Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Veronika Kráľová

Poissonův proces

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2013

Poděkování

Touto cestou by som chcela poďakovať vedúcemu práce prof. RNDr. Viktorovi Benešovi, DrSc. za odbornú pomoc a vedenie pri vypracovaní bakalárskej práce, množstvo rád a pripomienok, ktoré pre mňa boli drahocenným prínosom, jeho veľkú ochotu a počet poskytnutých konzultačných hodín.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 23.5.2013 Veronika Kráľová

Název práce: Poissonův proces

Autor: Veronika Kráľová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Poissonův proces je náhodná množina, která analyzuje výskyt nezávislých náhodných bodů v určité množině. Předmětem zkoumání jsou vlastnosti této náhodné množiny. Základní definice a věty jsou uvedeny pro euklidovské prostory libovolné dimenze a později použité při simulování různých typů Poissonových procesů. K jednotlivým simulacím jsou uvedeny algoritmy postupů a naprogramované zdrojové kódy. Statistickým testem úplné prostorové náhodnosti v závěru ověříme, zda vybrané simulované procesy jsou opravdu homogenní Poissonovy procesy s uvedenými vlastnostmi.

Klíčová slova: lokálne konečná náhodná množina, Poissonovo rozdělení, simulace Poissonova procesu, test úplné prostorové náhodnosti

Title: Poisson process

Author: Veronika Kráľová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Poisson process is a random set, which analyses an occurrence of the independent random points in a certain set. An object of study are probabilistic properties of this random set. Basic definitions and properties are formulated for the Euclidean spaces of arbitrary dimension and used to simulate different types of Poisson processes. We provide the algoritm procedures and source codes for each simulation. Statistical test of complete spatial randomness (CSR) verifies in conclusion, if the simulated processes are really homogeneous Poisson processes with specific properties.

Keywords: locally finite random set, Poisson distribution, simulation of the Poisson process, test of complete spatial randomness

Názov práce: Poissonov proces

Autor: Veronika Kráľová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Poissonov proces je náhodná množina, ktorá analyzuje výskyt nezávislých náhodných bodov v určitej množine. Predmetom skúmania sú pravdepodobnostné vlastnosti tejto náhodnej množiny. Základné definície a vety sú uvedené pre euklidovské priestory ľubovoľnej dimenzie a neskôr použité pri simulovaní rôznych typov Poissonových procesov. K jednotlivým simuláciám sú uvedené algoritmy postupov a naprogramované zdrojové kódy. Štatistickým testom úplnej priestorovej náhodnosti v závere overíme, či vybrané simulované procesy sú naozaj homogénne Poissonove procesy s uvedenými vlastnosťami.

Kľúčové slová: lokálne konečná náhodná množina, Poissonovo rozdelenie, simulácia Poissonovho procesu, test úplnej priestorovej náhodnosti

Obsah

Úvod

Poissonov proces je diskrétny náhodný proces, ktorý definujeme ako náhodnú lokálne konečnú podmnožinu euklidovského priestoru. Prvky Poissonovho procesu sú náhodné body, ktoré sú rozmiestnené bez zreteľnej pravidelnosti v ohraničenej množine. Ich počet má Poissonovo rozdelenie, ktoré je dôsledkom ich celkovej nezávislosti vyskytujúcej sa v našich predpokladoch.

Z toho dôvodu uvádzame podkapitolu heuristického odvodenia Poissonovho rozdelenia, ktorej námet sme čerpali z knihy Kingman (2002, str. 9) a doplnili ho o detailné kroky spolu s objasnením postupu. Pred tým však uvádzame definíciu, vlastnosti konvergencie a odvodenie momentov náhodnej veličiny s Poissonovým rozdelením.

Práca sa v hlavnej miere opiera o teóriu z knihy Kingman (2002), z ktorej sú použité dôležité vety a vlastnosti týkajúce sa Poissonovho procesu. Medzi najdôležitejšie označujeme Vetu o superpozícii a Interval Theorem, ktorý patrí k najzákladnejším vetám Poissonovej teórie. Dôkazy sú doplnené o dôležité kroky, ktoré pomáhajú k presnému pochopeniu ich jednotlivých častí.

V druhej kapitole sa zaoberáme simuláciami homogénnych a nehomogénnych Poissonových procesov. Idea simulácií, pomocou ktorej sme skonštruovali jednotlivé algoritmy a postupy, je predstavená v knihe Moller, Waagepetersen (2004, str. 23). Ku každému príkladu je uvedená jeho realizácia, simulovaná pomocou naprogramovaného zdrojového kódu v programe Wolfram Mathematica 9.

V závere testujeme príklady z predchádzajúcej časti a overujeme, či sa skutočne jedná o daný Poissonov proces. Myšlienka testu z knihy Diggle (2003, str. 31) sa opiera o úplnú priestorovú náhodnosť a je použitá na popis algoritmu testu a jeho naprogramovanie v programe Wolfram Mathematica 9. Výsledky sú demonštrované v príklade v závere práce.

Kapitola 1

Poissonov proces v $\mathbb{R}^d$

1.1 Základné pojmy

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor.

Definícia 1. *Náhodná veličina X má binomické rozdelenie, píšeme $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, pre $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$, ak platí*

$$\mathbb{P}(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \tag{1.1}$$

pre $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Definícia 2. *Náhodná veličina X má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\mu > 0$, píšeme $X \sim \mathscr{P}(\mu)$, ak nadobúda hodnotu z oboru celých nezáporných čísel a*

$$\mathbb{P}(X = n) = \pi_n(\mu) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \tag{1.2}$$

pre $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definíciu 2 rozšírime pre hraničné body 0 a ∞:

- $X \sim \mathscr{P}(0)$ ak $\mathbb{P}(X = 0) = 1$;
- $X \sim \mathscr{P}(\infty)$ ak $\mathbb{P}(X = \infty) = 1$.

Veta 1. *Nech $Y_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$, $X \sim \mathscr{P}(\mu)$ a nech $\lim_{n\to\infty} n\, p_n = \mu$, kde $p_n \in (0, 1)$, $\mu \in (0, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

pre $k = 0, 1, \ldots$

Dôkaz. Z (1.1) dostávame

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(Y_n = k\right) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} {p_n}^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu^k}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\underbrace{n\quad n\quad \dots \quad n}_{k-krát}}}_{\to 1} \underbrace{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}_{\to e^{-\mu}} \underbrace{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k}}_{\to 1} =$$

$$e^{-\mu}\,\frac{\mu^k}{k!} = \mathbb{P}\left(X = k\right),$$

kde v poslednej rovnosti sme použili (1.2).

❑

V nasledujúcom texte budeme uvažovať konvergenciu postupností a radov náhodných veličín v zmysle konvergencie pre každé $\omega \in \Omega$.

Veta 2 (O spočítateľnej aditivite)**.** *Nech X_j, $j = 1, 2, \dots$ sú nezávislé náhodné veličiny a nech $X_j \sim \mathscr{P}(\mu_j)$ pre každé j. Ak $\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$ konverguje, potom aj $Z = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$ konverguje a $Z \sim \mathscr{P}(\sigma)$. Naopak, ak σ diverguje, potom aj Z diverguje.*

Dôkaz. Indukciou podľa n platí, že $Z_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim \mathscr{P}(\sigma_n)$, kde $\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$. Teda pre každé r

$$\mathbb{P}(Z_n \le r) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \le r\right) = \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n) = \sum_{k=0}^{r} e^{-\sigma_n}\,\frac{{\sigma_n}^k}{k!}.$$

Náhodné javy $[Z_n \le r]$ pre fixné r tvoria nerastúcu postupnosť v n,

$$\bigcap_n [Z_n \le r] = [Z \le r].$$

Potom zo spojitosti pravdepodobnostnej miery

$$\mathbb{P}(Z \le r) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j \le r\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \le r\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n).$$

Ak σ_n konverguje k $\sigma < \infty$, zo spojitosti π_k platí, že

$$\mathbb{P}(Z \le r) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n) = \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma),$$

a teda

$$\mathbb{P}(Z = r) = \pi_r(\sigma) = e^{-\sigma}\,\frac{\sigma^r}{r!}.$$

Z toho vidíme, že Z je konečné a $Z \sim \mathscr{P}(\sigma)$.

V prípade, že $\sigma_n \to \infty$, platí

$$\mathbb{P}(Z \leq r) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-\sigma_n} \sum_{k=0}^{r} \frac{{\sigma_n}^k}{k!} = 0,$$

takže $\mathbb{P}(Z > r) = 1$ pre každé r. Teda Z diverguje s pravdepodobnosťou 1. ❑

Nech $X \sim \mathscr{P}(\mu)$. Ak z je reálne alebo komplexné číslo, $|z| \leq 1$, potom náhodná veličina z^X je ohraničená a jej stredná hodnota sa rovná

$$\mathsf{E}\ z^X = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mu) z^n = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu z)^n}{n!} = e^{-\mu} e^{\mu z} = e^{-\mu(1-z)}$$

pre $0 \leq \mu < \infty$. Z danej rovnosti získame hodnoty momentov náhodnej veličiny X derivovaním a položením $z = 1$:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\ X &= \mu, \\ \mathsf{E}\,[X(X-1)] &= \mu^2, \\ &\dots, \end{aligned}$$

z čoho dostaneme $\mathsf{E}\ X^2 = \mu + \mu^2$, a teda rozptyl náhodnej veličiny X je rovný $\operatorname{var} X = \mu$.

1.2 Heuristické odvodenie Poissonovho rozdelenia

Uvažujme body náhodne rozmiestnené v rovine $\mathbb{R}^2$. Pre ľubovoľnú borelovskú množinu $A \subset \mathbb{R}^2$ nech počet bodov $N(A)$ v A je náhodná veličina. Označme A_t kruh v $\mathbb{R}^2$ s polomerom t a pre $n \geq 0$

$$\begin{aligned} p_n(t) &= \mathbb{P}\big(N(A_t) = n\big); \\ q_n(t) &= \mathbb{P}\big(N(A_t) \leq n\big). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pravdepodobnosť, že v medzikruží $A_{t+h} \setminus A_t$, $h > 0$ sa vyskytuje práve jeden bod, sa rovná pravdepodobnosti, že hodnota náhodnej veličiny $N(A_t)$ sa zvýši o 1, práve keď polomer t sa zvýši o h. Pre malé h túto pravdepodobnosť predpokladáme malú. Ak zanedbáme pravdepodobnosť výskytu 2 a viac bodov v tomto medzikruží, tak sa táto pravdepodobnosť rovná $\mu(t+h) - \mu(t)$, kde

$$\mu(t) = \mathsf{E}\,[N(A_t)].$$

Ak je počet bodov v $A_{t+h} \setminus A_t$ nezávislý od počtu bodov v množine A_t, potom pre malé h platí

$$q_n(t) - q_n(t+h) = p_n(t)\big(\mu(t+h) - \mu(t)\big). \tag{1.4}$$

Pre $h \to 0$ dostaneme z (1.4) diferenciálnu rovnicu prvého rádu,

$$-\frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t} = p_n \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}. \tag{1.5}$$

Z (1.3) vidíme, že $p_0 = q_0$, $p_n = q_n - q_{n-1}$, čo sa po dosadení do (1.5) pre $n = 0$ rovná

$$-\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} = p_0 \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} \tag{1.6}$$

a pre $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}q_{n-1}}{\mathrm{d}t} &= p_n \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} \\
-\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} + p_{n-1} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} &= p_n \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} &= (p_{n-1} - p_n) \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ak v rovnici (1.6) prevedieme p_0 na ľavú stranu, po úprave dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\log p_0 + \mu) = 0$$

a z počiatočných podmienok $p_0(0) = 1$, $\mu(0) = 0$ plynie

$$\begin{aligned}
\log p_0 + \mu &= 0 \\
p_0(t) &= e^{-\mu(t)}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

pre všetky t. Rovnicu (1.7) upravíme na tvar

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_n \, e^{\mu}) = \frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} \, e^{\mu} + p_n \, e^{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} &= \\
(p_{n-1} - p_n) \, e^{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} + p_n \, e^{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} &= p_{n-1} \, e^{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

a keďže $p_n(0) = 0$ pre $n \geq 1$,

$$p_n(t) = e^{-\mu(t)} \int_0^t p_{n-1}(s) \, e^{\mu(s)} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} \mathrm{d}s.$$

Z toho indukciou podľa n a so začiatkom (1.8) dostaneme

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= e^{-\mu(t)} \int_0^t p_0(s) \, e^{\mu(s)} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s = e^{-\mu(t)} \mu(t), \\
p_2(t) &= e^{-\mu(t)} \int_0^t p_1(s) \, e^{\mu(s)} \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s = e^{-\mu(t)} \int_0^t \mu(s) \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s} \, \mathrm{d}s = \\
&\quad e^{-\mu(t)} \frac{1}{2} (\mu(t)^2 - \underbrace{\mu(0)^2}_{0}) = e^{-\mu(t)} \frac{\mu(t)^2}{2} \\
&\ldots, \\
p_n(t) &= e^{-\mu(t)} \frac{\mu(t)^n}{n!},
\end{aligned}$$

a teda $N(A_t)$ má Poissonovo rozdelenie $\mathscr{P}\big(\mu(t)\big)$.

1.3 Základné vlastnosti Poissonovho procesu

Nech $\mathbb{R}^d$ je euklidovský priestor dimenzie d, v celej práci S uzavretá konvexná podmnožina $\mathbb{R}^d$ s borelovskou σ-algebrou $\mathcal{B}(S)$ a $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}(S)$ systém všetkých ohraničených množín. Množina $B \subset S$ je lokálne konečná, keď $B \cap K$ je konečná pre každú $K \in \mathcal{B}_0$. Buď $\mathfrak{N}$ systém lokálne konečných podmnožín S so σ-algebrou

$$\mathcal{N} = \sigma\big(\big\{A \in \mathfrak{N} : N(A \cap B) = m : B \in \mathcal{B}_0, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big\}\big).$$

Náhodná lokálne konečná množina B je merateľné zobrazenie z pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ do $(\mathfrak{N}, \mathcal{N})$.

Definícia 3. *Náhodná lokálne konečná podmnožina* Π *priestoru* S *je Poissonov proces, ak platí:*

1. *pre každú množinu* $A \in \mathcal{B}(S)$ *má* $N(A)$ *Poissonovo rozdelenie s parametrom* $\mu = \mu(A)$, $0 \leq \mu \leq \infty$, *kde náhodná veličina* $N(A)$ *udáva počet bodov* Π *v* A*;*

2. *pre ľubovoľné množiny* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(S)$, $n \in \mathbb{N}$ *po dvoch disjunktné sú náhodné veličiny* $N(A_1), N(A_2), \ldots, N(A_n)$ *nezávislé.*

Poznámka. Pre každú merateľnú množinu $A \subseteq S$ z vlastností Poissonovho rozdelenia plynie

$$\mathsf{E}\,[N(A)] = \mu(A).$$

S pravdepodobnosťou 1 platí nasledujúca implikácia:

1. Ak je $\mu(A)$ konečná, potom $\Pi \cap A$ je konečná. Špeciálne, ak $\mu(A) = 0$, potom $\Pi \cap A = \emptyset$.

2. Ak je $\mu(A) = \infty$, potom $\Pi \cap A$ je spočítateľne nekonečná.

Poznámka. μ z definície 3 nazývame aj miera intenzity. Ak je daná ako

$$\mu(A) = \int_A \lambda(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

$\lambda : S \to [0, \infty)$ sa nazýva funkcia intenzity a je lokálne integrovateľná pre všetky ohraničené $A \subseteq S$. $\lambda(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ môžeme interpretovať ako pravdepodobnosť výskytu bodu v nekonečne malej sfére so stredom ξ a objemom $\mathrm{d}\xi$.

Definícia 4. *Poissonov proces* Π *s funkciou intenzity* λ *na priestore* S *sa nazýva homogénny Poissonov proces, ak* $\lambda > 0$ *je konštanta (v takom prípade* λ *nazývame intenzita). Inak ide o nehomogénny Poissonov proces.*

Poznámka. Homogénny Poissonov proces Π s intenzitou $\lambda = 1$ na priestore S sa nazýva jednotkový Poissonov proces.

Definícia 5 (Moller, Waagepetersen, 2004, str. 21)**.** *Nech* $p : S \to [0, 1]$ *je merateľná funkcia a* Π *Poissonov proces na* S*. Poissonov proces* $\Pi_{thin} \subseteq \Pi$ *získaný zahrnutím* $\xi \in \Pi$ *do* Π_{thin} *s pravdepodobnosťou* $p(\xi)$*, kde body sú zahrnuté/vyradené nezávisle od seba, sa nazýva nezávislé zúženie* Π *s pravdepodobnosťou zachovania* $p(\xi), \xi \in S$*. Teda*

$$\Pi_{thin} = \{\xi \in \Pi : R(\xi) \leq p(\xi)\},$$

kde $R(\xi)$*,* $\xi \in \Pi$*, majú rovnomerné rozdelenie na intervale* $[0, 1]$ *a sú vzájomne nezávislé a nezávislé od* Π*.*

Poznámka. Ak Π je jednotkový Poissonov proces, potom Π_{thin} má funkciu intenzity $p(\xi)$.

Lemma 3 (O zdisjunktnení)**.** *Nech* Π_1 *a* Π_2 *sú nezávislé Poissonove procesy na* S *s mierami intenzity* μ_1 *a* μ_2 *a nech* A *je merateľná množina s konečnými* $\mu_1(A)$ *a* $\mu_2(A)$*. Potom* Π_1 *a* Π_2 *sú disjunktné na* A *s pravdepodobnosťou* 1.

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v Kingman (2002, str. 14).

❑

Veta 4 (O superpozícii)**.** *Nech* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ *je spočítateľná postupnosť nezávislých Poissonových procesov na* S *a nech* Π_n *má mieru intenzity* μ_n *pre každé* n*. Potom superpozícia týchto Poissonových procesov*

$$\Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

je Poissonov proces s mierou $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$.

Dôkaz. Označme $N_n(A)$ počet bodov Π_n v merateľnej množine A. Ak je $\mu_n(A)$ konečná pre všetky n, z lemmy 3 platí, že náhodné množiny Π_n sú disjunktné na A, a teda počet bodov Π na A sa rovná

$$N(A) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(A). \tag{1.9}$$

Z vety 2 platí $N(A) \sim \mathscr{P}(\mu)$. Ak $\mu_n(A) = \infty$ pre nejaké n, potom

$$N_n(A) = N(A) = \infty$$

a (1.9) platí triviálne.

Teraz stačí dokázať, že $N(A_1), N(A_2), \ldots, N(A_k)$ sú nezávislé, ak $A_j \in \mathcal{B}(S)$ pre $j = 1, 2, \ldots, k$ sú disjunktné. To je jasné, lebo náhodné veličiny

$$N_n(A_j), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{1.10}$$

sú všetky nezávislé a náhodná veličina $N(A_j)$ je definovaná pomocou podmnožiny takých veličín z (1.10), ktorá je disjunktná od zodpovedajúcich podmnožín z (1.10) pre $N(A_i)$, $i = \{1, 2, \ldots, k\} \setminus j$.

❑

1.4 Poissonov proces na $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}_+$

Nech Π je Poissonov proces na $\mathbb{R}$ a nech počet bodov Π na intervale $A = (a, b)$ má Poissonovo rozdelenie $\mathscr{P}(\lambda\,|A|)$, kde $|A|$ označuje dĺžku A, $\lambda > 0$. Potom počet bodov $N(a, b)$ na intervale (a, b) má strednú hodnotu $\lambda\,|A|$, teda Π je Poissonov proces s intenzitou λ. V dôkaze nasledujúcej vety sa využíva usporiadanie reálnej polopriamky.

Veta 5 (Interval Theorem). *Nech* Π *je Poissonov proces s intenzitou* λ *na intervale* $[0,\infty)$ *a pre body* Π *platí*

$$0 < X_1 < X_2 < X_3 < \dots$$

Potom náhodné veličiny

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1, \\ Y_n &= X_n - X_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

sú nezávislé a každá má hustotu pravdepodobnosti

$$g(y) = \lambda\, e^{-\lambda y}, \quad y > 0. \tag{1.11}$$

Dôkaz. Uvažujme náhodnú podmnožinu $[0,\infty)$ v tvare

$$\Pi' = \{X_2 - X_1, X_3 - X_1, \dots\}.$$

Chceme ukázať, že X_1 a Π' sú nezávislé a že Π' je Poissonov proces s intenzitou λ. Podľa Kingman (2002) uvažujme ľubovoľnú spojitú funkciu f na intervale $[0,\infty)$, ktorá je nulová mimo ohraničenej množiny a splňuje $f(0) = 0$. K nej priradíme súčet

$$\Sigma' = \sum_{n=2}^{\infty} f(X_n - X_1).$$

Keď dokážeme, že X_1 a Σ' sú nezávislé a že Σ' má rovnaké rozdelenie ako

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} f(X_n),$$

bude ukázané vyššie požadované.

Nech ξ_k je najmenší celočíselný násobok 2^{-k} väčší než X_1. Potom ξ_k je náhodná veličina, ktorá pre $k \to \infty$ klesá k X_1, a teda

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \lim_{k\to\infty} \Sigma^k, \\ \Sigma^k &= \sum_{n=2}^{\infty} f(X_n - \xi_k), \end{aligned}$$

pričom $f(x) = 0$ pre $x < 0$. Pre každé z, x platí

$$\mathbb{P}(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{P}(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x, \xi_k = l2^{-k}). \tag{1.12}$$

Ak $\xi_k = l2^{-k}$, body X_n v $(l2^{-k}, \infty)$ tvoria na danom intervale Poissonov proces, ktorý je nezávislý od $X_1 < l2^{-k}$. Z toho

$$\Sigma^k = \sum_{n=2}^{\infty} f(X_n - l2^{-k})$$

má rovnaké rozdelenie ako Σ a

$$\frac{\mathbb{P}(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x, \xi_k = l2^{-k})}{\mathbb{P}(\xi_k = l2^{-k})} = \mathbb{P}(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x \mid \xi_k = l2^{-k}) =$$
$$\mathbb{P}(\Sigma^k \leq z \mid \xi_k = l2^{-k})\, \mathbb{P}(X_1 \leq x \mid \xi_k = l2^{-k}) =$$
$$\mathbb{P}(\Sigma \leq z \mid \xi_k = l2^{-k})\, \mathbb{P}(X_1 \leq x \mid \xi_k = l2^{-k}) =$$
$$\mathbb{P}(\Sigma \leq z)\, \frac{\mathbb{P}(X_1 \leq x, \xi_k = l2^{-k})}{\mathbb{P}(\xi_k = l2^{-k})}.$$

Dosadením do (1.12) dostávame

$$\mathbb{P}(\Sigma^k \leq z, X_1 \leq x) = \mathbb{P}(\Sigma \leq z)\, \mathbb{P}(X_1 \leq x) =$$
$$\mathbb{P}(\Sigma \leq z)\, \mathbb{P}(N(0, x\,] \geq 1) = \mathbb{P}(\Sigma \leq z)\, (1 - e^{-\lambda x}).$$

Pre $k \to \infty$

$$\mathbb{P}(\Sigma' \leq z, X_1 \leq x) = \mathbb{P}(\Sigma \leq z) \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y,$$

z čoho vidíme, že Σ' je nezávislé od X_1 a má rovnaké rozdelenie ako Σ a X_1 má hustotu pravdepodobnosti (1.11).

Indukciou dostávame, že pre každé m sú $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ a Π^m nezávislé, kde

$$\Pi^m = \{X_{m+1} - X_m, X_{m+2} - X_m, \ldots\}$$

a každé Y_i, $i = \{1, 2, \ldots, m\}$ má hustotu pravdepodobnosti (1.11).

❑

1.5 Ďalšie vlastnosti Poissonovho procesu

Nech Π je Poissonov proces na $S \subseteq \mathbb{R}^d$ s mierou intezity μ, $\mu(S) < \infty$. Už vieme, že Π je skoro iste konečná podmnožina S a $N(S) \sim \mathscr{P}\big(\mu(S)\big)$.

Poznámka. Označme $\mathbb{P}_n$ podmienenú pravdepodobnosť, pre ktorú platí

$$\mathbb{P}_n(\,.\,) = \mathbb{P}\big(\,.\,|N(S) = n\big) \tag{1.13}$$

a p pravdepodobnostnú mieru na S

$$p(\,.\,) = \frac{\mu(\,.\,)}{\mu(S)}. \tag{1.14}$$

Veta 6. *Nech $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sú disjunktné podmnožiny S. Potom*

$$\mathbb{P}_n\big(N(A_1) = n_1, N(A_2) = n_2, \ldots, N(A_k) = n_k\big) =$$
$$\frac{n!}{n_0! \ldots n_k!}\, p(A_0)^{n_0} \ldots p(A_k)^{n_k},$$

kde $n_0 = n - \sum_{j=1}^k n_j$ a $A_0 = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)^c$.

Dôkaz. Z (1.13) dostávame

$$\mathbb{P}_n\big(N(A_1)=n_1, N(A_2)=n_2,\dots,N(A_k)=n_k\big) =$$
$$\mathbb{P}\big(N(A_1)=n_1, N(A_2)=n_2,\dots,N(A_k)=n_k | N(S)=n\big) =$$

$$\frac{\mathbb{P}\big(N(A_0)=n_0, N(A_1)=n_1, N(A_2)=n_2,\dots,N(A_k)=n_k\big)}{\mathbb{P}\big(N(S)=n\big)} =$$

$$\frac{\prod_{j=0}^{k} e^{-\mu(A_j)}\frac{\mu(A_j)^{n_j}}{n_j!}}{e^{-\mu(S)}\frac{\mu(S)^n}{n!}} = \frac{n!}{n_0!\dots n_k!}\left(\frac{\mu(A_0)}{\mu(S)}\right)^{n_0}\dots\left(\frac{\mu(A_k)}{\mu(S)}\right)^{n_k} =$$

$$\frac{n!}{n_0!\dots n_k!}\,p(A_0)^{n_0}\dots p(A_k)^{n_k}$$

a v poslednej rovnosti sme použili (1.14).

❑

Definícia 6. *Nech $S \subseteq \mathbb{R}^d$ a $A_1, A_2, \dots, A_k$ sú disjunktné podmnožiny S. Náhodná lokálne konečná množina $\Pi \subseteq S$, ktorá splňuje*

1. *počet bodov Π je rovný n;*
2. $\mathbb{P}_n\big(N(A_1)=n_1,\dots,N(A_k)=n_k\big) = \frac{n!}{n_0!\dots n_k!}\,p(A_0)^{n_0}\dots p(A_k)^{n_k}$,

kde $n_0 = n - \sum_{j=1}^{k} n_j$, $A_0 = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)^c$ a p je pravdepodobnostná miera na S, sa nazýva Bernoulliho proces.

Poznámka. Pre Bernoulliho proces z definície 6 platí

$$\mathsf{E}\,[N(A)] = n\,p(A).$$

Poznámka. Môžeme povedať, že podmienením Poissonovho procesu na $N(S)=n$, prevedieme Poissonov proces s konečnou mierou intenzity μ na Bernoulliho proces s parametrom n a pravdepodobnostnou mierou p.

Veta 7 (O existencii Poissonovho procesu)**.** *Nech μ je neatomická miera na S $\big($t.j. $\mu(\{x\})=0\ \forall x \in S\big)$, ktorú môžeme zapísať vo forme*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \qquad \mu_n(S) < \infty.$$

Potom existuje Poissonov proces na S s mierou intenzity μ.

Dôkaz. Bez újmy na všeobecnosti predpokladáme $\mu_n(S) > 0$ pre všetky n. Nech

$$N_n, X_{n\,r}, \quad n, r = 1, 2, 3, \dots$$

sú nezávislé náhodné veličiny, také, že $N_n \sim \mathscr{P}\big(\mu_n(S)\big)$ a $X_{n\,r}$ má rozdelenie

$$p_n(\,.\,) = \frac{\mu_n(\,.\,)}{\mu_n(S)}.$$

Označíme
$$\Pi_n = \{X_{n\,1}, X_{n\,2}, \dots, X_{n\,N_n}\}$$
a
$$\Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n.$$
Nech $N_n(A)$ označuje počet bodov Π_n na A. Pre množiny $A_1, A_2, \dots, A_k$ disjunktné a $A_0 = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k)^c$ z vety 6 platí

$$\mathbb{P}\big(N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k | N_n = m\big) = \frac{m!}{m_0! \dots m_k!} p_n(A_0)^{m_0} \dots p_n(A_k)^{m_k},$$

kde $m_0 = m - \sum_{j=1}^{k} m_j$. Označíme
$$\sum m_j = \sum_{j=1}^{k} m_j$$
a potom
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k\big) = \\
&\sum_{m=\sum m_j}^{\infty} \mathbb{P}\big(N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k | N_n = m\big) \cdot \\
&\quad \cdot \mathbb{P}(N_n = m) = \\
&\sum_{m=\sum m_j}^{\infty} e^{-\mu_n(S)} \frac{\mu_n(S)^m}{m!} \frac{m!}{m_0! \dots m_k!} \prod_{j=0}^{k} p_n(A_j)^{m_j} = \\
&\sum_{m=\sum m_j}^{\infty} e^{-\mu_n(S)} \frac{\mu_n(S)^m}{m!} \frac{m!}{m_0! \dots m_k!} \prod_{j=0}^{k} \left(\frac{\mu_n(A_j)}{\mu_n(S)}\right)^{m_j} = \\
&\sum_{m=\sum m_j}^{\infty} \pi_{m-\sum m_j}\big(\mu_n(A_0)\big) \prod_{j=1}^{k} \pi_{m_j}\big(\mu_n(A_j)\big) = \prod_{j=0}^{k} \pi_{m_j}\big(\mu_n(A_j)\big).
\end{aligned}$$

Teda $N_n(A_j) \sim \mathscr{P}\big(\mu_n(A_j)\big)$ sú nezávislé náhodné veličiny a Π_n sú nezávislé Poissonove procesy s príslušnými mierami intenzity μ_n. Z vety 4 je potom Π Poissonov proces s mierou intenzity μ.

❑

Kapitola 2

Simulácie Poissonovho procesu

2.1 Generovanie náhodných čísel z niektorých rozdelení

Základom generovania náhodných čísel z určitého rozdelenia je transformovanie postupnosti náhodných veličín s rovnomerným rozdelením na intervale $[0,1]$ na veličiny z požadovaného rozdelenia. Táto postupnosť sa vytvára aritmetickými procedúrami, kde náhodné čísla získavame pomocou rekurentných vzorcov, v ktorých nasledujúce číslo závisí na jednom či viacerých predchádzajúcich. Čísla generované týmto spôsobom nazývame pseudonáhodné.

Nech náhodná veličina R má rovnomerné rozdelenie na intervale $(0,1)$, píšeme $R \sim \mathscr{R}(0,1)$.

1. Generovanie náhodných čísel z Poissonovho rozdelenia.

   Nech náhodná veličina $X \sim \mathscr{P}(\mu)$ a $R \sim \mathscr{R}(0,1)$. Uvažujme pravdepodobnosť $\pi_n(\mu)$ z (1.2). Pravdepodobnosť, že X nadobudne hodnotu menšiu alebo rovnú než n, je rovná

   $$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \pi_k(\mu),$$

   označme ju s_n pre $n = 0, 1, \ldots$ a nech $s_{-1} = 0$.

   Náhodné číslo x z Poissonovho rozdelenia s parametrom μ potom generujeme podľa vzťahu:

   $$\text{akonáhle } s_{n-1} < R \leq s_n, \text{ potom } x = n.$$

2. Generovanie náhodných čísel z exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ.

   Nech je daná distribučná funkcia

   $$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-\lambda x}, \quad && x \geq 0; \\ &= 0, && inak \end{aligned} \tag{2.1}$$

   a nech náhodná veličina $R \sim \mathscr{R}(0,1)$. Potom náhodná veličina $X = F^{-1}(R)$ má exponenciálne rozdelenie s distribučnou funkciou $F(x)$, kde $F^{-1}(R)$ je inverzná funkcia k (2.1).

Náhodné číslo x z exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ sa teda generuje podľa vzťahu:

$$\begin{aligned} R &= 1 - e^{-\lambda x} \\ 1 - R &= e^{-\lambda x} \\ \ln(1-R) &= -\lambda x \\ x &= -\frac{1}{\lambda}\ln(1-R). \end{aligned}$$

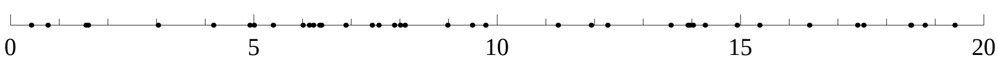
2.2 Simulácia homogénneho Poissonovho procesu

Nech Π je homogénny Poissonov proces na $S \subset \mathbb{R}^d$. Označme $\lambda_0 > 0$ intenzitu Π. Nasledujúce algoritmy formulujeme pomocou Moller, Waagepetersen (2004, str. 23).

Algoritmus 1. *Nech $d = 1$, potom Poissonov proces Π na $S = [0, c]$, $c > 0$ simulujeme pomocou vety 5.*

1. *Zvolíme $c > 0$ pre $S = [0, c]$ a $\lambda_0 > 0$.*
2. *Označíme $\xi^0 = 0$ a nech*
$$\xi^i = \xi^{i-1} + X^i$$
pre $i = 1, 2, \dots, n+1$, kde
$$0 < \xi^1 < \xi^2 < \dots < \xi^n \le c < \xi^{n+1}$$
a $X^1, X^2, \dots, X^{n+1}$ vygenerujeme nezávisle pomocou postupu 2 z podkapitoly 2.1. ako náhodné čísla z exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ_0.
3. *$\Pi = \{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n\}$ je Poissonov proces na S s intenzitou λ_0.*

Príklad. Simulujme homogénny Poissonov proces Π na $S = [0, 20]$ s intenzitou $\lambda = 2$ pomocou algoritmu 1. Zdrojový kód v programe Wolfram Mathematica 9 je uvedený na priloženom CD. Generovanie náhodných čísel realizujeme pomocou zabudovaného generátora.



Obr. 2.1: Realizácia homogénneho Poissonovho procesu na intervale $S = [0, 20]$.

Algoritmus 2. *Nech $d \ge 2$ a $S = [0, a_1] \times \dots \times [0, a_d]$.*

1. *Zvolíme $a_1, a_2, \dots, a_d > 0$ pre $S = [0, a_1] \times \dots \times [0, a_d]$ a $\lambda_0 > 0$.*
2. *Pomocou postupu 1 z podkapitoly 2.1. vygenerujeme počet bodov $N(S)$ homogénneho Poissonovho procesu Π ako náhodné číslo z Poissonovho rozdelenia $\mathscr{P}(\lambda_0 a_1 \dots a_d)$.*

3. Pomocou generátora náhodných čísel z rovnomerného rozdelenia na S vygenerujeme umiestnenia nezávislých bodov

$$\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{N(S)},$$

kde $\xi^j = (\xi_1^j, \ldots, \xi_d^j)$ *a pre* $R \sim \mathscr{R}(0,1)$

$$\xi_k^j = a_k R, \quad j = 1, \ldots, N(S).$$

Potom body $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{N(S)}$ *tvoria body Poissonovho procesu* Π *na* S.

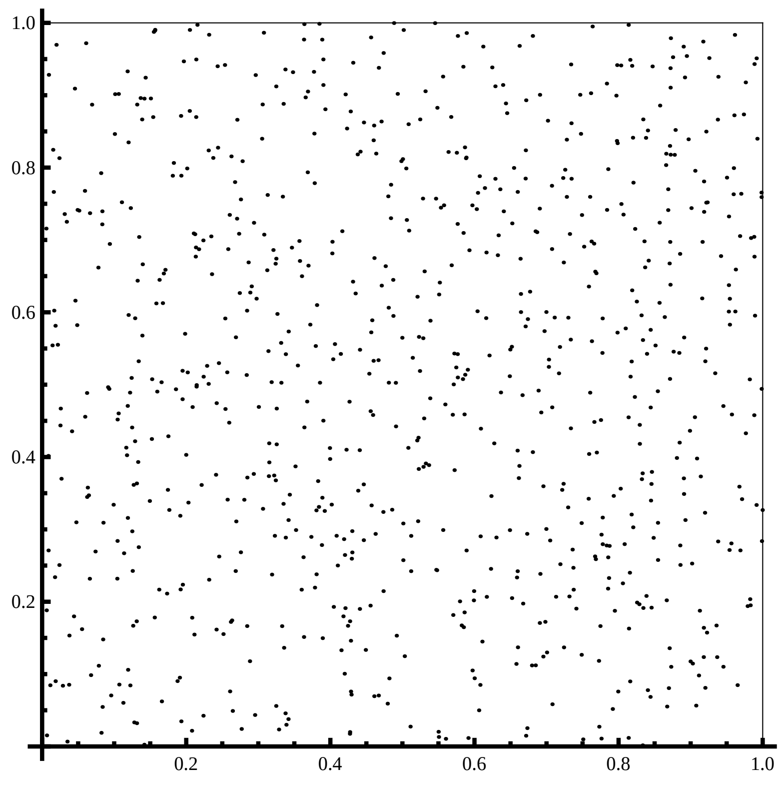
Poznámka. V 3. kroku algoritmu 2 vlastne generujeme Bernoulliho proces z definície 6.

Poznámka. Ak je S ohraničená množina, ale nie je daná v tvare $[0, a_1] \times \cdots \times [0, a_d]$, potom najprv simulujeme Poissonov proces na $S_0 \supset S$, kde

$$S_0 = [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_d]$$

a potom zanedbáme body v množine $S_0 \setminus S$.

Príklad. Simulujme homogénny Poissonov proces Π s intenzitou $\lambda = 800$ na množine $S = [0,1] \times [0,1]$ pomocou algoritmu 2. Zdrojový kód v programe Wolfram Mathematica 9 je uvedený na priloženom CD. Generovanie náhodných čísel realizujeme pomocou zabudovaného generátora.



Obr. 2.2: Realizácia homogénneho Poissonovho procesu na $S = [0,1] \times [0,1]$.

2.3 Simulácia nehomogénneho Poissonovho procesu

Nech Π je nehomogénny Poissonov proces na $S \subset \mathbb{R}^d$. Označíme $\lambda(\xi),\ \ \xi \in S$ funkciu intenzity Poissonovho procesu, ktorá je zhora ohraničená konštantou $\lambda_0 \geq 0$.

Algoritmus 3. *Nech $d \geq 2$ a $S = [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_d]$.*

1. *Zvolíme $a_1, a_2, \ldots, a_d > 0$ pre $S = [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_d]$ a $\lambda(\xi)$, $\xi \in S$. Spočítame $\lambda_0 \geq \lambda(\xi)\ \forall \xi \in S$.*
2. *Pomocou postupu 1 z podkapitoly 2.1. vygenerujeme počet bodov $N(S)$ homogénneho Poissonovho procesu Π_0 ako náhodné číslo z Poissonovho rozdelenia $\mathscr{P}(\lambda_0\, a_1 \ldots a_d)$.*
3. *Pomocou generátora náhodných čísel z rovnomerného rozdelenia na S vygenerujeme umiestnenia nezávislých bodov*
$$\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{N(S)},$$
ktoré tvoria body homogénneho Poissonovho procesu Π_0 na S.
4. *Pre každý bod ξ^i z Π_0 spočítame jeho pravdepodobnosť zachovania*
$$p(\xi^i) = \frac{\lambda(\xi^i)}{\lambda_0}, \quad i = 1, \ldots, N(S)$$
a vygenerujeme náhodné číslo $R(\xi^i)$ z rovnomerného rozdelenia na intervale $[0, 1]$.
5. *Nehomogénny Poissonov proces Π získame ako nezávislé zúženie Π_0 s pravdepodobnosťou zachovania $p(\xi^i)$,*
$$\Pi = \{\xi^i \in \Pi_0, i = 1, \ldots, N(S) : R(\xi^i) \leq p(\xi^i)\}.$$

Poznámka. V algoritme 3 najprv simulujeme homogénny Poissonov proces Π_0 s intenzitou λ_0 a nehomogénny Poissonov proces Π s intenzitou $\lambda(\xi)$ získame pomocou nezávislého zúženia z definície 5.

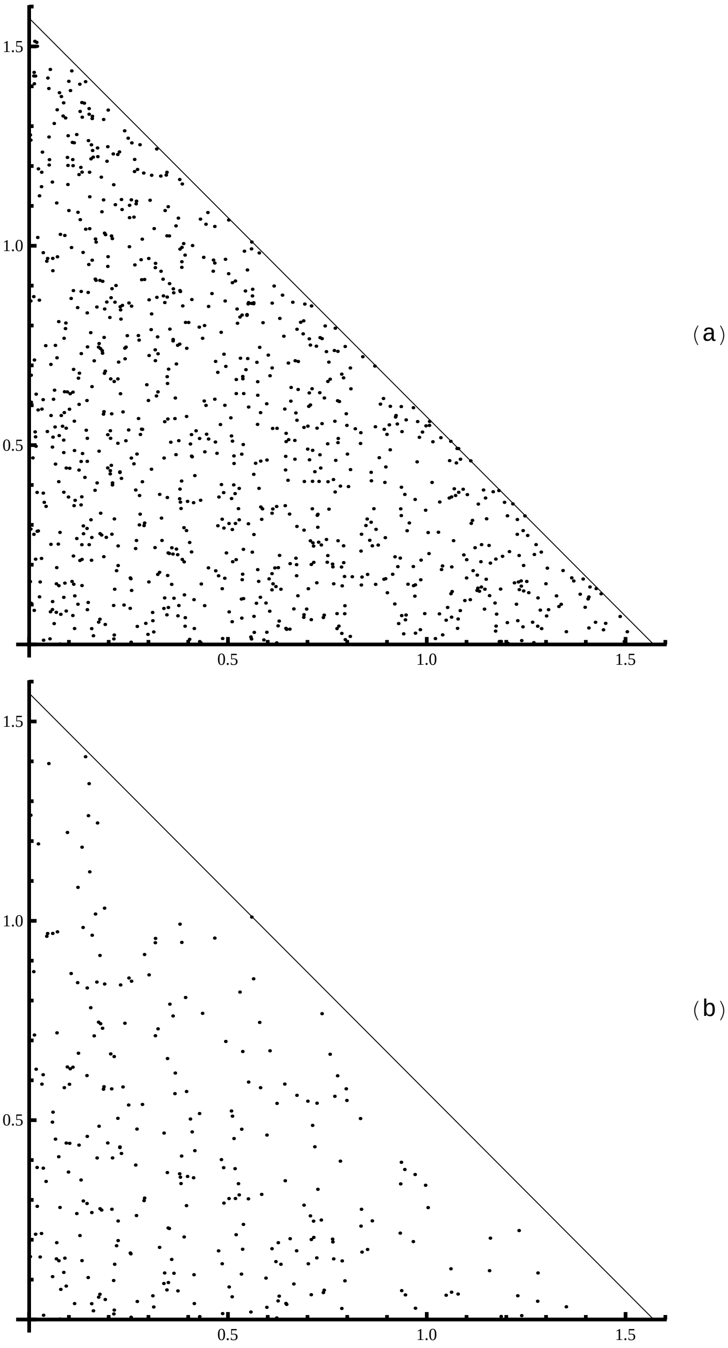
Príklad. Simulujme nehomogénny Poissonov proces Π na

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \frac{\pi}{2}\right\} \tag{2.2}$$

s intenzitou

$$\lambda(x, y) = 800\, \cos(x + y)$$

pomocou algoritmu 3. Zdrojový kód v programe Wolfram Mathematica 9 je uvedený na priloženom CD. Generovanie náhodných čísel realizujeme pomocou zabudovaného generátora.

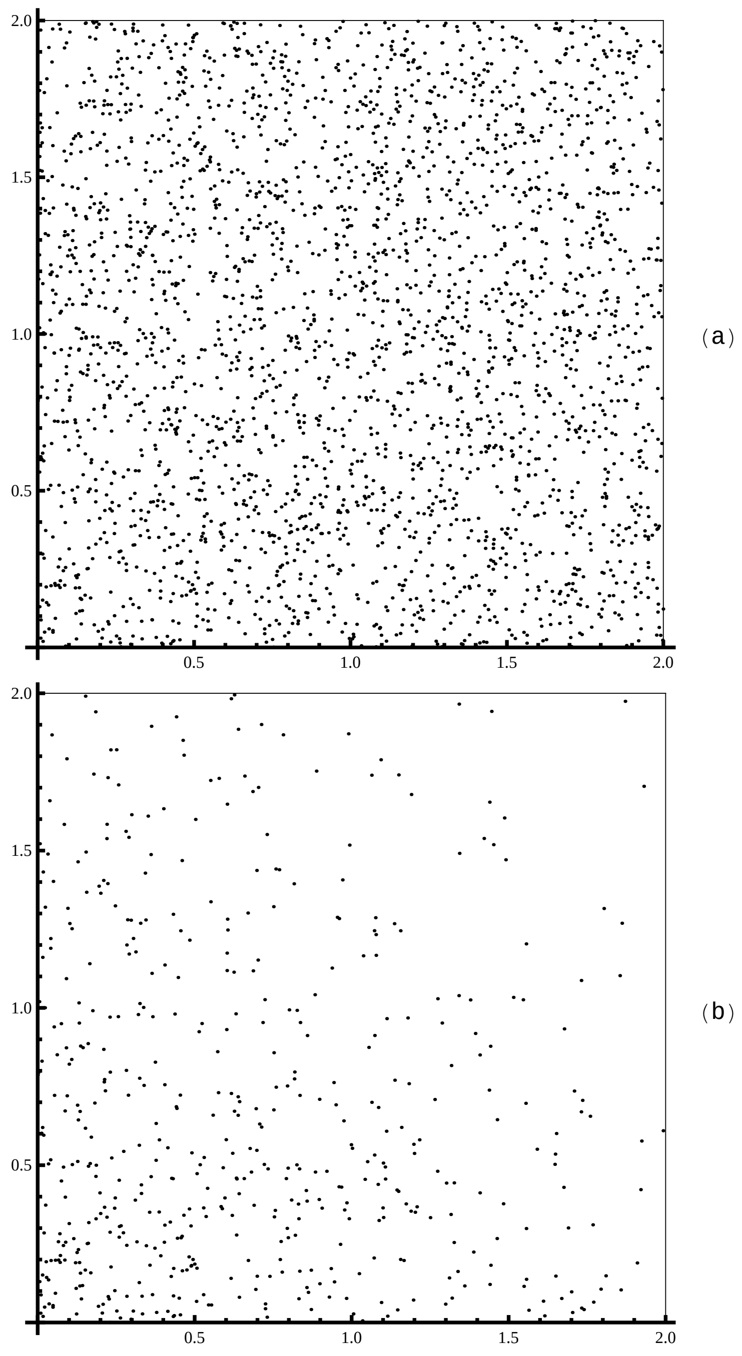


Obr. 2.3: Realizácia nehomogénneho Poissonovho procesu na S v (2.2) s intenzitou $\lambda(x,y) = 800\cos(x+y)$, kde (a) je homogénny Poissonov proces s $\lambda_0 = 800$ a (b) je nehomogénny Poissonov proces s $\lambda(x,y) = 800\cos(x+y)$.

Príklad. Simulujme nehomogénny Poissonov proces Π na $S = [0,2] \times [0,2]$ s intenzitou

$$\lambda(x,y) = 700\ \exp\{-x-y\}$$

pomocou algoritmu 3. Zdrojový kód v programe Wolfram Mathematica 9 je uvedený na priloženom CD. Generovanie náhodných čísel realizujeme pomocou zabudovaného generátora.



Obr. 2.4: Realizácia nehomogénneho Poissonovho procesu na $S = [0,2] \times [0,2]$ s intenzitou $\lambda(x,y) = 700\ \exp\{-x-y\}$, kde (a) je homogénny Poissonov proces s $\lambda_0 = 700$ a (b) je nehomogénny Poissonov proces s $\lambda(x,y) = 700\ \exp\{-x-y\}$.

2.4 Testovanie homogénneho Poissonovho procesu

Nech $\{\xi^1, \dots, \xi^n\} \in B \subseteq \mathbb{R}^d$ je realizácia lokálne konečnej náhodnej množiny B. Chceme zistiť, či $\{\xi^1, \dots, \xi^n\}$ je realizáciou homogénneho Poissonovho procesu. Testujeme hypotézu

$$H_0: \{\xi^1, \dots, \xi^n\} \textit{ tvorí homogénny Poissonov proces}$$

oproti alternatíve

$$H_1 : \{\xi^1, \dots, \xi^n\} \textit{ netvorí homogénny Poissonov proces}$$

na hladine významnosti α. Vykonáme test úplnej priestorovej náhodnosti popísaný v sekcii 3.2.1 Diggle (2003, str. 31), ktorý spočíva v rozdelení množiny B na k disjunktných podregiónov $B_1, \dots, B_k$, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{k} B_i &= B, \\ |B_i| &= |B_j| > 0, \qquad i, j = 1, \dots, k \end{aligned} \tag{2.3}$$

a pre každú dvojicu bodov z daného podregiónu existuje spojnica spájajúca tieto body, patriaca do podregiónu. V každom B_i spočítame počet bodov z $\{\xi^1, \dots, \xi^n\}$, ktoré sa v ňom vyskytujú a označíme ako x_i.

Test hypotézy H_0 oproti alternatíve H_1 je daný testovou štatistikou nazývanou index disperzie

$$\mathcal{I} = \frac{(k-1)\, s^2}{\overline{x}}, \tag{2.4}$$

kde

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k} (x_j - \overline{x})^2, \\ \overline{x} &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_j. \end{aligned}$$

Za platnosti H_0 má $\mathcal{I}$ približne χ^2-rozdelenie s $k-1$ stupňami voľnosti. H_0 zamietame, keď

$$\mathcal{I} \notin \left[\chi^2_{k-1,\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{k-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right] \tag{2.5}$$

na hladine významnosti α.

Poznámka. Pre správnosť testu predpokladáme $\lambda\,|B| > 1$ a je vhodné uvažovať $k > 6$, zároveň $k < 10$ pre $n < 50$ v $\{\xi^1, \dots, \xi^n\}$ a $k \geq 25$ pre $n > 5000$.

Príklad. Uvažujme realizácie Poissonovho procesu na obrázku 2.4. Na obidvoch realizáciách prevedieme test hypotézy

$$H_0 : \{\xi^1, \dots, \xi^n\} \textit{ tvorí homogénny Poissonov proces}$$

oproti alternatíve

$$H_1 : \{\xi^1, \dots, \xi^n\} \textit{ netvorí homogénny Poissonov proces}$$

na hladine $\alpha = 10\%$. Množinu $I = [0, 2] \times [0, 2]$ rozdelíme na štvorcovú maticu $A = (a_{ij})$, kde

$$a_{ij} = \operatorname{card} \left(\frac{2i}{5}, \frac{2(i+1)}{5} \right] \times \left(\frac{2j}{5}, \frac{2(j+1)}{5} \right], \quad i, j = 0, \dots, 4. \tag{2.6}$$

Matica A delí množinu I na $k = 25$ disjunktných podregiónov splňujúcich (2.3). Počet realizovaných bodov v každom podregióne je vyjadrený pomocou a_{ij}. Platí, že dosadením hodnôt do (2.5) je $\chi^2_{24,\,0.05} = 13.8484$ a $\chi^2_{24,\,0.95} = 36.415$, a teda kritický obor je doplnok intervalu

$$\big[13.8484, 36.415\big].$$

1. Pre obrázok 2.4 (a) platí:

   Počet bodov $\{\xi^1, \ldots, \xi^n\}$ na $I = [0,2] \times [0,2]$ je rovný 2773. Počet bodov v jednotlivých regiónoch znázorňujú prvky a_{ij} z (2.6) matice $A_{(a)}$,

$$A_{(a)} = \begin{pmatrix} 105 & 97 & 116 & 108 & 100 \\ 115 & 119 & 100 & 117 & 127 \\ 105 & 123 & 108 & 117 & 105 \\ 110 & 113 & 134 & 107 & 119 \\ 114 & 94 & 112 & 97 & 111 \end{pmatrix}.$$

   Po dosadení do (2.4) je $\mathcal{I}_{(a)} = 20.2834$, a teda nezamietame hypotézu, že (a) je homogénny Poissonov proces.

2. Pre obrázok 2.4 (b) platí:

   Počet bodov $\{\xi^1, \ldots, \xi^n\}$ na $I = [0,2] \times [0,2]$ je rovný 513. Počet bodov v jednotlivých regiónoch znázorňujú prvky a_{ij} z (2.6) matice $A_{(b)}$,

$$A_{(b)} = \begin{pmatrix} 81 & 42 & 32 & 29 & 13 \\ 53 & 39 & 16 & 14 & 15 \\ 37 & 33 & 12 & 10 & 6 \\ 19 & 10 & 10 & 5 & 4 \\ 15 & 11 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Po dosadení do (2.4) je $\mathcal{I}_{(b)} = 416.288$, a teda zamietame hypotézu, že (b) je homogénny Poissonov proces.

Číselné hodnoty v príklade sme vypočítali pomocou naprogramovaného algoritmu v programe Wolfram Mathematica 9, ktorý je uvedený na priloženom CD.

Literatúra

KINGMAN, J. F. C. (2002). *Poisson Processes.* Reprinted. Clarendon Press, Oxford, England. ISBN 0-19-853693 3.

MOLLER, J., WAAGEPETERSEN, R. P. (2004). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes.* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, USA. ISBN 1-58488-265-4.

STOYAN, D., KENDALL, W. S., MECKE, J. (1995). *Stochastic Geometry And Its Applications.* Second edition. Wiley, Chichester, England. ISBN 0-471-95099-8.

DIGGLE, P. J. (2003). *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns.* Second edition. Arnold, London, England. ISBN 0-340-74070-1.

ZVÁRA, K., ŠTĚPÁN, J. (2002). *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-96-3.

Zoznam obrázkov