Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Obtíže žáků při řešení vybraných slovních úloh z výzkumu TIMSS

Pupils' difficulties in solving selected word problems from TIMSS research

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Autor diplomové práce: Petr Matěka

Studijní obor: Učitelství pro 2. a 3. stupeň

Forma studia: prezenční

Diplomová práce dokončena: 2. 5. 2013

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s přispěním podnětného vedení od paní doc. RNDr. Nadi Vondrové, Ph.D., a že jsem citoval veškeré použité zdroje.

Byl jsem zpraven o tom, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, obzvláště se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a také s tím, že jestliže dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat adekvátní příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Praze dne.................................   Podpis ....

Poděkování

Rád bych poděkoval paní doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za její cenné rady a připomínky, které mě při psaní této práce občas vracely ze slepé uličky na správnou cestu a díky kterým má následující text smysluplnou strukturu. Zejména bych paní docentce rád poděkoval za trpělivost, kterou se musela obrnit při kontrole textu mé práce.

Obtíže žáků při řešení vybraných slovních úloh z výzkumu TIMSS.

(Diplomová práce.)

Abstrakt

Teoretická část práce obsahuje popis mezinárodních srovnávacích výzkumů, konkrétně PISA a TIMSS, a analyzuje výsledky českých žáků. Jsou vytipovány oblasti, v nichž byli naši žáci neúspěšní, a z nich byla vybrána oblast slovních úloh a jejich matematizace. Dále je vymezen pojem řešitelská strategie a uvedeny některé relevantní výzkumy z této oblasti.

Jádrem práce je experimentální část, jejímž cílem je zjistit, jaké strategie žáci volí při řešení vybraných úloh ze studie TIMSS a na čem v tomto řešení selhávají, a to prostřednictvím analýzy písemných řešení žáků doplněných rozhovory s nimi. Příčiny, proč byli naši žáci v těchto úlohách v TIMSS 2007 neúspěšní, jsem hledal v chybách, kterých se řešitelé dopustili, přičemž jsem se zaměřil na to, v jaké fázi řešitelského procesu se objevily.

Účastníky výzkumu byli žáci 9. ročníků základních škol, kteří řešili tři předem vybrané slovní úlohy z výzkumu TIMSS. Jejich písemné řešení bylo doplněno rozhovorem s experimentátorem zaměřeným na případné chyby a nejasnosti, které se v nich objevily. Pilotní studie se zúčastnili 4 žáci. Atomární analýza jejich řešení potvrdila vhodnost vybraných úloh k danému účelu, zpřesnila organizační stránku výzkumu a přinesla základní vhled do řešitelských strategií a chyb, jichž se žáci dopustili. Hlavní studie se zúčastnilo 23 žáků, kteří řešili 2 až 3 úlohy. Výsledky analýz jejich řešení sestávají z přehledu strategií, které žáci pro úlohy zvolili, a chyb, díky nimž byli v úlohách neúspěšní. Jednotlivé zajímavé jevy, které se v řešeních objevily, jsou ilustrovány konkrétními pracemi žáků. Analýza každé úlohy končí shrnutím jevů, které se v jejím řešení u žáků objevily ve všech čtyřech fázích řešitelského procesu. Ukázalo se, že žáci mají problémy s pozorným čtením textu a s jeho matematizací, se znalostí vzorce pro obsah kruhu, s přímou úměrností a se zlomky a procenty. Další problém spatřuji v tom, že nemalá část žáků zapomíná na provedení matematické a sémantické zkoušky.

Klíčová slova: PISA, TIMSS, slovní úloha, matematizace, řešitelské strategie, chyby v řešení

Pupils' difficulties in solving selected word problems from TIMSS research. (Diploma Thesis.)

Abstract

The theoretical part of the diploma thesis describes international comparative surveys, namely PISA and TIMSS, and analyses results of Czech pupils. Some areas are distinguished in which our pupils were unsuccessful and from them, the area of word problems and their mathematisation was selected for further work. Next, a solving strategy is characterised and some relevant research from this area is given.

The core of the work lies in the experimental part whose goal was to find out what strategies pupils use when solving selected problems from TIMSS research and why they fail in them, via the analysis of pupils' written solutions complemented by interviews with them. Causes of failure of our pupils in these problems in TIMSS 2007 are looked for in mistakes pupils make, while it is also followed in what phase of the solving process they appear.

The participants of research were pupils of Grade 9 of a primary school who solved three selected word problems from TIMSS research. Their written solutions were complemented by interviews with the experimenter focused on their mistakes and lack of clarity of the solutions. Four pupils participated in a pilot study. The atomic analysis of their solutions confirmed suitability of the selected problems, made the organisational side of research more precise and brought about some insight into solving strategies and mistakes of pupils. Twenty-three pupils participated in the main study, solving 2 to 3 problems. The results of the analyses of their solutions consist of the list of strategies they used for the problems and mistakes they made which caused the failure of their solutions. Interesting phenomena which appeared in the solutions are illustrated by concrete works of pupils. The analysis of each problem ends with a summary of phenomena which appeared in its solutions in the four phases of the solving process. It transpired that pupils had problems with attentive reading of the text and with its mathematisation, with the knowledge of the formula for the area of circle, with direct proportion and fractions and per cent. Other problems lie in the fact that many pupils forget about mathematical and semantic check.

Keyword: PISA, TIMSS, word problem, mathematisation, solving process of mathematical problems,mistakes.

Obsah

1 Úvod

„Errare humanum est", tak zní známé latinské přísloví, jehož česká varianta říká, že mýliti se je lidské. Ve školní praxi by toto heslo mělo platit dvojnásob. Důležité je, aby chyba neušla minimálně učiteli, který by žáka měl vést k jejímu objevení, pochopení a následné nápravě. Otázkou je, co vše považovat za chybu, a hlavně je podstatné uvědomit si, o jaký typ chyby se jedná, zda jde o neuchopení problému či pouze o nepozornost.

Česká republika se zapojuje do mezinárodních šetření PISA a TIMSS již déle jak patnáct let a z výsledků matematice věnovaných částí těchto šetření je patrné, že dochází k poklesu v úrovni matematické gramotnosti (i když výsledky výzkumu TIMSS 2011 dávají jistou naději k lepším zítřkům). Mediální a politická pozornost se však často omezí na konstatování faktu, že naši žáci si oproti minulému šetření pohoršili o tolik a tolik míst, a tak je třeba provést jakousi reformu. Málo pozornosti se věnuje podrobnější analýze těchto výsledků, která by mohla mít důležitý přínos pro školní praxi.

Z tohoto důvodu a také s přispěním vedoucí mé práce jsem si uvědomil, že by bylo dobré pokusit se na několika uvolněných úlohách z výše uvedených mezinárodních šetření provést analýzu písemných řešení žáků devátých ročníků základních škol, abych identifikoval, v které fázi řešitelského procesu mají problémy. To by pak mohlo sloužit k hlubšímu zamyšlení se nad procesem výuky matematiky či některých jejích tematických oblastí.

Cílem této práce bylo vytvořit rejstřík chyb, které mohou bránit našim žákům ve vyřešení daných úloh. Současně jsem se zaměřil na strategie, které žáci volí v jednotlivých úlohách a na čem v těchto strategiích selhávají.

Tato práce se nejprve věnuje mezinárodním šetřením PISA a TIMSS v České republice (***oddíly 2.1, 2.2 a 2.3***). Zabývá se strukturou a zásadními charakteristikami těchto šetření a současně se věnuje výsledkům českých žáků v jednotlivých oblastech, jimž se šetření PISA a TIMSS věnují. Důraz je kladen zejména na výsledky v matematické části a na trendy, které je možno mezi jednotlivými po sobě jdoucími šetřeními v této oblasti vysledovat. Oddíl ***2.2.5*** je věnována kritickému náhledu na výzkum PISA z hlediska přesahu jednotlivých úloh do reality i z hlediska analýzy výsledků.

Další část práce je věnována vymezení pojmu slovní úloha (***oddíl 2.4***) a jednotlivých etap, ze kterých se skládá řešení úlohy a kterými řešitel prochází. Dále je charakterizován pojem řešitelská strategie, ukázána jejich typologie a zmíněny jsou výsledky některých relevantních výzkumů řešitelských strategií. Kapitola obsahuje též popis jednoho z možných přístupů k analyzování písemného řešení žáků, který se soustředí na každý detail a vede učitele k určité cestě do hlubin žákových myšlenkových procesů, a sice metody atomární analýzy.

Jádro práce tvoří experimentální část (***kapitola 3***). Její úvod je věnován pilotní studii, která předcházela hlavní studii a měla za cíl upozornit na důležité aspekty, které je třeba mít na mysli při testování větší skupiny žáků, aby hlavní studie proběhla hladce po organizační stránce. V první části popisu pilotní studie jsou prezentovány testované úlohy, které jsou opatřeny vzorovým řešením doplněným o hodnocení v rámci výzkumu TIMSS a informacemi o úspěšnosti českých žáků v rámci těchto úloh (***oddíl 3.1***). Následující část je věnována popisu účastníků pilotní studie, jakož i podmínkám, za kterých testování v rámci pilotní studie probíhalo (***oddíl 3.1.1***). Následně jsou uvedeny detailní analýzy písemných řešení účastníků pilotní studie (***oddíl 3.1.2***) doplněné o poznatky, které pilotní studie přinesla a které bylo třeba brát v potaz v rámci hlavní studie (***oddíl 3.1.3***).

Hlavní studii je věnován ***oddíl 3.2,*** jehož úvod popisuje základní informace o průběhu tohoto šetření a o vzorku jeho účastníků. Hlavní část tohoto oddílu je věnována okomentovanému shrnutí písemných řešení těch účastníků hlavní a pilotní studie, kteří se v jednotlivých fázích řešitelského procesu dopustili relativně četné či zajímavé chyby. Chyby jsou v textu analýzy zapsány tučným písmem a jsou doplněny kódem odpovídajícím kódu uvedenému v přehledu chyb, který je umístěn v kapitole 4. Vše je doplněno tabulkami a grafy, které mají sloužit k zpřehlednění informací prezentovaných ve shrnutí.

Kapitola 4 poskytuje přehled chyb, který vznikl na základě analýz písemných projevů účastníků pilotní a hlavní studie. Tento přehled je doplněn krátkým komentářem věnovaným jeho možné subjektivitě. Následně je uveden souhrn chyb a zajímavých jevů, které jsem nalezl při analýze písemných řešení, přičemž ke každé úloze uvádím absolutní četnost nejčastějších chyb.

Závěr (***kapitola 5***) je věnován vlastní krátké úvaze nad celou diplomovou prací, jakož i zhodnocení, zda jsem nalezl odpověď na otázku, proč a ve které fázi se žáci dopouštějí chyb v procesu řešení slovních úloh. Současně se v této kapitole zamýšlím nad možnou prevencí jednotlivých typů chyb a nad strukturou a reprezentativností vzorku účastníků pilotní a hlavní studie.

Za seznamem použité literatury (**kapitola 6**) uvádím přílohy. Příloha A obsahuje tabulkový přehled výsledků českých žáků v jednotlivých výzkumech PISA. Příloha B je věnována atomární analýze řešení pocházejících od účastníků pilotní studie. V této příloze je možno detailněji odkrýt myšlenkové procesy žáků při řešení úloh. Příloha C seznamuje s komentovanými analýzami řešení účastníků hlavní studie, z nichž je v rámci oddílu 3.2 zmíněna vždy nejzajímavější část. V této příloze jsou analýzy kompletní. Uveden je nejprve obrázek znázorňující celý zápis řešení daného žáka, který je pak po jednotlivých etapách řešitelského procesu vymezených G. Polyou analyzován a chyby v něm pojmenovány a opatřeny kódem.

2 Teoretická část

2.1 Historie srovnávacích výzkumů

Historie srovnávacích výzkumů, jejichž cílem je porovnávat vědomosti a dovednosti žáků z různých zemí a z rozličných vzdělávacích systémů, se píše od 50. let 20. století. V té době vznikla v Nizozemí Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání (International Association for Evaluation of Educational Achievement – IEA). Tato organizace doposud zorganizovala přes 30 výzkumů převážně v oblasti matematiky, přírodovědných předmětů, čtenářské gramotnosti a výpočetní techniky. Výše zmíněné výzkumy se týkaly žáků základních a středních škol a jejich jádro tvořily testy vědomostí, které byly vypracovány na podkladě studia učebních osnov jednotlivých zemí. K nim však ještě žáci, učitelé a ředitelé škol dostávali dotazníky, jejichž cílem bylo zjistit faktory, které vědomosti žáků ovlivňují.

V 90. letech se v oblasti měření výsledků vzdělávání začala angažovat Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (OECD)[1]. Tato organizace se v té době zabývala mimo jiné charakteristikou vzdělávacích systémů členských a přidružených zemí a současně i ukazatelů charakterizujících výsledky žáků. Je nutno dodat, že tato fakta publikovaná v ročence *Education at a Glance* byla přebírána z šetření jiných institucí, např. i od IEA.

V závěru 20. století se členové OECD odhodlali k vytvoření vlastního výzkumu. Vznikl totiž pocit, že školství v jednotlivých zemích zaostává za požadavky společnosti, tj. převládala domněnka, že žáci jsou stereotypně zahlcováni kvanty informací, které by si mohli sami vyhledat, a že škola nevytváří prostředí pro pěstování dovedností a kompetencí nezbytných pro prosazení se v současné společnosti. V rámci těchto úvah se nový výzkum měl zaměřit právě na to, do jaké míry jsou patnáctiletí žáci vybaveni pro budoucí život (Straková, 2002). Tak vznikl výzkum PISA.

[1] www.oecd.org

2.2 Výzkum PISA

PISA (Programme for International Student Assessment) je mezinárodní výzkum, pomocí kterého jsou testovány znalosti a dovednosti žáků, kteří v době konání výzkumu dosahují věku mezi 15 roky a 3 měsíci a 16 roky a 2 měsíci, a to u nás a v dalších zemích světa. Výzkum zajišťuje OECD, přičemž je cílen na testování čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti (Martinec, Honsová, 2008). Výzkum je sestaven tak, aby umožňoval porovnávat výsledky patnáctiletých žáků na mezinárodní úrovni, ale současně aby dával prostor ke komparaci dosažených výsledků i mezi jednotlivými školami a typy škol v rámci regionů.

Historie tohoto výzkumu se začala psát v roce 2000. Od tohoto roku se pak každé tři roky sbírají data ve členských a partnerských zemích OECD. Česká republika patří mezi účastnické země od samého počátku a testováni jsou u nás žáci posledních ročníků základních škol, žáci odpovídajících ročníků víceletých gymnázií a žáci 1. ročníků čtyřletých středních škol. Jednotlivé školy, jejichž žáci budou testováni, jsou v rámci výzkumu PISA vybírány dlouho dopředu tak, aby ve vzorku byly zastoupeny všechny typy škol, které navštěvuje populace žáků daného věku. V každé zemi tak počet zúčastněných škol a žáků reflektuje míru diferenciace školního systému a procento zastoupení žáků na tom kterém typu školy. Nutno dodat, že ve vybraných školách se testu účastní jen určitý reprezentativní vzorek žáků, tedy test nekoná celá třída či více tříd dané školy. Od svého vzniku se výzkum PISA postupně dostává do nových destinací a počet zemí participujících na výzkumu je co tři roky větší. V roce 2006 se účast zastavila na čísle blízkém 400 tisícům žáků z 57 zemí světa, přičemž v České republice se do výzkumu PISA zapojilo 245 škol, což představovalo 9 016 žáků (Martinec, Honsová, 2008). Zatím posledního výzkumu, z něhož jsou známy výsledky, v roce 2009 se účastnilo 65 zemí světa, jejichž obyvatelé se většinově podílejí na celkové ekonomice světa.

Záměrem výzkumu PISA je poskytnout informace o efektivitě té které vzdělávací soustavy tvůrcům školských systémů. Specifickým rysem tohoto šetření je, že se nesnaží zjistit sumu vědomostí a znalostí nabytých žáky za dobu povinné školní docházky (ta ve většině zemí končí právě v době, kdy žáci dosahují věku 15 – 16 let), ale soustředí se na zhodnocení míry dovedností či kompetencí, které mladý člověk potřebuje pro uplatnění se ve společnosti. Zkoumá tedy zejména schopnost kriticky hodnotit nalezené informace, třídit je a argumentovat ve prospěch svých názorů (PISA, 2009). Lze tedy říci, že výzkum

PISA odpovídá u nás probíhající kurikulární reformě, která by měla vést školství k formování člověka, jenž si umí informace najít, kriticky je zhodnotit a současně je použít při řešení problémů.

Od roku 2006 realizují výzkum dvě konsorcia: Core A Consorcium a Core B Consorcium. Konsorcium A je řízeno Australskou radou pro pedagogický výzkum a sestává z těchto institucí: Australian Council for Educational Research (Acer) z Austrálie; cAptStAn Linguistic Quality Control z Belgie; Deutsches Institute für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF) z Německa; National Institute for Educational Research (NIER) z Japonska; Analyses des systemes et des pratiques d´enseignements (aSPe) z Belgie a WESTAT z USA.

Konsorcium B sestává ze čtyř institucí, kterými jsou: Institute for Educational Measurement (CITO) z Nizozemska; Ministry of Education France; Institute for Educational Research, University of Jyväskylä z Finska a University of Twente z Nizozemska.

Výzkum PISA probíhá každé tři roky, ovšem v podstatě běží v devítiletém cyklu. Každé tři roky se testují dovednosti žáků ve třech různých oblastech, ale jedna z nich se v daném šetření vždy preferuje. (Přibližně dvě třetiny otázek či úloh se týkají upřednostněné gramotnosti.) Jinak řečeno, v roce 2000 se výzkum soustředil na čtenářskou gramotnost, roku 2003 se do popředí zájmu dostala matematická gramotnost a roku 2006 byla pozornost upřena na přírodovědnou gramotnost žáků. Tímto se skončil první cyklus výzkumu. V roce 2009 byl odstartován druhý cyklus, v jehož rámci byla šetřena prozatím zejména čtenářská gramotnost patnáctiletých žáků (2009) a matematická gramotnost (2012) (výsledky posledního výzkumu v době psaní této práce nebyly zveřejněny). Je třeba dodat, že kromě zmíněných tří typů gramotností se výzkum zajímá o mezipředmětové kompetence, které se v každém výzkumu mění, např. první dvě šetření zkoumala postupně studijní strategie žáků a schopnosti žáků řešit problémové úlohy.

Hlavním pojmem, kterému je výzkum PISA zasvěcen, je gramotnost. Co si pod ním představit? Jedná se o základní vědomosti a dovednosti ze všech tří sledovaných oblastí a schopnost aplikovat tyto vědomosti a dovednosti v různorodých situacích běžného života (PISA, 2000).

Co se týká čtenářské gramotnosti, pak výzkum PISA cílí na schopnost vyhledat v rozmanitých textech, ať souvislých či nesouvislých, podstatné informace, vyjadřovat základní myšlenky, které text přináší, a také zaujmout určitý postoj k obsahu textu.

Matematická gramotnost zjišťuje schopnost žáků použít vhodné matematické postupy a vědomosti na řešení problémů a úloh, které zasahují do reálného života a u nichž se na první pohled zdá, že ani nemají matematický kontext.

Přírodovědná gramotnost se zaměřuje na dovednost formulovat závěr z nějakého výzkumu či navrhnout experiment, který by nějakou hypotézu či myšlenku ověřoval.

2.2.1 STRUKTURA ŠETŘENÍ PISA

V rámci testování PISA každý žák vypracovává test, na který má dvě hodiny. V testu jsou zastoupeny jak otázky uzavřené s výběrem odpovědi, tak i otevřené, kdy žák svou odpověď formuluje sám. Testy sestávají z testových sešitů, kdy každý sešit obsahuje čtyři testové soubory. Na každý testový soubor je určeno půl hodiny. Do jednotlivých souborů bylo roku 2003 rozděleno přibližně 85 úloh týkajících se matematiky. Každý testový sešit je sestaven tak, aby se stejná část úloh týkala každé ze čtyř testovaných matematických oblastí a aby se jedna konkrétní úloha nacházela vždy v jednom testovém souboru (OECD, 2004, s. 42).

Součástí výzkumu PISA je i dotazník, ve kterém žák informuje o sobě, o svých názorech a postojích, o prostředí, ve kterém žije, a také o škole, o metodách a formách výuky, se kterými se na své škole setkal a setkává, nebo též o úrovni vzdělání dosaženého rodiči. V dotazníku, který obvykle čítá desítky otázek a na jehož vyplnění je vymezeno 30 minut, je dán prostor i otázkám typu ‚na jaký typ školy žák míří do budoucna'. Výzkum srovnává, do jaké míry koresponduje výsledek žáků s jejich přáním či odhodláním studovat, např. na vysoké škole. Samostatný dotazník pak dostává i ředitel školy. Tento dotazník se týká přímo školy, která se šetření účastní.

Každému šetření předchází pilotní test, kdy se ověřuje funkčnost všech nástrojů připravených pro hlavní šetření.

Úlohy, které žáci vypracovávají, jsou vázány k jednomu úvodnímu materiálu, např. grafu, tabulce či textu, který je převzatý z nějaké s výzkumem PISA nesouvisející publikace. Žáci tedy pracují na úkolech, které nejsou vyňaty z kontextu a které se netýkají pokaždé nějakého jiného problému. Mají tak možnost hlouběji se ponořit do jedné konkrétní problematiky a něco víc se o ní dozvědět.

2.2.2 Hodnocení výzkumu PISA

Výzkum PISA stanovuje škálu pro příslušnou gramotnost a poté i dílčí škály pro podoblasti dané gramotnosti, která je v centru zájmu. Úlohy použité ve výzkumu mají své bodové ohodnocení, které vychází z úrovně jejich obtížnosti. Toto bodové ohodnocení vychází z obecné škály stanovené pro danou gramotnost (škála je koncipována tak, aby 500 bodů bylo průměrným výsledkem zemí OECD), tj. průměrný výsledek žáků dané země lze pak kromě bodového vyjádření vyjádřit i mírou dovedností, kterých je žák schopen. Jinými slovy, ten, kdo získá 360 bodů v matematické gramotnosti, je schopen vyřešit nejjednodušší úlohy založené na reprodukci znalosti či na jednoduchém výpočtu, zatímco ten, kdo dosáhl skóre okolo 600 bodů, je schopen správně analyzovat i matematický problém, který je zašifrován v nezvyklé úloze, je schopen stanovit správnou strategii řešení problému, interpretovat výsledek a argumentovat ve prospěch svého řešení.

Uzavřené otázky jsou vyhodnocovány automaticky. Otevřené otázky hodnotí vyškolení pracovníci.

Výzkum PISA pak po vyhodnocení dat rozděluje žáky podle získaného počtu bodů do celkem šesti úrovní znalostí. Nutno dodat, že výzkum počítá průměrný výkon zúčastněné žákovské populace v dané zemi, umožňuje srovnávat skóre žáků na jednotlivých typech škol, v jednotlivých krajích a umožňuje např. analýzu rozdílu skóre u žáků na venkově a ve městech s počtem obyvatel nad 1 milion.

2.2.3 Výzkum PISA v ČR

Česká republika se zapojila do srovnávacích výzkumů zaměřených na vzdělávání po roce 1991, kdy vstoupila do organizace IEA. Po vstupu do OECD v roce 1995 se pak aktivně podílela na vytváření konečné podoby výzkumu PISA.

Důležitým aspektem výzkumu PISA je i to, že poskytuje informaci o rozdílech ve výsledcích žáků z rodin s vysokým a nízkým vzděláním a též, zda jsou tyto rozdíly porovnatelné se stavem v zahraničí.

Tabulka 1[2] *Přehled testování PISA v ČR*

I. Cyklus výzkumu

	Hlavní testovaná oblast	**Rok sběru dat**	**Počet žáků**	**Počet škol**	**Poznámky**
1. fáze	**Čtenářská gramotnost**	2000	9300	250	Vzorek patnáctiletých žáků narozených v r. 1985 (nacházejí se v 9. roč. ZŠ a 1. roč. SŠ) rozšířen v ČR o žáky narozené v r. 1982 (žáky 3. roč. SŠ).
2. fáze	**Matematická gramotnost**	2003	9919	260	Výzkum obohacen o šetření zjišťující dovednosti žáků při řešení problémových situací v rámci mezipředmětových vztahů (problem solving). Vzorek patnáctiletých žáků v ČR rozšířen na všechny žáky 9. roč. ZŠ či odpovídajícího roč. víceletého gymnázia (konec povinné školní docházky).
3. fáze	**Přírodovědná gramotnost**	2006	9016	245	Vztah a postoje žáků k přírodním vědám zjišťovány též pomocí postojových otázek začleněných přímo do testu. Vzorek patnáctiletých žáků v ČR rozšířen na všechny žáky 9. roč. ZŠ či odpovídajícího roč. víceletého gymnázia (konec povinné školní docházky).

II. Cyklus výzkumu

	Hlavní testovaná oblast	**Rok sběru dat**	**Počet žáků**	**Počet škol**	**Poznámky**
1. fáze	**Čtenářská gramotnost**	2009	7500	290	V dubnu a květnu 2009 proběhlo testování patnáctiletých žáků na 290 školách v celé České republice. Testování se účastnilo cca 7 500 žáků a cca 600 ředitelů škol a učitelů českého jazyka.
2. fáze	**Matematická gramotnost**	2012	X	X	
3. fáze	**Přírodovědná gramotnost**	2015	X	X	

V čem je výzkum PISA odlišný od hromadných testů, jakými jsou např. srovnávací testy či testy obecných studijních předpokladů? To ilustruje tabulka 2.

Tabulka 2 *Charakteristika šetření PISA v porovnání s jinými šetřeními*

Šetření PISA	**Většina hromadných testů v ČR**
Není podstatný individuální výsledek žáka, nýbrž celkový výsledek větší populace.	Směřují k co nejpřesnějším individuálním výsledkům umožňujícím individuální. rozhodování o žákovi.
Různí žáci mohou mít rozdílné (a jinak	Jednotný test nebo ekvivalentní varianty testu.

[2] http://www.uiv.cz/clanek/607/1871

obtížné) zadání testu.	
Žákovský dotazník PISA je velmi rozsáhlý (dohromady mají všechny součásti dotazníku téměř 200 položek).	Doprovodné dotazníky obsahují zpravidla nejvýše desítky položek.
Školáci a žáci jsou pro účast v PISA předem vybíráni jasně stanovenou výběrovou procedurou s důrazem na reprezentativnost vzorku.	Účastní se všichni žáci dané třídy/školy/ročníku.

Zdroj: Martinec, Honsová (2008)

Výzkum z roku 2000 přinesl pro české školství následující výsledky (viz tabulka 3[3] v příloze A):

- v oblasti čtenářské gramotnosti se výsledek českých žáků nachází mírně pod průměrným výsledkem zemí OECD
- v matematické gramotnosti se výsledek českých žáků od mezinárodního průměru významně neliší
- v přírodovědné gramotnosti se výsledek našich žáků nachází těsně nad mezinárodním průměrem (PISA, 2000)

K výše uvedeným výsledkům je nutno dodat několik faktů, které výsledky českých žáků mohly také ovlivnit. Jedná se třeba o rozdílné dotace ve výuce předmětů, které zkoumané gramotnosti rozvíjejí. Např. oproti žákům z jiných zemí se u nás v roce 2000 vyučovalo více hodin přírodovědným předmětům a méně matematice a českému jazyku.

Tisková zpráva z roku 2000, která hodnotí základní závěry vzešlé z výzkumu PISA, se zmiňuje o tom, že v oblasti matematické gramotnosti byly úlohy koncipovány tak, že naši žáci mohli uplatnit více než v ostatních dvou oblastech výzkumu vědomosti a dovednosti požadované našimi učiteli, ovšem nejprve se žáci museli v pro ně nezvykle zadaných úlohách zorientovat, aby poté mohli jim známe postupy a vědomosti aplikovat. To pro mnohé nebylo jednoduché.

Výzkum PISA z roku 2000 přinesl i další zajímavá zjištění:

- mezi výsledky žáků na různých typech škol v ČR byly významné rozdíly a podobně to vypadalo i v dalších zemích s diferencovaným vzdělávacím systémem
- relativně nejlépe dopadli žáci na víceletých gymnáziích, přičemž během studia už se tito žáci zlepšují méně znatelně než ostatní

[3] Tabulky jsou číslovány v tom pořadí, ve kterém se na ně odkazuje text.

- významné rozdíly vznikají mezi žáky už během povinné školní docházky, kdy žáci na výběrových základních školách vyšli z výzkumu se srovnatelnými výsledky jako gymnazisté na víceletých gymnáziích, kdežto běžní žáci na základních školách měli výsledky čtenářské gramotnosti významně horší
- Česká republika patří mezi země, kde jsou velké rozdíly ve vědomostech a dovednostech v závislosti na kvalitě rodinného zázemí

Z hlediska mé práce jsou však zásadnější závěry druhé fáze prvního cyklu výzkumu PISA z roku 2003, kdy v centru zájmu byla matematická gramotnost. Výzkumu se zúčastnilo celkem 41 zemí světa. V České republice se do něj zapojilo 260 škol a 9 919 žáků. Výsledky byly následující (viz tabulka 4 v příloze A):

- v matematické gramotnosti se čeští žáci ocitli opět nad průměrem zemí OECD
- v čtenářské gramotnosti jsme se ocitli těsně pod průměrem zemí OECD
- v přírodovědné gramotnosti před českými žáky figurovali jen Japonci a Finové
- v oblasti řešení problémů naši žáci skončili nad průměrem OECD (PISA 2003)

Z výzkumu PISA z roku 2003 lze dále vyčíst, že v České republice, a nejen v ní, existují výrazné rozdíly v matematické gramotnosti mezi chlapci a dívkami a lépe z výzkumu vycházejí chlapci. Ve čtenářské gramotnosti je situace opačná, tj. významně lepší jsou dívky. Dále lze konstatovat, že v oblasti matematické gramotnosti se naši žáci oproti předešlému výzkumu významně zlepšili a současně došlo k zmenšení rozdílů ve výsledcích slabších a dobrých žáků. Nejlepších výsledků dosáhla víceletá gymnázia následována čtyřletými gymnázii (viz tabulka 5).

V roce 2006 se výzkum PISA zaměřil na přírodní vědy. Tohoto šetření se zúčastnilo 57 zemí z celého světa a v České republice se jednalo o 9 016 žáků. Po analýze shromážděných dat se ukázalo, že (viz tabulka 6 v příloze A):

- v přírodovědné gramotnosti zůstali čeští žáci nad průměrem OECD, skončili na 15. místě
- v matematické gramotnosti jsme se umístili na 16. místě
- v čtenářské gramotnosti se potvrdil trend z předchozích výzkumů, čeští žáci skončili na 26. místě, a tedy pod průměrem zemí OECD.

Tabulka 5 *Výsledky výzkumu PISA podle typů školy*

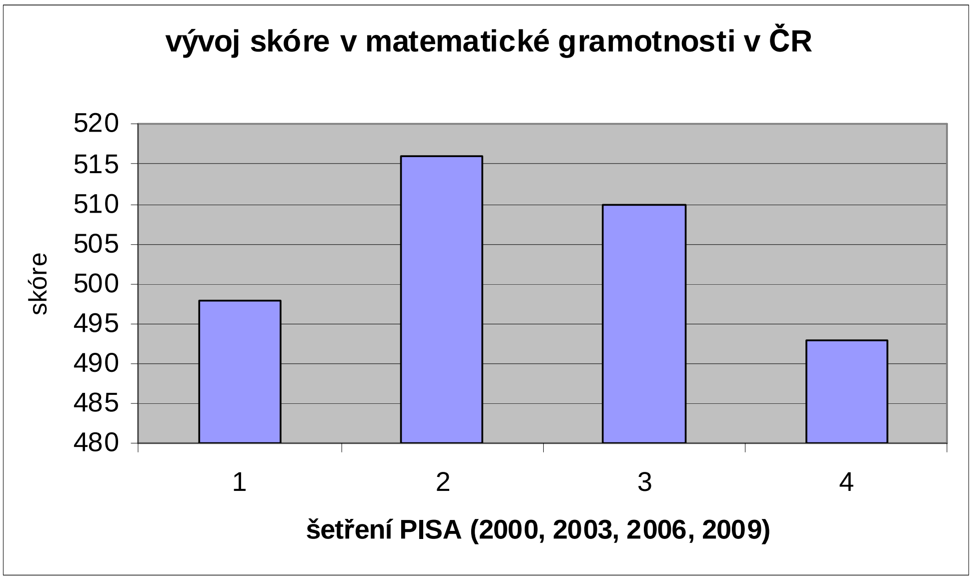
typ školy	Průměrný výsledek	
	2003	2006
základní škola	*495*	*482*
víceleté gymnázium	**631**	**635**
čtyřleté gymnázium	**610**	**614**
SOŠ a SOU s maturitou	*541*	*542*
SOŠ a SOU bez maturity	*458*	*440*

Zdroj: Palečková (2007)

V roce 2009 proběhl zatím poslední výzkum PISA zaměřený na čtenářskou gramotnost. Výzkumu se tentokrát účastnilo celkem 65 zemí světa včetně ČR.

Výsledky výzkumu jsou tyto (více v příloze A):

- v čtenářské gramotnosti se potvrdil trend z předchozích výzkumů – čeští žáci opět zaostali za průměrem, ba co víc, mezi lety 2000 a 2009 došlo k výraznému zhoršení výsledků v této oblasti
- v matematické gramotnosti se čeští žáci dostali na průměr OECD, což ovšem znamená, že mezi roky 2003 a 2009 došlo k významnému zhoršení výsledků v této gramotnosti (viz graf na obr. 2.2.1), a to na všech typech škol
- v přírodovědné gramotnosti bylo dosaženo též průměru, což představuje druhé největší zhoršení výsledků mezi účastníky výzkumu.



Obr. 2.2.1 zdroj: národní zprávy z výzkumu PISA

Poslední šetření PISA proběhlo v dubnu roku 2012 a zaměřilo se opět na matematickou gramotnost a též na řešení problémových úloh. Česká republika se šetření zúčastnila a byla mezi 19 zeměmi, jejichž žáci byli testováni zcela nově i v oblasti finanční gramotnosti. Na test z matematické a finanční gramotnosti je 120 minut (na každý test zvlášť) a na test týkající se řešení problémových úloh je 40 minut a test probíhá elektronickou cestou. Do testování je zapojeno 69 zemí světa. Výsledky budou známy ke konci roku 2013.

2.2.4 Matematická gramotnost a výzkum PISA

Pro účely mé práce je zásadním pojmem právě matematická gramotnost. Jak ji definuje samotný výzkum?

Matematická gramotnost je *„schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého a přemýšlivého člověka.“* (Palečková, Tomášek, 2005)

Každá úloha v oblasti matematické gramotnosti v rámci výzkumu PISA je zasazena do určitého kontextu, který můžeme klasifikovat podle míry, s jakou se dotýká žáka, na úlohy: osobní, vzdělávací, pracovní, veřejné a vědecké.

Kromě kontextu je v úlohách zašifrován i matematický obsah, který se v šetření PISA soustředí na čtyři tematické celky, jež jsou po sběru dat vyhodnocovány samostatně. Těmito tematickými celky jsou: kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy a nejistota (Palečková, Tomášek, 2005).

První tematický celek se váže k porozumění číselným oborům a k jejich správnému používání, druhý se váže k vlastnostem a vzájemné poloze geometrických útvarů a zobrazování trojrozměrných objektů v rovině. Třetí celek se věnuje tématu funkcí a tedy problematice modelování závislostí jevů z reálného světa. Poslední celek se týká sběru a analýzy dat a též pravděpodobnosti.

Výzkum PISA však klade důraz zejména na matematické kompetence, mezi které jsou řazeny tyto:

- matematické myšlení
- matematická argumentace
- matematické modelování a vymezování problémů a jejich řešení

- užívání symbolického, formálního a odborného jazyka
- užívání pomůcek a nástrojů (Palečková, Tomášek, 2005)

Tyto kompetence jsou výzkumem zobecněny tak, aby bylo podle nich možno sestavit jednotlivé úlohy, ve kterých žák musí prokázat většinou kombinaci předchozích kompetencí.

Výzkum rozlišuje celkem tři třídy kompetencí: reprodukci, integraci a reflexi.

Reprodukce spočívá ve schopnosti vybavovat si fakta, běžné matematické vlastnosti, aplikovat standardní algoritmy a vzorce.

Integrace je o stupeň výše z toho důvodu, že žák musí předchozí kompetence uplatnit v úloze, která není standardní.

Reflexe pak spočívá v tom, že žák je schopný rozmýšlet, který z postupů je ten nejvýhodnější k řešení dané úlohy.

Přehledná typologie úloh, které byly použity v šetření PISA 2003, je uvedena v tabulce 8.

Tabulka 8 *Rozdělení matematických testových otázek*

	počet otázek	**s výběrem odpovědi**	**komplexní s výběrem odpovědi**	**uzavřené s tvorbou odpovědi**	**otevřené s tvorbou odpovědi**	**s krátkou odpovědí**
Rozložení otázek podle obsahu						
kvantita	23	4	2	2	1	14
změny a vztahy	20	4	4	6	4	2
prostor a tvar	22	1	2	4	11	4
neurčitost	20	8	3	1	5	3
Rozložení otázek podle třídy kompetencí						
reprodukce	26	7	0	7	3	9
integrace	40	5	9	4	9	13
reflexe	19	5	2	2	9	1
Rozložení otázek podle situace a kontextu						
matematická	1	0	0	0	1	0
osobní	18	5	3	1	3	6
vzdělávací	15	2	4	5	2	2
pracovní	5	0	0	1	0	4
veřejná	29	8	2	4	8	7
vědecká	17	2	2	2	7	4
celkem	85	17	11	13	21	23

zdroj: Palečková, Tomášek (2005)

Výsledky testu PISA 2003 v oblasti matematické gramotnosti jsou uváděny jak na celkové škále, tak na dílčích škálách, které se týkají tematických oblastí uvedených výše, tj. kvantity, změny a vztahů, prostoru a tvarů a neurčitosti. Na těchto škálách je vytvořeno šest intervalů, tzv. úrovní obtížností. Do jednotlivých úrovní lze pak zařadit i samotné úlohy, a to podle toho, do jaké míry musí žák při jejich řešení využívat jednotlivých matematických kompetencí.

Výzkum z roku 2003 stanovil za základní druhou úroveň. Žáci, jejichž skóre dosahovalo mezi 421 a 481 body (takto byla vymezena ona 2. úroveň), svými matematickými dovednostmi naplnili definici matematické gramotnosti uvedené v rámci výzkumu PISA.

V ČR dosáhlo úrovně 2 a vyšší celkem 83 % žáků, nejvyšší úrovně pak 5 % žáků. Na druhé straně 5 % žáků nedosáhlo ani první úrovně dovedností. Z hlediska organizace OECD se výsledek českých žáků řadí mezi nadprůměrné a co se rozdílů ve skóre nejlepších a nejhorších žáků týká, pak se nalézáme v průměru.

Výzkum PISA zkoumá výsledky i z hlediska gendrového. Z tohoto hlediska je patrné, že chlapci v oblasti matematické gramotnosti dosahují lepších výsledků. V ČR bylo průměrné skóre chlapců 524 bodů, u dívek šlo o 509 bodů. S rozdílem 15 bodů jsme nad průměrem zemí OECD. Z těchto údajů však nelze obecně říci, že by dívky měly horší vlohy pro matematiku než chlapci.

Co se týká výsledků ve čtyřech zkoumaných tematických celcích matematiky, pak se v zemích OECD výsledky v jednotlivých tematických oblastech nijak významně nelišily. Nejhůře dopadla oblast prostor a tvar, kde první úrovně nedosáhlo 13 % žáků. V České republice se oblast prostor a tvar dá považovat za úspěšnější, neboť 12 % žáků dosáhlo nejvyšší 6. úrovně dovedností. Velmi úspěšně dopadli čeští žáci i v oblasti kvantita, kde 86 % žáků dosáhlo alespoň druhé úrovně. Relativně nejhůře dopadla oblast neurčitost, kde druhé a vyšší úrovně dosáhlo 80 % našich žáků. Tuto skutečnost lze ospravedlnit tím, že statistika a pravděpodobnost jsou probírány důkladně až rok před maturitou.

V rámci gendrových srovnání byly největší rozdíly mezi chlapci a dívkami v oblasti prostor a tvar, kde rozdíl 30 bodů byl třetím největším. Naopak prakticky totožné výsledky měli žáci a žákyně v oblasti kvantita.

Výsledky z roku 2003 v porovnání s těmi z roku 2000 naznačují, že se čeští žáci zlepšili, a to zejména v oblasti prostor a tvar, zároveň se zlepšili zejména nejslabší žáci, a snížil se tak rozdíl mezi nimi a těmi nejlepšími.

Při srovnání jednotlivých typů škol si nejlépe vedli žáci gymnázií a žáci středních odborných škol s maturitou se jim nejvíce přiblížili v oblasti kvantita.

V následujících šetřeních, kde již matematika nebyla v centru zájmu, se sice výsledek českých žáků udržoval nad průměrem zemí OECD, ale jejich dosažené skóre neustále klesá. Současně se zmenšuje rozdíl mezi výsledky dívek a chlapců, tedy skóre dívek se zlepšuje, resp. za zhoršením ČR stojí hlavně chlapci. V platnosti zůstává, že nejlepších výsledků dosahují gymnazisté.

2.2.5 Kritika výzkumu PISA

Ve světle všech výše zmíněných čísel je však dobré zmínit, že na adresu výzkumu PISA zaznívají i kritická slova. Např. mezi kritické lze zařadit i článek S. Štecha (2011), který své teze opírá zejména o práci autora J.-Y. Rochexe (2006), jemuž se například zdá podezřelým rychlé sestavení testových otázek a současně kritizuje interpretaci dat získaných v jednotlivých fázích testování. Článek uvádí, že výsledky výzkumu jsou komentovány politiky a nikoli odborníky z řad oborových didaktiků či učitelů testovaných vzdělávacích oblastí či předmětů. Politici tak vlastně výzkum nepoužívají jako prostředku k analýze svých kroků v oblasti vzdělávacího systému, ale konečné skóre testované žákovské populace a hlavně umístění v rámci všech testovaných zemí je pro ně důkazem toho, že pro větší konkurenceschopnost je nutné provádět právě jimi zamýšlené reformy. Problematické může být i měření gramotnosti v tzv. reálných kontextech, protože není úplně prokazatelné, do jaké míry působí kontext na výkon žáka. Pokud je kontext žákovi blízký, pak to může pozitivně působit na mladší žáky, ale na starší populaci žáků už je takový efekt zanedbatelný (Štech, 2011).

Podobně kriticky se k výzkumu PISA staví i O. Kaščák a B. Pupala (2011). Tito autoři uvádějí myšlenky různých povolaných osob, citují např. R. Olechowskiho (2007, s. 7), který říká, že porovnávací věda o výchově se přímo násilně odtrhla od globální perspektivy porovnávání školských systémů, učebních plánů, systému vzdělávání učitelů a zacílila se na podstatný aspekt výstupu, tj. pořadí žáků daného státu v rámci výzkumu PISA se stává jediným argumentem pro hodnocení vzdělávacího systému dané země a do pozadí se dostávají hlubší analýzy příčin těchto chyb, mezi které patří i porovnávání jednotlivých aspektů a odlišností vzdělávacích systémů různých států a zejména těch, kteří byli úspěšnější než naši žáci. Dále se ve zmíněné práci S. Štecha uvádí, že díky mezinárodnímu testování PISA se vzdělávací systémy pomalu omezují jen na výkon žáků a nikoli na vzdělávací aktivity, které mají žáky motivovat k vzdělávání.

Existuje obava, že země ve jménu ekonomického progresu a lákání zahraničních firem začínají soutěžit o nejlepší výkon v rámci mezinárodních srovnání výzkumu, přestože mnozí se nechávají slyšet, že porovnatelnost skóre jednotlivých zemí je věc nanejvýše problematická. Např. jak tvrdí O. Kaščák a B. Pupala na s. 60, některé státy z testované populace vyloučili žáky s obtížemi v oblasti čtení či počítání, dále potom zmiňme Finsko, které se v matematické gramotnosti umísťuje v čele. V zemi tisíců jezer je v populaci minimum přistěhovalců, a tak žáci nemají takové problémy s porozuměním zadání testu, což při omezeném času na vypracování baterie otázek může dost ovlivnit konečný výsledek žáků v pozitivním smyslu. Další slabinou výzkumu je neoddiskutovatelný anglo-americký aspekt, který si test nese. Ten se projevuje zejména v úlohách čtenářské gramotnosti, kde většina textů náleží do ranku ‚odborný text’ či ‚návod‘. Takový text je v hodinách na většině starého kontinentu záležitostí raritní, většina evropských žáků totiž pracuje s literárními texty, což poté také ovlivňuje výsledné skóre evropských zemí (Kaščák, Pupala, 2011).

Největší kámen úrazu spočívá v tom, že se výzkum zajímá o pojem gramotnosti a neříká nic o efektivitě školských systémů dané země, což při pohledu na skutečnost, že testováni jsou jen žáci, jejichž věk je v blízkosti patnácti let, ani není možné. V článku O. Kaščáka a B. Pupaly (2011) není opomenuta ani problematika testových cvičení a zejména pak jejich navázanosti na reálný život. V oblasti matematických úloh se autoři pozastavují nad tím, že některé úlohy vyřeší chybně ten, kdo se o vnější realitu skutečně opírá.

Obr. 2.2.2 zdroj: Koršňáková (2004)

Pro ilustraci poslouží nejlépe úloha, která byla uvedena v šetření PISA z roku 2003 a která dokazuje tezi uvedenou v předchozím odstavci uvedenou tezi. Úloha má název ‚chůze’.

Úloha je dána obrázkem 2.2.2 a následujícím textem: Na obrázku jsou stopy kráčejícího muže. Délka kroku *P* je vzdálenost mezi konci dvou po sobě následujících stop. Vzorec

$$\frac{n}{p} = 140$$

udává přibližný vztah mezi *n* a *P*, kde *n* je počet kroků a *P* je průměrná délka kroku v metrech.

Úloha sestává ze dvou úkolů:

- Použijte vzorec uvedený výše a vypočítejte, jak dlouhý krok bude mít Marek, který udělá 70 kroků za minutu. Zapište postup výpočtu.
- Michal ví, že délka jeho kroku je 0,8 metru. Použijte vzorec a vypočítejte rychlost Michalovy chůze v metrech za minutu a v kilometrech za hodinu.

Článek O. Kaščáka a B. Pupaly (2011) přináší některé výtky různých autorů k reálnému kontextu této úlohy. Kritizován je samotný vzorec, na jehož základě by člověk při rychlejší chůzi musel dělat delší kroky. Dále je zpochybňována fotografie, která doprovází úlohu a k jejímu vyřešení není důležitá, ba naopak může být zavádějící, neboť, jak dokládá S. Sjøberg (2007), pokud by se obrázek vzal proporčně, pak by délka chodidla člověka činila 55 cm, což se od průměrné velikosti chodidla v hodnotě 27 cm významně liší. Jinak řečeno v takovéto úloze je pravděpodobněji úspěšnější žák, který si všímá formálně symbolického zápisu jednotlivých operací, a ten, kdo zapojuje myšlení založené na reálné skutečnosti, může být touto klamnou realitu navozující úlohou přinejmenším zmaten.

Závěrem uvedu ještě názor W. Meyerhofera (2007, s. 57), který tvrdí, že v případě matematiky PISA nezjišťuje jen matematickou způsobilost, ale i testovou způsobilost. Komponenty testové způsobilosti představují strategie časového rozvrhu (přeskakování těžkých úloh), strategie vyhýbání se chyb a strategie opisování. W. Meyerhofer se současně kriticky staví k otázkám typu výběru možností v testování matematických znalostí.

Výstupy výzkumu PISA je tedy třeba nahlížet s rezervou a brát v potaz široké spektrum faktorů, které konečné skóre ovlivňují.

2.3 Výzkum TIMSS

Výzkum TIMSS[4] je mezinárodní šetření, které se zaměřuje na vědomosti a dovednosti žáků v oblasti matematiky a přírodních věd (biologie, chemie, fyziky a zeměpisu). Výzkum zaštiťuje organizace IEA, která sídlí v Amsterodamu (Tomášek, 2012) .

Historie tohoto výzkumu začíná rokem 1995, kdy byly v matematice a přírodních vědách testováni žáci ve věku 9 a 13 let a současně též žáci zakončující studium na středních školách. Prvního testování se zůčastnilo 26 států světa. Výzkum TIMSS probíhá jednou za čtyři roky a na rozdíl od výzkumu PISA se testové otázky vytvářejí na základě studia kurikulárních dokumentů jednotlivých států, tj. žáci se v testech setkávají s úlohami, z nichž některé jsou jim typově známé ze školy (ÚIV, MŠMT, 2008) .

Výzkum TIMSS se zabývá následujícími otázkami:

- Jaké jsou znalosti a dovednosti žáků jednotlivých zemí v matematice a přírodovědných předmětech?
- Jak se změnila úroveň znalostí a dovedností žáků v matematice a přírodovědných předmětech v průběhu sledovaných období?
- Jak se liší obsah, metody a podmínky výuky účastnických zemí, případně i co nejvíce ovlivňuje rozdíly ve výsledcích různých skupin žáků? (Tomášek, 2012)

Výzkum TIMSS se koná pod hlavičkou organizace IEA, ovšem na celém průběhu testování se podílí: koordinační centrum výzkumu na Boston College, kanadský statistický úřad, centrum pro zpracování dat v Hamburku a centrum pro testování ve vzdělávání v Princetonu (Palečková, 2002).

Důležitou roli však hrají i Národní koordinační centra, která například vytvářejí skupiny hodnotitelů vedených ‚leadrem', který jednotlivé hodnotitele zpětně kontroluje při vyhodnocování testů. Tato centra zodpovídají za průběh testování ve vybraných školách daného státu.

2.3.1. Struktura výzkumu TIMSS

Výzkum TIMSS se skládá z testu a doprovodných dotazníků. Testové otázky jsou vyvíjeny na podkladě studia kurikulárních dokumentů jednotlivých zemí. Veškeré

[4] TIMSS – Trends in International Mathematics and Science Study

vytvořené testové otázky jsou rozděleny do osmi testových sešitů tak, aby každou úlohu řešil vždy reprezentativní vzorek žáků. Podobně tedy jako v případě výzkumu PISA platí, že všichni žáci nevyplňují totožné testy. Pro ilustraci uvedu výzkum TIMSS z roku 1999.

V oblasti matematiky bylo tehdy připraveno 162 otázek, které byly rozděleny do 26 testových souborů a tyto byly dále rozděleny do 8 sešitů tak, aby žáci zvládli vypracovat každý ze sešitů za stejný čas. Jednotlivé sešity byly distribuovány mezi vybrané žáky tak, aby každou testovou sadu řešil přibližně stejný počet žáků. Příklad o složení testových sešitů udává tabulka 9.

Tabulka 9 *Složení testových sešitů TIMSS 1995*

rok	***populace***	***složení testových sešitů***
1995	**1**	Jeden soubor (obsažený ve všech testových sešitech) byl navržen tak, aby ho žáci vyplnili za 10 minut. Na ostatní soubory mělo stačit 9 minut. Tyto soubory byly v testových sešitech střídány tak, aby každý řešil reprezentativní vzorek žáků.
1995	**2**	Jeden soubor úloh sestávající ze 6 matematických a 6 přírodovědných úloh, byl obsažen v každém testovém sešitě, ostatní soubory úloh byly na různých místech ve více než jednom sešitě. Celkem bylo v testu 8 desetiminutových, 8 dvanáctiminutových a 10 dvacetiminutových souborů úloh rozdělených do osmi testových sešitů.

zdroj: Mandíková, Houfková (2008)

Na test je určeno 90 minut. (Pro žáky 4. ročníků je na test vymezeno 72 minut.) V testu se vyskytují otázky otevřené i uzavřené v poměru přibližně 1:2. Mezi uzavřenými otázkami jsou zastoupeny mimo jiné i ty typu výběru odpovědi. Otevřené otázky jsou dvojího typu – s krátkou i obsáhlejší odpovědí. V porovnání s výzkumem PISA jsou úlohy v TIMSS izolované, tj. nevztahují se k nějakému úvodnímu textu a problému, každá úloha je samostatnou jednotkou. A jakých oblastí matematiky se výzkum TIMSS dotýká?

U žáků čtvrtých ročníků se test zajímá o následující témata:

- čísla (přirozená čísla, zlomky a desetinná čísla, vztahy mezi čísly)
- geometrie (body, přímky, úhly, rovinné útvary a tělesa)
- práce s daty (čtení a reprezentace dat)

Mezi žáky osmých ročníků jsou testovány znalosti v oblastech:

- čísla (přirozená čísla, zlomky a desetinná čísla, celá čísla, poměr a procenta)
- algebra (výrazy, rovnice a funkce)
- geometrie (geometrické tvary, měření, pohyb a umístění)
- analýza, prezentace dat a pravděpodobnost[5]

Testy jsou koncipovány s přihlédnutím k vyučovaným tématům v daném ročníku a jsou vybírány dopředu pověřenými kapacitami v oblasti výuky matematiky. V testech pro devítileté žáky je větší prostor věnován číselným oborům a například v oblasti práce s daty se testují schopnosti číst data a zobrazovat je. U třináctiletých žáků jsou otázky rovnoměrněji rozděleny mezi čtyři testované oblasti a v oblasti práce s daty je kladen důraz na interpretaci dat a též na pravděpodobnost.

Co se týká dovedností, pak testy TIMSS u žáků čtvrtých ročníků testují zejména znalosti a jejich aplikace, zatímco u osmých ročníků je důraz kladen na schopnost použít vhodné znalosti k řešení zadaného problému.

Součástí výzkumu tvoří i dotazníky pro žáky, učitele a ředitele.

Žákovský dotazník zkoumá domácí zázemí, tj. počet knih v domácnosti, přístup k internetu, přítomnost počítače nebo stupeň dosaženého vzdělání žákových rodičů. Dále se výzkum zajímá o dobu, jakou žák věnuje studiu, jakým mimostudijním aktivitám dává prostor a jaký je jeho postoj k matematice a přírodním vědám.

Učitelský dotazník se zaměřuje na dobu, kterou učitel věnuje přípravě na výuku, na dobu, kterou stráví učitel samotným vyučováním, pozornost je věnována i otázce ohledně času věnovaného dalšímu vzdělávání se. Učitelé měli též možnost se vyjádřit k míře, s jakou mohou ovlivňovat učební pomůcky používané v hodině, odpovídali i na dotaz ohledně toho, jak si myslí, že společnost a žáci oceňují práci učitele. Učitelé dále zmiňovali, jakým výukovým metodám dávají přednost, jaké rozličné zdroje používají při přípravě hodiny apod.

Ředitelé škol se vyjadřovali k otázkám kvalifikace učitelského sboru, k výuce matematiky a přírodních věd a též k vybavenosti tříd. Stejně jako učitelé byli ředitelé dotazováni na dobu, kterou tráví administrativou, výukou a komunikací s rodiči, učiteli či dalšími osobami v rámci prezentace školy.

---

[5] http://www.csicr.cz/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni/TIMSS/TIMSS-(Trends-in-International-Mathematics-and-Sci

2.3.2. Hodnocení výzkumu TIMSS

Jak už jsem zmínil, pro hodnocení testů je vytvořen tým hodnotitelů. Výsledná data se přes Národní koordinační centrum posílají k mezinárodní asociaci IEA. Výzkum TIMSS rozděluje škálu skóre dosaženého žáky do čtyřech úrovní. Na jednu z těchto úrovní pak lze umístit žáky v dané zemi, a to jak z hlediska jejich znalostí, tak i z hlediska dovedností. Pro TIMSS z roku 2007 byly v rámci matematiky vytvořeny tyto úrovně takto:

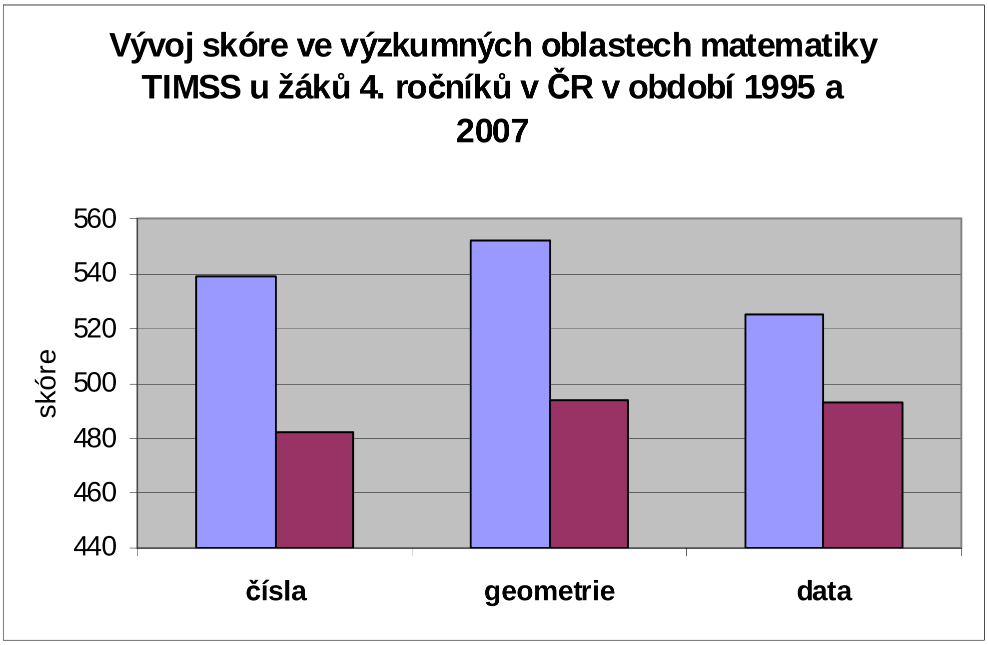
- Úroveň 1 (od 400 bodů): žáci prokázali elementární matematické znalosti
- Úroveň 2 (od 475 bodů): žáci dokáží aplikovat základní matematické znalosti na jednoduché situace
- Úroveň 3 (od 550 bodů): žáci dokáží své vědomosti a dovednosti uplatnit při řešení relativně složitějších problémů
- Úroveň 4 (od 625 bodů): žáci řeší složité úlohy, vyvozují závěry a své myšlenkové postupy dokáží zdůvodnit (Hrubá, 2009)

Test se kromě znalostí zaměřuje i na dovednosti, jakými v matematice jsou prokazování znalostí, jejich používání při řešení problémů a schopnost uvažovat a argumentovat. Pro každou ze zmíněných dovedností se také počítá skóre pro daný stát. V rámci výzkumu TIMSS lze porovnávat země podle průměrného skóre žáků nebo podle relativního počtu žáků v té které úrovni znalostí a dovedností.

2.3.3. Výzkum TIMSS v ČR

Česká republika se účastní tohoto výzkumu od jeho počátku. Během prvního výzkumu v roce 1995, kterého se účastnilo 43 zemí, byli testováni čeští žáci 3. – 4. a 7. – 8. ročníků a též žáci zakončující studium na střední školách.

Ze žáků středních škol, kteří prošli náročnější výukou matematiky a fyziky (šlo o gymnazisty), byly vytvořeny dvě podskupiny, které byly testovány speciálními testy.



Obr. 2.3.1 zdroj: VÚP (2011)

Testu TIMSS v roce 1995 se zúčastnilo v ČR 500 škol a 16 700 žáků, kterým v té době bylo 9 a 13 let. V matematice dosáhlo nadprůměrného výsledku (což odpovídá 3. a 4. úrovni na škále znalostí a dovedností) 46 % devítiletých a 47 % třináctiletých žáků. Jak ukazuje výše uvedený graf, tak mladším žákům činila potíže oblast práce s daty. Třináctiletí žáci byli nejhorší v aritmetice a v oblasti práce s daty. Celkově ovšem žáci z ČR dosáhli nadprůměrného skóre. Konkrétně žáci 4. ročníků měli v průměru 541 bodů a žáci 8. ročníků 546 bodů.

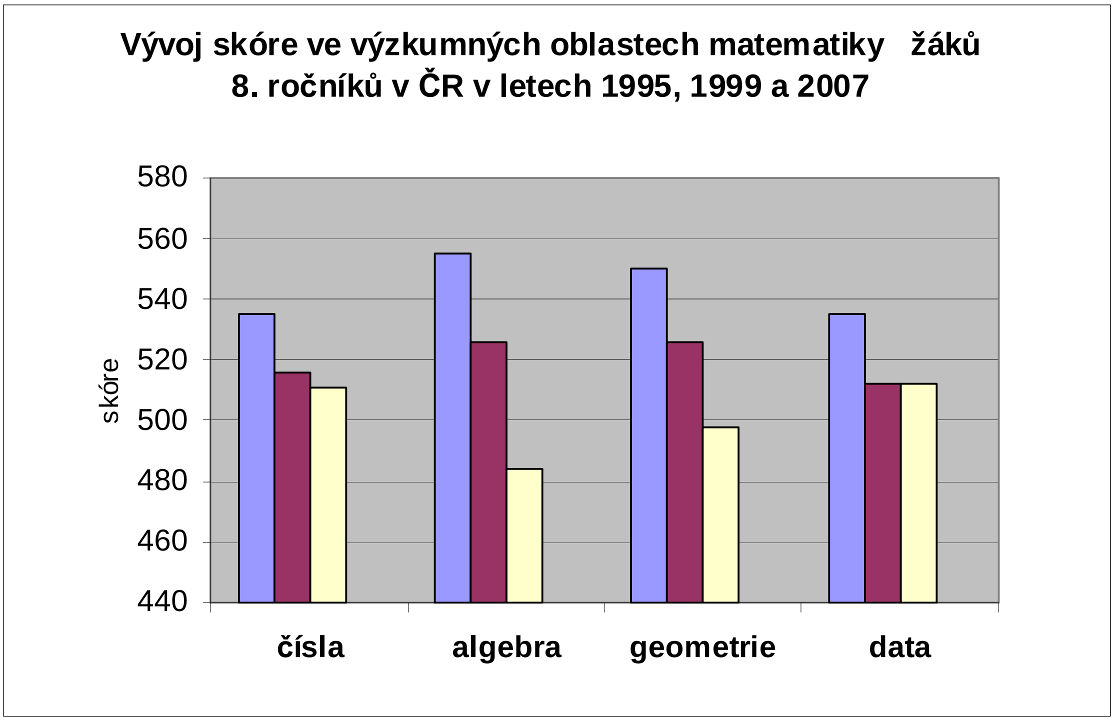
V následujícím výzkumu byli v ČR testováni žáci 8. ročníků 89 základních škol a odpovídajících ročníků 69 středních škol. Tito dosáhli v konkurenci 38 zemí světa v matematice průměrného skóre 520 bodů, což byl výsledek nadprůměrný, ale v porovnání s výsledkem 13. – 14. letých žáků z roku 1995 došlo v ČR k největšímu zhoršení ze všech zemí, které se účastnily obou výzkumů. K významnému **poklesu výsledků došlo v geometrii, algebře a úlohách z oblasti zlomků**.

Podobně jako ve výzkumu PISA dosáhli chlapci v matematice lepšího skóre než dívky, a to i přesto, že většinou měli chlapci z matematiky horší prospěch než dívky.

Třetího výzkumu v roce 2007 se ČR účastnila také. Testováni byli žáci věku devět a čtrnáct let podobně jako v roce 1995. Žáci 4. ročníků dosáhli skóre 486 bodů, což je podprůměrný výsledek potvrzující zhoršující se trend výkonnosti českých žáků (viz obr. 2.3.1). Žáci 8. ročníků ZŠ a příslušných tříd víceletých gymnázií byli v matematice průměrní (504 bodů) a v porovnání s rokem 1999 se nezhoršili. Pro úplnost dodám ještě některé údaje týkající se skóre českých žáků v dovednostech, kterými se TIMSS také zabývá. V roce 2007 se čeští žáci dostali na průměrnou hodnotu v oblasti prokazování znalostí, ale **problémy měli s jejich aplikacemi**, což poukazuje na fakt, že žáci mají znalosti uložené separovaně od jejich praktické využitelnosti.

Jen pro ilustraci stavu znalostí českých žáků uvedu, že nadprůměrných výsledků (odpovídajícím 3. a 4. úrovni na hodnotící škále) v nejúspěšnějších zemích dosáhlo až 60 % žáků, v ČR této úrovně u devítiletých žáků dosáhlo 19 % jedinců, u čtrnáctiletých žáků 26 % jedinců.

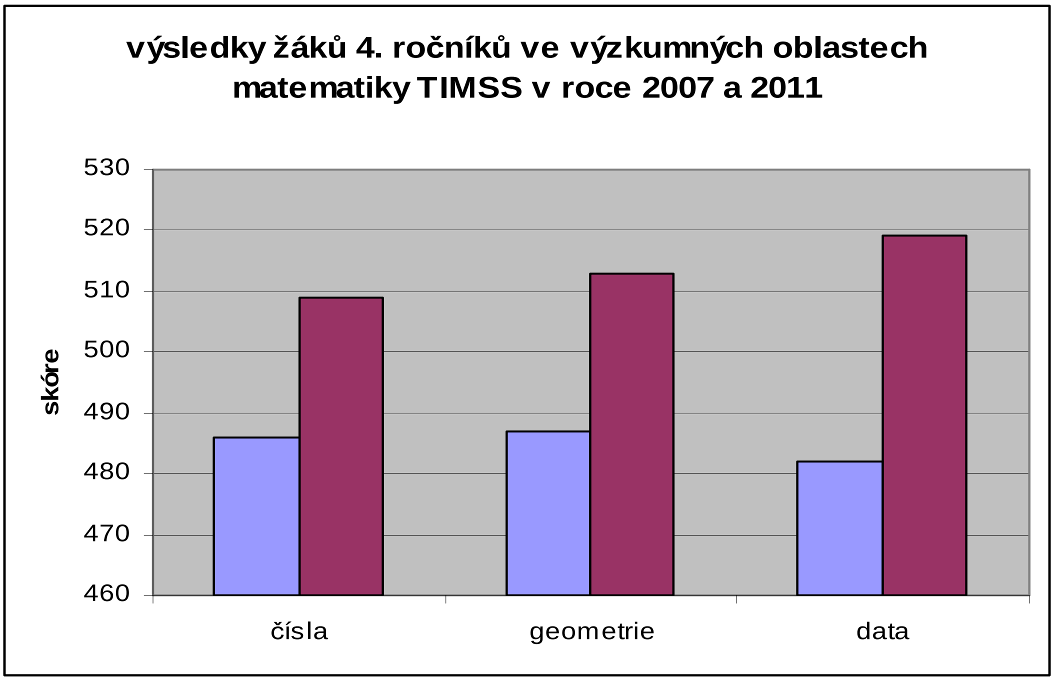
Českým žákům ve věku 9 let **dělaly největší problémy znalosti a jejich aplikování v oblasti čísel a číselných oborů**. Žáci osmých ročníků pak nejlépe dopadli v aritmetice a práci s daty, **nejhůře si vedli v algebře** (viz obr. 2.3.2).



Obr. 2.3.2 zdroj: Basl, Mouralová (2011)

Poslední šetření proběhlo na jaře 2011 a testováni byli žáci 4. ročníků základních škol. Výzkumu, jehož pilotní šetření bylo vyhodnocováno v Praze na 5. mezinárodním setkání národních koordinátorů TIMSS 2011 se zúčastnilo celkem 52 zemí světa.V ČR se výzkumu zúčastnilo 177 základních škol a více než 4500 žáků. V matematické gramotnosti dosáhlo průměrné skóre českých žáků hodnoty 511 bodů (22. místo), což je výsledek slabě nadprůměrný a hlavně vyšší než v roce 2007. Klesající trend se tak zastavil. Ovšem stále je co zlepšovat, neboť Singapur, který byl v rámci matematické gramotnosti na 1. místě, dosáhl průměrného skóre 606 bodů. Relativně dobře žáci dopadli v oblasti práce s daty, **průměrné výsledky pak měli v oblasti geometrie a čísel (**viz obr. 2.3.3). Pokud jde o zkoumané dovednosti, pak slabší stránkou českých žáků bylo **prokazování znalostí**. (ČSI, 2012)

Z výsledků výzkumu je patrné, že chlapci jsou u nás o trochu úspěšnější než dívky, přičemž tento rozdíl je největší v oblasti čísel a nejmenší v geometrii. Pod nízkou úrovní se nacházelo skóre 7 % českých žáků, velmi vysoké úrovně dosáhli 4 % žáků. V porovnání s prvním testováním žáků 4. ročníků, které proběhlo v roce 1995, kdy na nejvyšších dvou úrovních bylo zastoupeno 46 % žáků, se nyní ve vysoké a velmi vysoké úrovni objevilo jen 30 % devítiletých žáků. V porovnání s výzkumem proběhnuvším v roce 2007 se chlapci nejvíce zlepšili v oblasti práce s daty a děvčata v oblasti čísel. Pokud jde o dovednosti, pak chlapci se nejvíce zlepšili v prokazování znalostí a dívky v uvažování. (Tomášek, 2012)



Obr. 2.3.3 zdroj: Tomášek a kol. (2012)

2.4 Řešitelské strategie v matematice

Výsledky výzkumů PISA a TIMSS sestávají z průměrných skórů a dále z výsledků týkajících se jednotlivých úloh. Tedy dozvíme se z nich, jaké procento žáků danou úlohu vyřešilo a případně jaké procento žáků udalo nějakou konkrétní špatnou odpověď. Cílem této práce je podívat se hlouběji na řešení u vybraných úloh, u nichž naši žáci nedosáhli dobrých výsledků. V centru pozornosti budou řešitelské strategie, jež žáci při řešení těchto úloh používají.

2.4.1. Vymezení pojmu řešitelská strategie, druhy řešitelských strategií

Pod slovem strategie se obecně skrývá sled činností uspořádaných tak, aby jejich pomocí bylo dosaženo vytyčeného cíle. Strategie je pojmem, který měl své uplatnění původně ve vojenství, klíčovým pojmem je však i v ekonomii, biologii, šachu a konečně i v matematice (Štěpánková, 2001, s. 18). M. Tichá (1982, s. 43) definuje pojem strategie řešení úlohy takto: „Jedná se o rozhodnutí konkrétního řešitele užít při řešení posloupnost metod, o níž se domnívá, že by mohla vést k nalezení výsledku řešení dané úlohy."

Řešitelské strategie v matematickém slova smyslu jsou tedy postupy a činnosti, které vedou jedince na cestě od zadání problému či úlohy k jeho či jejímu řešení.

Otázkou je, co si pod pojmem úloha, resp. matematická úloha představit. Vymezení na toto téma existuje vícero, např. Webster´s (1979) uvádí tato dvě:

- Úlohou je: „V matematice cokoli, co vyžaduje být uděláno, nebo vyžaduje, aby něco bylo uděláno."
- Úlohou rozumíme: „Otázku…,která je komplikovaná nebo obtížná (Webster´s, 1979, s. 1434)

J. Vyšín (1972, s. 11) vymezuje matematickou úlohu jako: „Je dána množina **M** matematických objektů a je dána výroková forma **f** o jedné nebo více proměných. Úkolem je nalézt a udat (způsobem prozatím blíže neurčeným) obor pravdivosti **P** formy **f** v množině **M**, tj. množinu všech objektů z **M**, pro něž dává **f** pravdivý výrok."

J. Vyšín dále rozlišuje tři typy matematických úloh:

- úlohy určovací (jde o úlohy, kde je třeba najít hodnotu nějaké neznámé)
- úlohy důkazové (úloha sestává z tvrzení, jehož ne/pravdivost je třeba dokázat)

- úlohy existenční

J. Vyšín současně považuje určovací úlohy za nejúplnější matematické úlohy, v čemž se shoduje s G. Polyou.

Matematické úlohy je možné dělit podle mnoha různých hledisek. J. Příhonská (2011) s poukazem na M. Cirjaka (2000) nejprve dělí úlohy podle použité řešitelské strategie na:

- **úlohy řešené výpočtem (aritmetické)**
- **úlohy řešené rýsováním (konstrukční)**
- **úlohy řešené obrázkem**

Dále potom lze podle J. Příhonské dělit úlohy na základě poznávacích procesů, které daná úloha podporuje, a to na konvergentní, které žáka směřují k jedinému řešení, a na divergentní, které směřují žákovo uvažování do šířky a vedou jej k vytváření hypotéz a alternativ. Konečně pak J. Příhonská dělí úlohy podle procesů a dynamiky postupů při řešení matematických úloh na:

- **úlohy algoritmické**
- **úlohy poloalgoritmické**
- **úlohy poloheuristické**
- **úlohy heuristické**

Algoritmické úlohy mají za cíl procvičit znalost nějaké definice či vzorce a nedávají prostor pro matematické uvažování a bádání, jde u nich pouze o dril.

Poloalgoritmické úlohy již umožňují použít zevšeobecňující přístupy. K vyřešení elementárních jevů je opět potřebný algoritmus. (Příhonská, 2011)

Heuristické úlohy vedou žáka k tvořivému a originálnímu myšlení. Tyto úlohy spočívají v hledání vztahů mezi zadanými a hledanými prvky a předem není jasný postup k vyřešení takových úloh.

Vraťme se k řešitelským strategiím. Pro příklad M. Hejný a A. Michalcová (2001) vymezují dva typy strategií:

- **standardní (výpočtová) strategie**
- **investigativní (průzkumná) strategie**

Výše zmínění autoři konstatují, že standardní strategie se uplatňují v učebnicových cvičeních, kde je předem jasné, jak postupovat, zatímco investigativní strategie vyžadují od jedince logické uvažování, používání dedukce a odvahu ke zkoušení různých variant řešení.

J. Kopka (1999) mezi heuristické strategie zařazuje:

- **přeformulování**
- **analogii**
- **zobecnění**
- **specializaci**
- **cestu nazpět (řešení odzadu)**
- **systematické experimentování, hledání vzorce**
- **znázornění, konkretizaci**
- **zavedení pomocných prvků**
- **opakování určitého postupu**

J. Kopka mimo jiné doporučuje k nácviku heuristických řešitelských strategií a zejména těch, které můžeme zkráceně označit jako pokus–omyl, vytvářet sadu příbuzných úloh, jejichž řešení bude vyžadovat podobné postupy. J. Kopka hovoří o tzv. hroznech problémů, kdy základní problém vyřeší žáci za pomoci učitele a poté další příbuzné problémy zkouší řešit sami.

Problematikou řešitelských strategií a jejich výukou ve školách se dále zabývá D. Rudd (2010). Konstatuje, že matematika se zrodila právě z nutnosti řešit každodenní problémy, a představovala tak nástroje k řešení různých situací, se kterými se potýkali třeba staří Egypťané. Jak se však penzum poznatků v matematice rozšiřovalo, dostávala se matematika a její výuka pryč od reálného kontextu a vše se začalo točit okolo obecných definic a vzorců, které byly procvičovány na kontextu prostých cvičeních.

2.4.2. Analýza řešitelských strategií

Heuristickými strategiemi, které podporují u žáků logické a hypotetické myšlení, se zabýval G. Polya (1945). Ten byl přesvědčený, že matematika je disciplína založená na objevování a nikoli na čisté dedukci. Proto se zaměřil na heuristické uvažování a heuristické strategie, které mají žáka vést po cestách vedoucích logicky a elegantně k řešení úlohy. G. Polya identifikoval čtyři základní fáze řešitelova uvažování:

- **identifikace problému**
- **vytvoření plánu řešení**
- **realizace plánu**
- **ověření, že řešení odpovídá zadání**

První fáze spočívá v uchopení toho, o čem úloha je a co se má zjistit. Pro žáky je často nejobtížnější, neboť nedokáží přejít z roviny kontextu úlohy do oblasti konceptů či svých znalostí. Jinak řečeno, žák neví, jaké poznatky k řešení úlohy využít, což může být důsledkem toho, že se ve výuce běžně procvičují pouze algoritmické úlohy, kde je jasné, co a jak použít.

Druhá fáze se týká volby vhodné řešitelské strategie: žák se rozhoduje např. mezi řešení rovnicí, experimentováním apod. Třetí fáze je žákům často nejbližší. V tuto chvíli totiž musí použít vzorců a formulí, které se zpravidla v matematice procvičují na rutinních úlohách. Nutno dodat, že G. Polya se výše zmíněnými heuristickými strategiemi zabýval ve snaze zjistit, co by mohlo žákům pomoci v řešení úlohy. Tyto čtyři fáze mohou tvořit rámec analýzy písemného řešení žáků.

K doplnění takového rámce může napomoci i rozfázování procesu řešení slovních úloh od J. Novotné, která hovoří o těchto etapách:

- **etapa uchopování –** uchopování všech objektů a vztahů a identifikace těch, které se týkají řešené situace, a eliminování těch, které jsou „navíc“, jde též o nalezení celkového vhledu do struktury problému
- **etapa transformace** – spočívá v převedení odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému.
- **etapa návratu do kontextu zadání úlohy** – jde o interpretaci výsledku v kontextu zadání úlohy a o kontrolu, zda výsledek není v rozporu se zadáním. (Novotná, 2000, s. 21)

Důležitou součástí v procesu řešení úlohy je i **reprezentace slovní úlohy** (uchopování zadání úlohy v hlavě řešitele) a zejména pak **kódování slovní úlohy.** V (Novotná, Kubínová, 1998, s. 23) je kódování vymezeno takto: „Kódováním[6] slovní úlohy rozumíme převádění slovně zadaného problému do vhodného znakového (referenčního jazyka), který přehledněji a úsporněji zaznamenává data, podmínky a neznámé řešeného problému.“

[6] Vymezení termínu je v souladu s jeho použitím při zpracování informací podle (Eysenck, 1993).

Autorky dále dodávají, že pro kódování, resp. vytváření legendy je podstatné použít vhodný referenční jazyk, podle kterého slovně uvedené informace ze zadání převádí žáci do podoby stručné a výstižné a více méně symbolické.

J. Novotná a M. Kubínová současně rozlišují různé typy legend:

- ***slovní legenda*** **–** zkrácený záznam zadání, který je tvořený slovy, která řešitel považuje za významná pro převedení zadané úlohy na úlohu čistě matematickou, přičemž do této legendy lze řadit i tabulkovou legendu
- ***obrázková legenda*** **–** základní informace úlohy jsou zachyceny do schématu či do obrázků odpovídajících zadání
- ***algebraická legenda*** **–** vzájemné vztahy mezi objekty jsou vyjádřeny formou rovnic
- ***geometrická legenda*** **–** speciální případ obrázkové legendy obsahující geometrické útvary

Pro účely této práce je podstatná problematika řešitelských strategií a zvláště potom schopnost takové strategie analyzovat v konkrétních písemných řešitelských projevech. Taková analýza může sloužit jako zdroj informací pro učitele, kdy se dozví, co dělá konkrétnímu žákovi problémy a co by případně při výuce mohl změnit. Současně má tato analýza potenciál rozšířit seznam příčin úspěchu či neúspěchu českých žáků při řešení některých úloh, které jsou součástí mezinárodních testování úrovně matematické gramotnosti.

2.4.3. Vybrané výzkumy týkající se řešitelských strategií

Řešitelskými strategiemi se zabýval např. D. Rudd (2010), který rozdělil žáky do dvou kategorií řešitelů. První kategorií jsou tzv. „experti“, kteří mají velmi slušné znalosti matematiky a tyto znalosti mají dobře uchopeny, tj. zařazeny do systému znalostí. Díky tomu jsou schopni určit, která strategie bude nejvhodnější. Tito „experti“ jsou schopni velmi dobře logicky a hypoteticky přemýšlet.

Druhou kategorií jsou tzv. „novici“ , kteří mají znalosti uložené izolovaně a řeší problém na podkladě povrchových informací, aniž by se snažili zjistit, který pojem je v problému skryt.

Skutečnost, zda žák úlohu vyřeší správně či nikoli, nezáleží pouze na zvolené strategii a na tom, zda se jedná o „experta“ nebo o „novice“. Různých rozcestí v myšlení žáka, které jej mohou zavést na nesprávnou cestu, je mnoho a v potaz je třeba brát i další aspekty úlohy.

Ve výzkumu provedeném A. Hošpesovou, M. Tichou a J. Freibergovou (2001) byly 11 vybraným průměrným žákům čtvrtých tříd základních škol zadány matematické úlohy uvolněné ze studie TIMSS, jejichž řešení žáci po vypracování úloh prodiskutovali ve snaze obhájit to své. Ze záznamu diskuse autorky vybraly některá zajímavá zjištění.

Vybraným žákům dělalo problémy řešit samostatně písemně zadaný test, což svědčí podle autorek o tom, že naši učitelé nedávají žákům dost prostoru k procvičování takové dovednosti. Podle autorek nechává učitel přečíst zadání úloh těm nejlepším žákům a problematické pojmy sám vysvětlí, čímž oslabuje schopnost průměrných žáků řešit písemně zadané matematické problémy. Studie ukázala, že žáci mohou mít problém s řešením úloh, jejichž zadání je delšího charakteru a které obsahují podúlohy, pro jejichž řešení je třeba veškeré úvodní informace držet v paměti. Nezanedbatelnou roli pro pochopení úlohy má také grafická úprava. Žákům totiž může činit problém obrázek, který rozděluje zadání úlohy na dvě části. Posledním závěrem z výzkumu A. Hošpesové, M. Tiché a J. Freibergové je sdělení, že žáci neumí pracovat s různými názornými reprezentacemi textem zadané skutečnosti. Tento fakt uvedu na konkrétní úloze z výzkumu.

Jedná se o úlohu č. 5, která ve výzkumu TIMSS nesla označení T4A, B. Její zadání je následující:

V Janině třídě je 10 dívek a 20 chlapců. Jana tvrdila, že ve třídě připadá jedna dívka na každé dva chlapce. Její spolužačka Andrea zase tvrdila, že jedna polovina všech dětí ve třídě jsou dívky.

Kolik dětí je v Janině třídě?

Má Jana pravdu?

Vysvětli slovy nebo obrázkem proč.

Má Andrea pravdu?

Vysvětli slovy nebo obrázkem proč. (Hošpesová et al. 2001)

Při řešení úlohy žáci obrázkovou reprezentaci problému využili jen minimálně a pokud se tak stalo, tak kreslili obrázky pro každé tvrzení zvlášť, kdy pro to první kreslili trojice složené ze dvou chlapců a jedné dívky a pro Andreino tvrzení rozdělovali žáky do trojic. Jeden žák, který nakreslil pro obě tvrzení jediný obrázek (viz obr. 2.4.1), v němž do jedné řady nakreslil dvacet chlapců a do druhé deset dívek, a odpověděl správně na zadané otázky, pak v diskusi zcela popřel, že by své odpovědi konstruoval na podkladě právě popsané grafické reprezentace. Uvedl totiž toto: „Děvčat by muselo být patnáct, protože 30 : 2 = 15." (Hošpesová et al. 2001, s. 45) Zde se tedy ukazuje, že žák intuitivně situaci kreslí správně, ale nedokáže svá tvrzení opřít o vlastní grafické vyjádření zadané situace, ačkoliv jeho uvedené tvrzení je správné.

Obr. 2.4.1 zdroj: Hošpesová et al. (2001)

Jedním z prostředků, které pomáhají odkrýt myšlenkové procesy řešitelů slovních úloh a jiných matematických problémů, je atomární analýza. Atomární analýza zkoumá podrobně písemné řešení žáka a může se následně opřít o diskusi s ním. Tuto metodu zmiňuje N. Stehlíková (1995) (autorství a rozpracování této metody náleží M. Hejnému, který se o ní zevrubněji zmiňuje v publikaci o řešení rovnic z roku 1992). Autorka vysvětluje důvod, proč se tato metoda soustředí na písemný projev a nikoli na projev ústní. Argumentuje tak, že žák jednak nemusí být schopen přesně slovy popsat své postupy, neboť spousta jeho úvah se odehrává v podvědomé rovině, a také hrozí, že žák bude odpovídat tak, jak si myslí, že by tazatel chtěl, aby odpověděl.

Atomární analýza spočívá v rozdělení řešení slovní úlohy na co nejmenší jednotky, tj. atomy. N. Stehlíková rozlišuje statické a dynamické atomy.

Statickým atomem je nějaká část výpočtu, který řešitel zaznamenal na papír. Může jím být i přeškrtnutý výpočet.

Dynamickým atomem je myšlenka, která zřejmě proběhla řešitelovou myslí předtím, než zaznamenal statický atom na papír. Dalo by se říci, že jde o jakousi vnitřní řeč řešitele.

N. Stehlíková v rámci dynamických atomů rozlišuje čtyři skupiny, které mohou usnadnit zápis dynamických atomů (nejedná se o jediný možný model dělení těchto atomů):

- **volba strategie –** část řešitelského procesu, kdy se řešitel rozhoduje jak dál
- **provedení –** kalkulativní část
- **kontrola –** konfrontace řešitelského procesu s textem úlohy
- **výsledek –** prezentace výsledku (Stehlíková 2000, s. 106)

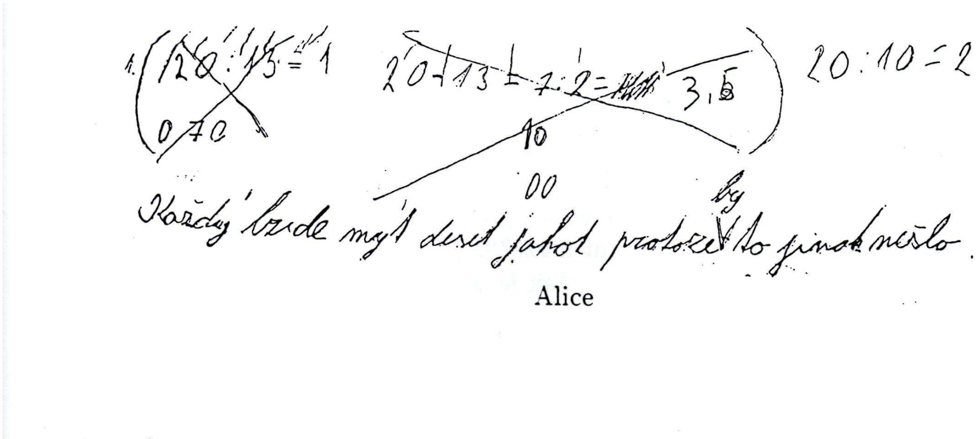
Autorka současně formuluje jednotlivé fáze, kterými řešitel prochází při řešitelském procesu a které jsou důležité i pro správné provedení atomární analýzy. Jednotlivé etapy jsou vymezeny takto:

- **přístup k problému –** problém působí na vědomí žáka a ten se rozhoduje, zda bude či nebude úlohu řešit
- **porozumění úloze –** žák v úloze nachází relevantní údaje a vztahy, uvědomuje si, co je dáno a co hledáme
- **matematizace –** formulace úlohy v jazyce matematiky, jednotlivé vztahy mezi známými a neznámými jsou zapsány zpravidla pomocí rovnic
- **výpočet –** žák vypočítává matematicky formulovanou úlohu a dospěje k údajům, které považuje za výsledek
- **interpretace –** žák formuluje výsledek v kontextu otázky úlohy
- **sémantická zkouška –** žák ověřuje, zda výsledek odpovídá kontextu úlohy či realitě
- **korekce –** pokud výsledek kontextu neodpovídá, pak žák hledá chybu a po její nápravě formuluje novou odpověď (Stehlíková 2000, s. 102–103)

Výše uvedený proces a jeho etapy nemusí být lineární, tj. žák v jeho průběhu může přeskakovat mezi jednotlivými fázemi, současně však toto rozdělení dává tomu, kdo provádí atomární analýzu písemného řešení žáka, určitý rámec, ve kterém se jím zkoumaný žák pohybuje.

Závěrem této teoretické stati uvedu atomární analýzu aplikovanou na konkrétní řešení jedné žákyně tak, jak je uvádí N. Stehlíková (1995) (viz obr. 2.4.2).

Zadání úlohy: Martina a Honza mají každý svoji zahrádku. Martina: *„Je to docela zábavné mít svoji zahrádku. Občas se ale stejně hádáme. Naposledy, když jsme dostali* *sazenice jahod. Bratr si jich vzal 20 a mně zbylo jen 13. Musí mi jich několik dát, aby to bylo spravedlivé.*“ Podaří se to? Proč? (Stehlíková 2000, s. 101)



Obr. 2.4.2 zdroj: Stehlíková (2000)

Nyní autorka uvádí statické a dynamické atomy nalezené v řešení Alice. Nutno dodat, že podoba této analýzy není jediná možná a může být provedena jinak v závislosti na individualitě učitele.

Alice

Tabulka 10 *Statické atomy*

01	20 : 13	**11**	,0 (?)
02	= 1	**12**	[**11**]
	070	**13**	5
03	[**01, 02**][7]		00
04	20 - 13	**14**	[**04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13**]
05	= 7	**15**	(**08, 14**)
06	: 2	**16**	20 : 10 = 2
07	= 2,5	**17**	Každý bude mít 10 jahot
08	[**07**]	**18**	protože to jinak nešlo
09	3	**19**	by
10	10		

zdroj: Stehlíková (2000, s. 108)

Tabulka 11 *Dynamické atomy*

Volba strategie
S1 a/ Vezmu dvě čísla a něco s nimi zkusím (kalkulativní strategie) b/ Jde o rozdělování, budu tedy čísla dělit **S2** a/ Neumím interpretovat výsledek, zkusím odečítání b/ Musím zjistit míru nespravedlnosti/ o kolik má Honza víc **S3** Musím ten rozdíl dělit mezi dvě děti **S4** Nefunguje to kvůli tomu, že to není sudé číslo **S5** Musím najít číslo dělitelné dvěma **S6** Musím udělat numerickou zkoušku

[7] Hranatá závorka značí zamítnutí a následné škrtnutí statického atomu v písemném řešení.

S7	Postupné odebírání od 20
S8	Platí: majetnější dá nemajetnému
S9	Musím zjistit, co mi vyšlo

zdroj: Stehlíková (2000, s. 106)

Tabulka 11a *Provedení*

Provedení			
P1	dělení 20 : 13	**P7**	násobení 13 . 1
P2	odčítání 20 – 13	**P8**	sčítání 13 + 7
P3	dělení 7 : 2	**P9**	odčítání 20 – 6
P4	dělení 20 : 10	**P10**	odčítání 20 – 5
P5	násobení 20 . 13	**P11**	odčítání 20 – 4
P6	odčítání 20 – 10		

zdroj: Stehlíková (2000, s. 106)

Tabulka 11b *Kontrola*

Kontrola	
K1	Vychází necelé číslo, ale jedná se o jahody
K2	Vychází příliš velké číslo, v úloze se jedná o malá čísla

zdroj: Stehlíková (2000, s. 107)

Tabulka 11c *Výsledek*

Výsledek	
V1	interpretace výsledku
V1a	Neumím dát číslu jeho význam
V2	prezentace výsledku

zdroj: Stehlíková (2000, s. 107)

Zápis myšlenkového procesu Alice[8]

Z1 *Přečtu si úlohu, najdu dvě čísla a něco s nimi udělám* **S1**
Z11 nachází čísla 20 a 13
Z111 píše 01, 02 **P1**
K111 K11 K1
Z2 *Co mi to vyšlo?* **S9**
Z21 podívá se na text úlohy **V1** K21
Z22 To nejde, píše 03 **V1**
K22 K2
Z3 přečte si úlohu: *Aha, musím zjistit, o kolik má víc a rozdělit to mezi ně* **I, S2, S3**
Z31 píše 04, 05 **P2** K31
Z32 píše 06, 07 **P3**
Z321 *Sedm děleno dvěma nemůže být 2,5* **C**
Z3211 vydělí pečlivěji 7 : 2, píše 08, 09, 10, 11, 12, 13 **P3**
K3211 K321 K32 K3
Z4 *Co mi to vyšlo?* **S9**
Z41 *Vychází necelé číslo* **K1** K41
Z42 *To nejde*, píše 14, 15 **K1**

[8] **Z** značí počátek, K konec myšlenky, zbylé symboly jsou uvedeny v tabulkách výše

K42 K4
Z5 *Nefunguje to kvůli tomu, že to není sudé číslo* **S4** K5
Z6 *Musím najít číslo dělitelné dvěma* **S5**
Z61 20 *je dělitelné dvěma, vyjde 10*, píše 16 **P4**
K61 K6
Z7 *Mám výsledek*, píše 17, 18, 19 **V2** K7 (Novotná 2000, s. 108 a 109)

N. Stehlíková dále dodává, že je velmi výhodné, pokud učitel může při atomární analýze komparovat řešení více žáků, což přispívá ke komplexnímu pochopení myšlenek celé třídy, a učitel je tak schopen nastavit postupy, které mohou napravit chybné znalosti žáků. Atomární analýza je zatížena subjektivností pohledu daného učitele, avšak tato subjektivita dle N. Stehlíkové s rostoucí praxí učitele klesá. Pozitivním prvkem takovéto analýzy je i skutečnost, že učitel se nesoustředí jen na odpovědi žáka, ale hluboce promýšlí celou jeho řešitelskou strategii.

3 Experimentální část

Experimentální část práce je zaměřena na vybrané úlohy z šetření TIMSS:

a) které jsou zadány formou slovního kontextu

b) u nichž musí řešitel nejdříve provést matematizaci

c) v nichž byli naši žáci neúspěšní

Cílem analýzy řešení vybraných žáků osmých, resp. devátých ročníků základních škol je získat hlubší vhled do řešitelského procesu, konkrétně zjistit, *jaké strategie žáci při řešení vybraných úloh volí a na čem v tomto řešení selhávají.*

3.1 Výběr úloh

Pro analýzu řešení žáků byly vybrány tři úlohy z mezinárodního výzkumu TIMSS z roku 2007. Podle tvůrců testových úloh TIMSS patří do vyšší úrovně obtížnosti. Tyto úlohy byly vybrány proto, že:

a) čeští žáci byli při jejich řešení neúspěšní

b) od řešitele vyžadují provedení více myšlenkových i matematických operací (tedy nejedná se o úlohy čistě algoritmické)

c) významnou roli v jejich řešení hraje matematizace

d) mají různý kontext

Úloha M39 (M02–08) – ROVNICE, VZORCE A FUNKCE (Tomášek a kol., 2009, s. 47; dále úloha č. 1)

- **CÍL ÚLOHY:** Řešení úloh pomocí rovnic, vzorců a funkcí
- **DOVEDNOST:** Uvažování
- **OBTÍŽNOST:** Úroveň 4
- **VĚDOMOSTI:** Sestavení rovnice či soustavy rovnic, ekvivalentní úpravy rovnic, aritmetika

ÚLOHA: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napiš postup výpočtu.

ŘEŠENÍ:

IDENTIFIKACE PROBLÉMU:

pero............................ o 1 zed více než tužka

2 pera a 3 tužky ....17 zedů

pero a 2 tužky ....x zedů

VYTVOŘENÍ A REALIZACE PLÁNU ŘEŠENÍ:

1) $p = t + 1$

2) $2p + 3t = 17$

3) $p + 2t = x$

dosazení z 1/: $2(t + 1) + 3t = 17$

$t + 1 + 2t = x$

$2t + 2 + 3t = 17 \quad / -2$

$3t + 1 = x$

$5t = 15 \quad / : 5$

$3t + 1 = x$

$t = 3$

$p = 4$

$3t + 1 = x$

$3 \cdot 3 + 1 = x$

$10 = x$

OVĚŘOVÁNÍ A INTERPRETACE VÝSLEDKU:

$2p + 3t = 17$

$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 8 + 9 = 17$

Odpověď: Pepa bude potřebovat na nákup 2 tužek a 1 pera 10 zedů.

První úloha dává řešiteli možnost postupovat aritmeticky a využít třeba metody pokus – omyl či lépe systematického experimentování, což jej nutí konfrontovat své řešení s údaji v zadání. Jiným možným postupem je algebraický výpočet, který vyžaduje přesné pochopení zadaných informací a vztahů mezi nimi, aby sestavené rovnice odpovídaly dané situaci.

Tabulka 12 *Hodnocení úlohy M39 v rámci výzkumu TIMSS*

kód	**Odpověď**	**četnost odpovědí českých žáků [%]**
Správná odpověď		
10	10 zedů a uvedeny rovnice. Rovnice by měly obsahovat písmena jako proměnné, např. $2y + 3x = 17$	***6,4***
11	10 zedů a uveden jiný postup, např. pero = tužka + 1	***18,2***
Nesprávná odpověď		
70	10 zedů bez uvedení postupu	***3,6***
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním)	***42,6***
Bez odpovědi		
99	Prázdné	***29,2***

Zdroj: Tomášek a kol. (2009)

Žáci by mohli chybně matematizovat relaci cen pera a tužky : $p + 1 = t$; dále pak by mohli chybovat v roznásobení dvojčlenu: $2(t + 1) = 2t + 1$.

Celková úspěšnost českých žáků v případě první úlohy dosáhla 24,6 % a mezinárodní průměr byl 17,8 %. Poměrně velké procento žáků úlohu neřešilo.

Úloha M 58 (M07-07) – GEOMETRICKÉ MĚŘENÍ (Tomášek a kol., 2009, s. 69; dále úloha č. 2)

- **CÍL ÚLOHY:** Používání vhodných vzorců pro výpočet obvodů, délky kružnic, obsahu kruhů, povrchů a objemů
- **DOVEDNOST:** Používání znalostí
- **OBTÍŽNOST:** Úroveň 5
- **VĚDOMOST:** Obsah kruhu, přímá úměrnost, zaokrouhlování na celé stovky

ÚLOHA: Kruhový rybník má poloměr 10 metrů. V průměru připadají na jeden čtverečný metr v rybníku 2 žáby. Přibližně kolik žab je v rybníku? π je přibližně 3,14.

A/ 120 žab
B/ 300 žab
C/ 600 žab
D/ 2 400 žab

IDENTIFIKACE PROBLÉMU:

poloměr rybníku 10m
průměrný počet žab .... $2/m^2$
celkový počet žab x

VYTVOŘENÍ A REALIZACE PLÁNU ŘEŠENÍ:

1) $S = \pi \cdot r^2$
2) $S = 3{,}14 \cdot 10^2$
3) $S = 314\ m^2$

$1m^2$ ....2 žáby
$314m^2$ ....x žab

$x = 314 \cdot 2 = 628$

OVĚŘOVÁNÍ A INTERPRETACE VÝSLEDKU:

Nyní je třeba zaokrouhlit 628 na 600 (toto je číslo z nabídky blízké výsledku).

Odpověď: V rybníku je přibližně 600 žab.

Druhá úloha řešitele vede k použití aritmetické strategie výpočtu. Je nutné znát vzorec pro obsah kruhu.

V úloze může nastat problém s použitím správného vzorce pro obsah či plochu rybníku. Dále žáci mohou inklinovat k použití průměru ve vzorci pro obsah a otázkou je, jak si poradí s přímou úměrností.

Tabulka 13 *Hodnocení úlohy M58 v rámci výzkumu TIMSS*

Odpovědi českých žáků (Správná odpověď: C)				
Odpověď	A	B	C	D
Četnost [%]	***35,6***	***22,0***	***31,9***	***2,3***

Zdroj: Tomášek a kol. (2009)

Úspěšnost českých žáků dosáhla 31,9 % a mezinárodní průměr činil 28,4 %.

Úloha M75 (M05-06) – POMĚR, ÚMĚRNOST A PROCENTA (Tomášek a kol., 2009, s. 96; dále úloha č. 3)

- **CÍL ÚLOHY:** Řešení úloh obsahujících procenta a úměrnosti
- **DOVEDNOST:** Uvažování
- **OBTÍŽNOST:** Úroveň 5
- **VĚDOMOSTI:** Násobení zlomku celým číslem, základ pro slevu, přímá úměrnost

ÚLOHA: Katka a Michal plánují jednodenní výlet pro svou třídu. Celková cena jízdného pro všechny žáky musí být 500 zedů nebo méně. Ve třídě je 30 žáků. Zde jsou ceny jízdného do jednotlivých měst:

Žákovské jízdné do Zálesí nebo Brodu	**Žákovské jízdné do Zajícova nebo Medvědína**
Zpáteční jízdenka: 25 zedů	Zpáteční jízdenka: 20 zedů
Sleva $\frac{1}{3}$ jízdného pro skupiny s 25 a více žáky	Sleva 10 % pro skupiny s 15 a více žáky

Která města si mohou dovolit navštívit? Napiš postup výpočtu.

IDENTIFIKACE PROBLÉMU:

cena jízdného pro třídu...500 zedů a méně do Zálesí či Brodu .... sleva $\frac{1}{3}$ z 25 zedů pro 25 žáků a více

do Zajícova či Med.….. sleva 10 % z 20 zedů pro 15 žáků a více

VYTVOŘENÍ A REALIZACE PLÁNU ŘEŠENÍ:

Do Zálesí či Brodu ...... $25 - (\frac{1}{3} \cdot 25) = \frac{50}{3}$

Do Zajícova či Med.…..$20 - (0{,}1 \cdot 20) = 18$

Cena do Zálesí .... $\frac{50}{3} \cdot 30 = 500$ zedů

Cena do Zajícova.......... $18 \cdot 30 = 540$ zedů

OVĚŘOVÁNÍ A INTERPRETACE VÝSLEDKU:

Řešitel se musí vrátit k textu a uvědomit si, že limit je 500 zedů.

Odpověď: Žáci mohou navštívit Zálesí či Brod.

Třetí úloha v sobě skrývá dva možné postupy pro řešení a hlavně dvě podúlohy, které žák vyřeší, pouze pokud má na paměti veškeré údaje ze zadání. K vyřešení úlohy je třeba provést více výpočtů, při kterých si žák musí uvědomit, který z nich už je konečný, aby neprovedl nepatřičné zaokrouhlení, které by mohlo vést ke špatnému výsledku.

V této úloze je možnou obtíží počítání slev. Problémem může být hlavně určení slevy zadané zlomkem a také uvědomění si, jaký je základ pro výpočet slevy.

Tabulka 14 *Hodnocení úlohy M75 v rámci výzkumu TIMSS*

kód	**Odpověď**	**četnost odpovědi českých žáků [%]**
Správná odpověď		
20	Uvádí 500 zedů pro Zálesí a Brod, 540 zedů pro Zajícov a Medvědín, vybírá Zálesí a Brod	***12,0***
Částečně správná odpověď		
10	Uvádí 500 zedů pro Zálesí a Brod, 540 zedů pro Zajícov a Medvědín, nevybírá Zálesí a Brod	***2,1***
11	Určuje správnou cenu pro Zálesí a Brod (500 zedů), nebo pro Zajícov a Medvědín (540 zedů), ale ne obě	***12,9***
Nesprávná odpověď		
70	Vybírá Zálesí a Brod, ale výpočet není uveden nebo je nesprávný	***9,9***
79	Další nesprávná (včetně přeškrtnuté, vygumované nebo nečitelné odpovědi, značek nebo odpovědí nesouvisejících se zadáním)	***29,5***
Bez odpovědi		
99	Prázdné	***33,6***

Zdroj: Tomášek a kol.(2009)

Úspěšnost českých žáků dosáhla hodnoty 12 % a mezinárodní průměr byl 8,1 %. Velké procento žáků úlohu vůbec neřešilo.

Dvě z výše uvedených úloh jsou otevřené úlohy s tvorbou odpovědi a jedna úloha je uzavřená s výběrem odpovědi.

Před vlastním šetřením bylo účelné provést pilotní studii. Jejím cílem bylo:

- ***Vyzkoušet plánovaný průběh hlavní studie, kdy žáci řeší úlohu jednu po druhé a experimentátor[9] jim předloží další úlohu teprve tehdy, když si je jist, že žákovu řešení porozuměl.***
- ***Identifikovat některé jevy, které se v řešení úloh objeví – to by mělo umožnit experimentátorovi v hlavní studii operativně reagovat na žákovská řešení.***
- ***Ověřit, zda byly úlohy dobře vybrány k danému účelu.***

3.1.1. Účastníci a průběh pilotní studie

Pro účely pilotní studie byli vybráni čtyři žáci devátého ročníku jedné středočeské základní školy. Původním záměrem bylo testovat žáky osmého ročníku, ovšem po kurikulární reformě, kdy si každá škola na základě svého vzdělávacího programu upravuje učební plány do jisté míry svobodně, se ukázalo, že učivo potřebné pro zvládnutí první úlohy se probírá až v devátých ročnících, a tak se i pilotní studie opírá právě o tyto v zásadě patnáctileté osoby.

Zmíněná čtveřice žáků vzešla z požadavku, aby šlo o průměrné žáky, kteří se v testech dopouštějí chyb, neboť chybná či netradiční řešení jsou pro účely této studie zásadní. Po konzultaci s třídní učitelkou, která ve své třídě vyučuje matematiku, byli vybráni dva chlapci a dvě dívky.

Tato čtveřice se odebrala do zadních dvou lavic ve třídě, aby nerušila a nebyla až tolik rušena zbytkem třídy. Žákům byly rozdány výše uvedené tři úlohy tak, aby ve dvojici vedle sedících žáků nebyla v daný okamžik řešena stejná úloha, a omezila se tak možnost vzájemné pomoci a ovlivňování. Každý žák dostal vždy jednu úlohu, jejíž zadání bylo na samostatném listu formátu A4, a tak měl dostatek prostoru na písemné vyjádření svých myšlenek. Součástí zadání byla i instrukce, aby vše, co řešitele napadne, bylo uvedeno na daný list. Žáci měli k řešení vyhrazenu celou jednu vyučovací hodinu, kdy se po vyřešení první zadané úlohy přihlásili, zadavatel jejich řešení zběžně prozkoumal, a pokud u nějakého zápisu nevěděl, co k němu řešitele vedlo, tak se zeptal a onu promluvu zaznamenal. Poté řešitel obdržel další úlohu. Průběh řešitelského procesu z pohledu toho,v jakém časovém intervalu řešila vybraná čtveřice žáků jednotlivé úlohy, popisuje tabulka 15. Sousedící sloupce označují, jaké úlohy žáci řešili v jeden okamžik, a tabulka reflektuje zasedací pořádek účastníků pilotní studie.

[9] Experimentátorem či zadavatelem je v dalším textu myšlen autor této práce.

Tabulka 15 *Distribuce úloh jednotlivým řěšitelům*

Tereza	Lucie
úloha č. 1 25 min.	úloha č. 2 30 min.
úloha č. 3 20 min.	úloha č. 1 15 min.

Jan	Marek
úloha č. 3 30 min.	úloha č.1 20 min.
	úloha č. 2 10 min.
úloha č. 2 15 min.	úloha č. 3 15 min

Řešitelé využili ke své práci celou vyučovací hodinu, přičemž tři řešitelé řešili dvě úlohy a jeden všechny tři (viz tab. 15). Žáci položili experimentátorovi jen několik otázek. Lucie se ptala na význam slova zed a Jan chtěl vědět, zda je ve třetí úloze možné uznat žákům slevu ve výši 20 %, když 10% sleva platí pro skupiny s 15 žáky a třída má žáků 30. Kromě těchto dotazů se experimentátor řešitelů ptal na vysvětlení jejich řešení v průběhu pilotní studie nebo až při kontrole jejich řešení. Výkony jednotlivých řešitelů shrnuje tabulka 16.

Tabulka 16 *Počet řešených úloh u jednotlivých řešitelů a kvalita řešení*

Řešitel \ úloha	***č. 1***	***č . 2***	***č. 3***
Lucie	---	O	X
Tereza	O	X	---
Marek	O	O	---
Jan	X	---	O

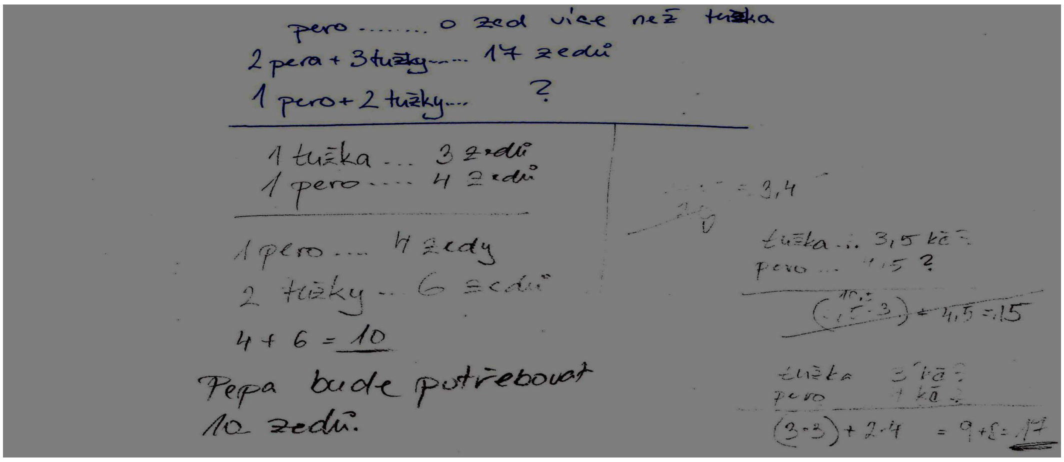
Pozn. O – úloha byla vyřešena, --- úloha byla řešena a nedotažena X – úloha nebyla zadána

3.1.2. Popis řešitelského procesu žáků

Písemná řešení žáků spolu s mými poznámkami, které jsem získal rozhovory s nimi, byly podrobně analyzovány pomocí technik atomární analýzy. Výsledky analýz budou prezentovány pravděpodobným popisem řešitelského procesu rozděleného do čtyř fází podle G. Polyai: identifikace problému, vytvoření plánu řešení, realizace plánu řešení, ověřování a interpretace výsledku.

Řešitelka Tereza

Úloha č. 1:



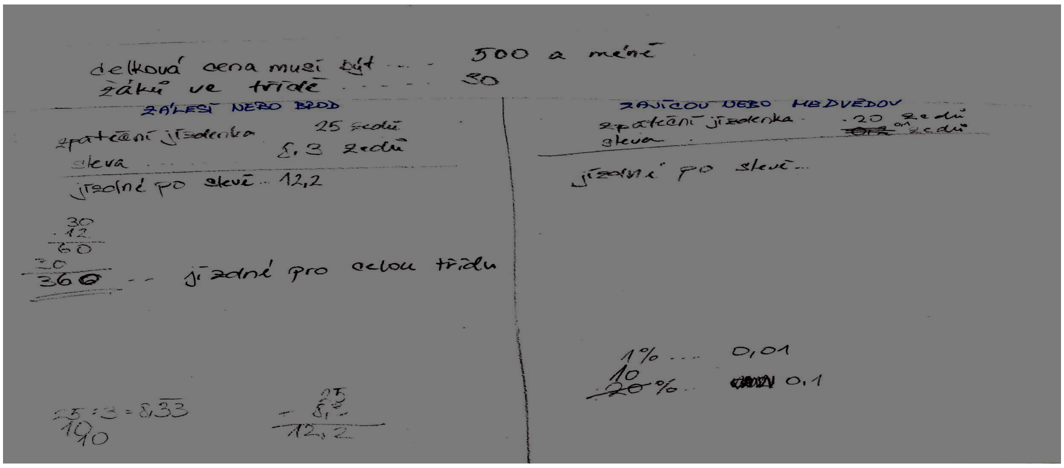
Obr. 3.1.2

- **Identifikace problému:** Tereza uchopila úlohu s porozuměním. K úloze si zapsala slovní legendu, která obsahuje všechny nezbytné informace včetně zmínky o tom, co je třeba vypočítat.
- **Vytvoření plánu řešení:** Tereza zvolila k výpočtu strategii systematického ověřování, což je jedna z možností řešení. Z hlediska časové a výpočtové náročnosti se ovšem nejedná o nejideálnější plán výpočtu. Tereza se k této strategii uchýlila vinou **chyby z nepozorné četby (ch26)**[10], když ve své legendě přehlédla informaci o relaci ceny pera a tužky a fázi realizace plánu začala operací dělení (17 : 5).
- **Realizace plánu řešení:** Experimentátor se Terezy zeptal, proč provedla tuto operaci, a odpovědí mu bylo, že cílem takového výpočtu bylo zjištění přibližné ceny pera a tužky. Podíl v hodnotě 3,4 Tereza nejprve upravila na 3,5, resp. 4,5 pro cenu tužky, resp. pera a poté, co jí nevyšla matematická zkouška, tyto hodnoty modifikovala na 3 a 4 zedy (tyto už vyhověly matematické zkoušce). Experimentátor Terezu neopravoval, neboť viděl, že při řešení uvažuje relativně správně. Nutno dodat, že Tereza získané hodnoty o ceně pera a tužky nezapomněla dosadit do druhé rovnice, kterou měla uloženou v paměti a v algebraické podobě ji nezapsala.

[10] Kód v závorce značí kód chyby na základě seznamu identifikovaných chyb uvedeného v kapitole 4.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Tereza byla vzhledem ke zvolené strategii nucena hodnoty pro cenu pera a tužky ověřovat v matematické zkoušce, aby dospěla ke správným cenám. Během tohoto ověřování se dopustila **chyby z nepozornosti (ch26)**, když v první ze dvou provedených zkoušek mylně počítala se třemi tužkami a jedním perem, přičemž v zadání se hovoří o tom, že dvě tužky a tři pera stojí 17 zedů. Na konci nezapomněla Tereza uvést odpověď na otázku, která byla položena v zadání úlohy.

Úloha č. 3:



Obr. 3.1.3

- **Identifikace problému:** Tereza si k úloze zapsala stručnou slovní legendu, ve které ovšem uvedla důležitou informaci o tom, že celkové jízdné pro třídu má být 500 zedů a méně. Z fáze realizace plánu řešení je pak patrné, že Tereza uchopila úlohu s porozuměním.

- **Vytvoření plánu řešení:** Tereza zvolila pro fázi řešení plán sestávající ze dvou analogických postupů pro každou destinaci zvlášť. Tento postup spočíval ve zjištění výše slevy z nezlevněného jízdného pro jednotlivce, kterou pak následně Tereza odečetla právě od nezlevněného jízdného a výsledek vynásobila počtem žáků třídy, aby tak získala zlevněnou cenu pro celý kolektiv.

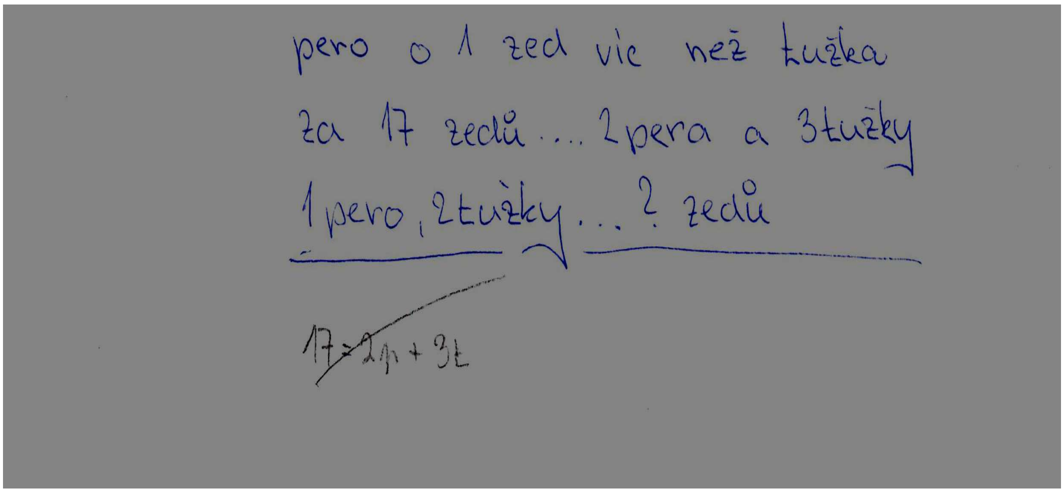
- **Realizace plánu řešení:** Tereza si nejprve vytvořila slovní legendu pro jízdu do Zálesí či Brodu, kterou později doplnila údajem o hodnotě slevy pro jednoho žáka. Ve výpočtu takové slevy se však dopustila **chyby předčasného zaokrouhlení mezivýsledku (ch9)**, kdy správně získanou hodnotu 8,3333 zaokrouhlila na 8,3. Tuto upravenou hodnotu pak správně odečetla od plné ceny jízdného, ovšem zde se dopustila **procedurální chyby (ch8)**, když špatně zarovnala číslo 8,3 pod číslo 25 a měla tak pod jednotkami celého čísla desetinný řád čísla 8,3. Výsledný rozdíl 12,2 pak znovu **předčasně zaokrouhlila (ch9)** na hodnotu 12 zedů. Tuto hodnotu pak vynásobila počtem žáků ve třídě a dostala chybnou výši zlevněné ceny jízdného pro celou třídu. Výše zmíněných chyb si experimentátor bohužel nevšiml a nemohlo tak dojít k jejich nápravě. Při výpočtu slevy pro druhou destinaci už neměla Tereza dostatek času, a tak zvládla spočítat jen to, že 20 % je 0,2. Toto experimentátor zaznamenal a zeptal se, proč Tereza počítá s 20 %. Odpovědí byl jen hluboký povzdech a následně Tereza tento údaj přepsala na 10 % = 0,1. Na další nápovědu či nápravu této **chyby z nepozornosti (ch26)** nebyl čas. Určitě však šlo o chybu z nepozornosti, kdy si Tereza neuvědomila, že základem pro slevu je 20 nikoli 1, protože její slovní legenda na pravé straně to potvrzuje.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Na tuto část Tereze nezbyl čas.

Tereza zřejmě patří mezi pečlivé a vytrvalé žáky. Je schopna si vytvořit plán řešení, i když u první úlohy je zvolená strategie trochu nešikovná. Tereza však v průběhu řešení první úlohy nezapomíná na kontrolu svých výsledků, a to jí umožňuje dospět k výsledku. U třetí úlohy si Tereza zvolila také správnou strategii, ovšem série chyb jí neumožnila dojít k výsledku.

Řešitelka Lucie

Úloha č. 1:

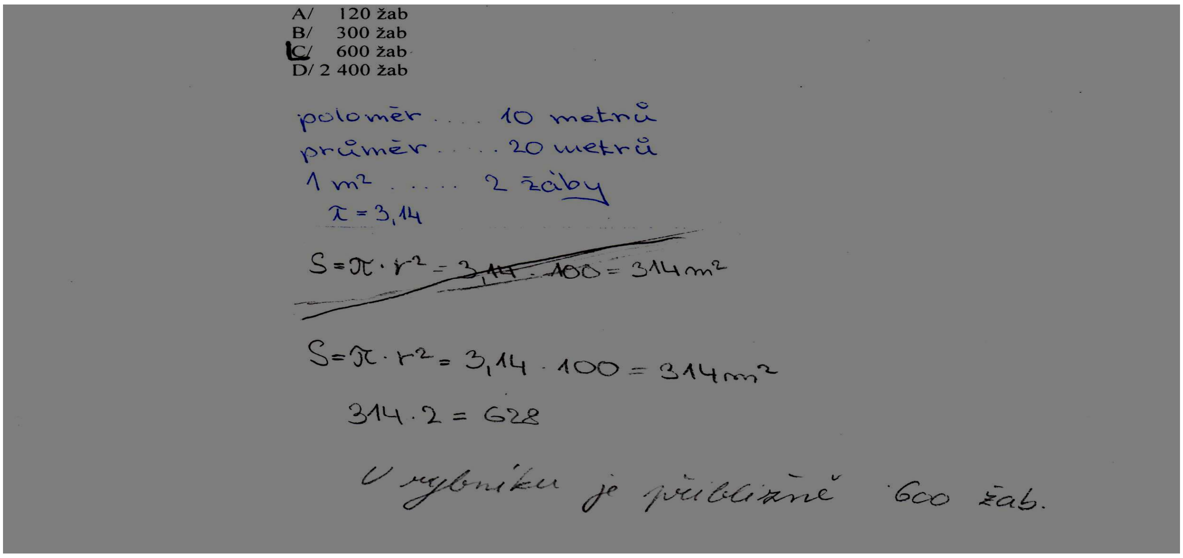


Obr. 3.1.4

- **Identifikace problému:** Lucie první úlohu **neuchopila (ch11)** vůbec. V jejím zápisu se sice objevuje správně sepsaná slovní legenda, která obsahuje všechna nezbytná data ze zadání, ale její následné dlouhé tápání a zoufalé pohledy do stropu třídy naznačovaly, že problém tkví v uchopení úlohy.

- **Vytvoření plánu řešení:** Lucie si i vinou neporozumění úloze žádný plán nevytvořila.
- **Realizace plánu řešení:** Lucie po provedení zápisu slovní legendy dlouho nevěděla, jak pokračovat. Experimentátor si po jisté době této skutečnosti povšiml a zeptal se, kde je problém. Lucie odvětila, že neví, jak postupovat. Na to experimentátor řekl, že může postupovat s využitím rovnic, tedy že jednou cestou k cíli je symbolický zápis toho, co má správně uvedeno ve slovní legendě. Lucie po chvilce sestavila správně jednu rovnici o dvou neznámých, ale zřejmě tušila, že k vyřešení problému potřebuje ještě jednu rovnici. Tuto ale neobjevila. Lze tedy konstatovat, že Lucie měla potíže s **matematizací z důvodu neuchopení úlohy (ch52)**.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Na tuto část řešitelského procesu se nedostalo z výše uvedených důvodů.

Úloha č. 2:



Obr. 3.1.4

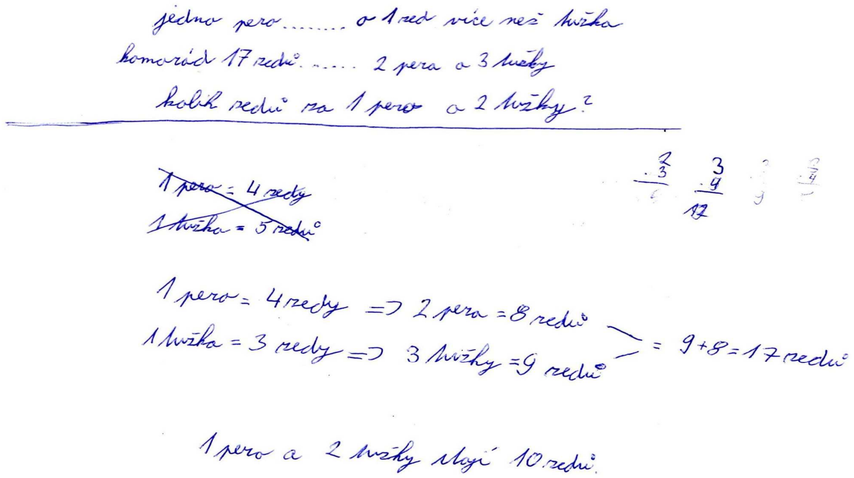
- **Identifikace problému:** Lucie tuto úlohu uchopila bez problémů a věděla dobře, co má počítat. Zajímavé je, že do správně sestavené slovní legendy zapsala i nadbytečný údaj o průměru kruhového rybníka, k čemuž ji vedla desinterpretace jinak statistického pojmu uvedeného v zadání, kde se píše, že v rybníku „**v průměru**“ **(ch12)** připadají dvě žáby na jeden metr čtverečný.
- **Vytvoření plánu řešení:** Lucie si zvolila správnou strategii a posloupnost kroků nezbytných pro řešení úlohy.

- **Realizace plánu řešení:** Lucie nejprve zapsala vzorec pro obsah kruhu a po chvilce váhání ho škrtla. Experimentátor se jí zeptal, proč tak učinila. Lucie odvětila, že si myslela, že jde o blbost. (Tato reakce svědčí o nedostatku sebevědomí Lucie.) Experimentátor reagoval tak, že z jeho pohledu o blbost rozhodně nejde. Toto konstatování Lucii potěšilo a vzápětí se pustila do výpočtu a správně použila jak vzorec pro obsah kruhu, tak i přímou úměrnost.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Ověření o správnosti postupu získala Lucie od experimentátora. Výsledek úlohy zformulovala do slovní odpovědi.

Lucie měla problémy pouze s první úlohou, kdy nevěděla, co má vlastně počítat. Neuměla zadané informace matematizovat do podoby rovnic. Druhou úlohu řešila správně. Zdá se, že občas ji brzdí i malé sebevědomí.

Řešitel Marek

Úloha č. 1:


jedno pero....... o 1 zed více než tužka
kamarád 17 zedů...... 2 pera a 3 tužky
kolik zedů za 1 pero a 2 tužky?

~~1 pero = 4 zedy~~
~~1 tužka = 5 zedů~~

1 pero = 4 zedy => 2 pera = 8 zedů
1 tužka = 3 zedy => 3 tužky = 9 zedů
= 9+8 = 17 zedů

1 pero a 2 tužky stojí 10 zedů.

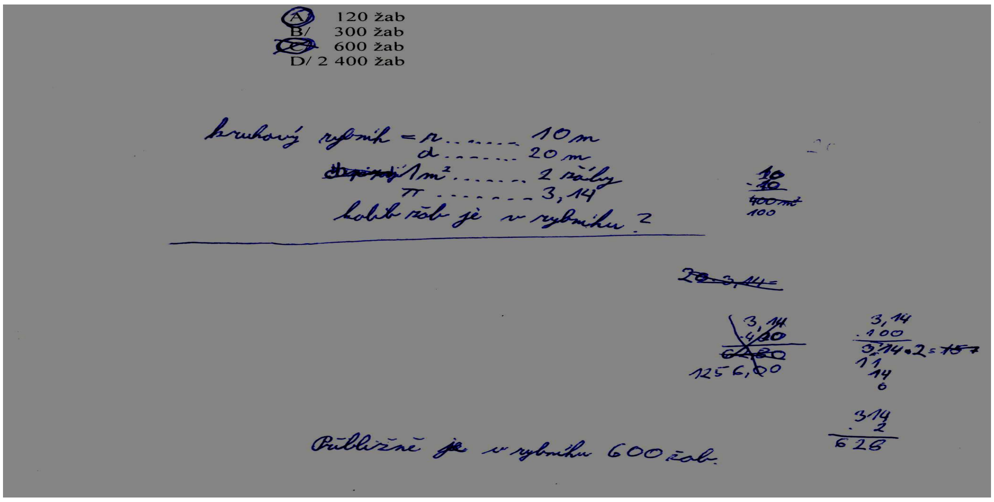
Obr. 3.1.5

- **Identifikace problému:** Marek uchopil tuto úlohu s porozuměním. Sestavil slovní legendu, která obsahuje všechny nezbytné údaje, včetně zmínky o tom, co je třeba v rámci dané úlohy vypočítat.
- **Vytvoření plánu řešení:** Marek si zvolil strategii pokus – omyl. Nutné je, aby žák při této strategii nezapomněl na provedení matematické zkoušky.
- **Realizace plánu řešení:** Marek si bohužel hned v úvodu svého řešení uložil do paměti špatný údaj o vztahu cen pera a tužky. S touto **chybou z nepozornosti (ch26)** pak chvilku pracoval, když zvolil dvě hodnoty pro cenu pera a tužky, konkrétně 4 zedy

a 5 zedů v tomto pořadí a zkoušel ověřit, zda pro dvě pera a tři tužky dostane hodnotu 17. Z důvodu výše zmíněné chyby se však i při správně provedeném násobení „pod sebou“ k uvedené hodnotě nedopracoval. To ho rozhodilo a chvíli váhal. Experimentátor ho na jeho chybu upozornil a Marek poté už vyřešil úlohu bez zaváhání. Matematizace u Marka zůstala v oblasti myšlenkové, neboť žádnou rovnici nenapsal a vše řešil aritmeticky. Po skončení šetření Marek experimentátorovi sdělil, že mu připadalo zbytečné, pouštět se v tomto případě do rovnic.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Marek jednotlivé hodnoty pro cenu pera a tužky vždy zkonfrontoval s podmínkou, že dvě pera a tři tužky mají stát 17 zedů. Odpověď ke slovní úloze nezapomněl uvést.

Úloha č. 2:



Obr. 3.1.6

- **Identifikace problému:** Marek uchopil úlohu s porozuměním. Zapsal si nezbytné údaje do slovní legendy, přičemž i u něho se objevil nadbytečný údaj o průměru kruhu. V případě Marka se tento údaj v legendě objevil spíše z důvodu neznalosti či **nejistoty v poznatku o vzorci pro obsah kruhu** (**ch15**).

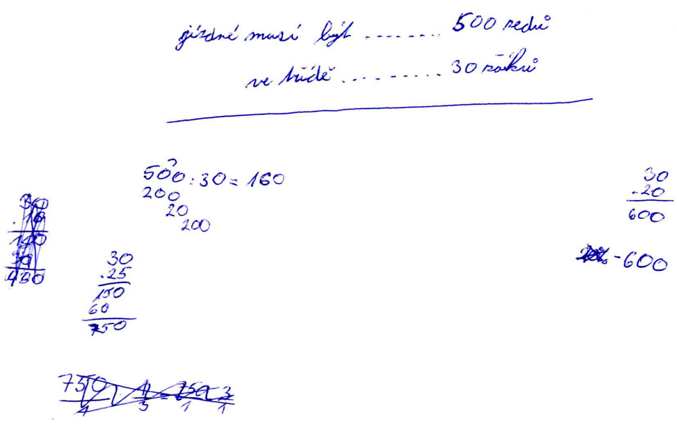
- **Vytvoření plánu řešení:** Marek si vytvořil správný přístup k řešení problému spočívající ve výpočtu plochy rybníku a následném použití informace o počtu žab žijících na metru čtverečném.

- **Realizace plánu řešení:** V této etapě řešitelského procesu nejprve Marek jistou dobu bojoval s tím, jak vypadá vzorec pro obsah kruhu. Nejprve uvedl výpočet pro obvod, poté do vzorce pro obsah dosadil místo poloměru průměr kruhového rybníku.

Nakonec Marek nalezl ten správný tvar, aniž by experimentátor zasáhl. Poté už však zasahovat musel, když zaregistroval, že Marek údaj o ploše rybníku vydělil dvěma. Zeptal se tedy, proč tak Marek činí. Ten odpověděl, že jsou přeci dvě žáby na metr čtverečný, tak se to vydělí dvěma. Experimentátor se tedy zeptal: „Když máte na metru čtverečném dvě žáby, kolik jich je na dvou metrech?“ „Čtyři,“ zněla Markova odpověď. „Kolik jich je na třech metrech čtverečných?“ „Šest.“ „Kolik jich je na deseti metrech čtverečných?“ „Dvacet, jo já to musím vynásobit dvěma!“ Po této krátké diskusi už Marek dospěl ke správnému výsledku, nicméně se nejdříve dopustil **chybného uchopení pojmu přímá úměrnost (ch14).**

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Marek nezapomněl uvést slovní odpověď na zadanou otázku.

Úloha č. 3:



Obr. 3.1.7

- **Identifikace problému:** Marek uchopil úlohu s porozuměním (jak je vidět z fáze vytvoření plánu řešení). Zapsal si stručnou slovní legendu, ve které uvedl údaj o limitu ceny jízdného a o počtu žáků ve třídě. Zajímavé je, že Marek v legendě nezaznamenal, že jízdné má stát 500 zedů a méně, což může být způsobeno nepozorností nebo jistou leností psát všechno. Spíše se lze klonit k tomu druhému, neboť z jeho výpočtu je patrné, že hodnotu 500 bral jako limit.

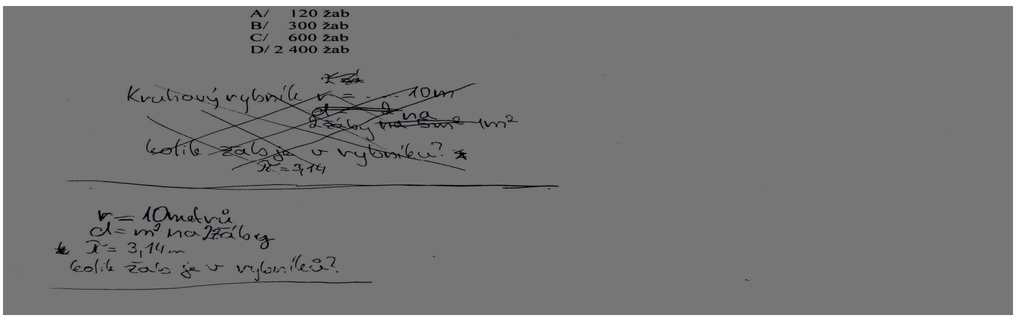
- **Vytvoření plánu řešení:** Marek nejprve zvolil strategii spočívající ve výpočtu limitu ceny jízdného pro jednotlivce, kterou chtěl srovnávat se zlevněnou cenou jízdného pro jednotlivce do zadaných destinací. Tento správný plán ovšem dostal trhliny při realizaci, a tak byl nahrazen snahou o výpočet nezlevněné ceny jízdného pro celou třídu, z níž chtěl Marek spočítat slevu, odečíst jí od nezlevněné ceny a výsledek porovnat s hodnotou 500 zedů. Oba plány byly přitom v pořádku.

- **Realizace plánu řešení:** Marek se nejprve snažil vypočítat limit pro cenu jízdného pro jednotlivce, při dělení 500 : 30 se však dopustil **numerické chyby (ch32)**, která způsobila, že následující kontrola, zda takový limit násobený počtem žáků ve třídě dá 500, selhala. Marek tedy změnil postup a vypočítal nezlevněnou cenu pro všechny žáky a z ní chtěl počítat slevu, jejíž výše je stanovena na jednu třetinu. V tento okamžik si Marek nevěděl rady s určením jedné třetiny ze 750 (Marek měl problém s **neuchopením pojmu procenta a zlomku a počítání s nimi (ch17)**), když 750 vydělil třetinou a následně násobil třemi. Experimentátor ho na tuto chybu upozornil a Marek v časové tísni související s blížícím se zvoněním přešel raději na výpočet zlevněné ceny do druhé destinace. Tento výpočet již ovšem nestihl realizovat.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Marek provedl jediné ověření, o němž jsem se zmínil výše. Na další ověřování už neměl čas. Slovní odpověď k úloze vzhledem k absenci konečného výpočtu nezformuloval.

Marek byl úlohami zaujatý a také se jako jediný hlásil a komunikoval s experimentátorem z vlastní iniciativy. První úlohu uchopil správně, ale dopustil se chyby z nepozornosti, která ho brzdila. Nutno říci, že Marek tuto úlohu matematizoval pouze v hlavě, do rovnicového zápisu se nepustil. Ve druhé úloze si nemohl vybavit vzorec pro obsah kruhu a špatně uchopil pojem přímé úměrnosti. Ve třetí úloze se Marek dopustil chyby v zaokrouhlení mezivýsledku. Jinak ovšem nutno dodat, že si Marek ve všech třech případech uměl zvolit vhodnou strategii výpočtu a všechny úlohy uchopil s porozuměním.

Řešitel Jan

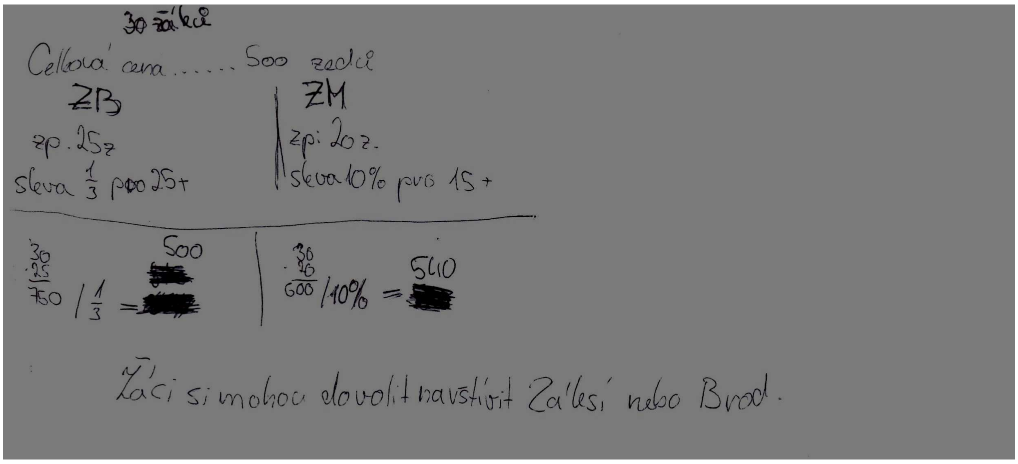
Úloha č. 2:



Obr. 3.1.8

- **Identifikace problému:** Jan tuto úlohu **neuchopil** (**ch11**), neboť po zapsání slovní legendy vůbec netušil, jak postupovat dále (první slovní legendu, která se shoduje s druhou, Jan přeškrtl z neznámých důvodů). Experimentátor bohužel selhal a Janovi neposkytl informaci o vzorci pro obsah kruhu, bez něhož mohl Jan těžko pokračovat.
- **Vytvoření plánu řešení:** Jan si plán řešení nevytvořil.
- **Realizace plánu řešení:** Tato etapa u Jana chybí.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** I tato fáze není u Jana prezentováná z výše uvedených důvodů.

Úloha č. 3



Obr. 3.1.9

- **Identifikace problému:** Jan uchopil úlohu s porozuměním a vše podstatné si zapsal do slovní legendy.
- **Vytvoření plánu řešení:** Jan zvolil správnou strategii, kterou rozvíjel v následující fázi.
- **Realizace plánu řešení:** Jan nejprve vypočítal celkovou nezlevněnou cenu pro celou třídu do jednotlivých destinací a pak se zasekl na výpočtu slevy. Experimentátorovi se svěřil, že neví, jak vypočítat jednu třetinu ze 750. Experimentátor se tedy Jana zeptal, co je třetina ze tří. Jan po chvilce váhání prohlásil, že je to jedna. Experimentátor se zeptal, jak k tomu dospěl. Jan odvětil, že to vydělil třemi. Experimentátor se tedy zeptal, kolik bude třetina ze 750, načež Jan řekl, že 250. Experimentátor pak musel Janovi sdělit, že 250 je hodnota slevy, aby Jan poté tuto hodnotu odečetl od 750 a dospěl ke správnému výsledku. Analogický výpočet v případě druhé destinace opět

vyžadoval od experimentátora nápovědu v podobě série návodných otázek. Nejprve se experimentátor zeptal, kolik je deset procent ze sta. Odpověď po chvilce váhání zněla: „Deset procent ze sta je deset." Pak se tedy experimentátor zeptal, kolik je deset procent ze šesti set a Jan už věděl, jak pokračovat. U Jana se ve fázi řešení projevil problém s **uchopením pojmu procenta a zlomku a počítání s nimi (ch17).**

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Jan uvádí korektní odpověď na zadanou otázku.

Jan si v úloze číslo dvě nevybavil vzorec pro obsah kruhu, takže úlohu nevyřešil. V případě třetí úlohy si Jan vytvořil vhodnou strategii výpočtu, ale narazil na neznalost počítání slevy z daného základu.

Nyní můžeme udělat shrnutí pro typy chyb, která se jednak opírá o mé předběžné analýzy úloh a jednak o analýzu řešení úloh čtyř řešitelů z pilotní studie (viz tab. 17).

Tabulka 17 *Typy chyb v jednotlivých fázích řešení úloh*

	fáze uchopení + plán	**fáze matematizace + řešení**	**fáze ověřování výsledku**
úloha č.1	neuchopení úlohy, problém s vytvořením plánu	nepozornost, chybná matematizace	
úloha č.2	neuchopení slova „v průměru", neuchopení úlohy	chybné uchopení pojmu přímá úměrnost, nevybavení si vzorce pro obsah kruhu	
úloha č.3		předčasné zaokrouhlení, chybný postup ve správně zvolené operaci, chyba z nepozornosti, chybné uchopení zlomku a procenta	nedostatečná sémantická kontrola

Po provedené analýze jednotlivých řešení od vybraných žáků lze předchozí tabulku ještě doplnit stručným shrnutím týkajícím se toho, jak byly jednotlivé úlohy řešeny.

První testovaná úloha byla řešena výhradně metodou pokus – omyl či jistým systematickým experimentováním, a to přesto, že žáci právě dobrali látku týkající se soustav rovnic o dvou neznámých. Jeden z nich konstatoval, že mu rovnicové řešení v případě této úlohy připadalo příliš obtížné, a tak volil řešení aritmetické, prováděné z části v hlavě.

Druhá úloha dělala problémy z pohledu nutnosti vybavit si vzorec pro obsah kruhu a ukázalo se též, že někteří žáci mohou mít potíže se správným chápáním přímé úměrnosti, kdy ji někteří zaměňují za úměrnost nepřímou.

Třetí úloha skrývala obtížné místo v oblasti počítání slevy z určitého základu. Zajímavě řešil úlohu Marek, který naznačil jistou divergenci svého myšlení, když se nejprve snažil vypočítat limit pro cenu jízdného na jednoho žáka a ten by poté srovnával s cenou pro jednotlivce do daných dvou destinací se započítáním dané slevy. Při výpočtu se ovšem dopustil numerické chyby, a úlohu tak nevyřešil. Zajímavé bylo, že dva žáci měli problém se zjištěním jedné třetiny z čísla 750 − jeden ani nevěděl, že to znamená dělit třemi, druhý dané číslo dělil jednou třetinou, aby v následné úpravě číslo 750 násobil třemi. U úlohy 3 se objevily neočekávané problémy spočívající v nepatřičném zaokrouhlení, které vedlo k nesprávnému řešení.

3.1.3. Závěry z pilotní studie

Jedním z cílů pilotní studie bylo ověření vhodnosti vybraných úloh. Úlohy 1 a 3 jsou úlohy, které vyžadují vytvoření jistého plánu, který je nutno matematizovat a vyřešit. Současně dávají prostor pro více než jeden možný postup a umožňují řešiteli volit i netradiční přístup. Úlohy obsahují ve svém zadání několik informací, které si žáci musí uložit do paměti a v průběhu řešení se na ně vícekrát odvolávat, což klade velké nároky na paměť a koncentraci žáků a současně i na jejich pozorné čtení.

Úloha číslo dvě sice vyžaduje provedení tří kroků: výpočtu obsahu, použití přímé úměrnosti a zaokrouhlení pro volbu jedné ze zadaných odpovědí; ovšem úloha neobsahuje příliš zadaných informací. V porovnání s ostatními úlohami této studie je trochu lehčí, ověřuje však znalost vzorce pro obsah kruhu. V hlavní studii bude úloha některým řešitelům zadána v podobě otevřené úlohy. Při uzavřené úloze si mohl žák být jistý správností výsledku, pokud dospěl k číslu dostatečně blízkému k nějakému ze zadaných čísel.

Analýza žákovských řešení všech třech úloh přinesla základní vhled do řešitelských procesů, ukázala na kritická místa, v nichž může dojít k žákovu selhání při řešení úloh. Vznikl počáteční seznam chyb, který bude doplněn v hlavní studii.

Co se týče dalšího cíle studie, a sice ověřit způsob organizace získávání dat, studie přinesla několik poznatků. Ukázalo se, že i žáci řešící rozdílné úlohy si mohou napovídat a dokonce i interagovat s ostatními žáky ve třídě. Je proto rozumné, aby zadavatel minimalizoval takové počínání třeba svou přítomností v blízkosti řešitelů.

Dalším poznatkem studie byla ostýchavost žáků ve smyslu zapsání svých myšlenek na papír, a to i přesto, že jsem zdůraznil, že součástí studie není známkování jejich řešení. Žáky tedy bylo třeba opakovaně požádat, aby zapsali na papír, cokoliv je k dané úloze napadne.

Tereza, která naopak neváhala sepsat veškeré své myšlenky, si vzala obyčejnou tužku s gumou, a pokud shledala některou myšlenku jako chybnou, pak začala gumovat. Tomu jsem zamezil s poznámkou, že může škrtat, ale nikoli gumovat. Tedy i na toto je třeba dát pozor.

Následujícím poznatkem vzešlým z pilotní studie je jistá rozpolcenost zadavatele, který chce od žáků obdržet nedokonale vyřešené příklady, ale zároveň by rád napověděl tak, aby každý žák pokud možno mohl za vyhrazenou jednu vyučovací hodinu projít všechny tři úlohy. Tuto rozpolcenost je třeba držet v rovnováze a nenapovídat příliš, současně by však měl mít každý žák možnost jemu zadaný příklad vyřešit, a tak pokud se v nějaký moment viditelně zarazí, je třeba mu pomoci.

Dalším problémem může být rozdílné tempo žáků při řešení úloh. V pilotní studii byli vybráni žáci, kteří si v matematice počínají přibližně stejně zručně, ovšem rozdílné tempo se do jisté míry projevilo i zde.

Následující oddíly se věnují hlavní studii, v rámci níž byly úlohy předloženy dalším žákům.

3.2 Hlavní studie

Hlavní studie se zúčastnili žáci devátých ročníků tří základních škol sídlících ve Středočeském kraji a na okraji Prahy. V jednom případě se studie zúčastnila celá třída čítající 8 žáků, druhá, sedmičlenná skupina žáků byla vybrána z jinak osmnáctičlenné třídy. Tato skupina byla zvolena podle seznamu žáků v třídní knize (vybráno bylo prvních sedm žáků z abecedního seznamu). Třetí osmičlenná skupina byla vybrána učitelkou matematiky tak, aby v ní byli zastoupeni hlavně žáci, jejichž známku z matematiky lze slovně označit za dobrou či dostatečnou. Hlavní studie se tedy zúčastnilo celkem 23 žáků a žákyň. Na základě informací od vyučujících lze konstatovat, že v každé skupině se vyskytli dva žáci, jejichž známka z matematiky je lepší než dobrá. Většina zúčastněných však patřila mezi trojkaře a čtyřkaře.

Na dvou ze třech základních škol jsem pracoval se žáky v zadních lavicích a zbytek třídy pracoval v téže místnosti s učitelem matematiky. Ve třetí základní škole jsem měl možnost využít malé jazykové učebny, kde jsem mohl se žáky pracovat izolovaně od rušivých elementů.

V každé ze zmíněných škol, resp. tříd, jsem v úvodu sdělil žákům, že ode mne obdrží celkem tři úlohy, přičemž každá je uvedena na samostatném listu formátu A4. Dále jsem žáky poprosil, aby do záhlaví každého listu uvedli své křestní jméno, abych je mohl v této práci nějakým způsobem rozlišit. Zdůraznil jsem současně, že jejich řešení nebudou známkována a neobjeví se jinde než v mé diplomové práci. Žákům jsem dále řekl, že budu jejich řešení průběžně kontrolovat a že se jich budu ptát, pokud v jejich řešení naleznu něco zajímavého či chybného.

Žáky jsem rozesadil tak, aby v jedné dvoumístné lavici seděl vždy jeden žák. Úlohy jsem zadával tím způsobem, že žákům v dané řadě jsem zadal úlohu číslo jedna. Žákům sedícím ve vedlejší řadě lavic jsem dal úlohu číslo dvě a dalším pak úlohu číslo tři. Snažil jsem se takto omezit možnost opisování a získávání rad od jednotlivých řešitelů.

Každý žák tak vždy dostal jednu úlohu a když ji vyřešil, tak se přihlásil, já jsem ji zkontroloval, případně jsem ho poprosil o komentář k zajímavému či chybnému řešení a poté jsem mu zadal další úlohu. Jednotlivé komentáře jsem si zapsal na zvláštní dvoulist formátu A4, abych tak mohl analýzu jednotlivých řešení doplnit o konkrétní reakce žáků. Žáci měli na řešení úloh vždy jednu vyučovací hodinu.

Vyřešené úlohy jsem ukládal do slídových desek tak, aby nebylo možno jednotlivá řešení opisovat. V průběhu šetření jsem procházel lavice, abych mohl pružně reagovat na případné chyby či bezradnost řešitelů a abych tímto způsobem omezil na minimum případnou „tichou“ poštu mezi řešiteli.

Někteří žáci se ptali, zda je povoleno použít kalkulačky. Těmto žákům jsem odpověděl, že úlohy jsou zadány tak, že kalkulačky nebude vůbec třeba. Další otázka se týkala zadání první úlohy, kde žáci nerozuměli slovu zed. Tak jsem jim vysvětlil, že se jedná o vymyšlenou měnu. Několik žáků se ptalo, zda slevu do Zajícova lze počítat jako 20 %, když je žáků ve třídě 30 a slevu lze nárokovat pro 15 žáků. V případě této otázky jsem žákům zdůraznil, že v zadání je uvedeno slovo „a více“.

Písemná řešení žáků s mými poznámkami jsem podrobil stejně jako v pilotní studii detailní analýze s cílem popsat řešitelské procesy žáků a zejména chyby a jejich možné příčiny. Přitom jsem využíval poznatků z pilotní studie, které jsem dále doplňoval. Řešení žáků jsem dával do skupin podle toho, zda použili stejnou strategii či se dopustili stejné chyby.

Výsledky analýz budu prezentovat zvlášť pro každou úlohu s tím, že popis řešitelského procesu bude u každé úlohy rozdělen do čtyř fází jako u pilotní studie. Nebudou popisována všechna řešení, ale budou uvedeny reprezentativní ukázky, které zahrnují všechny vyskytující se zajímavé jevy. Jednotlivé chyby figurující v těchto ukázkách jsou pojmenovány a opatřeny kódem, který odpovídá kódu uvedeném v přehledu chyb, který je uveden v kapitole 4. Protože úlohy byly v hlavní studii použité v nezměněné podobě (až na změnu uzavřené úlohy 2 na otevřenou), použiji při prezentaci výsledků hlavní studie též řešení žáků z pilotní studie. Budu tedy pracovat s řešeními 27 žáků. (V tabulce 18 je uveden přehled.)

Tabulka 18 *Přehled řešitelů a jimi řešených úloh*

řešitel / úloha	**úloha č. 1**	**úloha č. 2**	**úloha č. 3**
Tereza	O	X	---
Lucie	---	O	X
Marek	O	O	---
Jan	X	---	O

Radka	O	O	O
Rebeka	O	O	O
Nikola	O	O	O
Anna	O	O	X
Jan 2	O	O	O
Michal	X	X	---
Kristýna	O	X	X
David	X	X	---
Jakub	O	O	O
Leontýna	O	O	O
Jan 3	O	O	O
Tomáš	O	O	O
Miroslav	X	O	X
Michaela	O	X	O
Václav	X	X	O
Daniel	O	O	O
Petr	O	O	O
Tereza 2	O	O	X
Gabriela	---	---	O
Tereza 3	O	O	---
Kateřina	O	O	O
Eva	O	O	X
Lucie 2	O	O	O

Pozn. O – úloha byla vyřešena, --- úloha byla řešena a nedořešena, X – úloha nabyla zadána

3.2.1. Výsledky analýzy úlohy 1

První úlohu řešilo 19 žáků v rámci hlavní studie a 3 žáci v pilotní studii. Zcela bez chyby vyřešili úlohu 4 žáci, 14 žáků dospělo ke konečnému výpočtu až s pomocí experimentátora a 2 žáci úlohu nevyřešili (tabulka 19).

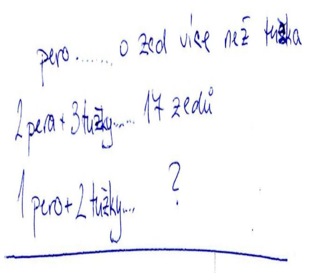
Tabulka 19 *Absolutní četnost řešitelských strategií a chybovosti v jejich průběhu v úloze č. 1*

počet řešitelů úlohy	bez chyby	***7***
	s chybou	***12***
rovnicové řešení	bez chyby	***4***
	s chybou	***10***
jiné řešení	pokus – omyl	***2***
	aritmetická strategie	***2***
bez výpočtu[11]		***1***

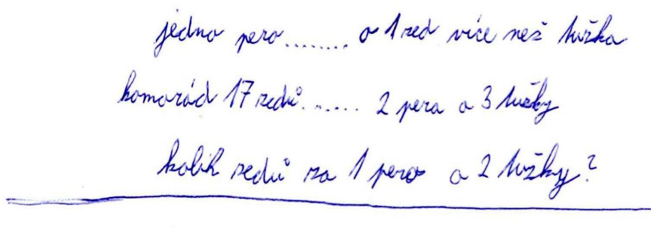
Identifikace problému (uchopení úlohy)

V úvodu řešitelského procesu na základě četby zadání bylo třeba uchopit, že cena pera je o 1 zed vyšší než cena tužky, že za dvě pera a tři tužky se zaplatilo 17 zedů a konečně že je třeba vypočítat útratu Pepy, který si chce koupit pero a dvě tužky.

Všichni řešitelé si k úloze zapsali slovní legendu, která byla buď opravdu slovní jako v případě zde uvedených legend Terezy a Marka, nebo se jednalo o symbolickou slovní legendu, v rámci které museli žáci matematizovat zadanou situaci.



Obr. 3.2.1 Tereza

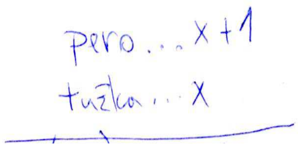


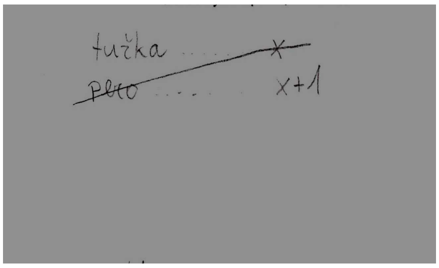
Obr. 3.2.2 Marek

Symbolickou slovní legendu si zapsala např. Radka, která v ní zaznamenala pouze údaj o relaci ceny pera a tužky. Zbylé informace si už nezapsala. V pozdější fázi výpočtu

[11] Jedna řešitelka uvedla slovní odpověď k úloze bez uvedeného výpočtu.

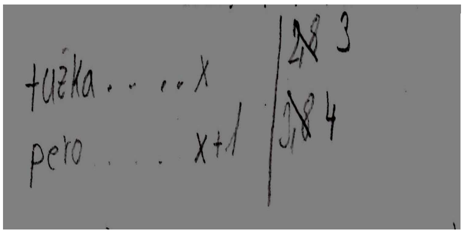
to mělo neblahý vliv, když Radka předčasně ukončila řešení úlohy už po zjištění ceny pera a tužky. Stejný zápis jako Radka zvolila i Rebeka a později se dopustila ve výpočtech i stejné chyby, když ukončila výpočet po zjištění ceny pera a tužky.

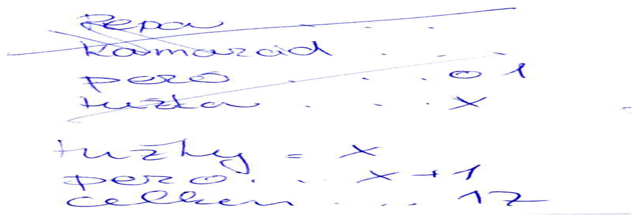




Obr. 3.2.3 Rebeka obr. 3.2.4 Radka

Stejně stručnou legendu, ve které chyběla zmínka o hlavní otázce úlohy, si zapsala i Tereza 2 a také ona předčasně ukončila řešení úlohy. **Chyba předčasného ukončení řešení úlohy (ch21)** se vyskytla u čtyř řešitelů a tři z nich si nezapsali dostatečně obsáhlou legendu. Z tohoto je patrné, že správný zápis k úloze je důležitý.

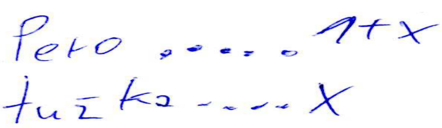


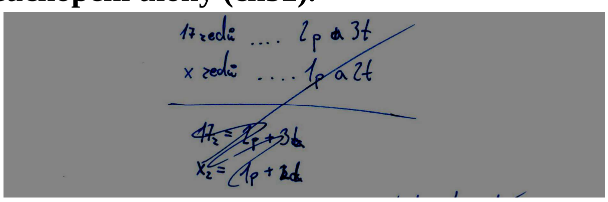


Obr. 3.2.5 Nikola Obr. 3.2.6 Anna

Další ukázka zápisu symbolické slovní legendy pochází od Nikoly (obr. 3.2.5). Nikola si zapsala úplně stejnou symbolickou legendu jako Radka a Rebeka, ovšem i s takto stručnou legendou nezapomněla vypočítat to, co si úloha žádala.

V úvodní fázi řešení první úlohy se však vyskytly i problémy s uchopením úlohy a s matematizací. Při pohledu na první část slovní legendy Anny (obr. 3.2.6) je patrné, že Anna nedokázala sestavit symbolickou slovní legendu. Experimentátor si této skutečnosti všiml a snažil se Anně poradit, aby si symbolicky zaznamenala informace o relaci cen pera a tužky. Anna ovšem nereagovala. Experimentátor jí tedy explicitně sdělil, aby si cenu tužky označila písmenem *x*, a zeptal se, jak by nyní bylo možno označit cenu pera. Anna chvíli pročítala první větu zadání a nakonec správně uvedla výraz $x + 1$. Anna tedy měla problémy s **matematizací z důvodu neuchopení úlohy (ch52).**

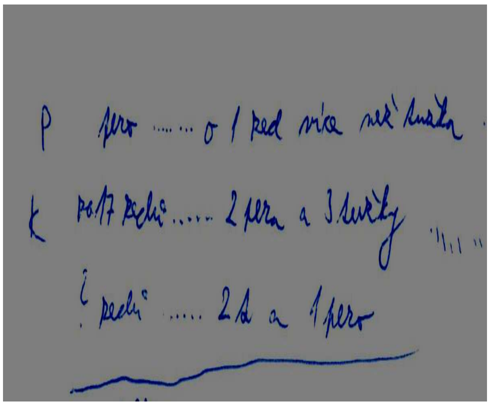




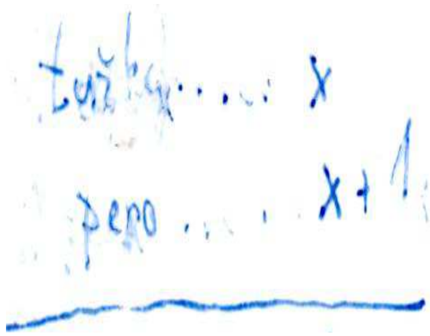
Obr. 3.2.7 Tomáš Obr. 3.2.8 Petr

Tomáš patřil mezi pětici řešitelů, kteří **neuchopili úlohu (ch11).** Symbolickou slovní legendu, která je na obr. 3.2.7, sestavil Tomáš až po delší poradě s experimentátorem. Ten se mu snažil naznačit, že jeho úkolem je matematizovat první dvě věty zadání úlohy. Tomáš ovšem nereagoval, a tak mu experimentátor řekl, aby si cenu tužky označil písmenem x a cenu pera výrazem $x + 1$. Bez těchto informací by se Tomáš nehnul z místa.

Dalším problémem u první úlohy byla **chybně sestavená slovní legenda z důvodu neuchopení úlohy (ch52).** Řešitelem, který se s takovým problémem potýkal, byl Petr (obr. 3.2.8). Jeho slovní legenda obsahuje zbytečně mnoho neznámých. Petr totiž ze zadání věděl, že má počítat cenu Pepova nákupu, ovšem symboly p, t považoval za zástupce samotných hmotných objektů pera a tužky a neuvědomil si, že tyto symboly může použít jako proměnné pro cenu obou objektů. Experimentátor si pak všiml, že Petr při řešením úlohy váhal, a po zhlédnutí jeho zápisu mu poradil, aby si pomocí jedné neznámé matematizoval cenu pera a tužky. Petr tedy původní legendu přeškrtl a sepsal si novou s pomocí neznámé x. Tato druhá symbolická legenda už byla v pořádku.



Obr. 3.2.9 Tereza 2



Obr. 3.2.10 Eva

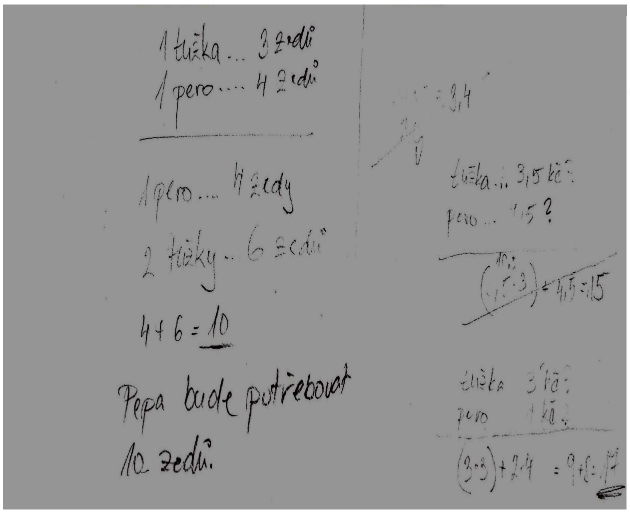
V případě Terezy 2 nastal problém **s matematizací z důvodu neuchopení úlohy (ch52).** Tereza sice k úloze zapsala správnou slovní legendu obsahující i zmínku o výpočtu, který je třeba provést, ale tuto legendu nedokázala matematizovat. Experimentátor tento problém zaregistroval a řekl jí, aby si označila cenu tužky písmenem x. Následně se zeptal: „Když je v zadání uvedeno, že cena pera je o jeden zed vyšší, tak mi povězte, jak lze symbolicky označit tuto cenu.“ Tereza se zamyslela a odpověděla: „Tu cenu lze označit jako y.“ Experimentátor na tuto větu reagoval takto: „Když cena tužky je x a pero je o 1 zed dražší, tak k tomu x přičteme…“ „Přičteme… jedničku,“ řekla Tereza. Experimentátor souhlasně přikývl a nechal Terezu řešit příklad dále. Experimentátor se tady dopustil přílišného zužování otázky. Možná by Tereza dokázala specifikovat vztah mezi *y* a *x*. Zajímavé je, že ačkoli si Tereza do zápisu uvedla hlavní otázku úlohy, tak její řešení předčasně ukončila jako ti, kteří svou legendu o hlavní otázku ochudili (**ch21**).

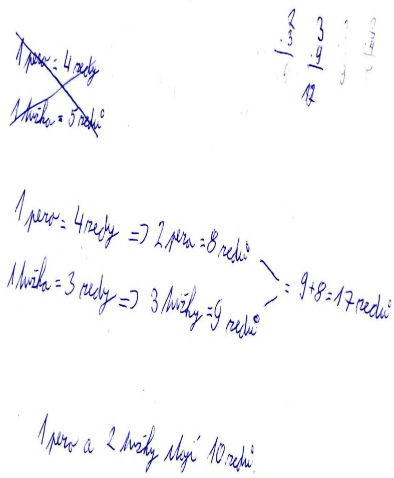
Poslední, kdo se potýkal s **neuchopením úlohy (ch11),** byla Eva (obr. 3.2.10). Její symbolická slovní legenda se zdá být v pořádku, ovšem veškeré čitelné údaje vzešly až z porady s experimentátorem. Nejprve totiž na tomto místě bylo uvedeno, že cenu 3 tužek lze označit jako $3x$, což je v pořádku. Následně pak v druhém řádku bylo zapsáno, že cenu pera lze označit výrazem $2x + 3x$, což je zcela mylná matematizace (otázkou je, zda Eva tímto nematematizovala 2 pera a 3 tužky a neuvědomila si přitom, že pero je o zed dražší než tužka). Experimentátor si chyby všiml a snažil se Evě poradit, aby si zapsala symbolicky informace o ceně pera a tužky. Eva však opět nereagovala, a tak jí experimentátor řekl, aby si označila cenu tužky písmenem x, a pak se zeptal, jak lze označit cenu pera. Eva však nereagovala. Experimentátor jí tedy prozradil, aby si cenu pera označila výrazem $x + 1$.

Na základě předchozích ukázek a komentářů lze konstatovat, že 5 řešitelů z 22 mělo problém s uchopením úlohy a 3 řešitelé nebyli schopni zapsat symbolickou slovní legendu (a bez ní úlohu nedokázali řešit). Ukázalo se, že problém v řešitelském procesu může způsobit i neúplný zápis zásadních informací ze zadání, neboť ti, co si nezapsali do slovní legendy hlavní otázku úlohy, předčasně ukončili její řešení. Nejsou tedy zřejmě zvyklí vracet se v závěrečné fázi řešení slovní úlohy k jejímu zadání (viz níže).

Vytvoření a realizace plánu řešení

První úloha svým charakterem přímo vedla k volbě algoritmické strategie řešení založené na počítání s rovnicemi. Čtrnáct řešitelů také tuto strategii zvolilo. Výjimky se však našly, ovšem zejména v pilotní studii, v hlavní studii byla výjimkou pouze Leontýna. V pilotní studii zvolili jiné strategie Tereza a Marek. Tereza si zvolila strategii systematického ověřování. Tato strategie nebyla chybná, ale časově náročná, přitom si Tereza mohla výrazně zjednodušit situaci, kdyby se nedopustila **chyby z nepozorné četby zadání (ch26)** (viz analýza v oddíle 3.2.1., s. 51)**.**

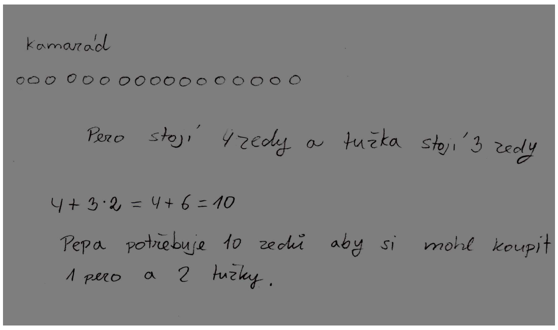


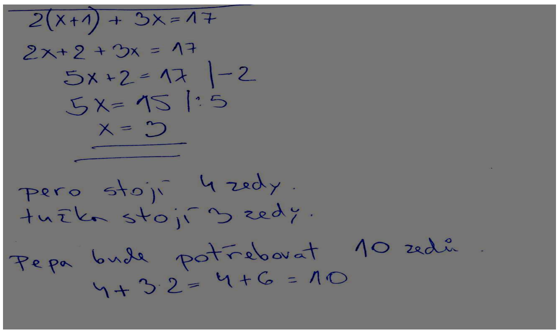


Obr. 3.2.11 Tereza

Obr. 3.2.12 Marek

Marek (obr. 3.2.12) si zvolil strategii pokus – omyl, která se objevila i u Leontýny, v jejímž zápisu není patrný jediný výpočet (podle svých slov vše počítala v hlavě). Do rovnicového zápisu se podle vlastních slov nechtěl pouštět, neboť mu to připadalo zbytečně složité. Marek si však v úvodu do paměti uložil nesprávný údaj, když myslel, že pero je o zed levnější než tužka. Dopustil se **chyby z nepozorné četby zadání (ch26)**, neboť ve své legendě má tuto relaci cen uvedenu správně. Na základě této chyby si tipnul cenu pera v hodnotě 4 zedů a tužky v hodnotě 5 zedů. Tyto správně dosadil do výpočtu, kdy 2 pera a 3 tužky měly stát 17 zedů. Tato kontrola mu samozřejmě nevyšla, a tak vše vyřešil, až když ho experimentátor na výše zmíněnou chybu upozornil.



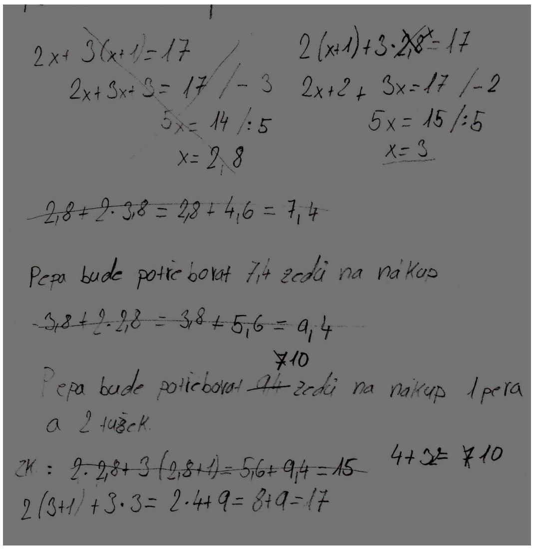


Obr. 3.2.13 Radka

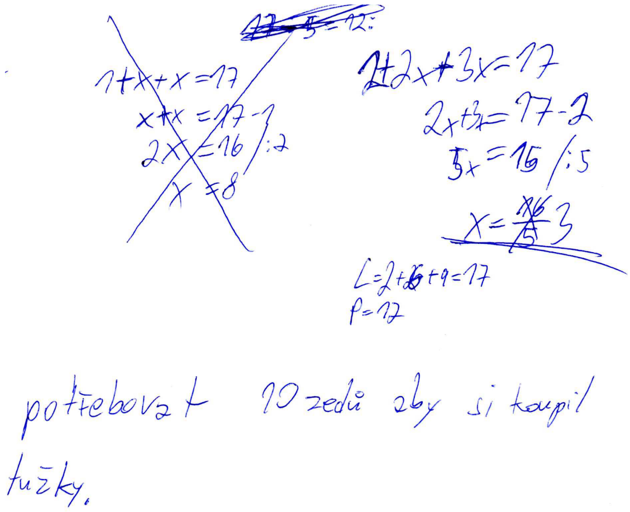
Obr. 3.2.14 Rebeka

Podobnou strategii výpočtu jako Marek zvolila i Radka (obr.3.2.13), která si tipla dvě o zed se lišící hodnoty a u nich ověřovala, zda splňují podmínku úlohy, že 2 pera a 3 tužky mají stát 17 zedů. Toto ověřování realizovala v grafické podobě pomocí malých koleček. Radčino řešení je zajímavé ještě z jiného důvodu. Radka totiž po zjištění ceny pera a tužky prohlásila tuto úlohu za vyřešenou, ačkoli se úloha ptá na něco jiného. Radka tedy patřila mezi čtveřici těch, kteří **předčasně ukončili řešení úlohy (ch21).** Tuto chybu Radka napravila, až když ji experimentátor upozornil, že úloha chce po řešitelích vypočítat jiný údaj, než je cena pera a tužky.

Stejného omylu se dopustila i Rebeka (obr. 3.2.14), která jinak sestavila správnou rovnici, kterou korektně upravila a vypočítala správné hodnoty ceny pera a tužky. Tímto krokem ovšem původně Rebeka zakončila své řešení. Experimentátor ji upozornil, že ještě nevypočítala to hlavní. Rebeka si přečetla zadání a následně sepsala správnou odpověď na položenou otázku. Experimentátor se zeptal, jak na to bez výpočtu přišla, a ona pod slovní úlohu bez váhání vyžádaný výpočet uvedla. Z toho lze usuzovat, že kromě nepozornosti Rebeka s ničím jiným neměla problémy, přičemž její nepozornost může pramenit z přesvědčení, že je tato úloha velmi lehká.



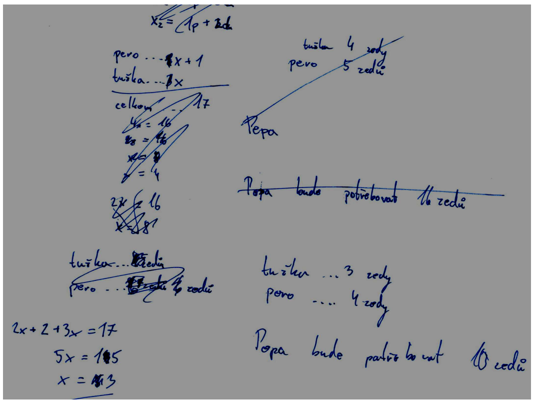
Obr. 3.2.15 Nikola



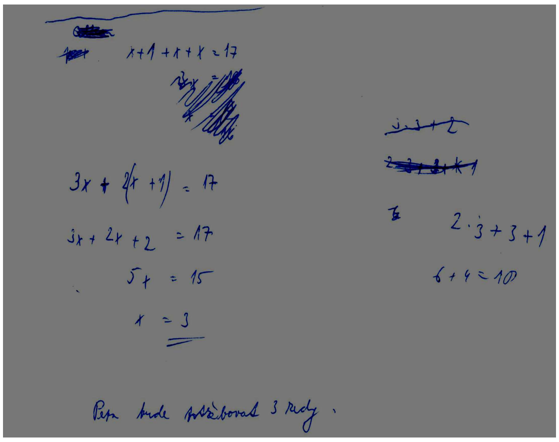
Obr. 3.2.16 Tomáš

Kromě předčasného ukončení řešení úlohy se 4 řešitelé potýkali se správným sestavováním rovnic. Zástupkyní takových řešitelů je např. Nikola (obr. 3.2.15). Jí sestavená rovnice je nesprávná vinou nepozornosti (**ch51).** Nikola totiž matematizovala skutečnost, že 2 tužky a 3 pera stojí 17 zedů, tedy zaměnila tužky a pera. Tuto chybnou rovnici správně upravila a dospěla k chybné hodnotě ceny tužky. S tou pak pracovala ve fázi ověřování správnosti získaných hodnot. Ověření jí dalo špatný výsledek, který ovšem Nikolu neodradil od dalšího počítání, a tak lze konstatovat, že ověření neprovedla. Experimentátor Nikolu na chybu upozornil, až když zapsala slovní odpověď. Nikola pak vpravo od původní chybné rovnice napsala správnou variantu a dospěla ke korektním hodnotám ceny pera a tužky.

Problémy s matematizací nastaly i u Tomáše (obr. 3.2.16), který už v úvodu neuchopil úlohu. Experimentátor mu po sestavení symbolické slovní legendy řekl, aby si matematizoval fakt, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Tomáš přesto sestavil rovnici, která popisuje skutečnost, že pero a tužka stojí 17 zedů. Tomáš se dopustil **chyby v sestavení rovnice z důvodu neuchopení úlohy (ch52).** Tuto rovnici sice správně upravil, ale výsledek v hodnotě 8 zedů je samozřejmě špatný. Experimentátor si chyby všiml a po několika neúspěšných pokusech, kdy chtěl, aby Tomáš sestavil rovnici sám, musel Tomášovi tvar rovnice explicitně vyzradit. Tomáš se i tak dopustil další chyby, která se vyskytla i u dalších řešitelů − **chyba v roznásobení dvojčlenu, tedy v matematizaci, z důvodu neuchopení symbolické slovní legendy** (**ch53**). (Tomáš si neuvědomil, že celý výraz x + 1 reprezentuje cenu pera.) Cenu za dvě pera totiž matematizoval jako 2x + 1 namísto 2(x + 1).



Obr. 3.2.17 Petr



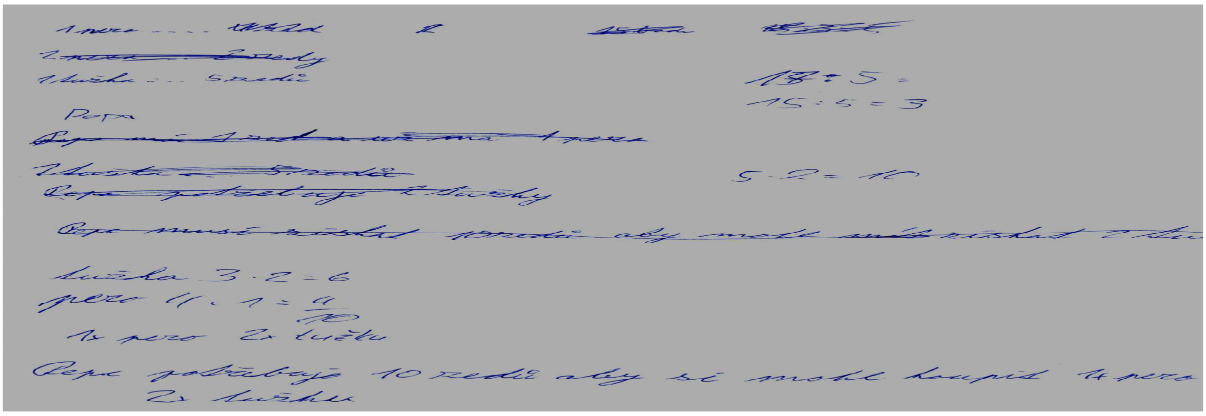
Obr. 3.2.18 Tereza 2

Chyby spočívající v chybném roznásobení dvojčlenu a tedy v chybné matematizaci z důvodu neuchopení symbolické slovní legendy udělal i Petr (obr. 3.2.17). Ve slovní legendě je patrné škrtání. Na místě těchto škrtů se původně vyskytovalo následující: pero….2x + 1 a tužka….3x. Petr si totiž na radu experimentátora připravoval půdu pro zápis správné rovnice, a sice té, která matematizuje cenu za 2 pera a 3 tužky. Experimentátor si jeho chyby v roznásobení dvojčlenu všiml a řekl, aby si v legendě nechal jen symbolický zápis o ceně pera a tužky a poté aby sestavil rovnici, která bude reflektovat fakt, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Po této radě už Petr postupoval správně. Jen při úpravě rovnice udělal **numerickou chybu** (**ch32**) při dělení, když 15 : 5 řešil jako 5. Poslední zmíněné chyby se dopustila ještě Eva a Lucie. Obě se experimentátorovi svěřily, že už myslely na výslednou hodnotu 3 zedů, a ve skutečnosti tedy 15 dělily třemi namísto pěti.

U Terezy 2 (obr. 3.2.18) je první sestavená rovnice důkazem **chyby z nepozornosti (ch51). (**Podobné chyby se dopustili další dva řešitelé.) Tereza věděla, že je třeba vypočítat cenu pera a dvou tužek, ale chybně toto přirovnala k ceně za 2 pera a 3 tužky. Experimentátor Tereze řekl, že do rovnosti dala jablka s hruškami, a dodal, aby si řádně přečetla zadání. Po této poznámce Tereza sestavila novou rovnici, ve které nejprve napsala 3*x* + 2*x* + 1 = 17, což svědčí o **chybě v roznásobení dvojčlenu z důvodu neuchopení symbolické slovní legendy (ch53)** pokud by Tereza chápala, že cenu pera představuje celý výraz *x* + 1, pak by použila závorku). Po upozornění od experimentátora tuto chybu opravila a získala správnou hodnotu ceny tužky. V hlavě však měla neustále to, že počítá cenu nákupu Pepy, a tak uvedla i příslušnou odpověď s chybným údajem. Experimentátor si chyby všiml a upozornil Terezu na to, že je třeba spočítat cenu tužky a 2 per. Poté už Tereza úlohu dořešila bez zaváhání.

Závěrem přehledu chyb v této fázi první úlohy ještě uvedu řešení Jakuba (obr. 3.2.19), který se v něm dopustil **chyby z nepozornosti (ch26)**, ale hlavně byl jedním ze dvou řešitelů, kteří zvolili zajímavou strategii výpočtu, když od ceny za 2 pera a 3 tužky odečetl 2, neboť 2 pera přispívají do částky 17 zedů dvěma zedy navíc, něž by do ní přispěly 2 tužky. Výsledný rozdíl v hodnotě 15 zedů pak správně dělil 5 a získal cenu tužky.

Ještě předtím však nepozorně četl zadání a z věty „Pero stojí o 1 zed více než tužka" si do legendy zapsal, že cena pera je 1 zed. S tímto pak počítal až do zásahu experimentátora, který mu doporučil, aby si řádně pročetl zadání úlohy.

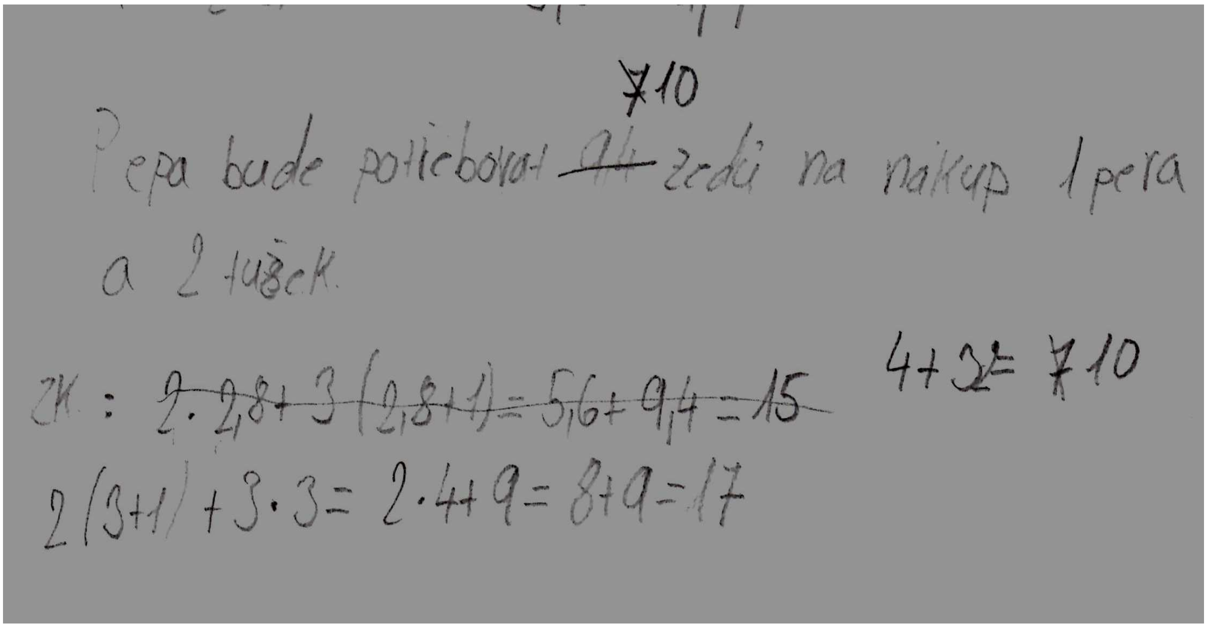


Obr. 3.2.19 Jakub

Jak je možné vidět ve výše uvedených ukázkách řešení, největším problémem žáků je chybovost při matematizaci úlohy, dále pak neuvedení závorek před dvojčlen a nepozornost.

Ověřování a interpretace výsledku

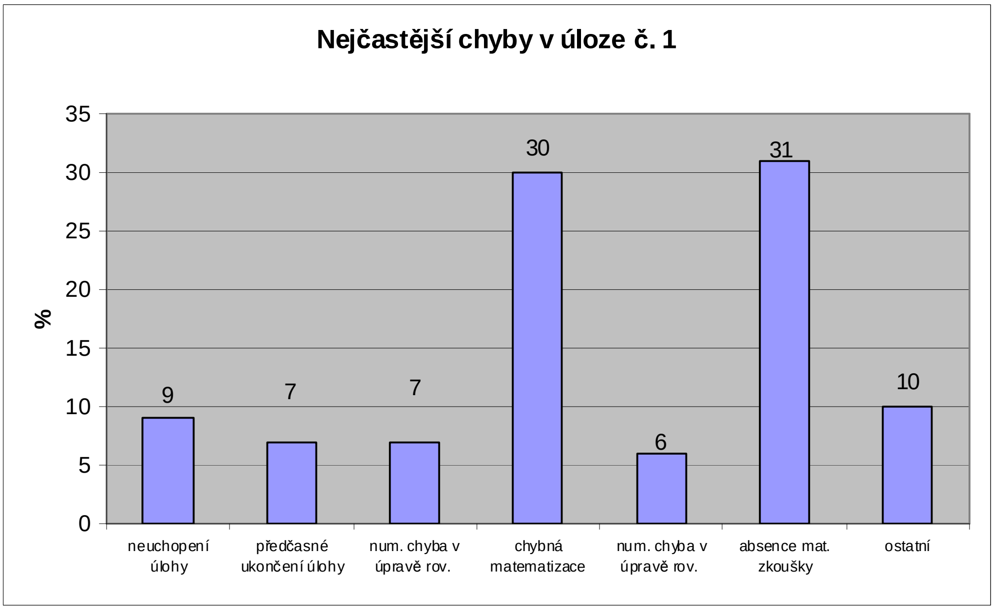
První úloha si vyloženě žádala provedení matematické zkoušky o správnosti vypočítaných hodnot ceny pera a tužky. Nutno ovšem konstatovat, že takovou zkoušku provedli pouze Tereza, Marek, Radka a Nikola z celkového počtu 22 žáků.



Obr. 3.2.20 Nikola

Ze zmíněné čtveřice žáků tuto kontrolu provedli bez chyby pouze Radka a Marek. Nikola (obr. 3.2.20) také ověřovala získané hodnoty ceny pera a tužky, ovšem při tom se dopustila **chyby z nepozornosti (ch23),** když při ověřování počítala se 2 tužkami a 3 pery, namísto aby počítala se 2 pery a 3 tužkami. Ověření jí dalo 15 zedů, oproti požadovaným 17 zedům. Tento nedostatek však nezabránil Nikole v tom, aby cenu tužky 2,8 a pera 3,8 zedu považovala za správné. Navíc se Nikola i ve fázi ověřování dopustila **chybného roznásobení dvojčlenu (ch41)**, když 2 · 2,8 + 3· (2,8 + 1) vypočítala jako 5,6 + 9,4, z čehož je patrné, že druhý člen dvojčlenu uvedeného v závorce neroznásobila.

Další údaje týkající se první úlohy ilustruje graf na obr. 3.2.21 a stručné shrnutí.



Obr. 3.2.21

Výše uvedený graf byl vytvořen na základě analýz písemných řešení žáků. Chyby v těchto analýzách jsem v rámci první úlohy sečetl a relativní četnost jednotlivých typů chyb jsem získal jako podíl absolutní četnosti dané chyby a celkového počtu chyb v úloze.

3.2.2. Úloha č. 1 – shrnutí

Identifikace problému: V úvodní etapě řešitelského procesu si všichni řešitelé zapsali k úloze slovní legendu. Polovina z 22 řešitelů, kteří se zabývali touto úlohou, si sepsala symbolickou slovní legendu, kterou ovšem 4 z oněch 11 sestavili správně až po zásahu experimentátora. Dva řešitelé z této čtveřice žáků majících problém se zápisem symbolické slovní legendy neuchopili první úlohu, a proto tedy váhali při matematizaci. Neuchopení úlohy nastalo celkem u 5 řešitelů. Ke slovním legendám je třeba ještě doplnit, že 4 z 22 řešitelů do své legendy nezaznamenali, co je třeba skutečně vypočítat. Následně tři z nich předčasně ukončili řešení úlohy už v momentě výpočtu ceny pera a tužky, což nebylo požadováno.

Vytvoření plánu řešení: Všichni řešitelé zvolili v zásadě takovou strategii výpočtu, která vedla k cíli. Nadpoloviční většina zvolila algebraickou strategii pracující s rovnicemi, 2 řešitelé zvolili strategii pokus–omyl a vzhledem k tomu, že nezapomněli na matematickou zkoušku, tak i s touto strategií dospěli ke správnému výsledku. Netradiční strategie výpočtu se objevila u Jakuba a Jana 3, kteří při výpočtu bez rovnic vyšli ze skutečnosti, že do celkové ceny za 2 pera a 3 tužky se započítává o dva zedy více, než kdyby se koupilo 5 tužek.

Realizace plánu řešení: V této etapě řešitelského procesu se žádná chyba neobjevila jen u 4 řešitelů. Naopak 2 žákyně úlohu nedořešily z důvodu neuchopení úlohy. Obě dvě se přitom snažily o výpočet algoritmickou strategií, ale vzhledem k neuchopení úlohy se jim rovnice nepodařilo sestavit. Jedna z těchto dívek se ještě snažila o metodu pokus–omyl, ale protože své vygenerované hodnoty neověřovala matematickou ani sémantickou zkouškou tak k výsledku také nedospěla.

Tři řešitelé se dopustili chyby z nepozornosti, když například matematizovali něco, co nebylo uvedeno v zadání. Dva řešitelé se dopustili numerické chyby při dělení způsobené tím, že myšlenkami byli o krok vepředu. Dalším problémem byl zápis dvojčlenu se závorkami a tedy uchopení symbolické slovní legendy, kdy někteří řešitelé si neuvědomili, že celý výraz $x + 1$ reprezentuje cenu 1 pera. Problémy samozřejmě způsobovala i výše zmíněná matematizace, většinou se takto dělo díky nepozornosti řešitele.

Ověřování a interpretace výsledku: V této fázi 17 z 22 řešitelů neprovedlo matematickou zkoušku a jeden ze zbylých 5 řešitelů se v ní dopustil chyby z nepozornosti. Slovní odpověď k úloze zformulovali všichni, kdo dospěli k výsledku, tj. 17 řešitelů.

3.2.3. Výsledky analýzy úlohy 2

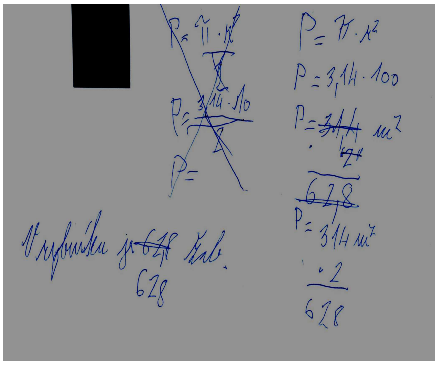
Tuto úlohu řešilo 18 žáků v hlavním šetření a 2 v rámci pilotní studie. Bezchybně úlohu vyřešilo 12 žáků, s chybou v řešení se potýkalo 7 žáků a 1 žákyně úlohu nedořešila z důvodu nedostatku času. Sedm řešitelů obdrželo tuto úlohu v podobě uzavřené s výběrem odpovědi a zbylých 13 žáků pracovalo s otevřenou úlohou. Chybovost byla na otevřenosti či uzavřenosti úlohy nezávislá, ovšem ti, kteří měli k dispozici čtyři varianty výsledku, většinou k úloze nezformulovali slovní odpověď a zaškrtli jednu ze zmíněných variant.

Tabulka 20 *Absolutní četnost chybovosti v úloze č. 2*

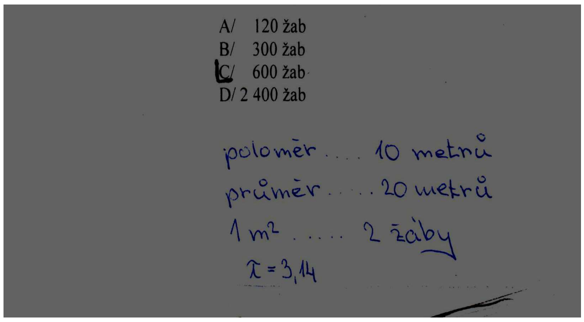
Počet řešitelů	bez chyby	***12***
	s chybou	***7***
	nedořešeno	***1***

Identifikace problému

V této fázi se u řešitelů vyskytl problém s neuchopením úlohy pouze ve dvou případech.

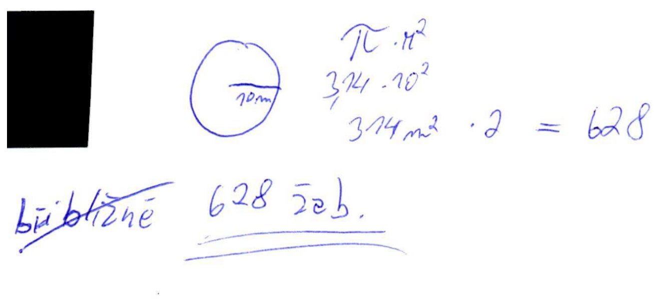


Obr. 3.2.22 Miroslav

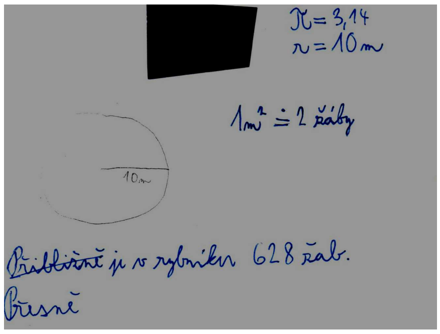


Obr. 3.2.23 Lucie

Miroslav (obr. 3.2.22), se hned v úvodu svěřil experimentátorovi, že vůbec netuší, co má počítat. Experimentátor se z něho snažil dostat odpověď na otázku: „Jaká fyzikální veličina má za jednotku metr čtverečný?“ Miroslav ovšem nereagoval, a tak mu experimentátor sdělil, že je třeba nejprve spočítat obsah kruhu. Druhým žákem, který neuchopil druhou úlohu byl Jan, (viz obr. 3.1.8, s. 58 – 59). Jinak ovšem všichni uchopili úlohu s porozuměním.



Obr. 3.2 24 Tomáš



Obr. 3.2.25 Jan 3

Šest řešitelů si k úloze zapsalo slovní legendu, 4 legendu grafickou (obr. 3.2.24) a 5 legendu kombinovanou (obr. 3.2.25). U čtyř řešitelů se v zadání objevil nadbytečný údaj o průměru kruhového rybníka, který k výpočtu obsahu vůbec nepotřebovali. Zřejmě u nich došlo k **neuchopení slova „v průměru“ (ch12).** Jedním z takových řešitelů byla i Lucie (obr. 3.2.23), která si zapsala i průměr, ale ve výpočtu ho nevyužila.

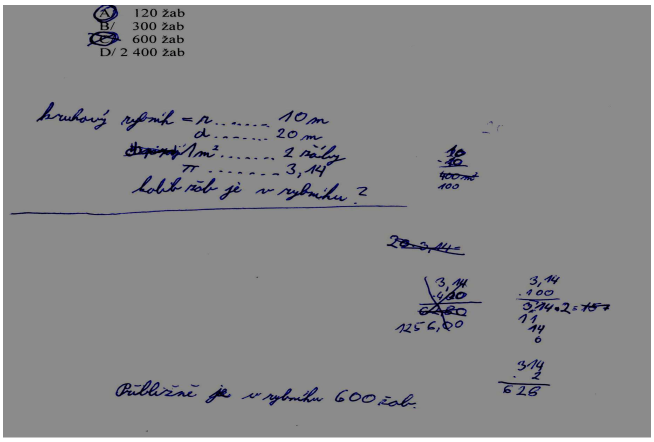
Obr. 3.2.26 Gabriela

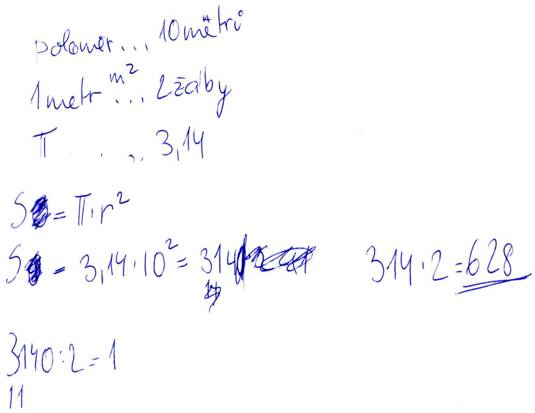
V úvodní fázi druhé úlohy se pak objevil ještě problém s **neuchopením pojmu poloměr (ch13).** Na tento nedostatek lze usuzovat při pohledu na grafickou legendu Gabriely uvedenou na obr. 3.2.26.

Vytvoření a realizace plánu řešení

Ti, kteří uchopili úlohu s porozuměním, což platilo pro 18 žáků z 20, si zvolili takovou strategii výpočtu, kdy nejprve zjišťovali plochu rybníku a pak s použitím přímé úměrnosti dospěli k celkovému počtu žab žijících v rybníku.

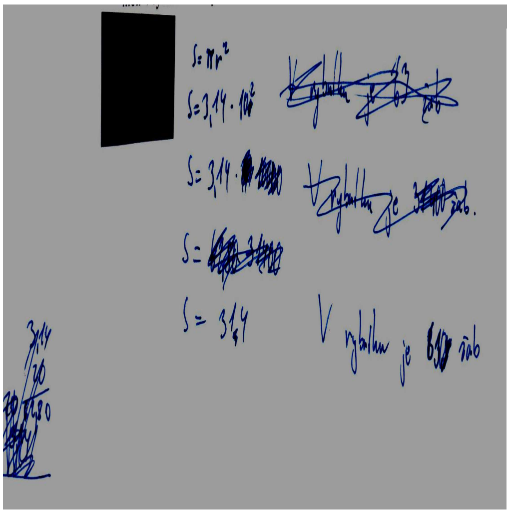
Nejvíce starostí měli řešitelé s **nevybavením si vzorce pro obsah kruhu (ch15),** tento problém se vyskytl u 5 řešitelů. Jedním z nich byl Marek (obr. 3.2.27).

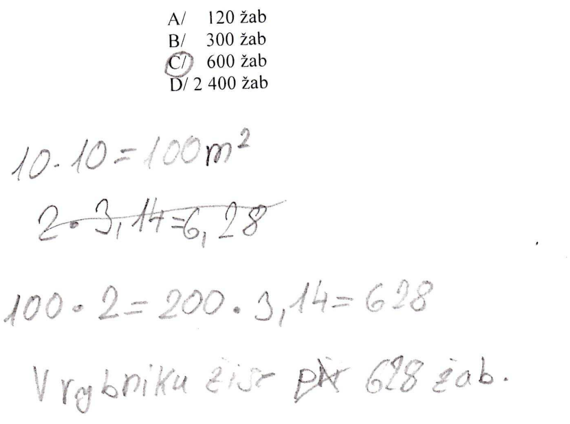




Obr. 3.2.27 Marek — Obr. 3.2.28 Anna

Marek nejprve ve fázi realizace plánu uvedl vzorec pro obvod kruhu a na základě z něho získané hodnoty si vybral za odpověď variantu A. Následně si bez zásahu experimentátora vybavil správný vzorec pro obsah kruhu. Marek ale do něho chybně dosadil údaj o průměru **(ch25).** Správně dosadil do korektního vzorce až na třetí pokus a dospěl k údaji o ploše rybníku v hodnotě 314 m^2. Následně však **chybně uchopil pojem přímé úměrnosti (ch14)**, když údaj o ploše rybníku dělil dvěma. Experimentátor tuto chybu zaregistroval a sérií otázek typu: „Když na metru čtverečném žijí dvě žáby, tak kolik jich žije na dvou, třech, deseti metrech čtverečných," dovedl Marka ke zjištění, že plochu rybníku má násobit dvěma.





Obr. 3.2.29 Petr

Obr. 3.2.30 Nikola

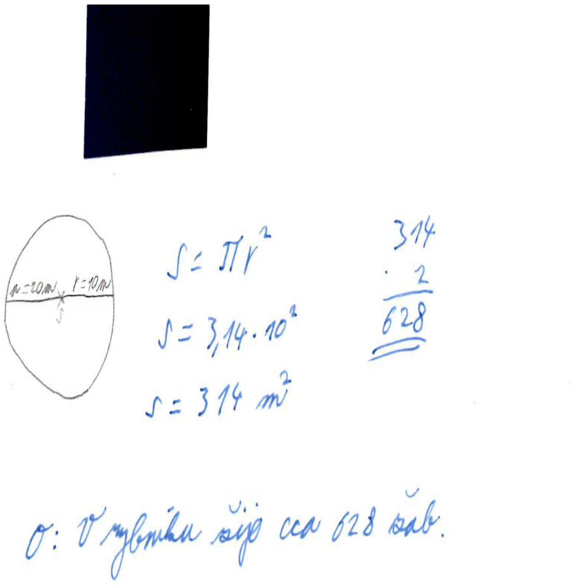
Stejné chyby v **neuchopení pojmu přímé úměrnosti** (**ch14**) se dopustila i Anna (obr. 3.2.28), u které je třeba si všimnout dalšího problému s **násobením desetinného čísla stem (ch33),** jehož se dopustila trojice řešitelů. V případě Anny k takové chybě došlo spíše z nepozornosti, protože když se jí experimentátor zeptal, jak postupujeme při násobení desetinného čísla mocninami čísla deset, tak Anna odpověděla, že posunujeme desetinnou čárku doprava. Když se následně experimentátor zeptal, o kolik míst tuto čárku posuneme v tomto případě, tak odpověděla, že o 2 místa.

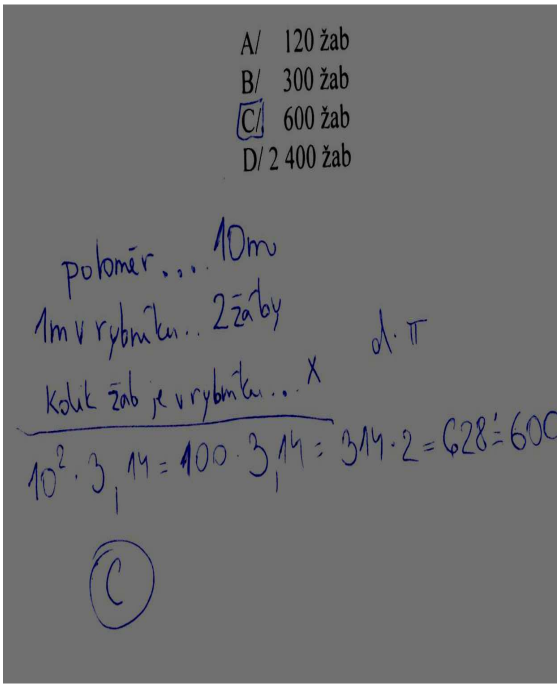
Stejné **numerické chyby (ch33)** se dopustil i Petr (obr. 3.2.29), i když ten desetinnou čárku posunul chybně z toho důvodu, že **neuchopil operaci umocňování (ch16).** Nejprve za druhou mocninu čísla 10 označil číslo 1000 a poté, co se ho experimentátor otázal, zda si je touto hodnotou jistý, tak operaci umocňování zaměnil za násobení a 10^2 vypočítal jako 20. V tuto chvíli experimentátor zasáhl. Zeptal se Petra přímo, kolik je 10 na druhou. Petr nebyl schopen odpovědi, a tak mu přesnou hodnotu experimentátor sdělil. Při dotazu experimentátora: „Jak postupujeme při násobení desetinného čísla stem?" odpověděl Petr, že posunujeme desetinnou čárku o dvě místa doprava. Z tohoto lze opravdu usuzovat, že jádro problému v případě Petrovy chyby tkvělo v operaci umocňování.

Zajímavý postup výpočtu se objevil u Nikoly (obr. 3.2.30), která patřila mezi ty řešitele, kteří v rámci šetření obdrželi tuto úlohu jako uzavřenou. Nikola pochopila, že pro výpočet celkového počtu žab potřebuje získat údaj o ploše rybníku, na vzorec pro obsah kruhu si ale nevzpomněla, a tak spočítala obsah čtverce o straně délky 10 m a poté použila přímé úměrnosti a zároveň Ludolfova čísla, aby využila všech údajů ze zadání.Takto i s handicapem **nevybavení si vzorce pro obsah kruhu (ch15)** dospěla, v podstatě náhodou, ke správnému výsledku. Experimentátor se bohužel nepřesvědčil o pravdivosti hypotézy řešení Nikoly.

Ověřování a interpretace výsledku

Všichni řešitelé, kteří úlohu obdrželi ve formě otevřené úlohy, zformulovali odpověď na zadanou otázku. Ti, kteří tuto úlohu řešili jako úlohu uzavřenou, pouze označili jednu ze čtyř zadaných možností. Pro názornost jsou níže uvedeny ukázky takových odpovědí.

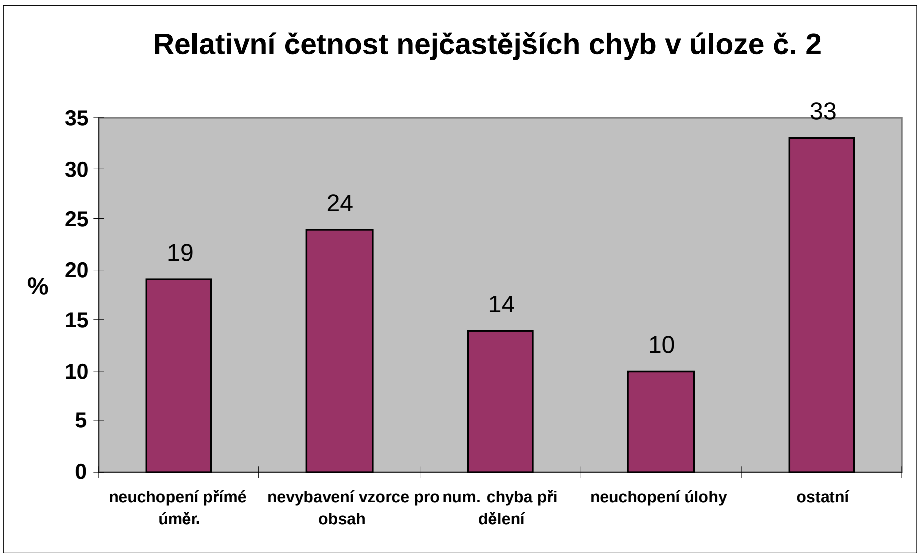




Obr. 3.2. 31 Daniel

Obr. 3.2.32 Rebeka

Strukturu a četnost chyb ve druhé úloze ilustruje graf na obr. 3.2.33 a shrnutí druhé úlohy.



Obr. 3.2.33

Graf byl vytvořen tak, že jsem nejprve spočítal počet všech chyb ve druhé úloze a počet jednotlivých v grafu uvedených chyb jsem dělil celkovým počtem chyb, abych dostal jejich relativní četnost.

3.2.4. Úloha č. 2 – shrnutí

Identifikace problému: Druhou úlohu neuchopili pouze 2 řešitelé, přičemž u jednoho se lze domnívat, že si spíše nevybavil vzorec pro obsah kruhu a tento nedostatek v paměti jakož i nedostatečná pozornost experimentátora způsobily, že byl jediným z 20 řešitelů této úlohy, kdo úlohu nevyřešil.

K úloze si 6 řešitelů zapsalo slovní legendu, 5 grafickou, 5 kombinovanou legendu a 4 si žádnou legendu nevytvořili a rovnou počítali. Absence zápisu však na správnost řešení úlohy neměla žádný vliv, naopak 2 řešitelé, kteří si zapsali slovní legendu k úloze, v ní uvedli nadbytečný údaj o průměru z důvodu desinterpretace slova průměr, které je v zadání uvedeno jako pojem statistický a nikoli geometrický, což jim situaci mohlo zkomplikovat. Markovi toto neuchopení slova „průměr“ skutečně výpočet zkomplikovalo (viz obr 3.2.27, s. 78).

Vytvoření plánu řešení: Všichni řešitelé zvolili strategii jdoucí od výpočtu plochy rybníku přes použití přímé úměrnosti k výpočtu počtu žab v rybníku.

Realizace plánu řešení: V této etapě byl nejčastějším problémem vzorec pro obsah kruhu, kdy 3 řešitelé si tento vzorec vůbec nevybavili a jiným chvilku trvalo, než tento vzorec v paměti objevili. Další zádrhel nastal při použití přímé úměrnosti, kterou dva řešitelé zaměnili za úměrnost nepřímou a dva řešitelé chybně posunuli desetinnou čárku při násobení desetinného čísla stem.

Ověřování a interpretace výsledku: Většina řešitelů zformulovala k úloze správnou slovní odpověď, přičemž čtyři z osmi řešitelů, kteří tuto úlohu obdrželi v podobě uzavřené úlohy s výběrem odpovědi, pouze zaškrtli danou variantu.

3.2.5. Výsledky analýzy úlohy 3

Třetí úlohu řešilo 18 žáků v rámci hlavního šetření a 3 žáci v pilotní studii. Úlohu nevyřešili 4 žáci, 3 z důvodu chybného postupu a jeden řešitel neměl na vypracování úlohy dost času. Chybu ve svých výpočtech udělalo 11 řešitelů, 6 žáků úlohu vyřešilo bez chyby a zbylá čtveřice spadá do skupiny žáků, kteří úlohu nedořešili. Z hlediska zvolených strategií výpočtu se objevily tři postupy. První strategie spočívala ve výpočtu celkové nezlevněné ceny jízdného a následného stanovení hodnoty slev do obou destinací. Druhá strategie spočívala ve výpočtu hodnoty slevy z ceny jízdného pro jednotlivce a poslední strategie spočívala ve výpočtu limitu ceny jízdného pro jednotlivce a ten byl porovnáván s hodnotou zlevněného jízdného pro jednotlivce do daných dvou destinací. Četnost těchto strategií a počet bezchybných řešení v rámci zvolené strategie popisuje tabulka 21.

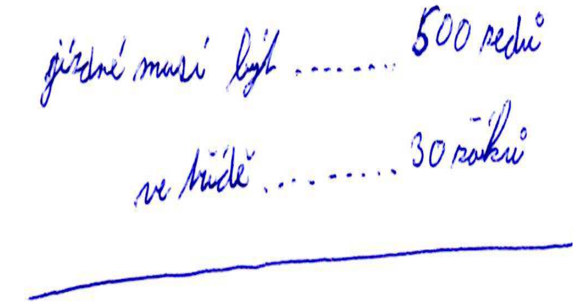
Tabulka 21 *Četnost zvolených strategií v úloze č. 3*

strategie číslo	**1**	**2**	**3**
počet řešitelů	13	7	1
bez chyby	6	0	0
s chybou	7	7	1

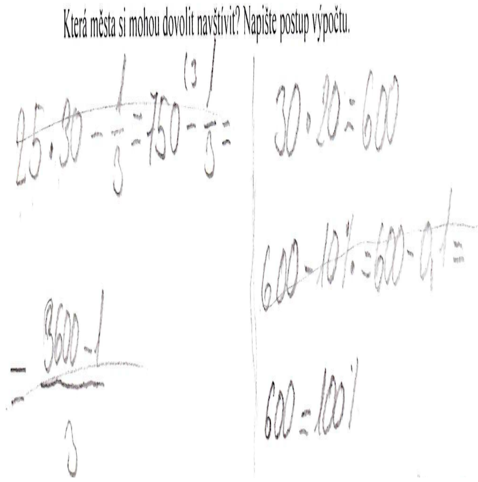
Identifikace problému

Třetí úlohu uchopila drtivá většina řešitelů s porozuměním. Tato úloha klade důraz na pozorné čtení zadání a uchopení pojmu procenta a zlomku, jakož i pojmu sleva. Ovšem právě vyjmenované hlavní body nutné pro správné vyřešení této úlohy činily řešitelům největší problémy.

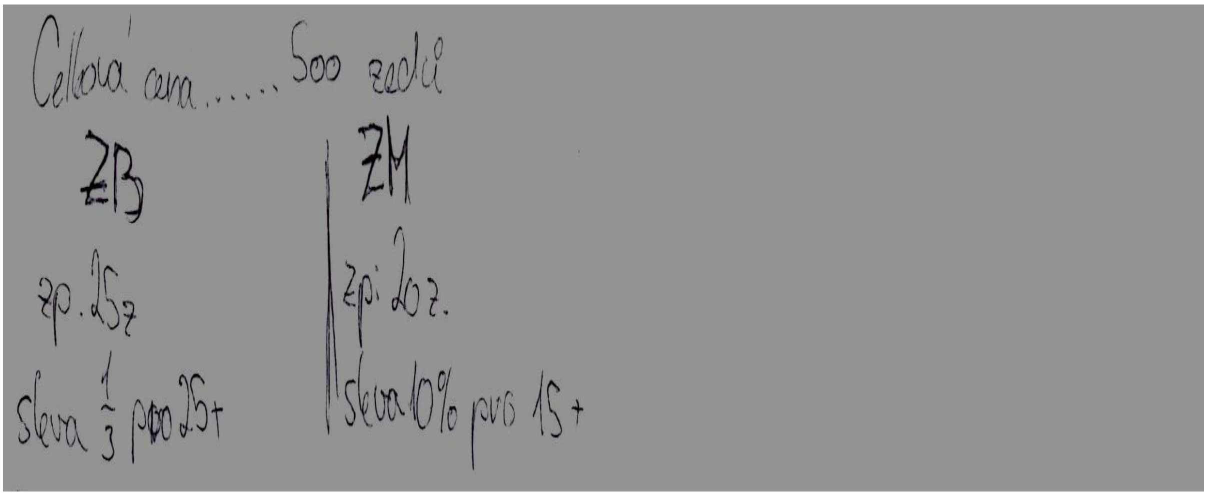
Co se zápisu slovních legend týká, tak lze konstatovat, že 8 řešitelů si slovní legendu k úloze nezapsalo, nebo šlo jen o minimalistický zápis jako v případě Marka a Nikoly (obr. 3.2.34 a 3.2.35)



Obr. 3.2.34 Marek



obr. 3.2.35 Nikola

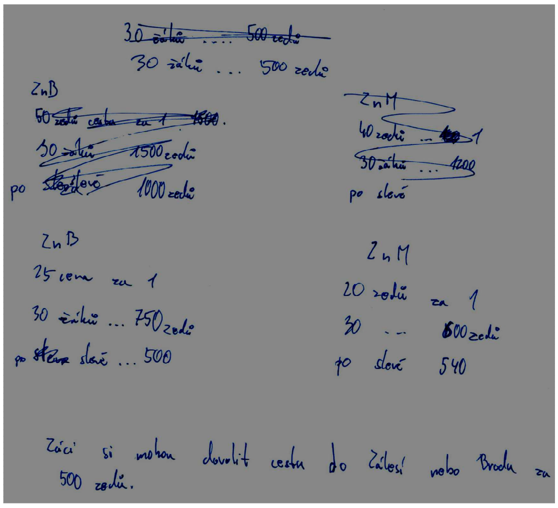


Obr. 3.2.36 Jan

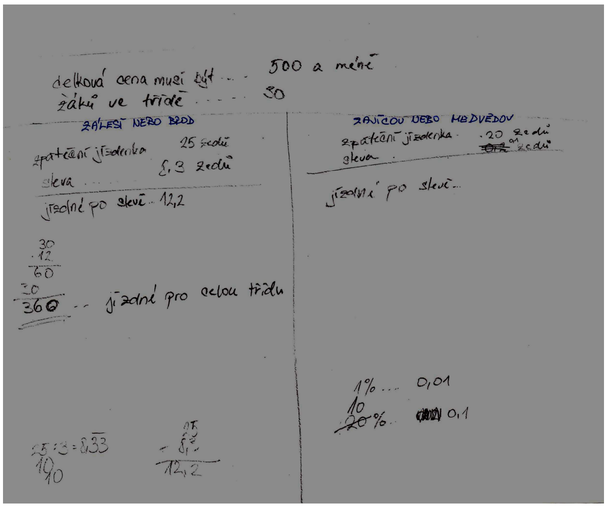
Naopak slovní legenda vytvořená Janem je kompletní a symbolicky popisuje i skutečnost, že slevu do jednotlivých destinací lze nárokovat v případě, že skupina čítá 25 a více, resp. 15 a více žáků. V Janově zápisu tak je možno vidět následující: *sleva 10 % pro 15 +*. S výjimkou Terezy si nikdo z těch, kteří si zapsali nějakou slovní legendu, nezaznamenal, že limit pro cenu jízdného je 500 zedů. V zápisu stálo většinou, že jízdné má být 500 zedů. Řešitelé však skutečnost, že jde o limit ceny pro jízdné, měli na paměti.

Vytvoření a realizace plánu řešení

Všichni řešitelé si vytvořili vhodnou strategii výpočtu, v jejíž realizaci však došlo k nemalému množství chyb (viz tabulka 21 uvedená výše).



Obr. 3.2.37 Petr

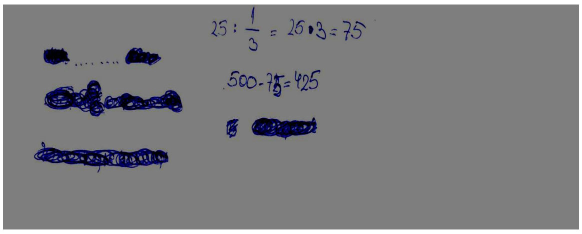


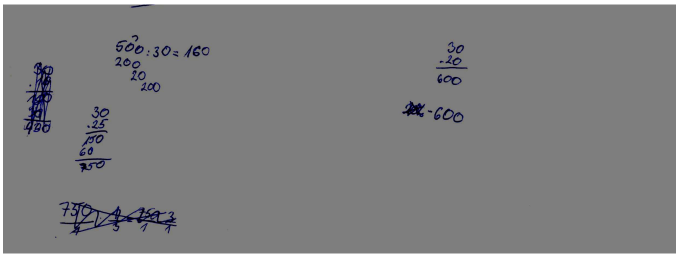
Obr. 3.2.38 Tereza

Nejprve zmiňme řešení Petra (obr. 3.2.37). U něho se hned v úvodu objevila **chyba z nedostatku životní zkušenosti (ch6)**, když ještě ve slovní legendě uvedl, že nezlevněné jízdné pro jednoho žáka v případě jízdy do Zálesí či Brodu činí 50 zedů a v případě jízdy do Zajícova či Medvědína 40 zedů. Experimentátor tuto chybu zaregistroval a zeptal se, kde Petr tyto hodnoty vzal. Petr odvětil, že žáci se přeci musejí dostat i zpátky. Experimentátor mu tedy byl nucen vysvětlit význam slova „zpáteční jízdenka“. Po opravení této chyby už Petr postupoval bez zaváhání.

Další četnou chybou bylo **předčasné zaokrouhlení mezivýsledku (ch9).** Té se dopustili 3 řešitelé a Tereza se jí dopustila dvakrát (obr. 3.2.38). Ta si vypočítala hodnotu slevy do Zálesí, když cenu jízdného pro jednoho správně vydělila třemi, ovšem hodnotu slevy ve výši 8,333 zedu předčasně zaokrouhlila na 8,3. Tuto hodnotu poté odečetla od nezlevněného jízdného pro jednoho žáka. Při odečítání pod sebou se Tereza jako jediná dopustila **procedurální chyby při odečítání pod sebou (ch8)**, když špatně zarovnala řády čísla 25 a čísla 8,3. Získaný rozdíl v hodnotě 12,2 pak opět **předčasně zaokrouhlila (ch9)**, a to na číslo 12. Ještě dodejme, že v případě výpočtu slevy při jízdě do Zajícova Tereza chybně určila jako základ pro slevu hodnotu 1 zed namísto 20 zedů. Této chyby z nepozornosti (**ch26)** si experimentátor všiml a zeptal se, proč sleva činí 0,2 zedu. (Tereza totiž chybně počítala se slevou 20 %, neboť si myslela, že 30 žáků může slevu nárokovat dvakrát, když je tato poskytována pro 15 žáků (**(ch6)**). Tereza v reakci na experimentátorův dotaz škrtla údaj 20 % a přepsala ho na 10 %, ovšem chybně určený základ pro slevu neopravila.

Nejčastější chybou u třetí úlohy byla **chyba neuchopení pojmu zlomek a procento a počítání s nimi (ch17),** která se vyskytla u 10 řešitelů. Zmíněné chyby se dopustil i Michal (obr. 3.2.39), který se snažil spočítat hodnotu třetinové slevy z ceny jízdného do Zálesí. Hodnotu 25 však chybně dělil číslem jedna třetina. Z toho, že následně vynásobil číslo 25 číslem 3, lze soudit, že Michal ovládá operaci dělení zlomkem, ale neuchopil operaci výpočtu třetiny z jistého základu. Dále si Michal chybně určil 500 zedů jako nezlevněné jízdné pro třídu **(ch26).**





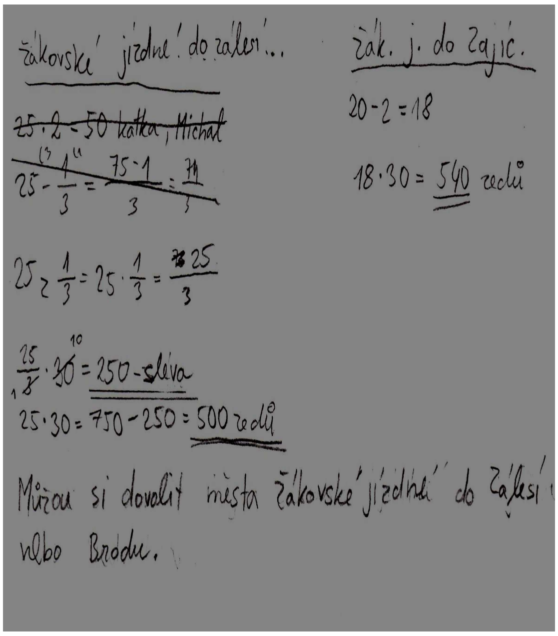
Obr. 3.2.39 Michal

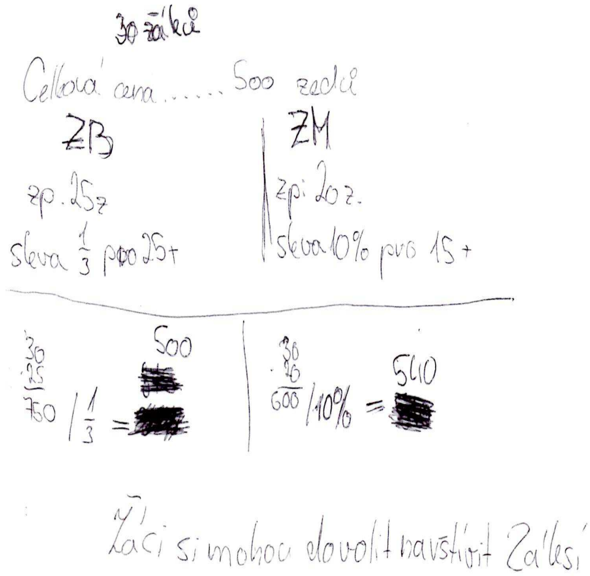
obr. 3.2.40 Marek

Dalším řešitelem, který si nevěděl rady při počítání s procenty a zlomky, byl Marek (obr. 3.2.40). Ten si nejprve chtěl vypočítat limit pro cenu jízdného pro jednoho žáka, ovšem při dělení se dopustil **numerické chyby (ch32)**. Původně zvolenou strategii Marek opustil a začal počítat nezlevněnou cenu jízdného pro celou třídu do obou destinací. Následně však netušil, jak spočítat třetinu ze 750 **(ch17)**. Vzhledem ke končící hodině se však tento nedostatek nepodařilo napravit.

Dalším, kdo nedokázal vypočítat hodnotu slevy zadané zlomkem či procenty, byl Jan (obr. 3.2.42). Ten si správně vypočítal hodnoty nezlevněného jízdného pro celou třídu do obou destinací. Pak si zavolal experimentátora s tím, že netuší, jak určit hodnotu slevy. Experimentátor se tedy Jana zeptal, co je třetina ze tří. Jan po chvilce váhání prohlásil, že je to jedna. Experimentátor se zeptal, jak k tomu dospěl. Jan odvětil, že to vydělil třemi. Experimentátor se tedy zeptal, kolik bude třetina ze 750. Jan řekl, že 250. Experimentátor pak musel Janovi sdělit, že 250 je hodnota slevy, aby Jan pochopil, že má toto číslo odečíst od 750 **(ch26)**. Jan pak dospěl ke správnému výsledku.

S nepozorností **(ch26)** se potýkala i Radka (obr. 3.2.41), která nejprve počítala cenu jízdného pro Katku a Michala, kteří figurovali v úvodu zadání třetí úlohy. Na tuto chybu však sama přišla a poté řešila úlohu relativně bez problémů. K další chybě z nepozornosti **(ch26)** došlo u Radky.

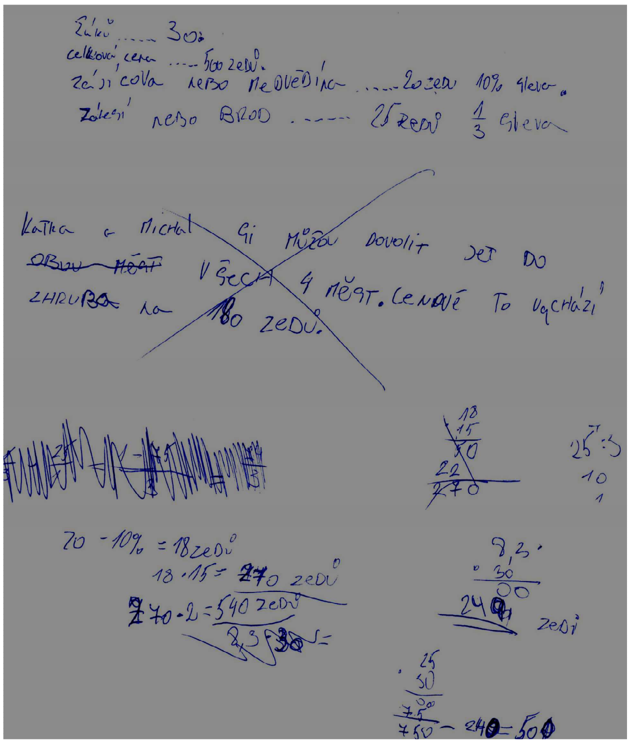


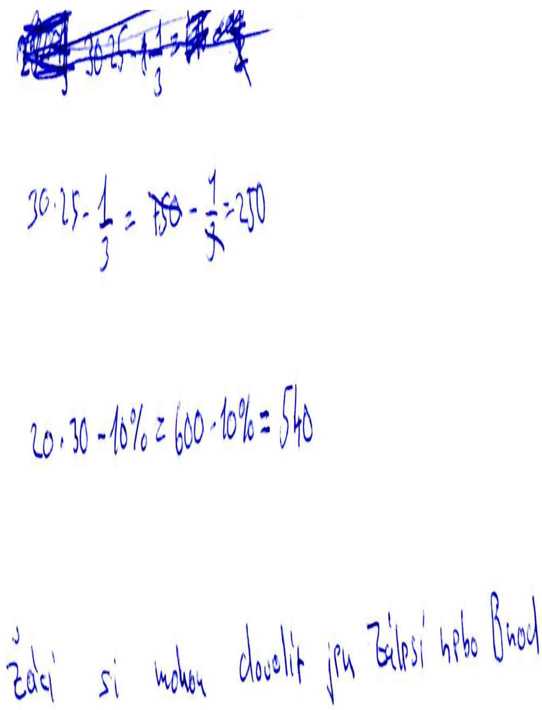


Obr. 3.2.41 Radka Obr. 3.2.42 Jan

Ta hodnotu 250 zedů udávala za cenu zlevněného jízdného do první destinace. Experimentátor při objevení této chyby položil Radce otázku: „Co označuje jedna třetina?“ „Slevu,“ odpověděla Radka. „Když hodnotu slevy vynásobíte cenou jízdného pro jednotlivce, tak získáte co?“ „Tak získám slevu pro jednoho.“ „A pokud cenu pro jednoho vynásobíte počtem všech žáků ve třídě, tak vyjde co?“ Radka odvětila, že vyjde sleva pro celou třídu. Touto odpovědí se Radka usvědčila z chyby a vzápětí už vyřešila úlohu bez zaváhání.

Problematiku chyb z nepozornosti je třeba ještě jednou zdůraznit (chyby tohoto typu se dopustilo 7 řešitelů) u řešení Václava (obr. 3.2.43). Václavovi, ačkoli si vytvořil správnou slovní legendu, kde uvádí údaj o 30 žácích ve třídě, vytanula na mysli pouze dvojice Katka a Michal, jejichž jména figurují v zadání hned v úvodu, a tak do doby příchodu experimentátora nejprve počítal s nezlevněným jízdným pro tyto dva žáky. Navíc si myslel, že mají v plánu jet do všech čtyřech měst zvlášť, proto jeho první odpověď zmiňuje, že Katka a Michal mohou cestovat do všech čtyř měst a stálo by je to 180 zedů. Zde tedy Václav v souladu s podmínkami zadání nezapočítal žádnou slevu, protože dva žáci na ni nemají nárok, ale zcela zapomněl na údaj o 30 žácích. Navíc neuchopil význam slova nebo. V zadání totiž stojí, že třída vybírá z výletu do Zálesí nebo Brodu a Václav počítal s oběma variantami. Experimentátor na dotaz, jak Václav přišel k hodnotě 180 zedů, dostal odpověď, že v první větě stojí, že Katka a Michal plánují výlet. Experimentátor ovšem dodal, že ten výlet plánují pro celou třídu, tj. všichni žáci pojedou na výlet a Katka a Michal jsou dvěma z těch třiceti žáků. Václav si přečetl celé zadání a s experimentátorem vyslovil souhlas. Chybu Václava by v tomto případě šlo označit za **chybu z nepozorné četby zadání (ch26).**

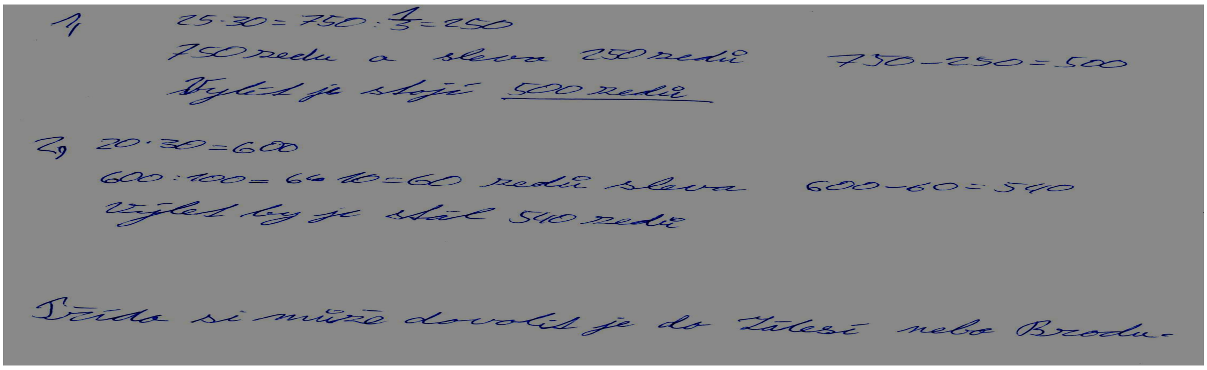




Obr. 3.2.43 Václav Obr. 3.2.44 Jan2

Václav po této korekci již počítal rozumněji, ovšem opět se při výpočtu slevy do Zajícova podíval na nesprávné místo a z místa, kde je v zadání uvedena cena 20 zedů, si vzal i údaj o 15 žácích a bral to tak, že ve třídě je 15 žáků (**ch26**). Na tuto chybu ho s jistým zpožděním upozornil experimentátor a zdůraznil, že ve třídě je opravdu 30 žáků a údaje, které jsou uvedeny v zadání pro jednotlivé slevy, se týkají počtu žáků, pro který už je možné slevu nárokovat.

Závěrem ještě nutno zmínit řešení Jana 2, který patřil mezi 4 řešitele, kteří řetězili několik ‚rovností' za sebou **(ch18)**. Navíc se v Janově řešení vyskytuje chyba z neuchopení operace krácení **(ch19)**, když Jan zkrátil mezi zlomky, přestože je mezi nimi operace odečítání.

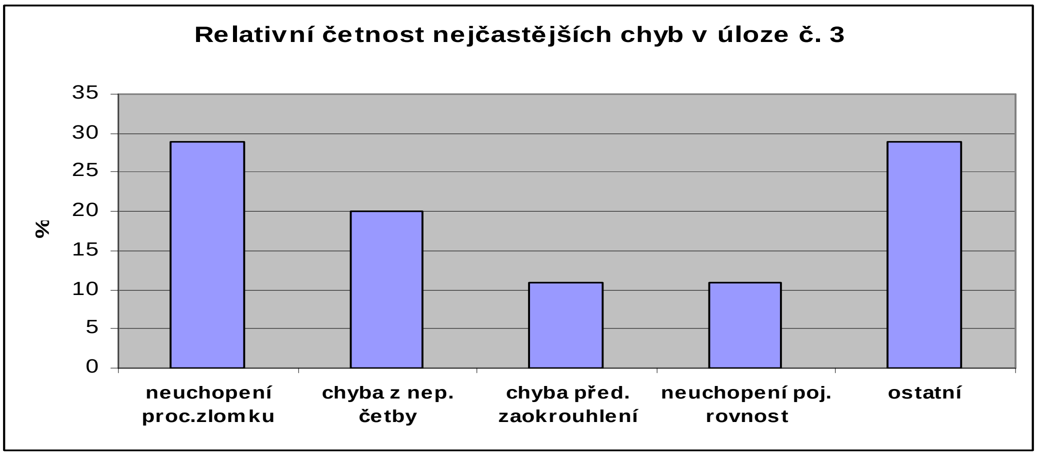


Obr. 3.2.45 Jakub

Ověřování a interpretace výsledku

Slovní odpověď na zadanou otázku zformulovali všichni, kdo dospěli ke konečnému výsledku (viz řešení Jakuba obr. 3.2.45).

Četnost chyb v této úloze popisuje graf na obr. 3.2.46 a následující shrnutí.



Obr. 3.2.46

Hodnoty v grafu byly vypočítány tak, že počet jednotlivých v grafu uvedených chyb jsem vydělil počtem všech chyb v úloze 3.

3.2.6. Úloha č. 3 – shrnutí

Identifikace problému: Všichni řešitelé uchopili úlohu s porozuměním. Polovina z 20 řešitelů si k úloze zapsala slovní legendu, která však u některých byla dost stručná zřejmě proto, že zadání úlohy již bylo ve formě slovní legendy. Osm řešitelů možná i z tohoto důvodu žádnou slovní legendu nesepsalo. Nutno dodat, že 4 řešitelé úlohu nevyřešili, ovšem bylo to hlavně z důvodu nedostatku času.

Vytvoření plánu řešení: Většina řešitelů zvolila aritmetickou strategii výpočtu, v rámci které nejprve vypočítali výši nezlevněného jízdného pro celou třídu a z ní pak stanovovali hodnotu slevy do jednotlivých destinací. Menší část řešitelů počítala výši slevy z hodnoty nezlevněného jízdného pro jednotlivce a tuto částku pak odečetli od nezlevněného jízdného, aby vypočítali zlevněné jízdné pro jednoho, které by poté vynásobili počtem žáků ve třídě a porovnali s limitem 500 zedů. Jeden řešitel naznačil ještě třetí možnou cestu. Vypočítal nejprve limit ceny jízdného pro jednotlivce, který by pak porovnal se zlevněným jízdným pro jednotlivce do každé ze zmíněných destinací.

Realizace plánu řešení: Řešitelé vcelku bez problémů zjistili cenu nezlevněného jízdného do obou destinací. Problém pak mělo 10 řešitelů s počítáním se zlomky a procenty. Větší problémy však činilo stanovení hodnoty slevy určené zlomkem, procenta dělala žákům o něco méně starostí, což dokládá snaha jedné řešitelky o převedení si zlomku na procenta. V tomto převedení ovšem také chybovala. K výpočtu hodnoty slevy ještě doplním, že řešitelé buď nezlevněné jízdné nedělili třemi, ale násobili, nebo si do výpočtu k jedné třetině případně k 10 % nezapsali žádný základ, ze kterého danou slevu vypočítávali. Někteří řešitelé předčasně zaokrouhlovali mezivýsledky, se kterými dále počítali, a chyba zaokrouhlení pak způsobila chyby ve výsledných hodnotách.

Velké problémy mělo 7 řešitelů s pozorností. Úloha pracovala s relativně velkým množstvím údajů a někteří si z nepozornosti zvolili špatný základ pro výpočet slevy. Dva řešitelé počítali cenu jízdného pro Katku a Michala, ačkoli tito dva pouze plánují výlet pro třicet žáků, a jeden řešitel si po opravě předchozí chyby do svého výpočtu zařadil údaj o 15 žácích ve třídě. Poslední poznámku uvedu k řetězení rovností. V zápisu žáků se objevily rovnosti, které rovnostmi nejsou a které spojují několik výpočtů do jednoho.

Ověřování a interpretace výsledku: Úloha je založena na znalosti počítání se zlomky a procenty a ověřování výpočtů by mohlo teoreticky probíhat tak, že si žáci zkontrolují, že jimi spočítaná třetina vynásobená třemi dá původní celek, totéž lze provést i s procenty udanou slevou. Žáci se však do zpětné kontroly nepouštěli, tedy až na Marka (viz obr. 3.2.40, s. 85). S výjimkou 4 řešitelů, kteří úlohu nedořešili, všichni zformulovali k úloze slovní odpověď.

4 Shrnutí výsledků

Cílem mé práce bylo zjistit, jaké strategie žáci volí při řešení vybraných úloh ze studie TIMSS a na čem v tomto řešení selhávají, a to prostřednictvím analýzy písemných řešení žáků doplněných o rozhovory s nimi. Příčiny, proč byli naši žáci v těchto úlohách v TIMSS 2007 neúspěšní, jsem hledal v chybách, kterých se řešitelé dopustili, přičemž jsem se zaměřil na to, v jaké fázi řešitelského procesu se chyby objevily. V této kapitole shrnu výsledky, k nimž jsem ve svém výzkumu dospěl.

Na základě provedených analýz písemných řešení všech 27 zúčastněných žáků a žákyň 9. ročníků tří základních škol, které jsou detailně uvedeny v příloze C, byl vytvořen přehled chyb, se kterými jsem se v průběhu analýz setkal. Vytvoření tohoto přehledu bylo nejen v souladu s cílém mé práce, ale bylo i nezbytně nutným prostředkem pro zpřehlednění komentovaných ukázek zajímavých jevů a chyb uvedených v oddíle 3.2.

Zmíněný přehled chyb uvádím níže:

Přehled chyb

- neuchopení (**ch1**)
  - *úlohy jako celku (ch11)*
  - *významu slova „v průměru“ (ch12)*
  - *pojmu poloměr (ch13)*
  - *pojmu přímé úměrnosti (ch14)*
  - *operace umocňování (ch16)*
  - *pojmu procenta a zlomku a počítání s nimi (ch17)*
  - *pojmu rovnost (chybné zřetězování rovností) (ch18)*
  - *operace krácení (ch19)*
- nedbalá četba zadání (**ch2**)
  - *předčasné ukončení řešení úlohy (odpověď na nezadanou otázku) (ch21)*
  - *chybně zvolená operace dělení (ch22)*
  - *chyba v matematické zkoušce (ch23)*
  - *chybně sestavená slovní legenda (ch24)*
  - *chybně dosazené údaje do správně zvolené operace (ch25)*
  - *chyba z nepozorné četby zadání (ch26)*
- numerická chyba (**ch3**)

- *při úpravě rovnice (ch31)*
- *při dělení (ch32)*
- *při násobení desetinného čísla stem (ch33)*
- *při násobení (ch34)*

♦ chybné roznásobení dvojčlenu (**ch4**)
- *z nepozornosti (ch41)*[12]

♦ chybná matematizace (**ch5**)
- *z nepozornosti (ch51)*
- *z neuchopení úlohy (ch52)*
- *z neuchopení symbolické slovní legendy (ch53)*

♦ chyba z nedostatku životní zkušenosti (**ch6**)

♦ procedurální chyba při odečítání pod sebou (**ch8**)

♦ chyba předčasného zaokrouhlení mezivýsledku (**ch9**)

♦ nevybavení si vzorce pro obsah (**ch15**)

♦ chyba v neprovedení matematické zkoušky (**chnz**)

Výše uvedený přehled je uspořádaný hierarchicky, ovšem tato hierarchie je čistě náhodná, tj. není vytvořena na základě četnosti chyb v analyzovaných řešeních, ale jde o seznam typů a podtypů chyb, které se v řešeních vyskytly.

V průběhu zpracovávání jednotlivých řešení jsem narážel na obtíže spočívající v přesném zařazení dané chyby do zmíněného přehledu. Tyto obtíže nastaly výlučně v případě první úlohy. Pro ilustraci zmíním řešení Tomáše (viz oddíl 3.2.1, s. 67 – 68), kterému jsem řekl, aby při znalosti symbolického zápisu ceny pera zapsal symbolicky cenu 2 per. Na to Tomáš ve svém řešení uvedl výraz $2x + 1$. V tento okamžik jsem váhal mezi chybou v roznásobení dvojčlenu a mezi chybnou matematizací, přičemž jsem si dále nebyl jistý, zda chyba v matematizaci spočívá v neuchopení úlohy, nebo v neuchopení symbolického zápisu ceny pera. Nakonec jsem se přiklonil k posledně zmíněné variantě. Je tedy možné, že zejména v první úloze jsem jednotlivé chyby pojmenoval subjektivně. Podobný rébus jako u Tomáše se objevil v řešení Anny (viz příloha C, s. 126), kde Anna roznásobila závorku $2(x + 1)$ na tvar $2x + 1$. Otázkou je, zda se tak stalo z nepozornosti nebo z neuchopení symbolického zápisu, kdy celý výraz $x + 1$ zastupuje cenu pera, což by si Anna v danou chvíli neuvědomila. Takové nejasnosti v pojmenování chyby by vyřešil

[12] Této chyby se dopustila Nikola (viz oddíl 3.2.1 s. 76).

detailní pohovor s řešitelkou, ovšem na ten v průběhu získávání dat nebyl dostatek času a kromě toho jsem někdy zaregistroval problém teprve v průběhu analyzování získaných řešení. Ve druhé a třetí úloze jsem se s podobnými nejasnostmi nesetkal.

V následující části shrnuji základní informace o zajímavých jevech vyskytujících se v jednotlivých úlohách.

V první úloze se většina řešitelů dopustila chyby ve fázi realizace plánu řešení, i když musím konstatovat, že nezanedbatelná část řešitelů ve své slovní legendě neuvedla hlavní otázku úlohy, načež se ukázalo, že to může vést k předčasnému ukončení řešení úlohy.

Z hlediska zvolené strategie řešili žáci první úlohu většinou pomocí rovnic a právě v této strategii se dopouštěli chyb. Řešitelé nejčastěji chybovali v procesu matematizace. Někteří chybně matematizovali z nepozornosti, když do rovnosti dávali v zadání neuvedené informace, nebo spojili jistým způsobem dvě rovnosti v jednu, jiní neuchopili symbolický zápis údajů z úlohy, a tak například nepoužili závorek, když měli zapsat cenu 2 per, a místo výrazu 2(x + 1) bylo v jejich zápisu napsáno 2x + 1. V této fázi řešení se také objevila numerická chyba při dělení, když dvě řešitelky měly v mysli již výsledek dělení (15 : 5 = 3), a z tohoto důvodu vlastně dělily podílem (15 : 3 = 5) a výslednou hodnotou byl původní dělitel. Nutno dodat, že výrazná většina řešitelů v první úloze neprovedla matematickou a sémantickou zkoušku, při které by bylo možno objevit, že v řešení příkladu se nějaká chyba skrývá. Jedna řešitelka se dopustila numerické chyby a chyby v roznásobení dvojčlenu právě ve fázi ověřování. Závěrem tohoto odstavce věnovaného chybám vyskytujícím se v první úloze ještě dodám, že řešitelé nezapomínali formulovat k úloze slovní odpověď.

Tabulka 22 nabízí přehled nejčastějších chyb v úloze č. 1.

Tabulka 22 *Nejčastější chyby v úloze č. 1*

chyba	**ch11**	**ch21**	**ch26**	**ch31**	**ch51**	**ch52**	**ch53**	**chnz**	**Suma**
počet	5	4	3	4	4	5	7	17	54

Pozn. **ch11** – neuchopení úlohy; **ch21** – předčasné ukončení řešení úlohy; **ch26** – chyba z nepozorné četby zadání; **ch31** – numerická chyba při úpravě rovnic; **ch51** – chybná matematizace z nepozornosti; **ch52** – chybná matematizace z neuchopení slovní úlohy; **ch53** – chybná matematizace z neuchopení symbolické slovní legendy; **chnz** – neprovedení matematické zkoušky

Závěrem tohoto shrnutí úlohy č. 1 ještě doplním, že 4 řešitelé byli bezchybní a 14 řešitelů by bez pomoci či nápovědy ke správnému výsledku nedospělo.

Chybovost v druhé úloze byla v porovnání s ostatními dvěma úlohami menší a řešitelé chybovali prakticky bez výjimky ve fázi realizace plánu řešení a stejně tak bez výjimky všichni řešili tuto úlohu aritmetickou strategií, když nejprve počítali plochu rybníku a tu následně násobili počtem žab připadajících na 1 m^2.

Žáci si nejčastěji nevybavili vzorec pro obsah kruhu, přičemž část těchto žáků počítala se vzorcem pro délku kružnice, což mohlo být způsobeno desinterpretací slova „v průměru“, které figuruje v zadání úlohy ve významu statistickém, ovšem ve spojení s kruhovým rybníkem považovali někteří tento pojem za pojem geometrický. Někteří řešitelé neuchopili pojem přímé úměrnosti, když plochu rybníku dělili počtem žab připadajících na jednotku plochy, namísto aby použili operaci násobení. Malá část žáků chybovala také při násobení desetinného čísla stem.

Slovní odpověď k úloze zformulovali ti žáci, kteří pracovali s otevřenou podobou této úlohy. Ti, kteří obdrželi tuto úlohu v uzavřené podobě, spíše pouze zakroužkovali tu z nabízených variant, která byla nejblíže jejich výsledku.

Tabulka 23 shrnuje četnost nejfrekventovanějších chyb v úloze č. 2.

Tabulka 23 *Nejčastější chyby v úloze č. 2*

chyba	**ch11**	**ch12**	**ch15**	**ch33**	**suma**
počet	2	4	5	3	21

Pozn. **ch11 –** neuchopení úlohy; **ch12 –** neuchopení slova „v průměru“; **ch15 –** nevybavení si vzorce pro obsah kruhu; **ch33 –** numerická chyba při násobení desetinného čísla stem.

Závěrem dodám, že 12 řešitelů úlohu vypočítalo bez chyby a 7 s chybou, z nichž 5 řešitelů se dopustilo chyby neslučitelné s vyřešením úlohy.

Třetí úloha je specifická tím, že její zadání obsahuje relativně velké množství údajů, což kladlo nemalé požadavky na pozornost žáků. Zadání úlohy navíc do jisté míry připomínalo slovní legendu, což některé žáky mohlo svádět a zřejmě i svedlo k minimálnímu zápisu podstatných informací z úlohy. Tato skutečnost byla příčinou toho, že někteří žáci počítali ve fázi realizace plánu řešení s jízdným pro 2 žáky nebo 15 žáků, ačkoliv výlet byl plánován pro 30 lidí. Podobně jako v předchozích dvou úlohách se většina chyb právě ve fázi realizace plánu řešení. Většina řešitelů počítala pomocí aritmetické strategie výpočtu. Řešitelé nejvíce chybovali při stanovení hodnoty slevy z jízdného, když při výpočtu třetinové slevy někteří základ pro slevu dělili jednou třetinou, jiní řešitelé si k této třetině neuvedli základ pro slevu, a tak odečítali od nezlevněného jízdného pouze jednu třetinu. Část řešitelů mě přímo požádala o radu při snaze vypočítat třetinu či 10 % z daného základu. Nejčastější chybou tedy bylo neuchopení pojmu procenta a zlomku. Zajímavou chybou, kterou jsem objevil u jednoho řešitele, bylo nepochopení významu slova ‚zpáteční jízdenka', když žák počítal s dvojnásobnou cenou jízdného, ačkoliv v zadání uvedená částka platila pro jízdu tam i zpět. V neposlední řadě je třeba zmínit chyby v zaokrouhlování mezivýsledku, což vedlo k nesprávnému výsledku a bez mého zásahu by to jistě vedlo k nevyřešení úlohy.

Závěrem dodám, že řešitelé, kteří dospěli k výsledku, nezapomněli k úloze uvést slovní odpověď.

Předchozí shrnutí nejčastějších chyb doplňuje tabulka 24.

Tabulka 24 *Nejčastější chyby v úloze č. 3*

chyba	**ch17**	**ch26**	**ch6**	**ch9**	**suma**
počet	10	7	2	4	35

Pozn. **ch17** – neuchopení pojmu procenta a zlomku; **ch26** – nepozorná četba zadání; **ch6** – chyba z nedostatku životní zkušenosti; **ch9** – chyba předčasného zaokrouhlení mezivýsledku

Zbývá dodat, že úlohu úspěšně a bez chyby vyřešilo 6 žáků a žákyň.

Z předchozího shrnutí všech řešení zadaných tří úloh je patrné, že žáci mají problémy s matematizací, se znalostí vzorce pro obsah, s přímou úměrností a se zlomky a procenty. Nemalé problémy v řešitelském procesu může způsobit nepozornost, u některých žáků zbrklost a neochota nebo zapomnětlivost při vytváření stručného a přehledného zápisu k úloze, a co se týká práce s rovnicemi, pak se zdá, že nemalá část žáků zapomíná na provedení matematické a sémantické zkoušky, o průběžné kontrole svého výpočtu nemluvě.

Na úplný závěr této kapitoly uvádím tabulky 25–28, které podávají přehled o četnosti všech chyb v daných třech úlohách, a graf na obr. 3.2.47, který znázorňuje relativní četnost nejčastějších typů chyb v rámci všech třech zadaných úloh.

Tabulka 25 *Četnost chyb týkajících se neuchopení (jmenný přehled chyb je na s. 90–91)*

Úloha /chyba	**ch 11**	**ch12**	**ch13**	**ch14**	**ch16**	**ch17**	**ch18**	**ch19**
úloha č. 1	5	0	0	0	0	0	0	0
úloha č. 2	2	4	1	2	1	1	1	0
úloha č. 3	0	0	0	0	0	10	4	1

Tabulka 26 *Četnost chyb týkajících se nepozornosti (jmenný přehled chyb je na s. 90–91)*

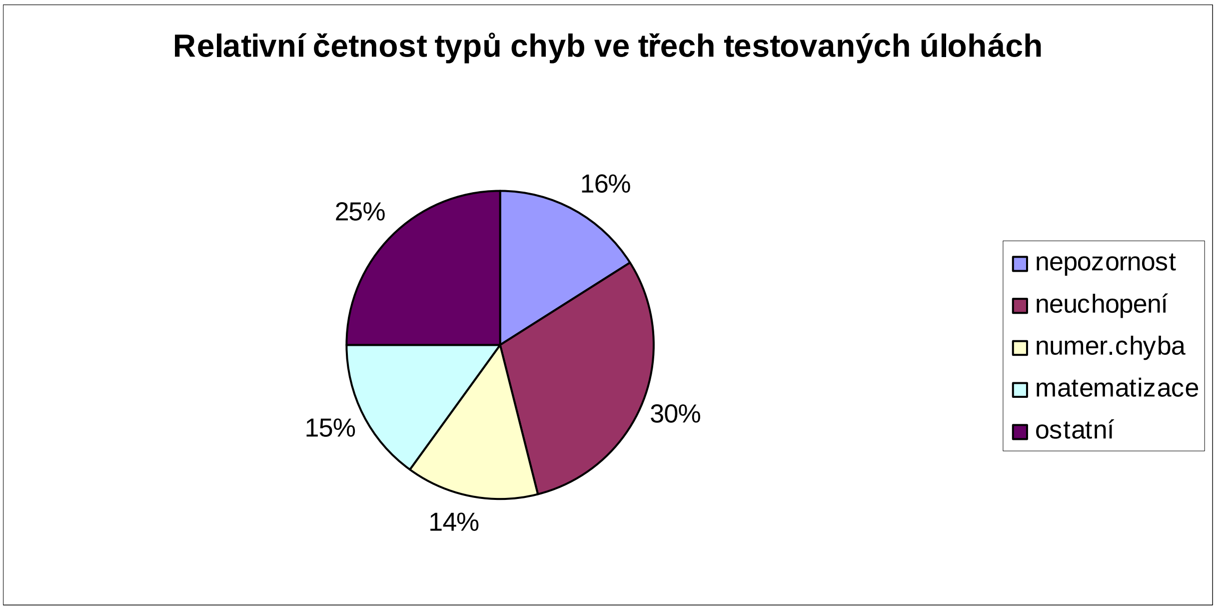
úloha/chyba	**ch21**	**ch22**	**ch23**	**ch24**	**ch25**	**Ch26**
úloha č. 1	4	1	0	0	0	3
úloha č. 2	0	0	0	0	0	1
úloha č. 3	0	1	0	0	1	7

Tabulka 27 *Četnost chyb numerických, v roznásobení dvojčlenu a v matematizaci*

úloha/chyba	**ch31**	**ch32**	**ch33**	**ch34**	**ch41**	**ch51**	**ch52**	**ch53**
úloha č. 1	4	3	0	0	1	4	5	7
úloha č. 2	0	0	3	0	0	0	0	0
úloha č. 3	0	0	0	2	0	0	0	0

Tabulka 28 *Četnost zbylých chyb a celkový počet chyb v jednotlivých úlohách*

úloha/chyba	**ch 6**	**ch8**	**ch9**	**ch15**	**chnz**	**Celkem**
úloha č. 1	0	0	0	0	17	54
úloha č. 2	0	0	0	5	0	21
úloha č. 3	2	1	4	0	0	36



Obr. 3.2.47

5 Závěr

Analýza jednotlivých písemných řešení vybraných žáků devátých ročníků základních škol byla prostředkem vedoucím k hlavnímu cíli mé práce. Tím bylo vytvořit základní rejstřík chyb, které se ve vybraných úlohách mohou vyskytnout a mohou být příčinou nevyřešení dané úlohy; současně jsem se zajímal o to, ve které fázi řešitelského procesu žáci chybují. Předchozí odstavce a stránky ukázaly, že jednou z chyb zabraňujících správnému řešení žáka je jeho nepozornost. Ve výuce by zřejmě bylo třeba klást větší důraz na koncentraci žáků a na zdůrazňování významu pochopení a zápisu zásadních údajů ze zadání úlohy. Současně by nebylo od věci ptát se jednotlivých žáků, kteří si zadání úlohy nejprve přečetli pro sebe, aby slovně shrnuli základní data s důrazem na hlavní otázku, kterou úloha klade. Pokud je úloha informačně obsáhlejší nebo pokud obsahuje více podúloh tak, jako je tomu u třetí testované úlohy, pak by cestou k omezení chyb z nepozornosti mohlo být rozdělení úlohy, kdy by žáci každou podúlohu řešili jako samostatnou úlohu se všemi náležitostmi, které takové řešení vyžaduje.

V rámci analýzy písemných řešení vybraných žáků v mé studii se nepotvrdilo tvrzení, které formuloval G. Polya (1945), že žáci mají potíže s volbou strategie, neboť téměř všichni z 27 zúčastněných žáků zvolili správný postup výpočtu. Většina chyb detekovaných výše nastala až ve fázi realizace plánu řešení, kde se objevily chyby v matematizaci, v nevybavení si vzorce pro obsah kruhu a v neuchopení přímé úměrnosti, jakož i v chybném zacházení se zlomky a s procenty. V případě nevybavení si vzorce pro obsah a neuchopení přímé úměrnosti jde o znalostní nedostatek, k jehož napravení by zřejmě posloužila pilná příprava žáků na hodiny matematiky. Co se týká problémů s matematizací, tak zde je cestou k nápravě poskytování většího množství izolovaných modelů kontextů a rovnic a větší důraz na jejich propedeutiku, totéž lze říci i na adresu počítání se zlomky a s procenty. Příčina těchto chyb tedy zřejmě tkví v obou hlavních činitelích procesu vzdělávání. Analýza písemných řešení přinesla poznatek o tom, že někteří žáci kromě nepozornosti zároveň lehce odbývají zápis základních údajů k úloze a současně nerealizují matematickou a sémantickou zkoušku. Bylo by tedy dobré připomínat žákům, že zápis je nedílnou a podstatnou záležitostí procesu řešení úloh.

Podobně je nutno zdůrazňovat nezbytnost matematické a sémantické zkoušky.

Nutno dodat, že účastníci pilotní a hlavní studie patřili spíše mezi průměrné a slabé žáky, co se matematiky týká. Výsledky tedy nemohou být brány jako reprezentativní pro celou populaci žáků. Některé chyby by mohly být způsobeny i dysgrafií či dyskalkulií a podobnými potížemi. Chybovost žáků může v neposlední řadě záviset na klimatu ve třídě a na hodině, ve kterou žáci dané úlohy řeší. K tomuto aspektu dodám, že řešitelé uvedení v této práci vypracovávali úlohy v pondělí, resp. v úterý dopoledne, takže měli k řešení úloh optimální podmínky. Přes malý počet žáků účastnících se mé studie lze předpokládat, že výše popsané obtíže byly příčinou neúspěchu našich žáků při řešení daných úloh v rámci TIMSS 2007. Právě tento malý počet mi umožnil analyzovat řešitelský proces žáků podrobněji, než by tomu bylo při zpracování jen písemných řešení žáků, s nimiž bych neměl o jejich práci možnost promluvit.

Věřím, že tato práce alespoň částečně připomněla problematiku chyb jako součásti vzdělávacího procesu žáka a že přispěje k hlubšímu zamyšlení se nad příčinami klesající úspěšnosti žáků v rámci mezinárodních studií, které se zabývají mimo jiné i matematickou gramotností.

„Člověk chyboval, chybuje a bude chybovat, otázkou zůstává proč?“

Chyba je věrným průvodcem procesu učení a vzdělávání se, proto je třeba s tímto fenoménem všudypřítomným ve veškeré lidské činnosti počítat a je nutné si z každé chyby vzít ponaučení. K tomuto je ovšem třeba chybu správně interpretovat, což bylo hlavním úskalím při mé snaze o analýzu písemných řešení žáků. V průběhu analyzování řešitelských procesů jednotlivých žáků se ukázalo, že problematika chyb a jejich pojmenování je velice pestrou oblastí, a tak jsem někdy pracoval jako detektiv, když při pátrání v myšlenkových pochodech žáků bylo nutné nalézt chybnou úvahu a příslušně ji pojmenovat.

Problematická místa jednotlivých úloh jsem měl vytipovaná předem, ovšem i tak mě některé chyby či jejich příčiny překvapily. Jednu z takových chyb či problémů způsobilo zadání druhé úlohy, v němž několik řešitelů považovalo slovo průměr za pojem geometrický, ačkoli se jednalo o pojem statistický. Dva řešitelé mě zarazili, když z reálného světa neznali význam pojmu „zpáteční jízdenka.“

Velice zajímavé však bylo hlouběji se zamyslet nad řešením žáků, k čemuž mě vedla i metoda atomární analýzy, se kterou jsem se v průběhu psaní této práce seznámil. Je jisté, že při běžném učitelském úvazku je značně složité realizovat hlubší analýzy písemných řešení žáků, ale v případě často chybujících žáků může hlubší pohled do „nitra“ jejich myšlenek znamenat cestu k nápravě chyb a ke správnému přístupu učitele k žákovi v průběhu výuky matematice.

6 Seznam použité literatury:

[1] BASL, J., MOURALOVÁ, M. *Zhoršující se výsledky českých žáků v mezinárodních šetřeních: přehled trendů, možné příčiny a řešení*. Praha, 2011, 65 s.

[2] CIRJAK, M. *Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh (tvorivosť v matematike)*. Essox. Prešov 2000.

[3] ČSI: Výsledky mezinárodních šetření PIRLS 2011 a TIMSS 2011. *Česká škola* [online]. 11. prosince 2012 [cit. 2013-04-17]. Dostupné z: http://www.ceskaskola.cz/2012/12/csi-vysledky-mezinarodnich-setreni.html

[4] HEJNÝ, M., MICHALCOVÁ, A. *Skúmanie matematického riešitelského postupu*. Bratislava: Metodické centrum, 2001.

[5] HOŠPESOVÁ, A., TICHÁ, M., FREIBERGOVÁ, J. (2001). Jak děti rozumějí matematickým úlohám. In: D. Tržilová (Ed.).*University of South Bohemia. Department of mathematics report series*, vol. 9 (2001), Jihočeská universita, Pedagogická fakulta, ISBN: 80-7040-532-5, str. 38 - 47

[6] HRUBÁ, J. V čem se zhoršujeme? (TIMSS 2007). [online]. 17.1.2009 [cit. 2012-07-04]. Dostupné z: http://clanky.rvp.cz/clanek/s/Z/2912/V-CEM-SE-ZHORSUJEME-TIMSS-2007.html/

[7] KAŠČÁK, O., PUPALA, B. PISA v kritickej perspektive. *Orbis Scholae*. 2011, roč. 5, č. 1, s. 53-70. ISSN 1802-4637. Dostupné z: http://www.orbisscholae.cz/archiv/2011_01.pdf

[8] KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Ústí nad Labem: Acta universitatis Purkynianae, 1999.

[9] KORŠŇÁKOVÁ, P. *PISA - matematika*: *Úlohy 2003*. první. Bratislava: PARASLINE, s.r.o., 2004. ISBN 80-85756-89-7. Dostupné z: http://www.nucem.sk/documents//27/medzinarodne_merania/pisa/publikacie_a_diseminacia/3_zbierky_uloh/%C3%9Alohy_-_matematika_2003.pdf

[10] LESTER, F.K. Musings about mathematics:problem solving research. *Research in Mathematics Education*. 2004, roč. 25, č. 6, s. 660-675.

[11] MANDÍKOVÁ, D., HOUFKOVÁ, J. *Analýza dat z mezinárodních výzkumů - fyzikální úlohy*: *Úlohy výzkumu TIMSS*. Praha, 2008, 281 s. Dostupné z: http://kdf.mff.cuni.cz/vyzkum/NPVII/materialy/zprava_ulohy_timss_komplet.pdf

[12] MARTINEC, L., HONSOVÁ, Š. *Co umí čeští žáci - výzkum PISA*. 1. vyd. Praha 1: Tauris, 2008. ISBN 978-80-211-0555-3.

[13] MEYERHÖFER, W. Testfähigkeit - Was ist das? In HOPMANN, S.T.; BRINEK, G.; RETZL, M. (Eds). PISA zufolge PISA – PISA According to PISA. Hält PISA, was es verspricht? – Does PISA keep, what it promises? Wien : Lit verlag, 2007, s. 57 – 92.

[14] MŠMT, ÚIV. Výsledky mezinárodního výzkumu TIMSS 2007. *Učitelské noviny* [online]. 2008, roč. 2008, č. 46 [cit. 2012-09-10]. Dostupné z: http://www.ucitelskenoviny.cz/?archiv&clanek=1530

[15] NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh: Kapitoly z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0.

[16] NOVOTNÁ,J., KUBÍNOVÁ, M. *Proces a koncept v uchopení úlohy.* In: Sborník 6. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol. Ed. M. Ausbergerová, J. Novotná. Plzeň, ZČU 1998.

[17] OECD. *Learning for tomorrow´s world*: *first results from PISA 2003*. 2004, 471 s. Dostupné z: http://www.oecd.org/education/preschoolandschool/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/34002216.pdf

[18] OLECHOWSKI, R. Vorwort. In HOPMANN, S.T.; BRINEK, G.; RETZL, M. (Eds). PISA zufolge PISA – PISA According to PISA. Hält PISA, was es verspricht? – Does PISA keep, what it promises? Wien : Lit verlag, 2007, s. 5 –8.

[19] PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V. *Učení pro zítřek: výsledek výzkumu OECD PISA 2003*. Praha: ÚIV, 2005.

[20] PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V., BASL, J. *Hlavní zjištění výzkumu PISA 2009*: *Umíme ještě číst?*[online]. Praha: ÚIV, 2010 [cit. 2012-07-23]. Dostupné z: http://www.uiv.cz/clanek/607/1871

[21] PALEČKOVÁ, J. TIMSS 1999. *Mezinárodní projekty* [online]. 2002 [cit. 2012-09-10]. Dostupné z: http://www.uiv.cz/clanek/234/1866

[22] PALEČKOVÁ, J. *Hlavní zjištění výzkumu PISA 2006*: *Poradí si žáci s přírodními vědami?* [online]. Praha: ÚIV, 2007 [cit. 2012-07-23]. Dostupné z: http://www.uiv.cz/clanek/240/1869

[23] PISA 2000 – OECD PROGRAM PRO MEZINÁRODNÍ HODNOCENÍ ŽÁKŮ (PROGRAMME FOR INTERNATIONAL STUDENT ASSESSMENT). *Mezinárodní projekty › Archiv › PISA 2000* [online]. 2001 [cit. 2012-07-04]. Dostupné z: http://www.uiv.cz/clanek/235/1867

[24] PISA 2003 – OECD PROGRAM PRO MEZINÁRODNÍ HODNOCENÍ ŽÁKŮ (PROGRAMME FOR INTERNATIONAL STUDENT ASSESSMENT). *Mezinárodní projekty › Archiv › PISA 2003* [online]. 2004 [cit. 2012-07-04]. Dostupné z: http://www.uiv.cz/clanek/243/1868

[25] PISA 2006 – OECD PROGRAM PRO MEZINÁRODNÍ HODNOCENÍ ŽÁKŮ (PROGRAMME FOR INTERNATIONAL STUDENT ASSESSMENT). *Mezinárodní projekty › PISA 2006* [online]. 2007 [cit. 2012-07-04]. Dostupné z: http://www.uiv.cz/clanek/240/1869

[26] PISA 2009 – OECD PROGRAM PRO MEZINÁRODNÍ HODNOCENÍ ŽÁKŮ (PROGRAMME FOR INTERNATIONAL STUDENT ASSESSMENT). *Mezinárodní projekty › PISA 2009* [online]. 2010 [cit. 2012-07-04]. Dostupné z: http://www.uiv.cz/clanek/607/1871

[27] POLYA, G. How to solve it:a new aspect of mathematical method.Princetown University Press, 1945. ISBN 0-691-08097-6.

[28] PŘÍHONSKÁ, J. *Metody řešení úloh - MX2M*. 2011, 14 s. Dostupné z: http://kmd.fp.tul.cz/lide/prihonska/MX2M/P1_METODY%20RESENI%20ULOH.pdf

[29] ROCHEX, J.-Y. *Social, Methodological, and Theoretical Issues Regarding Assessment: Lessons from a Secondary Analysis of PISA 2000 Literacy test*. 2006 [online]. [cit. 2013-05-02]. Dostupné z: http://rre.sagepub.com/content/30/1/163.extract

[30] RUDD, D. M. The Effects of Heuristic Problem-Solving Strategies on Seventh Grade Students' Self-Efficacy and Level of Achievment in Mathematics. In: *Education and Human Development Theses* [online]. 2010 [cit. 2012-07-10]. Dostupné z: http://digitalcommons.brockport.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1031&context=ehd_theses&sei-redir=1&referer=http://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=heuristic+problem+solving+strategies+in+maths&source=web&cd=8&ved=0CHcQFjAH&url=http%3A%2F%2Fdigitalcommons.brockport.edu%2Fcgi%2Fviewcontent.cgi%3Farticle%3D1031%26context%3Dehd_theses&ei=KRb7T-3kMY_c4QTZ-5nfBg&usg=AFQjCNGINFO-K_pVC-xkf1nQcZptV707bQ#search=%22heuristic%20problem%20solving%20strategies%20maths%22

[31] SJØBERG, S. PISA and „Real Life Challanges“: Mission Impossible? In HOPMANN, S.T.;BRINEK, G.; RETZL, M. (Eds). PISA Zufolge PISA – PISA According to PISA. Hält PISA, was es verspricht? – Does PISA keep, what it promises? Wien : Lit verlag, 2007, s. 203– 224.

[32] STEHLÍKOVÁ, N. Analýza písemného řešení žáka, jedna z možných technologií. NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova - Pedagogická fakulta, 2000, 98 - 119. ISBN 80-7290-011-0.

[33] STRAKOVÁ, J. et al.. ÚSTAV PRO INFORMACE VE VZDĚLÁVÁNÍ. *Vědomosti a dovednosti pro život: čtenářská, matematická a přírodovědná gramotnost patnáctiletých žáků v zemích OECD* [online]. Praha: ÚIV, 2002 [cit. 2013-04-18]. ISBN 80-211-0411-2.

[34] ŠTECH, S. PISA - nástroj vzdělávací politiky nebo výzkumná metoda?. *Orbis Scholae*. 2011, roč. 5, č. 1, s. 123-133. ISSN 1802-4637. Dostupné z: http://www.orbisscholae.cz/archiv/2011/2011_1_07.pdf

[35] ŠTĚPÁNKOVÁ, R. *Strategie řešení slovních úloh v průběhu studia na ZŠ*. České Budějovice, 2001. Dostupné z: http://theses.cz/id/5219wt/diplomov_prce_tpnkov.pdf. Diplomová práce. Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce RNDr. Helena Binterová, PhD.

[36] TICHÁ, M. *K strategiím řešení úloh v učení žáků matematice na základní škole*. Praha, Matematický ústav ČSAV, 1982. Kandidátská disertační práce.

[37] TOMÁŠEK, V. et al.. ÚSTAV PRO INFORMACE VE VZDĚLÁVÁNÍ. *Výzkum TIMSS 2007: Úlohy z matematiky pro 8. ročník* [online]. Praha: ÚIV, 2009 [cit. 2013-04-22]. ISBN 978-80-211-0591-1. Dostupné z: http://www.csicr.cz/getattachment/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni-archiv/TIMSS/TIMSS-2007/Ulohy-z-mat-8-roc-publikace.pdf

[38] TOMÁŠEK, V. ČESKÁ ŠKOLNÍ INSPEKCE. *Národní zpráva TIMSS 2011* [online]. Praha, 2012 [cit. 2013-04-17]. ISBN 978-80-905370-4-0. Dostupné z: http://www.csicr.cz/getattachment/f80cafe7-4097-4bf5-a29f-8b25e150f2d9/narodni-zprava-TIMMS_2011_WEB.pdf

[39] TOMÁŠEK, V. TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study). *Česká školní inspekce* [online]. 2012 [cit. 2012-07-23]. Dostupné z: http://www.csicr.cz/cz/O-nas/Mezinarodni-setreni/TIMSS/TIMSS-(Trends-in-International-Mathematics-and-Sci

[40] VÚP.*Gramotnosti ve vzdělávání: Soubor studií* [online]. první. Praha: VÚP, 2011[cit. 2013-04-24]. ISBN 978-80-87000-74-8. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2011/06/Gramotnosti_ve_vzdelavani_soubor_studii1.pdf

[41] VYŠÍN, J. *Metodika řešení matematických úloh.* Praha, SPN 1972.

[42] Webster´s (1979) *New Universal Unabridged Dictionary.* Secod edition. New York: Schimon & Schuster.

PŘÍLOHY

PŘÍLOHA A Výsledky výzkumu PISA v letech 2000 – 2009

Tabulka 3 *Výsledky výzkumu PISA 2000*

Čtenářská gramotnost		Matematická gramotnost		Přírodovědná gramotnost	
země	průměr	země	průměr	země	průměr
Finsko	546	Japonsko	557	Korea	552
Kanada	534	Korea	547	Japonsko	550
Nový Zéland	529	Nový Zéland	537	Finsko	538
Austrálie	528	Finsko	536	Velká Británie	532
Irsko	527	Austrálie	533	Kanada	529
Korea	525	Kanada	533	Nový Zéland	528
Velká Británie	523	Švýcarsko	529	Austrálie	528
Japonsko	522	Velká Británie	529	Rakousko	519
Švédsko	516	Belgie	520	Irsko	513
Rakousko	507	Francie	517	Švédsko	512
Belgie	507	Rakousko	515	***Česká rep.***	***511***
Island	507	Dánsko	514	Francie	500
Norsko	505	Island	514	Norsko	500
Francie	505	Lichtenštejnsko	514	USA	499
USA	504	Švédsko	510	Maďarsko	496
Dánsko	497	Irsko	503	Island	496
Švýcarsko	494	Norsko	499	Belgie	496
Španělsko	493	***Česká rep.***	***498***	Švýcarsko	496
Česká rep.	***492***	USA	493	Španělsko	491
Itálie	487	Německo	490	Německo	487
Německo	484	Maďarsko	488	Polsko	483

(*Pozn. Červené značení odpovídá nadprůměru OECD, zelené je průměr a modré podprůměr.*)
zdroj: (PISA, 2000)

Tabulka 4 [13] *Výsledky výzkumu PISA 2003*

Čtenářská gramotnost		Matematická gramotnost		Přírodovědná gramotnost	
země	průměr	země	průměr	země	průměr
Finsko	543	Korea	550	Finsko	548
Korea	534	Hongkong	548	Japonsko	548
Kanada	528	Finsko	548	Hongkong	539
Austrálie	525	Japonsko	547	Korea	538
Lichtenštejnsko	525	Nový Zéland	533	Lichtenštejnsko	525
Nový Zéland	522	Macao	532	Austrálie	525
Irsko	515	Austrálie	530	Macao	525
Švédsko	514	Lichtenštejnsko	529	Nizozemsko	524

[13] http://www.ucitelskenoviny.cz/archiv/archiv4604/pisa.pdf

Nizozemsko	513	Kanada	529	***Česká rep.***	***523 (+12)***
Hongkong	510	Belgie	525	Nový Zéland	521
Belgie	507	Švýcarsko	521	Kanada	519
Norsko	500	Nizozemsko	520	Švýcarsko	513
Švýcarsko	499	Francie	519	Francie	511
Japonsko	498	Dánsko	517	Belgie	509
Macao	498	***Česká rep.***	***516 (+18)***	Švédsko	506
Polsko	497	Německo	513	Irsko	505
Francie	496	Švédsko	509	Maďarsko	503
USA	495	Rakousko	506	Německo	502
Dánsko	492	Island	505	Polsko	498
Island	492	Maďarsko	501	Slovensko	495
Německo	491	Irsko	498	Island	495
Rakousko	491	Lucembursko	494	USA	491
Lotyšsko	491	Slovensko	492	Rakousko	491
Česká rep.	***489 (- 3)***	Norsko	490	Rusko	489
Maďarsko	482	Polsko	487	Lotyšsko	489
Španělsko	481	Lotyšsko	483	Španělsko	487
Lucembursko	479	Španělsko	482	Itálie	486

Pozn. V závorce je uveden trend v porovnání s minulým šetřením

Tabulka 6 *Výsledky výzkumu PISA 2006*

Čtenářská gramotnost		**Matematická gramotnost**		**Přírodovědná gramotnost**	
země	průměr	země	průměr	země	průměr
Korea	556	Tchaj-wan	549	Finsko	563
Finsko	547	Finsko	548	Hongkong	542
Hongkong	536	Hongkong	547	Kanada	534
Kanada	527	Korea	547	Tchaj-wan	532
Nový Zéland	521	Nizozemsko	531	Estonsko	531
Irsko	517	Švýcarsko	530	Japonsko	531
Austrálie	513	Kanada	527	Nový Zéland	530
Lichtenštejnsko	510	Macao	525	Austrálie	527
Polsko	508	Lichtenštejnsko	525	Nizozemsko	525
Švédsko	507	Japonsko	523	Lichtenštejnsko	522
Nizozemsko	507	Nový Zéland	522	Korea	522
Belgie	501	Belgie	520	Slovinsko	519
Estonsko	501	Austrálie	520	Německo	516
Švýcarsko	499	Estonsko	515	Velká Británie	515
Japonsko	498	Dánsko	513	***Česká rep.***	***513 (+2)***
Tchaj-wan	496	***Česká rep.***	***510 (-6)***	Švýcarsko	512
Velká Británie	495	Island	506	Macao	511
Německo	495	Rakousko	505	Rakousko	511
Dánsko	494	Slovinsko	504	Belgie	510
Slovinsko	494	Německo	504	Irsko	508
Macao	492	Švédsko	502	Maďarsko	504
Rakousko	490	Irsko	501	Švédsko	503
Francie	488	Francie	496	Polsko	498
Island	484	Velká Británie	495	Dánsko	496
Norsko	484	Polsko	495	Francie	495

Česká rep.	***483 (-6)***	Slovensko	492	Chorvatsko	493
Maďarsko	482	Maďarsko	491	Island	491
Lotyšsko	479	Lucembursko	490	Lotyšsko	490
Lucembursko	479	Norsko	490	USA	489

Zdroj: Palečková (2007)

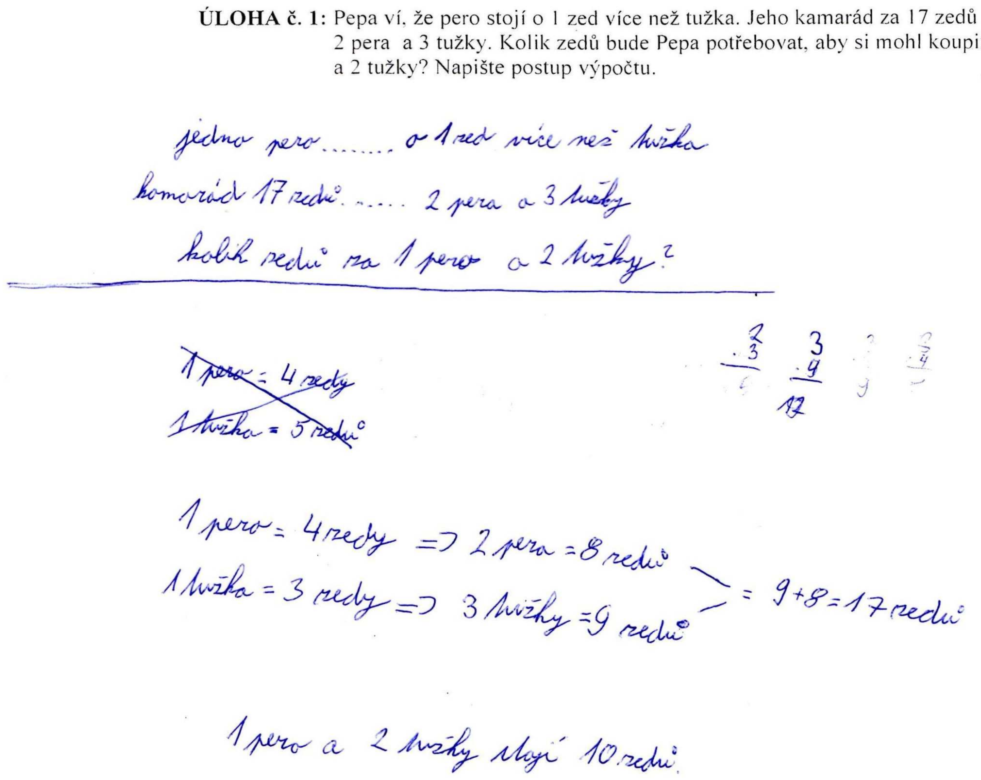
Tabulka 7 *Výsledky výzkumu PISA 2009*

Čtenářská gramotnost		**Matematická gramotnost**		**Přírodovědná gramotnost**	
země	průměr	země	průměr	země	průměr
Korea	539	Korea	546	Finsko	554
Finsko	536	Finsko	541	Japonsko	539
Kanada	524	Lichtenštejnsko	536	Korea	538
Nový Zéland	521	Švýcarsko	534	Nový Zéland	532
Japonsko	520	Japonsko	529	Kanada	529
Austrálie	515	Kanada	527	Estonsko	528
Nizozemsko	508	Nizozemsko	526	Austrálie	527
Belgie	506	Nový Zéland	519	Nizozemsko	522
Norsko	503	Belgie	515	Lichtenštejnsko	520
Estonsko	501	Austrálie	514	Švýcarsko	517
Švýcarsko	501	Německo	513	Velká Británie	514
Polsko	500	Estonsko	512	Slovinsko	512
Island	500	Island	507	Polsko	508
USA	500	Dánsko	503	Irsko	508
Švédsko	497	Slovinsko	501	Belgie	507
Německo	497	Norsko	498	Maďarsko	503
Irsko	496	Francie	497	USA	502
Francie	496	Slovensko	497	***Česká rep.***	***500 (-13)***
Dánsko	495	Rakousko	496	Norsko	500
Velká Británie	494	Polsko	495	Dánsko	499
Maďarsko	494	Švédsko	494	Francie	498
Portugalsko	489	***Česká rep.***	***493 (-17)***	Island	496
Itálie	486	Velká Británie	492	Švédsko	495
Slovinsko	483	Maďarsko	490	Rakousko	494
Řecko	483	Lucembursko	489	Portugalsko	493
Španělsko	481	USA	487	Slovensko	490
Česká rep.	***478 (-5)***	Irsko	487	Itálie	489
Slovensko	477	Portugalsko	487	Španělsko	488
Izrael	474	Španělsko	483	Lucembursko	484
Lucembursko	472	Itálie	483	Řecko	470
Rakousko	470	Řecko	466	Turecko	454
Turecko	464	Turecko	445	Chile	447

Zdroj: Palečková (2010)

PŘÍLOHA B Atomární analýza písemných řešení žáků účastnících se pilotní studie

Úloha č. 1, řešitel: Marek


ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

jedno pero....... o 1 zed více než tužka
kamarád 17 zedů ...... 2 pera a 3 tužky
kolik zedů za 1 pero a 2 tužky?

~~1 pero = 4 zedy~~
~~1 tužka = 5 zedů~~

2 · 3 = 6   3 · 4 = 12   3 · 3 = 9

1 pero = 4 zedy => 2 pera = 8 zedů
1 tužka = 3 zedy => 3 tužky = 9 zedů
= 9 + 8 = 17 zedů

1 pero a 2 tužky stojí 10 zedů.

Obr. B.1

Tabulka 29a *Statické atomy*

1. **jedno pero …. o 1 zed více než tužka**	8. **1 pero = 4 zedy**
2. **kamarád 17 zedů …. 2 pera a 3 tužky**	9. **1 tužka = 3 zedy**
3. **kolik zedů za 1 pero a 2 tužky?**	10. **2 pera = 8 zedů**
4. **1 pero = 4 zedy**	11. **3 tužky = 9 zedů**
5. **1 tužka = 5 zedů**	12. **= 9 + 8 = 17**
6. **((4., 5.,))**	13. **1 pero a 2 tužky stojí 10 zedů**
7. **2 ·3 --------- 6 3 · 4 ------ 12 3 · 3 ----- 9**	

Tabulka 29b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***Vyzkouším nějaká dvě čísla jako cenu pera a tužky tak, že jedna je o jedna větší než ta druhá***
S2 : ***V hlavě si najdu dvě čísla, která splňují obě podmínky úlohy***

Tabulka 29c *Dynamické atomy - provedení*

P1: ***1 pero = 4 zedy***
P2: ***1 tužka = 5 zedů***

P3: ***2*** ***3*** ***3*** ***· 3*** ***· 4*** ***· 3*** ------ ------ ------ ***6*** ***12*** ***9***
P4: ***9 + 8 = 17***

Tabulka 29d *Kontrola*

K1*: Splňují ta čísla podmínku, že 2p + 3t = 17?*
K2*: Je opravdu tužka o 1 zed dražší než pero?*
K3*: Splňuje to obě podmínky úlohy?*

Tabulka 29e *Výsledek*

V1: *prezentace výsledku*

Myšlenkový proces řešitele

Z1 Nejprve si zapíši vše, co je v zadání podstatné.

píše /**1**/**,** /**2**/**,** /**3**/, k1.

Z2 Tak si z hlavy vygeneruji dvě čísla, která splňují první podmínku úlohy. **S1**

píše /**4**/**,** /**5**/, *P1, P2, K1*, píše /**6**/, k2.

Z3 Musím z hlavy vygenerovat jiná čísla. **S1**

píše /**7**/, *P3, K1*, k3.

Z4 Je skutečně tužka o 1 zed dražší než pero? (Tuto otázku položil experimentátor.)

K2, k4

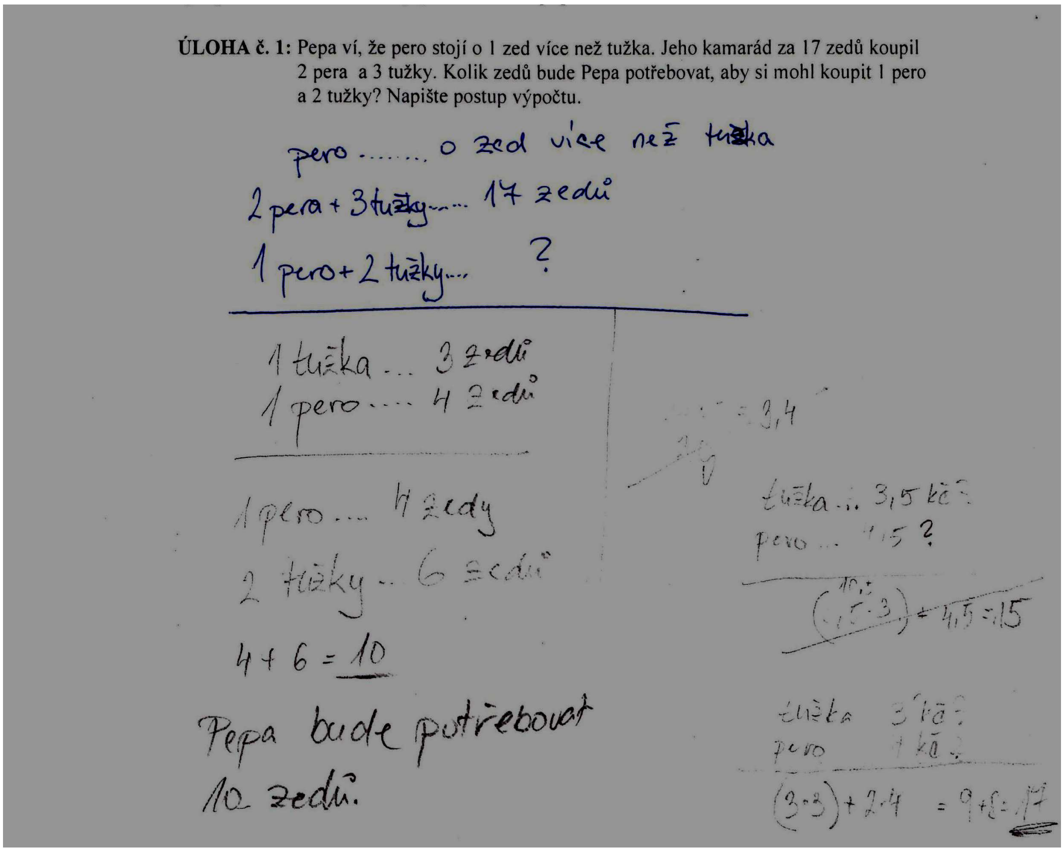
Z4 Teď, když vím, že pero je o 1 zed dražší než tužka, tak znovu vezmu hodnoty 3 a 4. **S2**

píše /**8**/**,** /**9**/**,** /**10**/**,** /**11**/**,** *K1*, píše /**12**/, *P4, K3, V1*, k4.

Marek počítal většinou v hlavě, problémem bylo, že si do ni na jistou dobu uložil chybnou informaci o tom, že tužka je o 1 zed dražší než pero. Do rovnic se dle vlastních slov, která mi po vyřešení úlohy sdělil, pouštět nechtěl. Argumentoval tak, že mu to přišlo zbytečně složité.

- Pozitiva: řešitel se nebojí zkoušet metodu pokus−omyl
  je vytrvalý
- Negativa: nemalou část operací provádí v hlavě, což může vést k chybě
  nedokáže matematizovat údaje z úlohy, ač ji uchopil správně
  sémantickou kontrolu provádí až po upozornění zadavatele

Úloha č. 1, řešitel: Tereza



ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

pero .... o zed více než tužka
2 pera + 3 tužky ..... 17 zedů
1 pero + 2 tužky .... ?

1 tužka ... 3 zedů
1 pero .... 4 zedů

1 pero .... 4 zedy
2 tužky .. 6 zedů
4 + 6 = 10

Pepa bude potřebovat 10 zedů.

= 3,4

tužka ... 3,5 kč ?
pero ... 4,5 ?
(3,5 · 3) + 4,5 = 15

tužka 3 kč ?
pero 4 kč ?
(3 · 3) + 2 · 4 = 9 + 8 = 17

Obr. B.2

Tabulka 30a *Statické atomy*

1. **pero …. o zed více než tužka**	10. **tužka …. 3 Kč?**
2. **2 pera + 3 tužky …. 17 zedů**	11. **pero ……4 Kč?**
3. **1 pero + 2 tužky …. ?**	12. **(3 · 3) + 2 · 4**
4. **17 : 5**	13. **= 9 + 8**
5. **20** **= 3,4**	14. **= 17**
6. **tužka … 3,5 Kč ?**	15. **1 tužka … 3 zedů**
7. **pero …. 4,5 ?**	16. **1 pero ….. 4 zedů**
8. **(3,5 · 3) + 4,5 = 15**	17. **1 pero …. 4 zedy**
9. **((8))**	18. **2 tužky …6 zedů**
	19. **4 + 6 = 10**
	20. **Pepa bude potřebovat 10 zedů**

Tabulka 30b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***Vím, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů, tak 17 dělím pěti***
S2: ***Cenu tužky a pera nastavím dle podmínek úlohy a tak, aby cena tužky byla blízko výsledku 17:5 a poté ověřím podmínku 2p + 3t = 17***
S3: ***Musím sečíst cenu pera a dvou tužek.***

Tabulka 30c *Dynamické atomy – provedení*

P1: **17: 5 = 3,4** **20**	P3: **(3 · 3) + 2 · 5 = 17**

P2: **(3,5 · 3) + 4,5 = 15**	P4: **4 + 6 = 10**

Tabulka 30d *Kontrola*

K1: *Vyjde mi při daných cenách tužky a pera, že 3 tužky a 2 pera stojí 17 zedů?*

Tabulka 30e *Výsledek*

V1: *prezentace výsledku*

Myšlenkový proces řešitele:

Z1 Nejprve si zapíši podstatné údaje ze zadání.

píše **/1/, /2/, /3**/, k1.

Z2 Vím, že kamarád Pepy dal 17 zedů za pět věcí, pero a tužka nestojí stejně, ale orientačně zjistím cenu. **S1**

píše **/4/, /5/**, *P1*, k2.

Z3 Na základě orientační hodnoty 3,4 si provedu zápis cen tužky a pera. **S2**

píše **/6/, /7/**, *P2* , *K1*, píše **/8**/, k3.

Z4 Tak to nevychází. Píše **/9**/, k4.

Z5 Zkusím znovu nastavit cenu tužky blízko hodnoty 3,4, třeba celočíselnou. **S2**

píše **/10/, /11**/, *P3*, *K1*,píše **/12/, /13/, /14**/, k5.

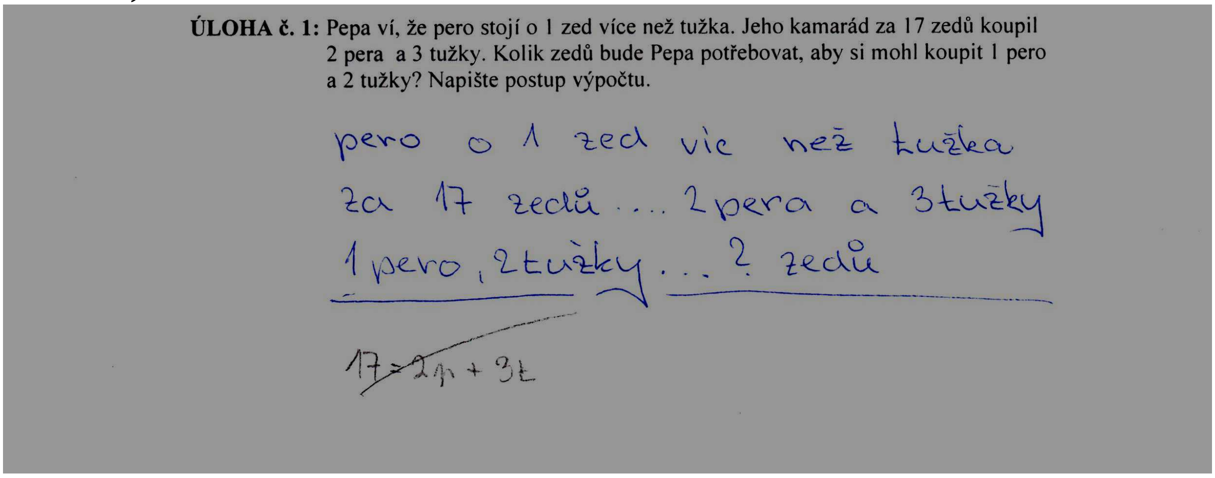
Z6 Teď to sedí, tak jen spočítám cenu za 2 tužky a pero. **S3**

píše **/15/, /16/, /17/, /18/, /19/**, *P4, V1*, píše **/20/**, k6.

Tereza na dotaz experimentátora, proč provedla: 17:5, sdělila, že chtěla mít orientační přehled o ceně tužky a pera. Při první kontrole zapomněla, že ověřuje cenu 3 tužek a 2 nikoli 1 pera.

- Pozitiva: řešitelka je vytrvalá a pečlivá
  nebojí se použít nestandardní strategii
  provádí sémantickou kontrolu
  dokáže v hlavě v průběhu řešení udržet informace ze zadání
- Negativa: zvolená strategie nemusí vždy vést k výsledku, zvláště při větší rozdílnosti cen daných dvou předmětů
  absence matematizace

Úloha č.1, řešitel: Lucie



ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

pero o 1 zed víc než tužka

za 17 zedů .... 2 pera a 3tužky

1 pero, 2tužky ... ? zedů

~~17 = 2p + 3t~~

Obr. B.3

Tabulka 31a *Statické atomy*

1. **pero o 1 zed víc než tužka**
2. **za 17 zedů …. 2 pera a 3 tužky**
3. **1 pero, 2 tužky …. ? zedů**
4. **17 = 2*p* + 3*t***
5. **((4))**

Tabulka 31b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***Nejprve vše potřebné zapíši do legendy***
S2: ***Zkusím to přepsat do rovnice***

Tabulka 31c *Dynamické atomy – provedení*

P1: ***17 = 2p + 3t***

Tabulka 31d *Kontrola*

K1: *Ale já potřebuji ještě jednu rovnici*

Myšlenkový proces řešitele:

Z1 Nejprve provedu zápis. **S1**

píše **/1/, /2/, /3/**, k1.

Z2 Zkusím řešení pomocí rovnic. **S2**

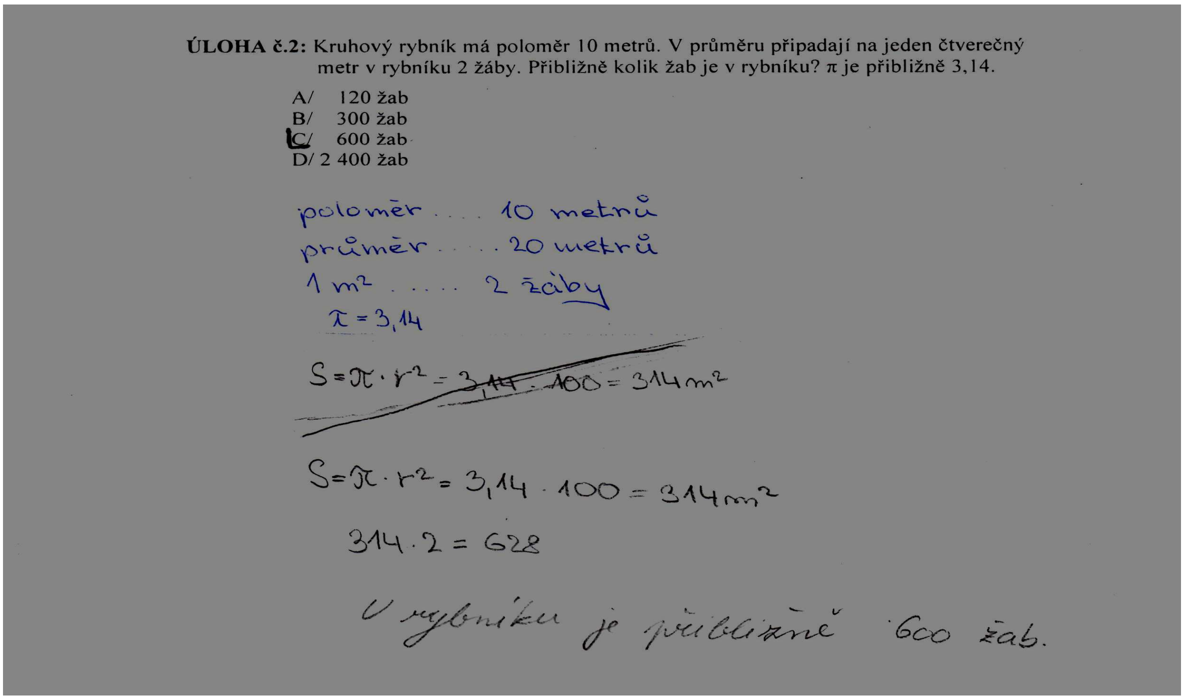
píše **/4/**, *P1*, *K1*, píše **/5/**, k2.

Řešitelka si s úlohou nevěděla rady a rovnici napsala až po drobné nápovědě experimentátora.

- Pozitiva:
- Negativa: řešitelka si nedokázala vytvořit plán na řešení úlohy

řešitelka neobjevila v zadání druhou rovnici, ačkoli má v legendě vše

Úloha č. 2, řešitel: Lucie



ÚLOHA č.2: Kruhový rybník má poloměr 10 metrů. V průměru připadají na jeden čtverečný metr v rybníku 2 žáby. Přibližně kolik žab je v rybníku? π je přibližně 3,14.

A/ 120 žab
B/ 300 žab
C/ 600 žab
D/ 2 400 žab

poloměr .... 10 metrů
průměr ..... 20 metrů
$1\ m^2$ ..... 2 žáby
$\pi = 3,14$

$\cancel{S = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 100 = 314\ m^2}$

$S = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 100 = 314\ m^2$

$314 \cdot 2 = 628$

V rybníku je přibližně 600 žab.

Obr. B.4

Tabulka 32a *Statické atomy*

1. **poloměr ….. 10 metrů**	7. **= 314 m^2**
2. **průměr …….20 metrů**	8. **((5, 6, 7))**
3. **1m^2 ………. 2 žáby**	9. **S = π · r^2**
4. **π = 3,14**	10. **= 3,14 · 100 = 314 m^2**
5. **S = π · r^2**	11. **314 · 2 = 628**
6. **= 3,14 · 100**	12. **V rybníku je přibližně 600 žab.**

Tabulka 32b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***V zadání je dán počet žab na m^2, tak musím zjistit plochu rybníka, to je vzorec pro obsah kruhu.***
S2: ***Když mám obsah a znám počet žab na jednotku plochy, tak to vynásobím.***

Tabulka 32c *Dynamické atomy – provedení*

P1: ***3,14 · 100 = 314 m^2***
P2: ***314 · 2 = 628***

Tabulka 32d *Kontrola*

K1: *Je ten vzorec, do kterého dosazuji správný?*

Tabulka 32e *Výsledek*

V1: *prezentace výsledku*

Myšlenkový proces řešitele:

Z1 Nejprve si zapíši vše potřebné ze zadání.

píše **/1/, /2/, /3/, /4/,** k1.

Z2 Spočítám si plochu rybníka. **S1**

píše **/5/, /6/, /7**/, *P1, K1*, píše **/8/**, k2. (zde experimentátor vznesl dotaz, proč je výpočet přeškrtnutý, odpověď, že jde o hloupost, odmítl)

Z3 Když to tedy mám dobře, tak to vezmu znovu. **S1**

píše **/9/, /10**/, *P1*, k3.

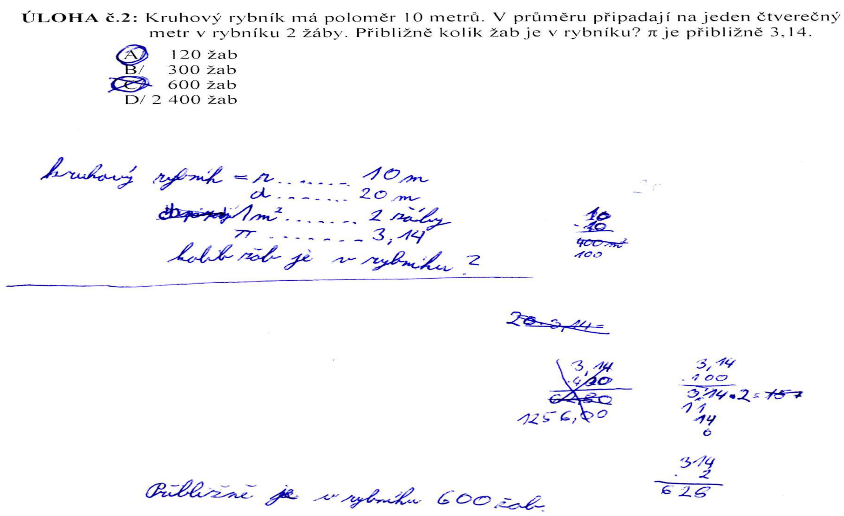
Z4 Nyní musím zjistit počet žab. **S2**

píše **/11**/, *P2, V1*, píše **/12/**, k4.

Řešitelka provedla zápis a správný výpočet obsahu škrtla a nevěděla, jak dále. Zadavatel ji ujistil o správnosti řešení a pak příklad dokončila. Původně výpočet škrtla, neboť ho považovala za blbost.

- Pozitiva: řešitelka správně uchopila úlohu
  vytváří správný algoritmus řešení
- Negativa: řešitelka si nevěří
  není si jistá vzorcem pro obsah kruhu

Úloha č. 2, řešitel: Marek



Obr. B.5

Tabulka 33a *Statické modely*

1. **kruhový rybník = r ….. 10m**	8. **((6,7))**
2. **d……20m**	9. **10** **·10** -------- **100**

3. **1m² ……2 žáby**	10. **3,14** **·100**
4. **π …….3,14**	11. **314 : 2 = 157** **11** **14**
5. **kolik žab je v rybníku?**	12. **((11))**
6. **20 · 3,14 =**	13. **314** **· 2** ---------- **628**
7. **20** **3,14** **· 20** **· 400** -------- --------- **400m²** **62,80** **1256,00**	14. **Přibližně je v rybníku 600 žab.**

Tabulka 33b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***Nejprve si zapíši vše ze zadání***
S2: ***Mám daný počet žab na m², tak musím spočítat plochu kruhového rybníka***
S3: ***Počet žab zjistím tak, že obsah vydělím dvěma (vynásobím)?***

Tabulka 33c *Dynamické atomy – provedení*

P1: ***20 · 3,14 =***	P5: ***3,14*** ***·100*** --------- ***314***
P2: ***20*** ***· 20*** -------- ***400 m²***	P6: ***314 : 2 = 157*** ***11*** ***14*** ***0***
P3: ***3,14*** ***· 400*** ----------- ***62,80*** ***1256,00***	P7: ***314*** ***· 2*** --------- ***628***
P4: ***10*** ***·10*** ------ ***100***	

Tabulka 33d *Kontrola*

K1: *Mám dosadit průměr, ne poloměr*
K2: *Je tu třeba opravdu dělit?*

Tabulka 33e *Výsledek*

V1: *prezentace výsledku*

Myšlenkový proces řešitele:

Z1 Nejprve si zapíši nejnutnější informace ze zadání. **S1** píše **/1/, /2/, /3/, /4/, /5/**, k1.

Z2 Nyní potřebuji nejprve zjistit plochu rybníku. **S2**

píše **/6/**, *P1*, k2.

Z3 Vždyť takhle nevypadá vzorec pro obsah, tak znovu. **S2**

píše **/7/**, *P2, P3, K1*, píše **/8/**, k3.

Z4 Tak ještě jednou ten obsah. **S2**

píše **/9/**, **/10/**, *P4, P5*, k4.

Z5 Nyní musím spočítat ten počet žab. **S3**

píše **/11/**, *P6, K2*, píše **/12/**, k5. (zde experimentátor žákovi návodnými otázkami připomenul, že zde jde o přímou a nikoli nepřímou úměru)

Z6 Já musím ten obsah násobit počtem žab na m^2. **S3**

píše **/13/**, *P7*, píše **/14/**, *V1*, k6.

Řešitel nejprve dosazoval do obsahu kruhu průměr, experimentátor tedy vznesl otázku, zda tam patří průměr či poloměr. Řešitel původní výpočet přeškrtl a začal počítat s poloměrem.

Dalším problémem bylo, že vypočítaný obsah dělil dvěma. Experimentátor se zeptal na důvod. Odpověď byla tato: *„Jsou tam 2 žáby na m^2 . Tak to musím dělit.“* *„Dobrá, tak kolik žab je na 2 m^2 , na 3 m^2 ?“* „ Jo, já to musím násobit,“ odvětil posléze řešitel a dospěl k výsledku.

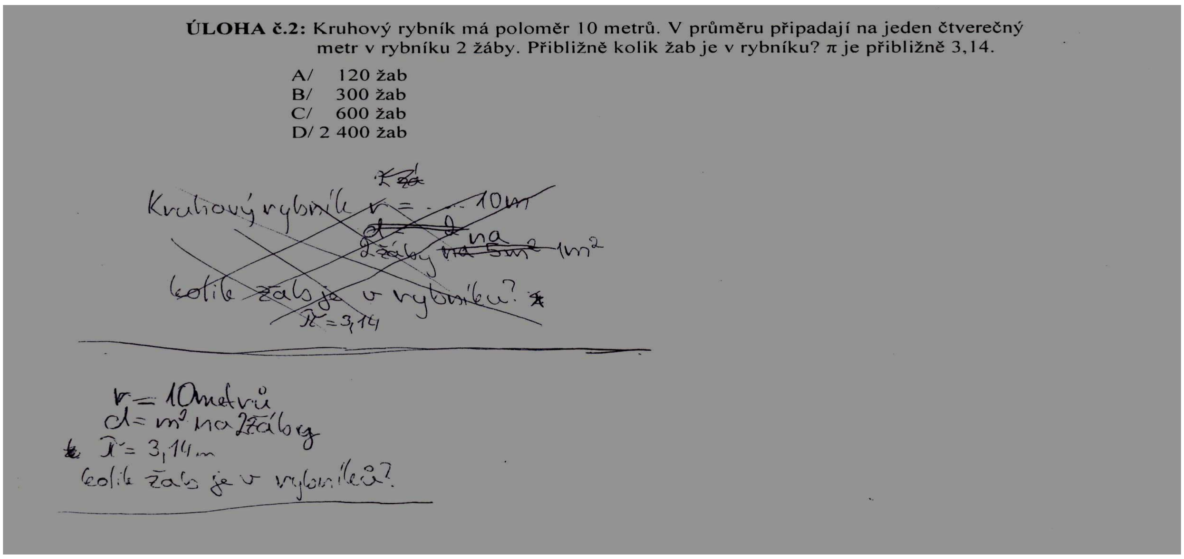
- Pozitiva: řešitel vytváří správný plán řešení

  neodrazují ho vlastní chyby, je schopen je napravit

- Negativa: řešitel nesprávně chápe přímou úměru, má problém s matematizací

  řešitel váhá mezi vzorcem pro obsah kruhu a délku kružnice

Úloha č.2, řešitel: Jan



Obr. B.6

Tabulka 34a *Statické atomy*

1. **kruhový rybník r = ……10m**	7. **r = 10 metrů**
2. **d = ……..2**	8. **d = m^2 na žáby**
3. **2 žáby na 1 m^2**	9. **π = 3, 14**
4. **kolik žab je v rybníku?**	
5. **π = 3,14**	10. **kolik žab je v rybníku?**
6. **((1, 2, 3, 4, 5))**	

Tabulka 34b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***Nejprve si zapíši vše, co je v zadání***

Tabulka 34c *Dynamické atomy – provedení*

Tabulka 34d *Kontrola*

K1: *Nemám místo průměru vzít poloměr? No určitě.*

Tabulka 34e *Výsledek*

Myšlenkový proces řešitele:

Z1 Nejprve provedu zápis. **S1**

píše **/1/, /2/, /3/, /4/**, **/5/**, k1.

Z2 Teď ovšem nevím, zda nepotřebuji spíše poloměr. *K1*, píše **/6/**, k2.

Z3 Zapíši vše znovu. **S1**

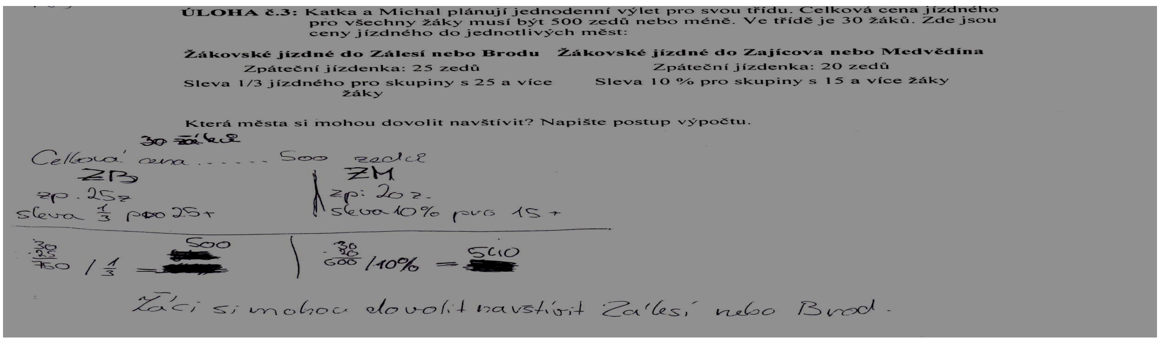
píše **/7/, /8/, /9/, /10**/, k2.

Z4 Nyní ovšem vůbec netuším, co s tím.

- Pozitiva: řešitel vytváří plnohodnotnou legendu
- Negativa: řešitel si nedokázal vybavit vzorec pro obsah kruhu, a tak úlohu nevyřešil

Řešitel Jan byl ze všech čtyř zúčastněných nejvíce rozčarován z daných příkladů.

Úloha č.3, řešitel: Jan



ÚLOHA č.3: Katka a Michal plánují jednodenní výlet pro svou třídu. Celková cena jízdného pro všechny žáky musí být 500 zedů nebo méně. Ve třídě je 30 žáků. Zde jsou ceny jízdného do jednotlivých měst:

Žákovské jízdné do Zálesí nebo Brodu — Zpáteční jízdenka: 25 zedů; Sleva 1/3 jízdného pro skupiny s 25 a více žáky

Žákovské jízdné do Zajícova nebo Medvědína — Zpáteční jízdenka: 20 zedů; Sleva 10 % pro skupiny s 15 a více žáky

Která města si mohou dovolit navštívit? Napište postup výpočtu.

30 žáků

Celková cena ...... 500 zedů

ZB | ZM

zp. 25 z | zp: 20 z.

sleva $\frac{1}{3}$ pro 25+ | sleva 10% pro 15+

$30 \cdot 25 = 750$ / $\frac{1}{3}$ = 500 [redacted] | $30 \cdot 20 = 600$ / 10% = 540 [redacted]

Žáci si mohou dovolit navštívit Zálesí nebo Brod.

Obr. B.7

Tabulka 35a *Statické atomy*

1. **30 žáků**	7. **zp: 20z.**
2. **celková cena …… 500 zedů**	8. **10 % pro 15+**
3. **ZB:**	9. **30** **· 25** ----------- **750 / ($\frac{1}{3}$)**
4. **zp. 25z**	10. **30** **·20** --------- **600 / 10 %**
5. **sleva $\frac{1}{3}$ pro 25+**	11. **750/ ($\frac{1}{3}$) = 375**
	12. **((11))**
	13. **750 / ($\frac{1}{3}$) = 500**
6. **ZM:**	14. **600/ 10 % = 510**
	15. **((14))**
	16. **600/ 10 % = 540**
	17. **Žáci si mohou dovolit navštívit Zálesí nebo Brod**

Tabulka 35b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***Nejprve všechny podstatné údaje zaznamenám do stručného zápisu***
S2: ***Spočítám celkovou cenu pro třídu do obou destinací, tedy násobím cenu počtem žáků***
S3: ***Vypočítám cenu se započtenou slevou***

Tabulka 35c *Dynamické atomy – provedení*

P1: ***30*** ***·25*** --------- ***750***
P2: ***30*** ***·20*** ------------ ***600***
P3: ***750/ ($\frac{1}{3}$) = 375***
P4: ***750/($\frac{1}{3}$) = 500***
P5: ***600/ 10 % = 510***
P6: ***600/ 10 % = 540***

Tabulka 35d *Kontrola*

K1: *Je to skutečně třetina z 750*
K2: *Je to opravdu 10 % z 600*

Tabulka 35e *Výsledek*

V1: *prezentace výsledku*

Myšlenkový proces řešitele:

Z1 Nejprve si stručně zapíši zadané informace. **S1**

píše **/1/, /2/, /3/, /4/, /5/, /6/, /7/, /8/,** k1.

Z2 Teď si vypočítám cenu pro třídu do obou míst bez slevy. **S2**

píše /**9/, /10**/, *P1, P2,* k2.

Z3 Teď potřebuji vědět cenu se slevou. **S3**

Z31 Jenomže, kolik je třetina ze 750.

píše **/11/, /14**/, *P3, P5, K1,* píše **/12/,** *K2***, /15**/, k31

Z32 Jo, tak poté co mi zadavatel poradil, tak musím výpočet provést znovu.

píše /**13/, /16**/, *P4, P6, V1,* píše **/17**/, k32, k3.

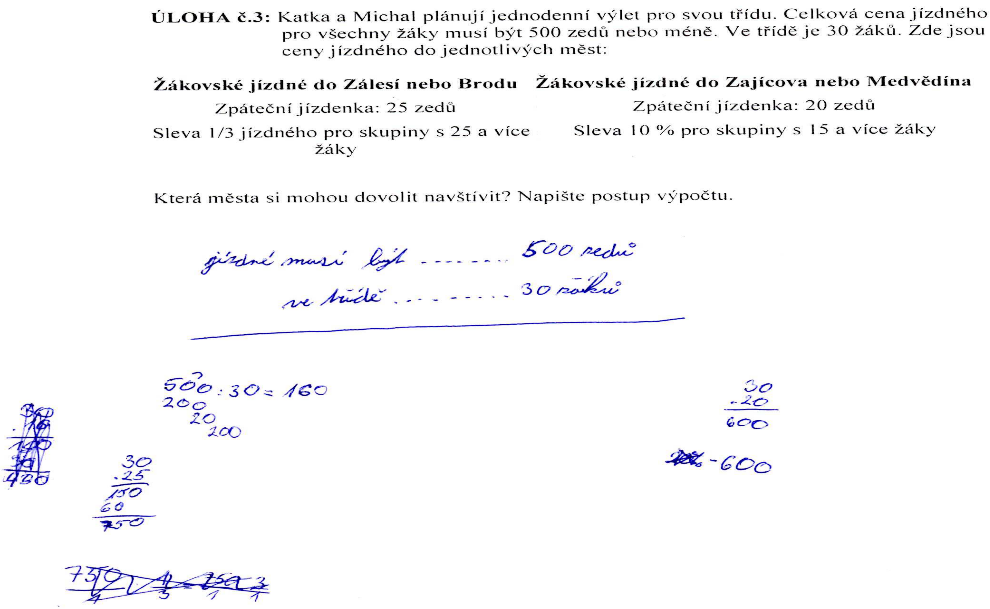
Řešitel provedl správný zápis, spočetl celkové ceny, ale pak nevěděl, z čeho má počítat slevu, a současně neuměl zadavateli odpovědět na dotaz: „Kolik je deset procent z 600?" Zadavatel musel použít analogické problémy na menších číslech, aby řešitel pochopil, jak na to.

- Pozitiva: řešitel uchopil úlohu s porozuměním

  vytváří i správný plán řešení

- Negativa: řešitel nemá správně uchopeny procenta a zlomky

Úloha č. 3, řešitel: Marek



ÚLOHA č.3: Katka a Michal plánují jednodenní výlet pro svou třídu. Celková cena jízdného pro všechny žáky musí být 500 zedů nebo méně. Ve třídě je 30 žáků. Zde jsou ceny jízdného do jednotlivých měst:

Žákovské jízdné do Zálesí nebo Brodu	Žákovské jízdné do Zajícova nebo Medvědína
Zpáteční jízdenka: 25 zedů	Zpáteční jízdenka: 20 zedů
Sleva 1/3 jízdného pro skupiny s 25 a více žáky	Sleva 10 % pro skupiny s 15 a více žáky

Která města si mohou dovolit navštívit? Napište postup výpočtu.

Obr. B.8

Tabulka 36a *Statické atomy*

<table>
<tr><td>1. jízdné musí být …… 500 zedů</td><td>7. 30
·20

600</td></tr>
<tr><td>2. ve třídě ………………30 žáků</td><td>8. 750 : ($\frac{1}{3}$)</td></tr>
<tr><td>3. 500 : 30 = 16,0
200
20
200</td><td>9. = 750 · 3</td></tr>
<tr><td>4. 30
·16

180
30

480</td><td rowspan="2">10. 20 % · 600</td></tr>
<tr><td>5. ((4))</td></tr>
<tr><td>6. 30
·25

150
60

750</td><td>11. ((9, 10))</td></tr>
</table>

Tabulka 36b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***Nejprve si stručně zapíši zadané informace***
S2: ***Zjistím limit ceny pro jednoho žáka, dělím tedy limit celkové ceny počtem žáků třídy***
S3: ***Vypočtu celkovou cenu bez slevy do jednotlivých míst, násobím tedy žáky krát cena***
S4: ***Teď zjistím slevu z celkové částky a výslednou cenu se započtenou slevou***

Tabulka 36c *Dynamické atomy – provedení*

P1: ***500 : 30 = 16 ,0***	P4: ***30***

200 ***20*** ***200***	***· 20*** --------- ***600***
P2: ***30*** ***·16*** --------- ***180*** ***30*** ----------- ***480***	P5: $\boldsymbol{750 : (\frac{1}{3}) = 750 \cdot 3}$
P3: ***30*** ***·25*** --------- ***150*** ***60*** ---------- ***750***	P6: ***20 % · 600***

Tabulka 36d *Kontrola*

K1: *Ověřím, že ten výpočet je správný.*

Tabulka 36e *Výsledek*

V1:

Myšlenkový proces řešitele:

Z1 Nejprve si zapíši zásadní informace ve stručné formě. **S1**

píše **/1/, /2**/, k1.

Z2 Potřebuji znát limit ceny pro 1 žáka. **S2**

píše **/3/,** *P1*, k2.

Z3 Ověřím si, že limit násobený počtem žáků dává limit 500 zedů. *K1*

píše **/4**/, *P2*, píše **/5**/, k3.

Z4 Když je to špatně, tak si spočítám celkové ceny bez slevy. **S3**

píše **/6/, /7**/, *P3, P4*, k4.

Z5 Teď potřebuji slevu z celkových cen. **S4**

Z51 Co se týká Zálesí: píše **/8/, /9**/, *P5*, k51

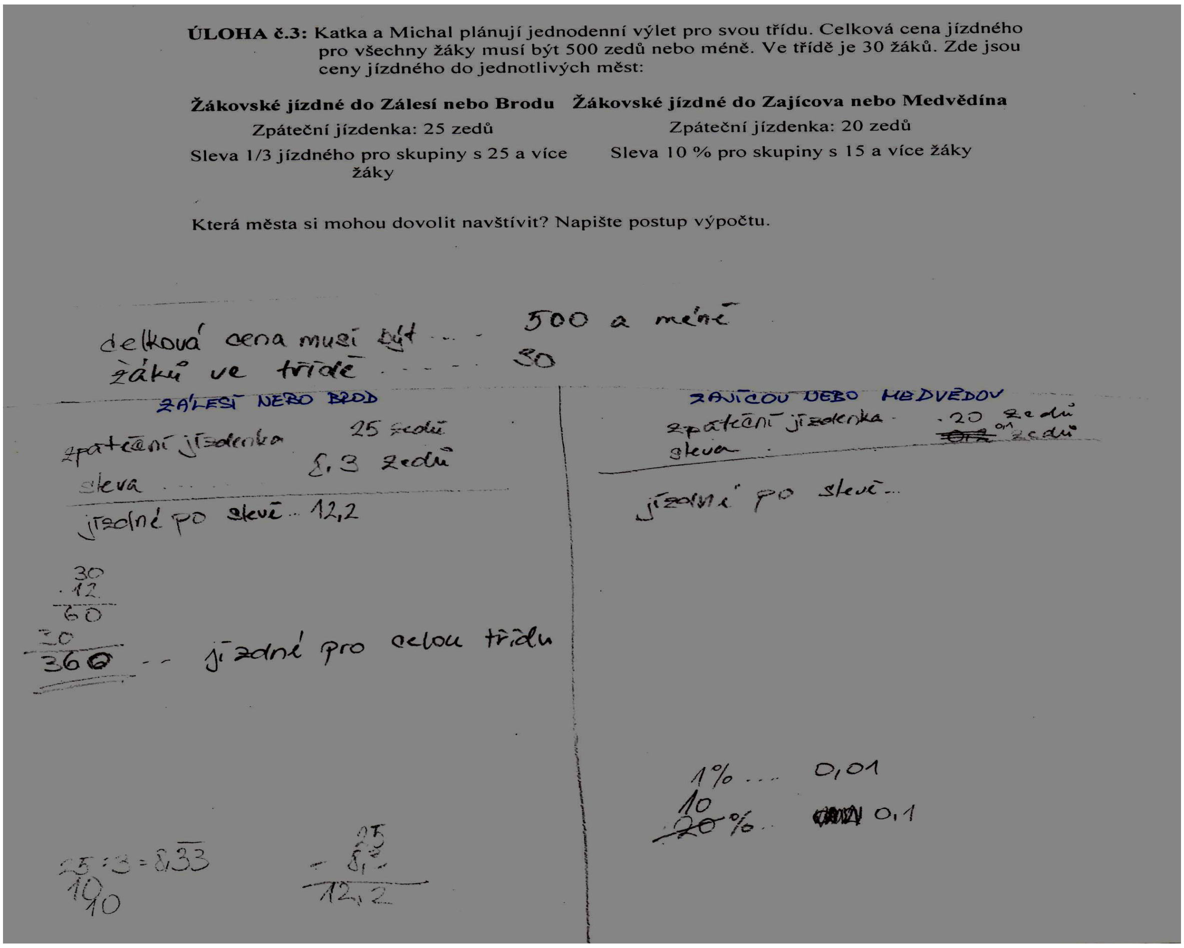
Z52 Co se týká Zajícova: píše **/10**/, *P6*, k52, k5.

Nyní zvoní a experimentátor sděluje řešiteli, že sleva je v případě Zajícova stále 10 %, ač je žáků dvakrát 15, píše **/11/**.

- Pozitiva: řešitel zkouší dvě spravné strategie

  provádí kontrolu, zda vše je v souladu se zadáním
- Negativa: řešitel nesprávně dělí, špatně pracuje se zlomky

Úloha č.3, řešitel: Tereza


ÚLOHA č.3: Katka a Michal plánují jednodenní výlet pro svou třídu. Celková cena jízdného pro všechny žáky musí být 500 zedů nebo méně. Ve třídě je 30 žáků. Zde jsou ceny jízdného do jednotlivých měst:

Žákovské jízdné do Zálesí nebo Brodu	Žákovské jízdné do Zajícova nebo Medvědína
Zpáteční jízdenka: 25 zedů	Zpáteční jízdenka: 20 zedů
Sleva 1/3 jízdného pro skupiny s 25 a více žáky	Sleva 10 % pro skupiny s 15 a více žáky

Která města si mohou dovolit navštívit? Napište postup výpočtu.

delková cena musí být ... 500 a méně
žáků ve třídě 30

ZÁLESÍ NEBO BROD
zpáteční jízdenka 25 zedů
sleva ... 8,3 zedů
jízdné po slevě .. 12,2

30 · 12 = 360 .. jízdné pro celou třídu

25 : 3 = 8,33
10
10

25 − 8,3 = 12,2

ZAJÍCOV NEBO MEDVĚDOV
zpáteční jízdenka . 20 zedů
sleva : ~~0,2~~ zedů
jízdné po slevě...

1 % ... 0,01
10 ~~20~~ % . 0,1

Obr. B.9

Tabulka 37a *Statické atomy*

1. **celková cena musí být …. 500 a méně**	10. **Zajícov nebo Medvědov**
2. **žáků ve třídě ……………...30**	11. **zpáteční jízdenka …..20 zedů**
3. **Zálesí nebo Brod**	12. **1 % …..0,01**
4. **zpáteční jízdenka ….25 zedů**	13. **20 % ….0,2**
5. **25 : 3 = 8,33** **10** **10**	14. **sleva …. 0,2 zedů**

6. **sleva …….. 8,3 zedů**	15. **((12, 13))**
7. **25** **-8,3** --------- **12,2**	
8. **jízdné po slevě ….12,2**	
9. **30** **· 12** --------- **60** **30** --------- **360 …jízdné pro celou třídu**	16. **10 % ….0,1**
	17. **sleva ………0,1 zedů**
	18. **jízdné po slevě …**

Tabulka 37b *Dynamické atomy – volba strategie*

S1: ***Zapíši si nejprve zásadní údaje společné pro obě destinace***
S2: ***Znám cenu do Zálesí, tak spočítám slevu pro jednoho***
S3: ***Slevenou část odečtu od ceny pro jednotlivce***
S4: ***Získanou cenu se slevou vynásobím počtem žáků třídy***
S5: ***Spočítám slevu do Zajícova***

Tabulka 37c *Dynamické atomy – provedení*

P1: ***25 : 3 = 8,33*** ***10*** ***10***	P4: ***1 % …..0,01***
P2: ***25*** ***-8,3*** ---------- ***12,2***	P5: ***20 % …. 0,2***
P3: ***30*** ***·12*** ----------- ***60*** ***30*** ------------ ***360***	P6: ***10 % …. 0,1***

Tabulka 37d *Kontrola*

K1: *Sleva je ale jen 10 %*

Tabulka 37e *Výsledek*

Myšlenkový proces řešitele:

Z1 Nejprve zapíšu společné údaje pro celou úlohu. **S1**

píše **/1/, /2**/, k1

Z2 Teď si napíšu základní informace k cestě do Zálesí.

píše **/3/, /4**/, k2.

Z3 Nyní si spočítám slevu pro jednoho. **S2**

píše /**5/, /6**/, *P1*, k3.

Z4 Slevu musím odečíst od plné ceny jízdenky. **S3**

píše **/7**/, *P2*, píše **/8**/, k4.

Z5 Slevenou částku vynásobím počtem všech žáků. **S4**

píše **/9**/, *P3*, k5.

Z6 Nyní provedu zápis pro Zajícov.

píše **/10/, /11**/, k6.

Z7 Spočítám slevu do Zajícova. **S5**

píše **/12/, /13**/, *P4, P5*, píše ***/14***/, k7.

Z8 Vždyť mám slevu jen 10 %. *K1* Musím to vzít znovu. **S5**

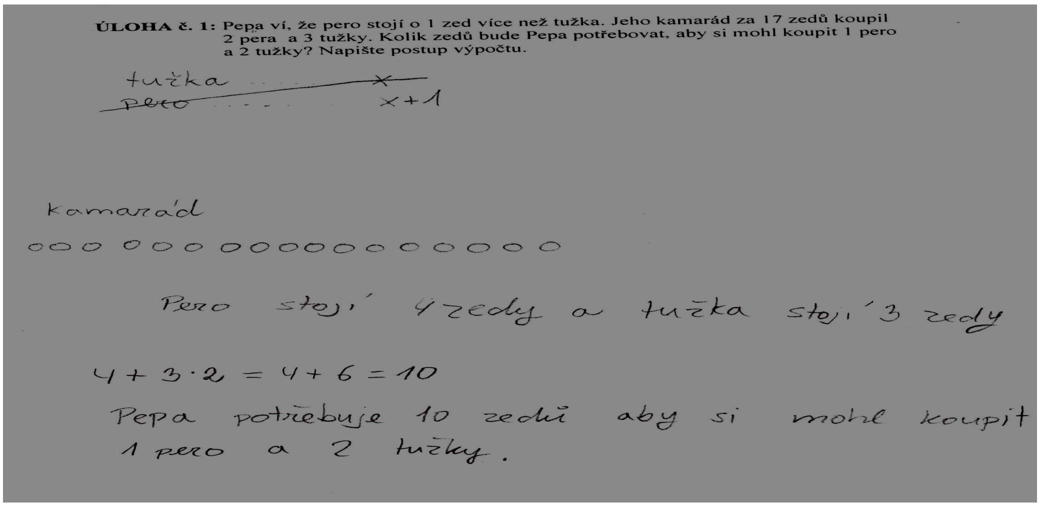
píše **/16/, /17**/, *P6*, píše **/18**/, …zvoní

- Pozitiva: řešitelka uchopila úlohu správně
  zvolila správnou strategii počítání slevy
- Negativa: řešitelka chybuje při odčítání pod sebou
  provádí zaokrouhlování mezivýsledku
  zřejmě neudrží pozornost při řešení úlohy, která obsahuje podúlohy
  (při výpočtu slevy pro 2. destinaci zapomíná, z jakého základu slevu počítá)
  nedostatek reálné zkušenosti, viz počítání slevy pro druhou destinaci, kdy
  řešitelka při počtu 30 žáků předpokládá nárok na dvojnásobnou slevu, tj. 20 %

PŘÍLOHA C Analýza chybných písemných řešení v rámci hlavního šetření

Řešitelka Radka

Úloha č. 1:


ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

tužka ... x
pero ... x+1

kamarád

Pero stojí 4 zedy a tužka stojí 3 zedy

$4 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$

Pepa potřebuje 10 zedů aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky.

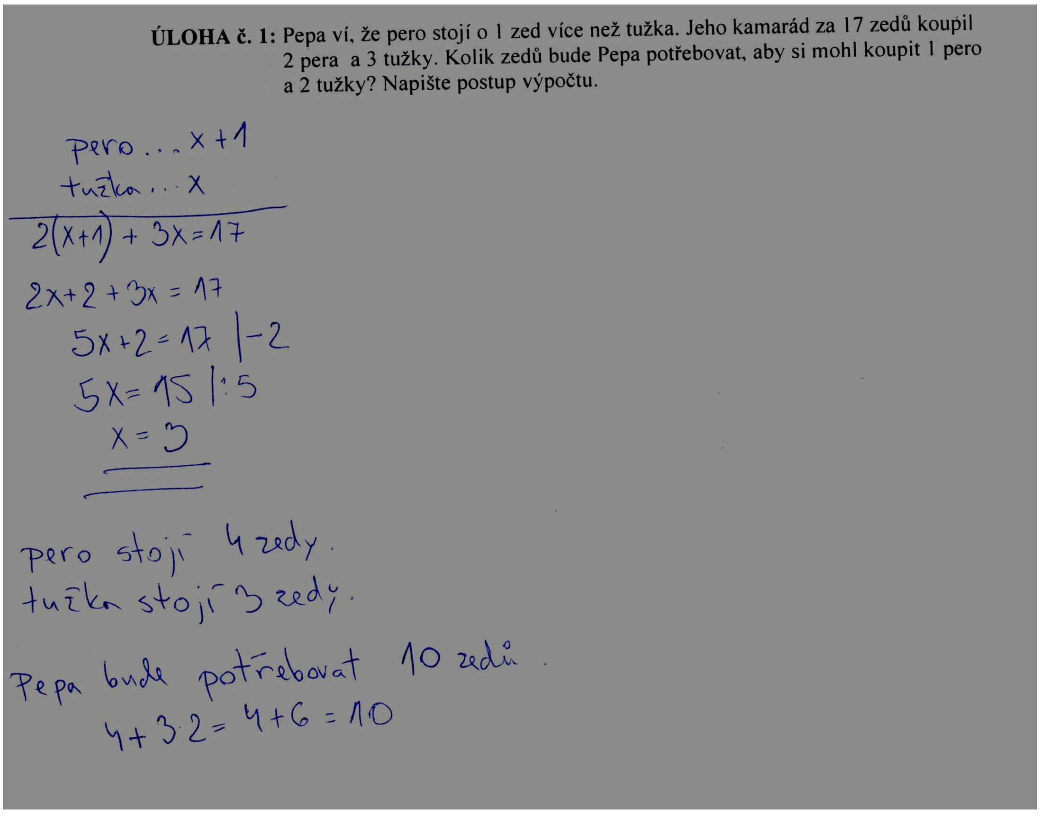
Obr. C.1

- **Identifikace problému:** Radka uchopila úlohu s porozuměním, zapsala zásadní informace o relaci cen pera a tužky. Chybí tu ovšem zápis o ceně 2 per a 3 tužek a hlavně i zmínka o hlavní otázce, kterou úloha pokládá, nicméně Radka první chybějící podmínku měla na paměti, neboť na dotaz experimentátora, jak dospěla k ceně pera a tužky, odpověděla, že si zkusila vytvořit dvě hodnoty a ty musely dát 17 zedů. Jediné, co v Radčině slovní legendě opravdu chybí, je zápis hlavní otázky této úlohy. K této chybě z nepozornosti došlo tak, že Radka byla natolik zaujata problematikou ceny pera a tužky, že zapomněla pročíst zbytek zadání (tak lze usoudit z pozdější reakce uvedené níže).
- **Vytvoření plánu řešení:** Radka si za strategii vedoucí k výpočtu ceny, kterou zaplatí Pepa, zvolila systematické ověřování, rovnicový zápis neuvedla. Ovšem obě rovnice měla uložené v hlavě.
- **Realizace plánu řešení:** Radka si v hlavě (tak to formulovala experimentátorovi) zvolila hodnotu ceny tužky (cenu pera pak získala přičtením jednoho zedu) a graficky pomocí malých koleček ověřovala, že tyto hodnoty splňují rovnici zašifrovanou v zadání, totiž že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Z tohoto je patrné, že Radka má v paměti uloženy zásadní data a že ví, jak ověřit správnost svých z paměti vygenerovaných hodnot. Nutno dodat, že v momentě, kdy spočítala cenu 1 pera a 1 tužky, tak se hlásila a řekla, že má úlohu hotovou. Experimentátor jí odpověděl, že si to nemyslí a že je třeba ještě přečíst si celé zadání, kde se skrývá hlavní otázka uvedená v této úloze. Radka si prošla zadání znovu a řekla, že myslela, že jde pouze o cenu pera a tužky, a tak konec zadání původně nepřečetla. U Radky se v tento okamžik projevila **chyba předčasně ukončeného řešení úlohy (ch21)**. Matematizace byla u Radky pouze pamětní, nebyla uvedena v písemné formě, nicméně Radka si byla dobře vědoma, jak má postupovat.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Radka vzhledem ke zvolené strategii věděla, že získané hodnoty je třeba ověřit pomocí rovnice, ve které 2 pera a 3 tužky mají stát 17 zedů. Konečný výsledek interpretuje ve formě slovní odpovědi.

Řešitelka Rebeka:

Úloha č. 1:



ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

pero … $x+1$
tužka … x

$2(x+1) + 3x = 17$
$2x+2+3x = 17$
$5x+2 = 17 \quad |-2$
$5x = 15 \quad |:5$
$x = 3$

pero stojí 4 zedy.
tužka stojí 3 zedy.

Pepa bude potřebovat 10 zedů.
$4+3\cdot 2 = 4+6 = 10$

Obr. C.2

- **Identifikace problému:** Rebeka zapsala slovní legendu, ve které chybí zmínka o problému, který je třeba vyřešit. Při pohledu na výpočty, které provedla v rámci této úlohy, však není pochyb, že úlohu Rebeka uchopila s porozuměním. Chybějící údaj v zápise slovní legendy nechyběl u Rebeky náhodou. Rebeka si s ohledem na pozdější počínání nepozorně přečetla zadání úlohy.

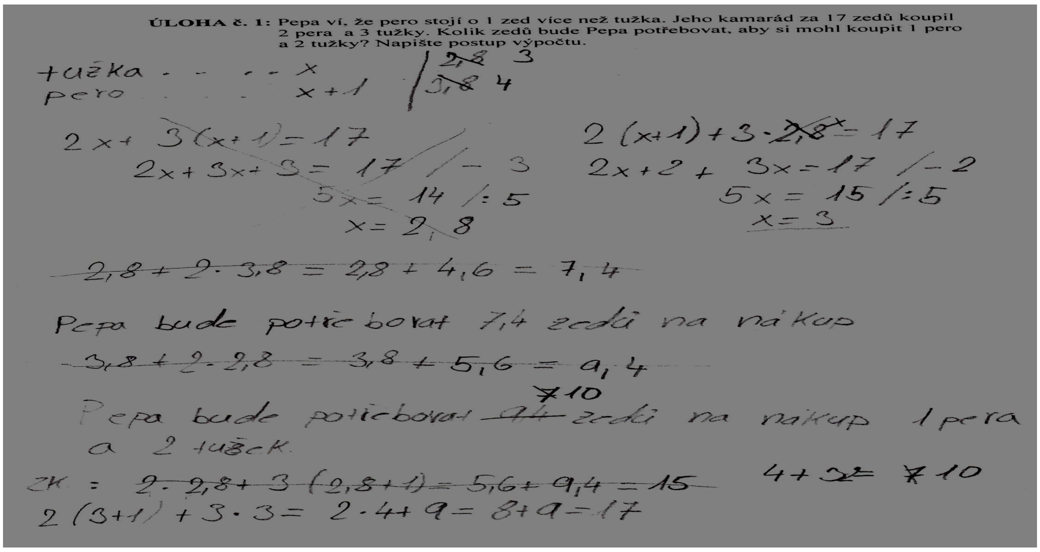
- **Vytvoření plánu řešení:** Rebeka zvolila algoritmickou strategii založenou na počítání s rovnicemi.

- **Realizace plánu řešení:** Rebeka korektně sestavila rovnici, která je skrytá v zadání úlohy. V rámci této rovnice správně roznásobila dvojčlen a použila ekvivalentní úpravy k jejímu vyřešení. Posléze zapsala cenu pera a tužky a hlásila se. Experimentátor po zhlédnutí jejího postupu prohlásil, že úloha se ale neptá na cenu pera a tužky, ale že jde o cenu, kterou zaplatí Pepa za pero a 2 tužky. Rebeka se zarazila, podívala se do zadání a souhlasně zakývala hlavou. Následně napsala ihned odpověď (výpočet provedla v hlavě). Experimentátor se zeptal, jak ví, že odpověď je zrovna taková. Rebeka v reakci na to zapsala příslušnou rovnici s již doplněnými údaji o ceně pera a tužky. Je tedy patrné, že Rebeka nemá s matematickým uvažováním problém, úlohu i dobře matematizovala, opět se tu ovšem vyskytla **chyba z předčasného ukončení řešení úlohy z důvodu nepozornosti (ch21).**

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Rebeka nejprve vinou chyby z nepozornosti při čtení zadání a s ní související neúplnou slovní legendou udávala za výsledek cenu pera a tužky, po upozornění experimentátora uvedla správnou slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Nikola

Úloha č. 1:



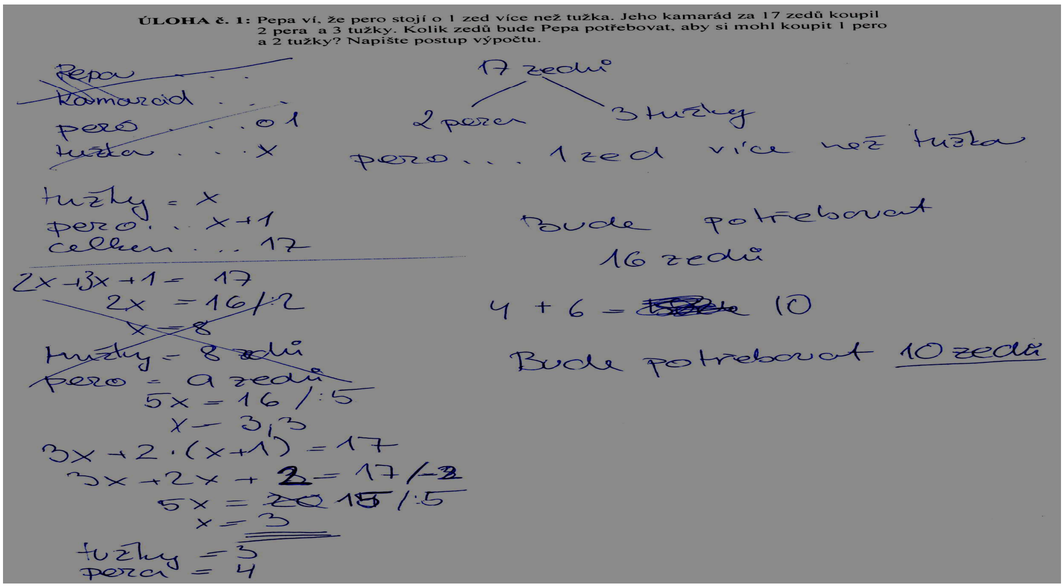
Obr. C.3

- **Identifikace problému:** Nikola uchopila úlohu s porozuměním, zapsala si slovní legendu, kterou sestavila správně s pomocí symbolů. Jen by pro větší přehlednost mohla do této legendy vepsat dvě rovnice, které jsou uvedeny v zadání. Ve fázi výpočtu o těchto rovnicích věděla.
- **Vytvoření plánu řešení:** Nikola volí algoritmickou strategii s využitím rovnic.
- **Realizace plánu řešení:** Nikola při sestavení rovnice přehodila údaje ze správně napsané slovní legendy, tedy začala své výpočty **chybou v matematizaci z nepozornosti (ch51).** Chybně sestavenou rovnici poté upravila pomocí správných úprav a operací. Získaný výsledek dosadila do rovnice, kterou nenapsala symbolicky, ale měla jí uloženou v hlavě. Jde o rovnici, která vedla k výpočtu ceny, kterou zaplatí Pepa za pero a 2 tužky. Tuto rovnici však Nikola opět **z nepozornosti (ch51)** sestavila chybně, jako cenu dvou per a jedné tužky. Po formulaci odpovědi si tuto poslední chybu uvědomila a rovnici počítala znovu. Výslednou hodnotu již poté považovala za konečnou a správnou, ačkoli na konci stránky dosadila své chybné hodnoty cen pera a tužky do původní rovnice, která říká, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Hodnotu 17 samozřejmě nezískala, ale to jí zjevně nevadilo. Experimentátor se nad touto sérií chyb z nepozornosti pozastavil. Nikole řekl, že v úvodní rovnici počítá chybně se 2 tužkami a 3 pery, ačkoli v zadání je to jinak. Nikola po chvilce vše přeškrtala. První rovnici zapsala znovu vpravo od té původní a nyní už správně. Následně dospěla ekvivalentními úpravami ke správnému výsledku a vyšla jí i kontrola správnosti.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Nikola na ověřování správnosti získaných hodnot nezapomněla, ale vinou chyb v předešlých výpočtech jí původně toto ověření nevyšlo. Přesto ovšem byla schopna uvést takové řešení za správné a zformulovat s tímto chybným výpočtem slovní odpověď na příslušnou otázku. U Nikoly je tedy problém v nesoustředěnosti a nepozornosti v průběhu celé fáze řešení problému. Po

zásahu experimentátora Nikola dospěla ke správné ceně, kterou Pepa zaplatí za pero a 2 tužky. Experimentátora pouze zarazilo, že tuto hodnotu Nikola uvedla ve slovní úloze bez předchozího výpočtu. Zeptal se tedy, jak k takové hodnotě Nikola dospěla. Ona bez váhání pod slovní odpověď zapsala správně: $4 + 3 \cdot 2 = 10$. Z toho je patrno, že druhou rovnici má Nikola správně uloženou v hlavě.

Řešitelka Anna

Úloha č. 1:



Obr. C.4

- **Identifikace problému:** Anna nejprve zapsala slovní legendu, se kterou byla sama nespokojená a tvářila se dost utrápeně. Experimentátor si toho povšiml, a tak jí poradil, že je třeba symbolicky zapsat údaje ze zadání. Anna váhala, a tak experimentátor řekl, aby si Anna cenu tužky označila jako *x*. Hned nato se zeptal, jak označit cenu pera. Anna napsala správně $x + 1$. Pak experimentátor řekl, že je třeba ještě zapsat cenu za tři tužky a dvě pera. To Anna učinila, i když trochu nešťastným způsobem, a sice slovem „celkem“, které jí při matematizaci nic moc neřekne. Po těchto zjevných problémech **s uchopením úlohy (ch11)** pokračovala Anna dále.

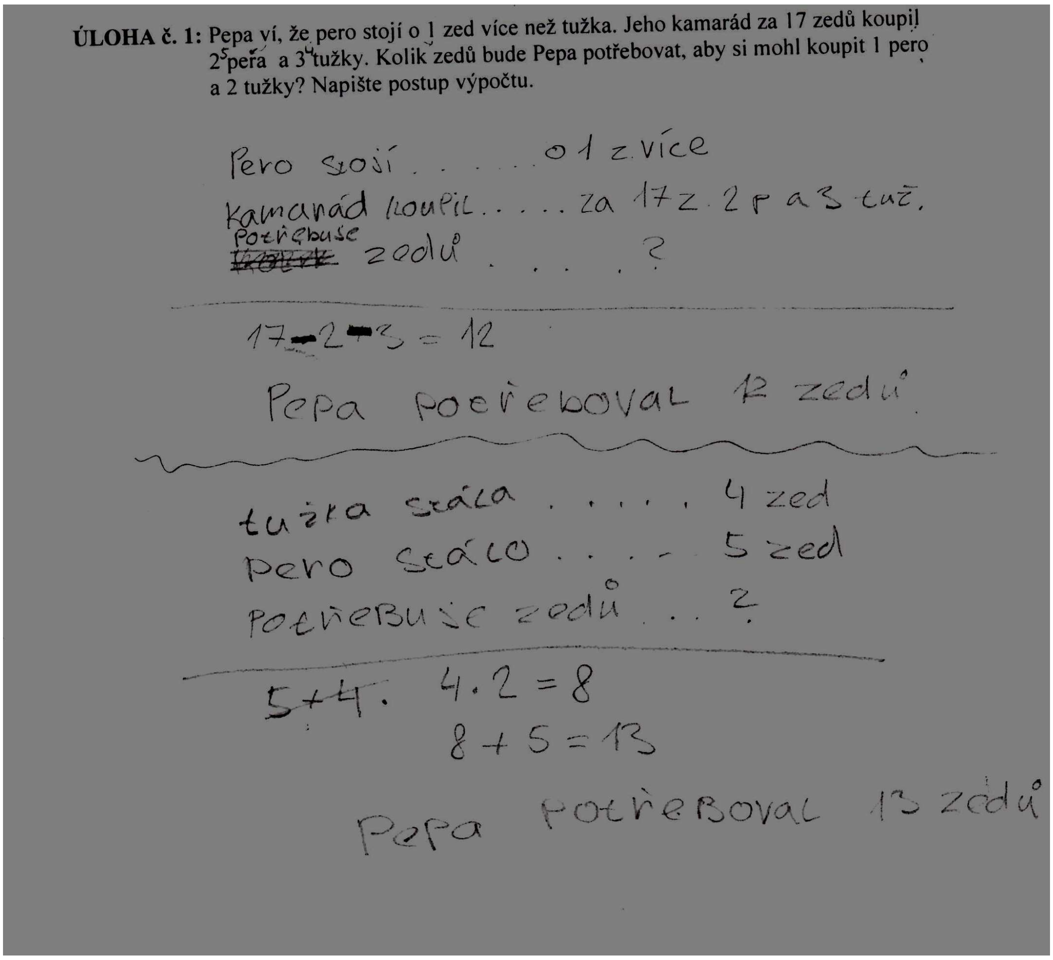
- **Vytvoření plánu řešení:** Anna po předchozích nápovědách tušila, že možnou strategií výpočtu je počítání s rovnicemi. Anna se totiž zeptala experimentátora, zda musí postupovat pomocí rovnic. Experimentátor při pohledu na její ustrašenou tvář prohlásil, že to není zcela nutné, proto se Anna pustila do jakéhosi druhého zápisu, který uvedla v pravé polovině listu. Zde se objevil zápis pravdivé skutečnosti o ceně 2 per a 3 tužek, ale další matematizace se tu neobjevila. Anna po určité době váhání tuto cestu opustila a šla cestou rovnicového zápisu. Tušila a utvrzovala se, že cestou k řešení je právě rovnicový zápis úlohy.

- **Realizace plánu řešení:** Anna tedy nakonec počítala úlohu pomocí rovnice. Tuto rovnici ovšem sestavila nejprve nesprávně. Anna **chybně roznásobila dvojčlen z důvodů neuchopení symbolické slovní legendy, jinými slovy chybně matematizovala (ch53)** $2 \cdot (x + 1)$ píše jako $2x + 1$) a navíc se dopustila **chybných úprav rovnice (ch31).** Experimentátor tedy opět zasáhl a vedl Annu krok za krokem. Nejprve jí zdůraznil, že 2 pera a 3 tužky dávájí 17 zedů. Následně ukázal na slovní legendu a řekl, že za 2 pera musíme dát dvakrát výraz $x + 1$ a za tužku třikrát *x*. Anna tedy nesměle zapsala danou rovnici. Tato rovnice už byla správně. S pomocí ekvivalentních úprav dospěla Anna k správnému výsledku.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Po všech předchozích strastech uvedla Anna slovní odpověď na úlohou položenou otázku.

Řešitelka Kristýna

Úloha č. 1:



ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

Pero stojí . . . . . o 1 z. více
Kamarád koupil . . . . za 17 z. 2 p a 3 tuž.
Potřebuje zedů . . . . ?

17 - 2 - 3 = 12
Pepa potřeboval 12 zedů

tužka stála . . . . . 4 zed
pero stálo . . . . 5 zed
potřebuje zedů . . ?

5 + 4 . 4 . 2 = 8
8 + 5 = 13
Pepa potřeboval 13 zedů

Obr. C.5

- **Identifikace problému:** Kristýna uchopila úlohu s částečným porozuměním. Vytvořila si slovní legendu, ve které uvedla skutečnost, že pero je o jeden zed dražší…,ale už neuvedla, než co je dražší pero.

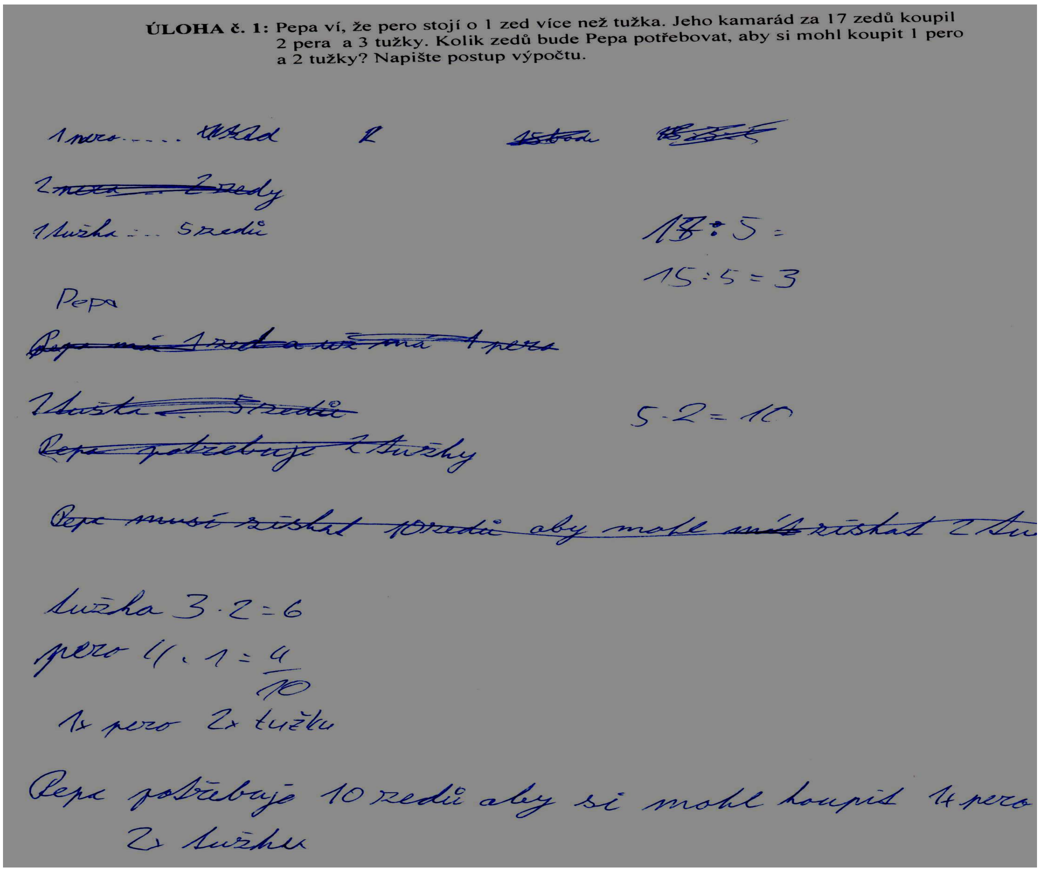
- **Vytvoření plánu řešení:** Experimentátor si Kristýny dlouho nevšímal, a tak nezaregistroval, že si žádný rozumný plán řešení nevytvořila.

- **Realizace plánu řešení:** Kristýna zapisuje v úvodu rovnost, která nijak nesouvisí se zadáním. Když si toho všiml experimentátor a zeptal se, proč toto Kristýna počítá, tak Kristýna prohlásila, že netuší, jak to spočítat a že jen něco zkouší. Experimentátor jí tedy řekl, aby si uvědomila, že je třeba, aby cena pera byla o 1 zed vyšší než cena tužky. Poté si Kristýna tipla ceny pera a tužky a dobře je doplnila do rovnice, která je zašifrovaná v otázce, kolik bude Pepa potřebovat zedů ke koupi 2 tužek a 1 pera. Ovšem Kristýnin výsledek 13 zedů je získaný na podkladě neověřených hodnot. U Kristýny se objevil problém s **neuchopením úlohy (ch11).**

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Kristýna neověřovala nic a zapsala slovní odpověď reagující na otázku, kterou zadává úloha. Tato odpověď ale obsahuje chybný údaj.

Řešitel Jakub

Úloha č. 1:


ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

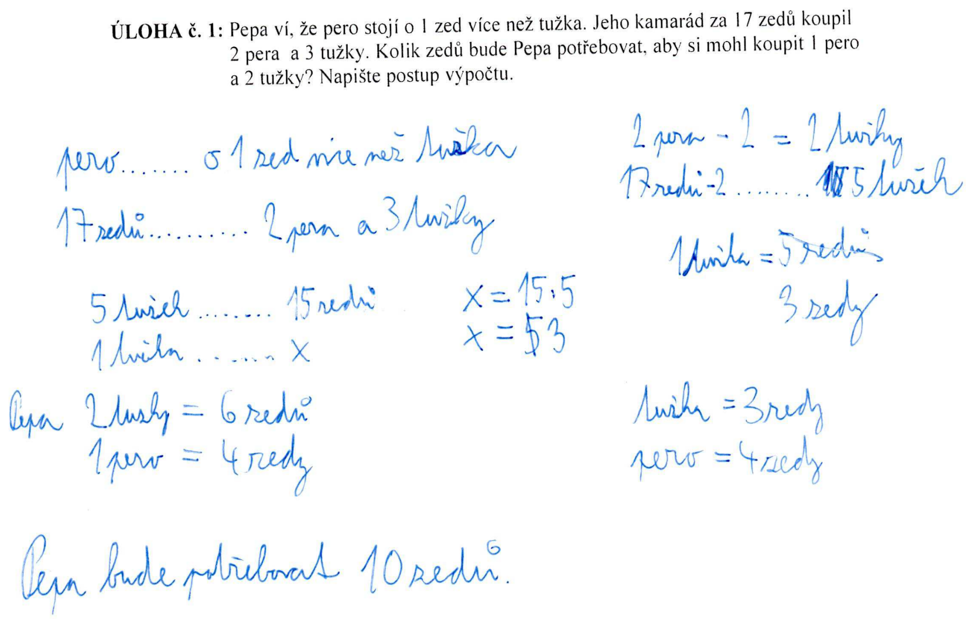
Obr. C.6

- **Identifikace problému:** Jakub se dopustil chyby hned v průběhu pročítání zadání. Experimentátor si u něho všiml nesprávně sestavené slovní legendy, kde bylo uvedeno, že cena pera je 1 zed, dvou per 2 zedy a tužky 5 zedů. Na otázku, jak na to Jakub přišel, žák odpověděl, že v zadání je uvedeno, že cena pera je 1 zed a když za 2 pera a 3 tužky bylo zaplaceno 17 zedů, tak pokud od 17 odečtu cenu dvou per, dostanu cenu 3 tužek, která je 15 zedů. Z toho pak tedy Jakub dospěl k přesvědčení, že tužka stojí 5 zedů. Tato posloupnost myšlenek zní logicky, ovšem tyto kroky činil Jakub se špatnou hodnotou ceny pera. Tuto chybu lze označit jako **chybu z nepozornosti (ch26).** Experimentátor ve snaze tento omyl Jakubovi ukázat přečetl první větu zadání a zdůraznil, že cena pera není 1 zed, ale že je o 1 zed vyšší než cena tužky. Jakub se na chvíli zarazil, aby následně vše, co do té doby sepsal škrtl a začal počítat s novými údaji. Na podkladě jeho postupu, který zvolil po opravě lze soudit, že uchopil úlohu s porozuměním.
- **Vytvoření plánu řešení:** Jakubova strategie je svým způsobem ojedinělá, ale správná. Poté, co jej experimentátor upozornil na výše zmíněnou chybu, Jakub postupoval tak, že si od ceny 17 zedů odečetl tu cenu, o kterou jsou 2 pera dražší než 2 tužky a získanou hodnotu dělil 5, neboť v tu chvíli měl před sebou opravdu cenu odpovídající ceně 5 tužek. Jakub při řešení nevyužil rovnic.

- **Realizace plánu řešení:** Jakub tedy nejprve od 17 zedů odečetl 2, neboť věděl, že jedno pero je o 1 zed dražší než tužka a když 2 pera a 3 tužky mají hodnotu 17 zedů, 2 pera do této ceny přispívají částkou o 2 zedy vyšší než dvě tužky. Výše zmíněným odečtem dostal Jakub částku 15 zedů, která odpovídá ceně 5 tužek. Následuje tedy správně zvolené dělení pěti a Jakub získal cenu tužky a následně i pera. Pak už Jakub dosadil do druhé rovnice, ze které získal hodnotu, kterou dal Pepa za pero a dvě tužky.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Jakub na konci úlohy uvedl standardní slovní odpověď na zadanou otázku. Nutno dodat, že před korekcí provedenou experimentátorem neověřoval, zda to, co získal souhlasí se zadáním a v původní odpovědi, kterou poté přeškrtl, je vidět, že si zadání opravdu nepozorně přečetl. V této fázi jeho řešení je tedy možné odhalit **nedostatek v ověřování matematické i sémantické kontroly (chnz).**

Řešitel Jan 3

Úloha č. 1:


ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

pero...... o 1 zed více než tužka
17 zedů......... 2 pera a 3 tužky
5 tužek .... 15 zedů
1 tužka x
x = 15 : 5
x = 3
Pepa 2 tužky = 6 zedů
1 pero = 4 zedy
2 pera - 2 = 2 tužky
17 zedů - 2 .... 5 tužek
1 tužka = 3 zedy
tužka = 3 zedy
pero = 4 zedy
Pepa bude potřebovat 10 zedů.

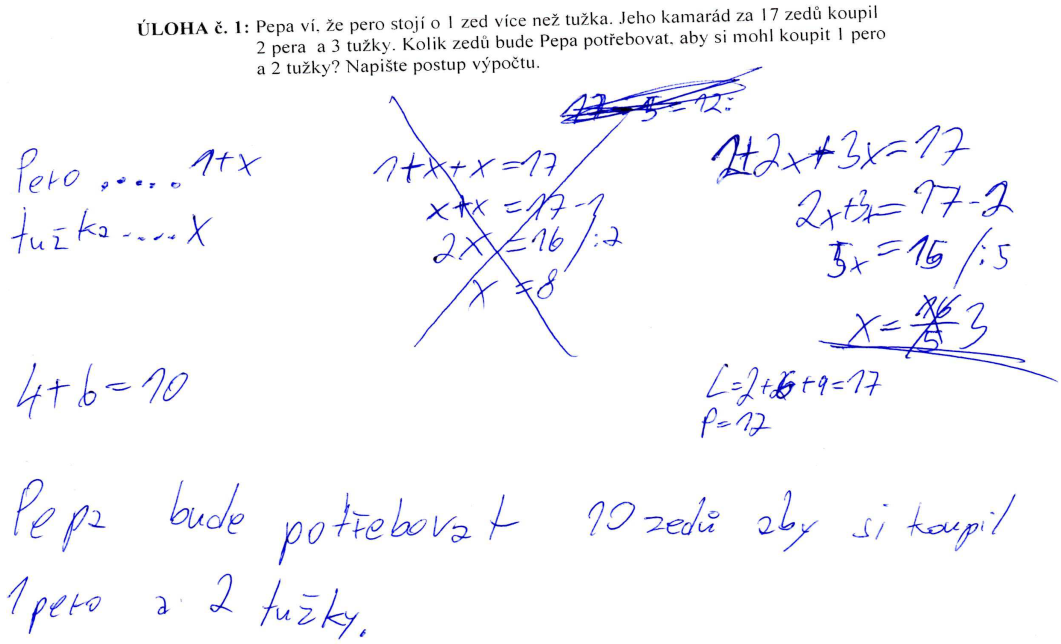
Obr. C.7

- **Identifikace problému:** Jan uchopil úlohu s porozuměním. Zapsal si slovní legendu, která obsahuje téměř vše, chybí v ní jen uvedení hlavní otázky, kterou úloha pokládá.
- **Vytvoření plánu řešení:** Jan použil aritmetickou strategii bez využití rovnic. Jeho strategie vyšla ze skutečnosti, že cena pera je o 1 zed vyšší než cena tužky a tuto disproporci Jan odečetl v příslušné míře od ceny 17 zedů, aby tak získal hodnotu ceny 5 tužek a posléze cenu tužky a pera.
- **Realizace plánu řešení:** Jan si zapsal zajímavou rovnost, a sice že 2 pera minus 2 je rovno 2 tužkám, což je pravda. Tuto rovnost použil v rovnici, kde 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Od 17 odečetl 2, aby tak zjistil cenu 5 tužek a následně skrze operaci dělení získal cenu jedné tužky. K výpočtu ceny jedné tužky použil, dle jeho zápisu, přímou úměrnost. Z ceny tužky a pera se pak lehce dostává k ceně, kterou zaplatil Pepa.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Jan uvádí správnou odpověď na zadanou otázku.

Řešitel Tomáš

Úloha č.1:

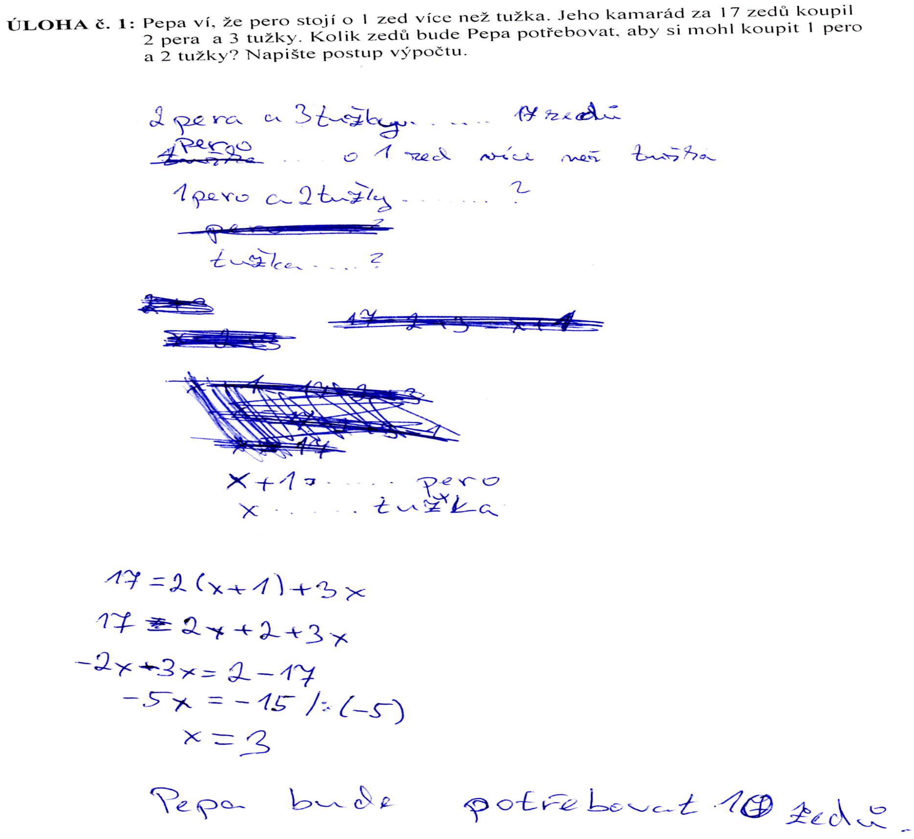


Obr. C.8

- **Identifikace problému:** Tomáš **neuchopil správně tuto úlohu (ch11),** neboť se relativně dlouho neobjevovala v jeho řešení ani čárka. Experimentátor se snažil Tomášovi napovědět tak, aby si vytvořil určitou slovní legendu, která by obsahovala údaje o ceně tužky a pera. Tomáš ale nebyl schopen nic zapsat, a tak experimentátor řekl: „Napište si, že tužka stojí *x*. Kolik teď bude stát pero?“ Tomáš po chvilce váhání odpověděl, že cena pera bude *x + 1*. Experimentátor byl s odpovědí spokojen a ukázal Tomášovi tu část zadání, kde se píše, že 2 pera a 3 tužky stojí 17. Experimentátor zdůraznil, že toto je třeba přepsat do rovnice s pomocí právě sepsané symbolické legendy.
- **Vytvoření plánu řešení:** Tomáš měl tedy nyní k dispozici informaci, že musí postupovat skrze rovnicový zápis, a tak se o něj pokoušel.
- **Realizace plánu řešení:** Tomáš si sepsal rovnici za pomoci symboly označených cen pera a tužky. Rovnice však odpovídala tomu, že by 1 pero a 1 tužka měla stát 17 zedů. Dopustil se tak **chybě v sestavení rovnice (ch52).** Když tuto chybnou rovnici za použití ekvivalentních úprav vyřešil, přišel k němu experimentátor a na chybu ho upozornil. Následně mu musel říci, jak rovnici z informace, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů, sestavit. Jakmile měl Tomáš tuto rovnici před sebou, pak už mu vyřešení celé úlohy nedělalo problémy, s výjimkou **chybného roznásobení dvojčlenu z důvodu neuchopení symbolické slovní legendy, tedy chybné matematizace** (**ch53**) (viz výraz $1 + 2x + 3x = 17$).
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Tomáš ověřil získané hodnoty pomocí zkoušky rovnosti levé a pravé strany a zapsal odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Michaela

Úloha č. 1:



ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

2 pera a 3 tužky ..... 17 zedů

pero ~~tužka~~ ..... o 1 zed více než tužka

1 pero a 2 tužky .... ?

~~pero ... ?~~

tužka .... ?

x + 1 ..... pero

x ..... tužka

$17 = 2(x+1) + 3x$

$17 = 2x + 2 + 3x$

$-2x + 3x = 2 - 17$

$-5x = -15 \quad /:(-5)$

$x = 3$

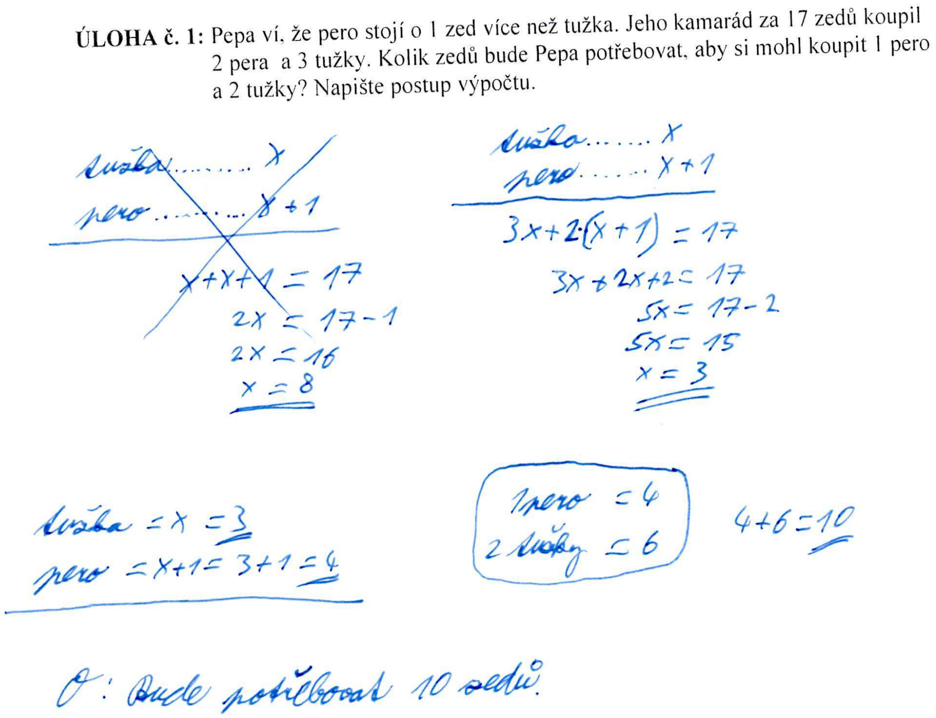
Pepa bude potřebovat 10 zedů.

Obr. C.9

- **Identifikace problému:** Michaela si zapsala slovní legendu, která obsahuje všechny podstatné údaje a úlohu uchopila s porozuměním, neboť experimentátorovi sdělila, že musí vypočítat cenu pera a 2 tužek, jenže neví, jak vytvořit nějakou rovnici.
- **Vytvoření plánu řešení:** Na základě předcházející věty je patrné, že Michaela tuší, že jednou z cest, jak řešit tuto úlohu je strategie počítání s rovnicemi. Michaela však má **problémy s matematizací (ch53)** a dle přeškrtaných výpočtů je možné vyčíst, že sestavit rovnici je pro ní opravdu těžký úkol.
- **Realizace plánu řešení:** Michaela se při snaze o sestavení rovnice trápila tak, že poprosila sama experimentátora o pomoc. Ten jí přímo řekl, aby cenu tužky označila písmenem *x* a pak se zeptal, jak Michaela označí cenu pera. Michaela prohlásila, že pero je o jeden zed dražší, a tak to bude $x + 1$. Experimentátor ,potěšen touto reakcí, ještě Michaele zdůraznil, že pomocí těchto symboly zapsaných cen musí sepsat rovnici popisující fakt, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Michaela to zvládla a rovnici i správně upravovala až ke konečnému výsledku, že cena tužky je 3 zedy. Následně dosadila tuto hodnotu a hodnotu pro cenu pera do rovnice popisující Pepův nákup a došla k výsledku.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Michaela po všech útrapách dospěla k formulaci korektní odpovědi.

Řešitel Daniel

Úloha č. 1:

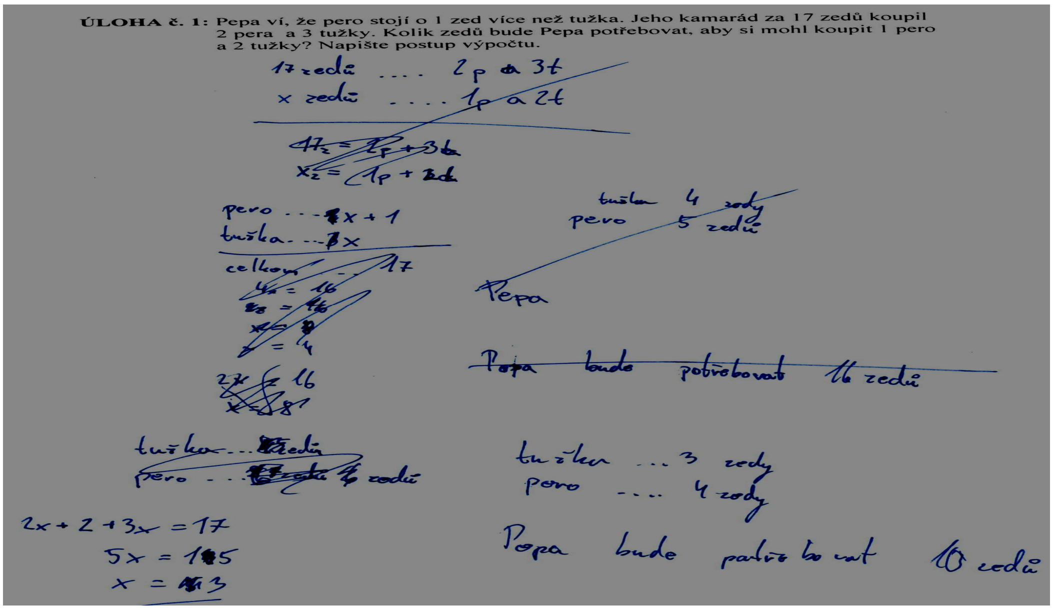


Obr. C.10

- **Identifikace problému:** Daniel uchopil úlohu s porozuměním. Zapsal si symbolickou slovní legendu, ve které správně matematizoval ceny tužky a pera.
- **Vytvoření plánu řešení:** Daniel zvolil strategii výpočtu pomocí rovnic.
- **Realizace plánu řešení:** Daniel sestavil chybně rovnici, která má představovat matematizovanou informaci o tom, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Daniel však v rovnici matematizoval původně pouze 1 tužku a 1 pero a toto dal do rovnosti s 17 zedy. Daniel se v tento moment dopustil **chyby v matematizaci z nepozornosti (ch51)**. Chybně sestavenou rovnici Daniel správně upravil, ale poté se od experimentátora dozvěděl, že musí v rovnici uvést skutečnost, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Po této opravě sestavil Daniel korektní rovnici, ze které získal správnou cenu pera a tužky. Následně tyto získané hodnoty dosadil do rovnice, která vedla k zjištění ceny, kterou Pepa dal za pero a 2 tužky. Tuto rovnici však Daniel explicitně neuvedl, měl ji pouze uloženu v hlavě.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Daniel neprovedl zkoušku, která by ověřila správnost získané ceny pera a tužky (**chnz**), přesto ovšem dospěl ke správným hodnotám a uvedl i slovní odpověď na úlohou zadanou otázku.

Řešitel Petr

Úloha č. 1:



Obr. C.11

- **Identifikace problému:** Petr úlohu uchopil jen s částečným porozuměním. Zapsal si slovní legendu, která neobsahuje zmínku o relaci ceny pera a tužky a současně si do této legendy zapsal příliš neznámých. Petr si totiž neujasnil, zda symboly v zápisu zastupují cenu objektů nebo objekty samotné, resp. Petr si myslel, že symboly *p,t* označují objekt a protože věděl, že má počítat cenu, tak si vytvořil samostatný symbol pro cenu pera a 2 tužek. U Petra nastala **chyba v matematizaci z neuchopení symbolické slovní legendy (ch53).**

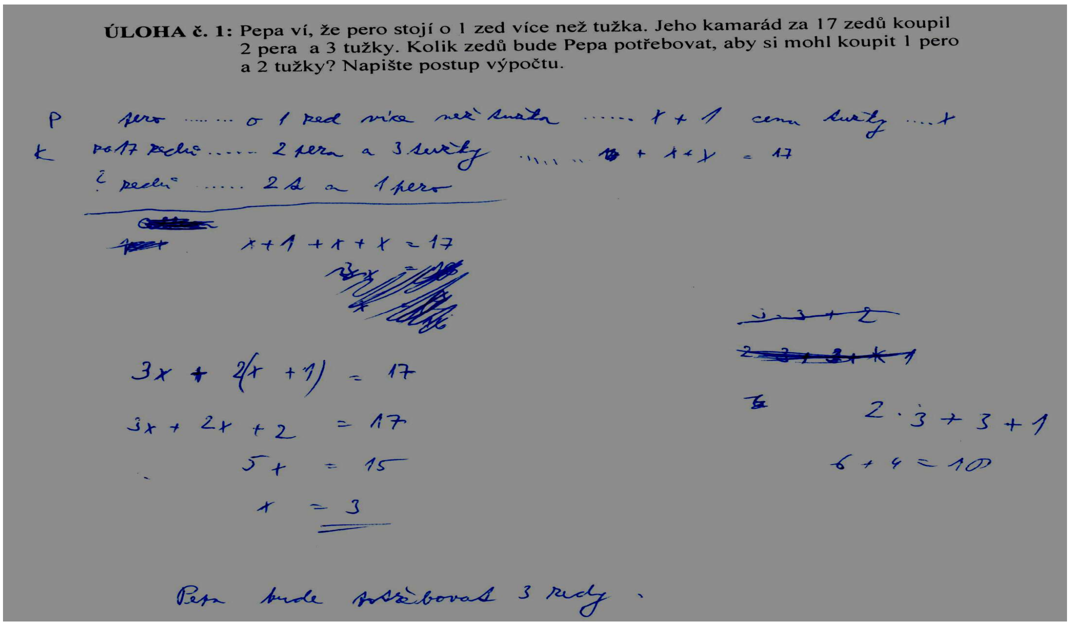
- **Vytvoření plánu řešení:** Petr si byl vědom, že cesta k výsledku vede přes počítání s rovnicemi.

- **Realizace plánu řešení:** Petr správně matematizoval informaci o tom, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Druhou rovnici, která matematizuje otázku, kterou pokládá úloha, sestavil Petr v zásadě správně, ovšem zanesl do ní třetí neznámou a nevěděl, jak pokračovat. Experimentátor mu tedy poradil, že je třeba symbolicky zapsat první větu zadání a zaznamenat tak cenu pera a tužky pomocí neznámé. Petr si poté správně označil cenu pera výrazem $x + 1$ a cenu tužky označil neznámou x. Následně však provedl **chybné roznásobení dvojčlenu z důvodu neuchopení symbolické slovní legendy, tedy vlastně chybně matematizoval (ch53)**, když věděl, že má počítat se dvěma pery a výraz $x + 1$ přepsal na výraz $2x + 1$ namísto $2x + 2$. Petr s danou chybou následně upravoval soustavu dvou rovnic, ve které se dopustil **numerické chyby (ch31)**, když $2x$ a $3x$ sečetl jako $4x$. Následně dospěl ke špatným cenám pera a tužky v hodnotě 4 a 5 zedů. V tento okamžik si experimentátor všiml, že se Petr dopustil několika chyb a řekl, aby si do zápisu zapsal symbolicky pouze cenu 1 pera a 1 tužky a pak aby mimo tento zápis uvedl matematizaci té skutečnosti, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Petr následně sestavil správnou rovnici, ve které v posledním kroku upravil rovnost $5x = 15$ na $x = 5$ (**numerická chyba při dělení (ch32)**). Petra experimentátor upozornil, že si není jist, zda toto dělení zrealizoval správně. Petr se zamyslel a po chvilce svůj mylný podíl upravil na správnou hodnotu. Získané ceny pera a tužky potom dosadil do rovnice, kterou měl v hlavě a dospěl k ceně dvou tužek a jednoho pera.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Petr výsledky neověřoval, korektnost výpočtu vyvozoval z reakcí experimentátora. Na závěr uvedl slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Tereza 2

Úloha č. 1:



Obr. C.12

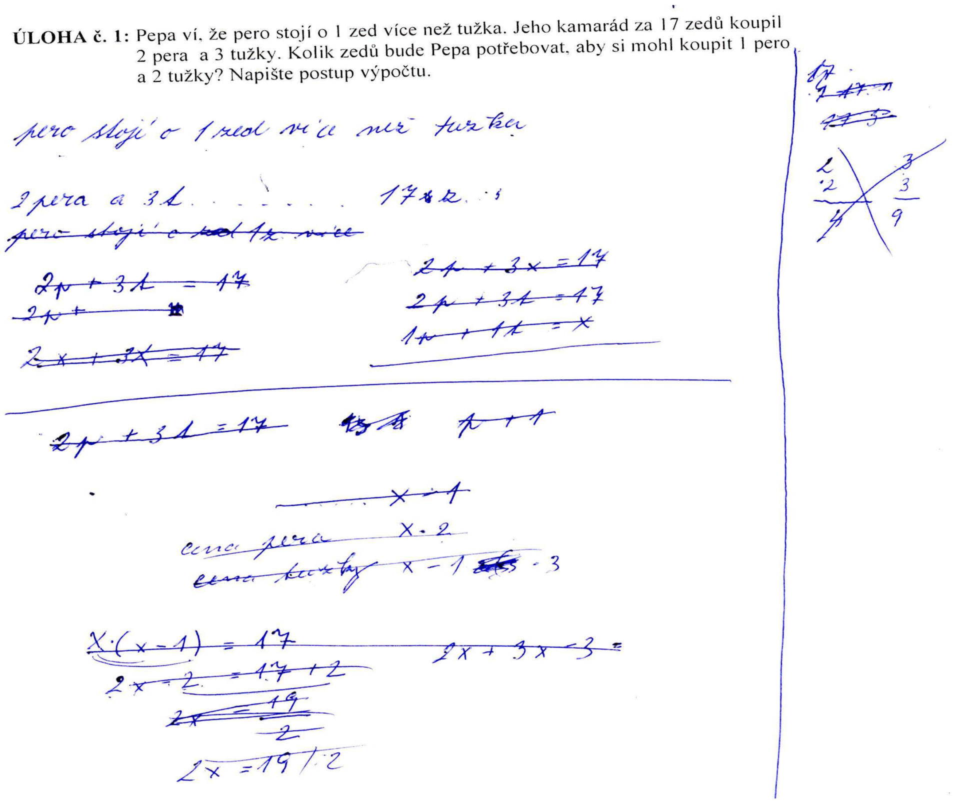
- **Identifikace problému:** Tereza uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala si slovní legendu, která obsahuje všechny nezbytné údaje.
- **Vytvoření plánu řešení:** Tereza zvolila strategii výpočtu pomocí rovnic.
- **Realizace plánu řešení:** Tereza neuměla sestavit rovnici, ačkoli ve slovní legendě má uvedeno vše potřebné. Experimentátor její váhání zaregistroval a řekl Tereze, aby si zkusila zapsat údaje z první věty zadání pomocí symbolů. Tereza však nereagovala. Experimentátor tedy na tento **problém s matematizací z neuchopení úlohy (ch52)** reagoval tak, že řekl: „Označte si cenu tužky písmenem *x*, a když máte v zadání uvedeno, že pero je o 1 zed dražší než tužka, tak jak označíme cenu pera?" Tereza odpověděla: „Cenu pera označíme písmenem *y*." Experimentátor na tuto větu reagoval takto: „Když cena tužky je *x* a pero je o 1 zed dražší, tak k tomu *x* přičteme…" „Přičteme,…jedničku," řekla Tereza. Experimentátor souhlasil a řekl Tereze, že si musí pomocí těchto symbolů zapsat tu skutečnost, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Tereza následně sestavila rovnici, která matematizovala cenu pera a 2 tužek a přirovnala jí k ceně 2 per a 3 tužek. U Terezy došlo k **chybě v matematizaci z nepozornosti (ch51)**. Experimentátor Tereze řekl, že porovnává hrušky s jablky a že 17 zedů stojí 2 pera a 3 tužky. Po této korekci Tereza sestavila „správnou" rovnici, ve které se dopustila **chyby v roznásobení dvojčlenu z důvodu neuchopení symbolické slovní legendy (ch53).** Experimentátor jí upozornil, že když si cenu pera označila výrazem $x + 1$, pak 2 pera jsou $2(x + 1)$ a nikoli $2x + 1$. Opravenou rovnici pak Tereza korektními úpravami vyřešila. Zapomněla však, že má nyní spočítat cenu 2 per a

1 tužky. Experimentátor jí to musel připomenout. U Terezy tak došlo k **předčasnému ukončení řešení úlohy z nepozorné četby zadání (ch21).**

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Tereza zformulovala slovní odpověď nereagující na zadanou otázku, resp. Tereza **neprovedla matematickou a sémantickou zkoušku (chnz)** svého výsledku a do odpovědi uvedla cenu jedné tužky ačkoli Pepa koupil pero a 2 tužky.

Řešitelka Gabriela

Úloha č. 1:



Obr. C.13

- **Identifikace problému:** Gabriela uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala si slovní legendu, ve které uvedla všechny nezbytné údaje.

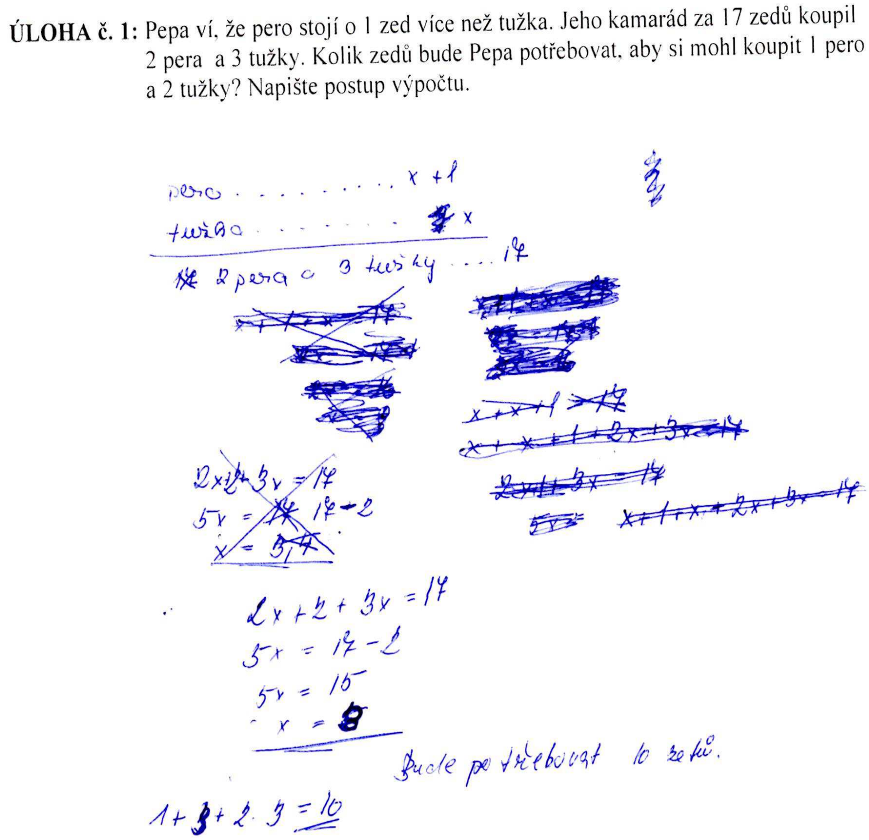
- **Vytvoření plánu řešení:** Gabriela zvolila algebraickou strategii výpočtu, která je založená na rovnicích.

- **Realizace plánu řešení:** Gabriela správně matematizovala skutečnost, že dvě pera a tři tužky stojí sedmnáct zedů. Následně si ovšem neuvědomila, že ve slovní legendě má ještě jeden důležitý údaj o tom, že cena pera je o zed vyšší než cena tužky. Tato **chyba z nepozornosti (ch26)** způsobila, že si Gabriela původně dobře sestavenou rovnici modifikovala do nesprávné podoby a dokonce si do ní vložila i další neznámou *x*. Gabriela pak už byla tak bezradná, že se přihlásila. Experimentátor k ní přišel a řekl, že je třeba matematizovat údaje z první věty zadání. Gabriela si tu větu přečetla a označila si cenu tužky výrazem $x - 1$. Experimentátor na to reagoval takto: „Když si takto označíte cenu tužky, pak cenu pera označíme….“ Gabriela nereagovala. Experimentátor jí zdůraznil fakt, že cena pera je o zed vyšší. Gabriela tuto informaci přijala a zapsala správně tak, že cena pera je *x*. Následně jí experimentátor řekl, že je třeba matematizovat skutečnost, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Tuto rovnici už

Gabriela nenapsala a úlohu nedokončenou donesla experimentátorovi s tím, že toto nevypočítá a že na tuto látku chyběla. U Gabriely nastaly **problémy v matematizaci (ch53),** které jí zabránily vyřešit danou úlohu.

Řešitelka Tereza 3

Úloha č. 1:

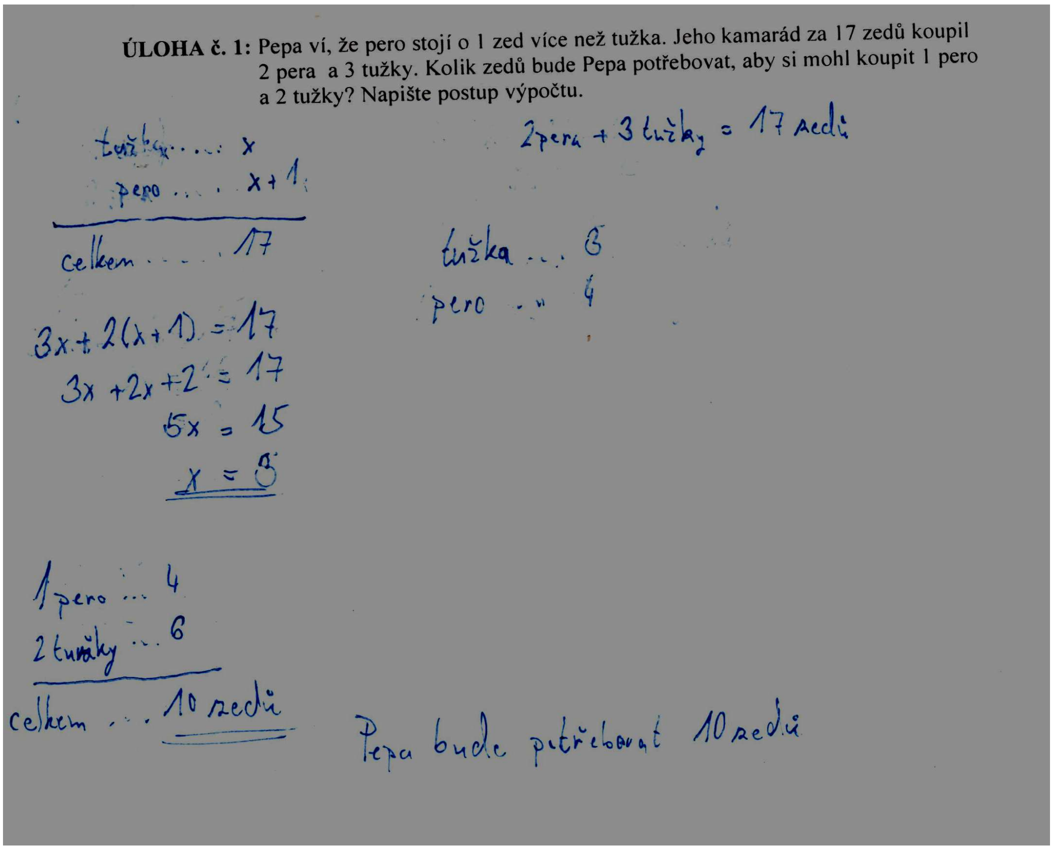


Obr. C.15

- **Identifikace problému:** Tereza uchopila úlohu s částečným porozuměním. Zapsala si slovní legendu, ve které uvedla vše potřebné.
- **Vytvoření plánu řešení:** Tereza zvolila algoritmickou strategii výpočtu sestávající z počítání s rovnicemi.
- **Realizace plánu řešení:** Tereza sestavila nesprávně rovnici, ačkoli ve slovní legendě uvádí, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. V první zapsané rovnici matematizovala zcela mimo zadání, že cena 1 tužky a 1 pera stojí 17 zedů. Tuto rovnici ještě několikrát napsala a poté opět škrtla. U Terezy došlo k **chybné matematizaci** pramenící **z neuchopení úlohy (ch52)**. Experimentátor jí poradil, že je třeba s pomocí správně zvolených symbolů ve slovní legendě, matematizovat fakt, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Tereza sestavila správnou rovnici, ve které se ale dopustila **numerické chyby při odečítání dvou od obou jejích stran (ch31).** Tuto chybu však sama opravila a rovnici vyřešila. Získané ceny obou předmětů pak dosadila do druhé rovnice, kterou měla uloženou v hlavě.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Tereza zformulovala slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Eva

Úloha č. 1:



ÚLOHA č. 1: Pepa ví, že pero stojí o 1 zed více než tužka. Jeho kamarád za 17 zedů koupil 2 pera a 3 tužky. Kolik zedů bude Pepa potřebovat, aby si mohl koupit 1 pero a 2 tužky? Napište postup výpočtu.

tužka x
pero ..... x + 1
celkem 17

2 pera + 3 tužky = 17 zedů

tužka ... 3
pero ... 4

$3x + 2(x+1) = 17$
$3x + 2x + 2 = 17$
$5x = 15$
$x = 3$

1 pero ... 4
2 tužky ... 6
celkem ... 10 zedů

Pepa bude potřebovat 10 zedů

Obr. C.16

- **Identifikace problému:** Eva **neuchopila úlohu (ch11)** s porozuměním. Ačkoli žáci byli upozorněni, aby negumovali, tak Eva používala zmizík, a tak se její řešení zdá býti v pořádku, ale většinu zapsaného jí bylo třeba explicitně uvést. Eva si totiž nevěděla rady už se slovní legendou. Experimentátor jí sdělil, že je třeba symbolicky zapsat údaje z první věty uvedené v zadání. Po této poznámce Eva nevěděla, co napsat. Tak tedy experimentátor řekl: „Označte si cenu tužky symbolem *x* a řekněte mi, jak označíte cenu pera, když víte, že jeho cena je o zed vyšší?“ Eva nereagovala, a tak experimentátor prozradil i toto. Když měla Eva zapsánu slovní symbolickou legendu, tak experimentátor řekl, že se s pomocí těchto symbolů musí zapsat fakt, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů.

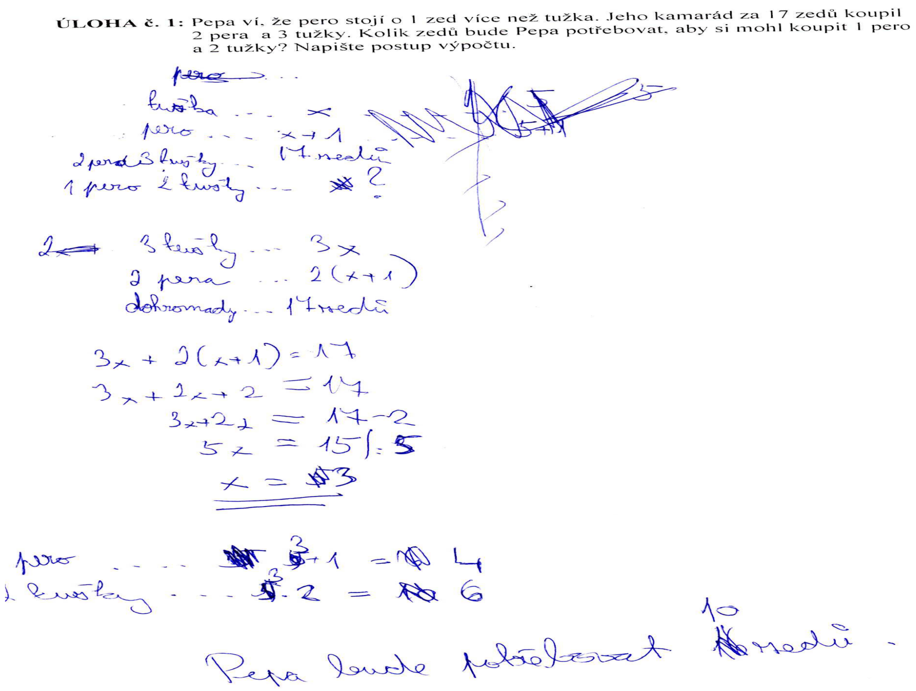
- **Vytvoření plánu řešení:** Eva tedy původně **neuchopila úlohu (ch11)**. Poté, co jí experimentátor poradil, věděla, že je třeba počítat pomocí rovnic.

- **Realizace plánu řešení:** Eva na základě nápovědy experimentátora sestavila správně potřebnou rovnici.V úpravě se dopustila **numerické chyby při dělení (ch32)**, když 15 : 5 označila hodnotou 5. Tuto chybu po upozornění experimentátora opravila. Následně však Eva po zapsání ceny pera a tužky zapomněla, že je třeba spočítat cenu pera a 2 tužek. Toto jí experimentátor musel naznačit, aby pak spočítala to, co bylo třeba. Tento nedostatek lze označit jako **chybu předčasného ukončení řešení úlohy z nepozornosti (ch21).**

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Eva zformulovala slovní odpověď na zadanou otázku. Získané hodnoty cen pera a tužky neprověřovala matematickou zkouškou.

Řešitelka Lucie 2

Úloha č. 1:

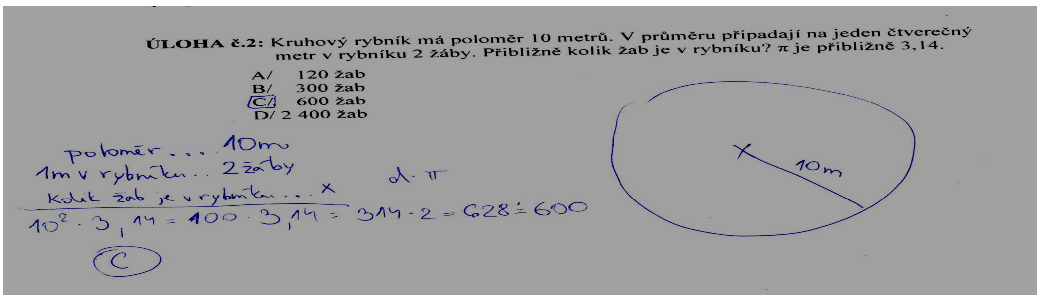


Obr. C.17

- **Identifikace problému:** Lucie uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala si slovní legendu, která obsahuje jak údaj o relaci ceny pera a tužky, tak i zmínku o tom, co je třeba v úloze spočítat.
- **Vytvoření plánu řešení:** Lucie zvolila algoritmickou strategii s použitím rovnic.
- **Realizace plánu řešení:** Lucie korektně matematizovala skutečnost, že 2 pera a 3 tužky stojí 17 zedů. Rovnici upravovala pomocí ekvivalentních úprav a při poslední z nich se dopustila **numerické chyby při dělení (ch32),** když $5x = 15$ upravila na $x = 5$. Experimentátor Lucii upozornil, že si není jistý, zda je to dobře. Lucie se ťukla do hlavy a řekla že při počítání přemýšlela rychleji než psala. Chybu tedy Lucie napravila a spočítala bez zaváhání to, co měla.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Lucie matematickou zkoušku neprovedla (**chnz)** a zformulovala slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Rebeka

Úlohu č. 2:

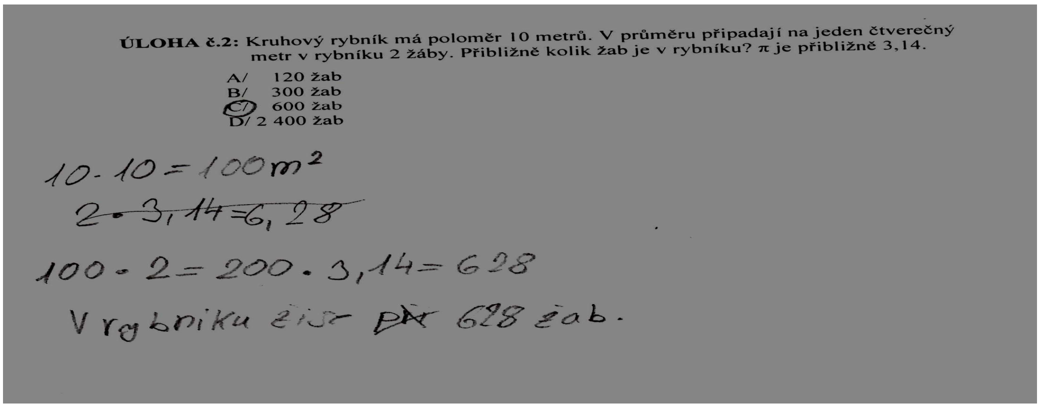


Obr. C.18

- **Identifikace problému:** Rebeka uchopila úlohu s porozuměním, vytvořila slovní legendu, ve které je jediná chyba u údaje o jednom metru, který je ve skutečnosti metrem čtverečným, Rebeka však pochopila, že jde o obsah. Slovní legendu ještě doplnila grafickým znázorněním zadané situace, které potvrzuje, že Rebeka pozorně vnímala údaje ze zadání.
- **Vytvoření plánu řešení:** Rebeka si vytvořila tříkrokový plán jdoucí od výpočtu obsahu rybníku přes použití přímé úměrnosti až k zaokrouhlení na přibližný počet žab žijících v rybníku.
- **Realizace plánu řešení:** Rebeka použila správný vzorec pro obsah kruhu, má dobře uchopen pojem přímé úměrnosti a zaokrouhlení jí při znalosti čtyř možných variant výsledku, z nichž jedna to musí být, nedělalo žádné problémy. Zajímavé je, že ve vzorci pro obsah kruhu nejprve použila druhou mocninu poloměru a až poté Ludolfovo číslo. Současně není příliš vhodný její zápis výpočtů, který je zhuštěn do jednoho řádku, takže některé rovnosti nejsou vlastně rovnostmi (**neuchopení pojmu rovnost (ch18)**). Na výsledek to však nemá vliv. Závěrem zmíním ještě jednu zajímavost. Vedle slovní legendy je symbolicky zmíněn vzorec pro obvod kružnice, v němž je průměr označen typicky písmenkem *d*. Tento vzorec Rebeka při výpočtech nepoužila, ale uveden je asi proto, že Rebeku zmátlo zadání, kde se píše, že v rybníku **„v průměru“** připadají dvě žáby na jeden metr čtverečný. Tato záměna statistického pojmu za geometrický se v analýze jednotlivých řešení neobjevuje poprvé.(**neuchopení pojmu průměr (ch12)**)
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Rebeka nezformulovala slovní odpověď, neboť podle jejího přesvědčení stačilo označit jednu ze čtyřech nabízených variant pro počet žab v rybníku.

Řešitelka Nikola

Úloha č. 2:


ÚLOHA č.2: Kruhový rybník má poloměr 10 metrů. V průměru připadají na jeden čtverečný metr v rybníku 2 žáby. Přibližně kolik žab je v rybníku? π je přibližně 3,14.

A/ 120 žab
B/ 300 žab
C/ 600 žab
D/ 2 400 žab

$10 \cdot 10 = 100 m^2$

~~2 · 3,14 = 6,28~~

$100 \cdot 2 = 200 \cdot 3{,}14 = 628$

V rybníku žije ~~př~~ 628 žab.

Obr. C.19

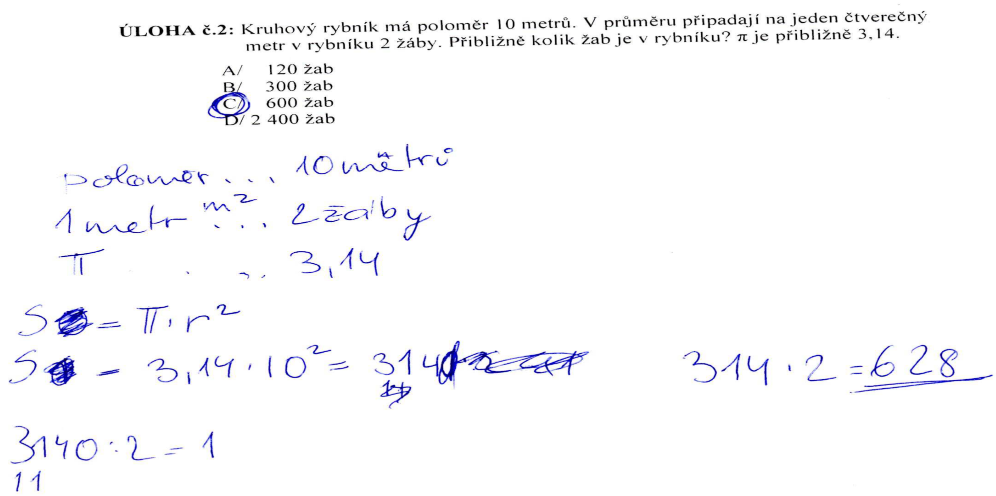
- **Identifikace problému:** Nikola uchopila úlohu s porozuměním.
- **Vytvoření plánu řešení:** Nikola věděla, že má spočítat obsah kruhu a poté použít údaj o počtu žab na metr čtverečný. Jen netušila, jak vypadá vzorec pro obsah kruhu, což je **nevybavením si vzorce pro obsah kruhu (ch15),** který zůstal experimentátorovi zamlčen a on sám si ho všiml pozdě.
- **Realizace plánu řešení:** Nikola věděla, že musí spočítat obsah či plochu rybníka. Při neznalosti vzorce pro obsah kruhu, což sdělila experimentátorovi až po konci hodiny, si spočítala obsah čtverce o straně délky r = 10m. Poté věděla, že na jeden metr

čtverečný připadají dvě žáby, tak použila správně přímé úměrnosti, a protože byla tato úloha ještě v podobě uzavřené s výběrem odpovědi, viděla Nikola, že hodnota 200 nebude ještě konečná (nebyla totiž blízká ani jedné ze čtyř nabízených možností), tak použila v zadání uvedené Ludolfovo číslo a dostala hodnotu 628, ze které se lze zaokrouhlením dostat na 600. Popsané myšlenky experimentátorovi takto vyložila Nikola po vyřešení úlohy.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Nikola uvedla standardně slovní odpověď na konci řešení. Je jen zajímavé, že v odpovědi uvedla přesný údaj o počtu žab v rybníku.

Řešitelka Anna

Úloha č. 2:


ÚLOHA č.2: Kruhový rybník má poloměr 10 metrů. V průměru připadají na jeden čtverečný metr v rybníku 2 žáby. Přibližně kolik žab je v rybníku? π je přibližně 3,14.

A/ 120 žab
B/ 300 žab
C/ 600 žab
D/ 2 400 žab

poloměr ... 10 metrů
1 metr m^2 ... 2 žáby
π ... 3,14
$S = \pi \cdot r^2$
$S = 3,14 \cdot 10^2 = 314$
$314 \cdot 2 = 628$
$3140 : 2 = 1$
11

Obr. C.20

- **Identifikace problému:** Anna zapsala slovní legendu, která obsahuje vše potřebné. Uchopila tedy tuto úlohu s porozuměním. Jedné chyby se však v této fázi dopustila, když v druhém řádku uvedla, že dvě žáby žijí na jednom metru (namísto v zadání uvedeném metru čtverečném). Experimentátor jí upozornil na tuto **chybu z nepozornosti (ch26)**, až když počítala plochu rybníku.

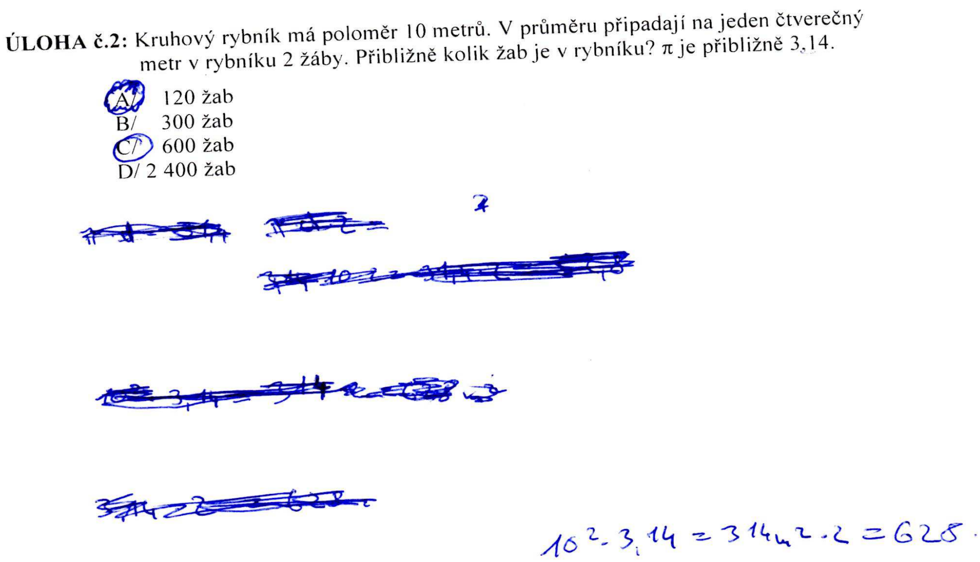
- **Vytvoření plánu řešení:** Anna zvolila správný postup sestávající z výpočtu obsahu, použití přímé úměrnosti (i když zde je otázka, zda tuto úměrnost chápe správně) a následného zaokrouhlení.

- **Realizace plánu řešení:** Anna zvolila k výpočtu obsahu správný vzorec, dobře do něho dosadila a nakonec udělala **numerickou chybu (ch33)**, když při násobení desetinného čísla stem posunula špatně desetinnou čárku. Experimentátor se tedy zeptal, o kolik míst je třeba desetinnou čárku v tomto případě posunout. Anna odpověděla docela obratem, že o dvě a chybu napravila. Následně pak ale udělala **chybu při použití přímé úměrnosti**, kterou zaměnila za nepřímou (**ch14**). Experimentátor tedy použil sérii otázek typu: „Kolik je žab na dvou, třech,…deseti metrech čtverečných? Anna pak na základě svých odpovědí pochopila, že musí údaj o obsahu násobit dvěma. Poté už dospěla ke správné hodnotě.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Anna pouze zaškrtla jednu ze čtyř možností, která je nejbližší jejímu řešení, což lze považovat za ověření správnosti jejího výsledku.

Řešitel Jan 2

Úloha č. 2:



ÚLOHA č.2: Kruhový rybník má poloměr 10 metrů. V průměru připadají na jeden čtverečný metr v rybníku 2 žáby. Přibližně kolik žab je v rybníku? π je přibližně 3,14.

A/ 120 žab
B/ 300 žab
C/ 600 žab
D/ 2 400 žab

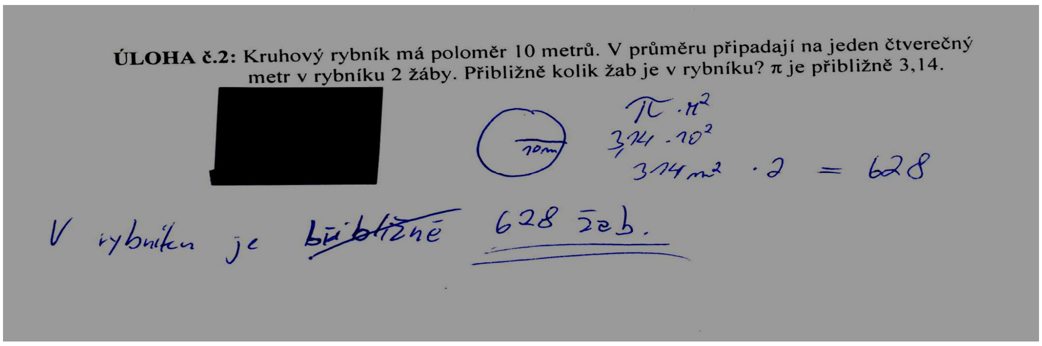
$10^2 \cdot 3{,}14 = 314\,m^2 \cdot 2 = 628.$

Obr. C.21

- **Identifikace problému:** Jan soudě podle výpočtů uchopil úlohu s porozuměním, ovšem nijak se nezdržoval psaním legendy.
- **Vytvoření plánu řešení:** Jan si vytvořil vhodný tříkrokový plán obsahující výpočet pro obsah, použití přímé úměrnosti a zaokrouhlení, ale tento plán v realizaci zadrhává.
- **Realizace plánu řešení:** Jan dlouho používal pro výpočet obsahu vzorec pro obvod kruhu a z výsledku, který dostal po započítání přímé úměrnosti, usoudil, že nejblíže jeho výsledku je hodnota uvedená pod možností a/. Experimentátor si jeho řešení všiml a zeptal se, zda ví, jaký je vzorec pro obsah kruhu. Jan se přiznal, že netuší. Tak mu ten vzorec experimentátor prozradil a poté už Jan dospěl bez zaváhání k výsledku. U Jana byl jediný problém s **nevybavením si vzorce pro obsah kruhu (ch15).**
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Jan slovní odpověď nezformuloval, pouze zaškrtl ze čtyř možností tu, která byla jeho výpočtu nejbližší.

Řešitel Tomáš

Úloha č. 2:



ÚLOHA č.2: Kruhový rybník má poloměr 10 metrů. V průměru připadají na jeden čtverečný metr v rybníku 2 žáby. Přibližně kolik žab je v rybníku? π je přibližně 3,14.

[redacted]

10m

$\pi \cdot r^2$

$3{,}14 \cdot 10^2$

$314\,m^2 \cdot 2 = 628$

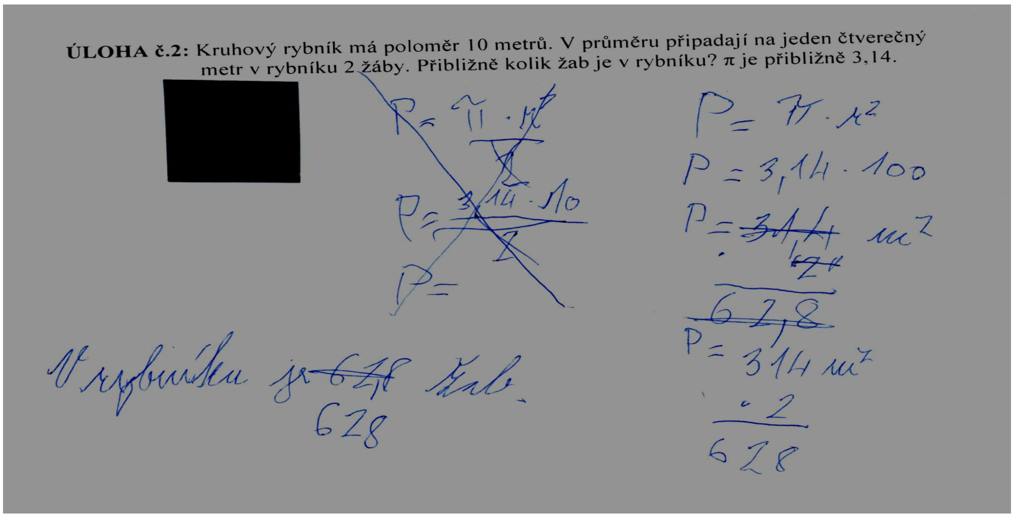
V rybníku je ~~bu~~ přibližně 628 žab.

Obr. C.22

- **Identifikace problému:** Tomáš uchopil úlohu s porozuměním a zapsal si grafickou legendu s údajem o poloměru rybníka.
- **Vytvoření plánu řešení:** Tomáš zvolil aritmetickou strategii tvořenou výpočtem obsahu a použitím přímé úměrnosti.
- **Realizace plánu řešení:** Tomáš použil správný vzorec pro obsah kruhu, do kterého dobře dosadil příslušné hodnoty. Poté použil korektně přímou úměrnost a dospěl k výsledku.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Tomáš zapsal slovní odpověď na zadanou otázku, kde opět škrtl slovo přibližně v reakci na dotaz experimetátora, zda jeho výsledek je opravdu přibližný.

Řešitel Miroslav

Úloha č. 2:



Obr. C.23

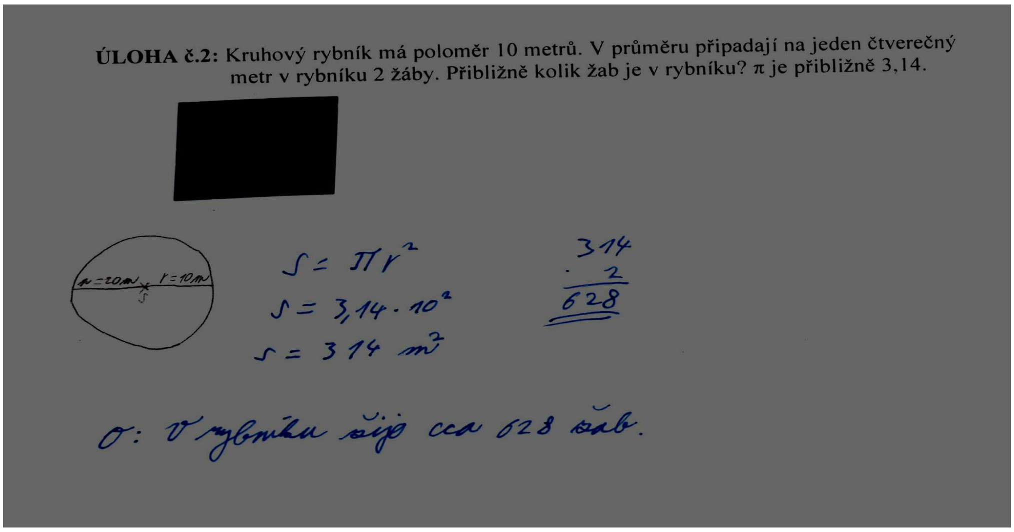
- **Identifikace problému:** Miroslav sdělil experimentátorovi ještě před začátkem řešení, že netuší, co má počítat. Experimentátor se ho zeptal, zda tuší, jaká fyzikální veličina má za jednotku metr čtverečný. Miroslav dlouze přemýšlel. Experimentátor se tedy zeptal: „Je metr čtverečný jednotkou délky nebo obsahu?“ Miroslav odpověděl, že obsahu, ale příliš jistě při této odpovědi nevypadal. Experimentátor jeho odpověď odsouhlasil a upozornil ho, že když má v zadání uveden údaj o počtu žab na jednotku obsahu, tak musí spočítat nejprve obsah kruhu, tj. plochu rybníka. Poté experimentátor od Miroslava odešel. V této fázi u Miroslava došlo k **problému s uchopením úlohy (ch11).**
- **Vytvoření plánu řešení:** Miroslav teď tedy věděl, že má spočítat obsah, tak to zkoušel.
- **Realizace plánu řešení:** Miroslav si napsal chybný vzorec pro obsah, ten správný vzorec mu musel prozradit experimentátor. Následně Miroslav do vzorce správně dosadil, ale dopustil se **numerické chyby (ch33)**, když špatně posunul desetinnou čárku při násobení desetinného čísla stem. Po korekci od experimentátora už správně použil násobení údaje o obsahu dvěma, čímž prokázal správné uchopení přímé úměrnosti, a dospěl k výsledku.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Miroslav uvedl slovní odpověď na zadanou otázku.

  Miroslav měl u této úlohy problém s uchopením úlohy a také se u něho vyskytla **chyba v nevybavení si vzorce pro obsah kruhu (ch15).** V závěru se pak ještě dopustil numerické chyby.

Řešitel Daniel

Úloha č. 2:

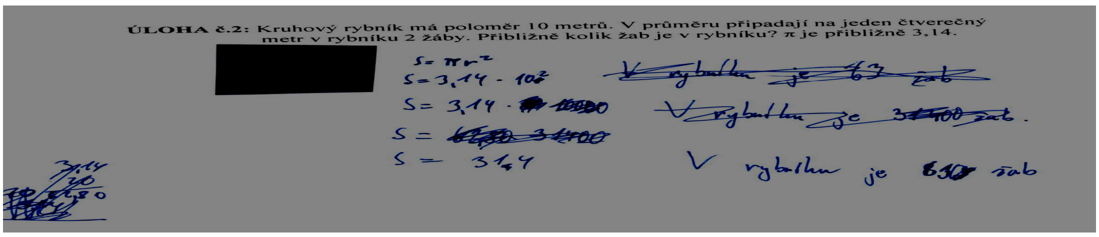


Obr. C.24

- **Identifikace problému:** Daniel uchopil úlohu s porozuměním. Zapsal si grafickou legendu, která obsahuje přebytečný údaj o průměru kruhového rybníku. Tento údaj však Daniel ve výpočtu nepoužil. Zřejmě si špatně vyložil význam slov „V rybníku žije **v průměru** dvojice žab na metr čtverečný.“**(ch12)**
- **Vytvoření plánu řešení:** Daniel zvolil strategii spočívající ve výpočtu obsahu či plochy rybníku a použití přímé úměrnosti.
- **Realizace plánu řešení:** Daniel použil správný vzorec pro výpočet obsahu kruhu, dosadil do něho správné hodnoty a následně použil operaci násobení, což dokazuje, že uchopil pojem přímé úměrnosti.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Daniel zapsal slovní odpověď, která se týká zadané otázky. Zajímavé je, že v této odpovědi zmiňuje: „V rybníku žije *cca* 628 žab.“ Daniel si tedy uvědomil, že v zadání je hodnota Ludolfova čísla uvedena pouze jako přibližná.

Řešitel Petr

Úloha č. 2:

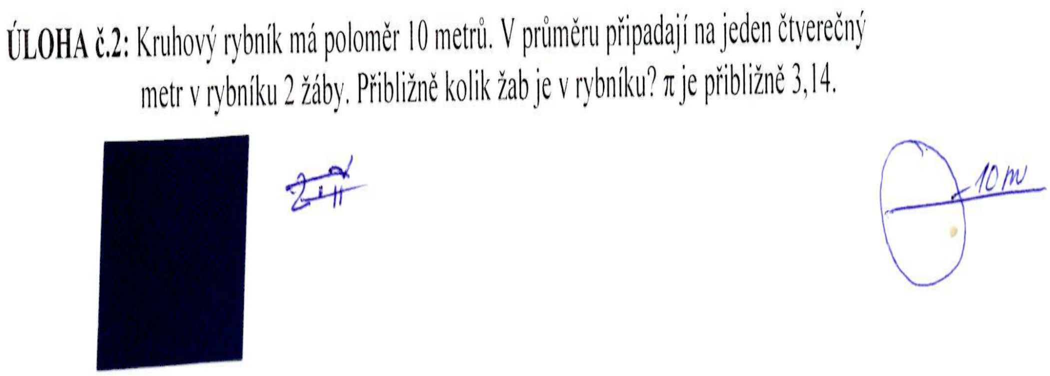


Obr. C.25

- **Identifikace problému:** Petr uchopil úlohu s porozuměním, ovšem k úloze si nezapsal žádnou legendu.
- **Vytvoření plánu řešení:** Petr zvolil strategii výpočtu obsahu či plochy rybníku a poté použil přímou úměrnost.
- **Realizace plánu řešení:** Petr si vybavil správný vzorec pro obsah kruhu, dosadil do něho příslušné hodnoty a poté se dopustil **chyby nesprávného umocnění celého čísla z důvodu neuchopení (ch16)** této operace, když 10^2 označil jako 20. Vzhledem k tomu, že mocninu zapsal Petr horním indexem, tak se lze domnívat, že si Petr nezaměnil umocňování za násobení, ale že má problémy s uchopením této operace. Experimentátor Petra na zmíněnou chybu upozornil. Petr však nedokázal experimentátorovi sdělit správnou hodnotu druhé mocniny deseti, a tak mu ji experimentátor explicitně sdělil. V dalším výpočtu se pak Petr dopustil **numerické chyby (ch33)**, když **při násobení desetinného čísla stem** posunul desetinnou čárku jen o jednu pozici doprava. Experimentátor se tedy zeptal, jak postupujeme, když násobíme desetinné číslo stem. Petr řekl, že posouváme desetinnou čárku o dvě místa doprava. Z toho usuzuji, že Petr tuto operaci chápe.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Petr nejprve uvedl slovní odpověď s tím, že v rybníku žije 63 žab. Ta se ovšem opírala o chyby zmíněné výše. Po všech korekcích od experimentátora nakonec Petr zformuloval správnou odpověď.

Řešitelka Gabriela

Úloha č. 2:

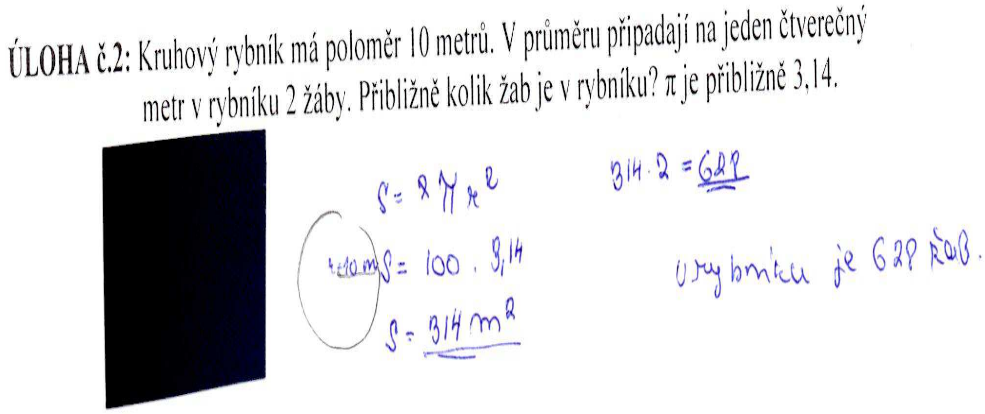


Obr. C. 26

Gabriela už na tuto úlohu neměla čas a zapsala si pouze grafickou legendu, ze které **není patrno**, **zda správně chápe pojem poloměru a průměru (ch13)**.

Řešitelka Tereza 3

Úloha č. 2:

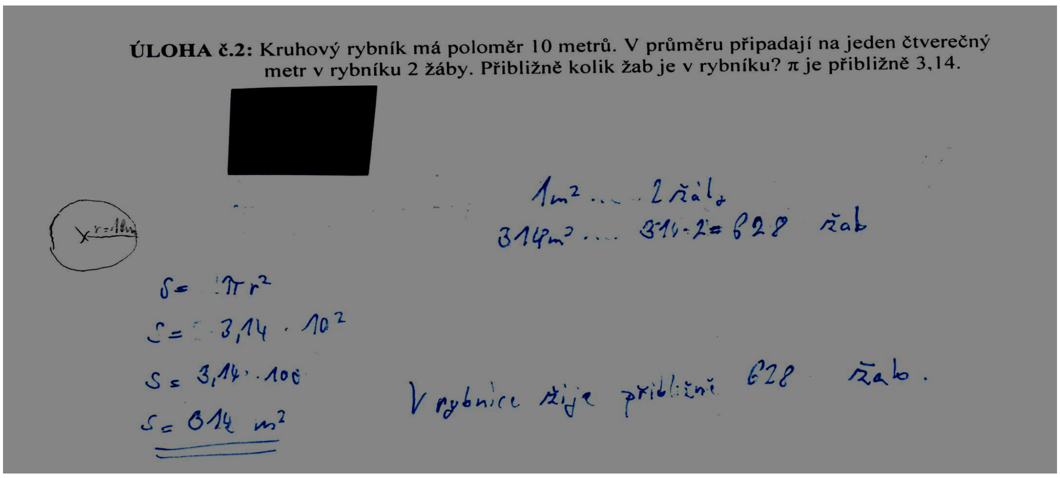


Obr. C.27

- **Identifikace problému:** Tereza uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala si grafickou legendu se správně označeným a popsaným údajem o poloměru kruhového rybníku.
- **Vytvoření plánu řešení:** Tereza zvolila aritmetickou strategii jdoucí od zjištění obsahu či plochy rybníku k použití přímé úměrnosti, na základě čehož získala údaj o počtu žab v rybníku.
- **Realizace plánu řešení:** Tereza si vybavila vzorec pro obsah kruhu, správně do něho dosadila a poté násobila údaj o obsahu dvěma, čímž dokazuje, že uchopila s porozuměním pojem přímé úměrnosti.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Tereza zformulovala slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Eva

Úloha č. 2:

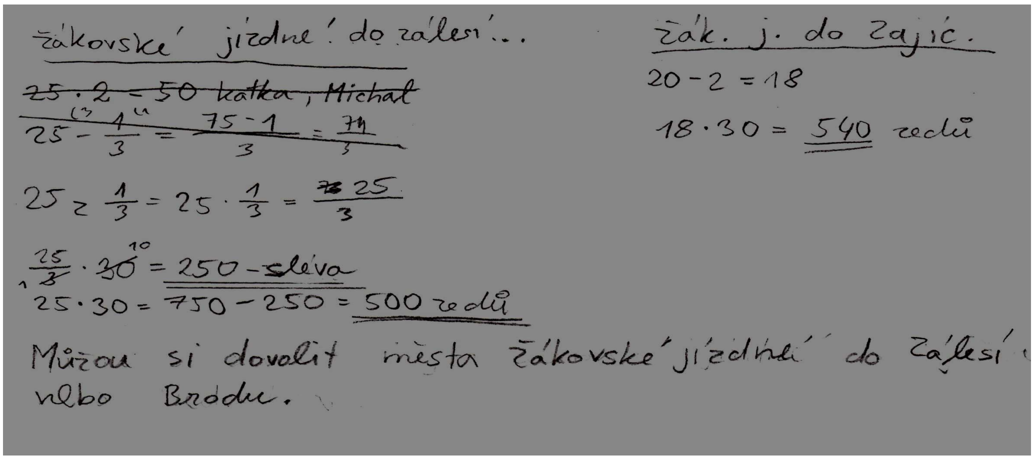


Obr. C.28

- **Identifikace problému:** Eva uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala jak slovní, tak grafickou legendu.
- **Vytvoření plánu řešení:** Eva zvolila aritmetickou strategii jdoucí od výpočtu plochy rybníku k použití přímé úměrnosti a ke zjištění počtu žab v rybníku.
- **Realizace plánu řešení:** Eva si zvolila správný vzorec pro obsah, dobře do něho dosadila a korektně umocnila a vynásobila desetinné číslo stem. Následně pak dobře použila operaci násobení hodnoty obsahu dvěma.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Eva zformulovala slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Radka

Úloha č. 3:



Obr. C.29

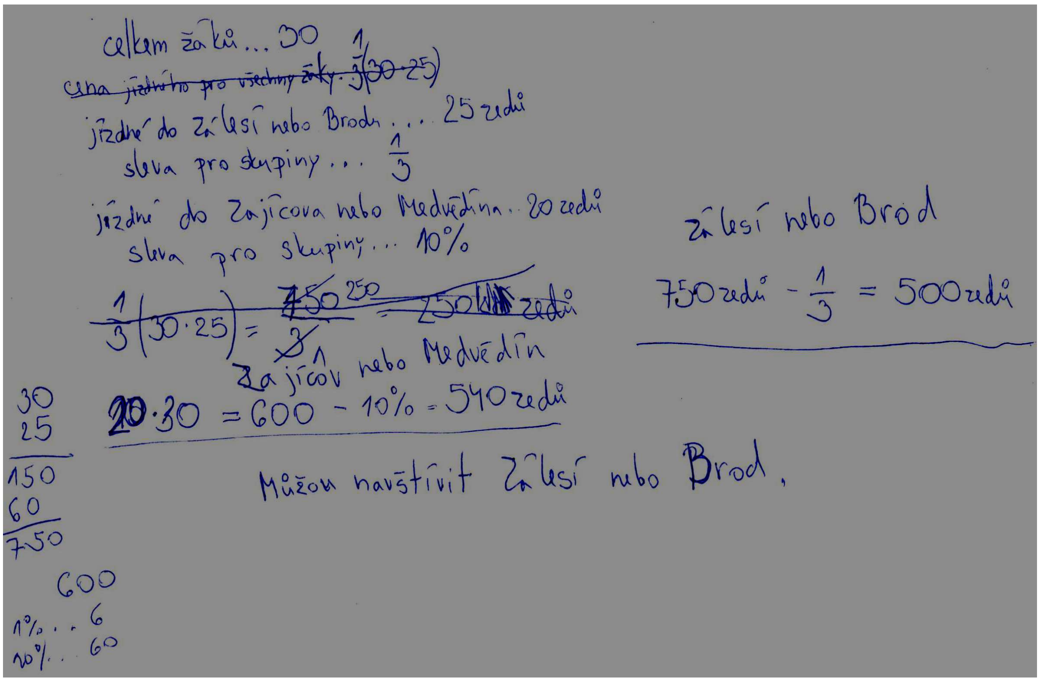
- **Identifikace problému:** Radka uchopila správně problematiku úlohy, ale opět se u ní projevila **chyba z nepozorného čtení zadání (ch26)**, neboť v úvodu výpočtové fáze počítala s cenou pro 2 žáky, Katku a Michala, jejichž jména jsou uvedena v samotném úvodu úlohy. Tuto chybu z nepozornosti ovšem sama později korigovala.
- **Vytvoření plánu řešení:** Radka si za strategii k výpočtu celkové ceny jízdného zvolila výpočet slevy pro jednotlivce. Tuto hodnotu násobila počtem žáků třídy a výsledek odečetla od nezlevněného jízdného pro celou třídu.
- **Realizace plánu řešení:** Radka, jak bylo zmíněno výše, nejprve počítala cenu jízdného pro dva žáky. Tuto chybu napravila sama, ovšem netušila, jak spočítat slevu v hodnotě jedné třetiny, což je patrné v druhém řádku jejího výpočtu. Radka totiž tuto třetinovou slevu počítala ze základu 1 namísto správné hodnoty 25. Radka si však uvědomila, že třetina z 25 se počítá s pomocí operace násobení. Tak tedy toto násobení realizovala. Následně získaný zlomek násobila správně počtem žáků dané třídy a získanou hodnotu udávala za cenu jízdného do Zálesí nebo Brodu. Experimentátor se jí tedy zeptal, co označuje hodnota jedné třetiny. Radka odvětila, že taková je sleva. Experimentátor souhlasil a řekl: „Když tedy spočítáte slevu pro jednoho a poté ji násobíte počtem žáků ve třídě, pak získáte co?“ Radka váhala, a tak jí experimentátor prozradil, že hodnota 250 je celková hodnota slevy pro třídu a zeptal se Radky, jak spočítá zlevněnou cenu pro celou třídu. Radka prohlásila, že se sleva musí odečíst od celkové ceny pro třídu. Experimentátor souhlasil a Radka spočítala zlevněnou cenu pro třídu do Zálesí nebo Brodu. Při výpočtu slevy z jízdného do druhé destinace si

Radka už věděla rady, určila správně 10 % z 20 a pak tuto slevu odečetla od nezlevněné ceny jízdného pro jednotlivce. Zlevněnou cenu pro jednoho pak korektně násobila počtem všech žáků ve třídě. Ve fázi realizace plánu řešení Radka **z nepozornosti (ch26)** ztratila pojem o významu čísla 250.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Radka v závěru uvedla správně formulovanou slovní odpověď, která odpovídá na otázku zadanou v úvodním textu úlohy.

Řešitelka Rebeka

Úloha č. 3:

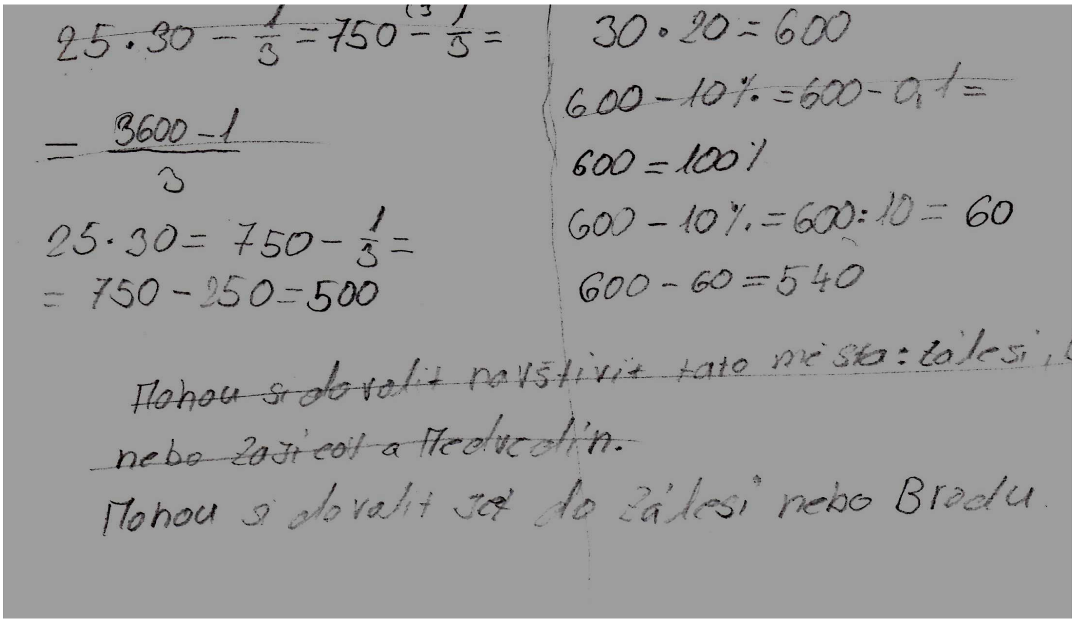


Obr. C.30

- **Identifikace problému:** Rebeka úlohu uchopila s porozuměním, slovní legendu vytvořila bez nějakých problémů či nedostatků.
- **Vytvoření plánu řešení:** Rebeka zvolila strategii výpočtu nezlevněné ceny pro celou třídu a z ní se potom snažila získat hodnotu slevy.
- **Realizace plánu řešení:** Rebeka se nejprve snažila vypočítat hodnotu slevy pro jízdné do Zálesí, toto škrtá, ačkoliv výpočet má v pořádku. V tento okamžik experimentátor nevznesl dotaz na téma důvodu tohoto přeškrtnutí. Lze se tedy jen domnívat, že Rebeka si nebyla úplně jistá s výpočtem zlomkem zadané slevy (**neuchopení pojmu zlomku a počítání s ním (ch17)**. Nakonec ale tuto slevu a i zlevněnou cenu jízdného bez rady experimentátora vypočítala. Co se týká ceny jízdného do druhé destinace, pak je vidět, že výpočet procenty označené části celku jí nedělal problémy. Pojem slevy pak uchopila též bez problémů. Ještě na okraj uvedu, že u výpočtu celkové ceny jízdného pro třídu do Zajícova (20 · 30) se původně místo čísla 20 vyskytovalo číslo 15, což tam Rebeka napsala z **nepozornosti (ch26)**. Číslo 15 je uvedeno v zadání, kde sleva 10 % je poskytována pro skupiny s 15 a více žáky (odtud tedy ona 15). Zmíněnou chybu však Rebeka včas napravila.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Rebeka uvedla správnou slovní odpověď, která reaguje na úlohou položenou otázku.

Řešitelka Nikola

Úloha č. 3:

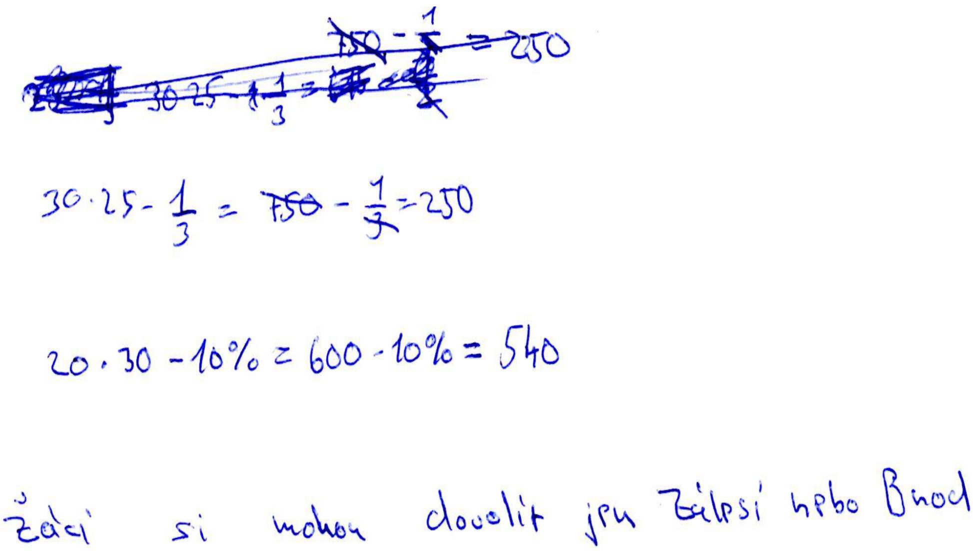


Obr. C.31

- **Identifikace problému:** Nikola si uvědomila, co má spočítat. Slovní legendu si nezapsala, neboť úloha takovou legendu nabízí v rámci zadání sama.
- **Vytvoření plánu řešení:** Nikola zvolila strategii výpočtu celkové nezlevněné ceny jízdného do obou destinací a poté se z těchto hodnot chtěla dobrat k hodnotě slevy.
- **Realizace plánu řešení:** V zápisu výpočtů se nejprve vyskytl jeden přeškrtnutý, kdy Nikola počítala z celkové ceny nezlevněného jízdného pro třídu třetinovou slevu, ale od 750 opět odečítala jen onu třetinu (jakoby základ byl 1 zed), ovšem základ pro slevu byl 750. Výpočet je škrtnutý, neboť si Nikola uvědomila, že výsledný zlomek, ve kterém dosahuje čitatel hodnoty přes 3600, je příliš velký pro zlevněnou cenu. Na podkladě této myšlenky, kterou sdělila experimentátorovi, lze ocenit, že při výpočtu nezapomněla Nikola přemýšlet. Je vidět, že z reálného světa má se slevou alespoň tu zkušenost, že ví, že zlevněná cena by měla být nižší než ta původní. Experimentátor musel ovšem Nikole poradit s počítáním v případě 10 % ze 600, kdy se nejprve zeptal, kolik je 10 % z 10. Nikola delší dobu váhala s odpovědí, a tak experimentátor dodal, že k výsledku dojde, když vydělí deset deseti. Nikola tedy odpověděla, že 10 % z 10 je jedna. Poté se experimentátor zeptal, kolik je 10 % ze 100. Nikola odpověděla, že to je 10. „Kolik je tedy 10 % ze 600," zeptal se dále experimentátor. Nikola odvětila, že 60. Pak se experimentátor zeptal, jak tedy spočítáme zlevněnou cenu. Nikola prohlásila, že od šesti set odečte šedesát, což experimentátor odkýval a Nikola dospěla ke správnému výsledku. Experimentátor ještě upozornil Nikolu, ať si všimne, že když se ptal, tak vždy na výpočet určitého procenta z nějakého celku. Experimentátor dodal, že je nutné tento celek při výpočtu psát ihned za ona procenta, tj. 600 – 0,1 · 600 a nikoli 600 – 10 %. Toto už Nikola v zápisu výpočtu neopravila. Poradit však bylo třeba i u výpočtu třetiny ze 750. Z tohoto je patrné, že Nikola **neuchopila pojem procenta a zlomku a počítání s nimi (ch17).**
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Nikola uvedla slovní odpověď na danou otázku až po několika nápovědách od experimentátora.

Řešitel Jan 2

Úloha č. 3:

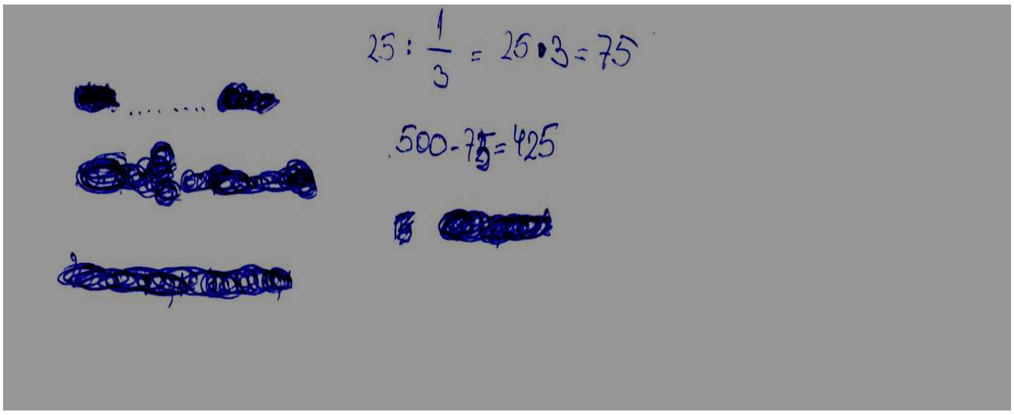


Obr. C.32

- **Identifikace problému:** Jan uchopil tuto úlohu s porozuměním, což je vidět z jeho výpočtů. Zápis si žádný nevytvořil, neboť ho má uveden již v zadání úlohy.
- **Vytvoření plánu řešení:** Jan si zvolil tu strategii, kdy z celkové ceny jízdného pro celou třídu do obou destinací odečte slevu a dostane tak zlevněnou cenu.
- **Realizace plánu řešení:** Jan použil velmi úsporného zápisu, v němž se dopustil **neuchopení operace krácení (ch19),** když krátil číslo tři a číslo 750, i když je mezi nimi operace odečítání. Jan totiž věděl, že onu třetinu počítá ze základu 750, ale do zápisu napsal vlastně úplnou hloupost v podobě 750 - $\frac{1}{3}$ = 250. Experimentátor ho bohužel na toto neupozornil. Jinak Jan počítá správně. Výše uvedená rovnost ovšem není rovností (**ch18).**
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Jan zapsal slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitel Michal

Úloha č. 3

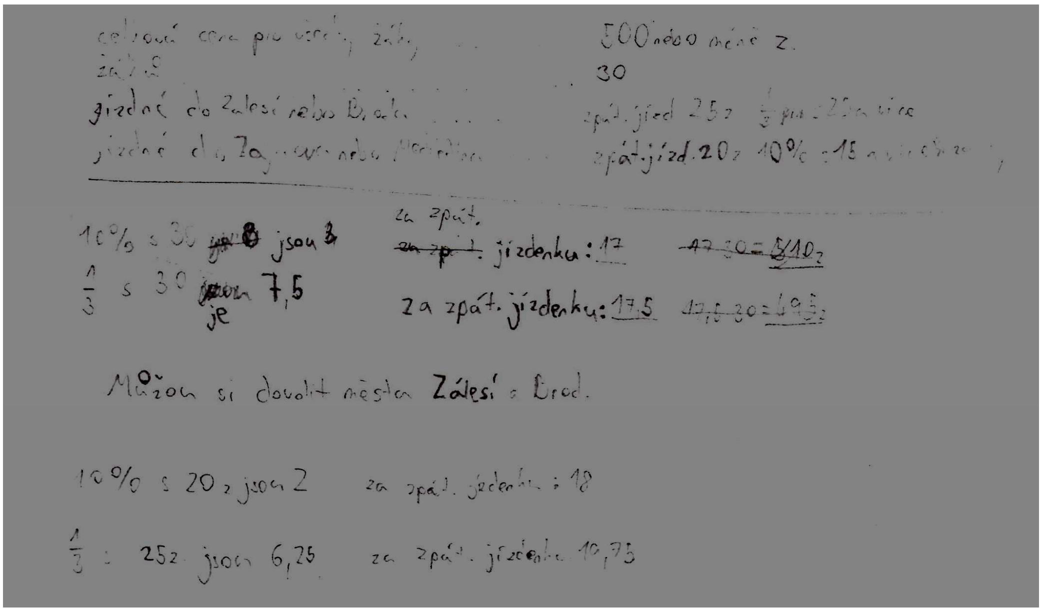


Obr. C.33

- **Identifikace problému:** Michal si nezapsal žádný zápis a z výpočtů, které jsou čitelné je patrné, že věděl, co je třeba počítat.
- **Vytvoření plánu řešení:** Michal tušil, že musí vypočítat hodnotu slevy z plného jízdného, aby ji pak od něho odečetl a získal zlevněnou cenu jízdného.
- **Realizace plánu řešení:** Michal při správně zvolené strategii udělal chybu. Jde o **chybu neuchopení pojmu zlomku a počítání s ním (ch17),** kdy při výpočtu třetiny z 25 Michal použil nesprávnou operaci dělení ($25 : \frac{1}{3}$). Výsledná hodnota 75 mu z důvodu absence kontroly svých výsledků se zadáním nepřipadala jako nesprávná. Nelze totiž tuto chybu svádět na to, že by Michal zapomněl, že počítá hodnotu slevené ceny, neboť v následném výpočtu hodnotu 75 zedů odečetl (tj. věděl, že sleva znamená snížení ceny). Výpočet 500 -75 naznačuje, že z **nepozornosti (ch26)** si Michal za plnou cenu jízdného dal limit ceny pro danou třídu.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Na tuto fázi Michalovi nezbyl čas.

Řešitel David

Úloha č. 3:



Obr. C.34

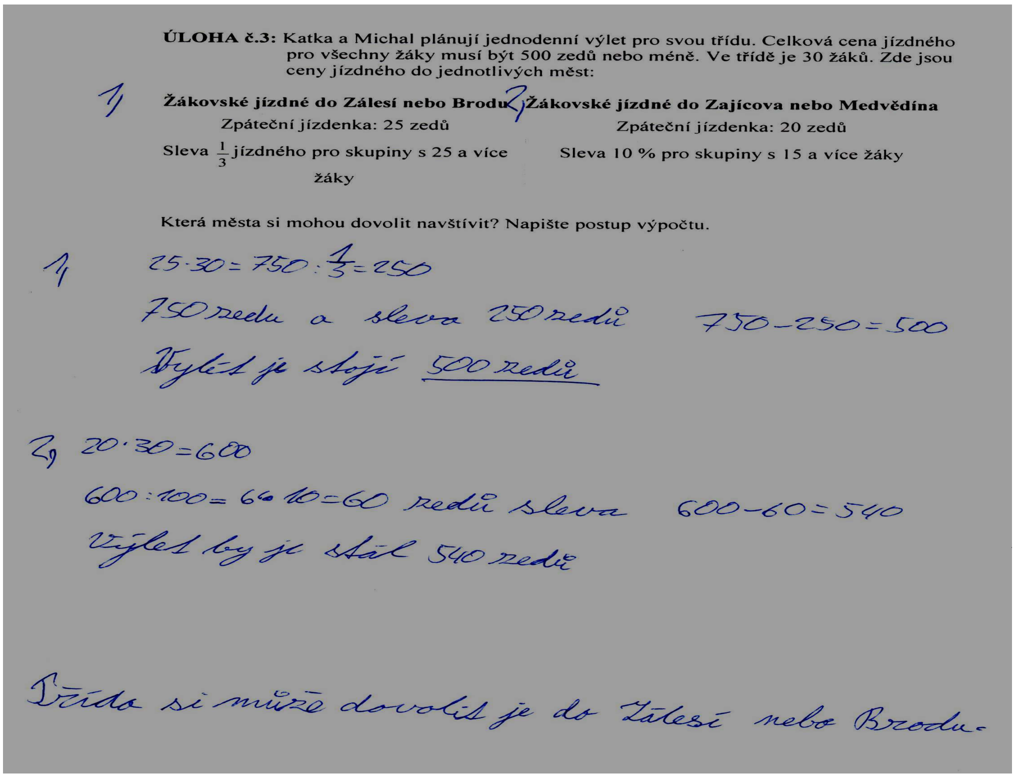
- **Identifikace problému:** David uchopil úlohu s porozuměním. Vytvořil si docela podrobnou slovní legendu, ve které správně zaznamenal fakt, že 500 zedů je limitem pro cenu jízdného pro celou třídu.
- **Vytvoření plánu řešení:** David pochopil, že je třeba vypočítat slevu pro jednotlivce a poté ji vynásobit počtem žáků a získanou hodnotu odečíst od plné ceny jízdného pro třídu.
- **Realizace plánu řešení:** David strávil dost času nad počítáním slev, problémem bylo, že z **nepozornosti (ch26)** (tak to řekl sám experimentátorovi, když ten ho koncem hodiny na danou skutečnost upozornil) počítal slevu ze základu 30, což není cena jízdného, ale počet žáků ve třídě. Nutno dodat, že 10 % ze 30 vypočítal David správně, **chyby numerické (ch32)** se dopustil u výpočtu, kdy byla sleva zadána zlomkem. Získané hodnoty slev odečetl správně od cen jízdného pro jednotlivce a násobil tento

rozdíl počtem žáků ve třídě, aby získal celkové zlevněné jízdné. Postup tedy zvolil správný. Pochopil i význam slova sleva, jen se chybou z nepozornosti připravil o správně vyřešený příklad. Když ho totiž na zmíněné chyby upozornil experimentátor, tak už jen správně vypočetl zlevněné jízdné do Zajícova či Medvědína a v případě počítání třetinové slevy z 25 opět udělal numerickou chybu. Více nestihl.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Na tuto fázi nezbyl čas.

Řešitel Jakub

Úloha č. 3


ÚLOHA č.3: Katka a Michal plánují jednodenní výlet pro svou třídu. Celková cena jízdného pro všechny žáky musí být 500 zedů nebo méně. Ve třídě je 30 žáků. Zde jsou ceny jízdného do jednotlivých měst:

1) **Žákovské jízdné do Zálesí nebo Brodu** | 2) **Žákovské jízdné do Zajícova nebo Medvědína**

Zpáteční jízdenka: 25 zedů | Zpáteční jízdenka: 20 zedů

Sleva $\frac{1}{3}$ jízdného pro skupiny s 25 a více žáky | Sleva 10 % pro skupiny s 15 a více žáky

Která města si mohou dovolit navštívit? Napište postup výpočtu.

1) $25 \cdot 30 = 750 : \frac{1}{3} = 250$

750 zedu a sleva 250 zedů $750 - 250 = 500$

Výlet je stojí 500 zedů

2) $20 \cdot 30 = 600$

$600 : 100 = 6 \cdot 10 = 60$ zedů sleva $600 - 60 = 540$

Výlet by je stál 540 zedů

Třída si může dovolit je do Zálesí nebo Brodu.

Obr. C.35

- **Identifikace problému:** Jakub uchopil úlohu s porozuměním. Slovní legendu si nezapsal, neboť ji poskytuje v přehledné podobě zadání úlohy.

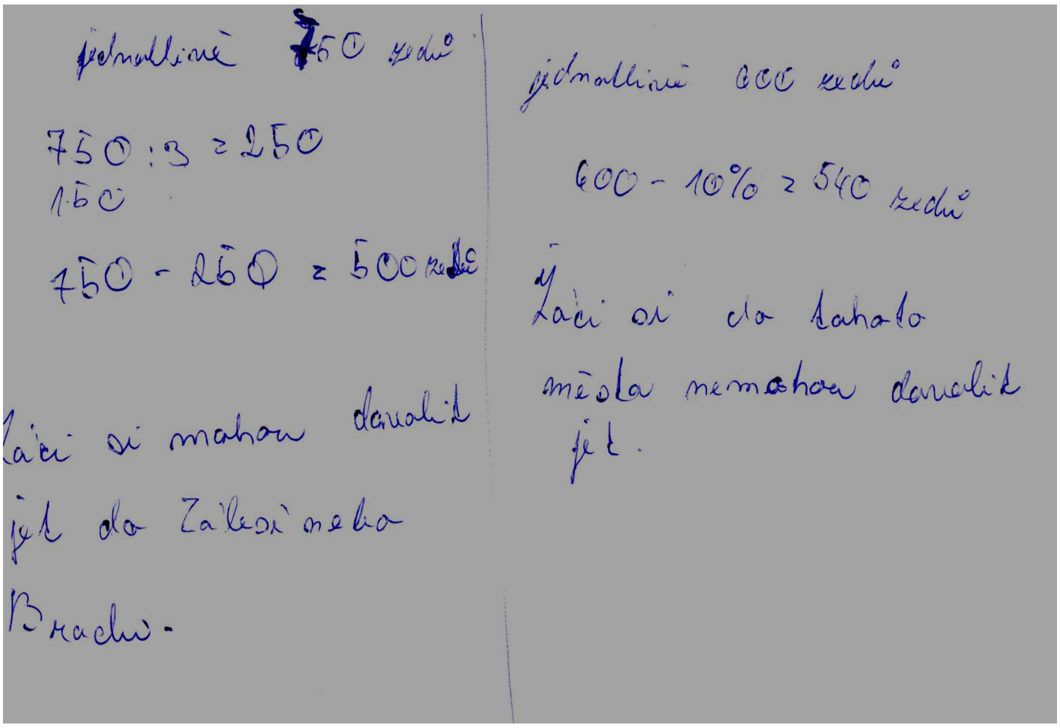
- **Vytvoření plánu řešení:** Jakub si úlohu rozdělil na dvě podúlohy, v nichž použil analogickou strategii výpočtu. Tato sestává z výpočtu nezlevněného jízdného pro celou třídu a následně z výpočtu hodnoty slevy pro celou třídu. Tuto hodnotu pak Jakub odečetl od nezlevněného jízdného a získal tak zlevněné jízdné. Pojem slevy tedy uchopil s porozuměním.

- **Realizace plánu řešení:** Jakub nejprve spočítal hodnotu nezlevněného jízdného do Zálesí pro celou třídu. Cenu 25 zedů násobil správně počtem žáků třídy. Následující výpočet obsahuje chybu. Při výpočtu třetiny z 750 zedů použil Jakub **chybné operace dělení (ch22),** namísto aby násobil. Výsledek 250 zedů je však správný, tj. u Jakuba chyba spočívala ve **znalostní struktuře (ch17)** (Jakub nemá správně uloženo, že dělení zlomkem znamená násobení převrácenou hodnotou). Zlevněnou cenu jízdného pro celou třídu pak Jakub získal korektně zvolenou operací odečítání hodnoty slevy od nezlevněného jízdného. Analogicky a tentokrát již bez chyby Jakub vypočítal zlevněné jízdné do druhé destinace. Jakubovi by bylo možné ještě vytknout nesprávné používání rovnítka, viz. 600 : 100 = 6 · 10 = 60 (**ch18**). Takový zápis není pravdivý a spojuje dvě operace do jedné.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Jakub uvedl slovní odpověď na zadanou otázku. Ověřením mu bylo souhlasné pokývání experimentátora, který takto reagoval po zhlédnutí jeho řešení.

Řešitelka Leontýna

Úloha č. 3:



Obr. C.36

- **Identifikace problému:** Leontýna uchopila úlohu s porozuměním, což lze odečíst z výpočtů v úloze.

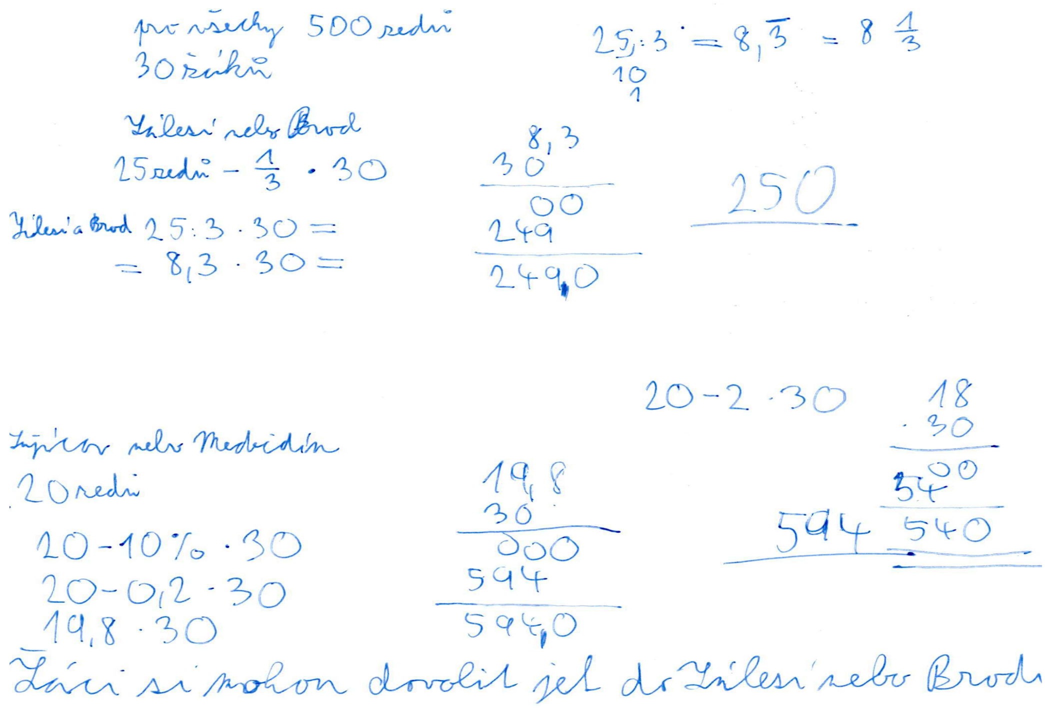
- **Vytvoření plánu řešení:** Leontýna použila dvě analogické strategie pro výpočet zlevněného jízdného pro celou třídu. Nejprve vypočetla celkové nezlevněné jízdné, z něho spočítala slevu a poté zjistila hodnotu zlevněného jízdného.

- **Realizace plánu řešení:** Leontýna uvedla cenu nezlevněného jízdného bez jakéhokoli výpočtu, což je zvláštní. Poté použila správně zvolenou operaci dělení 750 : 3, kde podíl dává hodnotu slevy z jízdného do Zálesí. Tuto slevu pak správně odečetla od nezlevněného jízdného. V případě výpočtu jízdného do druhé destinace si Leontýna nemohla vybavit, jak spočítat 10 % ze 600. Experimentátor si toho všiml a zeptal se: „Kolik je 10 % z 10?“ Leontýna nevěděla, tak experimentátor dodal, že k výsledku lze dospět, když vydělíme deset deseti. Leontýna tedy řekla: „Takže 10 % z 10 je jedna.“ S tím experimentátor souhlasil a zeptal se: „Kolik tedy bude 10 % z 600.“ Leontýna chvíli přemýšlela a řekla, že to bude 60. Následně trošku nešikovně zapsala:
600 – 10 % = 540 (**ch18**). Nicméně už si věděla rady. V předchozí situaci se u Leontýny projevilo **neuchopení pojmu procenta a počítání s nimi (ch17).**

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Leontýna uvedla slovní odpověď ke každé destinaci zvlášť.

Řešitel Jan 3

Úloha č. 3:



Obr. C.37

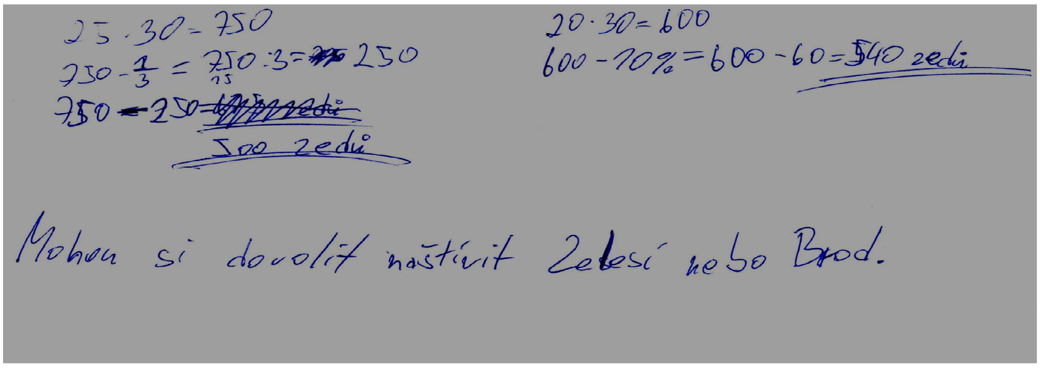
- **Identifikace problému:** Jan si zapsal stručnou slovní legendu a dle výpočtů lze říci, že uchopil úlohu s porozuměním.
- **Vytvoření plánu řešení:** Janova strategie spočívala ve výpočtu slevy pro jednotlivce a poté v násobení této slevy počtem žáků. Jan si však neuvědomil, že takto spočítá celkovou slevu pro celou třídu, neboť když k němu přišel experimentátor, aby zkontroloval celé jeho řešení a zeptal se ho, do kterého města mohou žáci jet, Jan odpověděl, že do Zálesí, protože to by je stálo 250 zedů. Experimentátor se v reakci na tuto odpověď zeptal, co v úloze označuje jedna třetina. Jan řekl, že jde o slevu z jízdného. Experimentátor se tedy zeptal, proč Jan násobil cenu jízdného jednou třetinou. Jan odvětil, že takto spočítá slevu pro jednoho. Experimentátor souhlasil a dodal, že když slevu pro jednoho vynásobíme počtem žáků třídy, tak získáme…, Jan odpověděl, že získáme celkovou slevu pro třídu. Experimentátor souhlasně pokývl hlavou. Bohužel Jan už neměl do zvonění dost času na korekci svého postupu. K výše uvedenému lze říci, že Jan se dopustil **chyby z nepozornosti (ch26).**
- **Realizace plánu řešení:** Jan se dopustil jedné chyby ještě dříve než došlo k té, která byla popsána v předchozím odstavci. Při výpočtu slevy z jízdného pro jednotlivce do Zálesí či Brodu získal správnou hodnotu 8, 333. Tuto hodnotu **předčasně zaokrouhlil (ch9)** a při násobení této hodnoty počtem žáků mu celková sleva vyšla o jeden zed menší než je 250 zedů. Experimentátor na to Jana upozornil ještě předtím, než mu vysvětlil, že hodnota 250 odpovídá celkové slevě pro třídu a nikoli zlevněné ceně. Jan si tedy vedle správně provedeného násobení pod sebou uvedl separátně hodnotu 250, kterou podtrhl. Při výpočtu slevy do druhé destinace se pak dopustil **chyby z nesprávně dosazených údajů do vhodně zvolené operace (ch25)**, když za 10 % z 20 označil 0,2 a poté za zlevněnou cenu pro jednotlivce považoval hodnotu 19,8 (neuvědomil si, že základem pro slevu je cena 20 zedů a ne 2 zedy). Na tuto chybu byl

Jan také upozorněn experimentátorem a opravil ji velmi rychle. Jak již bylo řečeno, na dokončení úlohy s opravenými výpočty neměl Jan dost času.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Jan uvedl správnou slovní odpověď ovšem až po korekcích od experimentátora.

Řešitel Tomáš

Úloha č. 3:

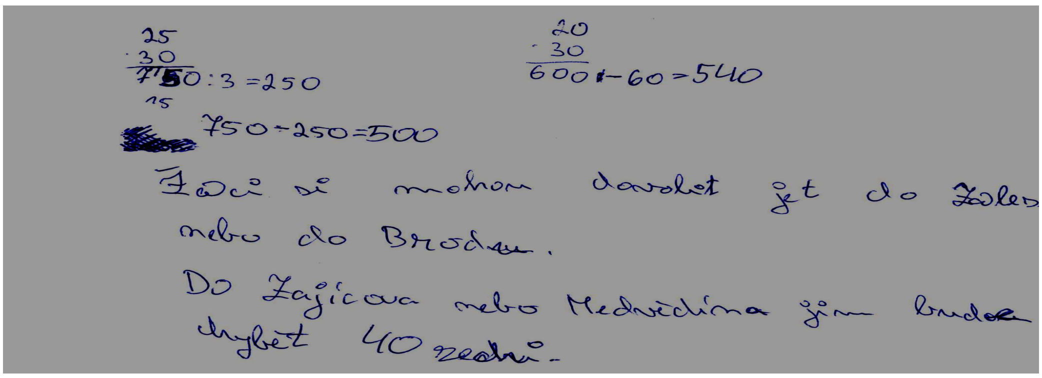


Obr. C.38

- **Identifikace problému:** Tomáš uchopil úlohu s porozuměním
- **Vytvoření plánu řešení:** Tomášova strategie jde od výpočtu celkového nezlevněného jízdného, přes výpočet celkové slevy pro třídu až k výpočtu zlevněné ceny pro daný třicetičlenný kolektiv.
- **Realizace plánu řešení:** Tomáš nejprve správně vynásobil cenu jízdného pro jednotlivce počtem žáků třídy. Následně vypočítal třetinovou resp. 10% slevu z nezlevněné ceny jízdného. Z výpočtů je vidět, že Tomáš s procenty zacházet umí, jen se dopouští drobné chyby v zápisu, když to na první pohled vypadá, že odečítá třetinu od sedmi set padesáti, přitom ale ví, že onu třetinu počítá z ceny nezlevněného jízdného .
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Tomáš zapsal slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Michaela

Úloha č. 3:



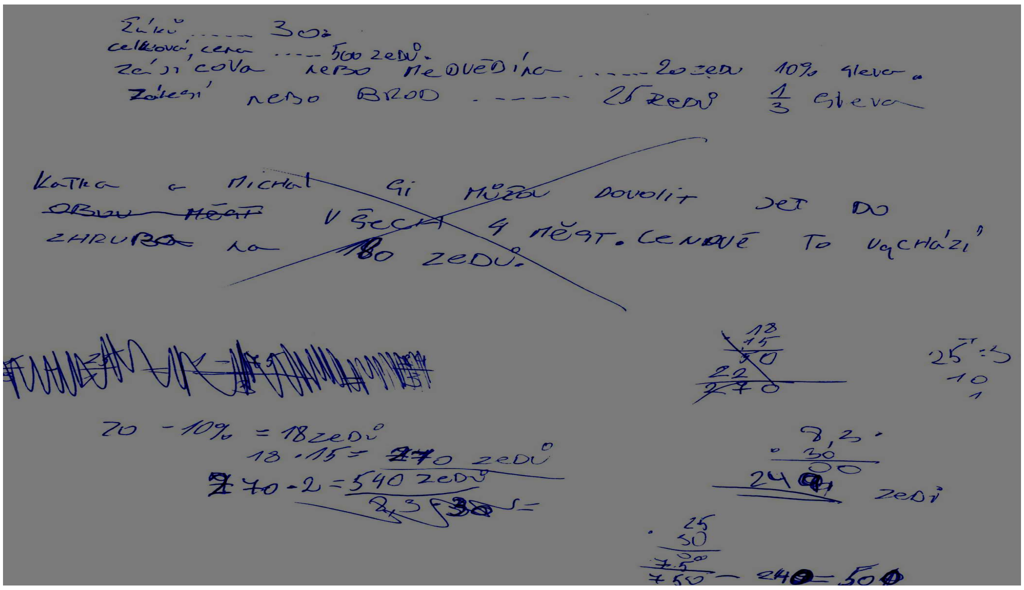
Obr. C.39

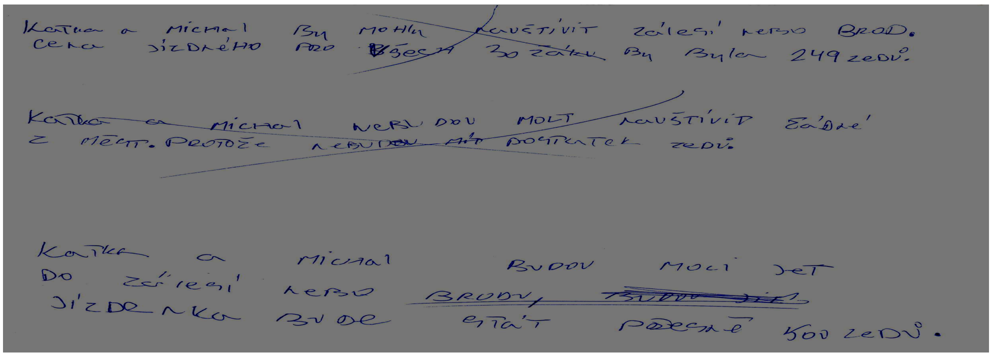
- **Identifikace problému:** Michaela uchopila úlohu s porozuměním

- **Vytvoření plánu řešení:** Michaela věděla, že musí dojít ke zlevněné ceně jízdného do obou destinací. Zvolila tedy strategii výpočtu nezlevněného jízdného a z něho poté chtěla vypočítat slevu.
- **Realizace plánu řešení:** Michaela vypočítala pro obě destinace správnou hodnotu nezlevněného jízdného. Následně spočítala korektně výši třetinové slevy z nezlevněného jízdného do Zálesí a tu správně odečetla od plného jízdného. V případě slevy do druhé destinace si ovšem opět přivolala experimentátora s tím, že neví, jak spočítat 10 % ze 600. Experimentátor tedy opět použil sérii návodných otázek: „Kolik je 10 % z 10, kolik 10 % ze 100 a kolik 10 % ze 600?“ Michaela váhavě odpověděla na první dotaz, že asi 1. Experimentátor souhlasil a následně dovedl Michaelu ke správné hodnotě slevy z jízdného do Zajícova. S tímto údajem už Michaela provedla správný výpočet, když ho odečetla od nezlevněného jízdného a došla k výsledku. U Michaely se tedy objevila **chyba neuchopení pojmu procenta a počítání s nimi (ch17)**.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Michaela zapsala slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitel Václav

Úloha č. 3:



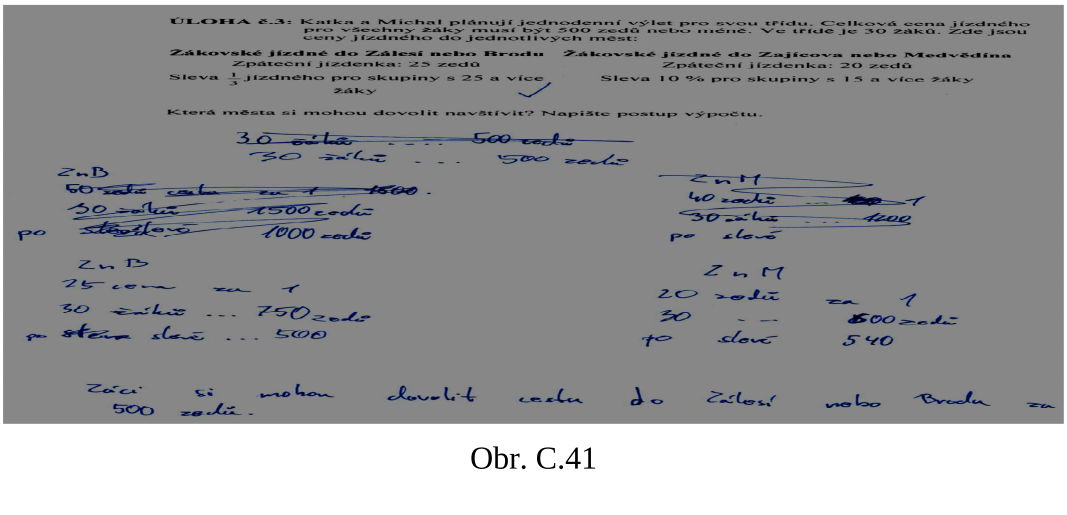


Obr. C.40

- **Identifikace problému:** Václav si zapsal slovní legendu, v níž se nevyskytuje žádná chyba. Úlohu tedy uchopil s porozuměním.
- **Vytvoření plánu řešení:** Václav věděl, že musí vypočítat výši zlevněného jízdného a měl v patrnosti i limit 500 zedů. Jeho strategie byla založena na výpočtu slevy z jízdného pro jednotlivce, kterou pak vynásobil počtem žáků ve třídě a odečetl od výše nezlevněného jízdného pro celou třídu.
- **Realizace plánu řešení:** Václavovi, ačkoli si vytvořil správnou slovní legendu, kde uvádí údaj o 30 žácích ve třídě, utanula na mysli pouze dvojice Katka a Michal, jejichž jména figurují v zadání hned v úvodu, a tak do doby příchodu experimentátora nejprve počítal s nezlevněným jízdným pro tyto dva žáky a myslel si, že mají v plánu jet do všech čtyřech měst zvlášť, proto jeho první odpověď zmiňuje, že Katka a Michal mohou cestovat do všech čtyř měst a stálo by je to 180 zedů. Zde tedy Václav v souladu s podmínkami zadání nezapočítal žádnou slevu, protože dva žáci na ní nemají nárok, ale on zcela zapomněl na údaj o 30 žácích. Experimentátor na dotaz, jak na toto přišel, dostal odpověď, že v první větě stojí, že Katka a Michal plánují výlet. Experimentátor ovšem dodal, že ten výlet plánují pro celou třídu, tj. všichni žáci pojedou na výlet a Katka a Michal jsou dvěma z těch třiceti žáků. Václav si přečetl celé zadání a s experimentátorem vyslovil souhlas. Chybu Václava by v tomto případě šlo označit za **chybu z nepozorné četby zadání (ch26).** Václav po této korekci již počítal rozumněji, ovšem opět se při výpočtu slevy do Zajícova podíval na nesprávné místo a z místa, kde je v zadání uvedena cena 20 zedů si vzal i údaj o 15 žácích a bral to tak, že ve třídě je 15 žáků (**ch26)**. Na tuto chybu jej s jistým zpožděním upozornil experimentátor a zdůraznil, že ve třídě je opravdu 30 žáků a údaje, které jsou uvedeny v zadání pro jednotlivé slevy se týkají počtu žáků, pro který už je možné slevu nárokovat. Václav, protože již nad úlohou strávil drahně času, tedy stihl do zvonění vypočítat pouze hodnotu slevy pro celou třídu pro případ cesty do Zálesí a i tady udělal chybu v **předčasném zaokrouhlení mezivýsledku (ch9)**, když správně získanou slevu pro jednoho 8,3333… zaokrouhlil na 8,3 a správně toto číslo násobil třiceti. Experimentátor ho včas upozornil, že zaokrouhlovat v tento moment nemůže, víc už toho Václav nestihl.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Václav při zvonění uvedl správnou slovní odpověď, ovšem opět v ní hovoří o Katce a Michalovi.

Řešitel Petr

Úloha č. 3:


ÚLOHA č.3: Katka a Michal plánují jednodenní výlet pro svou třídu. Celková cena jízdného pro všechny žáky musí být 500 zedů nebo méně. Ve třídě je 30 žáků. Zde jsou ceny jízdného do jednotlivých měst:

Žákovské jízdné do Zálesí nebo Brodu	**Žákovské jízdné do Zajícova nebo Medvědína**
Zpáteční jízdenka: 25 zedů	Zpáteční jízdenka: 20 zedů
Sleva $\frac{1}{3}$ jízdného pro skupiny s 25 a více žáky	Sleva 10 % pro skupiny s 15 a více žáky

Která města si mohou dovolit navštívit? Napište postup výpočtu.

~~30 žáků … 500 zedů~~
30 žáků … 500 zedů

ZnB
~~50 zedů cesta za 1 … 1500.~~
~~30 žáků 1500 zedů~~
po ~~slevě~~ 1000 zedů

~~ZnM~~
~~40 zedů … 1~~
~~30 žáků … 1200~~
po slevě

ZnB
25 cena za 1
30 žáků … 750 zedů
po slevě … 500

ZnM
20 zedů za 1
30 … 600 zedů
po slevě 540

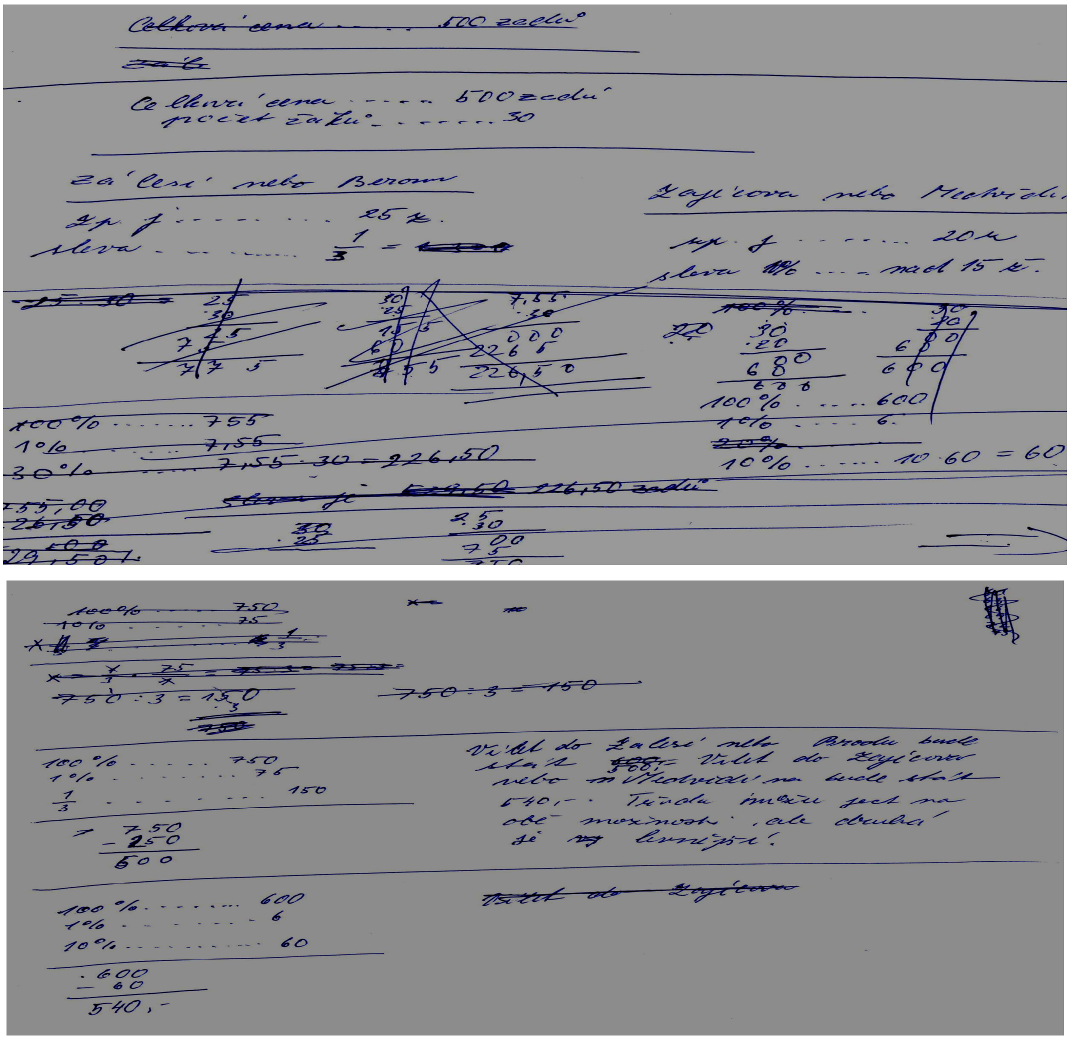
Žáci si mohou dovolit cestu do Zálesí nebo Brodu za 500 zedů.

Obr. C.41

- **Identifikace problému:** Petr uchopil úlohu s částečným porozuměním. Při pohledu na slovní legendy, které si nejprve vytvořil pro obě destinace zvlášť, je vidět, že nezlevněné jízdné pro jednoho žáka stojí 50 resp. 40 zedů. Experimentátor si tohoto faktu všiml a zeptal se, kde se tyto hodnoty vzaly. Petr odpověděl, že jízdenka stojí 25 resp. 20 zedů, ale žáci se také musí dostat zpátky. Experimentátor tedy Petrovi vyložil význam slova zpáteční jízdenka a napravil tak tento **nedostatek zkušeností z reálného světa (ch6).**
- **Vytvoření plánu řešení:** Petr si po předchozím vysvětlení pojmu zpáteční jízdenka vytvořil správný plán výpočtu nezlevněného jízdného pro celou třídu, z něhož si pak vypočítal slevu a odečetl jí od plné ceny jízdného.
- **Realizace plánu řešení:** Petr v hlavě vynásobil cenu jízdného pro jednoho žáka počtem žáků celé třídy a poté si také v hlavě spočítal třetinu ze 750 resp. 10 % z 600. Experimentátorovi řekl, že je to přeci jednoduché, a tak se nezdržoval příliš dlouhým zápisem. Všechny početní operace provedl Petr korektně.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Petr zformuloval slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Gabriela

Úloha č. 3:



Obr. C.42

- **Identifikace problému:** Gabriela uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala si slovní legendu, ve které uvádí správně všechny údaje včetně limitu pro cenu jízdného pro celou třídu.

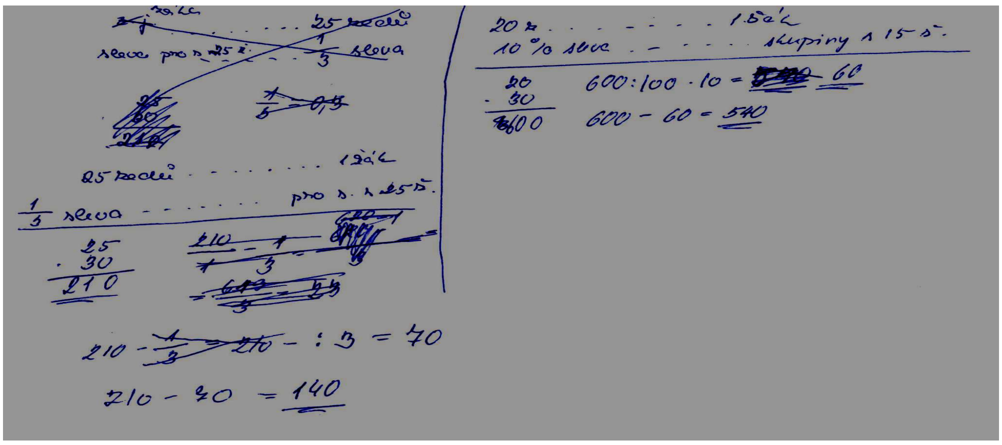
- **Vytvoření plánu řešení:** Gabriela si zvolila správnou strategii výpočtu, která spočívala ve zjištění nezlevněné ceny jízdného pro celou třídu a z něho poté chtěla určovat výši slevy.

- **Realizace plánu řešení:** Gabriela nejprve zjistila cenu nezlevněného jízdného pro celou třídu. Násobila pod sebou cenu 25 zedů počtem 30 žáků. Dopustila se ale numerické chyby ve správně zvolené operaci. Vyšlo jí totiž číslo 775, ze kterého se snažila zjistit jednu třetinu. Tuto nesprávně interpretovala jako 30 %, což lze označit za **chybu v neuchopení pojmu procenta a zlomku a počítání s nimi (ch17).** Gabriela po výpočtu 30 % ze 775 přešla na výpočet nezlevněného jízdného do Zajícova. V tento moment se experimentátora zeptala: „Když slevu dostane 15 žáků a ve třídě jich je 30, lze požadovat slevu 20 % namísto 10 %?“ Experimentátor Gabrielu upozornil, že v zadání je uvedeno, že sleva 10 % platí pro 15 a více žáků. Gabriela pokývala hlavou a počítala dále s 10 %. Výpočet 10 % z 600 na rozdíl od výpočtů jednotlivých cen u předchozí destinace provedla správně a zjistila tak správnou hodnotu slevy z jízdného do Zajícova. V tento moment experimentátor zpozoroval výše uvedenou numerickou chybu u násobení pod sebou a upozornil Gabrielu, že ten součin vychází trochu jinak. Gabriela tedy vše škrtla a spočítala znovu cenu nezlevněného jízdného do Zálesí. Experimentátor jí ovšem musel poradit, že třetinovou slevu zjistí tak, že nezlevněné jízdné rozdělí na tři stejné části a jednou z nich je ona sleva. Zdá se tedy, že Gabriela má **problémy s uchopením zlomků (ch17).** Po předchozí nápovědě Gabriela korektně vydělila 750 třemi. Dopustila se však **numerické chyby při dělení (ch32)** a výsledný podíl jí vyšel 150 zedů. Experimentátor jí tedy opět upozornil na chybu, kterou Gabriela korigovala a dospěla k výsledku.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Gabriela zformulovala správnou slovní odpověď na zadanou otázku.

Řešitelka Tereza 3

Úloha č. 3:



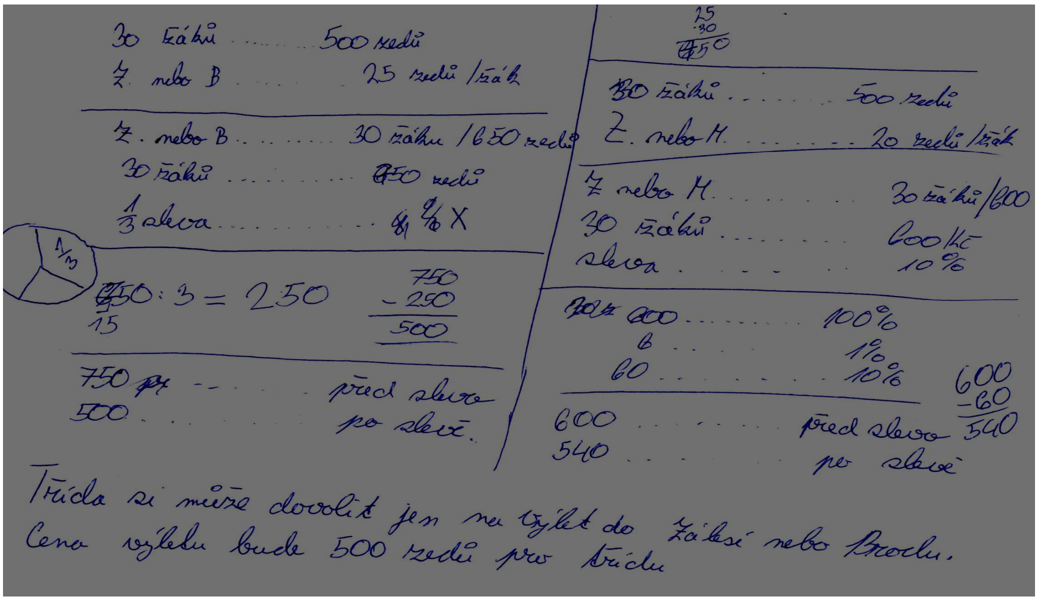
Obr. C.43

- **Identifikace problému:** Tereza uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala si slovní legendy, ve kterých zmiňuje všechny podstatné údaje, jen u údajů o slevě nezmiňuje, že ji lze nárokovat u skupin s 15 a více resp. 25 a více žáky. Tereza uvádí ona čísla jako by šlo pouze o hodnoty 15 a 25. Z následujících výpočtů je patrno, že si ale uvědomuje, že jde o celou množinu hodnot.

- **Vytvoření plánu řešení:** Tereza si zvolila strategii spočívající ve zjištění výše nezlevněného jízdného do obou destinací. Z těchto hodnot pak chtěla počítat výši slevy a tu odečíst od ceny nezlevněného jízdného pro 30 žáků.
- **Realizace plánu řešení:** Tereza postupovala správně v případě výpočtu zlevněné ceny jízdného do Zajícova. Korektně násobila pod sebou hodnotu 20 zedů počtem 30 žáků a správně určila hodnotu 10 % z 600. Tu poté správně odečetla od 600. V případě jízdy do Zálesí však udělala **numerickou chybu v násobení pod sebou (ch34).** Následně měla Tereza problém, jak určit slevu zadanou zlomkem. Ve výpočtu si neuvědomila, co je základem pro tu slevu a od chybné hodnoty 210 odečetla jednu třetinu (jako by základem byla 1 namísto 210). Došlo tedy k **chybě z neuchopení pojmu procenta a zlomku a počítání s nimi (ch17).** Experimentátor Tereze těsně před zvoněním explicitně řekl, že při zjištění třetinové hodnoty je třeba dělit třemi. Tereza však počítala s chybným údajem o nezlevněném jízdném, takže ačkoli je patrné, že pojem slevy chápe, nedospěla ke konečnému výsledku.
- **Ověřování a interpretace výsledku:** Tereza se k této fázi nedostala.

Řešitelka Kateřina

Úloha č. 3:



Obr. C.44

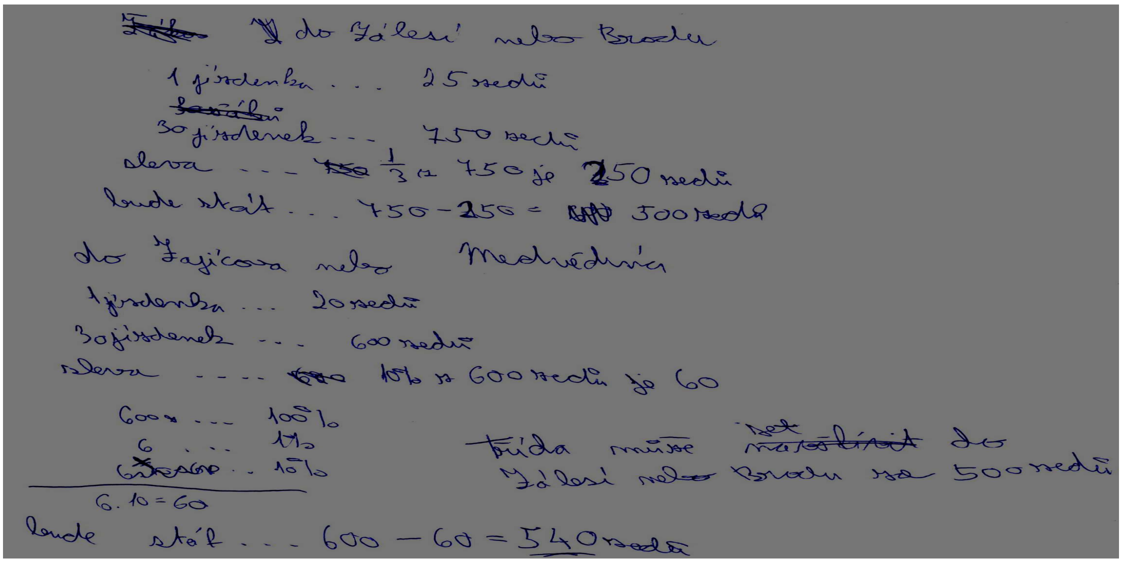
- **Identifikace problému:** Kateřina uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala si přehlednou a podrobnou slovní legendu.
- **Vytvoření plánu řešení:** Kateřina zvolila aritmetickou strategii. Nejprve chtěla vypočítat výši nezlevněného jízdného, z toho určila výši slevy a tu odečetla od nezlevněného jízdného.
- **Realizace plánu řešení:** Kateřina se v této fázi dopustila **numerické chyby v násobení pod sebou (ch34)**, když 25 zedů násobila počtem 30 žáků a za výsledek označila hodnotu 650. Na tuto chybu jí experimentátor upozornil a poté už Kateřina vše řešila s bravurou, tedy až na výpočet třetiny z 750. Zajímavé bylo, že si vedle

výpočtu naznačila izolovaný model třetiny, z něhož je patrné, že chápala, co počítá, ale nevěděla, pomocí jaké operace tuto třetinu vypočítat. Experimentátor jí řekl: „Vy víte, že máte celek rozdělit na tři část,i a v této větě už je řečeno jakou operaci použít.“ Kateřina pak už neváhala a zjistila hodnotu slevy i zlevněného jízdného.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Kateřina zformulovala slovní odpověď, která správně reaguje na zadanou otázku.

Řešitelka Lucie 2

Úloha č. 3:



Obr. C.45

- **Identifikace problému:** Lucie uchopila úlohu s porozuměním. Zapsala si slovní legendu, ve které chybí pouze údaj o tom, kdy lze uplatnit skupinovou slevu pro žáky.

- **Vytvoření plánu řešení:** Lucie zvolila aritmetickou strategii, kdy nejprve spočítala nezlevněnou cenu jízdného do obou destinací a z těchto hodnot pak počítala hodnotu slevy, kterou odečítala od nezlevněné ceny jízdného.

- **Realizace plánu řešení:** Lucie násobila bez problémů cenu pro jednoho žáka počtem žáků třídy. **Jediné numerické chyby (ch32)** se Lucie dopustila při výpočtu třetinové slevy ze 750, kterou označila hodnotou 150. Po upozornění od experimentátora tuto chybu opravila. V případě druhé destinace byly její výpočty bezchybné.

- **Ověřování a interpretace výsledku:** Lucie zformulovala slovní odpověď na zadanou otázku.