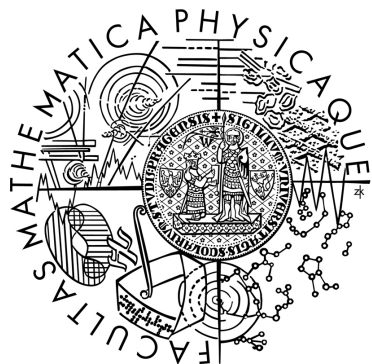


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Tatiana Zákutná

Robustní optimalizace portfolia

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2013

Na tomto mieste by som sa rada poďakovala vedúcemu mojej diplomovej práce RNDr. Ing. Milošovi Kópovi, Ph.D., za jeho čas a ochotu, odbornú pomoc, podnetné rady a možnosť prístupu k softvéru GAMS.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných zdrojov. Súhlasím so zapožičiavaním tejto práce a jej zverejnením.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, zvlášť skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzatvorenie licenčnej zmluvy o užití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 5.4.2013

Tatiana Zákutná

Názov práce: Robustní optimalizace portfolia

Autor: Tatiana Zákutná

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

e-mail vedúceho: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci študujeme optimalizáciu portfólia v podmienkach celočíselnosti, ktoré ovplyvňujú optimálnu alokáciu aktív. Zadefinujeme miery rizika a formulujeme „mean-risk“ modely. K vytvoreniu robustných modelov zahrňujúcich neurčitost' v pravdepodobnostnom rozdelení použijeme dve metódy: analýza najhoršieho prípadu a kontaminácia. Neurčitost' v diskretnom pravdepodobnostnom rozdelení uvažujeme v hodnotách scenárov a v ich pravdepodobnostiach najprv samostatne a následne v kombinácii. Vytvorené modely sú aplikované na dáta z akciového trhu pomocou optimalizačného softvéru GAMS.

Kľúčové slová: optimalizácia portfólia, CVaR, analýza najhoršieho prípadu, kontaminácia

Title: Robust portfolio selection problem

Author: Tatiana Zákutná

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this thesis, a portfolio optimization with integer variables which influence optimal assets allocation, is studied. Measures of risk are defined and the corresponding mean-risk models are derived. Two methods are used to develop robust models involving uncertainty in probability distribution: the worst-case analyses and contamination. The uncertainty in values of scenarios and in their probabilities of the discrete probability distribution is assumed separately followed by their combination. These models are applied to stock market data with using optimization software GAMS.

Keywords: portfolio optimization, CVaR, worst-case analyses, contamination

Obsah

Úvod	6
1 Základné definície	9
1.1 Miery rizika	10
1.2 Očakávaný úžitok	13
2 Optimalizačné modely	17
2.1 Mean-risk modely	17
2.2 Model s úžitkovou funkciou	22
3 Metóda najhoršieho prípadu	23
3.1 Deterministický model - $\bar{\rho}$ parameter	24
3.2 Stochastický model - ρ náhodný vektor	25
3.2.1 Neúplná informácia v hodnotách	25
3.2.2 Neúplná informácia v pravdepodobnostiach	29
3.2.3 Neúplná informácia v hodnotách a pravdepodobnostiach	35
4 Kontaminácia	38
5 Empirická aplikácia	40
5.1 Zadanie úlohy	40
5.2 Riešenie úlohy	42
5.3 Riešenie robustných úloh	43
5.4 Kontaminovaná úloha	47
5.5 Porovnanie výsledkov	49

OBSAH

Záver	50
Literatúra	52
A Popis akciových titulov	55
B Kurzy akciových titulov	58
C Zdrojový kód GAMS	61
D Rozloženie investorovho kapitálu	65

Úvod

Investor je každý deň obklopený množstvom investičných príležitostí. V jeho vlastnom záujme je zvoliť si investičnú stratégiu, ktorá ponúkne také využitie finančných prostriedkov, ktoré je pre neho v istom zmysle optimálne. Zpravidla to znamená zostaviť si portfólio, ktoré odráža jeho preferencie medzi očakávaným výnosom a rizikom. Pri obchodovaní na finančných trhoch je investorovi umožnené nakupovať v minimálnych jednotkách (v lotoch). Zakúpiť menšie množstvá za vyššie ceny môže byť úplne vylúčené. Tento fakt ovplyvňuje rozhodnutie investora. K finančnej úlohe o alokácii portfólia môžeme vo všeobecnosti pristupovať dvoma spôsobmi: mean-risk analýza a maximalizácia očakávaného úžitku investora.

Existuje množstvo spôsobov, ako merať riziko. S jedným z prvých prístupov prišiel H. M. Markowitz v 50. rokoch minulého storočia [17]. Vo svojom modeli viackriteriálnej optimalizácie sa snaží o maximalizáciu očakávanej hodnoty výnosu a minimalizáciu rozptylu výnosov. Neskôr sám Markowitz vylepšil svoj model a nahradil rozptyl semivarianciou. Tá nepenalizuje odchýlky smerom hore, ktoré sa za riziko v prípade optimalizácie portfólia nepovažujú. V bankovníctve a poisťovníctve široko rozšíreným prístupom k meraniu rizika je hodnota v riziku tzv. Value at Risk (VaR). Táto miera rizika udáva najväčšiu potencionálnu stratu pokiaľ zanedbáme stratu, ku ktorej môže dôjsť s pravdepodobnosťou menšou než $1-\alpha$ (hodnota α dostatočne blízko 1). Ani tento spôsob merania rizika nie je považovaný za ideálny. Neobsahuje informáciu o veľkosti málo pravdepodobných strát. S riešením prišli Rockafellar a Uryasev [23] tak, že modifikovali VaR a predstavili podmienenú hodnotu v riziku Conditional Value at Risk (CVaR) ako strednú hodnotu strát väčších ako VaR. Popularita tejto koherentnej miery rizika [1] narastá vďaka jej pekným matematickým vlastnostiam.

Druhý zmieneny prístup priniesol Neumann a Morgenstern [19] v roku 1944. Maximalizuje úžitok investora a stavia investorovo rozhodnutie na subjektívnom vnímaní úžitku z bohatstva. V ekonómii predstavuje úžitok určitý stupeň uspokojenia pochádzajúci z ekonomickej aktivity, ako je spotreba rozličných statkov a služieb, či vlastníctvo majetku. Vo finančnom svete rozumieme pod pojmom úžitok uspokojenie, ktoré pochádza z uskutočnenej investície. Preferenčné usporiadanie na množine rozhodnutí o alokácii bohatstva nám charakterizuje správanie racionálneho investora, ktorý vie vždy určiť, ktorú investičnú stratégiu preferuje alebo či sú pre neho investičné rozhodnutia indiferentné. Tento prístup poskytuje možnosť rôzneho zohľadnenia rizika, ako aj stanoviska investora k tomuto riziku. Pri pomerne jednoduchých funkciách sa však výpočet optimalizačnej úlohy dost' komplikuje.

Mnoho modelov na optimalizáciu portfólia predpokladá úplnú deliteľnosť investičných aktív, ktorá však nezodpovedá skutočnosti. Opustenie tohto predpokladu vedie problém optimalizácie portfólia na riešenie úlohy celočíselného programovania. Za prítomnosti celočíselných premenných môže aj malá zmena rozdelenia spôsobiť veľkú zmenu v optimálnom riešení úlohy. V druhej polovici 20. storočia sa postupne vyvinuli a používajú rôzne metódy na skúmanie robustnosti. Žáčková v [28] roku 1966 uplatňuje minimaxový prístup v analýze najhoršieho prípadu s neúplnou informáciou o pravdepodobnostnom rozdelení. O pár rokov neskôr ako Dupačová prichádza s metódou kontaminácie, kedy neurčitosti v pôvodnom pravdepodobnostnom rozdelení modelujeme kontaminačným rozdelením [4] a [5]. Existujú ďalšie metódy zameriavajúce sa na stabilitu, sensitivitu a postoptimalitu optimalizačného procesu [10] a rôzne simulačné štúdiá [29], ktoré skúmajú robustnosť riešení.

Cieľom tejto práce je formulovať úlohy optimalizácie portfólia, vytvoriť ich matematické modely a tie rozšíriť robustným spôsobom. Navrhuté modely implementovať v štandardnom optimalizačnom softvéri GAMS a porovnať získané výsledky z nerobustných a robustných modelov so zohľadnením vstupných parametrov jednotlivých úloh.

Práca je štruktúrovaná v piatich kapitolách. V kapitole 1 zavedieme miery rizika, ktoré poskytujú dobrú ekonomickú interpretovateľnosť a sú rozšírené ako v praktických aplikáciách, tak aj teoretických štúdiách. Zároveň poskytneme základný pohľad na teóriu úžitku. V ďalšej kapitole 2 si pre jednotlivé miery rizika - rozptyl, VaR a CVaR formalizujeme modely riešenia zadaného optimalizačného problému. V zá-

vere kapitoly si zostavíme model postavený na teórii očakávaného úžitku. Kapitola 3 rozširuje model pre koherentnú mieru rizika robustným spôsobom. Uvažujeme tri typy úloh: vyskytuje sa neúplná informácia v hodnotách pravdepodobnostného rozdelenia, vyskytuje sa neúplná informácia v pravdepodobnostiach pravdepodobnostného rozdelenia a kombinácia predošlých prípadov. Ďalšiu metódu robustného rozšírenia - metódu kontaminácie - popisujeme v kapitole 4. Metóda spočíva v modelovaní neurčitosti pôvodného rozdelenia kontaminačným rozdelením. V záverečnej kapitole 5 riešime vytvorené nerobustné aj robustné modely na reálnych dátach významných akciových titulov z americkej burzy cenných papierov a výsledky vyhodnotíme.

Kapitola 1

Základné definície

Uvažujme investora, ktorý chce zhodnotiť svoje peniaze a využiť investičné príležitosti na trhu. Vo finančných modeloch investor uskutoční rozhodnutie o alokácii svojich finančných prostriedkov do vybraných aktív a následne sleduje realizáciu náhody. Jeho cieľom je zostaviť portfólio, ktoré bude z hľadiska výnosu a rizika optimálne [17], t.j. požaduje čo najvyšší očakávaný výnos pri čo najnižšom riziku.

Majme N aktív, do ktorých je možné investovať. Označme si $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^N$ množinu možných rozhodnutí o alokácii bohatstva. Každé rozhodnutie je dané vektorom $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, ktorého i -ta zložka udáva, koľko z disponibilného bohatstva W_0 je investované do i -teho aktíva. Predaje „na krátko“ nie sú povolené, t.j. $x_i \geq 0$ pre $i = 0, \dots, N$. Výnos za obdobie $[0, T]$ značíme $\boldsymbol{\rho} = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N)^\top$, kde jednotková investícia do i -teho rizikového aktíva prináša výnos ρ_i pre $i = 1, \dots, N$ za obdobie $[0, T]$ a bezrizikové aktívum prináša konštantný výnos ρ_0 .

Definícia 1.1. [23] *Stratovou funkciou* sa rozumie náhodná veličina $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$, ktorá je funkciou vektoru $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_N)^\top \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ a náhodného vektoru $\boldsymbol{\rho} = (\rho_0, \dots, \rho_N)^\top$ s jeho zložkami definovanými na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) majúcimi hodnoty v $(E, \mathcal{B}(E))$, kde $\mathcal{B}(E)$ je Borelovská σ -algebra generovaná metrickým priestorom E , $E \subset \mathbb{R}$.

Strata je funkciou náhodnej veličiny, a tak je tiež strata náhodnou veličinou, ktorej rozdelenie závisí na rozhodnutí \mathbf{x} . Množinu náhodných strát budeme značiť \mathcal{L} . Strata so záporným znamienkom vyjadruje výnos, a preto $Y = -L = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ značí náhodný výnos a \mathcal{Y} množinu náhodných výnosov.

1.1 Miery rizika

Mieru rizika definujeme ako pravdepodobnostný funkcionál náhodnej straty. Vyššie hodnoty tohoto funkcionálu predstavujú vyššie riziko, a teda investor uprednostňuje nižšie hodnoty funkcionálu pred hodnotami vyššími. Nasledujúce pojmy zavádzame podľa [20].

Definícia 1.2. Nech $L \in \mathcal{L}$ je náhodná strata. Potom *mierou rizika* sa rozumie pravdepodobnostný funkcionál $\mathcal{R}: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, ak splňuje nasledujúce vlastnosti:

(R1) Ekvivariancia voči posunutiu

$$\mathcal{R}(L + c) = \mathcal{R}(L) + c \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall L \in \mathcal{L}$$

(R2) Monotónia

$$L \leq L'.s.j. \Rightarrow \mathcal{R}(L) \leq \mathcal{R}(L') \quad \forall L, L' \in \mathcal{L}$$

Definícia 1.3. Mieru rizika \mathcal{R} nazývame *konvexná miera rizika*, ak splňuje vlastnosť:

(R3) Konvexita

$$\mathcal{R}(\lambda L + (1 - \lambda)L') \leq \lambda \mathcal{R}(L) + (1 - \lambda)\mathcal{R}(L') \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle, \forall L, L' \in \mathcal{L}.$$

Konvexnú mieru rizika budeme ďalej nazývať *rizikový funkcionál*.

Definícia 1.4. Mieru rizika \mathcal{R} nazývame *pozitívne homogénna miera rizika*, ak splňuje vlastnosť:

(R4) Pozitívna homogenita

$$\mathcal{R}(\lambda L) = \lambda \mathcal{R}(L) \quad \lambda \geq 0, \forall L \in \mathcal{L}.$$

Definícia 1.5. Mieru rizika \mathcal{R} nazývame *koherentná miera rizika*, ak splňuje všetky predchádzajúce vlastnosti (R1) - (R4) alebo spĺňa vlastnosti (R1), (R2), (R4) a ďalšiu vlastnosť:

(R3') Sub-aditivita

$$\mathcal{R}(L + L') \leq \mathcal{R}(L) + \mathcal{R}(L') \quad \forall L, L' \in \mathcal{L}.$$

Vlastnosti (R3) a (R3') nám zaručujú skutočnosť, že diverzifikáciou portfólia nedôjde k zvýšeniu jeho rizika.

Existuje ďalšia možnosť kvantifikácie rizika, a to deviačný rizikový funkcionál.

Definícia 1.6. Nech $L \in \mathcal{L}$ je náhodná strata. Potom *deviačný rizikový funkcionál* sa rozumie pravdepodobnostný funkcionál $\mathcal{D}: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, ak splňuje nasledujúce vlastnosti:

(D1) Invariancia voči posunutiu

$$\mathcal{D}(L + c) = \mathcal{D}(L) \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall L \in \mathcal{L},$$

(D2) Monotónia

$$L \leq L' \text{ s.j.} \Rightarrow \mathbb{E}(L) - \mathcal{D}(L) \leq \mathbb{E}(L') - \mathcal{D}(L') \quad \forall L, L' \in \mathcal{L},$$

(D3) Konvexita

$$\mathcal{D}(\lambda L + (1 - \lambda)L') \leq \lambda \mathcal{D}(L) + (1 - \lambda)\mathcal{D}(L') \quad \lambda \in (0, 1), \forall L, L' \in \mathcal{L}.$$

Platí vzťah medzi deviačným rizikovým funkcionálom a rizikovým funkcionálom. Ako sa uvádza v [20], deviačný rizikový funkcionál má vlastnosti (D1), (D2) a (D3) práve vtedy a len vtedy, keď rizikový funkcionál $\mathcal{R} = \mathbb{E}(L) - \mathcal{D}(L)$ má vlastnosti (R1), (R2) a (R3).

Riziko budeme kvantifikovať tromi v praxi často používanými funkcionálmi: hodnotou v riziku (Value at Risk - VaR), podmienenou hodnotou v riziku (Conditional Value at Risk - CVaR) a smerodajnou odchýlkou.

Value at Risk

Uvažujme *stratovú funkciu portfólia* $L = -\mathbf{x}^T \boldsymbol{\rho}$ s váhami \mathbf{x} , ktorá má distribučnú funkciu

$$\psi(\mathbf{x}, \zeta) = \mathbb{P}[L \leq \zeta].$$

Value at Risk, v súlade s [23], predstavuje minimálnu hodnotu straty, ktorá nebude prekročená s pravdepodobnosťou α , typicky $\alpha=0,95$ alebo $\alpha=0,99$.

Definícia 1.7. Nech L je stratová funkcia a $0 < \alpha < 1$. *Value at Risk* VaR_α hodnotu spojenú s rozhodnutím \mathbf{x} definujeme ako:

$$\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \min [\zeta | \psi(\mathbf{x}, \zeta) \geq \alpha]$$

a ďalej definujeme *horný* VaR_α

$$\text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}) = \inf [\zeta | \psi(\mathbf{x}, \zeta) > \alpha].$$

Vzťah vyššie definovaných veličín je zrejmý $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) \leq \text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x})$.

Hoci VaR predstavuje jednu z fundamentálnych metód merania rizika, má pár nevýhod: nesplňuje vlastnosť (R3) konvexitu ani vlastnosť (R3') sub-aditivitu, a teda nie je ani kohorentnou mierou rizika [1]. Zároveň neposkytuje informáciu o stratách, ktoré nastanú s pravdepodobnosťou $(1-\alpha)$.

Conditional Value at Risk

Miera rizika CVaR je definovaná v [23] ako stredná hodnota strát, ktoré presahujú hodnotu VaR, čiže $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ najväčších strát.

Definícia 1.8. Nech L je stratová funkcia a $0 < \alpha < 1$. *Horný a dolný* CVaR_α straty spojenej s rozhodnutím \mathbf{x} definujeme:

$$\text{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x}) = E[L | L > \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x})],$$

$$\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}) = E[L | L \geq \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x})].$$

V prípade, že distribučná funkcia $\psi(\mathbf{x}, \zeta)$ má pravdepodobnostný skok v bode $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$, bude platiť $\text{CVaR}_\alpha^-(\mathbf{x}) < \text{CVaR}_\alpha^+(\mathbf{x})$. V prípade diskrétného rozdelenia stratovej funkcie L sa môže vyskytnúť problém určiť presne $(1-\alpha) \cdot 100\%$ najväčších strát, a preto zavádzame CVaR_α pomocou α -chvosta.

Definícia 1.9. Nech L je stratová funkcia a $0 < \alpha < 1$. CVaR_α hodnotu straty spojenej s rozhodnutím \mathbf{x} definujeme

$$\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \text{stredná hodnota rozdelenia } \alpha\text{-chvosta } L,$$

rozdelenie α -chvosta L je definované

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}, \zeta) = \begin{cases} 0 & \text{pre } \zeta < \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}), \\ [\psi(\mathbf{x}, \zeta) - \alpha] / [1 - \alpha] & \text{pre } \zeta \geq \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Pre každé $\alpha \in (0, 1)$ platí vzťah medzi mierou rizika VaR a CVaR spojenými s rozhodnutím \mathbf{x} :

$$\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) \leq \text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}).$$

Rovnosť nastáva vtedy, keď pravdepodobnosť straty vyššej ako $\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$ je nulová. CVaR je koherentnou mierou rizika, čo je ukázané v [21].

Smerodajná odchýlka

Meranie rizika pomocou smerodajnej odchýlky zavádzame v súlade s Markowitzom [17]. Ten uvažuje závislosť medzi jednotlivými dvojicami výnosnosti aktív $\text{cov}(\rho_i x_i, \rho_j x_j) = x_i \text{cov}(\rho_i, \rho_j) x_j$, kde kovariancie $\text{cov}(\rho_i, \rho_j)$ pre $i, j = 1, \dots, N$ sú zložky variačnej matice náhodného vektoru výnosov \mathbf{V} . Zatiaľ čo výnos sa nemení, s klesajúcou závislosťou výnosnosti aktív klesá aj riziko portfólia definované smerodajnou odchýlkou.

Definícia 1.10. *Rizikom portfólia meraným smerodajnou odchýlkou sa rozumie smerodajná odchýlka náhodného výnosu portfólia*

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}}.$$

Smerodajná odchýlka spĺňa vlastnosti (D1), (D2) a (D3), a je teda deviačným rizikovým funkcionálom.

1.2 Očakávaný úžitok

Teória očakávaného úžitku priraduje investorovi rozhodnutiu hladinu uspokojenia investora na základe bohatstva investora podľa jeho vzťahu k riziku. V mnohých prípadoch tento koncept nedáva interpretáciu konkrétnej hodnoty úžitkovej funkcie, neporovnáva o koľko je jedno rozhodnutie investora lepšie ako iné, stanovuje však investorové preferencie (usporiadanie) pri uskutočnení rozhodnutia.

Základné pojmy si zavedieme podľa [7]. Na množine investičných rozhodnutí \mathcal{X} si zavedieme preferenčné usporiadanie.

Definícia 1.11. *Preferenčný vzťah na množine \mathcal{X} je binárna relácia \prec s nasledujúcimi dvomi vlastnosťami:*

(P1) Asymetria

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{x}' \Rightarrow \mathbf{x}' \not\prec \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X},$$

(P2) Negatívna tranzitivita

$$\mathbf{x} \not\prec \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}' \not\prec \mathbf{x}'' \Rightarrow \mathbf{x} \not\prec \mathbf{x}'' \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathcal{X}.$$

Definícia 1.12. *Slabý preferenčný vzťah* na množine \mathcal{X} je binárna relácia \preceq definovaná ako

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}' \Leftrightarrow \mathbf{x}' \not\prec \mathbf{x},$$

a medzi \mathbf{x} a \mathbf{x}' platí *indiferentný vzťah* \sim

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \Leftrightarrow \mathbf{x}' \preceq \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \preceq \mathbf{x}' \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}.$$

Značenie $\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}'$ znamená, že buď investor preferuje \mathbf{x} pred \mathbf{x}' alebo medzi týmito dvoma možnosťami nerozlišuje. Podľa [6] si definujeme numerickú reprezentáciu preferenčného vzťahu.

Definícia 1.13. Reálnu funkciu $u: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame *úžitková funkcia*, ak splňuje

$$(\mathbf{x} \succ \mathbf{x}' \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{x}')) \wedge (\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}')).$$

V praxi často úžitková funkcia závisí na rozhodnutí \mathbf{x} prostredníctvom nejakej agregáčnej funkcie. Nech W je bohatstvo investora, ktoré závisí na jeho rozhodnutí \mathbf{x} , potom úžitkovú funkciu $u(W(\mathbf{x}))$ budeme značiť $u(W)$, tzn. funkcia priradujúca bohatstvu investora úžitok, ktorý z bohatstva investor má.

Investorov vzťah k riziku je ovplyvnený tvarom jeho úžitkovej funkcie a úrovňou jeho počiatočného bohatstva W_0 . Ten istý investor môže byť na úrovni majetku W'_0 obľubujúci riziko, zatiaľ čo na úrovni W''_0 môže byť rizikovo averzný alebo neutrálny. Jedná sa teda o lokálnu vlastnosť. O globálnom vzťahu investora k riziku hovoríme, ak je investor rizikovo averzný (resp. neutrálny, obľubujúci riziko) na každej hladine jeho bohatstva.

Globálny investorov vzťah k riziku závisí už len na úžitkovej funkcii. Jej vlastnosti nám umožnia stanoviť si nutnú a postačujúcu podmienku na globálnu rizikovú averziu (resp. neutralitu, obľubenosť) investora. Predtým si ešte zavedieme nasledujúce pojmy:

Definícia 1.14. Úžitkovú funkciu $u: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame *konvexná*, ak spĺňa vlastnosť:

(U1) Konvexita

$$u(\lambda W + (1 - \lambda)W') \leq u(W) + (1 - \lambda)u(W') \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle, \forall W, W' \in \mathcal{W}.$$

Naopak $u : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ nazývame *konkávna*, ak spĺňa vlastnosť:

(U1') Konkavita

$$u(\lambda W + (1 - \lambda)W') \geq u(W) + (1 - \lambda)u(W') \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle, \forall W, W' \in \mathcal{W}.$$

Pre striktnie konvexnú (resp. konkávnu) funkciu je v (U1) (resp. (U1')) splnená ostrá nerovnosť pre $W, W' \in \mathcal{W}, W \neq W'$.

Tvrdenie 1.15. *Investor je globálne rizikovo averzný (resp. rizikovo neutrálny, obľubujúci riziko) práve vtedy, ak je jeho úžitková funkcia striktnie konkávna (resp. lineárna, striktnie konvexná) na \mathcal{W} .*

Dôkaz tohoto tvrdenia je možné nájsť v [15].

Uvedieme si základné typy úžitkových funkcií, ktoré sú rozšírené a často používané k modelovaniu prístupu rizikovo averzného investora:

Mocninná funkcia úžitku

$$u(W) = W^\gamma / \gamma \text{ pre } W > 0, \text{ kde } \gamma \leq 1$$

Logaritmická funkcia úžitku

$$u(W) = \log(W), \text{ kde } W > 0$$

Exponenciálna funkcia úžitku

$$u(W) = -e^{-\gamma W} \text{ pre } \gamma > 0$$

Kvadratická funkcia úžitku

$$u(W) = bW - (W)^2, \text{ kde } 2W - b < 0$$

Všetky uvedené funkcie sú konkávne a rastúce.

Definícia 1.16. *Očakávaným úžitkom investora z konečného bohatstva, ktorý získa uskutočnením rozhodnutia \mathbf{x} sa rozumie*

$$\mathbb{E}u(\mathbf{x}^\top \mathbf{1} + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}),$$

kde u je úžitková funkcia investora.

KAPITOLA 1. ZÁKLADNÉ DEFINÍCIE

Investorov vzťah k riziku je možné merať viacerými spôsobmi. Dva hlavné sú funkcia absolútnej a relatívnej rizikovej averzie, ktoré sú odvodené z tvaru úžitkovej funkcie. Predpokladajme dvakrát diferencovateľnú úžitkovú funkciu a definujeme si funkcie rizikovej averzie podľa [6].

Definícia 1.17. Nech $u : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ je úžitková funkcia investora. *Funkciu absolútnej rizikovej averzie* definujeme ako

$$A(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}.$$

Funkcia relatívnej rizikovej averzie je definovaná nasledovne

$$R(W) = WA(W).$$

Kapitola 2

Optimalizačné modely

Pri riešení finančných optimalizačných úloh sledujeme záujmy investora a hľadáme portfólio, ktoré bude podľa uvažovaných kritérií optimálne. Pre oba prístupy z predchádzajúcej kapitoly si predstavíme minimalizačné formuly a odvodíme optimalizačné modely portfólia s celočíselnými premennými.

2.1 Mean-risk modely

V mean-risk modeloch zohľadňujeme dve kritéria - očakávaný výnos a riziko. Investor preferuje, čo najvyšší výnos pri čo najnižšom riziku. Pri riešení takýchto úloh hľadáme eficientné portfólio, ktoré si zadefinujeme.

Definícia 2.1. Portfólio dané vektorom \mathbf{x}^* nazývame *eficientné portfólio* vzhľadom k očakávanej hodnote výnosu $\mathbb{E}(Y)$ a miere rizika $\mathcal{R}(L)$, ak neexistuje rozhodnutie $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, pre ktoré platí

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) > \mathbb{E}(\mathbf{x}^{*\top} \boldsymbol{\rho}) \wedge \mathcal{R}(-\mathbf{x}^{*\top} \boldsymbol{\rho}) \geq \mathcal{R}(-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho})$$

∨

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}^{*\top} \boldsymbol{\rho}) \wedge \mathcal{R}(-\mathbf{x}^{*\top} \boldsymbol{\rho}) > \mathcal{R}(-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}).$$

Eficientné portfólio je také, že neexistuje iné portfólio s vyšším očakávaným výnosom a nižším alebo rovnakým rizikom alebo rovnakým očakávaným výnosom a nižším rizikom.

Pre výpočet je možné mean-risk model zapísať troma ekvivalentnými spôsobmi podľa [6]:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbb{E}(Y) - \kappa \mathcal{R}(L) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbb{E}(Y) \\ \text{za podmienky} & \quad \mathcal{R}(L) \leq q_{max} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathcal{R}(L) \\ \text{za podmienky} & \quad \mathbb{E}(Y) \geq r_{min} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Formulácia (2.1) maximalizuje očakávaný výnos upravený o riziko, kde κ je parameter modelujúci investorov vzťah k riziku. Ďalšia formulácia (2.2) maximalizuje očakávaný výnos pri danej maximálnej hodnote rizika q_{max} , ktoré je investor ochotný podstúpiť. Tretia formulácia (2.3) minimalizuje riziko pri danej minimálnej hodnote pre očakávaný výnos r_{min} z portfólia.

Pre účely tejto práce využijeme poslednú zmienenu formuláciu. Jedným z dôvodov je napr. pohľad investora, ktorý má zväčša svoju konkrétnu predstavu o výške výnosu, zatiaľ čo riziko vníma viac subjektívne. Odlišnosť mier rizika a ich interpretovateľnosť je ďalším z dôvodov.

Model - Smerodajná odchýlka

Eficientné portfólio hľadáme minimalizáciou rizika za podmienky získania aspoň minimálneho požadovaného očakávaného výnosu.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sigma(\mathbf{x}) \\ \text{za podmienok} & \quad \mathbb{E}(\mathbf{x}^T \boldsymbol{\rho}) \geq r_{min} \\ & \quad \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & \quad x_i \in \mathbb{R}_0^+, i = 0, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde r_{min} je minimálny požadovaný očakávaný výnos. Podmienka nezápornosti premenných znamená, že predaje na krátko (shortsales) neuvažujeme.

KAPITOLA 2. OPTIMALIZAČNÉ MODELY

Táto obdoba Markowitzovho modelu však pracuje s predpokladom nekonečnej deliteľnosti aktív. V tržných podmienkach je investor penalizovaný za nákup iných ako štandardne veľkých balíkov aktív alebo nákup nie je umožnený. Z tohoto dôvodu pridávame podmienku celočíselnosti:

$$z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N,$$

kde \mathbf{z} je vektor, ktorého zložky predstavujú počet kusov nakúpených aktív z daného druhu. Premenná x_i sa dá zapísať ako:

$$x_i = c_i \cdot z_i, \tag{2.5}$$

kde c_i je cena i -teho aktíva a cenu bezrizikového aktíva c_0 zavádzame $c_0 = 1$.

Konečný model so zahrnutím podmienky celočíselnosti (2.5) vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x}} \\ \text{za podmienok} \quad & \mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \geq r_{min} \\ & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\ & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Model - VaR

Optimalizačnú úlohu formulujeme obecné opäť podľa (2.3) pre mieru rizika VaR ako:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) \\ \text{za podmienok} \quad & \mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \geq r_{min} \\ & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\ & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N, \end{aligned} \tag{2.7}$$

kde r_{min} je minimálny požadovaný očakávaný výnos, krátke predaje (shortsales) neuvažujeme a \mathbf{z} je vektor, ktorého zložky predstavujú počet kusov nakúpených aktív z daného druhu pri cenách \mathbf{c} .

Uvažujme diskkrétne pravdepodobnostné rozdelenie vektora výnosov $\boldsymbol{\rho}$, ktorého realizácie sú rovnako pravdepodobné. Označme S počet scenárov vývoja výnosov pre každé z N aktív. Vývoj výnosu aktív v s -tom scenári je daný vektorom $\boldsymbol{\rho}^s$ pre $s = 1, \dots, S$. Pre takéto diskkrétne pravdepodobnostné rozdelenie sa úloha (2.7) podľa [16] dá prepísať do vhodného tvaru

$$\begin{aligned}
 & \min_{\nu, \mathbf{x}, \delta^j} \nu \\
 & \text{za podmienok} \quad -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s \leq \nu + M\delta^s, s = 1, \dots, S \\
 & \quad \sum_{s=1}^S \delta^s = \lfloor (1 - \alpha)S \rfloor \\
 & \quad \delta^s \in \{0, 1\}, s = 1, \dots, S \\
 & \quad \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s \geq r_{min} \\
 & \quad \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & \quad x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & \quad z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

kde M je dostatočne veľká konštanta taká, že $M \geq \max_{i,j} \rho_i^s - \min_{i,s} \rho_i^s$ a $\lfloor y \rfloor$ označuje celú dolnú časť čísla y , tzn. $\lfloor y \rfloor = \max \{n \in \mathbb{N}_0, n \leq y\}$ pre $y \in \mathbb{R}^+$.

Model - CVaR

Optimalizačnú úlohu s mierou rizika CVaR formulujeme podobne ako v prípade VaR. Aby sme však mohli túto úlohu upraviť pre praktickú aplikáciu, potrebujeme nasledujúce tvrdenie z Rockafeller a Uryasev [23].

Tvrdenie 2.2 (Minimalizačná formula pre CVaR). *Nech $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ je stratová funkcia portfólia a $0 < \alpha < 1$. Potom $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$ získavame vyriešením úlohy*

$$\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \min_{\mu} \left(\mu + \frac{1}{(1 - \alpha)} \mathbb{E} [[L - \mu]^+] \right),$$

kde $[t]^+ = \max[0, t]$. Riešením úlohy je uzavretý interval optimálnych hodnôt $\mu^* \in \langle \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}), \text{VaR}_\alpha^+(\mathbf{x}) \rangle$, prípadne sa redukuje na jediný bod $y^* = \text{VaR}_\alpha(\mathbf{x})$.

Potom úlohu formulujeme s využitím predchádzajúceho tvrdenia:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}, \mu} \left(\mu + \frac{1}{(1-\alpha)} \mathbb{E} [[L - \mu]^+] \right) \\
 & \text{za podmienok } \mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \geq r_{\min} \\
 & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Obdobne ako pre predchádzajúce miery rizika predpokladajme diskkrétne rozdelenie $\boldsymbol{\rho}$. Potom stratová funkcia $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ bude mať diskkrétne rozdelenie. Pre konečný počet scenárov môžeme modelovať riziko nasledovne:

Tvrdenie 2.3 (CVaR a diskkrétne scenáre). *Nech náhodný vektor výnosov $\boldsymbol{\rho}$ má diskkrétne rozdelenie. Potom rozdelenie straty L pre pevné $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ bude mať takisto diskkrétne rozdelenie sústredené v konečne mnoho bodoch $l_1 < l_2 < \dots < l_S$ s pravdepodobnosťami $P(L = l_s) = p_s, \sum_{s=1}^S p_s = 1$. Nech $s_\alpha, 0 < \alpha < 1$, je taký index, pre ktorý platí*

$$\sum_{s=1}^{s_\alpha-1} p_s < \alpha \leq \sum_{s=1}^{s_\alpha} p_s.$$

Potom

$$\text{VaR}_\alpha(\mathbf{x}) = l_{s_\alpha}$$

a

$$\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\left(\sum_{s=1}^{s_\alpha} p_s - \alpha \right) s_\alpha + \sum_{s=s_\alpha+1}^S p_s l_s \right].$$

Dôkaz tohto tvrdenia je možné nájsť v Rockafeller a Uryasev [23].

Z tvrdenia o minimalizačnej formule pre CVaR formulujeme dôsledok pre konečný počet scenárov.

Dôsledok 2.4. *Nech náhodný vektor výnosov $\boldsymbol{\rho}$ má diskkrétne rozdelenie koncentrované v konečne mnoho bodoch $\boldsymbol{\rho}^s$ s pravdepodobnosťami p_s , kde $s = 1, \dots, S$. Potom $\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x})$ získavame vyriešením úlohy*

$$\text{CVaR}_\alpha(\mathbf{x}) = \min_{\mu} \left(\mu + \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{s=1}^S p_s \left[[-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s - \mu]^+ \right] \right).$$

Pre rovnako pravdepodobné scenáre platí $p_s = \frac{1}{S}, j = 1, \dots, S$. Môžeme teda podobne ako v [21] formulovať minimalizačnú úlohu ako úlohu lineárneho celočíselného programovania:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}, \mu} \quad & \mu + \frac{1}{(1-\alpha)S} \sum_{s=1}^S t_s \\
 \text{za podmienok} \quad & t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s - \mu, s = 1, \dots, S \\
 & t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\
 & \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s \geq r_{min} \\
 & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Je možné dokázať, viď [23], že všetky optimálne riešenia μ^* v predchádzajúcej úlohe ležia v intervale $\langle \text{VaR}_\alpha(-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}), \text{VaR}_{(\alpha)}^+(-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \rangle$.

2.2 Model s úžitkovou funkciou

Ako sme si popísali v predchádzajúcej kapitole, v teorii úžitku popisuje investovateľ postoj k riziku tvar úžitkovej funkcie. Na rozdiel od mean-risk modelov neformulujeme viackriteriálny model, ale maximalizujeme očakávaný úžitok z konečného bohatstva investora, ktorý dosahuje uskutočnením rozhodnutia \mathbf{x} .

$$\begin{aligned}
 \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & \mathbb{E}u(\mathbf{x}^\top \mathbf{1} + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \\
 \text{za podmienok} \quad & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

kde opäť \mathbf{z} je vektor, ktorého zložky predstavujú počet kusov nakúpených aktív z daného druhu pri cenách \mathbf{c} .

Kapitola 3

Metóda najhoršieho prípadu

V optimalizačných modeloch zvyčajne predpokladáme presnú znalosť vstupných dát a zanedbávame neurčitost', ktorá sa v dátach vyskytuje. Hlavnými dôvodmi sú: nepresnosť meraní, nedostupnosť informácie v čase uskutočnenia investorovho rozhodnutia, zjednodušenia učené pri vytváraní matematického modelu a iné. Tieto skutočnosti nás motivujú k používaniu optimalizačných metód, ktoré sú imúnne voči neurčitosti v dátovej základni. Malé zmeny vo vstupných dátach by mali zachovať výstup v blízkosti pôvodného výstupu a veľké zmeny by nemali spôsobiť katastrofálne dôsledky.

Na vektor výnosov z aktív môžeme nahliadať dvojakým spôsobom: buď ako na vektor parametrov alebo vektor náhodných veličín. V tejto kapitole uvedieme v krátkosti parametrický prístup a pre náhodný vektor výnosov budeme hľadať ne-senzitívne optimálne alebo skoro optimálne riešenia, ktoré budú rezistentné voči malým zmenám v hodnotách scenárov alebo ich pravdepodobnostiach diskretného pravdepodobnostného rozdelenia.

Základné metódy používané pri štúdiu robustnosti:

- prístupy postoptimality a analýzy senzitivity [10],
- analýza najhoršieho prípadu [11], [30],
- metóda kontaminácie [5],
- simulačné štúdie predchádzajúce aplikáciám v reálnom živote [29].

3.1 Deterministický model - $\bar{\rho}$ parameter

Téme robustnej optimalizácie sa v posledných desaťročiach venovala veľká skupina autorov. Pre zavedenie robustného modelu s ρ ako parametrom použijeme formuláciu od Ben Tal a Nemirovski z [2] a [3]. Riešime parametrickú úlohu

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & f(\mathbf{x}, \bar{\rho}) \\ \text{za podmienok} \quad & g(\mathbf{x}, \bar{\rho}) \in K, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $f(\mathbf{x}, \bar{\rho})$ je účelová funkcia závislá na investorovom rozhodnutí $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ a vektore výnosov $\bar{\rho} \in \mathbb{R}^{M'}$, K je konvexný kužeľ.

Predpokladáme, že data sa odchyľujú v rámci množiny $\mathcal{U}_D \subset \mathbb{R}^{M'}$ a podmienka $g(\mathbf{x}, \bar{\rho}) \in K$ musí byť splnená pre akýkoľvek vektor $\bar{\rho} \in \mathcal{U}_D$. Neurčitú optimalizačnú úlohu zapíšeme nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & f(\mathbf{x}, \bar{\rho}) \\ \text{za podmienok} \quad & g(\mathbf{x}, \bar{\rho}) \in K \quad \forall \bar{\rho} \in \mathcal{U}_D. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vektor \mathbf{x} je prípustné riešenie úlohy (3.2), ak \mathbf{x} splňuje obmedzenie $g(\mathbf{x}, \bar{\rho}) \in K$ pre všetky parametre $\bar{\rho} \in \mathcal{U}_D$. Pre optimálne riešenie úlohy (3.2) v najhoršom prípade, musíme hľadať najlepšiu možnú hodnotu účelovej funkcie cez parameter $\bar{\rho} \in \mathcal{U}_D$. Potom určitá optimalizačná úloha vyzera nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & \sup_{\bar{\rho} \in \mathcal{U}_D} f(\mathbf{x}, \bar{\rho}) \\ \text{za podmienok} \quad & g(\mathbf{x}, \bar{\rho}) \in K \quad \forall \bar{\rho} \in \mathcal{U}_D. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definícia 3.1. Prípustné/optimálne riešenie úlohy (3.3) nazývame *robustné prípustné/optimálne riešenie* neurčitej optimalizačnej úlohy (3.2). Optimálnu hodnotu úlohy (3.3) nazveme *robustná optimálna hodnota* neurčitej optimalizačnej úlohy (3.2). Samotnú úlohu (3.3) nazveme *robustné rozšírenie úlohy* (3.2).

Zainteresovaný čitateľ nájde rozšírené podrobnejšie informácie o rôznych typoch úloh, o definovaní a vymedzení množiny neurčitosti \mathcal{U}_D , o spôsoboch riešenia a množstvo praktických aplikácií v [2] a [3] a v ich odkazoch.

3.2 Stochastický model - ρ náhodný vektor

Stratová funkcia z 1. kapitoly $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ je funkciou vektoru $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ a náhodného vektoru $\boldsymbol{\rho}$ s pravdepodobnostným rozdelením p , ktoré nezávisí na vektore \mathbf{x} . Takisto použijeme značenie z 1. kapitoly náhodného výnosu $Y = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$. Riešime úlohu

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & \mathcal{R}(L) \\ \text{za podmienok} \quad & \mathbb{E}(Y) \geq r_{min}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde \mathcal{R} je rizikový funkcionál. Obecne formulujeme robustnú úlohu nasledovne

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sup_{p \in \mathcal{P}} \quad & \mathcal{R}_p(L) \\ \text{za podmienok} \quad & \mathbb{E}_p(Y) \geq r_{min} \quad \forall p \in \mathcal{P}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde \mathcal{P} je množina uvažovaných pravdepodobnostných rozdelení.

Definícia 3.2. Nech $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ je stratová funkcia, kde \mathbf{x} je rozhodnutie investora a $\boldsymbol{\rho}$ je náhodný vektor s pravdepodobnostným rozdelením $p \in \mathcal{P}$. Nech $\mathcal{R}: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ je miera rizika. Potom definujeme *mieru rizika v najhoršom prípade* \mathcal{R}^{WC} k miere rizika \mathcal{R} ako

$$\mathcal{R}^{WC}(L) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{R}(L).$$

3.2.1 Neúplná informácia v hodnotách

Zmeny pravdepodobnostného rozdelenia v rámci množiny \mathcal{P} v úlohe (3.5) môžeme uvažovať viacerými spôsobmi. Predpokladajme diskkrétne rozdelenie, kde S je počet scenárov vývoja výnosov pre každé z N aktív. Výnos aktív v s -tom scenári je daný vektorom $\boldsymbol{\rho}^s$ pre $s = 1, \dots, S$ s pravdepodobnosťami p_s , kde $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ a $p_s \geq 0$ pre $s = 1, \dots, S$.

V prvom prípade sa budeme zaoberať odchýlkami, ktoré môžu nastať v hodnotách scenárov pravdepodobnostného rozdelenia. Hodnoty scenárov budú obmedzené v rámci množiny \mathcal{U} . Pravdepodobnosti scenárov zachováme rovnaké, a teda platí $p_s = \frac{1}{S}$, $s = 1, \dots, S$. Množinu \mathcal{P} v tomto prípade zapíšeme ako $\mathcal{P}^{\mathcal{U}}$ nasledovne

$$\mathcal{P}^{\mathcal{U}} = \left\{ p : (\boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^S) \in \mathcal{U}, p_s = \frac{1}{S}, s = 1, \dots, S \right\}. \tag{3.6}$$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Úlohu (3.5) si tak preformulujeme na nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sup_{(\boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^S) \in \mathcal{U}} \mathcal{R}(-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \\ & \text{za podmienok } \mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \geq r_{\min} \quad \forall (\boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^S) \in \mathcal{U}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Množinu \mathcal{U} môžeme definovať viacerými spôsobmi. Zavedieme si \mathcal{U}^B ako „box“

$$\mathcal{U}^B = \left\{ (\boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^S) : (\boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^S) = (\boldsymbol{\rho}'^1, \dots, \boldsymbol{\rho}'^S) - (\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S), (\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S) \in \mathcal{V} \right\}, \quad (3.8)$$

kde $\boldsymbol{\rho}'^s$ sú hodnoty scenárov získané z dát a $\boldsymbol{\epsilon}^s$ sú možné odchýlky od skutočných hodnôt pre $s = 1, \dots, S$.

Uvažujeme dva špeciálne prípady množiny \mathcal{V} . Množina \mathcal{V}_E definuje pre rôzne scenáre rovnaké odchýlky

$$\mathcal{V}_E = \left\{ (\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \leq \boldsymbol{\epsilon}^s \leq \bar{\boldsymbol{\epsilon}}, s = 1, \dots, S \right\} \quad (3.9)$$

s $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_i \leq 0$ a $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_i \geq 0$ pre $i = 1, \dots, N$. Množina \mathcal{V}_{UE} definuje pre rôzne scenáre rôzne odchýlky

$$\mathcal{V}_{UE} = \left\{ (\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S) : \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^s \leq \boldsymbol{\epsilon}^s \leq \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^s, s = 1, \dots, S \right\} \quad (3.10)$$

s $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_i^s \leq 0$ a $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_i^s \geq 0$ pre $i = 1, \dots, N$.

Robustnú úlohu pre mieru rizika CVaR s hodnotami scenárov obmedzenými v rámci boxu si zapíšeme nasledovne:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mu} \max_{(\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S)} \mu + \frac{1}{(1 - \alpha)S} \sum_{s=1}^S t_s \\ & \text{za podmienok } t_s \geq -\mathbf{x}^\top (\boldsymbol{\rho}'^s - \boldsymbol{\epsilon}^s) - \mu, s = 1, \dots, S \\ & \quad t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\ & \quad \min_{(\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S)} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}^\top (\boldsymbol{\rho}'^s - \boldsymbol{\epsilon}^s) \geq r_{\min} \\ & \quad \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & \quad \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^s \leq \boldsymbol{\epsilon}^s \leq \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^s, s = 1, \dots, S \\ & \quad x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\ & \quad z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Aby sme formulovanú úlohu (3.11) mohli riešiť, budeme potrebovať nasledujúce dve tvrdenia. Prvé tvrdenie uvedené a dokázané v [30] nám zachováva vlastnosť koherencie pre mieru rizika v najhoršom prípade odvodenú od koherentnej miery rizika.

Tvrdenie 3.3. *Nech $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ je stratová funkcia, $\mathcal{R}(L)$ je koherentná miera rizika, potom miera rizika v najhoršom prípade $\mathcal{R}^{WC}(L)$ zostáva koherentnou mierou rizika.*

Druhé tvrdenie uvedené v [11] umožňuje dekompozíciu koherentnej miery rizika v najhoršom prípade pre diskkrétne rozdelenie.

Tvrdenie 3.4 (Dekompozícia koherentnej miery rizika v najhoršom prípade). *Nech náhodný vektor výnosov $\boldsymbol{\rho}$ má diskkrétne rozdelenie koncentrované v konečne mnoho bodoch $\boldsymbol{\rho}^s$ s pravdepodobnosťami p_s a platí $\boldsymbol{\rho}^s = \boldsymbol{\rho}'^s - \boldsymbol{\epsilon}^s$ pre $s = 1, \dots, S$, kde $\boldsymbol{\rho}'^s$ sú získané scenáre a $\boldsymbol{\epsilon}^s \in \mathcal{V}$ odchýlky od skutočných hodnôt. Potom rozdelenie straty portfólia $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ a $L' = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}'$ pre pevné $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ bude mať diskkrétne rozdelenie. Nech $\mathcal{R}^{WC}(L)$ je koherentná miera rizika v najhoršom prípade príslušná k $\mathcal{R}(L')$. Potom*

$$\mathcal{R}^{WC}(L) = \mathcal{R}(L') + \max_{(\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S) \in \mathcal{V}} \sum_{s=1}^S p_s \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\epsilon}^s.$$

Dôkaz. Podľa [1] môžeme koherentnú mieru rizika zapísať $\mathcal{R}^{WC}(L) = \sup_{p \in \mathcal{P}} E_p(L)$, kde \mathcal{P} je konvexná kompaktná množina pravdepodobnostných rozdelení. Potom

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{WC}(-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) &= \max_{(\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S) \in \mathcal{V}} \left\{ - \sum_{s=1}^S p_s \mathbf{x}^\top (\boldsymbol{\rho}'^s - \boldsymbol{\epsilon}^s) \right\} \\ &= \max_{(\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S) \in \mathcal{V}} \left\{ - \sum_{s=1}^S p_s \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}'^s + \sum_{s=1}^S p_s \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\epsilon}^s \right\}. \end{aligned}$$

□

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Použitím predchádzajúcich dvoch tvrdení preformulujeme minimalizačnú úlohu (3.11) pre koherentnú mieru rizika nasledovne

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}, \mu} \quad & \mu + \frac{1}{(1-\alpha)S} \sum_{s=1}^S t_s + \max_{(\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S)} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\epsilon}^s \\
 \text{za podmienok} \quad & t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}'^s - \mu, s = 1, \dots, S \\
 & t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\
 & \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}'^s + \min_{(\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S)} \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\epsilon}^s \geq r_{min} \\
 & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^s \leq \boldsymbol{\epsilon}^s \leq \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^s, s = 1, \dots, S \\
 & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Pre vnútornú úlohu úlohy (3.12)

$$\begin{aligned}
 \max_{(\boldsymbol{\epsilon}^1, \dots, \boldsymbol{\epsilon}^S)} \quad & \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\epsilon}^s \\
 \text{za podmienok} \quad & \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^s \leq \boldsymbol{\epsilon}^s \leq \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^s, \quad s = 1, \dots, S
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

si sformulujeme duálnu úlohu

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{b}, \mathbf{b}'} \quad & \mathbf{b}^\top \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^s + \mathbf{b}'^\top \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^s \\
 \text{za podmienok} \quad & \mathbf{b} + \mathbf{b}' = \mathbf{x} \\
 & \mathbf{b} \leq 0, \mathbf{b}' \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Využitím duality lineárneho programovania pre úlohu (3.12) dostávame optimačnú úlohu:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}, \mu, \mathbf{b}, \mathbf{b}'} \quad & \mu + \frac{1}{(1-\alpha)S} \sum_{s=1}^S t_s + (\mathbf{b}^\top \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^s + \mathbf{b}'^\top \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^s) \\
 \text{za podmienok} \quad & t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}'^s - \mu, s = 1, \dots, S \\
 & t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\
 & \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}'^s - (\mathbf{b}^\top \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^s + \mathbf{b}'^\top \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^s) \geq r_{min} \\
 & \mathbf{b} + \mathbf{b}' = \mathbf{x} \\
 & \mathbf{b} \leq 0, \mathbf{b}' \geq 0 \\
 & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nech $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*, \mu^*)$ je riešením úlohy (3.15), potom $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, \mu^*)$ rieši úlohu (3.11). Naopak platí, ak $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, \mu^*)$ je riešením úlohy (3.11), potom $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*, \mu^*)$ rieši úlohu (3.15), kde $(\mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*)$ je optimálnym riešením duálnej úlohy (3.14).

Ak uvažujeme podmienku (3.9), úloha sa zjednoduší $\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^s = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ a $\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \overline{\boldsymbol{\epsilon}}^s = \overline{\boldsymbol{\epsilon}}$. Pokiaľ nastane rovnosť $\overline{\boldsymbol{\epsilon}} = \underline{\boldsymbol{\epsilon}}$, úloha sa redukuje na pôvodnú úlohu (2.10).

3.2.2 Neúplná informácia v pravdepodobnostiach

V ďalšom prípade sa budeme zaoberať odchýlkami, ktoré môžu nastať v pravdepodobnostiach scenárov pravdepodobnostného rozdelenia p . Pravdepodobnosti rozdelenia budú obmedzené v rámci množiny \mathcal{Q} . Hodnoty scenárov pravdepodobnostného rozdelenia ostávajú nemenné. V tomto prípade zapíšeme množinu \mathcal{P} ako $\mathcal{P}^{\mathcal{Q}}$ nasledovne

$$\mathcal{P}^{\mathcal{Q}} = \{p : \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_S)^\top \in \mathcal{Q}\} \tag{3.16}$$

Robustnú úlohu formulujeme ako

$$\begin{aligned}
 \min \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & \mathcal{R}(-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \\
 \text{za podmienok} \quad & \mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \geq r_{min} \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{Q}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Množinu \mathcal{Q} môžeme definovať viacerými spôsobmi. Zdefinujeme si \mathcal{Q}^B ako „box“ nasledovne

$$\mathcal{Q}^B = \{ \mathbf{p} : \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{e}^\top \boldsymbol{\eta} = 0, \quad \underline{\boldsymbol{\eta}} \leq \boldsymbol{\eta} \leq \bar{\boldsymbol{\eta}} \}, \quad (3.18)$$

kde \mathbf{p}' je vektor pravdepodobností náhodného vektoru $\boldsymbol{\rho}$, \mathbf{e} je vektor jedničiek a $\underline{\boldsymbol{\eta}}, \bar{\boldsymbol{\eta}}$ sú také zvolené vektory konštant, že $\mathbf{p}' + \bar{\boldsymbol{\eta}} \geq \mathbf{0}$ a $\mathbf{p}' + \underline{\boldsymbol{\eta}} \geq \mathbf{0}$. Podmienka $\mathbf{e}^\top \boldsymbol{\eta} = 0$ zaručuje, že p ostane pravdepodobnostné rozdelenie. Úlohu pre CVaR sformulujeme ako

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mu} \max_{\boldsymbol{\eta}} \quad \mu + \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{s=1}^S (p'_s + \eta_s) t_s \\ & \text{za podmienok} \quad t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s - \mu, s = 1, \dots, S \\ & \quad \quad \quad t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\ & \min_{\boldsymbol{\eta}} \quad \sum_{s=1}^S (p'_s + \eta_s) \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s \geq r_{min} \\ & \quad \quad \quad \underline{\eta}_s \leq \eta_s \leq \bar{\eta}_s, s = 1, \dots, S \\ & \quad \quad \quad \mathbf{e}^\top \boldsymbol{\eta} = 0 \\ & \quad \quad \quad \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & \quad \quad \quad x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\ & \quad \quad \quad z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Prepíšeme si účelovú funkciu nasledujúcim spôsobom

$$\mu + \frac{1}{(1-\alpha)} (\mathbf{p})^\top \mathbf{t} = \mu + \frac{1}{(1-\alpha)} (\mathbf{p}')^\top \mathbf{t} + \frac{1}{(1-\alpha)} \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{t}$$

a k lineárnej úlohe

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\eta}} \quad \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{t} \\ & \text{za podmienok} \quad \mathbf{e}^\top \boldsymbol{\eta} = 0 \\ & \quad \quad \quad \underline{\boldsymbol{\eta}} \leq \boldsymbol{\eta} \leq \bar{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

si sformulujeme duálnu úlohu

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{b}, \mathbf{b}', a'} \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{b} + \underline{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{b}' \\ & \text{za podmienok} \quad \mathbf{e} a' + \mathbf{b} + \mathbf{b}' = \mathbf{t} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b}' \leq \mathbf{0}, a' \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Označme si \mathbf{R} maticu hodnôt scenárov výnosov $\mathbf{R} = (\boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^S)$. Podmienku na minimálny najhorší výnos, ktorý investor požaduje, si prepíšeme do nasledujúceho tvaru

$$\sum_{s=1}^S p'_s \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s + \min_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{s=1}^S \eta_s \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s \geq r_{min}$$

a k lineárnej úlohe

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\eta}} \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \boldsymbol{\eta} \\ & \text{za podmienok} \quad \mathbf{e}^\top \boldsymbol{\eta} = 0 \\ & \quad \underline{\boldsymbol{\eta}} \leq \boldsymbol{\eta} \leq \bar{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \tag{3.22}$$

si zapíšeme duálnu úlohu

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{c}, \mathbf{c}', a} \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{c} + \underline{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{c}' \\ & \text{za podmienok} \quad \mathbf{e}a + \mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{R}^\top \mathbf{x} \\ & \quad \mathbf{c} \leq \mathbf{0}, \mathbf{c}' \geq \mathbf{0}, a \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Potom finálny prepis úlohy (3.19) vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned} & \min_{\mu, \mathbf{x}, a, a', \mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{c}, \mathbf{c}'} \quad \mu + \frac{1}{(1-\alpha)} \mathbf{p}'^\top \mathbf{t} + \frac{1}{(1-\alpha)} (\bar{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{b} + \underline{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{b}') \\ & \text{za podmienok} \quad t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s - \mu, s = 1, \dots, S \\ & \quad t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\ & \quad \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \mathbf{p}' + \bar{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{c} + \underline{\boldsymbol{\eta}}^\top \mathbf{c}' \geq r_{min} \\ & \quad \mathbf{e}a' + \mathbf{b} + \mathbf{b}' = \mathbf{t} \\ & \quad \mathbf{e}a + \mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{R}^\top \mathbf{x} \\ & \quad \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \mathbf{b}' \leq \mathbf{0}, a' \in \mathbb{R} \\ & \quad \mathbf{c} \leq \mathbf{0}, \mathbf{c}' \geq \mathbf{0}, a \in \mathbb{R} \\ & \quad x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\ & \quad z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.24}$$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Nech $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, a^*, a'^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{c}'^*, \mu^*)$ je riešením úlohy (3.24), potom $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, \mu^*)$ rieši úlohu (3.19). Naopak platí, ak $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, \mu^*)$ je riešením úlohy (3.19), potom $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, a^*, a'^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{c}'^*, \mu^*)$ rieši úlohu (3.24), kde $(a^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*)$ je optimálnym riešením v duálnej úlohe (3.21) a $(a^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{c}'^*)$ je zas optimálnym riešením duálnej úlohy (3.23).

Keď nastane rovnosť $\bar{\boldsymbol{\eta}} = \underline{\boldsymbol{\eta}}$, úloha sa redukuje na pôvodnú úlohu (2.10).

Uvažujme množinu \mathcal{Q}^E „elipsoid“ definovanú ako

$$\mathcal{Q}^E = \{ \mathbf{p} : \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}, \mathbf{e}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = 0, \mathbf{p}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \geq 0, \|\boldsymbol{\eta}\| \leq 1 \}, \quad (3.25)$$

kde \mathbf{p}' je vektor pravdepodobností tvoriaci stred elipsoidu, $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{S \times S}$ je škálovacia matica a $\|\boldsymbol{\eta}\| = \sqrt{\boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{\eta}}$. Podmienka $\mathbf{e}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = 0$ a $\mathbf{p}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \geq 0$ zaručuje, že \mathbf{p} ostane vektorom pravdepodobností.

Úlohu pre CVaR sformulujeme ako

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}, \mu} \max_{\boldsymbol{\eta}} \quad \mu + \frac{1}{(1-\alpha)} (\mathbf{p}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta})^\top \mathbf{t} \\ & \text{za podmienok} \quad t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s - \mu, s = 1, \dots, S \\ & \quad \quad \quad t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\ & \min_{\boldsymbol{\eta}} \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{R}(\mathbf{p}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}) \geq r_{min} \\ & \quad \quad \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = 0, \mathbf{p}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \geq 0, \|\boldsymbol{\eta}\| \leq 1 \\ & \quad \quad \quad \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & \quad \quad \quad x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\ & \quad \quad \quad z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Potom pre úlohu

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\eta}} \quad \mathbf{t}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \\ & \text{za podmienok} \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = 0 \\ & \quad \quad \quad \mathbf{p}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\eta} \geq 0 \\ & \quad \quad \quad \|\boldsymbol{\eta}\| \leq 1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

si sformulujeme duálnu úlohu

$$\begin{aligned}
 & \min_{a, a', \mathbf{b}, \mathbf{b}'} \quad a' + \mathbf{p}'^\top \mathbf{b} \\
 & \text{za podmienok} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{e} a - \mathbf{A}^\top \mathbf{b} - \mathbf{b}' = \mathbf{A}^\top \mathbf{t} \\
 & \quad \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \|\mathbf{b}'\| \leq a' \\
 & \quad a' \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Podmienku najhoršieho minimálneho výnosu, ktorý investor požaduje, si prepíšeme do nasledujúceho tvaru

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{R} \mathbf{p}' + \min_{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} \geq r_{min}$$

a k tejto úlohe

$$\begin{aligned}
 & \min_{\boldsymbol{\eta}} \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} \\
 & \text{za podmienok} \quad \mathbf{e}^\top \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} = 0 \\
 & \quad \mathbf{p}' + \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} \geq \mathbf{0} \\
 & \quad \|\boldsymbol{\eta}\| \leq 1
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

formulujeme duálnu úlohu

$$\begin{aligned}
 & \max_{d, d', \mathbf{c}, \mathbf{c}'} \quad -d' - \mathbf{p}'^\top \mathbf{c} \\
 & \text{za podmienok} \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{e} d + \mathbf{A}^\top \mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{A}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{x} \\
 & \quad \mathbf{c} \geq \mathbf{0}, \|\mathbf{c}'\| \leq d' \\
 & \quad d' \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Finálny prepis úlohy (3.26) vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned}
 \min_{\mu, \mathbf{x}, a, a', \mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{c}, \mathbf{c}', d, d'} \quad & \mu + \frac{1}{(1-\alpha)} \mathbf{p}'^\top \mathbf{t} + \frac{1}{(1-\alpha)} (a' + \mathbf{p}'^\top \mathbf{b}) \\
 \text{za podmienok} \quad & t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s - \mu, s = 1, \dots, S \\
 & t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\
 & \mathbf{x}^\top \mathbf{R} \mathbf{p}' - d' - \mathbf{p}'^\top \mathbf{c} \geq r_{min} \\
 & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & \mathbf{A}^\top \mathbf{e} a - \mathbf{A}^\top \mathbf{b} - \mathbf{b}' = \mathbf{A}^\top \mathbf{t} \\
 & \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \|\mathbf{b}'\| \leq a', a' \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \\
 & \mathbf{A}^\top \mathbf{e} d + \mathbf{A}^\top \mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{A}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{x} \\
 & \mathbf{c} \geq \mathbf{0}, \|\mathbf{c}'\| \leq d', d' \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \\
 & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Nech $(\mu^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, a^*, a'^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{c}'^*, d^*, d'^*)$ je rieši úlohu (3.31), potom $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, \mu^*)$ je riešením úlohy (3.26). Naopak platí, ak $(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, \mu^*)$ je riešením úlohy (3.26), potom $(\mu^*, \mathbf{x}^*, \mathbf{t}^*, a^*, a'^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{c}'^*, d^*, d'^*)$ rieši úlohu (3.31), kde $(a^*, a'^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{b}'^*)$ je optimálnym riešením duálnej úlohy (3.28) a $(\mathbf{c}^*, \mathbf{c}'^*, d^*, d'^*)$ je optimálnym riešením duálnej úlohy (3.30).

Keď nastane prípad $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, úloha sa redukuje na pôvodnú minimalizačnú úlohu (2.10).

3.2.3 Neúplná informácia v hodnotách a pravdepodobnostiach

Kombináciou predošlých dvoch prístupov dostávame úlohu, v ktorej dochádza k zmene hodnôt a zároveň k zmene pravdepodobnosti scenárov pravdepodobnostného rozdelenia. Aby sme si mohli úlohu sformulovať, potrebujeme zaviesť vzdialenosť medzi dvoma pravdepodobnostnými rozdeleniami. Pre naše účely si z [22] zadefinujeme *Kolmogorovu metriku*.

Definícia 3.5 (Kolmogorova metrika). Nech $\boldsymbol{\rho}$ a $\boldsymbol{\rho}'$ sú N -rozmerné náhodné vektory a $F_{\boldsymbol{\rho}}, G_{\boldsymbol{\rho}'}$ sú ich distribučné funkcie. Potom *Kolmogorova vzdialenosť* distribučných funkcií $F_{\boldsymbol{\rho}}$ a $G_{\boldsymbol{\rho}'}$ je definovaná ako

$$d_K(F_{\boldsymbol{\rho}}, G_{\boldsymbol{\rho}'}) = \sup_{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} |F_{\boldsymbol{\rho}}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) - G_{\boldsymbol{\rho}'}(\tilde{\boldsymbol{\rho}})|, \tilde{\boldsymbol{\rho}} \in \mathbb{R}^N,$$

kde

$$F_{\boldsymbol{\rho}}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbb{P} \left[\bigcap_{i=0}^N \{\rho_i \leq \tilde{\rho}_i\} \right], \tilde{\rho}_i \in \mathbb{R}, \text{ pre } i = 0, \dots, N,$$

$$G_{\boldsymbol{\rho}'}(\tilde{\boldsymbol{\rho}}) = \mathbb{P} \left[\bigcap_{i=0}^N \{\rho'_i \leq \tilde{\rho}_i\} \right], \tilde{\rho}_i \in \mathbb{R}, \text{ pre } i = 0, \dots, N.$$

Množinu \mathcal{P} pre kombinovaný prípad zmeny hodnôt aj pravdepodobností označíme $\mathcal{P}_{p'}^K$ a zapíšeme nasledovne

$$\mathcal{P}_{p'}^K = \{p : d_K(p, p') \leq \gamma\}, \quad (3.32)$$

kde p, p' sú pravdepodobnostné rozdelenia nadobúdajúce hodnoty $\boldsymbol{\rho}^s, \boldsymbol{\rho}'^s$ s pravdepodobnosťami p_s, p'_s pre $s = 1, \dots, S$ a $d_K(p, p')$ je Kolmogorova vzdialenosť dvoch pravdepodobnostných rozdelení p a p' , γ je zvolená konštanta.

Robustné rozšírenie pre úlohu s uvažovanými zmenami v hodnotách a v pravdepodobnostiach pravdepodobnostného rozdelenia zapíšeme nasledovne

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \sup_{p \in \mathcal{P}_{p'}^K} \mathcal{R}(L) \quad (3.33)$$

za podmienok $\mathbb{E}(Y) \geq r_{min} \quad \forall p \in \mathcal{P}_{p'}^K,$

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

kde $\mathcal{P}_{p'}^K$ je množina pravdepodobnostných rozdelení definovaná v (3.32). V tomto prípade úloha pre CVaR vyzerá nasledovne

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{x}, \mu} \max_{p \in \mathcal{P}_{p'}^K} \mu + \frac{1}{(1 - \alpha)} \sum_{s=1}^S p_s t_s \\
 & \text{za podmienok} \quad t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s - \mu, s = 1, \dots, S \\
 & \quad \quad \quad t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\
 & \min_{p \in \mathcal{P}_{p'}^K} \sum_{s=1}^S p_s \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s \geq r_{min} \\
 & \sup_{\tilde{\rho}} \left| \sum_{s \in S, \rho^s \leq \tilde{\rho}} p_s - \sum_{s \in S, \rho'^s \leq \tilde{\rho}} p'_s \right| \leq \gamma, \tilde{\rho} \in \mathbb{R}^N \\
 & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Podmienku na Kolmogorovu vzdialenosť si prepíšeme

$$-\gamma \leq \sum_{s \in S} p_s I(\boldsymbol{\rho}^s \leq \mathbf{k}) - \sum_{s \in S} p'_s I(\boldsymbol{\rho}'^s \leq \mathbf{k}) \leq \gamma, \quad \mathbf{k} = \boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^S, \boldsymbol{\rho}'^1, \dots, \boldsymbol{\rho}'^S.$$

Úloha (3.34) je zložitejšia ako úlohy predošlé a nemôžeme na ňu uplatniť obdobné postupy. Neumožňuje nám to podmienka na Kolmogorovu vzdialenosť, kde premenné \mathbf{p} a $\boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^S$ sú vzájomne v multiplikatívnom tvare. Vzhľadom k uvedeným skutočnostiam by sme hľadanie riešenia ponechali na potenciálneho záujemcu, ktorý by mohol vyskúšať aplikáciu iteračných postupov, ktoré striedavo fixujú premenné vnútornej a vonkajšej úlohy.

Uvažujeme ďalej neúplnú informáciu o pravdepodobnostnom rozdelení. Špeciálnym prípadom množiny \mathcal{P} je \mathcal{P}^M , ktorá je množinou pravdepodobnostných rozdelení daná prvými dvoma momentami

$$\mathcal{P}^M = \{p : \mathbb{E}[\boldsymbol{\rho}] = \boldsymbol{\mu}_\rho, \mathbb{E}[\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\mu}_\rho]^2 = \mathbf{V}_\rho\}, \tag{3.35}$$

kde $\boldsymbol{\mu}_\rho$ je daný vektor a \mathbf{V}_ρ je kovariančná matica.

KAPITOLA 3. METÓDA NAJHORŠIEHO PRÍPADU

Tvrdenie 3.6 (Jednostranná Čebyševova nerovnosť). *Nech $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ je stratová funkcia s pravdepodobnostným rozdelením so strednou hodnotou $\boldsymbol{\mu}_\rho^\top \mathbf{x}$ a rozptylom $\mathbf{x}^\top \mathbf{V}_\rho \mathbf{x}$. Potom pre hornú medzu distribučnej funkcie $\psi(\mathbf{x}, \zeta) = \mathbb{P}[L \leq \zeta]$ platí*

$$\sup_{p \in P^M} \mathbb{P}[L \leq \zeta] = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{V}_\rho \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{V}_\rho \mathbf{x} + (\boldsymbol{\mu}_\rho^\top \mathbf{x} - \zeta)^2} & \text{pre } \zeta < \boldsymbol{\mu}_\rho^\top \mathbf{x}, \\ 1 & \text{pre } \zeta \geq \boldsymbol{\mu}_\rho^\top \mathbf{x}. \end{cases}$$

S využitím predchádzajúceho tvrdenia z [14] a definície (3.2) miery rizika v najhoršom prípade formulujeme robustnú úlohu pre VaR nasledovne

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \quad & \boldsymbol{\mu}_\rho^\top \mathbf{x} + \kappa(\alpha) \sqrt{\mathbf{x}^\top \mathbf{V} \mathbf{x}} = \text{VaR}_\alpha^{WC}(\mathbf{x}) \\ \text{za podmienok} \quad & \mathbb{E}(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \geq r_{\min} \\ & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\ & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N, \end{aligned} \tag{3.36}$$

kde $\kappa(\alpha) = \sqrt{\alpha/(1-\alpha)}$.

Podľa [31] sa najhorší CVaR rovná nahoršiemu VaR pre pravdepodobnostné rozdelenia identifikované rovnakými prvými dvoma momentami. Potom pre $\zeta < \boldsymbol{\mu}_\rho^\top \mathbf{x}$ píšeme

$$\text{VaR}^{WC} = \text{CVaR}^{WC}.$$

V predchádzajúcich kapitolách sme si popísali úžitkové funkcie, ktorých tvar vyjadruje investorov postoj k riziku, a sformulovali model, ktorý maximalizuje očakávaný úžitok z konečného bohatstva investora. Pre model (2.11) si sformulujeme robustné rozšírenie:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \min_{p \in P^M} \quad & \mathbb{E}_p u(\mathbf{x}^\top \mathbf{1} + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}) \\ \text{za podmienok} \quad & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\ & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\ & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Pre úžitok modelovaný po častiach lineárnou funkciou a rozdelenie náhodného výnosú identifikované prvými dvoma momentami bola v [18] odvodená optimálna stratégia investora cez robustný model očakávaného úžitku.

Kapitola 4

Kontaminácia

Metóda kontaminácie sa mimo iného používa na analýzu vplyvu ďalších scenárov na riešenie optimalizačnej úlohy. Prvé teoretické výsledky a aplikáciu nájdeme v [4] a [5]. Riešime nasledujúcu optimalizačnú úlohu v tvare

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathcal{R}(L) \\ \text{za podmienok } \mathbb{E}(Y) \leq r_{min} \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde $L = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}$ je stratová funkcia vektoru $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N$ a náhodného vektoru $\boldsymbol{\rho}$ s pravdepodobnostným rozdelením p .

Hľadáme najlepšie robustné riešenie úlohy (4.1) za podmienok, kedy aproximujeme skutočné pravdepodobnostné rozdelenie p alebo pravdepodobnostné rozdelenie je známe iba čiastočne.

Kontaminácii nazývame metódu, kedy poruchy (neurčitosti) v pravdepodobnostnom rozdelení p sú modelované kontaminovaním tohoto pravdepodobnostného rozdelenia iným pevným pravdepodobnostným rozdelením q . V účelovej funkcii optimalizačnej úlohy (4.1) použijeme namiesto pôvodného pravdepodobnostného rozdelenia p parametrizované pravdepodobnostné rozdelenie p_λ v tvare:

$$p_\lambda = (1 - \lambda)p + \lambda q, \lambda \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (4.2)$$

Potom množinu prípustných riešení pre úlohu (4.1) s kontaminovaným pravdepodobnostným rozdelením p_λ zapíšeme ako

$$\mathcal{X}(p_\lambda) = \mathcal{X} \cap \{ \mathbf{x} \mid \mathbb{E}(-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}_\lambda) \leq r_{min} \}, \quad (4.3)$$

kde $\boldsymbol{\rho}_\lambda$ je náhodný vektor výnosov kontaminovaným pravdepodobnostným rozdelením p_λ .

Uvažujme diskkrétne rozdelenie p , kde S je počet scenárov výnosov pre každé z N aktív. Výnos aktív v s -tom scenári je daný vektorom $\boldsymbol{\rho}^s$ pre $s = 1, \dots, S$ s pravdepodobnosťami p_s , kde $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ a $p_s \geq 0$ pre $s = 1, \dots, S$. Ďalej uvažujme diskkrétne rozdelenie q , kde S' je počet scenárov výnosov pre všetkých N aktív. Výnos aktív v s' -tom scenári je daný vektorom $\boldsymbol{\rho}^{s'}$ pre $s' = 1, \dots, S'$ s pravdepodobnosťami $p_{s'}$, kde $\sum_{s'=1}^{S'} p_{s'} = 1$ a $p_{s'} \geq 0$ pre $s' = 1, \dots, S'$.

Použitím dôsledku (2.4) formulujeme pre rovnako pravdepodobné scenáre $p_s = \frac{1}{S}$, $s = 1, \dots, S$ a $p_{s'} = \frac{1}{S'}$, $s' = 1, \dots, S'$ minimalizačnú úlohu pre CVaR ako úlohu lineárneho celočíselného programovania:

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{x}, \mu} \quad & \mu + \frac{1}{(1-\alpha)} \left[\sum_{s=1}^S \frac{(1-\lambda)t_s}{S} + \sum_{s'=1}^{S'} \frac{\lambda t_{s'}}{S'} \right] \\
 \text{za podmienok} \quad & t_s \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s - \mu, s = 1, \dots, S \\
 & t_{s'} \geq -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^{s'} - \mu, s' = 1, \dots, S' \\
 & t_s \geq 0, s = 1, \dots, S \\
 & t_{s'} \geq 0, s' = 1, \dots, S' \\
 & (1-\lambda) \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^s + \lambda \frac{1}{S'} \sum_{s'=1}^{S'} \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\rho}^{s'} \geq r_{min} \\
 & \sum_{i=0}^N x_i \leq W_0 \\
 & x_i = c_i \cdot z_i, i = 0, \dots, N \\
 & z_i \in \mathbb{N}_0, i = 0, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Kapitola 5

Empirická aplikácia

V tejto kapitole vyriešime optimalizačné modely predstavené v druhej a tretej kapitole na reálnych historických scenároch výnosov. Následne na vyriešené úlohy použijeme metódu kontaminácie a porovnáme získané výsledky. Výpočty budú realizované pomocou štandardného optimalizačného softvéru GAMS.

5.1 Zadanie úlohy

Pre optimalizáciu portfólia sme použili dáta o cenách vybraných akcií obchodovaných na americkej burze cenných papierov v New Yorku NYSE, ktorá je podľa tržnej kapitalizácie najväčšou burzou na svete. Zdrojom pre tieto dáta bola databáza portálu Yahoo Finance [26]. Akcie boli vyberané naprieč odvetviami svetovej ekonomiky, aby boli vytvorené vhodné podmienky pre diverzifikáciu. Popis jednotlivých akciových titulov je poskytnutý v dodatku A. Grafy vybraných akcií sa nachádzajú v dodatku B. Dáta použité pri aplikácii (tab. 5.1) je možné nájsť na priloženom CD.

Názov akcie	Skratka	Mena	Názov akcie	Skratka	Mena
The Walt Disney Company	DIS	USD	Pfizer Inc.	PFE	USD
Pepsico, Inc.	PEP	USD	British American Tobacco plc	BTI	USD
McDonald's Corp.	MCD	USD	Sony Corporation	SNE	USD
Edison International	EIX	USD	Reed Elsevier plc	RUK	USD
ING Groep NV	ING	USD	Wal-Mart Stores Inc.	WMT	USD
Vodafone Group plc	VOD	USD	The Boeing Company	BA	USD

Tabuľka 5.1: Akcie

KAPITOLA 5. EMPIRICKÁ APLIKÁCIA

K výpočtu výnosov akcií sme použili upravené uzatváracie kurzy titulov na konci prvého obchodného dňa v týždni v období od 10.3.2003 do 11.3.2013, čo nám dáva $S = 523$ scenárov pre výnosy. Zvolili sme si týždenné výnosy. Vzhľadom k dĺžke sledovaného obdobia je dátová základňa dostatočne veľká. Potom pozorovaný týždenný výnos danej akcie počítame

$$r_{s,i} = \frac{K_{s,i}^{Adj} - K_{s-1,i}^{Adj}}{K_{s-1,i}^{Adj}}, \quad s = 1, \dots, S, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde $K_{s,i}^{Adj}$ je upravený kurz i -tej akcie v s -tom týždni na konci obchodného dňa. Kurz je upravovaný o dividendový výnos $D_{t,i}$ titulu vyplatený v čase t nasledovne:

$$K_{s,i}^{Adj} = \left(1 - \frac{D_{t,i}}{K_{t-1,i}}\right) K_{s,i}, \quad s < t \leq S.$$

V sledovanom období neprebehlo štiepenie vybraných akcií. Americké štátne dlhopisy [27] s dobou splatnosti pol roka, nulovým kupónom a výnosom 0,08% sme použili pre výpočet bezrizikovej miery $r_F \approx 0,0033\%$.

Dáta sme podrobili piatim základným testom na náhodnosť [12]: test založený na znamienkach diferencií, test založený na bodoch zvratu, test založený na Kendallovom koeficiente, test založený na Spearmanovom koeficiente a test založený na počte iterácií nad a pod mediánom. Ani jeden z týchto testov hypotézu náhodnosti u všetkých amerických akcií na hladine významnosti $\alpha = 1\%$ nezamietol.

Skúsime popísať predstavy investora, ktorý plánuje investovať kapitál vo výške $W_0 = 100\,000$ USD. Približný minimálny výnos, ktorý by mohol investor požadovať, nám pre predstavu poskytnú očakávané výnosy jednotlivých akcií:

$$\begin{array}{cccccccccccc} DIS & PEP & MCD & EIX & ING & VOD & PFE & BTI & SNE & RUK & WMT & BA \\ (0,343 & 0,205 & 0,482 & 0,366 & 0,294 & 0,238 & 0,120 & 0,458 & -0,036 & 0,211 & 0,148 & 0,362) \end{array}$$

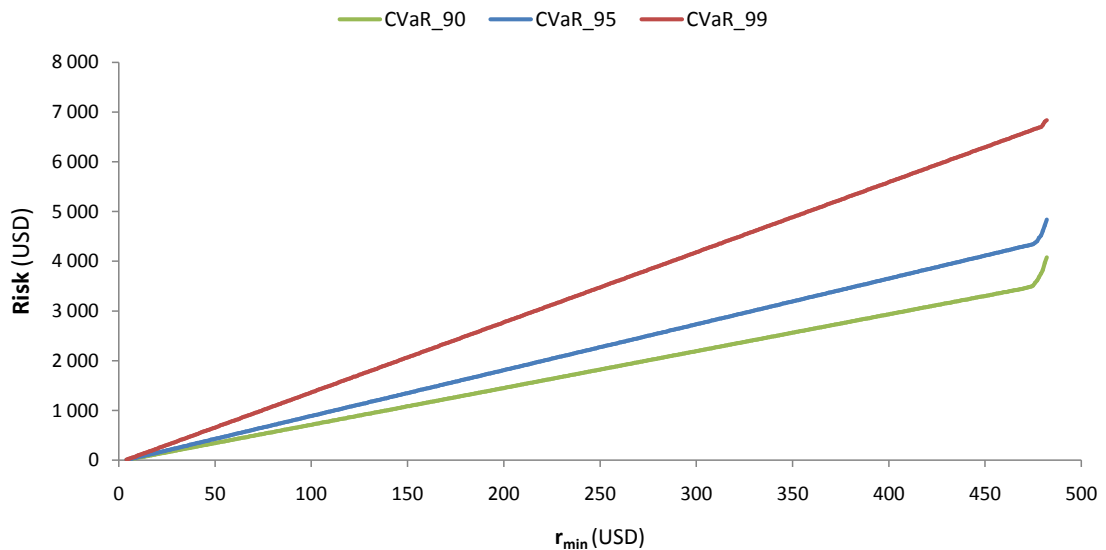
Najvyššie priemerné kladné týždenné výnosy dosiahli akcie spoločností McDonald's Copr. a British American Tobacco. Najslabšie sa darilo akciám spoločností Pfizer a Sony Corporation. Posledná zmienaná spoločnosť dosiahla záporný priemerný týždenný výnos, k čomu prispelo zemetrasenie v Japonsku, povodne v Thajsku, silný japonský yen a tiež rýchlejšie napredujúca konkurencia.

Keďže predaje na krátko ani vypožičanie peňažných prostriedkov neuvažujeme, budeme predpokladať, že investor si volí denný výnos v intervale najmenej a najviac výnosného aktíva $\langle -0,036\%; 0,482\% \rangle$, čo odpovedá ročnej výnosovej miere $\langle -1,872\%; 25,064\% \rangle$.

5.2 Riešenie úlohy

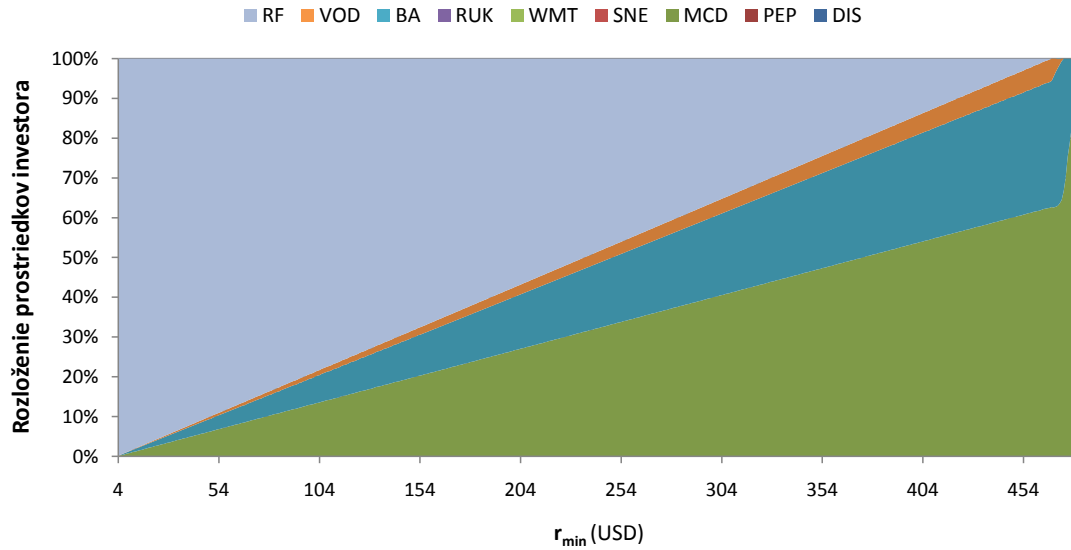
Softvér GAMS sme použili na riešenie úloh celočíselnej optimalizácie portfólia. V súčasnosti GAMS ponúka niekoľko implementácií na riešenie optimalizačných úloh tzv. solvery. Pre riešenie úloh na reálnych dátach sme volili solver CPLEX a BONMIN, ktoré sú k dispozícii v licencií zakúpenej Univerzitou Karlovou.

Na vybraných dátach napočítame minimálny CVaR podľa modelu (2.10) pre minimálny požadovaný výnos r_{min} v intervale (4; 482) USD, kde hornú a dolnú hranicu predstavujú výnos z plnej investície do bezrizikového aktíva a akcie s najvyšším výnosom. V grafe (5.1) je zobrazené riziko v závislosti na minimálnom požadovanom výnose investora pre α rovné 90%, 95% a 99%.



Obr. 5.1: Minimálny CVaR pre rôzne hladiny α .

Pre $CVaR_{0,90}$ dochádza u rôznych hodnôt minimálneho požadovaného výnosu k rozloženiu prostriedkov investora medzi 8 akciových titulov a bezrizikové aktívum.

Obr. 5.2: Rozloženie kapitálu investora pre $\text{CVaR}_{0,90}$

Z grafu (5.2) je patrné, že pre zvolené $\alpha = 90\%$ sú hlavnými investičnými titulmi akcie troch spoločností, a to McDonald's, British American Tobacco a Edison Company. Do ostatných uvedených titulov v legende sa investuje, ale minoritne. Pre vyššie hladiny α sa diverzifikácia u vybraných aktív znižuje a pre hladinu $\alpha = 99\%$ sa investuje prevažne len do dvoch akciových titulov a bezrizikového aktíva. Grafy rozloženia kapitálu investora pre ostatné hladiny α uvádzame v dodatku *D*.

5.3 Riešenie robustných úloh

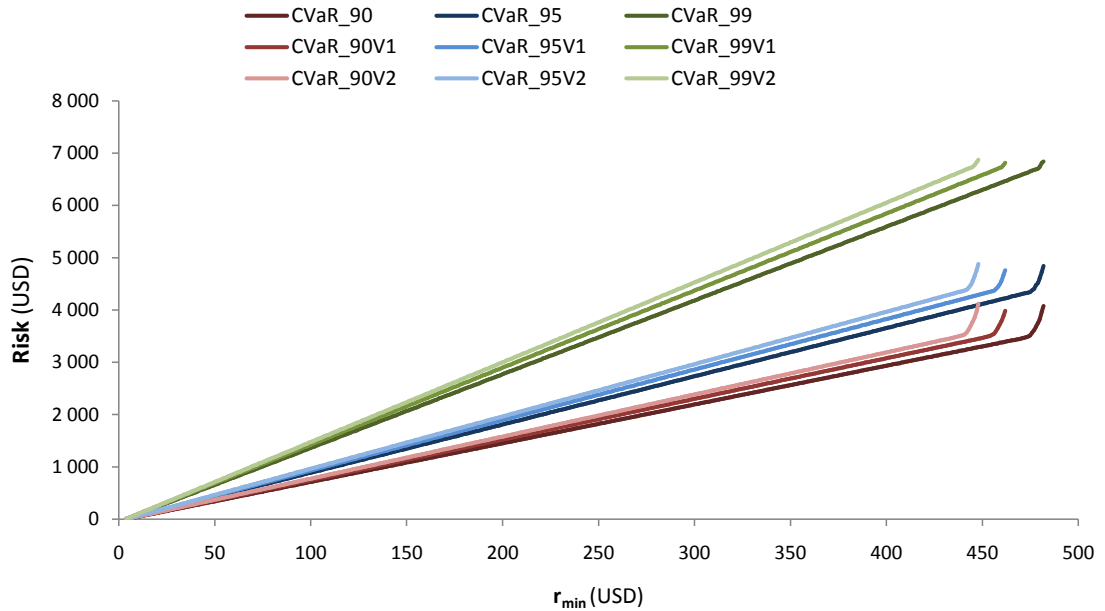
Postupne budeme riešiť robustné modely (3.15), (3.24) pre mieru rizika CVaR vytvorené v tretej kapitole k úlohe vyriešenej v predošlej časti (5.2). Prvý robustný model je založený na uvažovanej nepresnosti v hodnotách pravdepodobnostného rozdelenia, kde odchýlky sú obmedzené v množine tvaru boxu. V druhom robustnom modeli predpokladáme nepresnosť v pravdepodobnostiach pravdepodobnostného rozdelenia a odchýlky sú takisto obmedzené v množine tvaru boxu.

Neúplná informácia v hodnotách

Najprv riešime model (3.15), kde predpokladáme, že hodnoty scenárov sa odchyľujú od nameraných hodnôt v rámci množiny \mathcal{U}^B , kde odchyľky patria do množiny tvaru boxu. Zmeny v pravdepodobnostiach pravdepodobnostného rozdelenia neuvažujeme a fixujeme $p_s = 1/S$ pre $s = 1, \dots, S$. Na stanovenie hraníc pre odchyľky $\underline{\epsilon}, \bar{\epsilon}$ v množine tvaru boxu je možné uplatniť viacero spôsobov. Pre početnú časť sme si zvolili nasledujúce dva.

Prvý spôsob pre stanovenie hraníc je expertný odhad. Uvažujeme pre všetky aktíva rovnako veľkú nepresnosť v získaných dátach 1% na ročných výnosoch. Stanovíme tak hranice odchyľky pre týždenné výnosy $\bar{\epsilon}_i = 0,01923$ a $\underline{\epsilon}_i = -0,01923$, kde $i = 1, \dots, 12$.

Druhým spôsobom stanovíme hranice pre nepresnosť dát ako určitú časť z výnosov. U vyšších výnosov predpokladáme väčšiu nepresnosť v dátach a u nižších výnosov menšiu nepresnosť. V tomto prípade nastavíme parameter tak, aby priemerná hranica pre odchyľky odpovedala prvému spôsobu.



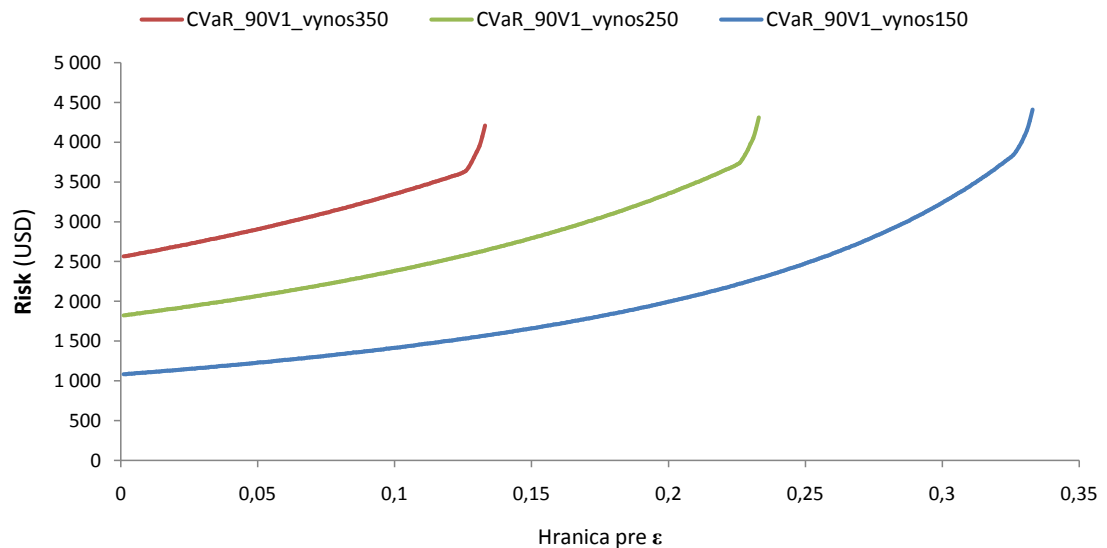
Obr. 5.3: CVaR robustne rozšírenie hodnoty

Získané výsledky sme zobrazili v grafe (5.3) pre uvažované hladiny α , kde sledujeme závislosť miery rizika od minimálneho požadovaného výnosu investora. Ne-

KAPITOLA 5. EMPIRICKÁ APLIKÁCIA

robustné riešenie úlohy CVaR_α porovnávame s výsledkami získanými robustnými riešeniami v hodnote $\text{CVaR}_\alpha V$. Rozdiel medzi prvým $\text{CVaR}_\alpha V1$ a druhým spôsobom $\text{CVaR}_\alpha V2$ určenia hraníc pre ϵ je znateľný. Hlavné investičné aktíva sú aktíva s nadpriemerným výnosom, a teda pre tieto aktíva je v druhom prípade interval pre odchýlky širší a riziko vyššie.

V ďalšom grafe (5.4) sme zafixovali minimálne požadované výnosy na troch rôznych hladinách 150, 250 a 350 USD a sledujeme závislosť miery rizika $\text{CVaR}_{0,90}$ v najhoršom prípade na $\bar{\epsilon}$, kde hranica pre ϵ je pre všetky aktíva rovnaká. S rastúcou neurčitostou v dátach pozorujeme nárast rizika. Z grafu je tiež evidentné, že nemôžeme na ohraničenie ϵ použiť akékoľvek hranice $\bar{\epsilon}$, $\underline{\epsilon}$. Od určitej hladiny minimálneho požadovaného výnosu a hranice pre ϵ úloha už nemá riešenie.



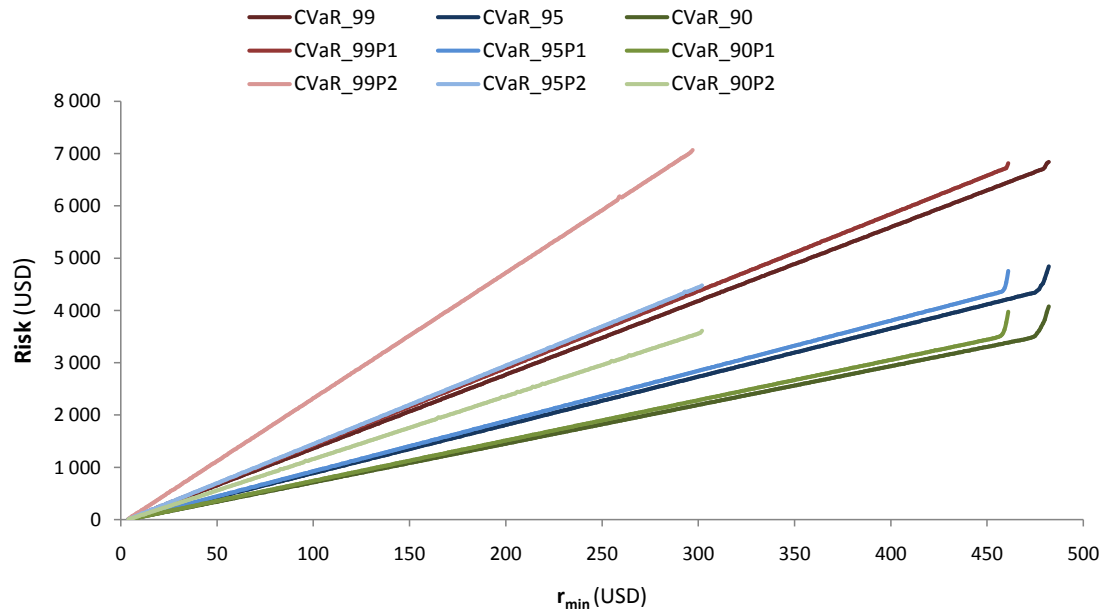
Obr. 5.4: $\text{CVaR}_{0,90}$ v závislosti na ϵ s fixnými výnosmi

Zdrojový kód v programe GAMS s variáciou pre oba prístupy stanovenia hraníc pre odchýlky je uvedený v dodatku (C).

Neúplná informácia v pravdepodobnostiach

Model (3.24) použijeme k riešeniu úlohy, kedy uvažujeme odchýlku v pravdepodobnostiach pravdepodobnostného rozdelenia. Nepresnosť od nameraných dát je obmedzená v rámci množiny \mathcal{Q}^B , kde odchýlky patria do množiny tvaru boxu. Zmeny v hodnotách pravdepodobnostného rozdelenia neuvažujeme. Výpočet na reálnych dátach budeme robiť pre dve rôzne ohraničenia $\underline{\eta}, \bar{\eta}$, ktoré sme si zvolili na úrovni 1% a 10% z pravdepodobnosti pôvodného scenáru.

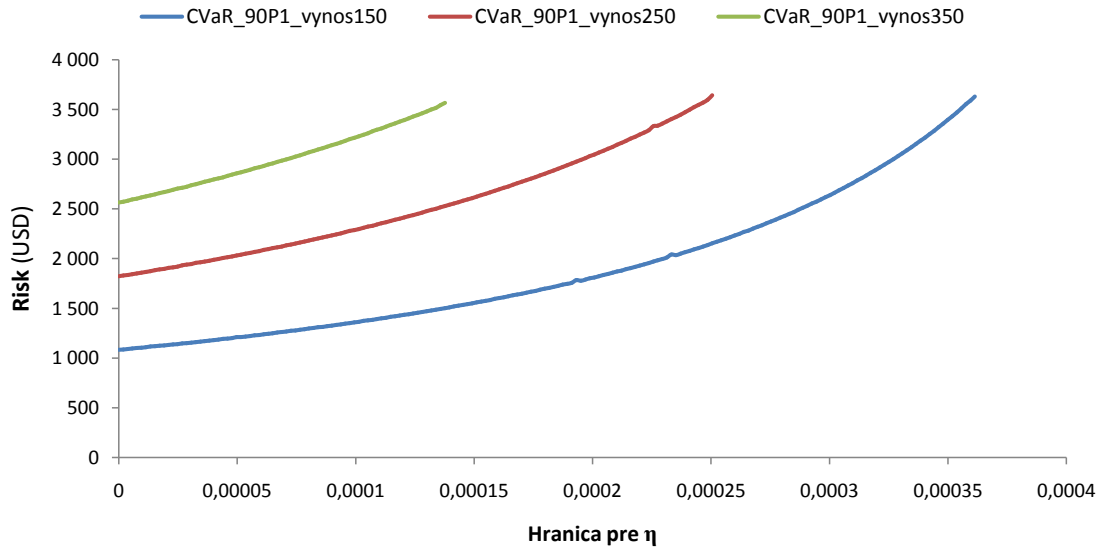
Napočítané výsledky sme porovnali v grafe (5.6), kde sledujeme nerobustné riešenie CVaR_α v porovnaní s robustnými riešeniami v pravdepodobnosti $\text{CVaR}_\alpha P$ v závislosti na minimálnom požadovanom výnose investora. Do grafu sme zaznamenali dva robustné prípady: prvý s hranicou pre η ako 1% z pravdepodobnosti scenáru $\text{CVaR}_\alpha P1$ a druhý s hranicou 10% z pravdepodobnosti pôvodného scenáru $\text{CVaR}_\alpha P2$.



Obr. 5.5: CVaR robustne rozšírenie pravdepodobností

Podobne ako pre predchádzajúci prípad sme v grafe (5.6) zafixovali minimálne požadované výnosy investora na troch hladinách 150, 250 a 350 USD a pozorujeme závislosť miery rizika $\text{CVaR}_{0,90}$ v najhoršom prípade na $\bar{\eta}$, kde hranica pre η je rovnaká pre všetky scenáre. Na ohraničenie η nemôžeme voliť akékoľvek hranice

$\bar{\eta}, \underline{\eta}$. Od určitej hladiny minimálneho požadovaného výnosu a hranice pre η úloha už nebude mať riešenie.



Obr. 5.6: $CVaR_{0,90}$ v závislosti na η s fixnými výnosmi

Zdrojový kód v programe GAMS je uvedený v dodatku (C).

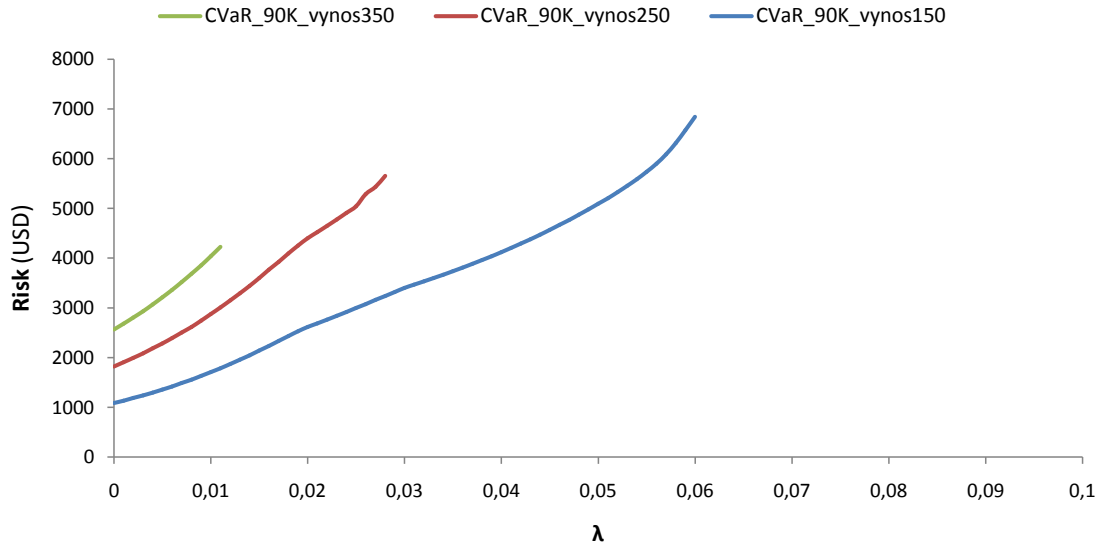
5.4 Kontaminovaná úloha

V tejto časti na reálnych dátach budeme riešiť optimalizačnú úlohu (4.4) pre mieru rizika $CVaR_{0,90}$, kde pôvodné rozdelenie p náhodného vektoru ρ kontaminujeme rozdelením q . Rozdelenie p je diskkrétne a dané $S=523$ scenármi pre všetkých 12 akciových titulov. Rozdelenie q je definované pre zjednodušenie jedným stresovým scenárom $S' = 1$. Tento scenár je volený tak, že nastal pokles cien u všetkých zvolených aktív, výraznejšie u tých, ktoré si nerobustná úloha minimalizácie $CVaR_u$ (2.10) volila medzi hlavné investičné aktíva. Scenár výnosu rozdelenia q teda vyzerá nasledovne:

$$\begin{matrix} DIS & PEP & MCD & EIX & ING & VOD & PFE & BTI & SNE & RUK & WMT & BA \\ (-3,58 & -4,62 & -11,44 & -8,27 & -3,97 & -6,75 & -4,15 & -7,78 & -2,90 & -5,80 & -1,72 & -3,15) \end{matrix}$$

KAPITOLA 5. EMPIRICKÁ APLIKÁCIA

V grafe (5.7) sme opäť zafixovali minimálny požadovaný výnos na úrovni 150, 250 a 350 USD a sledovali sme závislosť miery rizika $\text{CVaR}_{0,90}$ v najhoršom prípade na parametri λ . Pre jednotlivé úrovne výnosu miera rizika rastie až do úrovne, kedy už nie je možné splniť podmienku pre minimálny požadovaný výnos. Od určitej hladiny minimálneho požadovaného výnosu a hranice pre λ úloha už nebude mať riešenie. V ďalšom prípade určíme minimálny požadovaný výnos ako priemerný

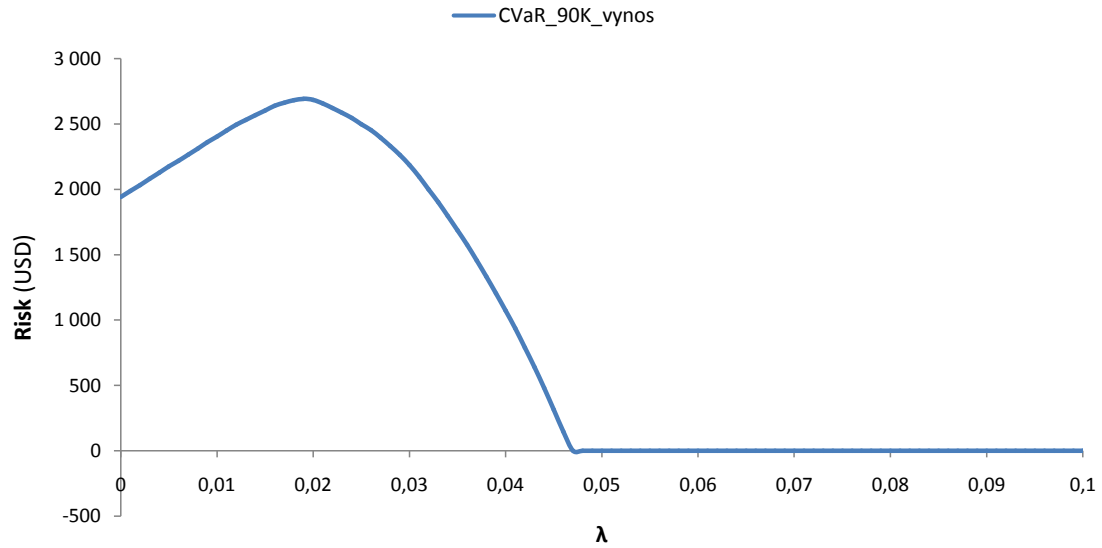


Obr. 5.7: CVaR v závislosti na λ s fixnými výnosmi

výnos rovnomerne rozloženého portfólia nasledovne:

$$r_{min} = (1 - \lambda) \frac{1}{N * S} \sum_{s=1}^S \mathbf{e}^\top \boldsymbol{\rho}^s + \lambda \frac{1}{N * S'} \sum_{s'=1}^{S'} \mathbf{e}^\top \boldsymbol{\rho}^{s'}.$$

S použitím tohoto minimálneho požadovaného výnosu sme spočítali mieru rizika $\text{CVaR}_{0,90}$ v závislosti na kontaminačnom parametri λ . V grafe (5.8) vidíme, že od určitej úrovne kontaminačného parametru už portfólio pozostáva iba z bezrizikového aktíva.



Obr. 5.8: $\text{CVaR}_{0,90}$ v závislosti na λ s priemerným výnosom rovnomerne rozloženého portfólia

5.5 Porovnanie výsledkov

Neurčitosť vyskytujúca sa v dátach by nemala byť zanedbávaná a mali by sme s ňou počítať pri vytváraní matematických modelov. Pokiaľ disponujeme aspoň nejakými informáciami o neurčitosti, ktorá v dátach nastáva, môžeme vhodne zvoliť metódu, aby sme čo najlepšie s touto neurčitosťou počítali. U metódy najhoršieho prípadu uvažujeme ohraničenie pravdepodobnostného rozdelenia v rámci množiny neurčitosti. Metóda kontaminácie pristupuje k neurčitosť v pravdepodobnostnom rozdelení zohľadnením iného pravdepodobnostného rozdelenia.

V metóde najhoršieho prípadu je potrebné si definovať množinu neurčitosti: jej veľkosť a tvar. Riešenie optimalizačnej úlohy je následne ovplyvnené vymedzením tejto množiny. U metódy kontaminácie je potrebné definovať pravdepodobnostné rozdelenie, ktorým kontaminujeme pôvodné rozdelenie. V závislosti na kontaminačnom parametri je tento vstup silne subjektívnym prvkom v optimalizačnej úlohe. U všetkých riešených úloh k neriešiteľnosti zadanej úlohy dochádza od určitej hladiny minimálneho požadovaného výnosu a hranice pre odchýlky v hodnotách, v pravdepodobnostiach pravdepodobnostného rozdelenia alebo kontaminačného parametra.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali úlohami optimalizácie portfólia v podmienkach celočíselnosti a ich robustným rozšírením. Zadefinovali sme si základné pojmy a zaviedli používané miery rizika - rozptyl, VaR a CVaR. Pre tieto miery boli odvodené „mean-risk“ modely v tvare využiteľnom pre praktickú aplikáciu. Podrobne sme popísali a postupne metódou najhoršieho prípadu vytvorili robustné optimalizačné modely, v ktorých sa vyskytuje neurčitosť v hodnotách a pravdepodobnostiach pravdepodobnostného rozdelenia. Ďalej sme sa zaoberali metódou kontaminácie, ktorá neurčitosť v pravdepodobnostnom rozdelení modeluje pomocou kontaminačného pravdepodobnostného rozdelenia.

Na konkrétnych dátach z americkej burzy cenných papierov sme vyriešili celočíselne úlohu optimalizácie portfólia. Hľadali sme optimálne investičné stratégie, pri ktorých bude portfólio vykazovať pri určenom minimálnom požadovanom výnose najnižšiu hodnotu rizika. K meraniu rizika sme použili koherentnú mieru rizika $CVaR_\alpha$. Optimálne portfólia sme spočítali optimalizačným softvérom GAMS pre všetky dostupné hodnoty minimálneho požadovaného výnosu. Následne sme pre rovnakú mieru rizika spočítali robustné úlohy, kde sme uvažovali najprv neurčitosť v hodnotách scenárov diskrétného pravdepodobnostného rozdelenia a potom neurčitosť v pravdepodobnostiach týchto scenárov. Analyzovali sme získané výsledky a obmedzenia množín neurčitosti. Pre mieru rizika CVaR sme takisto spočítali úlohu metódou kontaminácie s kontaminovaným stresovým rozdelením.

Problematika celočíselnej optimalizácie portfólia a jej riešenie pri uplatnení robustných metód je široká a neustále rozvíjajúca sa oblasť. Neurčitosť v dátach by nemala byť zanedbávaná a riešenia úloh by mali vykazovať istú úroveň robustnosti. Malé zmeny vo vstupných dátach by nemali spôsobovať veľké zmeny v riešeniach. Do ďalšieho štúdia v tejto oblasti je možné zahrnúť kombinovaný optimalizačný mo-

del pre zmeny ako v hodnotách, tak súčasne v pravdepodobnostiach pravdepodobnostného rozdelenia. Široký priestor na ďalšie bádanie je v úlohách, kedy disponujeme informáciou o momentoch pravdepodobnostného rozdelenia. Robustné metódy sa zdokonaľujú a využívajú stále častejšie, čo prispieva k ich rastúcemu významu a ďalšiemu vývoju v tejto oblasti.

Literatúra

- [1] Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. (1999): *Coherent Measures of Risk*. Mathematical Finance **9**, 203-228.
- [2] Ben-Tal, A., Nemirovski A. (1995): *Robust solutions to uncertain linear problems* Research Report # 6/95, Optimization Laboratory, Faculty of Industrial Engineering and Management, Technion - the Israel Institute of Technology, Israel.
- [3] Ben-Tal, A., Nemirovski A. (1997): *Robust Truss Topology Design via Semidefinite Programming*. SIAM J.Optim. **7**, 991-1016.
- [4] Dupačová J. (1986): *Stability in stochastic programming with recourse*. Contaminated distribution. Math. Progr. Study **27**, 133-144.
- [5] Dupačová J. (1996): *Scenario-based stochastic programs: Resistance with respect to sample*. Ann. Oper. Res. **64**, 21-38.
- [6] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J. (2002): *Stochastic modeling in economics and finance*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [7] Föllmer H., Schied A. (2002): *Stochastic finance: An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, New York.
- [8] GAMS Development Corporation: GAMS 23.5 (software). Washington.
- [9] Gondeková T. (2010): *Kombinatorická optimalizácia portfóliá*. Bakalárska práca MFF UK, Praha.
- [10] Gondzio J., Ruszczyński A. (1992): *Sensitivity method for basis inverse representation in multistage stochastic linear programming problems*. JOTA **74**, 221-242.

- [11] Gotoh J., Shinozaki K., Takeda A. (2013): *A Robust Portfolio Technique for Mitigating the Fragility of CVaR Minimization and generalization to coherent risk measures*. Quantitative Finance iPrint.
- [12] Hanzák T. (2005): *Testy náhodnosti*. <http://thanzak.sweb.cz/> [20.03.2013]
- [13] Chromíková D. (2010): *Vícerozmerné míry rizika*. Diplomová práce MFF UK, Praha.
- [14] Isii K. (1963): *On the Sharpness of Chebyshev-Type Inequalities*. Ann. Inst. Stat. Math. **14**, 185 – 197.
- [15] Kopa M.(2004): *Postavení úžitkové funkce v úlohách stochastického programování*. Rigorózná práce MFF UK, Praha.
- [16] Kopa M.(2006): *Utility functions in portfolio optimization*. Dizertačná práce MFF UK, Praha.
- [17] Markowitz H. M. (1952): *Portfolio Selection*. Journal of Finance **7**, 77-91.
- [18] Natarajan K., Sim M., Uichanco, J. (2010): *Tractable Robust Expected Utility and Risk Models for Portfolio Optimization*. Mathematical Finance **20**, 695–731.
- [19] Neumann J.,Morgenstern O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton.
- [20] Pflug G., Römisch W. (2007): *Modeling, Measuring and Managing Risk*. World Scientific Publishing Company, Singapore.
- [21] Pflug G. (2000): *Some Remarks on the Value-At-Risk and the Conditional Value-At-Risk*. In Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications (Uryasev S., ed.). Kluwer Academic Publishers, 278-287.
- [22] Rachev S. T., Stoyanov S. V., Fabozzi F. J. (2011): *A Probability Metrics Approach to Financial Risk Measures*. Wiley-Blackwell Publishing, New York.
- [23] Rockafeller R. T., Uryasev S. (2002): *Conditional Value-At-Risk for General Loss Distributions*. Journal of Banking and Finance, **26**, 1443-1471.

- [24] Simons J. (2001): *Minimax Theorems*. Encyclopedia of Optimization, Ch. A. Floudas, P. M. Pardalos (eds.), **III**, 284 – 289.
- [25] Soyster A. L. (1973): *Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming*. Operations Research **20**, 1154-1157.
- [26] Yahoo Finance (online): *Historical Quotes of Stocks*. <http://finance.yahoo.com/q> [13.3.2013]
- [27] Yahoo Finance (online): *Interests of Bonds*. <http://finance.yahoo.com/bonds> [19.03.2013]
- [28] Žáčková, J. (1966): *On Minimax Solution of Stochastic Linear Programming Problems*. Čas. přest. matematiky **93**, 423-430.
- [29] Zenois A. S. (1991): *Massively parallel computations for financial planning under uncertainty*. In: Mesirov J., Very Large Scale Compting in the 21-st Century, SIAM, Philadelphia, 273-294.
- [30] Zhu S. S., Fukushima M. (2009): *Worst-Case Conditional Value-at- Risk with Application to Robust Portfolio Management*. Operations Research, **57**, 1155-1168.
- [31] Zymler S., Kuhn D., Rustem B. (2013): *Distributionally robust joint chance constraints with second-order moment information*. Mathematical Programming **137**, 167-198.

Dodatok A

Popis akciových titulov

The Walt Disney Company

Mediálna a zábavná spoločnosť svetového formátu založená v 1923 ako Disney Brother Studio. Vlastní niekoľko televíznych staníc vrátane ABC, sieť rádii ESPN a licencie na zábavné parky Walt Disney.

Pepsico Inc.

Medzinárodná spoločnosť operujúca vo viac ako 200 krajinách na trhu potravín a nápojov. V roku 2010 akvírovala Pepsi Bottling Group a Pepsi Americas a o rok neskôr spoločnosť Wimm Bill Dann, ktorá predáva nealkoholické nápoje a mliečne výrobky, čím sa stali najväčším predajcom v tomto odvetví v Rusku.

McDonald's Corp.

Spoločnosť prevádzkujúca jeden z najväčších svetových reťazcov rýchleho občerstvenia, časť priamo a časť prostredníctvom frančízy. Materská firma zabezpečuje a kontroluje reštaurácie, služby a organizuje marketingovú politiku a zásobovanie.

Edison International

Americká energetická spoločnosť prevádzkujúca výrobu a distribúciu elektrickej energie so zameraním na obnoviteľné zdroje, ktoré tvoria viac ako tretinu výkonu. Pred dvoma rokmi predala svoj podiel v Four Corners uhoľnej spoločnosti.

ING Groep NV

Globálna finančná skupina pôvodom z Holandska poskytujúca služby klientom vo viac ako 40 krajinách sveta. Medzi hlavné činnosti finančnej skupiny patrí poisťovníctvo (životné poistenie a dôchodkové pripoistenie), investičné a komerčné bankovníctvo, a taktiež vykonávajú aj správu aktív.

Vodafone Group plc

Britská telekomunikačná spoločnosť vznikla ako spojenie Racal Electronics, výrobcu vojenských rádiových technológií, a Millicom v roku 1982. V roku 2011 akvírovala konzultanskú spoločnosť Bluefish Communications, čo posilnilo zameranie na poskytovanie profesionálnych služieb a riešení.

Pfizer Inc.

Americká farmaceutická spoločnosť sa zaoberá výskumom inovatívnych produktov na zlepšenie zdravia ľudí. Dodáva lieky primárne veľkoodberateľom ako sú nemocnice, vládne agentúry a zdravotné organizácie. V roku 2003 sa uskutočnilo spojenie so spoločnosťou Pharmacia a v roku 2009 kúpila spoločnosť Wyeth.

British American Tobacco plc

Spoločnosť založená v roku 1902 ako spojenie medzi UK's Imperial Tobacco a American Tobacco. Má vedúcu pozíciu na trhu vo viac ako 50 zo 180 krajín, v ktorých operuje a v portfóliu má cez 250 značiek cigariet, z ktorých hlavnými ťahúňmi sú Dunhill, Kent, Lucky Strike a Pall Mall. V roku 2008 skúpili tureckú tabakovú spoločnosť Tekel a taktiež škandinávsku spoločnosť Tobakskompagni.

Sony Corporation

Japonská spoločnosť založená v 1946 v Tokiu zameraná na elektroniku, počítačové hry a finančné služby. Napriek zmenám, ktoré spoločnosť podstupuje, na trhu sú obľúbené hracie konzoly Play Station, prehrávače s technológiou Blu-ray a notebooky Vaio.

DODATOK A. POPIS AKCIOVÝCH TITULOV

Reed Elsevier plc

Spoločnosť založená v roku 1992 zlúčením Reed International, spoločnosti obchodujúcej s knihami a holandského vedeckého vydavateľstva Elsevier. Publikuje a poskytuje informácie z oblasti vedy, medicíny, práva a obchodu. Kľúčové produkty ScienceDirect a Scopus zhromažďujú viac ako 25% svetových vedeckých textov a bibliografických informácií a databázy poskytujú abstrakty a citácie vedeckej literatúry.

Wal-Mart Stores Inc.

Americká spoločnosť prevádzkujúca retailovú sieť obchodov založená v roku 1962. V posledných rokoch vytvára značku, kde sa zbavuje nálepky najlacnejšieho predajcu a prechádza k nutrične hodnotným produktom za primeranú cenu. Organizuje a podporuje udalosti zamerané na zdravú výživu.

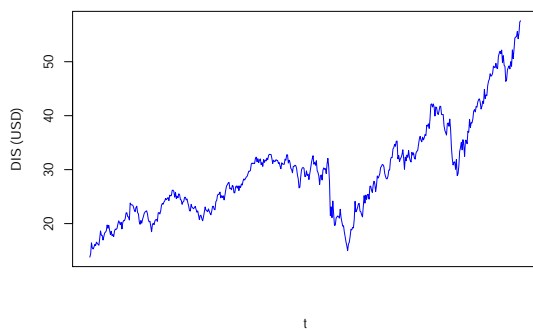
The Boeing Company

Letecká a obranná spoločnosť podporovaná vládou Spojených štátov vznikla v roku 1916 vo Washingtone. Vyrába letecké zariadenia a spolupracuje na vývoji a testovaní biopalív, aby zredukovali podiel emisií generovaných leteckou dopravou do ovzdušia.

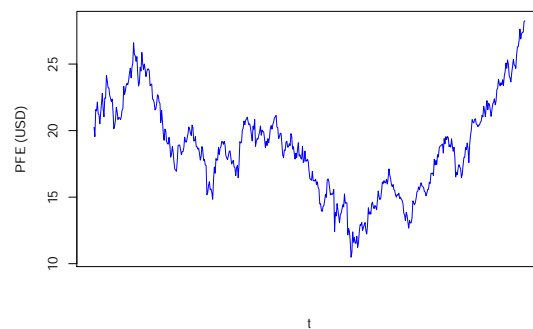
Dodatok B

Kurzy akciových titulov

Grafy znázorňujú vývoj cien vybraných aktív pre praktickú aplikáciu. Zachycujú uzatváracie ceny akciových titulov v týždňových intervaloch za obdobie od 10.3.2003 do 11.3.2013.

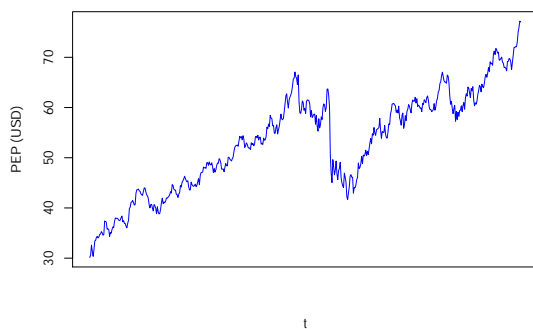


(a) Kurzy akcie DIS

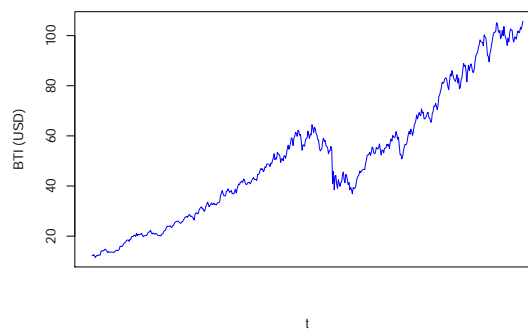


(b) Kurzy akcie PFE

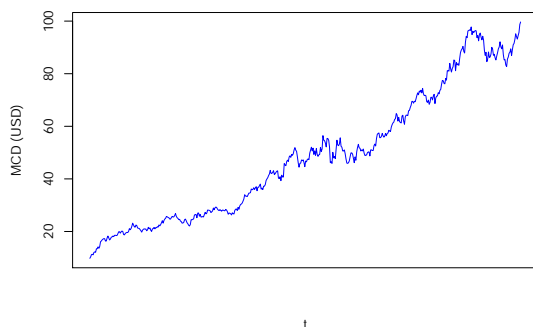
DODATOK B. KURZY AKCIOVÝCH TITULOV



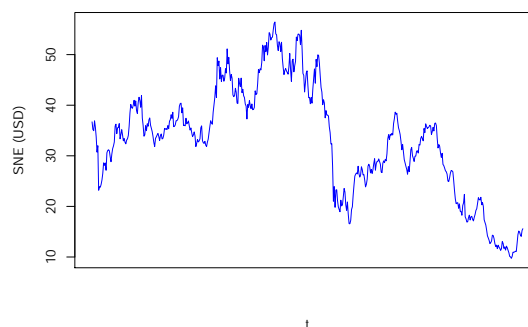
(c) Kurzy akcie PEP



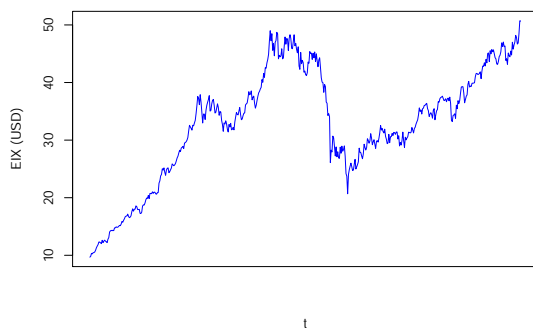
(d) Kurzy akcie BTI



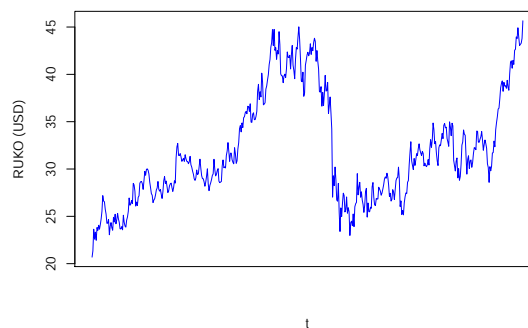
(e) Kurzy akcie MDL



(f) Kurzy akcie SNE

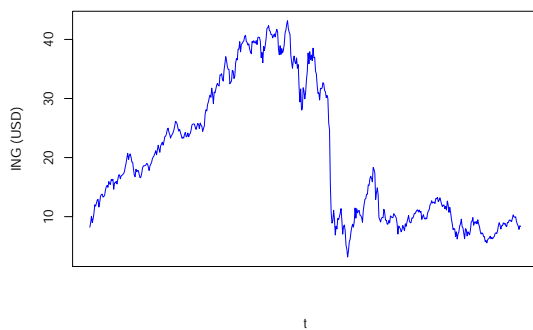


(g) Kurzy akcie EIX

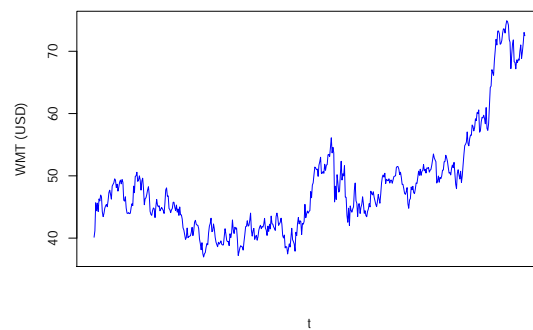


(h) Kurzy akcie RUK

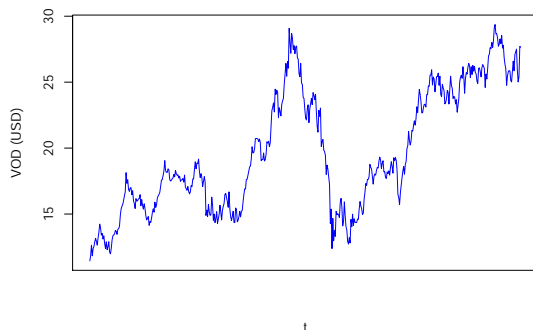
DODATOK B. KURZY AKCIOVÝCH TITULOV



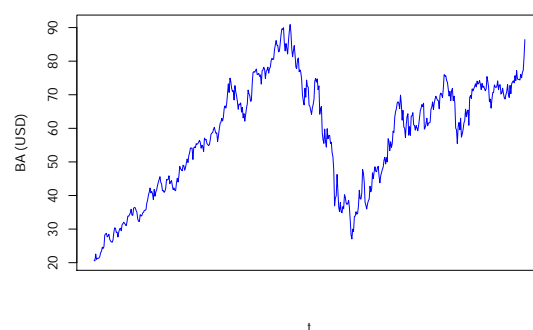
(i) Kurzy akcie ING



(j) Kurzy akcie WMT



(k) Kurzy akcie VOD



(l) Kurzy akcie BA

Dodatok C

Zdrojový kód GAMS

Táto príloha obsahuje zdrojové kódy úloh riešených v programe GAMS. Uvádzame zdrojový kód optimalizačných úloh pre mieru rizika CVaR: nerobustná úloha, úloha s neúplnou informáciou v hodnotách scenárov, úloha s neúplnou informáciou v ich pravdepodobnostiach, úloha s kontaminovaným rozdelením. Zdrojové kódy úloh je možné nájsť na priloženom CD.

Zdrojový kód - spoločná časť:

```
Sets J           Aktiva   /DIS,PEP,MCD,ING,BTI,EIX,PFE,SNE,WMT,RUK,BA,VOD/
      T           Tyzdne  /T1 * T523/;
Alias (I,J);
```

```
table R(T,J)           Data in CSV format
$Ondelim
$Include c:USA_returns_adj
$Offdelim;
```

```
Parameter C(I)           Ceny balíka akcií
```

```
      /DIS   57.58
      PEP    77.04
      MCD    99.67
      ING     8.36
      BTI   105.77
      EIX    50.68
      PFE    28.25
      SNE    15.59
      WMT    72.50
      RUK    45.66
      BA     86.43
      VOD    28.41 /
```

DODATOK C. ZDROJOVÝ KÓD GAMS

```
Parameter ERho(J)      Ocakavany vynos;
ERho(J)=(1/523) * Sum(T,R(T,J));

Parameter Rp          Pozadovany vynos /15000/
W                    Investorove prostriedky /100000/
Alpha                Hladina /0.90/
Rf                   Bezrizikovy vynos /0.0033/;

Integer Variables Z(I) Kusy aktiv
                   z0 Kusy bezrizikoveho aktiva;
Positive Variables S(T) Pomocne premenne S;
Variable Y          Pomocna premenna
                   Risk Hodnota ucelovej fcie;
```

Zdrojový kód optimalizácie nerobustnej úlohy:

```
Equations CVaR      Riziko
ObmdzVynos      Obmedzenie pozadovanim vynosom
Obmdz(T)        Obmedzenie na pomocne premenne S
ObmdzKapital    Obmedzenie na prostriedky;

CVaR..          Risk =E= Y + (1 / ((1 - Alpha) * 523)) * Sum (T,S(T));
ObmdzVynos..    Sum (I,ERho(I) * C(I) * Z(I)) + Rf * z0 =G= Rp;
Obmdz(T)..      S(T) =G= -Sum (I,R(T,I) * C(I) * Z(I)) - Rf * z0 -Y;
ObmdzKapital.. Sum (I,C(I) * Z(I)) + z0 =L= W;

Model Optim /CVaR, Obmdz, ObmdzVynos, ObmdzKapital/;
Solve Optim Minimizing Risk Using MIP;
```

Zdrojový kód optimalizácie úlohy s neurčitostou v hodnotách scénarov pravdepodobnostného rozdelenia:

```
Parameter Epsilon_lower(I) Spodna hranica
                   Epsilon_upper(I) Horna hranica;
Epsilon_lower(I)= -0.01923;
Epsilon_upper(I)= 0.01923;

Negative Variables B_l(I) Pomocne premenne;
Positive Variables B_u(I) Pomocne premenne;
Positive Variable A      Pomocna premenna;

Equations CVaRV      Riziko
ObdzVynos      Obmedzenie pozadovanim vynosom
Obmdz(T)        Obmedzenie na pomocne premenne S
ObmdzDual(I)    Obmedzenie dualnej ulohy
ObmdzKapital    Obmedzenie na prostriedky;
```

DODATOK C. ZDROJOVÝ KÓD GAMS

```
CVaRV..      Risk =E= Y + (1 / ((1 - Alpha) * 523)) * Sum (T,S(T))
              + Sum (I,B_l(I) * Epsilon_l(I)) + Sum(I,B_u(I) * Epsilon_u(I));
ObmdzVynos.. Sum (I,ERho(I) * C(I) * Z(I)) + Rf * z0
              - (sum (I,B_l(I)*Epsilon_l(I)) + Sum(I,B_u(I) * Epsilon_u(I)))=G= Rp;
Obmdz(T)..   S(T) =G= -Sum (I,R(T,I) * C(I) * Z(I)) - Rf * z0 -Y;
ObmdzDual(I).. B_l(I) + B_u(I) =E= C(I) * Z(I);
ObmdzKapital.. Sum (I,C(I) * Z(I)) + z0 =L= W;
```

```
Model Optim /CVaRV, ObmdzDual, Obmdz, ObmdzVynos, ObmdzKapital/;
Solve Optim Minimizing Risk Using MIP;
```

```
Epsilon_l(I)= -0.0707 * abs(ERho(I))
Epsilon_u(I)= 0.0707 * abs(ERho(I));
```

Zdrojový kód optimalizácie úlohy s neurčitostou v pravdepodobnostiach scénarov pravdepodobnostného rozdelenia:

```
Parameter Eta_l(T) Spodna hranica
              Eta_u(T) Horna hranica;
Eta_l(T)= -0.01 * (1/P);
Eta_u(T)= 0.01 * (1/P);
Parameters E_vektor(T);
E_vektor(T)=1;
```

```
Negative Variables B_l(T) Pomocne premenne;
Positive Variables B_u(T) Pomocne premenne;
Negative Variables C_u(T) Pomocne premenne;
Positive Variables C_l(T) Pomocne premenne;
Variables A1,A2          Pomocna premenna;
Positive Variables S(T)  Pomocne premenne S;
```

```
Equations CVaRP          Riziko
              ObmdzVynos  Obmedzenie pozadovany vynosom
              Obmdz(T)    Obmedzenie na pomocne premenne S
              ObmdzDualB(T) Obmedzenie dualnej ulohy premenne B
              ObmdzKapital Obmedzenie na prostriedky
              ObmdzDualC(T) Obmedzenie dualnej ulohy premenne C;
```

```
CVaRP..      Risk =E= Y + (1 / ((1 - Alpha) * 523)) * Sum (T,S(T))
              + 1 / (1 - Alpha) * (Sum (T,B_l(T)*Eta_l(T))+ Sum(T,B_u(T) * Eta_u(T)));
ObmdzVynos.. Sum (I,ERho(I) * C(I) * Z(I)) + Rf * z0
              + (Sum (T,C_l(T) * Eta_l(T))+ Sum(T,C_u(T) * Eta_u(T))) =G= Rp;
Obmdz(T)..   S(T) =G= -Sum (I,R(T,I) * C(I) * Z(I)) - Rf * z0 -Y;
ObmdzDualB(T).. A1 * E_vektor(T) + B_l(T) + B_u(T) =E= S(T);
ObmdzDualC(T).. A2 * E_vektor(T) + C_l(T) + C_u(T) =E= Sum (I,R(T,I) * C(I) * Z(I));
ObmdzKapital.. Sum (I,C(I) * Z(I)) + z0 =L= W;
```

```
Model Optim /CVaRP, ObmdzDualB, ObmdzDualC, Obmdz, ObmdzVynos, ObmdzKapital/;
Solve Optim Minimizing Risk Using MIP;
```

Zdrojový kód optimalizácie úlohy s kontaminovaným pravdepodobnostným rozdelením:

```
table Q(S,J) Kontaminacne rozdelenie Q
      DIS      PEP      MCD      ING      BTI      EIX      PFE      SNE      WMT      RUK      BA      VOD
S1 -3.580 -4.614 -11.438 -3.9653 -7.7763 -8.266 -4.144 -2.904 -1.723 -5.803 -3.1472 -6.7463 ;
```

```
Scalar Lambda;
```

```
Positive Variables U1(T) Pomocne premenne U1;
```

```
Positive Variables U2(S) Pomocne premenne U2;
```

```
Equations CVaRK      Riziko
      ObmdzVynos      Obmedzenie pozadovany vynosom
      Obmdz1(T)      Omedzenie na U1
      Obmdz2(S)      Omedzenie na U2
      ObmdzKapital      Obmedzenie na prostriedky;
```

```
CVaRK..      Risk =E= Y + (1 / (1 - Alpha)) * (((1-Lambda)/523) * Sum (T,U1(T))
      + (Lambda) * Sum (S,U2(S)) );
```

```
ObmdzVynos..      Sum (I,ERho(I) * C(I) * Z(I)) + Rf * z0 =G= Rp;
```

```
Obmdz1(T)..      U1(T) =G= -Sum (I,R(T,I) * C(I) * Z(I)) - Rf * z0 -Y;
```

```
Obmdz2(S)..      U2(S) =G= -Sum (I,Q(S,I) * C(I) * Z(I)) - Rf * z0 -Y;
```

```
ObmdzKapital..      Sum (I,C(I) * Z(I)) + z0 =L= W;
```

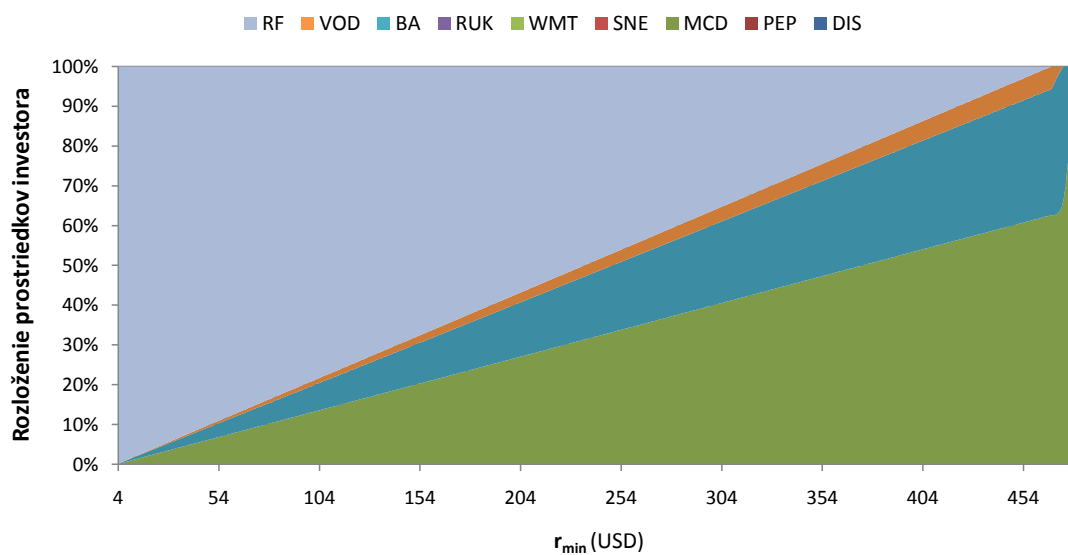
```
Model Optim /CVaRK, ObmdzVynos, Obmdz1, Obmdz2, ObmdzKapital /;
```

```
Solve Optim Minimizing Risk Using MIP;
```

Dodatok D

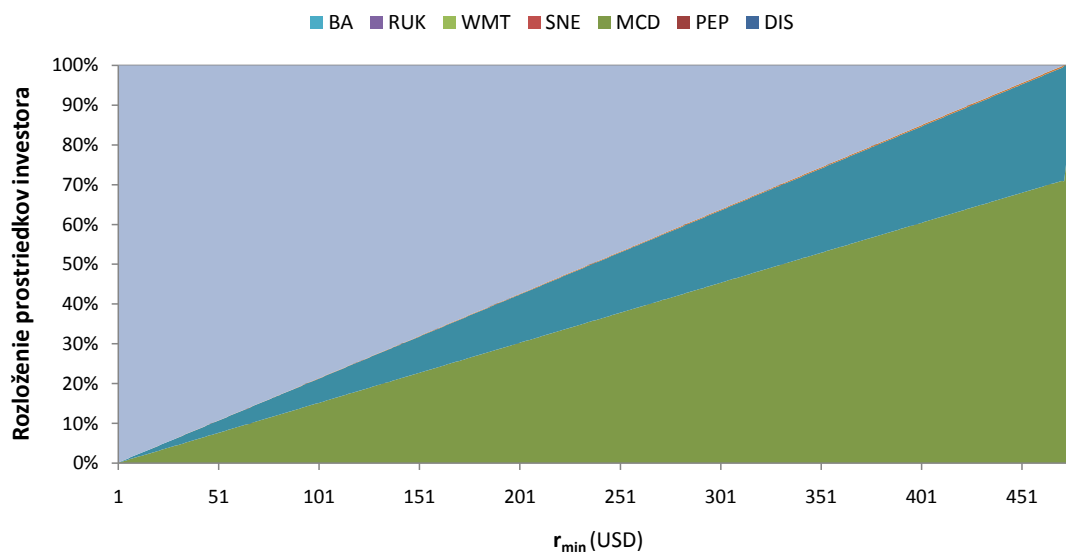
Rozloženie investorovho kapitálu

V tomto dodatku sú zobrazené rozloženia investorovho kapitálu získané pri optimalizácii úlohy pre CVaR_α , kde α je rovná 90%, 95% a 99%.

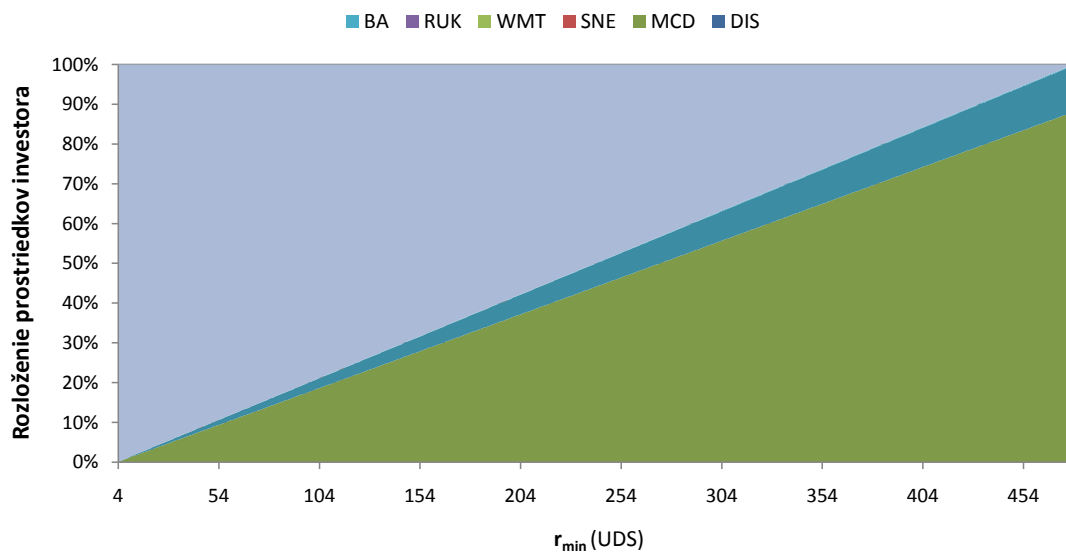


Obr. D.1: Rozloženie kapitálu investora pre $\text{CVaR}_{0,90}$

DODATOK D. ROZLOŽENIE INVESTOROVHO KAPITÁLU



Obr. D.2: Rozloženie kapitálu investora pre $CVaR_{0,95}$



Obr. D.3: Rozloženie kapitálu investora pre $CVaR_{0,99}$