hodnotu $(1, e_1, e_2)$, kde e_1, e_2 sú typu 1 alebo 2, navyše $e_1 = (t_1, \beta_1, p_1)_f$, $e_2 = (t_2, \beta_2, p_2)_f$, kde p_1, p_2 sú potomkami rôznych maximálnych synov. Označme vrcholy x_1, x_2 také, že $(t_1, \alpha, x_1)_f, (t_2, \alpha, x_2)_f \in E$.

- 1.1. Ak jedna z hrán e_1 alebo e_2 je typu 1. Predpokladajme, že e_1 je typu 1. Pre e_2 je nasledovná úvaha analogická. Teda t_1 leží na kružnici C nepatrí do $I(r)$. V množine $I(r)$ nutne leží nejaký maximálny koreň. Potom vrcholom stromu s maximálnym koreňom z $I(r)$ po výmene farieb hrán

$$(t_1, \beta_1, p_1)_f \quad (t_1, \alpha, x_1)_f$$

sa zväčšia hĺbky. Dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Vid' Obrázku 2.6.



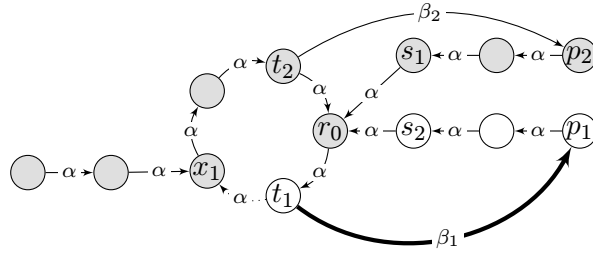
Obrázok 2.6: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy nového maximálneho stromu s koreňom r , prípad 1.1.

- 1.2. Ak $(t_1, \beta_1, p_1)_f$ a $(t_2, \beta_2, p_2)_f$ sú typu 2 a $t_1 \neq t_2$. Predpokladajme, že z r_0 je „bližšie“ v smere orientácie hrán k vrcholu t_1 ako t_2 na kružnici C . Z toho plynie, že vždy $t_2 \neq r$. Vymeníme farby hranám

$$(t_1, \beta_1, p_1)_f \quad (t_1, \alpha, x_1)_f.$$

Označme nový strom T' s koreňom r v P_α . Na obrázkoch sú znázornené situácie kedy počet maximálnych koreňom v klastre je jedna. Argumenty však platia aj v prípade, že počet maximálnych koreň je väčší ako 1.

1.2.1. Ak hĺbka T' je väčšia ako hĺbka T , potom sme dostali práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Vid' Obrázok 2.7.

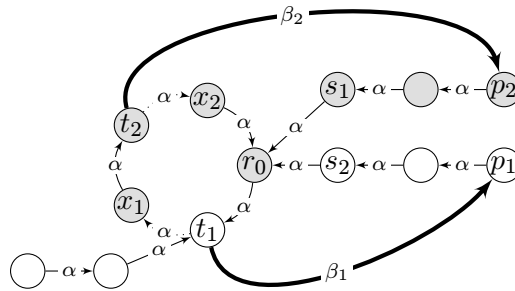


Obrázok 2.7: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T' , prípad 1.2.1.

1.2.2. Ak hĺbka T' je menšia alebo rovná hĺbke T . Potom vymeníme

$$(t_2, \beta_2, p_2)_f \quad (t_2, \alpha, x_2),$$

a teda sme k vrcholu p_2 maximálnej hĺbky pripojili vrchol t_2 . Dostali sme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Vid' Obrázok 2.8.



Obrázok 2.8: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T' , prípad 1.2.2.

1.3. Ak $(t_1, \beta_1, p_1)_f$ a $(t_2, \beta_2, p_2)_f$ sú typu 2 a $t_1 = t_2$. Označme strom T_0 s koreňom r taký, že obsahuje len vrcholy, ktoré sú potomkami s_0 po výmene farieb hranám

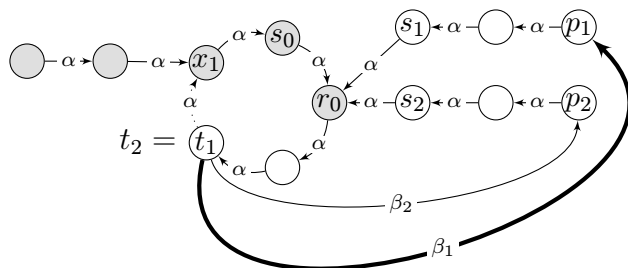
$$(t_1, \beta_1, p_1)_f \quad (t_1, \alpha, x_1)_f.$$

Ale výmenu neurobíme, len sme označili strom. Vrcholy stromu T_0 znázorňujeme šedou farbou na obrázkoch.

1.3.1. Ak hĺbka stromu T_0 je väčšia ako hĺbka T , potom výmenou farieb hrán

$$(t_1, \beta_1, p_1)_f \quad (t_1, \alpha, x_1)_f$$

dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Vid' Obrázok 2.9.

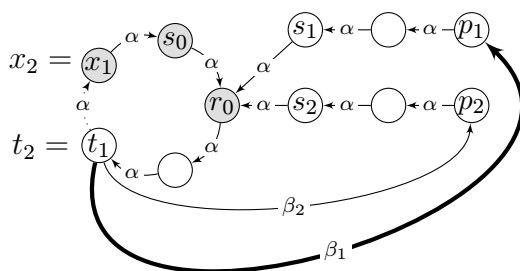


Obrázok 2.9: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T_0 , prípad 1.3.1.

1.3.2. Ak hĺbka stromu T_0 je menšia ako hĺbka T . Vymeníme farby hrán

$$(t_1, \beta_1, p_1)_f \quad (t_1, \alpha, x_1)_f.$$

Potom zavoláme znovu funkciu $\text{FLIPEDGES}(r)$. V prípade, že funkcia FINDEDGES vráti $(1, e'_1, e'_2)$ a žiadna hrana z e_1, e_2 nie je typu 1, potom ako hranu e'_1 zvolíme e_2 . Nový strom T_0 má rovnakú hĺbku ako T , teda prípad 1.3.2 nastane pre daný koreň naviac raz. Vid' Obrázok 2.10.



Obrázok 2.10: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T_0 , prípad 1.3.2.

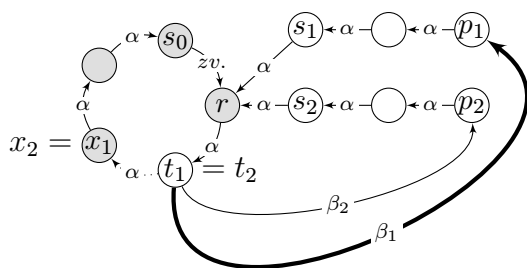
1.3.3. Zostáva prípad, kedy stromy T_0 a T majú rovnakú hĺbku.

1.3.3.1. Ak z s_0 a zároveň z nejakého maximálneho syna s_i vedie zväzok, teda existujú centrované stavy, sme ošetrili zvlášť v spoločnou algoritme. Teda táto situácia nenastane.

1.3.3.2. Ak z s_0 vedie zväzok a zo žiadneho maximálneho syna nevedie zväzok. Vymeníme farby hranám

$$(t_1, \beta_1, p_1)_f \quad (t_1, \alpha, x_1)_f.$$

Potom zavoláme znovu funkciu `FLIPEDGES( $r$ )`. V prípade, že funkcia `FINDEDGES` vráti $(1, e'_1, e'_2)$ a žiadna hrana z e_1, e_2 nie je typu 1, potom ako hranu e'_1 zvolíme e_2 . Potom nový strom T_0 má rovnakú hĺbku ako T a z nového s_0 nevedie zväzok. Teda prípad nastane pre daný maximálny koreň najviac raz. Vid' Obrázok 2.11.

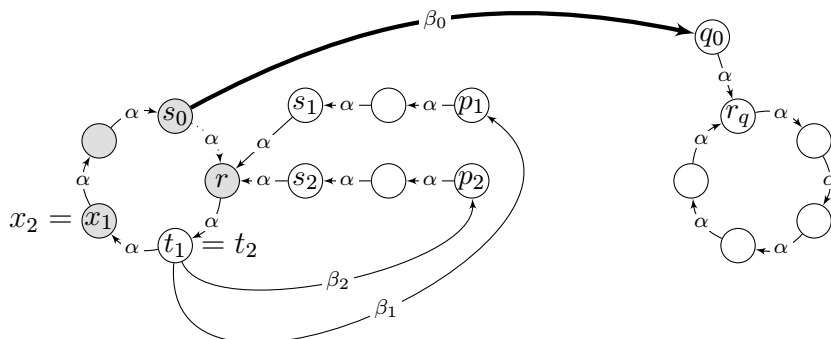


Obrázok 2.11: Z_{s_0} vedie zväzok a zo žiadneho maximálneho syna nevedie zväzok, prípad 1.3.3.2.

1.3.3.3. Ak z s_0 nevedie zvázok. Teda nech $(s_0, \beta_0, q_0)_f$ je hrana taká, že $q_0 \neq r$ pre nejaké $\beta_0 \in \Sigma$.
Ak q_0 nepatrí do klastru K , potom výmenou farieb hranám

$$(s_0, \beta_0, q_0)_f \quad (s_0, \alpha, r)_f$$

sa hĺbky vrcholov stromu T zväčšia. Označme koreň r_q stromu, do ktorého patrí q_0 . Dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r_q . Viď Obrázok 2.12.

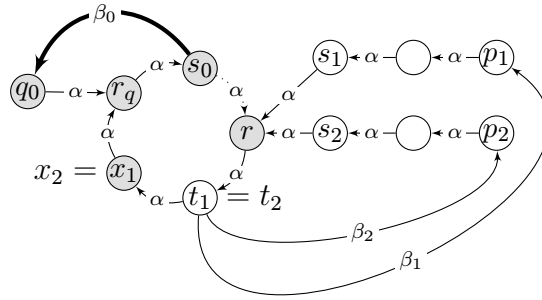


Obrázok 2.12: Vrchol q_0 nepatrí do klastru K , prípad 1.3.3.3.

Ak q_0 patrí do klastru K , má kladnú hĺbku a neleží na strome T , potom výmenou farieb hranám

$$(s_0, \beta_0, q_0)_f \quad (s_0, \alpha, r)_f$$

sa hĺbky vrchol stromu T zväčšia. Označme r_q strom, do ktorého patrí q_0 . Dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r_q . Vid' Obrázok 2.13.

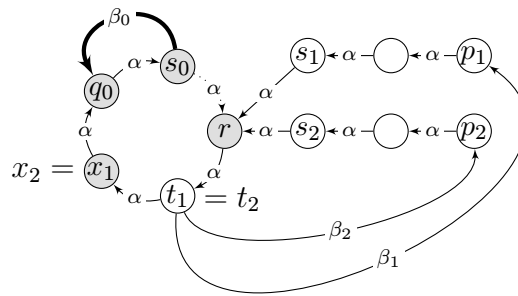


Obrázok 2.13: Vrchol q_0 patrí do klastru K , má kladnú hĺbku a neleží na strom T , prípad 1.3.3.3.

Ak q_0 patrí do klastru K a má nulovú hĺbku, potom výmenou farieb hranám

$$(s_0, \beta_0, q_0)_f \quad (s_0, \alpha, r)_f$$

sa hĺbky vrchol stromu T zväčšia. Dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je q_0 . Vid' Obrázok 2.14.



Obrázok 2.14: Vrchol q_0 patrí do klastru K a má nulovú hĺbku, prípad 1.3.3.3.

Ak q_0 patrí do T , urobíme výmenu farieb hranám

$$(s_0, \beta_0, q_0)_f \quad (s_0, \alpha, r)_f.$$

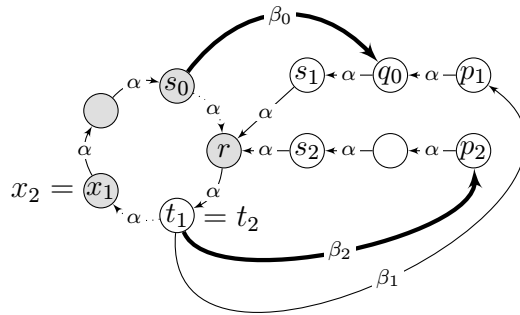
Ak q_0 je potomkom s_1 , potom navyše vymeníme farby hráčov

$$(t_2, \beta_2, p_2)_f \quad (t_2, \alpha, x_2 = t_2 \cdot \alpha)_f.$$

V prípade, že q_0 nie je potomkom s_1 , potom vymeníme farby hranám

$$(t_1, \beta_2, p_1)_f \quad (t_1, \alpha, x_1)_f.$$

Dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Viď Obrázok 2.15.

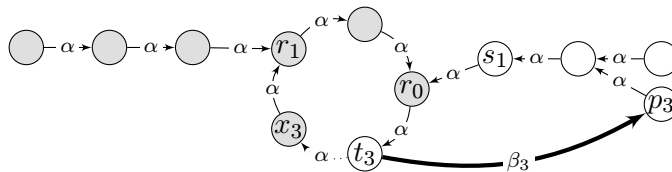


Obrázok 2.15: Vrchol q_0 patrí do T a q_0 je potomkom s_1 , prípad 1.3.3.3.

2. Funkcia $\text{FINDEDGES}(r)$ vráti hodnotu $(2, e_3)$, kde $e_3 = (t_3, \beta_3, p_3)_f$ je typu 1 alebo 2 a zároveň strom T má jedného maximálneho syna s_1 . Označme vrchol x_3 taký, že $(t_3, \alpha, x_3)_f \in E$ tj. $x_3 = a_3 \cdot \alpha$.
- 2.1. Ak hrana $(t_3, \beta_3, p_3)_f$ je typu 1 tj. $t_3 \notin I(r)$. V množine $I(r)$ nutne leží nejaký maximálny koreň. Potom vrcholom stromu s maximálnym koreňom z $I(r)$, po výmene farieb hranám

$$(t_3, \beta_3, p_3)_f \quad (t_3, \alpha, x_3)_f,$$

zväčšíme hĺbky. Dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Vid' Obrázok 2.16.



Obrázok 2.16: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálne stromu po výmene, prípad 2.1.

2.2. Ak hrana $(t_3, \beta_3, p_3)_f$ je typu 2. Označme strom s koreňom r ako T_0 , ktorý vznikne P_α po výmene farieb hranám

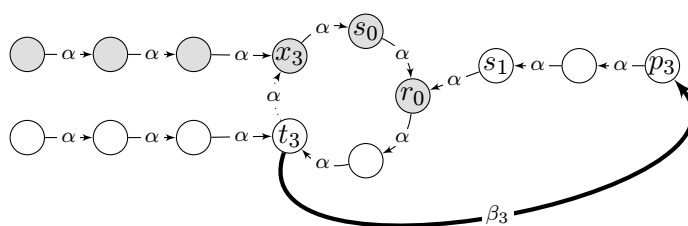
$$(t_3, \beta_3, p_3)_f \quad (t_3, \alpha, x_3)_f$$

a obsahuje len potomkov vrcholu s_0 . Ale výmenu neprevedieme, len sme označili strom T_0 . Vrcholy stromu T_0 sú označené šedou farbou na obrázkoch.

2.2.1. Ak hĺbka stromu T_0 je väčšia ako hĺbka T , potom výmenou farieb hranám

$$(t_3, \beta_3, p_3)_f \quad (t_3, \alpha, x_3)_f$$

dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Vid' Obrázok 2.17.

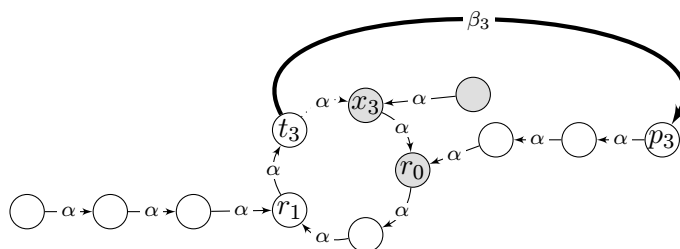


Obrázok 2.17: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T_0 , prípad 2.2.1.

2.2.2. Ak hĺbka stromu T_0 je menšia ako hĺbka T , prevediem výmenu farieb hranám

$$(t_3, \beta_3, p_3)_f \quad (t_3, \alpha, x_3)_f.$$

Výmenou farieb týchto hrán r prestane byť maximálnym koreňom v P_α a nevznikne nový maximálny strom, ostatné maximálne stromy okrem T sa nezmenili. Vid' Obrázok 2.18.



Obrázok 2.18: Šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T_0 , prípad 2.2.2.

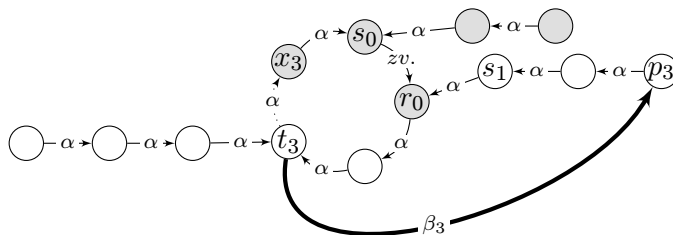
2.2.3. Ak hĺbky stromov T_0 a T sú rovnaké, použijeme rovnaký postup argumentácie ako v bode 1.3.3:

2.2.3.1. Ak z s_0 a s_1 vedie zväzok, potom máme centrované stavy. Tento prípad sme ošetrili v zvlášť v spoločnom algoritme.

2.2.3.2. Ak z s_0 vedie zvázok a z s_1 nevedie zvázok. Vymeníme farby hranám

$$(t_3, \beta_3, p_3)_f \quad (t_3, \alpha, x_3)_f.$$

Výmenou sme previedli na prípad, kedy z nového s_0 nevychádzajú žiadne hrany a zavolať funkciu FLIPEDGES(r) znovu. Nový r_0 má práve jedného maximálneho syna. Tento prípad nastane len zrejmé raz počas volania FLIPEDGES(r). Viď Obrázok 2.19.

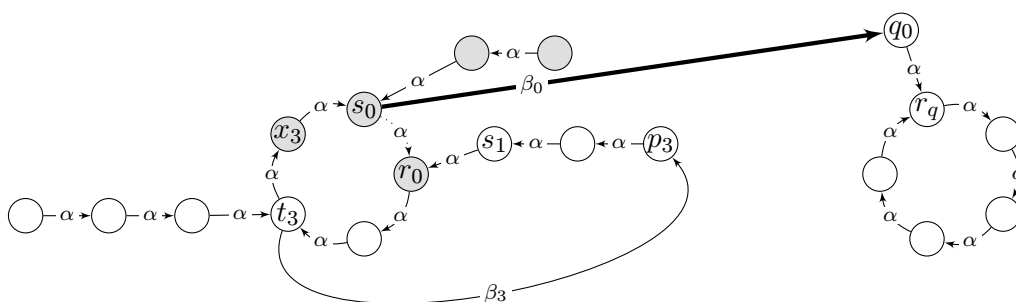


Obrázok 2.19: Prípád 2.2.3.2.

2.2.3.3. Ak z s_0 nevedie zvázok. Potom nech $(s_0, \beta_0, q_0)_f$ je hrana, kde $q_0 \neq r$. Rozoberieme prípady kam patrí q_0 . Ak q_0 nepatrí do klastra K vymeníme farby hraným

$$(s_0, \beta_0, q_0)_f \quad (s_0, \alpha, r)_f.$$

Označme koreň r_q stromu, do ktorého patrí vrchol q_0 . Potom dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r_q . Viď Obrázok 2.20.

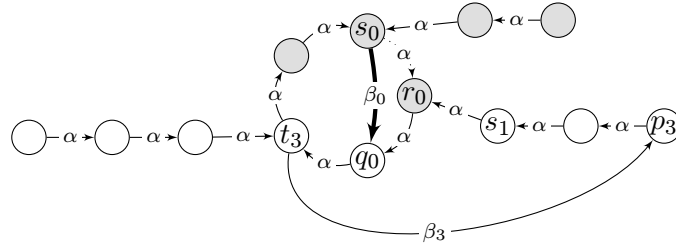


Obrázok 2.20: Vrchol q_0 nepatrí do klastra K , prípad 2.2.3.3.

Ak q_0 patrí do klastru K a má hĺbku 0. Vymeníme farby hranám

$$(s_0, \beta_0, q_0)_f \quad (s_0, \alpha, r)_f.$$

Dostaneme práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je q_0 . Vid' Obrázok 2.21.



Obrázok 2.21: Vrchol q_0 patrí do klastru K a má hĺbku 0, prípad 2.2.3.3.

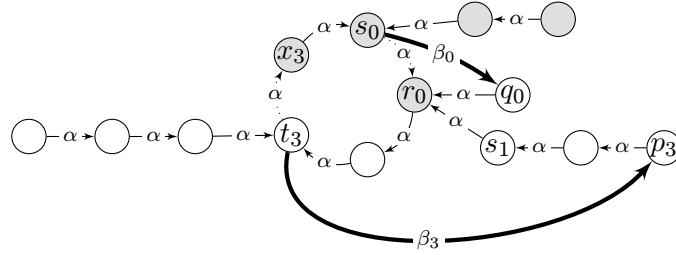
Ak q_0 patrí do stromu T a p_3 nie je potomkom q_0 , vymeníme farby hranám

$$(s_0, \beta_0, q_0)_f \quad (s_0, \alpha, r)_f.$$

A ešte prevediem jednu výmenu farieb hranám

$$(t_3, \beta_3, p_3)_f \quad (t_3, \alpha, x_3)_f.$$

Potom dostaneme v práve jeden maximálny strom, ktorého koreň je r . Vid' Obrázok 2.22.

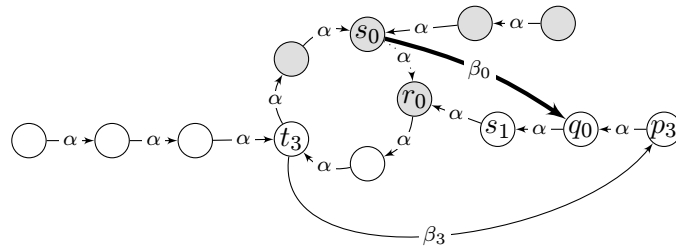


Obrázok 2.22: Vrchol q_0 patrí do stromu T a nevedie orientovaný sled z q_0 do s_1 v P_α a zároveň $q_0 \neq s_0$, prípad 2.2.3.3.

Ak q_0 patrí do klastru K a p_3 je potomkom q_0 , vymeníme farby hranám

$$(s_0, \beta_0, q_0)_f \quad (s_0, \alpha, r)_f.$$

Touto výmenou r prestane byť maximálnym koreňom v P_α . Vid' Obrázok 2.23.

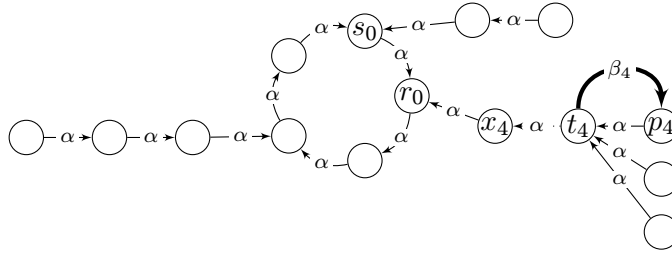


Obrázok 2.23: Vrchol q_0 patrí do klastru K , vedie orientovaný sled z q_0 do s_1 v P_α alebo $q_0 = s_1$, prípad 2.2.3.3.

3. Funkcia $\text{FIND_EDGES}(r)$ vráti hodnotu $(3, e_4)$. Hrana $e_4 = (t_4, \beta_4, p_4)_f$ je typu 3 a všetky vrcholy maximálnej hĺbky z T sú potomkovia t_4 . Označme x_4 vrchol taký, že $(t_4, \alpha, x_4)_f \in E$. Vymeníme farby hranám

$$(t_4, \beta_4, p_4)_f \quad (t_4, \alpha, x_4)_f.$$

Po výmene tejto dvojice hrán vrchol r prestane byť maximálnym vrcholom. Vid' Obrázok 2.24.



Obrázok 2.24: Prípád 3.

Záver

Najprv sme v prvej kapitole ukázali Trahtmanov dôkaz Problému farbenia cesty. Ukázali sme Béalovej a Perrinov dôkaz existencie k -synchronizujúceho pre obecný stavový graf. V druhej kapitole sme popísali hlavné myšlienky troch algoritmov, ktoré hľadajú k -synchronizujúce farbenie. Prvý je priamočiarou aplikáciou dôkazu Tvrdenia 47 s časovou zložitou $\mathcal{O}((n - k)dn^2)$. Druhý je Trahtmanova redukcia a tretí je Béalovej a Perrinov algoritmus s časovou zložitou $\mathcal{O}((n - k)dn)$. Na záver uvedme, že v nedávno publikovanom článku Berlinkov (2013), ktorý prebieha opravami, je dôkaz, že náhodný automat s veľkou pravdepodobnosťou má synchronizujúce slovo.

So synchronizáciou automatov súvisí otvorený problém tzv. Černého hypotéza. Ak automat s n stavmi má synchronizujúce slovo, potom má synchronizujúce slovo s dĺžkou $\leq (n - 1)^2$. Ako pôvod zadania sa uvádza Černý (1964), ale článok neobsahuje presné znenie.

Zoznam použitej literatúry

- ADLER, R. L., GOODWYN, L. W. a WEISS, B. (1977). Equivalence of topological Markov shifts. *Israel Journal of Mathematic*, **27**, 48–63.
- BÉAL, M. P. a PERRIN, D. (2012). A quadratic algorithm for road coloring. *arXiv:0803.0726v8*, 1–26. URL <http://128.84.158.119/pdf/0803.0726v8>.
- BÉAL, M. P. a PERRIN, D. (2013). A quadratic algorithm for road coloring. *arXiv:0803.0726v9*, 1–28. URL <http://128.84.158.119/pdf/0803.0726v9>.
- BERLINKOV, M. V. (2013). On the probability to be synchronizable. URL <http://arxiv.org/abs/1304.5774>.
- BUDZBAN, G. a FEINSILVER, P. (2011). The generalized road coloring problem and periodic digraphs. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 21–35.
- ČERNÝ, J. (1964). Poznámka k homogénnym eksperimentom s konečnými automatami. *Math-Fyz. Časopis*, **14**, 208–215.
- ČERNÝ, J. P. (2010). Základní grafové algoritmy. 1–204. URL <http://kam.mff.cuni.cz/~kuba/ka/uvod.html>.
- ČULÍK II, K., KARHUMÄKI, J. a KARI, J. (2002). A note on synchronized automata and road coloring problem. *Journal Foundation Computer Science*, **13**, 459–471.
- JARVIS, J. P. a SHIER, D. R. (1996). Graph-theoretic analysis of finite markov chains. *Shier, D. R.; Wallenius, K. T., Applied Mathematical Modeling: A Multidisciplinary Approach, CRC Press.*, **53**(282), 457–481.
- TRAHTMAN, A. N. (2007). The road coloring problem. **4**, 1–9. URL <http://arxiv.org/abs/0709.0099>.
- TRAHTMAN, A. N. (2008a). The road coloring for mapping on k states. *Journal of Discrete Algorithms*, 1–9. URL <http://arxiv.org/abs/0812.4798>.
- TRAHTMAN, A. N. (2009). The road coloring problem. *Israel Journal of Mathematics*, **172**, 51–60.
- TRAHTMAN, A. N. (2012). An algorithm for road coloring. *Journal of Discrete Algorithms*, **16**, 213–223.
- TRAHTMAN, A. (2008b). *Synchronizing Road Coloring*, volume 273 of *IFIP International Federation for Information Processing*. Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-09679-7.

Zoznam obrázkov

1.1	Príklad stavového grafu.	7
1.2	Stavový graf G s farbením f vľavo a s farbením g vpravo.	8
1.3	Príklad 3-synchronizujúceho farbenia.	11
1.4	Vľavo $P = P_1P_2$ a vpravo $P = (P_0P_1)P_2$	13
1.5	Automat G^f a faktorový automat G_ρ^f	15
1.6	Vzťah stavových grafov a farbení z úvahy o indukovanom farbení, do obrázk ešte doplníme ďalšie informácie.	15
1.7	Vysvetlenie indukovaného farbenia.	16
1.8	Vzťah stavového grafu, farbenia a automatu z Tvrdenia 29.	17
1.9	Automat $G_\rho^{h'}$ a automat G^h	18
1.10	Rozklad $[c_0]_\approx, [c_1]_\approx, \dots, [c_{l-1}]_\approx$ množiny V s vlasnosťou (1.1).	20
1.11	K dôkazu Tvrdenia 33, že k delí $ w $	21
1.12	Kružnicový stavový graf výstupňa 2 s n vrcholmi a n -synchronizujúcim farbením.	24
1.13	Príklad klastru.	25
1.14	Stavový graf so slučkou z vrcholu p a synchronizujúcim farbením.	28
1.15	Podgraf P_α , všetky vrcholy majú hĺbku 0.	29
1.16	Centrované stavy p, q	29
1.17	Prípád 1.1, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu po výmene (1.2).	30
1.18	Prípád 1.2, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu po výmene (1.2).	30
1.19	Prípád 1.3., šedou farbou sú vyznačené vrcholy novej kružnice.	31
1.20	Prípád 1.4, šedou farbou sú vyznačené vrcholy sledu L_2 . Sled L_1 je tvorený hranou $(r, \alpha, a)_f$	31
1.21	Prípád 1.4, šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T' , ktorého hĺbka je L	32
1.22	Šedou farbou sú vyznačené vrcholy stromu T' , ktorého hĺbka je L , z vrcholu b vedie zväzok.	32
1.23	Prípád 2.1, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu.	33
1.24	Prípád 2.2, šedou farbou sú vyznačené vrcholy dlhšej kružnice.	33
1.25	Prípád 2.3, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu.	33
1.26	Prípád 2.4, šedou farbou sú vyznačené vrcholy maximálneho stromu.	34
2.1	Kružnica C a sled L	42
2.2	Výsledok priradenia farby α , Trahtmanova redukcia.	43
2.3	Znázornené značenie.	45
2.4	Šedou farbou sú vyznačené už navštívené vrcholy.	47

