Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Praktické úlohy řešené kvadratickými rovnicemi

Real-life problems solved by quadratic equations

Autor: Petr Hanzal

Vedoucí práce: Doc. RNDr Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Praha 2013

Prohlašuji, že jsem zadanou bakalářskou práci zpracoval samostatně s přispěním vedoucího práce a použil jsem pouze literaturu v práci uvedenou. Dále prohlašuji, že nemám námitek proti půjčování nebo zveřejňování mé bakalářské práce nebo její části se souhlasem katedry.

Datum:

Podpis

Poděkování

Děkuji Doc. RNDr Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D. za vedení bakalářské práce a za rady a připomínky, které mi při zpracování této práce poskytl.

ABSTRAKT:

Práce obsahuje soubor praktických úloh řešených pomocí kvadratických rovnic. Cílem práce je shromáždit dostupné praktické úlohy, se kterými se mohou studenti různého věku setkat ve škole nebo v praktickém životě a vytvoření dalších modelových úloh, které by bylo možné použít ve výuce či matematických soutěžích. Součástí práce jsou i obrázky sloužící k lepšímu pochopení některých úloh. Obrázky jsou vytvořeny v programu Geogebra.

KLÍČOVÁ SLOVA:

Reálný problém, rovnice, kvadratická rovnice

ABSTRACT:

This thesis contains a set of real-life problems solved using quadratic equations. The aim is to gather avaiable practical problems, with which students of all ages can meet at school or in everyday life and create additional model problems that could be used in teaching or mathematical competitions. Part of this work are pictures for a better understanding of some tasks. Images were created in Geogebra.

KEY WORDS:

Real-life problem, equation, quadratic equations

1. Obsah

Úvod

Základním cílem mé práce je především ukázat smysl výuky kvadratických rovnic na základních a středních školách. Rád bych ukázal, proč je naprosto nezbytné se této problematice na základních a především středních školách věnovat a jaký to má praktický význam.

Kvadratické rovnice jsem si vybral především proto, že rovnice jako takové řeším rád. Důvodem bylo ale také to, že naprostá většina úloh, s nimiž se studenti mohou setkat, se řeší pomocí rovnic lineárních a také řadu běžných problémů v životě stačí řešit pomocí jednoduchých lineárních rovnic. Chtěl jsem proto poukázat na situace, které mají jiný průběh a vybral si pro to kvadratické rovnice.

Příkladů praktických problémů řešených pomocí lineární rovnice lze nalézt celou řadu. Od opravdu jednoduchého: „Mám v peněžence 200 Kč, co všechno si za to teď v samoobsluze mohu koupit?“, až po úlohy složitějšího charakteru, kdy je třeba se nad problematikou trochu více zamyslet (například problém, kdy různí lidé platí něco ve skupině a ve výsledku se mají vyrovnat tak, aby každý platil stejně a zároveň platil co nejméně jiným lidem).

S praktickými úlohami, které se řeší pomocí kvadratických rovnic, už je to o něco obtížnější. Sám jsem si nějakou dobu nemohl vzpomenout na reálnou situaci, která by se řešila pomocí alespoň jednoduché kvadratické rovnice. Jako první (ještě, než jsem začal hledat na internetu nebo v knihách) mě napadly například úlohy, v nichž se využívá Pythagorova věta. Musím ale přiznat, že na řadu dalších problémů, které se řeší pomocí kvadratické rovnice nebo vůbec mají kvadratický průběh, jsem přišel až při hledání úloh z různých oborů.

Práce je rozdělena na sedm kapitol. První kapitola má za cíl zmapovat dostupné zdroje praktických úloh řešených pomocí kvadratické rovnice a tyto jednotlivé zdroje stručně popsat.

Druhá a třetí kapitola jsou věnovány stručnému přehledu základních poznatků, které jsou nutné pro řešení rovnic obecně a především rovnic kvadratických. Bez znalosti těchto poznatků se čtenář neobejde při řešení úloh v následujících kapitolách.

Ve čtvrté kapitole jsou popsány velmi jednoduché praktické úlohy, se kterými by se mohli potkávat žáci na základních školách, především se zde objevují úlohy řešené pomocí Pythagorovy věty, u nichž se počítá pouze se znalostí řešení neúplné kvadratické rovnice.

Pátá kapitola shromažďuje praktické úlohy, se kterými se mohou setkat studenti středních škol. Při řešení těchto úloh se předpokládá znalost řešení kvadratických rovnic pomocí diskriminantu i Viètových vzorců. Vyskytují se zde úlohy především z různých oblastí fyziky, ale i úlohy historické nebo o společné práci.

V šesté kapitole se seznamujeme s úlohami obtížnějšími, vyžadujícími většinou hlubší znalosti matematiky, ale i dané problematiky. Nalezneme zde úlohy z ekonomie, kde je možné využít kvadratické rovnice při výpočtu úrokových sazeb. Dále se zde objevují složitější úlohy z elektrotechniky, kde se ukazuje i využití komplexních čísel. Také tu lze nalézt úlohy z chemie, kde se kvadratické rovnice využívají pro přesný výpočet pH některých kyselin či zásad.

V poslední kapitole jsou úlohy, které by mohly sloužit jako doplnění výuky kvadratických rovnic na středních školách a především pro názornou ukázku toho, proč je důležité se zabývat kvadratickými rovnicemi a jejich řešením.

1. Stručný přehled dostupných zdrojů

Cílem této kapitoly je shrnout a porovnat, kde je možné nalézt slovní úlohy řešené pomocí kvadratických rovnic a také jaké typy úloh se v daném zdroji vyskytují. Materiály, které se tomuto věnují, jsou většinou určeny pro středoškolské studenty. Naprostá většina skript pro vysokoškolské studenty technických i netechnických oborů se kvadratickým rovnicím nevěnuje vůbec, nebo pouze velmi stručně.

1.1. Tištěné zdroje

Při přípravě této práce jsem prostudoval řadu vysokoškolských učebnic a skript. Kvadratické rovnice se mi podařilo nalézt pouze v [15], zde se vyskytuje návod na řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu a několik příkladů. Většina z ostatních skript začíná logikou, maticemi a množinami (např.: [9]) nebo lineární algebrou (např.: [11]).

Největší množství praktických úloh řešených pomocí kvadratických rovnic jsem nalezl v [4], kde se vyskytuje pestrá škála různých řešených úloh s touto tematikou, ale i další úlohy neřešené. Objevují se zde úlohy o pohybu, o společné práci, se zapojením rezistorů a další. Některé z nich jsou také součástí této práce.

V učebnici [8], která je velmi rozšířenou pomůckou při výuce matematiky na gymnáziích, lze nalézt také několik úloh. Vyskytují se zde úlohy velmi jednoduché (v této práci jsou některé podobné zařazené pod úroveň ZŠ), ale objevují se i složitější úlohy (např. o společné práci). Celkově je zde ale úloh s touto tematikou jen velmi málo.

Slovní úlohy řešené pomocí kvadratické rovnice lze nalézt i v [16]. V této učebnici se vyskytují úlohy na procenta, o společné práci a několik dalších.

Učebnice [6] je určena pro školy, kde je méně hodin matematiky, proto jsem očekával, že se zde tento typ slovních úloh nebude zahrnovat. Přesto v ní lze nalézt některé úlohy o pohybu nebo o společné práci.

V učebnici [14] zabývající se funkcemi jsem očekával více úloh, které by mohly ukázat, kde se využívá právě kvadratická funkce, a tedy by vedly na řešení pomocí kvadratické rovnice. Bohužel ani zde se nevyskytuje mnoho úloh, které by tomuto tématu byly věnovány.

Kniha [7] je souborem zajímavých řešených úloh, ale autor se bohužel věnuje využití jiných oblastí matematiky, takže zde se úlohy hledaného typu nevyskytují.

V učebnicích [12] a [13], které jsou určené pro žáky základní školy, se úlohy (ani jednoduché) vedoucí na řešení kvadratickou rovnicí nevyskytují. Přesto je do analýzy zařazuji, neboť jsem z nich čerpal při hledání nebo tvorbě vhodných příkladů pro žáky základních škol.

1.2. Elektronické zdroje dostupné z internetu

Jedna z webových stránek, kde jsem očekával největší množství rozmanitých úloh, je Matematické fórum ([22] a [24]). Nepodařilo se mi tam ale mnoho úloh dohledat, nalezl jsem jen dvě o pružné srážce a hloubce propasti.

Nejvíce úloh jsem nalezl na stránce věnované přímo úlohám vedoucím na kvadratické rovnice [25], kde se vyskytují úlohy o pohybu, společné práci nebo geometrické.

Zajímavá sada historických úloh je [23], některé z těchto úloh se shodně vyskytují i v tištěných materiálech nebo dalších elektronických zdrojích, ale na tomto webu jich je více pohromadě. Jelikož jsou to stránky věnované historickým úlohám obecně, pomocí kvadratické rovnice se řeší jen některé.

Matematickým a logickým úlohám jsou zasvěceny ještě stránky [26] a [29], z nichž zejména [26] je možné doporučit k získání zajímavých a netradičních matematických úloh. Úlohy vedoucí na řešení kvadratické rovnice se zde ale téměř nevyskytují.

Další webové stránky nejsou již věnovány matematice. Jedná se o [20] a [21], které jsou věnovány zajímavým fyzikálním úlohám. Obě stránky poskytují nejen samotné úlohy, ale vysvětlení a odvození mnoha vzorců, které jsou k řešení potřebné.

1.3. Závěr přehledu

Celkově jsem prošel hodně různých knih věnovaných různým oborům ve snaze nalézt úlohy, které by se řešily pomocí kvadratické rovnice, ale popravdě jsem tímto způsobem našel jen velmi málo úloh. Předpokládám, že to není proto, že by se kvadratické rovnice obecně nepoužívaly, ale spíše proto, že většinou chce autor vysvětlit problematiku na úlohách jednodušších, tedy většinou lineárních.

Na druhou stranu na webových stránkách se úlohy řešené pomocí kvadratických rovnic hledají jednodušeji, a to především na stránkách věnovaných zajímavým fyzikálním úlohám. Přes to všechno myslím, že obecně je úloh vedoucích na řešení kvadratickou rovnicí velmi málo a bylo by vhodné vytvořit těchto úloh více, aby bylo možné především studentům středních škol ukázat, že řešení kvadratických rovnic má ve světě své využití a opodstatnění.

2. Základy řešení rovnic

V této kapitole se seznámíme s obecným řešením rovnic, ale také s řešením konkrétních typů kvadratických rovnic. Zvládnutí použití postupů předvedených v této kapitole je nezbytné pro řešení všech příkladů, které se v této práci vyskytují.

2.1. Rovnice

Nejprve si řekneme, co vlastně pojem rovnice znamená a shrneme některé další základní pojmy, které se s rovnicemi a jejich řešením pojí.

Rovnice (s jednou neznámou) je zápis rovnosti dvou výrazů, v nichž se může vyskytovat nějaké písmeno (*x, y, t* apod.) označující tzv. **neznámou**. [8, s. 9]

Řešení rovnice je každé číslo, jehož dosazením do rovnice dostaneme platnou rovnost. Řešení rovnice se někdy označuje jako **kořen rovnice**.

2.2. Úpravy při řešení rovnic

Řešení rovnice spočívá v nalezení všech čísel, která je možné dosadit za neznámou tak, aby platila rovnost. Každé takové číslo je tedy řešením rovnice. Při hledání řešení rovnice obvykle postupujeme tak, že místo dané rovnice píšeme nové rovnice tak, aby množina všech řešení byla totožná. Úpravy, které toto splňují, se nazývají **ekvivalentní**.

Mezi ekvivalentní úpravy patří:

- přičtení stejného výrazu obsahujícího neznámou (definovaného pro všechny hodnoty neznámé z množiny čísel, v níž rovnici řešíme) k oběma stranám rovnice [8, s. 22]
- vynásobení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem
- ekvivalentní úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice [8, s. 18]
- vzájemná výměna stran rovnice

Jsou však i případy, kdy může být výhodné převést rovnici na jinou, která obsahuje kromě řešení původní rovnice i nějaká další řešení. Taková úprava se nazývá úpravou **důsledkovou**. Pro řešení rovnic, které tato práce obsahuje, je nutno znát jedinou důsledkovou úpravu:

- umocnění obou stran rovnice na druhou

3. Kvadratické rovnice

V této kapitole si ukážeme, jak se řeší kvadratické rovnice. Nejprve si předvedeme řešení kvadratických rovnic v oboru reálných čísel a v samostatné podkapitole si ukážeme, jak se řeší kvadratické rovnice v oboru čísel komplexních.

Rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ se nazývá **kvadratická rovnice** (s neznámou x); ax^2 je její **kvadratický člen**, bx její **lineární člen**, c její **absolutní člen** [8, s. 118].

3.1. Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Kvadratická rovnice bez absolutního členu je taková rovnice, která má tvar $ax^2 + bx = 0$, nebo taková, která lze na tento tvar převést. Kvadratickou rovnici tohoto typu řešíme vytknutím výrazu ax, kdy rovnici převedeme na tvar $ax \cdot \left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$. Pak $x_1 = 0$ je jedním kořenem a druhým je $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Řešení jedné takové rovnice si ukážeme na příkladu.

Příklad: Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$: $5x^2 + 6x = 0$

Řešení:

$$5x\left(x + \frac{6}{5}\right) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{6}{5}$$

3.2. Ryze kvadratická rovnice

Ryze kvadratická rovnice je rovnice ve tvaru $ax^2 + c = 0$, nebo taková, kterou lze na tento tvar převést. Tento typ rovnice řešíme převedením na tvar $x^2 = \frac{-c}{a}$ a následným odmocněním obou stran (pozor na to, že $\sqrt{x^2} = |x|$!) v případě, že $\frac{-c}{a} \geq 0$. V opačném případě rovnice nemá řešení v oboru reálných čísel.

Opět si uvedeme jeden řešený příklad na tento typ kvadratické rovnice.

Příklad: Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$: $4x^2 - 36 = 0$

Řešení:

$$4x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 = \frac{36}{4} = 9$$

$$\sqrt{x^2} = 9$$

$$|x| = 3$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 3$$

3.3. Obecná kvadratická rovnice

Obecná kvadratická rovnice má tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

Obecnou kvadratickou rovnici lze řešit více způsoby. Zde si ukážeme dva z nich. Pomocí diskriminantu, což je metoda univerzální, a lze ji tedy použít vždy. Kvadratickou rovnici je ale možné řešit také pomocí Viètových vzorců, jejichž použití je v některých případech výrazně rychlejší, v některých je ale použití této metody velmi obtížné.

3.3.1. Řešení pomocí diskriminantu

Vzorec s diskriminantem si nejprve odvodíme. Obecná kvadratická rovnice má tvar $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Nejprve ji vydělíme nenulovým číslem a, čímž dostaneme tzv. **normovanou kvadratickou rovnici**, která má koeficient u kvadratického členu roven 1. Rovnice pak vypadá takto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

První dva členy kvadratického trojčlenu doplníme přičtením vhodného čísla tak, abychom dostali druhou mocninu lineárního dvojčlenu $x + m$ ($m \in \mathbf{R}$), tedy výraz $x^2 + 2mx + m^2$. Taková úprava se nazývá **doplnění na druhou mocninu lineárního dvojčlenu** (popř. doplnění na čtverec). V našem případě $2m = \frac{a}{b}$, odkud $m = \frac{a}{2b}$.

Proto k oběma stranám rovnice přičteme číslo $m^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Obdržíme rovnici:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Dalšími úpravami dostaneme:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

[8, s. 122]

Na první pohled je zřejmé, že jmenovatel $4a^2$ zlomku na pravé straně rovnice bude nenulový ($a \neq 0$), proto existence a počet řešení závisí na čitateli tohoto zlomku. Výraz $b^2 - 4ac$ budeme nazývat **diskriminantem** kvadratické rovnice. Diskriminant se obvykle značí *D*.

Pokud $D < 0$, pak nemá daná kvadratická rovnice v reálném oboru řešení, jelikož neexistuje takové reálné číslo x, pro které platí $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ (levá strana je totiž evidentně nezáporná a pravá záporná).

Pokud $D \geq 0$, můžeme rovnici $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ převést na rovnici v součinovém tvaru:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

Tato rovnice má kořeny:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obvykle při výpočtu zapisujeme kořeny ve tvaru:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jestliže $D = 0$, pak má rovnice jeden dvojnásobný kořen (x_1 a x_2 vycházejí stejně). Výpočet kořenů kvadratické rovnice pomocí diskriminantu si předvedeme na příkladu.

<u>Příklad:</u> Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$: $x^2 - 5x + 4 = 0$

<u>Řešení:</u>

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$
$$D = 25 - 16 = 9$$
$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = \frac{8}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

3.3.2. Řešení pomocí Viètových vzorců

Máme-li rovnici upravenou na tvar $x^2 + bx + c = 0$, pak pro kořeny rovnice (pokud existují) platí: $x_1 + x_2 = -b$ a $x_1 \cdot x_2 = c$, což vyplývá z toho, že jestliže jsou x_1 a x_2 kořeny rovnice, pak nutně musí platit $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ a roznásobíme-li levou stranu, dostaneme $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

Vztahy $x_1 + x_2 = -b$ a $x_1 \cdot x_2 = c$ se nazývají Viètovými vzorci.

Práci s těmito vzorci si předvedeme pro porovnání s předchozí metodou na stejném příkladu.

<u>Příklad:</u> Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{R}$: $x^2 - 5x + 4 = 0$

<u>Řešení:</u>

Nejprve si vyjádříme oba vztahy, které platí:

$$5 = x_1 + x_2$$
$$4 = x_1 x_2$$

(zde odhadujeme hodnoty $x_1 = 4$ a $x_2 = 1$)

$$5 = 1 + 4$$
$$4 = 1 \cdot 4$$

3.4. Kvadratická rovnice v oboru komplexních čísel

Zatím jsme si ukazovali řešení kvadratických rovnic pouze, pokud byly řešitelné v oboru reálných čísel. Nyní se ale zaměříme na ty, které v oboru reálných čísel řešitelné nejsou (ty, které mají diskriminant záporný).

3.4.1. Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty a záporným diskriminantem

Kvadratická rovnice ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty a záporným diskriminantem D má v oboru komplexních čísel právě dva kořeny, a to sdružená imaginární čísla [5, s. 61]

Snadno získáme vzorec pro jejich výpočet, neboť v komplexních číslech platí $\mathrm{i}^2 = -1$, a tedy můžeme vytknout komplexní jednotku v odmocnině a poté částečně odmocnit. Pro $D < 0$ tedy platí:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\mathrm{i}^2 D}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-D}}{2a}$$

Na příkladu si ukážeme, jak řešit rovnice se záporným diskriminantem.

Příklad: Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{C}$: $3x^2 + 5x + 20 = 0$

Řešení:

Nejprve si podle vzorce vypočítáme diskriminant:

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 20 = -215$$

Vidíme, že diskriminant je záporný, a použijeme tedy výše uvedený vzorec:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \mathrm{i}\sqrt{-(-215)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_1 = \frac{-5 + \mathrm{i}\sqrt{215}}{6} = \frac{-5}{6} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{215}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \mathrm{i}\sqrt{215}}{6} = \frac{-5}{6} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{215}}{6}$$

Výsledky tedy pomocí vzorce snadno získáme.

3.4.2. Kvadratická rovnice s komplexními koeficienty

Kvadratická rovnice s komplexními koeficienty je rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$. Budeme hledat její řešení. Vynásobíme obě strany rovnice číslem $a \neq 0$

$$(ax)^2 + abx + ac = 0,$$

doplníme levou stranu rovnice na druhou mocninu lineárního dvojčlenu

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4} = 0$$

a vynásobíme čtyřmi

$$(2ax + b)^2 - b^2 - 4ac = 0.$$

Označme v této rovnici $y = 2ax + b$ a $D = b^2 - 4ac$.

A předpokládejme, že $D \neq 0$. Dostaneme binomickou rovnici

$$y^2 - D = 0.$$

A z vyjádření komplexního čísla *D* ve tvaru $D = |D|(\cos\alpha + \mathrm{i} \cdot \sin\alpha)$ pak určíme její kořeny y_k:

$$y_k = \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{2} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{2}\right), k = 0, 1,$$

což jsou čísla

$$y_0 = \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$y_1 = \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi}{2} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{\alpha + 2\pi}{2}\right),$$

$$y_1 = \sqrt{|D|}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right) + \mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\pi\right)\right),$$

$$y_1 = \sqrt{|D|}\left(-\cos\frac{\alpha}{2} - \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Dosazením y_0, y_1 do vztahu $y = 2ax + b$ dostaneme po úpravě kořeny x_1 (dosazením y_0) a x_2 (dosazením y_1) dané rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{2a}$$

[5, s. 85]

Vzorec, ke kterému jsme dospěli, platí samozřejmě i pro kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, neboť reálná čísla jsou zvláštním případem čísel komplexních. Jeho použití si ukážeme na příkladu.

Příklad: Řešte rovnici s neznámou $x \in \mathbf{C}$: $x^2 - (3-\mathrm{i})x + (2-6\mathrm{i}) = 0$

Řešení:

Nejprve vypočteme diskriminant v algebraickém tvaru a poté ho převedeme do goniometrického tvaru:

$$D = (-(3-\mathrm{i}))^2 - 4\cdot 1\cdot(2-6\mathrm{i}) = 9 - 6\mathrm{i} - 1 - 8 + 24\mathrm{i} = 18\mathrm{i} = 18\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Označíme absolutní hodnotu komplexního čísla jako $|z|$ a převedeme vypočítaný diskriminant do goniometrického tvaru:

$$|z| = 18$$

$$18i = 18\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{-\left(-(3-\mathrm{i})\right) \pm \sqrt{|18|}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{(3-\mathrm{i}) \pm 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{(3-\mathrm{i}) \pm (3+3\mathrm{i})}{2}$$

$$x_1 = \frac{(3 - \mathrm{i}) + (3 + 3\mathrm{i})}{2} = \frac{6 + 2\mathrm{i}}{2} = 3 + \mathrm{i}$$

$$x_2 = \frac{(3 - \mathrm{i}) - (3 + 3\mathrm{i})}{2} = \frac{-4\mathrm{i}}{2} = -2\mathrm{i}$$

Výsledky tedy získáme po dosazení do vzorce.

4. Slovní úlohy řešené rovnicí pro základní školu

Žáci základních škol se podle učebnic i učebních osnov, které jsou vyvěšené na stránkách různých škol, setkávají s kvadratickými rovnicemi zhruba kolem osmé třídy.

V naprosté většině případů jde přitom o řešení kvadratických rovnic a nikoliv slovních úloh. Zde jsou některé jednoduché úlohy, které lze řešit kvadratickou rovnicí. U každé úlohy je uvedeno její vzorové řešení.

4.1. Slovní zadání rovnic

Takto jsou nazvány nejjednodušší slovní úlohy, a to tedy ty, které jsou vlastně jen slovním opisem samotných kvadratických rovnic. Úlohy tohoto typu se v různých učebnicích v hojné míře vyskytují u rovnic lineárních. Úlohy, které by byly řešeny rovnicí kvadratickou, se téměř nevyskytují, proto musely být pro účely této práce některé vymyšleny po vzoru těch existujících pro rovnice lineární.

Př. 1 Nalezněte takové kladné číslo, které vynásobené samo se sebou dává stejný výsledek jako přičtení jeho desetinásobku k číslu 231.

Řešení: U podobných slovních úloh je řešení poměrně jednoduché. Stačí víceméně doslovný popis rovnice na ni převést. Neznámou označíme x. Číslo vynásobené samo se sebou je tedy $x \cdot x = x^2$, desetinásobek čísla x se zapíše jako $10x$.

Celá rovnice pak vypadá takto:

$$x^2 = 10x + 231$$

Tuto kvadratickou rovnici můžeme vyřešit pomocí diskriminantu:

$$x^2 - 10x - 231 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-231)$$

$$D = 100 + 924 = 1024$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{1024}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 32}{2 \cdot 1} = 5 \pm 16$$

$$x_1 = 5 + 16 = 21$$
$$x_2 = 5 - 16 = -11$$

Jako správný výsledek lze ovšem vzhledem k zadání (hledáme kladné číslo) označit pouze $x_1 = 21$.

<u>Odpověď:</u> Hledané číslo je 21.

<u>Př. 2</u> Najděte taková dvě čísla, jejichž součet je 6 a jejichž součin je -72.

<u>Řešení:</u> Úlohu opět stačí jen zapsat do rovnice. Tentokrát to nebude rovnice jedna, ale soustava dvou rovnic. Neznámé označíme x a y. Součet vyjádříme rovnicí $x + y = 6$ a součin znázorňuje rovnice $x \cdot y = -72$. Máme tedy soustavu dvou rovnic:

$$x + y = 6$$
$$x \cdot y = -72$$

Vyjádříme si z první rovnice x pomocí y:

$$x + y = 6$$
$$x = 6 - y$$

a dosadíme do rovnice druhé:

$$(6 - y) \cdot y = -72$$
$$6y - y^2 + 72 = 0$$
$$y^2 - 6y - 72 = 0$$
$$(y - 12) \cdot (y + 6) = 0$$
$$y_1 = 12$$
$$y_2 = -6$$

Nyní můžeme dosadit do první rovnice za y a získáme x_1 a x_2:

$$x_1 + 12 = 6$$
$$x_1 = -6$$
$$x_2 - 6 = 6$$
$$x_2 = 12$$

<u>Odpověď:</u> Hledaná čísla jsou -6 a 12.

4.2. Geometrické slovní úlohy

Tento typ slovních úloh řešených kvadratickou rovnicí je pravděpodobně ten nejčastější, se kterým se žáci na základních školách mohou setkat. Využívají při řešení těchto úloh většinou znalosti Pythagorovy věty.

Př. 1 Obsah obdélníku je 96 cm^2 a délky jeho stran jsou v poměru 2 : 3. Vypočtěte jeho obvod. [18, s. 61]

Řešení: Obsah lze spočítat vynásobením obou stran, tedy $S = a \cdot b$.

Místo délek stran známe pouze jejich poměr a obsah je pro nás známý. Označíme si x koeficient, kterým je potřeba poměr násobit, a následně dosadíme do tohoto vzorce:

$$S = 96$$

$$a = 2x$$

$$b = 3x$$

Získáme rovnici:

$$\begin{aligned} 96 &= 2x \cdot 3x \\ 96 &= 6x^2 \\ 6x^2 &= 96 \\ x^2 &= 16 \\ x_{1,2} &= \pm 4 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že délka strany musí být kladná, zajímá nás pouze výsledek $x = 4$. Obvod získáme jako součet délek obou stran vynásobený dvěma, tedy: $o = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 4) \cdot 2$

Odpověď: Obvod obdélníku je 40 cm.

Př. 2 Zjistěte délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku, ve kterém je délka přepony $c = 10$ cm a jedna z odvěsen je o 2 cm kratší než druhá.

Řešení: Za neznámou si zvolíme délku odvěsny a. Nejprve dosadíme zadané informace do vzorce vycházejícího z Pythagorovy věty:

$$a^2 + (a - 2)^2 = 10^2$$

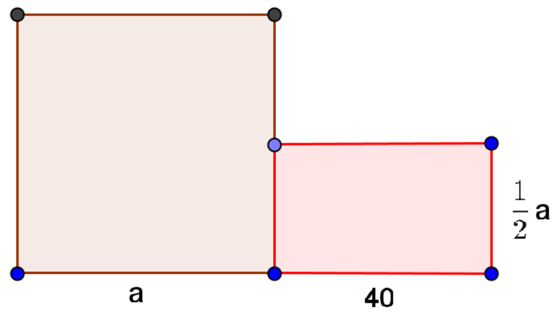
Nyní stačí tuto kvadratickou rovnici vyřešit. Stejně jako v předchozím příkladu nás budou zajímat pouze výsledky, které jsou kladné, neboť jde o délku strany:

$$a^2 + (a-2)^2 = 10^2$$
$$a^2 + a^2 - 4a + 4 = 100$$
$$2a^2 - 4a - 96 = 0$$
$$a^2 - 2a - 48 = 0$$
$$(a-8) \cdot (a+6) = 0$$
$$a_1 = 8$$
$$a_2 = -6$$

Jak jsme již uvedli na začátku řešení, zajímají nás jen kladné výsledky, a proto je výsledkem pouze $a_1 = 8$.

Odpověď: Délky odvěsen jsou 8 cm a 6 cm.

Př. 3 Pan Vohráblo si koupil čtvercový pozemek s délkou jedné strany a. Chtěl si na něm postavit dům a rád by také měl velkou zahradu s bazénem. Pozemek se mu ale zdál malý a tak přikoupil ještě sousedící pozemek ve tvaru obdélníku, jehož jedna strana byla dlouhá $\frac{1}{2}a$ a druhá 40 m. Celková výměra jeho pozemku potom byla 3 500 m^2. Zjistěte, kolik měří nejdelší strana pozemku. (Nákres pozemků je znázorněn na obrázku.)



Řešení: V úloze známe celkovou plochu obrazce, která se skládá ze čtverce a obdélníku. Délku strany čtverce máme označenou a, délku neznámé strany obdélníku $\frac{1}{2}a$. Obsah čtverce je $S_1 = a^2$ a obsah obdélníku je $S_2 = \frac{1}{2}a \cdot 40$. Celková plocha tedy je

$$S = S_1 + S_2 = a^2 + \frac{1}{2}a \cdot 40 = 3\,500.$$

Máme tedy kvadratickou rovnici $a^2 + \frac{1}{2}a \cdot 40 - 3\,500 = 0$ a tu můžeme řešit pomocí Viètových vzorců:

$$a^2 + \frac{1}{2}a \cdot 40 - 3\,500 = 0$$
$$(a - 50)(a + 70) = 0$$
$$a_1 = 50$$
$$a_2 = -70$$

Délka strany musí být určitě nezáporná. Uvažujeme tedy pouze $a_1 = 50$. Nyní potřebujeme ještě zjistit, kolik měří nejdelší strana pozemku. Podle nákresu je její délka $a + 40 = 50 + 40 = 90$.

<u>Odpověď:</u> Nejdelší strana pozemku měří 90 m.

5. Slovní úlohy pro střední školy

Dříve se většina z toho, co je potřeba k řešení slovních úloh řešených kvadratickou rovnicí, vyučovala na základních školách. Dnes to již ale neplatí a naopak se na řadě základních škol kvadratické rovnice neprobírají vůbec, nebo jen okrajově. Proto tato kapitola nabízí úlohy především pro školy střední a tam by také měla nalézt své uplatnění.

Obecně se dá říci, že matematika na střední škole nachází uplatnění především ve fyzice. V ostatních předmětech se s mnoha matematickými úkoly studenti středních škol nesetkávají, a když, tak jde většinou maximálně o násobení či dělení (výjimkou je např. chemie, kde se při určování pH používá logaritmus).

5.1. Matematické slovní úlohy

Název této kapitoly je vytvořen pro úlohy vedoucí na kvadratické rovnice, se kterými se v matematice studenti mohou setkávat a které nespadají do žádné z dalších kategorií slovních úloh. Většinou jde o úlohy jednodušší, ale u některých je potřeba mít hlubší znalosti problému a nelze jen rychle vytvořit rovnici a dosadit do diskriminantu.

Př. 1 Najdi dvojciferné číslo, pro které zároveň platí: Číslice na místě jednotek je o 1 větší než číslice na místě desítek a součin čísla a jeho ciferného součtu je 405. [25, s. 2]

Řešení: Jestliže víme, že se jedná o dvojciferné číslo, označíme si první cifru a a druhou b. Číslo složené z těchto dvou cifer můžeme tedy zapsat jako $\overline{ab}$ a můžeme vyjádřit jeho hodnotu jako $10a + b$. Víme, že b musí být o jedna větší než a, tedy $b = a + 1$. Z těchto dvou faktů vyplývá, že hodnotu hledaného čísla je možné zapsat jako $10a + a + 1 = 11a + 1$.

Součin čísla a jeho ciferného součtu můžeme zapsat jako

$$(11a + 1) \cdot (a + a + 1) = 22a^2 + 13a + 1 = 405.$$

Máme tedy kvadratickou rovnici, kterou můžeme vyřešit pomocí diskriminantu:

$$22a^2 + 13a + 1 = 405$$
$$22a^2 + 13a - 404 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 22 \cdot (-404)}}{44}$$

$$a_{1,2} = \frac{-13 \pm 189}{44}$$
$$a_1 = \frac{-13 + 189}{44} = \frac{176}{44} = 4$$
$$a_2 = \frac{-13 - 189}{44} = -\frac{202}{44} = -\frac{101}{22}$$

Druhý výsledek můžeme vyloučit, neboť hledáme číslici (tedy číslo od 0 do 9). Dopočítáme tedy výsledek jen pro výsledek první:

$$a = 4$$
$$b = a + 1 = 5$$

Odpověď: Hledané číslo je 45.

Př. 2 Malý Pavel skládal kostky stavebnice (kostka má tvar krychle). Chtěl postavit velikou krychli. Zbylo mu však 75 kostek, proto hranu zvětšil o jednu kostku. Potom mu ale 16 kostek chybělo. Kolik kostek měl ve stavebnici? [16, s. 19]

Řešení: Za neznámou x si zvolíme původní počet kostek v jedné hraně. Celá krychle bude mít objem x^3. Krychle s hranou o kostku větší bude mít objem $(x+1)^3$. Tyto dva výrazy můžeme dát do rovnosti s tím, že poprvé zbylo 75 kostek a při druhém pokusu jich 16 chybělo. Tedy:

$$x^3 + 75 = (x+1)^3 - 16$$

Z této rovnice následně vypočítáme x:

$$x^3 + 75 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 16$$
$$0 = 3x^2 + 3x - 90$$
$$x^2 + x - 30 = 0$$
$$(x-5)(x+6) = 0$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -6$$

Zajímá nás počet kostek v jedné hraně, proto výsledek musí být z oboru přirozených čísel. Bereme tedy v úvahu pouze $x_1 = 5$. Pro tuto hodnotu dopočteme počet kostek z levé strany rovnice:

$$5^3 + 75 = 200$$

Odpověď: Ve stavebnici bylo 200 kostek.

Př. 3 Cena časopisu byla snížena o tolik procent, kolik korun stál před snížením ceny. Určete jeho původní cenu, jestliže po zlevnění stál 16 Kč. [25, s. 2]

Řešení: Původní cenu časopisu si označíme x. Potom tedy víme, že x je zároveň počet procent, o který byla cena snížena. Cena po zlevnění je 16 Kč, což je zároveň $(100 - x)$ %. Můžeme napsat rovnici, v níž nalevo bude x jako původní cena časopisu a napravo původní cena časopisu vyjádřená pomocí procent z ceny po zlevnění:

$$x = \frac{16}{100 - x} \cdot 100$$

$$100x - x^2 = 1\,600$$

$$x^2 - 100x + 1\,600 = 0$$

$$(x - 80)(x - 20) = 0$$

$$x_1 = 20$$

$$x_2 = 80$$

Odpověď: Obě řešení jsou možná, časopis tedy původně stál 80 Kč, nebo 20 Kč.

Př. 4 Opičí básnička:

Na dvě části rozdělené, hráli si opice:
Druhá mocnina jejich osminy
vesele v lese skřehoce.
Dvanáct jich zase na poli
vyvádí kousky nezbedné.
Povězte, kolik opic bylo
v tom stádě na nezbedné. [29]

Řešení: Opice byly rozdělené na dvě části. Všech dohromady bylo x. První část můžeme vyjádřit zlomkem $\left(\frac{x}{8}\right)^2$ a o druhé víme, že v ní bylo 12 opic. Rovnou lze tedy napsat rovnici a zjistit výsledek:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

$$x^2 - 64x + 12 \cdot 64 = 0$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{64 \pm \sqrt{64^2 - 4 \cdot 768}}{2} = \frac{64 \pm \sqrt{1\,024}}{2} = \frac{64 \pm 32}{2}$$

$$x_1 = \frac{64 + 32}{2} = 48$$

$$x_2 = \frac{64 - 32}{2} = 16$$

<u>Odpověď:</u> Opic bylo ve stádě celkem buď 16, nebo 48.

5.2. Historické úlohy

Kvadratická rovnice a způsoby jejího řešení byly známé již starověkým Babyloňanům (kolem let 1700 př. n. l.). Řešili je však často trochu jinými metodami než my dnes. Často používali při řešení kvadratické rovnice převedení na příklad: *Součin čísel x a y je n a jejich součet je m.* Dále upravovali tyto vztahy, až jim vyšel výsledek, který se velmi podobá dnešnímu zápisu vzorce s použitím diskriminantu.

Kvadratické rovnice neřešili ale jen Babyloňané. Jejich řešením se zabývali i starověcí Řekové, Indové nebo Egypťané. Proto si ukážeme několik úloh z historie kolébek matematiky.

<u>Př. 1</u> (Íránský matematik Beg-Eddin, 15. stol.)

Někomu byla přiznána odměna, která tvořila větší díl ze dvou dílů, jejich součet je 20 a součin 96. [26]

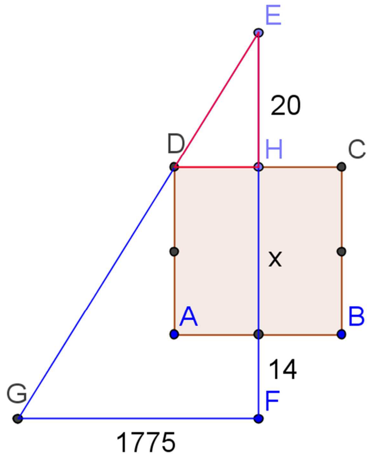
<u>Řešení:</u> Úloha není složitá a prakticky odpovídá řešení jedné z úloh pro ZŠ. Označíme si jeden díl x a druhý y. Vztahy mezi nimi tedy vyjádříme rovnicemi a ty následně vyřešíme:

$$x + y = 20$$
$$xy = 96$$
$$x(20 - x) = 96$$
$$x^2 - 20x + 96 = 0$$
$$(x - 8)(x - 12) = 0$$
$$x_1 = 12 = y_2$$
$$x_2 = 8 = y_1$$

<u>Odpověď:</u> Přiznaná odměna je 12.

<u>Př. 2</u> (úloha z Číny, vznik pravděpodobně v prvních stoletích našeho letopočtu)

Uprostřed každé strany čtvercového půdorysu je brána. Ve vzdálenosti 20 pu od severní brány stojí sloup. Jestliže se vzdálíme od jižní brány o 14 pu na jih a zabočíme 1 775 pu na západ, dostaneme se na místo, z něhož sloup začíná být vidět. Jaká je délka strany čtverce? [23, s. 8]



Řešení: Z obrázku (není zachován poměr stran, neboť strana *GF* je oproti zbytku obrázku velmi dlouhá a nebyla by dobře vidět podobnost trojúhelníků, kterou má obrázek ukazovat) můžeme vidět, že trojúhelníky *EFG* a *EHD* jsou podobné. Platí tedy, že příslušné délky stran těchto trojúhelníků mají stejný poměr. Označíme si délku strany čtverce x a pak bude platit:

$$\frac{20 + x + 14}{1\,775} = \frac{20}{\frac{x}{2}}$$

Tento poměr nám dává kvadratickou rovnici, kterou následně vyřešíme:

$$(34 + x) \cdot \frac{x}{2} = 1\,775 \cdot 20$$

$$x^2 + 34x - 71\,000 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot (-71\,000)}}{2} = \frac{-34 \pm \sqrt{285\,156}}{2} = \frac{-34 \pm 534}{2}$$

$$x_1 = \frac{-34 + 534}{2} = \frac{500}{2} = 250$$

$$x_2 = \frac{-34 - 534}{2} = \frac{-568}{2} = -284$$

Z těchto dvou výsledků nás zajímá pouze ten kladný (délka strany čtverce nemůže vycházet záporná).

Odpověď: Délka strany čtverce je 250 pu.

Př. 3 (úloha z Indie, kolem 9. stol. n. l.)

Určete počet pávů, víte-li, že dvojmoc $\frac{1}{16}$ hejna se nachází na mangovníkovém stromě, dvojmoc $\frac{1}{9}$ zbytku sedí ještě se 14 pávy na tamalovém stromě. [23, s. 10]

Řešení: Přímo ze zadání sestavíme rovnici:

$$\left(\frac{x}{16}\right)^2 + \left(\frac{15x}{9 \cdot 16}\right)^2 + 14 = x$$

Tu následně vyřešíme:

$$\left(\frac{x}{16}\right)^2 + \left(\frac{15x}{9 \cdot 16}\right)^2 + 14 = x$$
$$81x^2 + 225x^2 + 14 \cdot (9 \cdot 16)^2 - (9 \cdot 16)^2 \cdot x = 0$$
$$306x^2 - 20\,736x + 290\,304 = 0$$
$$17x^2 - 1\,152x + 16\,128 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1\,152 \pm \sqrt{(-1\,152)^2 - 4 \cdot 16\,128 \cdot 17}}{2 \cdot 17} = \frac{1\,152 \pm \sqrt{230\,400}}{2 \cdot 17} = \frac{1\,152 \pm 480}{2 \cdot 17}$$
$$x_1 = \frac{1\,152 + 480}{2 \cdot 17} = \frac{1\,632}{34} = 48$$
$$x_2 = \frac{1\,152 - 480}{2 \cdot 17} = \frac{672}{34} = \frac{336}{17}$$

Hledáme-li počet pávů, musí to být přirozené číslo.

Odpověď: Počet pávů v hejně je 48.

5.3. Slovní úlohy o společné práci

Typickou kategorií úloh, které středoškolští studenti dobře znají a která se často řeší právě kvadratickou rovnicí, je kategorie úloh o společné práci. Ukážeme si několik příkladů z této kategorie i přesto, že tyto úlohy jsou pro studenty dobře známé.

Úlohy o společné práci se obvykle řeší tak, že si vyjádříme, jaká část se udělá za jednotku času (obvykle za hodinu), a potom již celkem snadno dopočítáme, kolik hodin bude trvat, pokud bude pracovat více strojů/lidí/rour… společně.

Př. 1 Naplnění bazénu vodou první rourou trvá o dvě hodiny déle než druhou rourou a o 3 hodiny 36 minut déle, než kdyby bazén natékal oběma rourami najednou. Kolik hodin trvá naplnění bazénu jen první rourou? Za jak dlouho by se bazén naplil jen druhou rourou? [16, s. 19]

Řešení: Počet hodin, za který stihne druhá roura naplnit bazén, si označíme x. Za jednu hodinu naplní $\frac{1}{x}$ bazénu. Načež je tedy počet hodin, za které bazén naplní první roura, $x+2$, a ta tedy naplní $\frac{1}{x+2}$ bazénu za hodinu. Obě roury za jednu hodinu podle stejného principu naplní $\frac{1}{x+2-3,6}$ bazénu (minuty jsme si převedli na hodiny a vyjádřili je desetinným číslem 3,6).

Máme tedy rovnici, kterou vyřešíme:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+2-3,6}$$
$$(x+2)\cdot(x-1,6)+x(x-1,6)-x(x+2)=0$$
$$x^2-3,2x-3,2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{3,2\pm\sqrt{(-3,2)^2-4\cdot(-3,2)}}{2}=\frac{3,2\pm\sqrt{23,04}}{2}=\frac{3,2\pm 4,8}{2}$$
$$x_1=\frac{3,2+4,8}{2}=4$$
$$x_2=\frac{3,2-4,8}{2}=-0,8$$

Vzhledem k tomu, že x představuje čas, nutně musí být nezáporné. Proto vezmeme v úvahu pouze $x_1=4$.

Odpověď: První rourou by se bazén naplnil za 6 hodin. Druhou rourou by se naplnil za 4 hodiny.

Př. 2 Zuzka a Ondra píšou za trest dohromady 840 krát větu „Naučím se rámečky.“ Oba musí napsat stejný počet vět, Zuzka píše o trochu rychleji, protože napíše o dvě věty za minutu více. Kolikrát dokáže Ondra napsat za minutu zmiňovanou větu, pokud oba dohromady stráví nad trestem 65 minut? [25, s. 3]

Řešení: Stejně jako v předchozí úloze si určíme, kolik je jeden z nich schopen napsat vět za jednu minutu. Počet vět, které za minutu napíše Ondra, označíme o a víme, že Zuzka napíše o dvě věty za minutu více, tedy $o+2$. Čas, za který to stihne Ondra, označíme t_o, čas Zuzky t_z.

Můžeme sestavit soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$420=ot_o$$
$$420=(o+2)t_z$$
$$65=t_o+t_z$$

Nejprve ze třetí rovnice vyjádříme t_z a dosadíme do druhé:

$$t_z = 65 - t_o$$

$$420 = (o + 2)(65 - t_o) \tag{1}$$

Nyní ještě vyjádříme z první rovnice t_o a následně dosadíme do (1).

$$t_o = \frac{420}{o}$$

$$420 = (o + 2)\left(65 - \frac{420}{o}\right)$$

$$420o = (o + 2)(65o - 420)$$

$$65o^2 - 710o - 840 = 0$$

$$13o^2 - 142o - 168 = 0$$

$$o_{1,2} = \frac{142 \pm \sqrt{(-142)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-168)}}{2 \cdot 13} = \frac{142 \pm \sqrt{28\,900}}{26} = \frac{142 \pm 170}{26}$$

$$o_1 = \frac{142 + 170}{26} = \frac{312}{26} = 12$$

$$o_2 = \frac{142 - 170}{26} = -\frac{28}{26} = -\frac{14}{13}$$

Jelikož zjišťujeme, kolik vět Ondra napíše za minutu, bereme v úvahu pouze kladný výsledek.

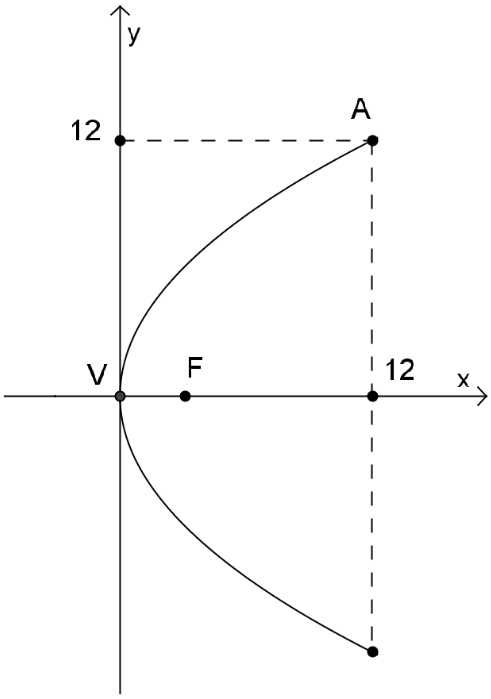
Odpověď: Ondra napíše 12 vět za minutu.

5.4. Slovní úlohy z oblasti analytické geometrie a funkcí

Jedná se o dvě oblasti matematiky, kde je možné se na střední škole setkat s řešením slovních úloh pomocí kvadratických rovnic. Jsou to sice oblasti dvě, ale je jim v této práci věnována společná kapitola, neboť u obou oblastí vycházejí úlohy z rovnice paraboly (buď zapsané předpisem funkce, nebo rovnicí paraboly). Úlohy z analytické geometrie se obecně většinou řeší nalezením analytické rovnice a hledáním jejích průsečíků s jiným geometrickým útvarem (typicky přímkou).

Př. 1 Průměr parabolického automobilového reflektoru je 24 cm, hloubka reflektoru je 12 cm. Zvolte vhodně kartézskou soustavu souřadnic, určete rovnici parabolického řezu a vypočtěte polohu vlákna žárovky, je-li reflektor zapnut na dálková světla (tzn. paprsky jsou rovnoběžné) [4, s. 441]

Řešení: Soustava souřadnic, kterou volíme, je naznačena na obrázku:



Rovnice paraboly bude tedy ve tvaru:

$$y^2 = 2px$$

Jelikož určitě prochází bodem $A[12,\ 12]$, tak můžeme souřadnice tohoto bodu dosadit do dané rovnice paraboly a vypočítat p:

$$12^2 = 24p$$
$$p = 6$$

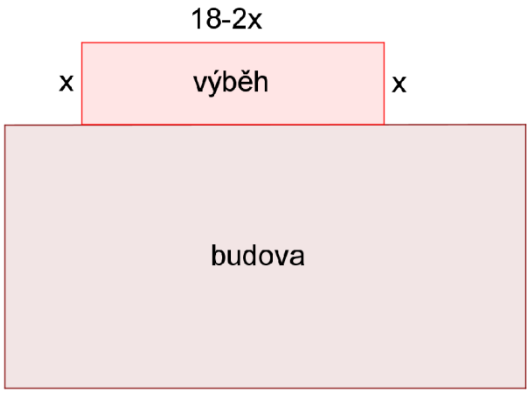
Rovnice této konkrétní paraboly bude proto ve tvaru:

$$y^2 = 2px, \text{ pro } x \in \langle 0,\ 12 \rangle$$

Jestliže mají paprsky vycházet z reflektoru rovnoběžně, musí být žárovka umístěna přesně v ohnisku dané paraboly. Stačí tedy nalézt souřadnice ohniska F. Jeho souřadnice jsou $F\left[\frac{1}{2}p,\ 0\right]$, a tedy $F[3,\ 0]$.

Odpověď: Vzdálenost vlákna žárovky od vrcholu reflektoru je 3 cm.

Př. 2 Zemědělec chce vybudovat pro kuřata výběh pravoúhelníkového tvaru, přitom jedna strana bude částí stěny hospodářské budovy (jak je vidět na obrázku). K dispozici má 18 metrů pletiva. Máme určit rozměry výběhu, pro které by jeho obsah byl co největší. [14, s. 56]



Řešení: Obsah výběhu vyjádříme vzorcem:

$$S = x \cdot (18 - 2x)$$

Když se podíváme na pravou stranu rovnice, vidíme, že se jedná vlastně o kvadratickou funkci. Pokud hledáme maximální obsah, hledáme vlastně vrchol paraboly, která je grafem této kvadratické funkce. Nejprve proto pravou stranu roznásobíme a potom upravíme na čtverec:

$$S = 18x - 2x^2$$
$$S = -2(x^2 - 9)$$
$$S = -2(x - 4{,}5)^2 + 2 \cdot 4{,}5^2$$
$$S = -2(x - 4{,}5)^2 + 40{,}5$$

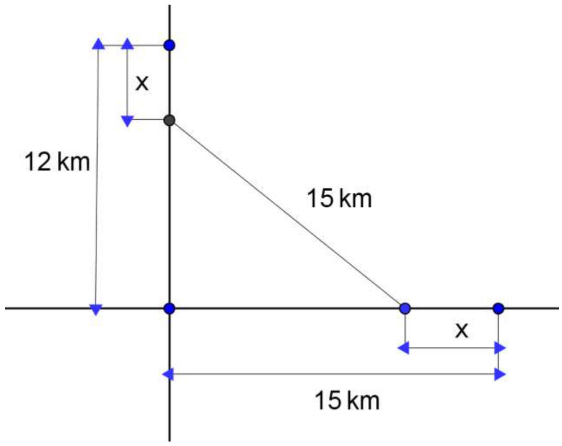
Protože výraz $-2(x - 4{,}5)^2$je pro každé $x \neq 4{,}5$ záporný, snadno vidíme, že maximum této funkce je v $x = 4{,}5$.

Odpověď: Zemědělec musí postavit výběh obdélníkového tvaru o stranách 4,5 m a 9 m.

5.5. Slovní úlohy o pohybu

Slovní úlohy o pohybu se na středních školách vyučují jak v předmětu matematika, tak v předmětu fyzika. V tom prvním se ovšem více hledají příklady na řešení složitějších matematických problémů (například právě kvadratické rovnice), zatímco ve fyzice jde většinou spíše o podstatu daného problému (např. uvědomění si vztahu mezi rychlostí, časem a dráhou).

Př. 1 Dva chodci se pohybují po přímých navzájem kolmých drahách stálou rychlostí $6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ směrem ke křižovatce těchto drah. V určitém okamžiku je jeden chodec 15 km a druhý 12 km před křižovatkou. Určete, za jakou dobu od tohoto okamžiku bude vzdálenost onou chodců právě 15 km. [4, s. 25]



Řešení: Rychlost chodců nepotřebujeme na začátku vůbec uvažovat, neboť jak vyplývá z obrázku, stačí nám informace o tom, že je u obou chodců stejná (jinak řečeno ujdou stejnou vzdálenost za stejný čas). Proto můžeme rovnou využít Pythagorovu větu, kde známe délku přepony (15 km) a délky obou odvěsen vyjádříme pomocí neznámé x. Získáme rovnici:

$$(12 - x)^2 + (15 - x)^2 = 15^2$$

Tuto rovnici vyřešíme pomocí Viètových vzorců:

$$
\begin{aligned}
&(12 - x)^2 + (15 - x)^2 = 15^2 \\
&144 - 24x + x^2 + 225 - 30x + x^2 = 225 \\
&2x^2 - 54x + 144 = 0 \\
&x^2 - 27x + 72 = 0 \\
&(x - 24)(x - 3) = 0 \\
&x_1 = 24 \\
&x_2 = 3
\end{aligned}
$$

Vzdálenost, kterou ujde chodec 1 (stejně tak ovšem i chodec 2), je tedy buď 24 km, nebo 3 km. Nyní zbývá pouze vypočítat, za jak dlouho oba chodci ujdou danou vzdálenost. V prvním případu je to $t = \frac{24}{6} = 4$ a v druhém případu je to $t = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Odpověď: Chodci musí jít buď 0,5 h, nebo 4 h.

Př. 2 Z města A vyjela současně dvě auta (nákladní a osobní) do města B vzdáleného 76 km. Určete průměrné rychlosti obou aut, víte-li, že osobní auto přijelo do města B o 40 minut dříve než nákladní auto a rozdíl jejich rychlostí byl $19\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. [4, s. 25]

Řešení: Za neznámou zvolíme průměrnou hodnotu rychlosti osobního auta vyjádřenou v km·h^{-1} a označíme ji x. Průměrná rychlost nákladního auta je tedy $x - 19$.

Vzorec závislosti dráhy na čase a rychlosti je $s = v \cdot t$, proto doba, za kterou osobní auto dorazí do města B, je $\frac{76}{x}$. Podle toho tedy auto nákladní dorazí dohromady za $\frac{76}{x} + \frac{2}{3}$ (40 minut odpovídá $\frac{2}{3}$ h) a zároveň za $\frac{76}{x-19}$. Tyto hodnoty můžeme zapsat do rovnice s neznámou x:

$$\frac{76}{x-19} = \frac{76}{x} + \frac{2}{3}$$

$$76x \cdot 3 = 76 \cdot (x-19) \cdot 3 + 2x \cdot (x-19)$$

$$2x^2 - 38x - 4\,332 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{38 \pm \sqrt{38^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4\,332)}}{4} = \frac{38 \pm \sqrt{36\,100}}{4} = \frac{38 \pm 190}{4}$$

$$x_1 = \frac{38 + 190}{4} = 57$$

$$x_2 = \frac{38 - 190}{4} = -38$$

Smysl má i v tomto příkladu jen kladný výsledek.

Odpověď: Průměrná rychlost osobního auta je 57 km·h^{-1} a průměrná rychlost nákladního auta je $38\ \mathrm{km\ h^{-1}}$.

Př. 3 Těleso se pohybovalo počáteční rychlostí $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a zrychlovalo se zrychlením $a = 0{,}15\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Za jak dlouho urazilo 130 metrů? [21, 25]

Řešení: Vzorec pro dráhu tělesa při rovnoměrně zrychleném pohybu je $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Můžeme dosadit do vzorce a získáme rovnici $130 = 5t + \frac{1}{2} \cdot 0{,}15t^2$, kterou vyřešíme:

$$130 = 5\mathrm{t} + \frac{1}{2} \cdot 0{,}15\mathrm{t}^2$$

$$0 = 0{,}075\mathrm{t}^2 + 5t - 130$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 0{,}75 \cdot (-130)}}{2 \cdot 0{,}075} = \frac{-5 \pm \sqrt{64}}{0{,}15} = \frac{-5 \pm 8}{0{,}15}$$

$$t_1 = \frac{-5+8}{0,15} = 20$$

$$t_2 = \frac{-5-8}{0,15} = \frac{-260}{3}$$

Jelikož nás zajímá čas, za který těleso urazí 130 m, musí být výsledek určitě kladný. Proto bereme v potaz pouze $t_1 = 20$.

<u>Odpověď:</u> Těleso urazí 130 metrů za 20 sekund.

<u>Př. 4</u> Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí $72\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Za jakou dobu bude ve výšce a) 15 metrů, b) 50 metrů? [21, s. 25]

<u>Řešení:</u> Pro svislý vrh platí, že výška h, do které těleso vyletí, je:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Označme počáteční výšku $h_0 = 0$ m, tíhové zrychlení $g = 10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, aktuální rychlost $v_0 = 72\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1} = 20\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ a výšku, pro kterou chceme zjistit čas, $h = 15\ \mathrm{m}$.

Můžeme tedy dosadit do vztahu pro výšku svislého vrhu:

$$15 = 0 + 20t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3) \cdot (t-1) = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 3$$

Výsledkem budou obě hodnoty. První čas udává, kdy se těleso do daného bodu (při letu vzhůru) dostane poprvé, a druhý, kdy se do stejného místa navrátí (při pádu).

<u>Odpověď:</u> Těleso bude ve výšce 15 metrů za 1 sekundu a za 3 sekundy.

b) V tomto případě se nám změní pouze výška, které by mělo těleso dosáhnout z 15 metrů na 50 metrů:

$$50 = 0 + 20t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2$$

$$t^2 - 4t + 10 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4$$

Diskriminant je záporný, těleso tedy do výšky 50 metrů vůbec nevyletí. Tuto část úlohy by bylo možné řešit i úvahou: Jestliže těleso bude za 1 sekundu ve výšce 15 metrů a za další dvě zpět, tak při znalosti toho, že těleso při pohybu vzhůru zpomaluje, a toho, že stoupá stejně rychle, jako klesá, můžeme rovnou odvodit, že do výšky 50 metrů nemůže vystoupat (i kdyby byla rychlost stoupání stále stejná, tak by za 1 sekundu letu vzhůru těleso dorazilo do výšky 30 metrů).

Odpověď: Těleso do výšky 50 metrů nevyletí.

Př. 5 Do propasti pustíme ocelovou kuličku. Její dopad na dno propasti slyšíme za 10 sekund. Jaká je hloubka propasti, jestliže počítáme s rychlostí zvuku ve vzduchu $v = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$? [24]

Řešení: Vzorec pro pád do hloubky h je $h = \frac{1}{2}gt_1^2$ a zvuk z hloubky h jde po dobu $t_2 = \frac{h}{v}$ času. Poslední informace, kterou známe, je $t_1 + t_2 = 10$.

Máme tedy tři rovnice o třech neznámých:

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$t_2 = \frac{h}{v}$$

$$t_1 + t_2 = 10$$

Nejprve si ze třetí rovnice vyjádříme t_2:

$$t_2 = 10 - t_1$$

Dosadíme do rovnice druhé a vyjádříme z ní t_1 pomocí h:

$$10 - t_1 = \frac{h}{v}$$

$$t_1 = 10 - \frac{h}{v}$$

Nyní dosadíme do první rovnice, čímž získáme kvadratickou rovnici s neznámou h, kterou vyřešíme (dosadíme $g \cong 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $v = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$):

$$h = \frac{1}{2} \cdot 10 \left(10 - \frac{h}{340}\right)^2$$

$$h = \frac{5h^2}{340^2} - \frac{100h}{340} + 500$$

$$23\,120h = h^2 - 6\,800h + 11\,560\,000$$

$$h^2 - 29\,920h + 11\,560\,000 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{29\,920 \pm \sqrt{(29\,920)^2 - 4 \cdot 11\,560\,000}}{2 \cdot 1} = \frac{29\,920 \pm \sqrt{848\,966\,400}}{2}$$

$$h_{1,2} = 680 \cdot \left(20 \pm 3\sqrt{51}\right)$$

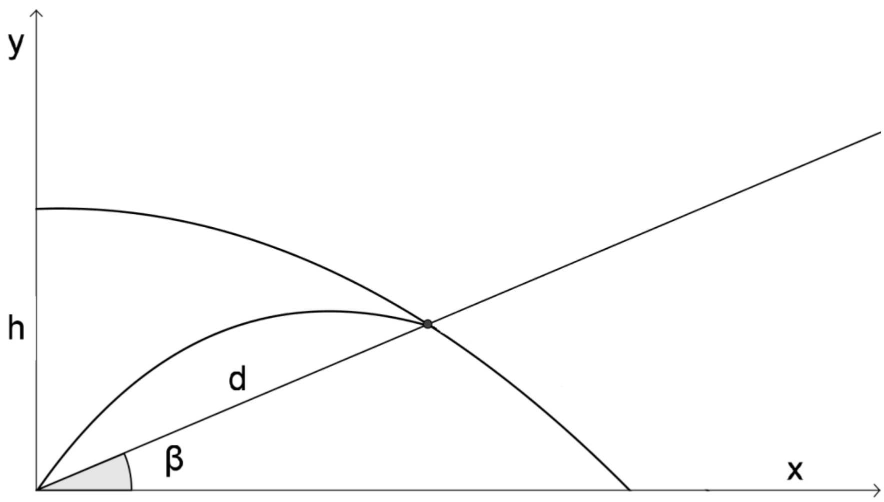
$$h_1 = 680 \cdot \left(20 + 3\sqrt{51}\right) \cong 391{,}49$$

$$h_2 = 680 \cdot \left(20 - 3\sqrt{51}\right) \cong 29\,529$$

Na první pohled to vypadá, že oba výsledky jsou možné. Pokud si ale uvědomíme, že rychlost zvuku $v = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, tak dojdeme k závěru, že druhý výsledek nedává smysl (jen zvuk by letěl odhadem necelých 100 s). Tento výsledek přibude, jelikož matematicky vychází pro t_1 dva výsledky ($t_1 = \pm 4$). Čas ale nemůže být záporný.

Odpověď: Hloubka propasti je 391,49 m.

Př. 6 Proti rovnému svahu se sklonem β hodíme z jeho úpatí kámen rychlostí o velikosti v_0. Určete největší vzdálenost d, do které může doletět. Počáteční vzdálenost kamene od roviny svahu a odpor vzduchu zanedbejte. [20, s. 22]



Řešení: Pro řešení úlohy, kde známe pouze rychlost a nikoliv elevační úhel (tj. úhel, který svírá počáteční rychlost s vodorovnou rovinou), je potřeba znát tzv. ochranou parabolu. Ochranná parabola je množina všech bodů, které mohou být zasaženy vrhem při dané rychlosti, a má rovnici $x^2 = 4h(h - y)$.

Dále vyjdeme z obrázku a vyjádříme jednotlivé vztahy, které v příkladu platí. První rovnice je právě rovnicí ochranné paraboly, druhá a třetí jsou dány z definice funkcí sinus a kosinus v pravoúhlém trojúhelníku:

$$x^2 = 4h(h-y)$$
$$x = d\cos\beta$$
$$y = d\sin\beta$$

dostáváme kvadratickou rovnici

$$(d\cos\beta)^2 = 4h(h - d\sin\beta)$$
$$(\cos\beta)^2 d^2 + 4hd\sin\beta - 4h^2 = 0.$$

Řešením úlohy je kladný kořen

$$d = \frac{-4\mathrm{h}\sin\beta + \sqrt{(-4\mathrm{h}\sin\beta)^2 - 4\cdot(\cos\beta)^2\cdot(-4h^2)}}{2\cdot(\cos\beta)^2} =$$
$$= \frac{-4\mathrm{h}\sin\beta + \sqrt{16h^2(\sin\beta)^2 + 16h^2\cdot(\cos\beta)^2}}{2\cdot(\cos\beta)^2} = \frac{2\mathrm{h}(1-\sin\beta)}{1-\sin^2\beta}$$
$$d = \frac{2\mathrm{h}(1-\sin\beta)}{1-\sin^2\beta}.$$

Odpověď: Kámen tedy může doletět do vzdálenosti $\frac{2\mathrm{h}(1-\sin\beta)}{1-\sin^2\beta}$. [20, s. 22]

Př. 7 Proti sobě se pohybují dvě stejné koule, první o rychlosti $5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a druhá o rychlosti $3\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Určete rychlost první koule po čelní srážce za předpokladu, že je srážka dokonale pružná. [22]

Řešení: Při dokonale pružné srážce se zachovává hybnost i energie a tedy můžeme vycházet ze vzorců:

$$mv_1 + mv_2 = mu_1 + mu_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2$$

v_1 (resp. v_2) označuje původní rychlost první (resp. druhé) koule a u_1 (resp. u_2) označuje rychlost první (resp. druhé) koule po srážce. Ze vzorců vyplývá (po vydělení hmotností *m*, resp. $\frac{1}{2}m$):

$$v_1 + v_2 = u_1 + u_2$$
$$v_1^2 + v_2^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Po dosazení (dosazujeme nikoliv jen velikost rychlosti, ale i směr, proto 5 a −3) dostaneme:

$$5 - 3 = 2 = u_1 + u_2$$

$$34 = u_1^2 + u_2^2$$

Dosadíme z první rovnice do druhé:

$$34 = u_1^2 + (2 - u_1)^2$$
$$2u_1^2 - 4u_1 - 30 = 0$$
$$(u_1 - 5)(u_1 + 3) = 0$$
$$u_1 = 5$$
$$u_1^* = -3$$
$$u_2 = -3$$
$$u_2^* = 5$$

V úvahu bereme pouze výsledky označené *, neboť nutně musí platit, že obě koule nemohly pokračovat ve svém původním směru (který je opět vyjádřen znaménkem před rychlostí).

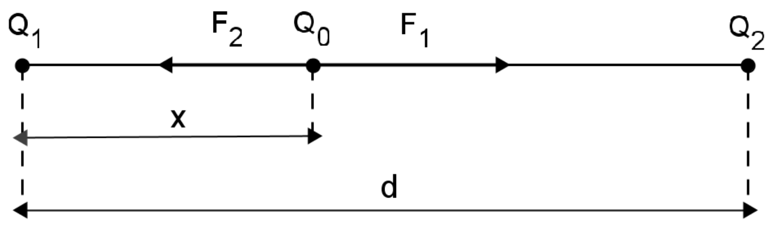
Odpověď: První koule se tedy po srážce pohybuje rychlostí $3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ve směru opačném, než ve kterém do srážky vstupovala.

5.6. Slovní úlohy z oboru elektřina a magnetismus

Jednou ze stěžejních oblastí výuky fyziky na středních školách je elektřina a magnetismus. Zde se dá nalézt několik typů praktických úloh vedoucích na řešení kvadratickou rovnicí a několik z nich si ukážeme.

Př. 1 Dva kladné bodové náboje $Q_1 = Q$ a $Q_2 = 4Q$ jsou pevně umístěny ve dvou bodech vzdálených od sebe $d = 6\ \mathrm{cm}$. Určete, kde je třeba na přímce spojující oba body umístit třetí kladný bodový náboj Q_0, aby na něj nepůsobila žádná síla. [2, s. 15]

Řešení: Výslednice sil působících na náboj Q_0 bude nulová, jestliže síly, kterými náboje Q_1 a Q_2 působí na náboj Q_0, budou stejně velké a budou mít opačný směr. To je možné jen tehdy, jestliže náboj Q_0 bude ležet mezi náboji Q_1 a Q_2.



Označme vzdálenost náboje Q_0 od náboje Q_1 neznámou x. Podle Coulombova zákona náboje Q_1 a Q_2 působí na náboj Q_0 silami o velikostech:

$$F_1 = k\frac{Q_1 Q_0}{x^2} = k\frac{QQ_0}{x^2}$$
$$F_2 = k\frac{Q_2 Q_0}{(d-x)^2} = k\frac{4QQ_0}{(d-x)^2}$$

Poněvadž velikosti sil ***F₁*** a ***F₂*** jsou stejné, platí:

$$k\frac{QQ_0}{x^2} = k\frac{4QQ_0}{(d-x)^2}$$
$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(d-x)^2}$$

Z toho vyplývá:

$$3x^2 + 2dx - d^2 = 0$$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny:

$$x_1 = \frac{-2d + \sqrt{4d^2 + 4 \cdot 3d^2}}{6} = \frac{d}{3}$$
$$x_2 = \frac{-2d - \sqrt{4d^2 + 4 \cdot 3d^2}}{6} = -d$$

Z obou kořenů jen první $x_1 = \frac{d}{3} = \frac{6}{3} = 2$ má fyzikální význam, neboť Q_0 musí ležet mezi náboji Q_1 a Q_2 a vzdálenost x musí být kladná.

Odpověď: Náboj Q_0 je třeba umístit mezi náboje Q_1 a Q_2 do vzdálenosti 2 cm od menšího náboje. [2, s. 15]

Př. 2 Při sériovém zapojení rezistorů s odpory R_1 a R_2 je výsledný odpor spojení 250 Ω. Spojíme-li rezistory o stejném odporu vedle sebe, je výsledný odpor spojení 40 Ω. Určete odpory R_1 a R_2 obou rezistorů. [27]

Řešení:

Zapíšeme oba vztahy do rovnic:

$$R_1 + R_2 = 250$$

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{40}$$

Vyjádříme R_1 pomocí R_2:

$$R_1 = 250 - R_2$$

Dosadíme do druhé rovnice a vyřešíme:

$$\frac{1}{250-R_2}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{40}$$
$$40R_2 + 10\,000 - 40R_2 = R_2(250-R_2)$$
$$R_2^2 - 250R_2 + 10\,000 = 0$$
$$(R_2-50)\cdot(R_2-200)=0$$
$$R_2 = 50$$
$$R_2^* = 200$$
$$R_1 = 200$$
$$R_1^* = 50$$

Odpověď: Rezistory mají tedy odpory 50 Ω a 200 Ω.

Př. 3 V obvodu, ve kterém jsou zapojeny paralelně dva rezistory, prochází při napětí 24 V proud 4 A. Zapojíme-li tyto rezistory sériově, klesne proud na 0,75 A. Určete odpory obou rezistorů. [4, s. 19]

Řešení:

Výsledný odpor R_s sériově zapojených rezistorů o odporech R_1, R_2 je:

$$R_1 + R_2 = R_s$$

Podle Ohmova zákona pro R_s platí $R_\mathrm{s} = \frac{U}{I_1}$, kde $U = 24$ V, $I_1 = 0{,}75$ A, tj. $R_s = \frac{24}{0{,}75}\ \Omega = 32\ \Omega$.

Pro výsledný odpor R_p paralelně zapojených rezistorů o odporech R_1, R_2 platí vztah:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_p}$$

Pro R_p platí $R_\mathrm{p} = \frac{U}{I_2}$, kde $U = 24$ V, $I_2 = 4$ A, tj. $R_p = \frac{24}{4}\ \Omega = 6\ \Omega$.

Ze vztahu mezi sériově zapojenými rezistory plyne $R_2 = R_s - R_1$. Dosazením do vztahu pro paralelní zapojení rezistorů získáme rovnici:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{32 - R_1} = \frac{1}{6}$$

$$6 \cdot 32 - 6R_1 + 6R_1 = -32R_1 - R_1^2$$

$$R_1^2 - 32R_1 + 192 = 0$$

$$R_1 = 24$$

$$R_1^* = 8$$

Je-li $R_1 = 24\ \Omega$, pak $R_2 = 8\ \Omega$ (nebo opačně).

Odpověď: Rezistory mají odpory 24 Ω a 8 Ω.

5.7. Ostatní fyzikální úlohy

V této kapitole jsou zařazeny úlohy, které se řeší pomocí kvadratické rovnice, ale nespadají do žádné z kapitol předcházejících.

Př. 1 V jaké výšce nad povrchem Země působí na těleso desetkrát menší gravitační síla než na povrchu Země? Poloměr Země je $R_z = 6378 \cdot 10^3$ m. [21, s. 24]

Řešení:

Vztah pro velikost gravitační síly, která působí na těleso umístěné na povrchu Země, je

$$F_g = G\frac{mM_z}{R_z^2}.$$

Ve výšce h nad povrchem je to pak vztah

$$F_g(h) = G\frac{mM_z}{(R_z + h)^2}.$$

Můžeme tedy sestavit rovnici a vyřešit ji:

$$\frac{G\frac{mM_z}{R_z^2}}{G\frac{mM_z}{(R_z+h)^2}} = \frac{10}{1}$$

$$\frac{\frac{1}{R_z^2}}{\frac{1}{(R_z+h)^2}} = 10$$

$$\frac{(R_\mathrm{z}+h)^2}{R_\mathrm{z}^2}=10$$

$$(R_\mathrm{z}+h)^2=10R_\mathrm{z}^2$$

$$R_\mathrm{z}^2+2R_zh+h^2-10R_\mathrm{z}^2=0$$

$$h^2+2R_\mathrm{z}h-9R_\mathrm{z}^2=0$$

$$h_{1,2}=\frac{-2R_\mathrm{z}\pm\sqrt{(-2R_\mathrm{z})^2+4\cdot 9R_\mathrm{z}^2}}{2}=\frac{-2R_z\pm\sqrt{40R_\mathrm{z}^2}}{2}=-R_\mathrm{z}\pm\sqrt{10}R_\mathrm{z}^2$$

Dosadíme $R_\mathrm{z}=6\,378\cdot 10^3$, abychom získali výsledná řešení:

$$h_1=-6\,378\cdot 10^3+\sqrt{10}\cdot(6\,378\cdot 10^3)\ \mathrm{m}$$

$$h_1\cong 13\,791\,006\ \ \mathrm{m}\cong 13\,791\ \mathrm{km}$$

$$h_2=-6\,378\cdot 10^3-\sqrt{10}\cdot(6\,378\cdot 10^3)\ \mathrm{m}$$

$$h_2\cong -26\,547\,006\ \ \mathrm{m}\cong -26\,547\ \mathrm{km}$$

Odpověď: Jestliže bude těleso ve výšce $13\,791\ \mathrm{km}$, pak bude Země působit desetkrát menší gravitační silou než na povrchu planety. Druhé řešení $h_2\cong -26\,547\ \mathrm{km}$ nedává fyzikální smysl, neboť ani kdyby těleso bylo umístěné pod povrchem Země, této hloubky není možné dosáhnout.

6. Slovní úlohy pro vysoké školy

V této části práce jsou shromážděny skutečně reálné úlohy, které se objevují napříč obory a při jejichž řešení se využívá kvadratické rovnice. Jde o úlohy z oblasti chemie, ekonomie či fyziky. Také se zde soustředíme na příklady, které se skutečně řeší v praxi nebo běžném životě.

6.1. Reálné úlohy z chemie

V chemii se s řešením pomocí kvadratické rovnice lze setkat při výpočtu pH středně silných kyselin a zásad. Existují sice jednodušší vzorce pro výpočet pH, ale tyto vzorce je možné použít pouze pro výpočet slabých a silných kyselin a zásad.

pH definoval dánský chemik Sörensen jako záporná dekadický logaritmus aktivity oxoniových iontů. Pro praktické účely se aktivita nahrazuje rovnovážnou relativní látkovou koncentrací oxoniových iontů. pH je bezrozměrná veličina Kyselé roztoky mají hodnotu pH menší než 7, zásadité mají hodnotu pH vyšší než 7 a neutrální roztoky mají hodnotu právě 7. Pro pH tedy platí:

$$\mathrm{pH} = -\log([\mathrm{H_3O^+}])$$

kde $[\mathrm{H_3O^+}]$ je rovnovážná relativní látková koncentrace oxoniového kationtu.

Hodnoty v hranatých závorkách označují relativní látkovou koncentraci jednotlivých disociačních forem kyseliny či zásady. Např.: $[\mathrm{H_3O^+}]$ označuje relativní látkovou koncentraci kationtů $[\mathrm{H_3O^+}]$. Naproti tomu c_{HA}, c_{B} označují celkovou analytickou koncentraci kyseliny, resp. zásady. Platí tedy $c_{\mathrm{HA}} = [HA] + [A^-]$, resp. $c_{\mathrm{B}} = [BOH] + [B^+]$, kde HA je obecný vzorec kyseliny a $\mathrm{A^-}$ aniont, který vznikne po disociaci.

<u>Př. 1</u> Odvodíme vztah pro výpočet pH pro jednosytnou středně silnou kyselinu.

<u>Odvození:</u>

Přesný výpočet pH jednosytné středně silné kyseliny o analytické koncentraci c:

Disociace proběhne do rovnováhy dané hodnotou $K_a = \frac{[\mathrm{H_3O^+}]\cdot[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]}$ (rovnice disociační konstanty kyseliny). Platí také podmínka elektroneutrality $[\mathrm{H_3O^+}] = [\mathrm{OH^-}] + [\mathrm{A^-}]$ a jelikož je $[\mathrm{OH^-}]$ oproti $[\mathrm{A^-}]$ velmi malá, můžeme $[\mathrm{OH^-}]$ zanedbat a vztah zjednodušit na tvar:

$$[\mathrm{H_3O^+}] = [\mathrm{A^-}]$$

Nyní můžeme dosadit do rovnice disociační konstanty kyseliny:

$$\begin{aligned}
&c_{\mathrm{HA}} = [HA] + [A^-]\\
&[\mathrm{H_3O^+}] = [\mathrm{A^-}]\\
&c_{\mathrm{HA}} - [\mathrm{H_3O^+}] = [HA]\\
&K_a = \frac{[\mathrm{H_3O^+}]\cdot[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{HA}]} \Rightarrow K_a = \frac{[\mathrm{H_3O^+}]^2}{c_{\mathrm{HA}} - [\mathrm{H_3O^+}]}\\
&[\mathrm{H_3O^+}]^2 + [\mathrm{H_3O^+}]\cdot K_\mathrm{a} - c_{HA}\cdot K_\mathrm{a} = 0
\end{aligned}$$

Jde o kvadratickou rovnici, z jejíchž kořenů má ale fyzikální smysl pouze ten kladný:

$$[\mathrm{H_3O^+}] = \frac{-K_\mathrm{a} + \sqrt{K_\mathrm{a}^2 + 4c_{HA}K_\mathrm{a}}}{2}$$

K získání pH stačí vypočítat záporný logaritmus:

$$\mathrm{pH} = -\log\frac{-K_\mathrm{a} + \sqrt{K_\mathrm{a}^2 + 4c_{HA}K_\mathrm{a}}}{2} \quad [28]$$

Př. 2 Určete pH 0,2 M-CH_3COOH, jestliže platí:

$$\begin{aligned}
&K_a = 1{,}8\cdot 10^{-5}\\
&c = 0{,}2\ \mathrm{mol}\cdot\mathrm{dm^{-3}}
\end{aligned}$$

$CH_3COOH + H_2O \rightarrow CH_3COO^- + H_3O^+$ [28]

Řešení: K přesnému výsledku lze dojít pouze pomocí řešení kvadratickou rovnicí. Zajímá nás jen kladné řešení, neboť jen to má fyzikální význam.

Stejně jako v předchozím příkladu c označuje celkovou analytickou koncentraci kyseliny a $[H_3O^+]$ označuje rovnovážnou koncentraci kationtů. Protože je kyselina slabá, platí:

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{CH_3COOH}] \cong c\\
&[\mathrm{CH_3COO^-}] \cong c - [\mathrm{H_3O^+}]
\end{aligned}$$

Nyní tedy můžeme opět dosadit do rovnice disociační konstanty:

$$K_a = \frac{[\mathrm{CH_3COO^-}] \cdot [H_3O^+]}{[\mathrm{CH_3COOH}]} \cong \frac{[H_3O^+]^2}{c - [H_3O^+]}$$

$$K_\mathrm{a} \cdot c - K_\mathrm{a} \cdot [H_3O^+] = [H_3O^+]^2$$

Po dosazení $K_a = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ a $c = 0{,}2\ \mathrm{mol} \cdot \mathrm{l}^{-1}$ získáme kvadratickou rovnici:

$$[H_3O^+]^2 + 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot [H_3O^+] - 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}2 = 0$$

$$[H_3O^+] = \frac{-1{,}8 \cdot 10^{-5} \pm \sqrt{(1{,}8 \cdot 10^{-5})^2 + 4 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}2}}{2}$$

$$[H_3O^+] = 1{,}8883\ \mathrm{mol} \cdot \mathrm{dm}^{-3}$$

$$\mathrm{pH} = -\log[H_3O^+]$$

$$\mathrm{pH} = -\log(1{,}8883 \cdot 10^{-3}) \cong 2{,}72$$

Odpověď: pH 0,2 M-CH_3COOH je 2,72. [28]

6.2. Reálné úlohy z elektrotechniky

Jak již bylo naznačeno v předchozích kapitolách této práce, asi největší uplatnění nachází matematika jako obor ve fyzice. Elektrotechnika je pro matematiku zajímavá především praktickým využitím komplexních čísel, která se používají pro vyjádření časových vektorů v obvodech se střídavým proudem. Metoda, pomocí které se převádí počítání s harmonickými veličinami (vyjádřených goniometrickými funkcemi) na počítání pomocí komplexních čísel, se nazývá *symbolicko – komplexní*.

Tato metoda výrazně zjednoduší výpočty složitějších elektrických obvodů a lze ji použít pro obvody obsahující pouze lineární prvky nebo pro střídavé veličiny sinusového průběhu.

S komplexními čísly se v elektrotechnice pracuje stejně jako v matematice. Přesto existují drobné odlišnosti. Jednou z nich je to, že imaginární jednotka se v elektrotechnice označuje „j“, zatímco v matematice je zvykem ji označovat „i“ (ve fyzice se „i“ používá pro okamžitou hodnotu proudu). Druhou odlišností je to, že se komplexní čísla většinou vyjadřují v exponenciálním tvaru $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$. Převod mezi goniometrickým a exponenciálním tvarem vypadá následovně:

$$A = a + \mathrm{j}b = |A|(\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha) = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}, \qquad A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nyní si ukážeme příklady, ve kterých se kromě komplexních čísel využívá i výpočet pomocí kvadratické rovnice.

Př. 1 Stanovte odpor a kapacitu (resp. indukčnost) obvodu se střídavým proudem a zdrojem o napětí $u = 10\mathrm{e}^{0{,}111\pi\mathrm{j}}$ V a frekvencí $f = 50$ Hz, pokud víte, že kořeny rovnice $x^2 - 6x +$ $+25 = 0$ označují impedanci obvodu.

Řešení: Nejprve si vypočteme kořeny kvadratické rovnice, abychom získali hodnotu impedance:

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm \mathrm{j}\sqrt{64}}{2} = 3 \pm 4\mathrm{j}$$

$$x_1 = 3 + 4\mathrm{j}$$

$$x_2 = 3 - 4\mathrm{j}$$

Podle hodnot impedance můžeme určit, zda jde o obvod s odporem a cívkou, nebo odporem a kondenzátorem. V obvodu s cívkou je napětí fázově předsunuté vůči proudu. Jestliže se jedná o obvod s cívkou, má komplexní složka impedance kladné znaménko (jde o reaktanci induktivní). Jestliže je v obvodu kondenzátor, napětí je oproti proudu zpožděné. V impedanci je potom komplexní složka se záporným znaménkem (reaktance kapacitní). Reálná část impedance označuje velikost odporu v obvodu. Rozdělíme tedy řešení na dva případy:

a) V obvodu je cívka (reaktance je induktivní)

V tomto případě je $Z = 3 + 4\mathrm{j}$. Vypočteme proud v obvodu, nejprve ovšem převedeme impedanci do exponenciálního tvaru:

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \alpha \cong 51{,}3° = 0{,}285\pi$$

$$Z = 5\mathrm{e}^{0{,}285\pi\mathrm{j}}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{10\mathrm{e}^{0{,}111\pi\mathrm{j}}}{5\mathrm{e}^{0{,}285\pi\mathrm{j}}} = 2e^{-0{,}174\pi\mathrm{j}}$$

Proud v obvodu je tedy $I = 2e^{-0{,}174\pi\mathrm{j}}$A. Nyní spočteme indukčnost. Použijeme vzorec:

$$X_\mathrm{L} = L\omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f}$$

$$L = \frac{4}{2\pi \cdot 50} = 0{,}0127$$

Odpověď: Indukčnost cívky je 12,7 mH a odpor v obvodu 5 Ω (získáme jako abs. hodnotu impedance).

b) V obvodu je kondenzátor (reaktance je kapacitní)

Výpočet probíhá prakticky analogicky. Některé hodnoty vycházejí stejně, proto je využijeme z předchozího výpočtu. Impedance je $Z = 3 - 4\mathrm{j}$ a tedy:

$$|Z| = 5$$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{5}{4} \Rightarrow \alpha \cong -161{,}3° = -0{,}896\pi$$

$$Z = 5\mathrm{e}^{-0{,}896\pi\mathrm{j}}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{10\mathrm{e}^{0{,}111\pi\mathrm{j}}}{5\mathrm{e}^{-0{,}896\pi\mathrm{j}}} = 2\mathrm{e}^{1{,}007\pi\mathrm{j}}$$

Proud v obvodu $I = 2\mathrm{e}^{1{,}007\pi\mathrm{j}}$A. Pro výpočet kapacity použijeme vzorec pro výpočet kapacitance:

$$X_\mathrm{C} = \frac{1}{\omega C}$$

$$C = \frac{1}{\omega X_\mathrm{C}} = \frac{1}{2\pi f X_\mathrm{C}}$$

$$L = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 4} = 0{,}000\,796$$

Odpověď: Kapacita kondenzátoru je 796 μF. Odpor v obvodu zůstává stejný, tedy 5 Ω.

6.3. Reálné úlohy z ekonomie

S kvadratickými rovnicemi je možné se setkat i při řešení úloh v ekonomii. Často se jedná o úlohy specifické, kdy se například řeší velikost úroku při daném zhodnocení peněz za určitou dobu. Lze ale nalézt i složitější úlohy, kde se používají i znalosti vyšší matematiky.

Př. 1 Osoba si půjčila 50 000 Kč. Dluh bude platit formou dvou stejných splátek, které činí 27 272 Kč, přičemž jednu bude platit letos a druhou příští rok. Jaká je úroková sazba při ročním připisování úroků? [17, s. 31 — upraveno]

Řešení: Úrokovou sazbu si označíme i. Pro výpočet úrokové sazby platí:

$$50\,000 = \frac{27\,272}{1+i} + \frac{27\,272}{(1+i)^2}.$$

Tuto rovnici vyřešíme:

$$50\,000 \cdot (1+i)^2 = 27\,272 \cdot (1+i) + 27\,272$$
$$50\,000i^2 + 72\,728i - 4\,544 = 0$$
$$6\,250i^2 + 9\,091i - 568 = 0$$

$$i_{1,2} = \frac{-9\,091 \pm \sqrt{9\,091^2 - 4 \cdot 6\,250 \cdot (-568)}}{2 \cdot 6\,250} = \frac{-9\,091 \pm \sqrt{96\,846\,281}}{12\,500}$$
$$i_1 = \frac{-9\,091 + \sqrt{96\,846\,281}}{12\,500} \cong 0{,}06$$
$$i_2 = \frac{-9\,091 - \sqrt{96\,846\,281}}{12\,500} \cong -1{,}5$$

Úrok musí být zcela určitě kladný, proto bereme v potaz pouze výsledek $i_1 \cong 0{,}06 = 6\ \%$.

Odpověď: Roční úroková sazba, kterou osoba zaplatí, bude činit 6 % ročně (p.a.).

Př. 2 Uložená částka 90 000 Kč se za 2 roky zhodnotila na částku 100 000 Kč. Jakou nám banka stanovila úrokovou sazbu, jestliže byla srážena při připisování daň z úroků e výši 15% a předpokládáme roční připisování úroků? [17, s. 37 – upraveno]

Řešení: Vzorec pro úročení vkladů vypadá takto:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i(1-d)}{m}\right)^n$$

Veličiny uvedené ve vzorci představují:

K_n … budoucí hodnota kapitálu, splatná částka;

K_0 … současná hodnota kapitálu, jistina;

i … roční úroková sazba (tzn. sazba p.a.);

d … srážková daň z úroků;

n … počet úrokovacích období, po které byl kapitál uložen;

m … frekvence úročení (kolikrát jsou úroky připisovány do roka) [17, s. 29]

Dosadíme tedy do vzorce a získáme rovnici:

$$100\,000 = 90\,000 \cdot \left(1 + \frac{i(1-0{,}15)}{1}\right)^2$$

$$\frac{10}{9} = 1 + 1{,}7i + 0{,}752\,25i^2$$

$$6{,}770\,25i^2 + 15{,}3i - 1 = 0$$

$$i_{1,2} = \frac{-15{,}3 \pm \sqrt{15{,}3^2 - 4 \cdot 6{,}770\,25 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6{,}770\,25} = \frac{-15{,}3 \pm \sqrt{261{,}171}}{13{,}540\,5}$$

$$i_1 = \frac{-15{,}3 + \sqrt{261{,}171}}{13{,}540\,5} \cong 0{,}064$$

$$i_2 = \frac{-15{,}3 - \sqrt{261{,}171}}{13{,}540\,5} \cong -2{,}323$$

Opět je nutné počítat s tím, že úroky nebudou záporné a tedy přichází do úvahy pouze $i_1 \cong 0{,}064$, což představuje 6,4 %.

Odpověď: Úrokovou sazbu stanovila banka na 6,4 %.

7. Vytvořené úlohy

V předchozích kapitolách jsme získali určitý přehled o dostupných reálných úlohách vedoucích na kvadratickou rovnici. Podobných úloh k představení praktického využití kvadratických rovnic je bohužel velmi málo typů a obvykle se studenti na ZŠ i SŠ setkají jen s některými typy těchto úloh. Proto tuto kapitolu věnujeme tvorbě některých dalších reálných úloh.

Jak již bylo zmiňováno, vztahů, které jsou kvadratické (a zároveň k jejich řešení není potřeba dalších hlubších matematických znalostí), není příliš mnoho, a proto budou některé následující úlohy více či méně vycházet z těch se kterými jsme se již v předešlých kapitolách setkali.

Př. 1 Zapojíme-li dva kondenzátory sériově, je výsledná kapacita 4 μF. Jestliže je zapojíme paralelně, výsledná kapacita bude 18 μF. Jakou kapacitu mají kondenzátory samostatně?

Řešení: U kondenzátorů platí opačné vztahy než u rezistorů. Tedy při paralelním zapojení platí $C_1 + C_2 = C$ a při sériovém $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$.

Zapíšeme tedy obě rovnice:

$$C_1 + C_2 = 18$$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4}$$

Vyjádříme C_1 pomocí C_2:

$$C_1 = 18 - C_2$$

Dosadíme do druhé rovnice a vypočítáme C_2 a následně C_1:

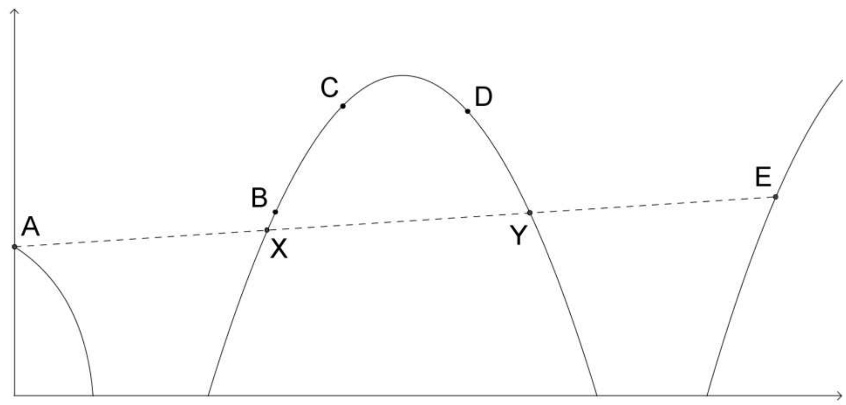
$$\frac{1}{18 - C_2} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4}$$
$$4C_2 + 4(18 - C_2) = C_2(18 - C_2)$$
$$C_2^2 - 18C_2 + 72 = 0$$
$$(C_2 - 12) \cdot (C_2 - 6) = 0$$
$$C_2 = 12$$
$$C_2^* = 6$$

$$C_1 = 6$$
$$C_1^* = 12$$

Odpověď: Kondenzátory mají kapacitu 6 μF a 12 μF.

Př. 2 V blízkosti městečka, kde Jenda bydlí, se staví nová železniční trať. Jelikož jde o oblast hornatou, často je třeba stavět mosty či tunely. Jenda po horách v okolí rád chodí s GPS navigací a ta mu umožňuje určovat na jednotlivých místech nadmořskou výšku i vzdušné vzdálenosti dvou bodů, které si do přístroje uloží.

Když se Jenda rozhlédl, kde se bude stavět, všiml si, že jeden z tunelů povede i skrz vrch Homole, jehož silueta má téměř tvar paraboly. Jenda se rozhodl, že zjistí, jak dlouhý tunel budou muset stavbaři v Homoli vyhloubit. Nemohl se ale bohužel dostat k plánovaným ústím obou konců tunelu, dokázal zaměřit pouze tři body, ležící v rovině s řezem Homole, kterým tunel povede. Kromě toho dokázal zaměřit místa na dvou sousedních kopcích, kde budou končit mosty vedoucí rovnou od obou ústí tunelu. Předpokládá rovnoměrné stoupání od bodu *A* do bodu *E*.



Body na sousedních kopcích pojmenoval *A*, *E* a body na Homoli *B, C*, *D*, (viz. obr.). Nadmořská výška a vzdálenost všech bodů od *A* jsou vyjádřeny v tabulce.

	vzdál. od *A* (m)	nadm. v. (m)
A	0	400
B	$\sqrt{40\,426}$	405
C	$\sqrt{131\,209}$	603
D	$\sqrt{201\,616}$	604
E	$\sqrt{810\,081}$	609

Spočtěte, jak dlouhý tunel bude potřeba vyhloubit (vzdálenost bodů *X* a *Y*).

Řešení: Nejprve bychom si měli určit soustavu souřadnic, ve které budeme počítat. Jelikož jsou všechny body vztaženy k bodu *A*, zvolíme ho počátkem soustavy. Bude mít tedy souřadnice $A\,[0;0]$. Jelikož známe u všech bodů jejich vzdálenost od *A*, spočítáme pomocí Pythagorovy věty souřadnice ostatních bodů na ose x a odečtením 400 od nadmořské výšky souřadnice na ose y. Pro bod $B\,[b_x; b_y]$ vypadá výpočet takto:

$$b_x = \sqrt{\left(\sqrt{40\,426}\right)^2 - 5^2}$$
$$b_x = 201$$
$$b_y = 405 - 400$$
$$b_y = 5$$

Pro ostatní body je výpočet analogický. Výsledky zapíšeme do tabulky:

	x	*y*
A	0	0
B	201	5
C	300	203
D	400	204
E	900	9

Pokud chceme zjistit vzdálenost bodů *X* a *Y*, musíme zjistit jejich souřadnice v dané soustavě. Z obrázku je patrné, že body *X* a *Y* jsou průsečíky přímky procházející body *A*, *E* a paraboly, procházející body *B*, *C*, *D*. Zjistíme tedy nejprve rovnici přímky *AE*.

Rovnice přímky má tvar $y = ax + b$. Jestliže dosadíme souřadnice obou bodů do této rovnice, dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých a a b.

$$0 = 0x + b$$
$$9 = 900a + b$$

Z první rovnice vyplývá $b = 0$. Dosazením do druhé, získáme $a = \frac{1}{100}$. Rovnice přímky *AE* je tedy:

$$y = \frac{1}{100}x$$

Nyní spočítáme rovnici paraboly. Rovnice dané paraboly má tvar $y = ax^2 + bx + c$.

Opět lze tedy dosadit tři známé body a získáme tři rovnice o třech neznámých a, b a c:

$$5 = a \cdot 201^2 + b \cdot 201 + c \quad (1)$$

$$203 = a \cdot 300^2 + b \cdot 300 + c \quad (2)$$

$$204 = a \cdot 400^2 + b \cdot 400 + c \quad (3)$$

Snadno vidíme, že pokud první rovnici vynásobíme číslem (-1) a sečteme nejprve s druhou a potom třetí rovnicí, dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$198 = 49\,599a + 99b$$
$$199 = 119\,599a + 199b$$

Obě z nich lze zkrátit koeficientem před b, po úpravě tedy získáme:

$$2 = 501a + b$$
$$1 = 601a + b$$

Nyní přičteme (-1) násobek první rovnice k druhé a vypočítáme a a následně dosazovací metodou i b a c:

$$-1 = 100a$$
$$a = -\frac{1}{100}$$
$$b = 1 - \left(-\frac{601}{100}\right)$$
$$b = \frac{701}{100}$$
$$c = 203 - \left(-\frac{90\,000}{100}\right) - 300 \cdot \frac{701}{100}$$
$$c = -1\,000$$

Rovnice paraboly má tedy tvar:

$$y = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{701}{100}x - 1\,000$$

Nyní zjistíme průsečíky přímky *AE* a parabolou:

$$\frac{1}{100}x = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{701}{100}x - 1\,000$$
$$x^2 - 700x + 100\,000 = 0$$
$$(x - 200) \cdot (x - 500) = 0$$

$$x_1 = 200$$
$$x_2 = 500$$

Dopočteme souřadnice bodů *X*, *Y* z rovnice přímky:

$$y = \frac{1}{100}x$$
$$y_1 = \frac{200}{100} = 2$$
$$y_2 = \frac{500}{100} = 5$$

A nyní zjistíme vzdálenost obou bodů $X\ [200; 2]$ a $Y\ [500; 5]$ pomocí Pythagorovy věty:

$$|\mathrm{XY}| = \sqrt{(500 - 200)^2 + (5 - 2)^2}$$
$$|\mathrm{XY}| = \sqrt{90\,000 + 9}$$
$$|\mathrm{XY}| = 3\sqrt{10\,001} \cong 300{,}015$$

Odpověď: Tunel bude mít délku 300,015 m.

Př. 3 Zjistěte, zda se jedná o stacionární nebo nestacionární časovou řadu autoregresivního modelu AR(2) z Box-Jenkinsonovy metodologie danou rovnicí:

$$x_{\mathrm{t}} = 2 + 0{,}6x_{\mathrm{t}-1} - 0{,}4x_{\mathrm{t}-2} + a_{\mathrm{t}}$$

Kde x_{t} označuje vysvětlovanou proměnnou v čase t, a_{t} je označení pro chybovou složku, kterou nelze předpovědět.

Poznámky: Ekonomickou časovou řadou se rozumí řada hodnost jistého věcně a prostorově vymezeného ekonomického ukazatele, který je uspořádán v čase směrem od minulosti do přítomnosti. [NNN, s. 18]

Pro analýzu časových řad se používají modely. Pro každý takový model existují podmínky jeho použití. Jedním z předpokladů autoregresního modelu (AR) z Box-Jenkinsonovy metodologie je stacionarita. Časová řada se označuje jako stacionární, pokud jsou charakteristiky jejích náhodných veličin v čase neměnné. Pro časovou řadu proto platí, že je stacionární, jestliže všechny kořeny její rovnice leží vně jednotkové kružnice.

Řešení: Rovnici tohoto modelu je možné přepsat pomocí operátoru zpoždění, ve kterém platí:

$$x_{t-1} = Bx_t$$

Rovnice přepsaná pomocí operátoru zpoždění vypadá následovně:

$$x_t = 2 + 0{,}6Bx_t - 0{,}4B^2x_t + a_t$$

Rovnici upravíme tak, aby na levé straně bylo možné vytknout x_t a na pravé jsme měli vše ostatní:

$$x_t(1 - 0{,}6B + 0{,}4B^2) = 2 + a_t$$

Abychom zjistili, zda je model stacionární, je nutné položit polynom na levé straně roven nule a zjistit, zda jeho kořeny leží oba vně jednotkové kružnice. Zjišťujeme tedy, zda absolutní hodnota obou kořenů je z intervalu $(0, \infty)$:

$$0{,}4B^2 - 0{,}6B + 1 = 0$$

$$B_{1,2} = \frac{-(-0{,}6) \pm \sqrt{(-0{,}6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}4}}{2 \cdot 0{,}4}$$

$$B_{1,2} = \frac{0{,}6 \pm \sqrt{0{,}36 - 1{,}6}}{0{,}8} = \frac{0{,}6 \pm \sqrt{-1{,}24}}{0{,}8} = \frac{0{,}6 \pm \mathrm{i}\sqrt{-1{,}24}}{0{,}8}$$

$$B_{1,2} = 0{,}75 \pm \frac{\mathrm{i}\sqrt{-1{,}24}}{0{,}8}$$

$$|B_1| = |B_2| = \sqrt{0{,}75^2 + \left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-1{,}24}}{0{,}8}\right)^2} \cong 1{,}581 > 1$$

<u>Odpověď:</u> Proces je stacionární, neboť oba kořeny leží vně jednotkové kružnice.

Závěr

Práce je věnována kvadratickým rovnicím, jejich řešení a především jejich využití v praktickém životě. Cílem této práce je vyhledat úlohy, které se řeší pomocí kvadratické rovnice z různých oborů a vytvoření dalších úloh použitelných ve výuce této kapitoly matematiky.

Práce na tomto tématu mi přišla velmi zajímavá. Myslím, že obecně se studenti málo setkávají s praktickým využitím většiny toho, co se učí v hodinách matematiky. Stejně tak já jsem před zpracováním této práce věděl málo o tom, kde se kvadratické rovnice dají využít a v jakých oborech se s nimi vlastně člověk může setkat. Celkově věřím, že kdyby studenti poznali více praktických úloh, obecně by se zvýšila i jejich motivace při studiu matematiky.

Při tvorbě a hledání úloh jsem ovšem narazil i na několik problémů. Hlavním problémem se nejprve jevilo vůbec nalézt nějaké složitější úlohy, kde se kvadratické rovnice využívají. Autoři odborně zaměřených knih se totiž většinou snaží vysvětlit danou problematiku na úlohách jednoduchých z matematického hlediska a ke složitějším se dostanou málokdy. Kromě toho jsem měl také problémy vymyslet originální úlohy, které by se řešily pomocí kvadratických rovnic. Je to dáno jednak tím, že obecně vzorců, které by obsahovaly neznámou umocněnou na druhou, není moc, ale také tím, že jsem se snažil vytvořit nějaké co nejvíce reálné úlohy.

Další problém, který se při zpracování tohoto tématu objevil, bylo nejprve samotné pochopení složitějších úloh a jejich následný srozumitelný popis. Při zpracování práce bylo nutné nastudování některých témat z jiných oborů. Někdy bylo velmi obtížné pochopit, co přesně se počítá a proč. Většinou se totiž nejedná o nejjednodušší úlohy s rozsáhlým výkladem, která proměnná označuje co. Následně bylo nutné příklady přepsat do podoby co nejstručnější, ale zároveň takové, aby i laik pochopil, co a proč se v dané úloze počítá.

Celý soubor úloh, který tato práce obsahuje, může určitě nalézt uplatnění na matematicky zaměřených školách a gymnáziích, kde mají učitelé k dispozici více hodin matematiky. Prostřednictvím těchto úloh je možné studenty seznámit s širokým spektrem využití kvadratické rovnice. Rovněž by některé kapitoly mohli využívat učitelé na odborných školách, kde je sice na matematiku méně času, ale je možné její studium propojovat s konkrétním studovaným oborem.

Práce by si jistě zasloužila rozšířit o další, především praktické úlohy. Jsem přesvědčen, že kvadratické rovnice se v mnoha oborech využívají, byť ne neustále. Kdyby se tedy v budoucnu na práci dále pracovalo, určitě by bylo vhodné rozšířit soubor úloh o další obory (například v geografii či architektuře předpokládám, že se kvadratické rovnice využívají).

Literatura

Tištěné materiály

[1] ARLT, Josef. *Ekonomické časové řady: [vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace]*. 1. vyd. Praha: Grada, 2007, 285 s. ISBN 978-80-247-1319-9.

[2] BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 215 s. ISBN 80-719-6035-7.

[3] BLAHOVEC, Antonín. *Elektrotechnika II*. 1. vyd. Praha: Informatorium, 1995, 153 s. ISBN 80-854-2773-7.

[4] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 631 s. ISBN 80-719-6140-X.

[5] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: komplexní čísla*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 134 s. ISBN 80-719-6187-6.

[6] CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU: funkce*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 213 s. ISBN 80-719-6020-9.

[7] CALDA, Emil. *Sbírka řešených úloh: středoškolská matematika pod mikroskopem*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006, 131 s. ISBN 80-719-6319-4.

[8] CHARVÁT, Jura, ZHOUF Jaroslav a BOČEK Leo. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 223 s. ISBN 80-719-6154-X.

[9] KLŮFA, Jindřich a SÝKOROVÁ Irena. *Matematika pro informatiky a statistiky*. 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2010, 282 s. ISBN 978-80-7431-030-0.

[10] KRČMÁŘ, Jaroslav. *5 až 9: sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám, určená žákům 5., 7. a 9. tříd ZŠ*. Vyd. 1. Praha: Sobotáles, 1997, 177 s. ISBN 80-859-2032-8.

[11] NEUSTUPA, Jiří. *Matematika I*. Vyd. 5., přeprac. V Praze: České vysoké učení technické, 2008, 140 s. ISBN 978-80-01-04111-6.

[12] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK Jiří. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 71 s. ISBN 80-7196-167-1.

[13] ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK Jiří. *Matematika pro 8. ročník základní školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 95 s. ISBN 80-7196-148-5.

[14] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: funkce*. 2. vyd., v Prometheu 1. Praha: Prometheus, 1993, 160 s. ISBN 80-858-4909-7.

[15] PAVLÍKOVÁ, Pavla a SCHMIDT Oskar. *Základy matematiky*. vyd. 1. Praha: VŠCHT, 2006, 264 s. ISBN 80-708-0615-X.

[16] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. ISBN 80-719-6099-3.

[17] RADOVÁ, Jarmila. *Finanční matematika pro každého: příklady*. 1. vyd. Praha: Grada, 2008, 227 s. ISBN 978-80-247-2364-8.

[18] SÝKORA, Václav. *Sbírka úloh z matematiky k přijímacím zkouškám na gymnázia osmiletá, šestiletá, čtyřletá*. 1. vyd. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 1998, 144 s. ISBN 80-859-3798-0.

[19] WILLERS, Michael. *Algebra bez (m)učení: od arabských matematiků k tajným šifrám: matematika v každodenním životě : fascinující čísla a rovnice*. 1. vyd. Praha: Grada, 2012, 176 s. ISBN 978-802-4741-239.

Elektronické zdroje dostupné z internetu

[20] POLÁK, Zdeněk, ŠEDIVÝ Přemysl Vrhy: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku. *Fyzikální olympiáda* [online]. 2002–2013 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/vrhy.pdf

[21] BALNAR, Antonín. *Řešení fyzikálních úloh* [online]. Vyd. 1. Ostrava: Gymnázium Ostrava-Poruba, 2005, 55 s. [cit. 2013-04-22. Dostupné z: http://www.wigym.cz/nv/wp-content/uploads/docs/opory/fyzika.pdf

[22] Dokonale pružná srážka. In: *Matematické Fórum* [online 2002–2005 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=39184

[23] HISTORIE ROVNIC. MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, mládeže a tělovýchovy. *BlackHole - Loved by few... Hated by many...: Jan Šlégr - osobní stránky* [online]. BlackHole 2006 - 2007 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/04/Historie-rovnic.pdf

[24] Hĺbka priepasti. In: *Matematické Fórum* [online]. 2002–2005 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=2143

[25] KRYNICKÝ Martin. Slovní úlohy vedoucí na kvadratické rovnice. *Počítačové učebnice matematiky a fyziky pro gymnázia* [online]. [2009] [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/02_Funkce_a_rovnice/5_Kvadraticka_funkce_Kvadraticke_rovnice_a_nerovnice/2512_Slovni_ulohy_vedouci_na_kvadraticke_rovnice.pdf

[26] KOVÁŘ, Petr. 44. archiv zajímavých úloh. *Petr Kovář* [online]. [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://homel.vsb.cz/~kov16/ulohy/archiv44.php

[27] SMÍLEK, Jiří. Spojování rezistorů. *Školní stránky Ing.Jiřího Smílka: učitele odborných předmětů elektro* [online]. 2010 - 2013 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://www.jsmilek.cz/priklady/priklad%20blah%202-4%20razeni_rezistoru%20_reseni.pdf

[28] Studijní materiály. Fakulta Technologická ve Zlíně. *Ústav chemie* [online]. [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://chemie.utb.cz/study.php

[29] VLACHOVÁ, Magda. Opičí básnička. *Matematicko - Fyzikální web* [online]. 11. 8. 2008 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: http://mfweb.wz.cz/ulohy/30.htm