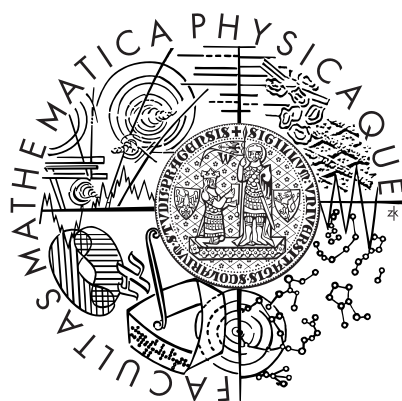


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jan Šmejkal

## Modelování výnosových křivek

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2013

## Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat panu doc. RNDr. Janu Hurtovi, CSc. za jeho čas i trpělivost a za rady a připomínky, kterými mi velmi pomohl při zpracování této diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2. 8. 2013

Jan Šmejkal

Název práce: Modelování výnosových křivek

Autor: Jan Šmejkal

Katedra / Ústav: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Výnosové křivky, tj. křivky udávající pro určitou skupinu cenných papírů závislost výnosu na době do splatnosti, jsou v praxi důležitým nástrojem pro oceňování aktiv a pasiv i finanční rozhodování. Teoretická bezriziková výnosová křivka pak udává časovou strukturu bezrizikových úrokových měr, které slouží např. k ocenění závazků při tvorbě rezerv v pojištnictví i jako srovnávací ukazatel při ocenění různých aktiv na trhu. Při konstrukci výnosových křivek se pak setkáváme s tím, že pozorovaná aktiva nejsou na trhu k dispozici pro všechny splatnosti. Proto se používají různé matematické metody, s jejichž pomocí dokážeme křivku zkonstruovat i pro nepozorované splatnosti. Některé z těchto metod představuje tato práce, a to včetně metody Svenssonovy, jež je jednou z nejdůležitějších a nejpoužívanějších metod v oblasti konstrukce výnosových křivek. Pomocí ní potom v této práci zkonstruujeme kupónovou výnosovou křivku z českých státních dluhopisů s cílem konstrukce bezrizikové bezkupónové výnosové křivky. Dále se v práci zabýváme použitím vah pro různé dluhopisy, čímž se snažíme dosáhnout lepšího zpětného ohodnocení vstupních dluhopisů pomocí výsledné křivky, a také hledáním takové křivky, která při zpětném ohodnocení dluhopisů minimalizuje přímo střední kvadratickou odchylku pozorovaných a spočtených cen. Protože u dluhopisů s dlouhými splatnostmi se může objevovat problém s likviditou, aplikujeme všechny zmíněné postupy i na množinu vstupních dat omezenou na dluhopisy se splatností do 15ti let. Následně porovnáme výsledky získané těmito různými způsoby. Na závěr pak pomocí metody bootstrap odvodíme z kupónové křivky bezkupónovou, což je naším hlavním cílem. Nakonec ještě ukážeme, jak budou vypadat z ní odvozené roční forwardové sazby a okamžitá forwardová křivka.

Klíčová slova: Výnosová křivka, interpolace, vyrovnávání, Nelson-Siegel, Svensson

Title: Modelling of yield curves

Author: Jan Šmejkal

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jan Hurt, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In practice, yield curves, i.e. plots of relation between yields and times to maturity for a group of comparable securities, are an important tool for assets and liabilities pricing as well as for financial decision making. The theoretical risk-free yield curve represents the term structure of interest rates that are used e.g. in insurance industry for pricing the liabilities, for which reserves are created, or also as a benchmark for pricing other assets in the market. When constructing the yield curve, it is not possible to observe yields of a group of assets for all maturities. That is why we use various mathematical methods which enable us to construct the yield curve also for unobserved maturities. In this thesis, some of these methods are introduced. The Svensson's method is one of the most important and frequently used ones. We use this method to derive the coupon curve from Czech government bonds aiming to construct the risk-free zero coupon yield curve. Later on, we use different weights for particular bonds trying to improve pricing of all the bonds based on the derived curve. Then, we also look for the curve that minimizes the mean squared error of estimated (compared to observed) prices. Because problems with liquidity can appear especially for long maturities, we apply all of the procedures to a reduced set of bonds – the bonds with maturity up to 15 years. Then, we compare the results gained in these different ways. After that, we extract the zero coupon curve from the coupon one using the bootstrap method. At the end, we show how the one-year forward rates and the instantaneous yield curve look like.

Keywords: Yield curves, interpolation, fitting, Nelson-Siegel, Svensson

# Obsah

Úvod	1
Seznam použitých symbolů	3
<b>1 Základní pojmy a definice</b>	<b>4</b>
1.1 Výnosové křivky	4
1.2 Základní modely výnosových křivek	5
1.3 Metody získání dat pro konstrukci výnosových křivek	7
1.3.1 Metoda STRIPS dluhopisů	7
1.3.2 Metoda bootstrap	8
1.4 Tvary výnosových křivek	9
<b>2 Odhad křivky</b>	<b>11</b>
2.1 Interpolace	12
2.1.1 Lineární interpolace	12
2.1.2 Interpolace polynomem	13
2.2 Model kubického splajnu	15
2.3 Vyrovnávání	19
2.3.1 Vyrovnávání polynomem	20
2.3.2 Nelsonův-Siegelův model	21
2.3.3 Svenssonův model	24
2.4 Srovnání metod	26
<b>3 Reálná data</b>	<b>28</b>
3.1 Vstupní data	28
3.2 Konstrukce kupónové výnosové křivky	31
3.2.1 Formulace optimalizační úlohy	31
3.2.2 Samotná konstrukce kupónové výnosové křivky	32
3.2.2.1 Nevážené vyrovnávání Svenssonovou funkcí	35
3.2.2.2 Vyrovnávání Svenssonovou funkcí s použitím vah	36
3.2.2.3 Minimalizace odchylek cen	41
3.2.2.4 Dluhopisy se splatností do 15 let	43
3.2.3 Výběr nejvhodnější křivky	46
3.3 Konstrukce bezkupónové křivky - metoda bootstrap	47
3.4 Konstrukce forwardové křivky	51
<b>Závěr</b>	<b>54</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>57</b>

Seznam tabulek	59
Přílohy	60

# Úvod

Jedním z důležitých nástrojů pro oceňování aktiv a pasiv a finanční rozhodování je aparát výnosových křivek, zejména bezrizikové výnosové křivky.

Výnosová křivka obecně je grafické znázornění výnosu do splatnosti určitého aktiva, resp. skupiny aktiv stejného typu (bude upřesněno v kapitole 1), v závislosti na době do jeho splatnosti. Bezriziková výnosová křivka je pak výnosová křivka bezrizikového aktiva, za něž jsou obvykle považovány statní dluhopisy. Pro danou splatnost pak výnos do splatnosti bezrizikového aktiva představuje bezrizikovou spotovou úrokovou míru na dané období. Ta se potom používá pro diskontování budoucích peněžních toků plynoucích z držení aktiva i k ohodnocení závazků, což by měl být základ při posuzování jakéhokoli investičního projektu, tvorbě rezerv např. v pojišťovnictví, ale i v mnoha dalších oblastech.

Protože žádná skupina aktiv stejného typu není na trhu k dispozici pro všechny možné splatnosti, ale na časové ose splatností máme vždy jen izolované body, je třeba najít způsob, jak pro danou skupinu aktiv zkonstruovat celou výnosovou křivku, tedy „zjistit“ výnosy i pro splatnosti, které na trhu nejsou.

Prvním cílem této práce proto bude představit některé hlavní metody, které se ke konstrukci výnosových křivek používají, provést jejich srovnání a ukázat aplikaci na ukázkových datech.

V první kapitole nejprve zavedeme základní pojmy a definice související s modelováním výnosových křivek, které potom budeme dále používat. Některé základní pojmy a vztahy z finanční matematiky, zejména týkající se cenných papírů a složeného a spojitého úročení, přitom však nebudeme připomínat. V případě potřeby je možné je nalézt např. v [1].

Druhá kapitola se bude zabývat konkrétními metodami používanými ke konstrukci výnosových křivek. V její první části půjde o interpolaci pozorovaných bodů, tedy o konstrukci takové křivky, která všemi pozorovanými body prochází. Ukážeme interpolaci po částech lineární funkcí a polynomem.

V druhé části druhé kapitoly se pak budeme zabývat vyrovnáváním pozorovaných dat, tedy postupem, kdy máme křivku předem daného tvaru a hledáme její parametry tak, aby součet čtverců odchylek této křivky od pozorovaných dat byl minimální. Ukážeme vyrovnávání kubickým polynomem a poté se dostaneme k o něco složitějším funkcím, které však při vyrovnávání dávají výrazně lepší výsledky. První z nich bude Nelsonova-Siegelova parametrická funkce známá již od roku 1987. Další bude rozšíření Nelsonova-Siegelova modelu představené v roce 1995 Larsem E. O. Svenssonem známé jako Svenssonův model. V těchto dvou případech, zejména v případě Svenssonova modelu, jde o modely, které jsou

v praxi ke konstrukci výnosových křivek často používány jak v soukromé sféře (např. pojišťovny), tak i některými centrálními bankami (např. Evropská centrální banka).

Na pomezí mezi částmi druhé kapitoly zabývajícími se interpolací a vyrovnáváním představíme model kubického splajnu, tj. po částech kubické funkce, kde kubické polynomy na sebe navazují v předem zvolených uzlových bodech.<sup>1</sup> Zařazení kubického splajnu mezi uvedené části druhé kapitoly plyne z faktu, že splajn lze použít jak k interpolaci, tak k vyrovnávání. Jak uvidíme, toto záleží na volbě uzlů a vyhlazující konstanty.

V poslední, třetí, kapitole si pak vytyčíme druhý cíl této práce. Budeme chtít ukázat kompletní postup konstrukce bezrizikové výnosové křivky na příkladu českých státních dluhopisů. Jako vstupní data vezmeme tržní ceny těchto dluhopisů k 7. 5. 2013 a doby do jejich splatnosti. Z těch lze spočítat výnosy do splatnosti, které nám spolu s dobami do splatnosti poslouží jako základ (pozorované body) pro konstrukci první výnosové křivky, a to křivky kupónové (je konstruována z kupónových dluhopisů). K tomuto účelu využijeme Svenssonův model, neboť, jak jsme již zmínili, dává dobré výsledky a je v praxi často používán.

Přitom vyzkoušíme a zhodnotíme i možnost přiřazení různých vah pozorovaným bodům. Dále zkusíme, jak se výsledná kupónová křivka změní, když místo odchylek výnosů do splatnosti budeme minimalizovat odchylky pozorovaných cen dluhopisů od cen spočtených na základě hledané křivky, a také se podíváme, jak bude vše vypadat, pokud vezmeme v úvahu pouze dluhopisy se splatností do 15ti let.

Dalším krokem bude odvození bezkupónové křivky z kupónové. K tomu použijeme teoretické kupónové dluhopisy dané kupónovou křivkou, na které aplikujeme metodu známou jako bootstrapping. Takto získaná bezkupónová výnosová křivka může být považována za bezrizikovou výnosovou křivku neboli časovou strukturu bezrizikové spotové úrokové míry.

V závěru třetí kapitoly pak ještě odvodíme bezrizikové jednoleté forwardové úrokové sazby a zkonstruujeme okamžitou forwardovou výnosovou křivku, čímž konstrukci výnosových křivek z českých státních dluhopisů zkompletujeme.

---

<sup>1</sup>Ve smyslu bodů na ose s dobou do splatnosti, nikoli bodů v prostoru dvojic doba do splatnosti - výnos do splatnosti.

## Seznam použitých symbolů

$P(T)$	Cena bezkupónového bezrizikového dluhopisu s jednotkovou nominální hodnotou splatného za $T$ období v čase 0, $T \geq 0$
$R(T)$	Spotová úroková míra v čase 0 na $T$ období, $T \geq 0$ , při složeném ročním úročení
$r(T)$	Spotová úroková míra v čase 0 na $T$ období, $T \geq 0$ , při spojitém úročení
$F(T, T + S)$	Forwardová úroková míra v čase 0 na dobu od $T$ do $T + S$ , $T \geq 0$ , $S \geq 0$ , při složeném ročním úročení
$f(T)$	Okamžitá forwardová úroková míra platná v čase 0 pro čas za $T$ období, $T \geq 0$
$\delta(T)$	Diskontní funkce v čase 0 na $T$ období, $T \geq 0$
$D$	Durace
$D^M$	Modifikovaná durace

# 1 Základní pojmy a definice

V této kapitole uvedeme základní pojmy a definice, které budeme používat v další části textu. Představíme základní modely výnosových křivek a ukážeme, jak se v praxi získávají data sloužící jako podklad pro konstrukci výnosových křivek.

## 1.1 Výnosové křivky

V první řadě definujme, co je vlastně výnosová křivka.

**Definice:** *Výnosové křivky (Yield curves), někdy též označované jako časová struktura úrokových sazeb (Term Structure of Interest Rates)<sup>2</sup>, vyjadřují závislost výnosů cenných papírů (dluhopisů) určitého typu<sup>3</sup> na době do jejich splatnosti.*

Přestože je možné konstruovat výnosové křivky z různých typů dluhopisů, nejčastěji se používají státní dluhopisy, a to z několika důvodů. Uvedme hlavní dva. Za prvé je třeba mít k dispozici co největší množství dluhopisů různých splatností. Mállokterá soukromá společnost emituje dostatečné množství dluhopisů rozdílných splatností. I když by bylo možné kombinovat dluhopisy různých společností, narazili bychom pravděpodobně na problém s odlišnými ratingy těchto společností. Dalším problémem dluhopisů soukromých firem jsou ve srovnání s vládní sférou malé objemy emise. Tím se může zmenšovat okruh investorů, kterým jsou obligace nabízeny (z důvodu malých objemů obchodů s nimi). Ceny pozorované na trhu pak nemusejí tak přesně odrážet očekávání investorů ohledně dění na trhu. [4] Naopak Ministerstvo financí České republiky je největším emitentem dluhopisů denominovaných v českých korunách, a proto se v této práci zaměříme na konstrukci výnosových křivek ze státních dluhopisů.

Další používanou možností je například konstrukce z úrokových swapů. Metody, které v této práci představíme, lze aplikovat i na data úrokových swapů. Při výběru vstupních dat záleží především na tom, k čemu má výsledná křivka sloužit. Vzhledem k tomu, že většina závazků v pojišťovnictví je oceňována na základě křivky zkonstruované z dluhopisů (např. většina závazků České pojišťovny, a.s. je kryta převážně českými státními dluhopisy, a proto se závazky oceňují stejně

---

<sup>2</sup>Toto označení vychází ze vzájemného vztahu mezi výnosovými křivkami zejména a časovou strukturou úrokových měr, který přiblížíme v další části tohoto textu. Více informací je možné nalézt také například v [1] nebo [2].

<sup>3</sup>Za dluhopisy stejného typu považujeme dluhopisy se srovnatelným ratingem (rizikový faktor) a likviditou, obchodované ve stejném okamžiku a při stejných daňových podmínkách i očekávané budoucí inflaci. Pokud tyto podmínky nejsou splněny, můžeme dostat zcela jiné výsledky: Například výnosová křivka státních dluhopisů může být zcela odlišná od výnosové křivky korporátních dluhopisů firmy s ratingem AA. [1]

jako aktiva, která stojí proti nim), nebudeme se úrokovými swapy v této práci více zabývat.

Dalším důvodem pro konstrukci výnosových křivek ze státních dluhopisů je fakt, že státní dluhopisy jsou obvykle vnímány jako bezrizikové. Výnosová křivka státních dluhopisů tedy představuje bezrizikovou výnosovou křivku, resp. časovou strukturu (bezrizikových) úrokových sazeb, jež je potom používána pro oceňování ostatních aktiv i pro finanční rozhodování investorů. Výnos do splatnosti u státního dluhopisu s nulovým kupónem bývá totiž považován za (bezrizikovou) spotovou úrokovou míru při investici do bezrizikového aktiva na dobu odpovídající době do splatnosti tohoto dluhopisu.

Tedy při ročním úročení je úroková míra na  $T$  období v čase 0, nazývaná *spotová úroková míra při (složeném) ročním úročení*  $R(T)$  na  $T$  období v čase 0, dána vztahem

$$P(T) = \frac{1}{(1 + R(T))^T}, \quad (1)$$

kde  $P(T)$  je *cena bezkupónového státního dluhopisu v čase 0 se splatností za  $T$  období*<sup>4</sup>.

Podobně *spotová úroková míra při spojitém úročení*  $r(T)$  na  $T$  období v čase 0 je dána vztahem

$$r(T) = -\frac{\ln P(T)}{T}. \quad (2)$$

V další části této práce se tedy zaměříme zejména na konstrukci výnosových křivek ze státních dluhopisů a budeme v právě uvedeném smyslu považovat pojmy „výnos do splatnosti bezkupónového dluhopisu“ a „spotová úroková míra“ považovat za ekvivalentní, nebude-li třeba tyto rozlišit z jiného důvodu.

## 1.2 Základní modely výnosových křivek

Existuje několik základních modelů, které se liší podle toho, s jakými úrokovými sazbami pracujeme. Základním stavebním kamenem je *výnosová křivka bezkupónového dluhopisu*, neboli křivka znázorňující závislost spotové úrokové sazby  $R(T)$  při složeném ročním úročení nebo  $r(T)$  při spojitém úročení (v okamžiku 0 na  $T$  období) na čase. Dále se často používají *forwardová sazba v čase 0 platná od času  $T$  na  $S$  období*  $F(T, T+S)$ , *okamžitá forwardová sazba*  $f(T)$  v čase 0 platná pro čas  $T$  nebo *diskontní funkce*  $\delta(T) : T \mapsto P(T)$  pro diskontování do času  $T$ .

---

<sup>4</sup>Za jedno období bývá obvykle považován jeden rok.  $T$  tak často není celé číslo. V takovém případě je třeba určit, kterým standardem po počet dnů se budeme řídit. V této práci budeme používat kalendář 30/360, který se v praxi běžně používá při práci s českými státními dluhopisy. Více informací o kalendářních konvencích je možné nalézt např. v [2].

Přitom pro případ složeného ročního úročení platí vztah (1) a dále také vztahy mezi spotovým a forwardovými mírami

$$F(T, T + S) = \left( \frac{(1 + R(T + S))^{T+S}}{(1 + R(T))^T} \right)^{1/S} - 1 \quad (3)$$

pro nějaké  $T, S \geq 0$  a

$$R(T) = \left( \prod_{i=1}^n (1 + F(T_{i-1}, T_i))^{T_i - T_{i-1}} \right)^{1/T} - 1, \quad (4)$$

kde  $i = 0, \dots, n$  pro nějaké  $n \in \mathbb{N}$  tak, že máme  $0 = T_0 \leq \dots \leq T_n = T$ .

Okamžitá forwardová míra je pak dána vztahem

$$f(T) = \lim_{S \rightarrow 0^+} F(T, T + S)$$

nebo také (odvození viz např. [2])

$$f(T) = -\frac{\partial \ln P(T)}{\partial T},$$

z čehož dostaneme

$$P(T) = e^{-\int_0^T f(u) du}.$$

S použitím (2) a známého vztahu mezi  $r(T)$  a  $R(T)$  (vztah mezi spojitým a složeným ročním úročením  $R(T) = e^{r(T)} - 1$  neboli  $r(T) = \ln(1 + R(T))$ ) pak odtud dostaneme i vztahy mezi spojitě úročenou spotovou a okamžitou forwardovou mírou

$$r(T) = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du \quad (5)$$

a

$$f(T) = r(T) + T r'(T). \quad (6)$$

Na základě znalosti spotové výnosové křivky tak můžeme zkonstruovat křivku forwardovou či okamžitou a naopak, tj. každá z těchto křivek jednoznačně určuje ostatní. [5] Proto pokud budeme mluvit o výnosových křivkách, nebudeme rozlišovat, o jaký konkrétní typ jde, nebude-li to mít další konkrétní účel. Podobně můžeme od výnosových křivek přejít i k diskontní funkci.

Z právě uvedených typů výnosových křivek budeme nejčastěji využívat ty, které znázorňují spojitě úročené spotové míry, a na konkrétním případě reálných dat ukážeme také okamžitou forwardovou úrokovou míru (viz kapitola 3). Spotové úrokové míry  $r(T)$  totiž představují, jak jsme již řekli, výnos do splatnosti při spojitěm úročení (od kterého se dá v případě potřeby snadno přejít k ročně

úročenému výnosu do splatnosti) a okamžitá forwardová míra  $f(T)$  představuje očekávání ohledně tzv. *krátkodobé sazby*<sup>5</sup> v čase za  $T$ , která pro velmi malé  $\Delta T$  udává úrokovou míru pro časový interval  $[T + \Delta T]$  a která může být chápána jako ukazatel tržních očekávání ohledně budoucího vývoje měnové politiky centrální banky, jež představuje důležitou informaci jak pro centrální banku samotnou, tak pro ostatní účastníky trhu (viz např. [6]).<sup>6</sup> Dalším důvodem pro použití spojitě úročené spotové a okamžité forwardové úrokové míry v této práci je fakt, že v literatuře jsou modely výnosových křivek, kterými se budeme v této práci zabývat, většinou koncipovány právě pro tyto úrokové míry.

### 1.3 Metody získání dat pro konstrukci výnosových křivek

I u státních dluhopisů narážíme v praxi na několik problémů. Zejména jde o kupónové platby, jejichž výše ovlivňuje cenu dluhopisu, a tedy i výnos do splatnosti. Investoři obvykle preferují obligace s vyšším kupónem (kratší durací). Vlivem vyšší poptávky jsou pak ceny takových dluhopisů vyšší. Proto se jako vhodné jeví dluhopisy s nulovým kupónem. U těch se však problémem stává jejich omezené množství a nedostatek různých splatností.<sup>7</sup> I kdyby však na trhu byly v dostatečném množství a široké škále splatností, byly by pravděpodobně hlavně pro větší splatnosti méně likvidní než kupónové dluhopisy (právě z důvodu preference kupónových dluhopisů ze strany investorů). [4]

Tyto problémy se v praxi dají řešit několika způsoby. Dva nejčastěji používané jsou konstrukce výnosových křivek ze STRIPS<sup>8</sup> dluhopisů a konstrukce z bezkupónových i kupónových dluhopisů metodou bootstrap. Popíšme si nyní základní principy těchto metod podrobněji.

#### 1.3.1 Metoda STRIPS dluhopisů

Tato metoda je založena na myšlence rozdělení kupónového dluhopisu na jednotlivé kupónové platby a splátku jeho nominální hodnoty. Dluhopis s kupónovou platbou ve výši  $C$  a nominální hodnotou  $N$  tak bereme jako posloupnost bezkupónových dluhopisů s splatnostmi v časech výplaty kupónových plateb původního dluhopisu a nominálními hodnotami  $C$ , resp.  $N + C$  pro poslední dluhopis splatný v okamžiku splatnosti původního dluhopisu. Toto není jen teoretický nástroj, například vládní dluhopisy USA mohou být obchodovány tímto způsobem rozděleně

<sup>5</sup>Z anglického Short Rate. Krátkodobá sazba v čase 0 je dána jako  $\lim_{T \rightarrow 0^+} r(T)$ . Za krátkodobou sazbu bývá považována základní úroková sazba určovaná centrální bankou, tedy v případě České republiky dvoutýdenní repo sazba. [6]

<sup>6</sup>Nicméně tuto interpretaci je třeba brát s rezervou, což bude vidět i v závěru poslední kapitoly, kde okamžitou forwardovou křivku odhadneme.

<sup>7</sup>Bezkupónové dluhopisy se emitují většinou se splatností do jednoho roku. [4]

<sup>8</sup>Z anglického Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities.

jako cenné papíry nazývané STRIPS. [1] V České republice se však tento způsob konstrukce výnosových křivek nepoužívá, a proto se jím nebudeme podrobněji zabývat. Více informací je možné nalézt např. v [7].

### 1.3.2 Metoda bootstrap

Metoda známá jako *bootstrapping* (metoda postupného výpočtu) spočívá ve výpočtu teoretických výnosů bezkupónových dluhopisů postupným oceňováním cash flows plynoucích z kupónových dluhopisů s různými splatnostmi. Při oceňování využíváme formuli (případně její analogii pro spojitě úročení) pro současnou hodnotu dluhopisu s (ročním) kupónem  $C$ , nominální hodnotou  $N$  a dobou do splatnosti  $T$

$$PV = \frac{C}{1 + R(1)} + \frac{C}{(1 + R(2))^2} + \dots + \frac{C + N}{(1 + R(T))^T}.$$

Předpokládejme, že máme právě  $T$  dluhopisů se splatnostmi  $1, \dots, T$ , pevnými kupónovými platbami  $C_1, \dots, C_T$ , nominálními hodnotami  $N_1, \dots, N_T$  a tržními cenami  $P_1, \dots, P_T$ . Úrokovou míru pro první období spočítáme jako výnos do splatnosti  $R(1)$  prvního dluhopisu ze vztahu

$$P_1 = \frac{C_1 + N_1}{1 + R(1)}. \quad (7)$$

Pro druhé období dosadíme již získanou hodnotu  $R(1)$  do vztahu pro druhý dluhopis

$$P_2 = \frac{C_2}{1 + R(1)} + \frac{C_2 + N_2}{(1 + R(2))^2} \quad (8)$$

a získáme tak spotovou úrokovou míru na dvě období  $R(2)$ . Dále postupujeme rekurzivně: Pro známé sazby  $R(1), \dots, R(j-1)$  získáme  $R(j)$  ze vztahu

$$P_j = \frac{C_j}{1 + R(1)} + \frac{C_j}{(1 + R(2))^2} + \dots + \frac{C_j + N_j}{(1 + R(j))^j}. \quad (9)$$

Tímto postupem dostaneme spotové úrokové míry pro všech  $T$  období. Tuto metodu si v základní podobě můžeme ilustrovat na jednoduchém příkladu (viz Příklad níže).

V praxi se však u metody bootstrap setkáváme s tím, že splatnosti dluhopisů i kupónové platby nejsou na časové ose rozmístěny rovnoměrně (dluhopisy vyplácejí kupónové platby i nominální hodnoty k různým datům během roku). Metodu bootstrap pak není možné použít v právě uvedené formě, ale je nutné vyrovnávat data, která máme k dispozici, nějakou vhodnou křivkou. Na tento případ se detailněji podíváme v kapitole 3, kde v rámci konstrukce výnosové křivky

z českých státních dluhopisů ukážeme, jak se metoda bootstrap aplikuje na reálné kupónové dluhopisy se splatnostmi k různým měsícům i dnům v roce.

**Příklad** (Vycházíme z příkladu uvedeného v [4].)

Uvažujme tři vládní dluhopisy se splatnostmi jeden, dva a tři roky, kupónovými sazbami, aktuálními tržními cenami a nominálními hodnotami popsány v tabulce 1:

Tabulka 1: Dluhopisy pro příklad použití metody bootstrap

$i$	Typ dluhopisu	Splatnost	Kupónová sazba ( $c_i$ )	Tržní cena ( $P_i$ )	Nominální hodnota ( $N_i$ )
1	Bezkupónový	1 rok	0 %	96,65	100
2	S fixním kupónem	2 roky	3,8 %	99,85	100
3	S fixním kupónem	3 roky	6,4 %	105,67	100

Spočtěme si nyní pomocí metody bootstrap spotové úrokové míry, resp. výnosy do splatnosti pro teoretické bezkupónové dluhopisy, na jeden, dva a tři roky, tj.  $R(1)$ ,  $R(2)$  a  $R(3)$ .

- 1) V prvním kroku vypočteme  $R(1)$  jako výnos do splatnosti dluhopisu 1, tedy vyjádříme  $R(1)$  ze vztahu (7), čímž (po zaokrouhlení) dostaneme  $R(1) = 3,4661\%$ .
- 2) V druhém kroku použijeme tuto již známou úrokovou míru pro první období a spolu s ostatními známými hodnotami pro dluhopis 2 ji dosadíme do vztahu (8), z něhož vyjádřením  $R(2)$  dostaneme, že po zaokrouhlení je  $R(2) = 3,8873\%$ .
- 3) Nakonec použitím známých informací o třetím dluhopisu a již spočítaných úrokových měr  $R(1)$  a  $R(2)$  spočítáme pomocí vzorce (9) pro  $j = 3$  poslední hledanou míru, tj.  $R(3)$ . Po zaokrouhlení dostaneme  $R(3) = 4,3820\%$ .

## 1.4 Tvary výnosových křivek

Tvar výnosové křivky je možné zjednodušeně popsat ze tří hlavních hledisek (viz [4]). Jsou jimi úroveň, sklon a zakřivení.

*Úroveň* je dána bodem, ze kterého křivka vychází, tj. úrokovou sazbou pro nejkratší splatnost (tzv. *krátký konec křivky*). Krátký konec výnosové křivky je pod přímým vlivem centrální banky (jako dvoutýdenní repo sazba).

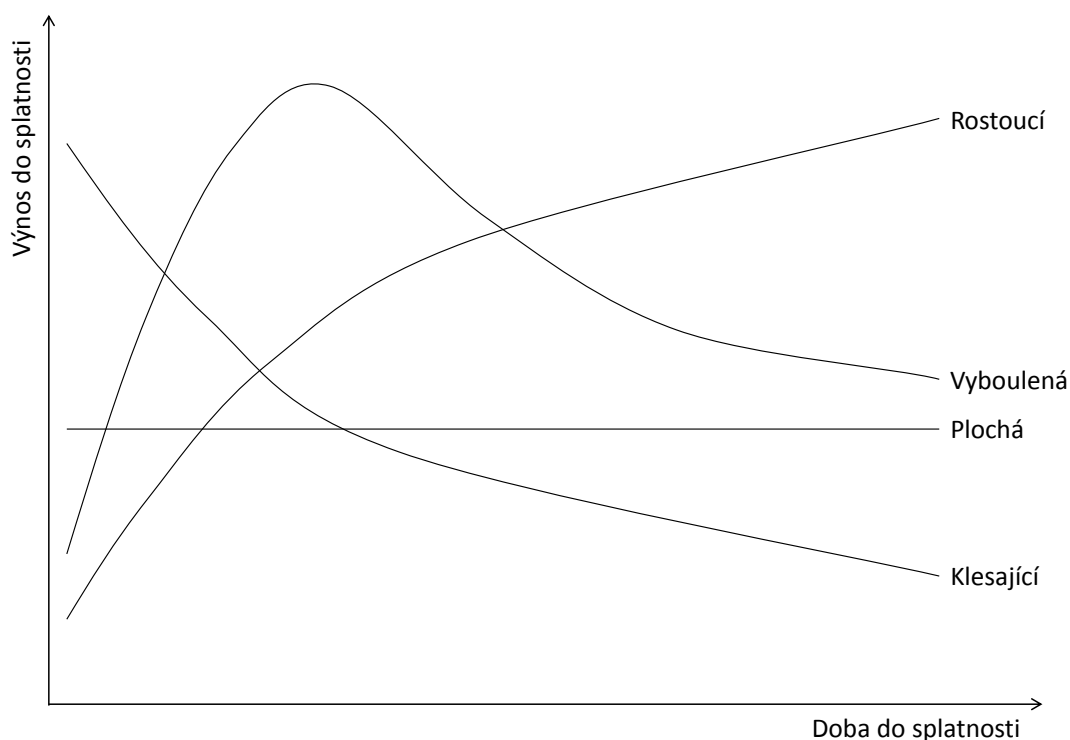
*Sklon* výnosové křivky bývá nejčastěji popsán jako rozdíl mezi sazbami na krátkém a *dlouhém konci křivky* (tzv. *termínový spread*, Yield Spread). Spread je nejvíce ovlivněn měnovou politikou centrální banky (na krátkém konci křivky) a očekáváním investorů ohledně budoucího vývoje sazeb (na dlouhém konci křivky).

*Zakřivení* odráží fakt, že závislost výnosů na době do splatnosti není lineární, tj. že výnosová křivka nemá tvar příjímky.

Většinou se v literatuře rozeznávají čtyři základní tvary výnosových křivek (viz obrázek 1):

- *rostoucí* (také *normální*, anglicky *normal yield curve*) výnosová křivka,
- *vyboulená výnosová křivka* (nebo také *výnosová křivka s „hrbem“*, anglicky *humped yield curve*),
- *plochá* (také *konstantní*, anglicky *flat yield curve*) výnosová křivka,
- *klesající* (také *invertovaná*, anglicky *inverted yield curve*) výnosová křivka.

V praxi se samozřejmě dále setkáváme s variací různých kombinací výše uvede-  
ných typů, jako například s křivkami s tvary podobnými písmenům S nebo U,  
což uvidíme i v dalších částech tohoto textu.



Obrázek 1: Základní tvary výnosových křivek

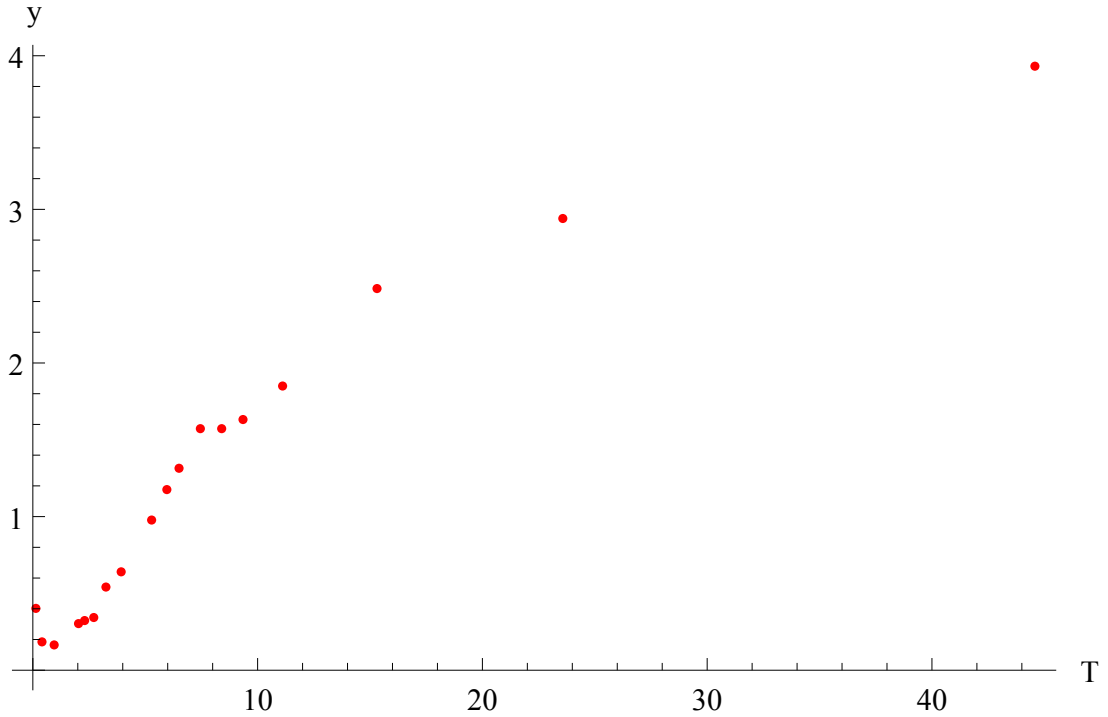
## 2 Odhad křivky

Představme si nyní, že máme dáno  $N$  bezkupónových dluhopisů  $1, \dots, N$  s jednotkovou nominální hodnotou, dobami do splatnosti  $T_1, \dots, T_N$  a výnosy do splatnosti  $y_1, \dots, y_N$ . Cílem této kapitoly bude představit možnosti, jak z daných dat odhadnout výnosy do splatnosti i pro splatnosti, které nemáme přímo k dispozici, tj. jak z daných dat zkonstruovat celou výnosovou křivku. Mezi nejjednodušší metody, jak tohoto cíle dosáhnout, patří použití modelů lineární interpolace nebo interpolace polynomem. V praxi se však lépe osvědčily sofistikovanější modely. Některým z nich se budeme také věnovat v další části této kapitoly. Použití každé z uvedených možností konstrukce výnosových křivek pak demonstrujeme na množině dat ve tvaru dvojic dob do splatnosti a k nim příslušných výnosů do splatnosti zadaných v tabulce 2 a znázorněných na obrázku 2. Dobu do splatnosti označme písmenem  $T$ , výnos do splatnosti pak písmenem  $y$ .

Pro demonstraci metod budeme používat software *Wolfram Mathematica 9*. Zdrojové kódy použité při těchto demonstracích je možné nalézt v příloze č. 1 na konci této práce.

Tabulka 2: Data pro ilustraci použitých metod

Doba do splatnosti (let)	Výnos do splatnosti
0,16	0,40 %
0,41	0,19 %
0,95	0,17 %
1,98	0,30 %
2,37	0,33 %
2,77	0,34 %
3,28	0,54 %
3,98	0,65 %
5,33	0,97 %
5,98	1,17 %
6,53	1,31 %
7,40	1,58 %
8,44	1,57 %
9,40	1,64 %
11,10	1,85 %
15,35	2,48 %
23,63	2,95 %
44,60	3,94 %



Obrázek 2: Data pro ilustraci použitých metod

## 2.1 Interpolace

### 2.1.1 Lineární interpolace

Asi nejjednodušším způsobem odhadu hodnoty neznámé funkce  $h$  v bodě  $T$  ležícím mezi dvěma body  $T_1$  a  $T_2$ , tj.  $T_1 < T < T_2$ , jejichž funkční hodnoty  $h(T_1)$  a  $h(T_2)$  známe (např. z pozorování nebo měření), je použití *lineární interpolace*. Ta spočívá ve spojení bodů  $T_1$  a  $T_2$  úsečkou  $g(t)$ ,  $t \in [T_1, T_2]$ , a aproximaci hodnoty  $h(T)$  hodnotou  $g(T)$ . Odhadnutá hodnota  $\widehat{h(T)}$  je tedy dána jako

$$\widehat{h(T)} = h(T_1) + \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} (h(T_2) - h(T_1)).$$

Většinou však známe více než dvě hodnoty hledané funkce (tj. známe hodnoty  $h(T_1), h(T_2), \dots, h(T_N)$  v bodech  $T_1 < T_2 < \dots < T_N$  pro nějaké přirozené  $N > 2$ ) a chceme aproximovat funkční hodnoty ve všech bodech z intervalu  $[T_1, T_N]$ . V takovém případě můžeme použít obdobný postup, kdy každé dva sousední body spojíme úsečkou, takže výsledkem je lomená čára  $g(t)$ ,  $t \in [T_1, T_N]$ , pro kterou platí

$$g(t) = g_i(t), \text{ pro } t \in [T_i, T_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

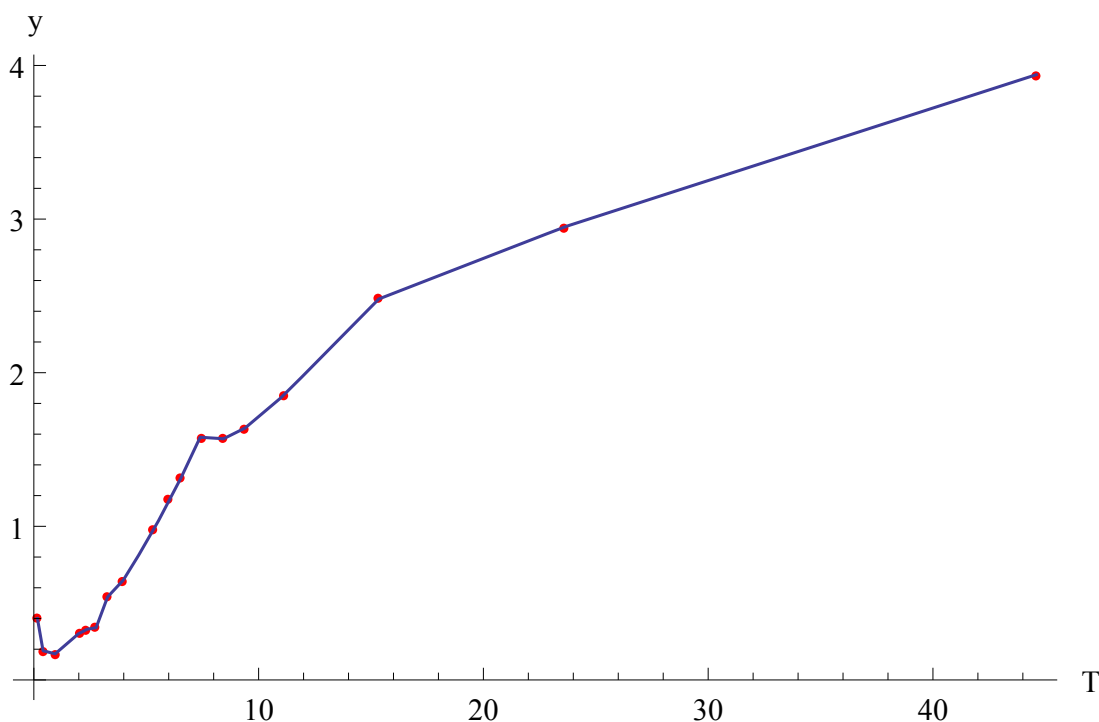
kde pro  $i = 1, \dots, N - 1$  jsou funkce  $g_i(t)$  definovány vztahem

$$g_i(t) = h(T_i) + \frac{t - T_i}{T_{i+1} - T_i} (h(T_{i+1}) - h(T_i)).$$

Tomuto postupu se říká *po částech lineární interpolace*<sup>9</sup>.

Hlavní výhodou lineární interpolace je její jednoduchost. Naopak mezi hlavní nevýhody patří to, že výsledná křivka (tj. lomená čára) není v bodech zlomu hladká, což je problém například při konstrukci okamžité forwardové křivky ze spotové křivky získané touto metodou. Okamžitá forwardová křivka totiž potom není spojitá - jde o po částech konstantní funkci.

Spotová výnosová křivka získaná z dat uvedených v tabulce 2 metodou lineární interpolace je znázorněna na obrázku 3.



Obrázek 3: Lineární interpolace

### 2.1.2 Interpolace polynomem

Dalším základním typem interpolace je *interpolace polynomem*. Máme-li v rovině zadaných  $N$  bodů  $[T_i, h(T_i)]$ ,  $i = 1, \dots, N$ , takových, že  $T_i \neq T_j$  pro  $i \neq j$ , existuje právě jeden (důkaz viz [8]) polynom  $g$  řádu nejvýše  $N - 1$  takový, že prochází všemi těmito body. Tento polynom se nazývá *interpolační polynom*. In-

<sup>9</sup>Po částech lineární interpolace bývá v literatuře často označována jen jako lineární interpolace. To je zřejmě z toho důvodu, že z kontextu je vždy patrné, co se pojmem lineární interpolace míní, dle počtu bodů, mezi nimiž interpolujeme. Proto budeme v některých dalších částech této práce také používat kratší pojem lineární interpolace i pro po částech lineární interpolaci.

terpolace polynomem spočívá v nalezení tohoto polynomu a aproximací hodnot funkce  $h(t)$  na intervalu  $[T_1, T_N]$  funkčními hodnotami  $g(t)$ .

Pro nalezení interpolačního polynomu existuje několik postupů, nicméně všechny vedou ke stejnému výsledku (jak jsme již zmínili, polynom je určen jednoznačně). Jedním z těchto postupů je konstrukce Lagrangeova interpolačního polynomu<sup>10</sup>, a zřejmě proto bývá interpolace polynomem někdy v literatuře označována jako Lagrangeova interpolace. Postup konstrukce Lagrangeova interpolačního polynomu je možné nalézt např. v [8].

Jinou možností konstrukce interpolačního polynomu je konstrukce pomocí soustavy lineárních rovnic. Hledaný polynom je totiž ve tvaru

$$P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i,$$

kde pro každé  $j = 1, \dots, N$  musí být splněna rovnost

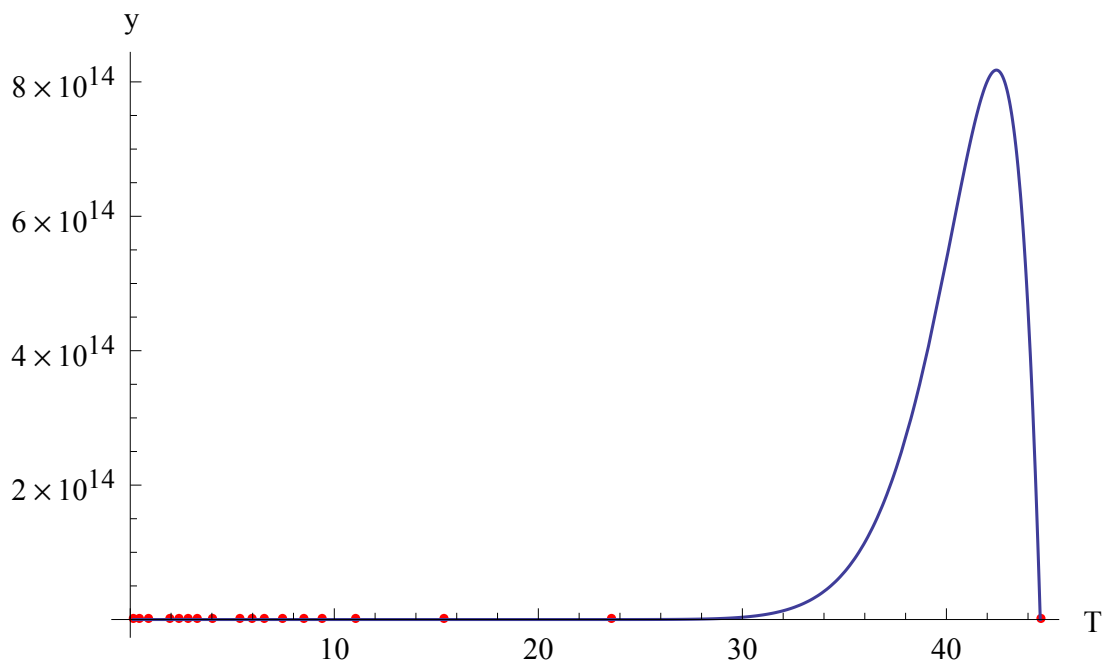
$$P_{n-1}(T_j) = h(T_j).$$

Dostáváme tedy soustavu  $N$  lineárních rovnic o  $N$  neznámých  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ .

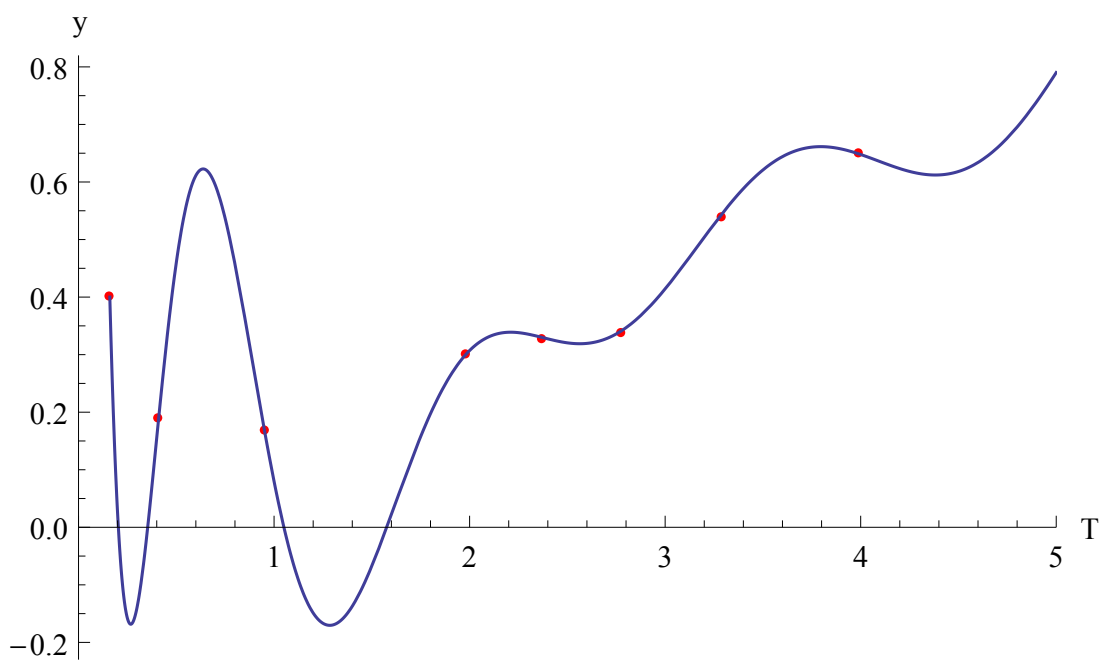
Funkce  $g$  (interpolační polynom) je pak v tomto případě sice dostatečně hladká, ale zejména při větším rozsahu dat, a tedy při větším počtu bodů, kterými polynom prochází, jsme často svědky katastrofického chování této funkce. Polynom totiž osciluje nad a pod hodnotami, kterými má procházet, a toto chování se s rostoucím počtem bodů zhoršuje. Výsledkem jsou pak naprosto nereálné hodnoty spotové výnosové křivky, viz obrázek 4 znázorňující interpolaci polynomem použitou na data z tabulky 2. Na obrázku 5 je pak vidět tato křivka pro splatnosti do 5 let. Další nevýhodou je velká citlivost na vstupní data. I malá změna jediné z pozorovaných spotových sazeb může způsobit zásadní změnu křivky. [6]

---

<sup>10</sup> Vzhledem k jednoznačnosti tohoto polynomu by možná bylo vhodnější říkat „Lagrangeova forma interpolačního polynomu“, nicméně pojem „Lagrangeův interpolační polynom“ bývá v literatuře často používán.



Obrázek 4: Interpolace polynomem



Obrázek 5: Interpolace polynomem - prvních 5 let

## 2.2 Model kubického splajnu

Jeden z v praxi často používaných modelů konstrukce výnosových křivek je *model kubického splajnu*. Definujme nejprve obecný splajn řádu  $k$ .

**Definice:** Necht je dána posloupnost bodů  $\{T_i\}_{i=1}^N$ , které nazveme uzly. Splajnem řádu  $k$  nazveme funkci  $g$ , která je v každém intervalu  $[T_i, T_{i+1}]$  polynomem stupně  $k$  a která má v celém definičním oboru spojitě derivace až do řádu  $k - 1$ .

Jak již vyplývá z názvu, kubický splajn je splajn řádu 3. O výnosové křivce  $g$  potom předpokládáme, že má právě tvar kubického splajnu, tedy

$$g(t) = g_i(t) \text{ pro } t \in [T_i, T_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

kde funkce  $g_i(t)$  jsou definovány jako

$$g_i(t) = \alpha_i + \beta_i t + \gamma_i t^2 + \delta_i t^3, \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

a je dvakrát spojitě diferencovatelná. Tyto podmínky dohromady dávají

$$g_{i-1}(T_i) = g_i(T_i), \quad g'_{i-1}(T_i) = g'_i(T_i), \quad g''_{i-1}(T_i) = g''_i(T_i), \quad i = 2, \dots, N - 1.$$

Z množiny všech takovýchto funkcí  $g$  potom vybereme funkci  $\hat{g}$ , která minimalizuje výraz

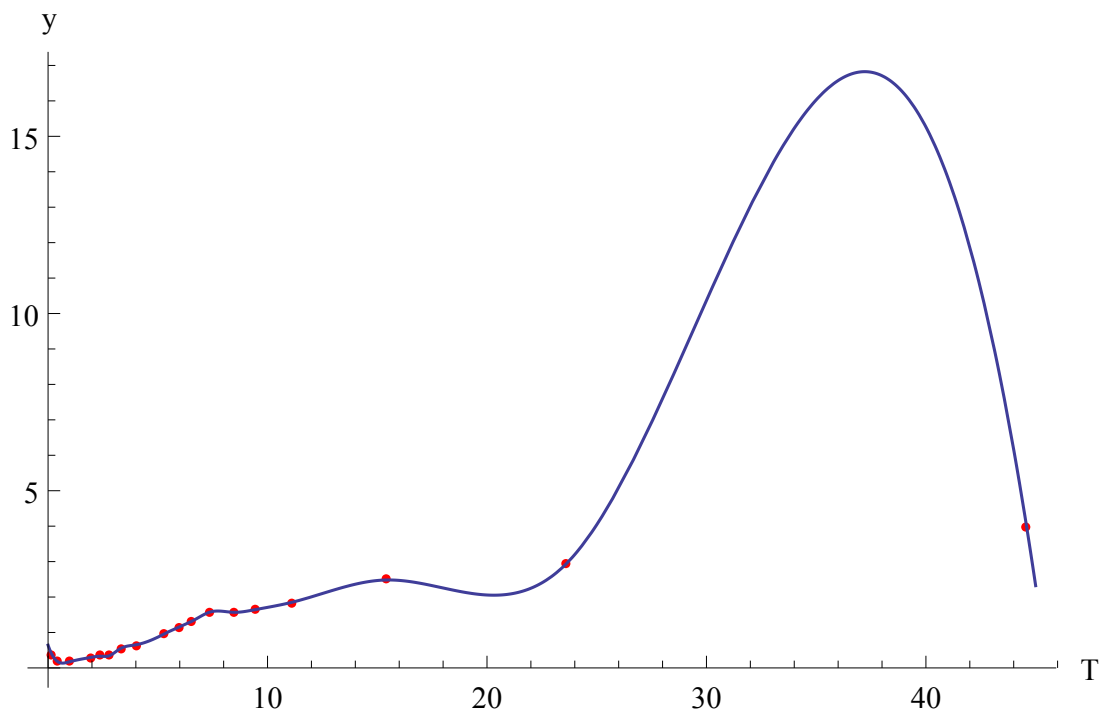
$$\sum_{i=1}^N (y_i - g(T_i))^2 + \lambda \int_{T_1}^{T_N} (g''(t))^2 dt \quad (10)$$

daný kombinací součtu čtverců reziduí,  $(y_i - g(T_i))^2$ , a integrálu druhé mocniny z druhé derivace funkce  $g$  přes celý interval  $[T_1, T_N]$  s vyhlazující konstantou  $\lambda \geq 0$ . Výsledná funkce  $\hat{g}$  je potom kompromisem mezi minimalizací odchylky této funkce od pozorovaných dat a hladkostí. Přitom pro  $\lambda \rightarrow \infty$  jde o vyrovnávání příjmkou za použití metody nejmenších čtverců, kdežto naopak pro  $\lambda = 0$  jde o interpolaci po částech kubickou funkcí, což je také důvod proč model kubického splajnu nebyl zařazen ani do části 2.1 ani do části 2.3. [1]

Poznamenejme ještě, že kubické splajny s velkým počtem uzlů mají větší tendenci oscilovat. Příliš velké oscilace jsou v případě výnosových křivek zejména pro dlouhé splatnosti považovány za neopodstatněné. [9] Proto pokud je množina splatností příliš velká, můžeme jako množinu uzlů vzít nějakou její vhodně zvolenou podmnožinu.

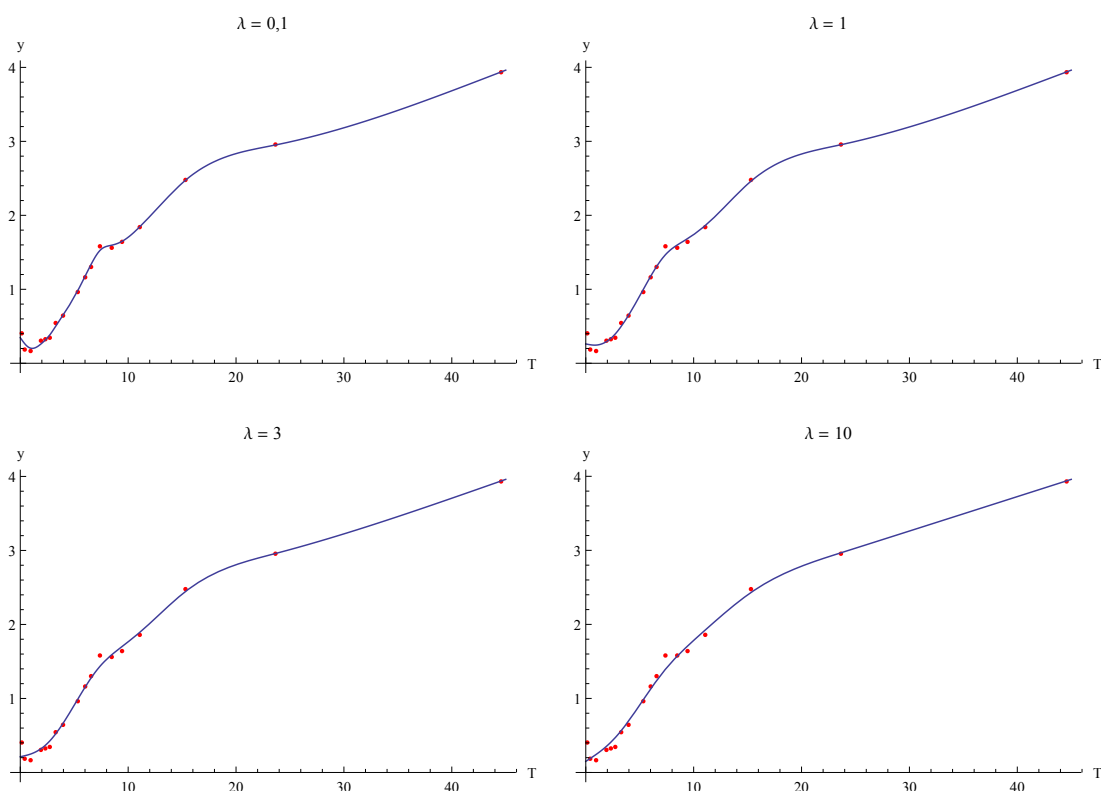
Podíváme-li se na aplikaci kubických splajnů na naše ukázková data z tabulky 2, uvidíme, že tvar výsledné křivky velmi závisí na volbě vyhlazující konstanty  $\lambda$  ve výrazu (10).

Na obrázku 6 je vidět, jak situace vypadá pro  $\lambda = 0$ , kdy jde o již zmíněnou interpolaci po částech kubickou funkcí. Takováto výnosová křivka zřejmě nebude příliš reálná.



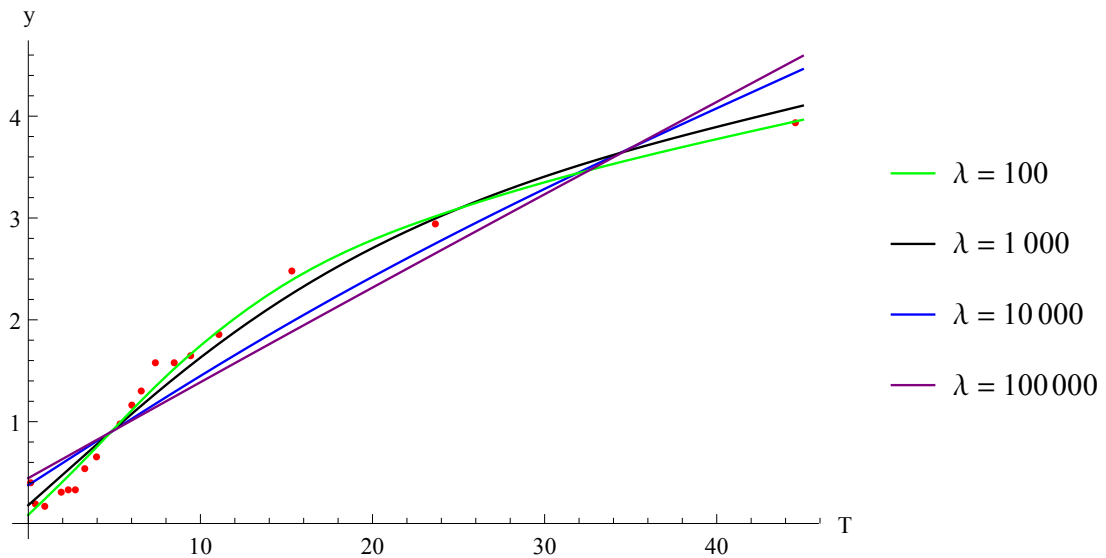
Obrázek 6: Kubický splajn s vyhlazující konstantou  $\lambda = 0$

Zvolíme-li však za  $\lambda$  kladné, vhodně velké číslo, můžeme dostat rozumné výsledky. To je vidět na obrázku 7, kde jsou zobrazeny výsledné splajny pro hodnoty  $\lambda = 0, 1, 1, 3$  a  $10$ .



Obrázek 7: Kubický splajn s vyhlazující konstantou  $\lambda = 0, 1, 1, 3$  a  $10$

Volíme-li konstantu  $\lambda$  ještě větší, dostáváme se postupně až k vyrovnání dat příjímkou, což je dobře znatelné na obrázku 8, kde jsme za  $\lambda$  volili postupně hodnoty 100, 1 000, 10 000 a 100 000.



Obrázek 8: Kubický splajn s velkými hodnotami vyhlazující konstanty  $\lambda$

Vhodně zvolit konstantu  $\lambda$  je vždy úkol matematika, který výnosovou křivku modeluje. Při jeho rozhodování pak záleží mimo jiné na tom, k jakému účelu výnosovou křivku konstruuje. Podle toho se může rozhodnout, jestli bude křivka spíše hladší, nebo bude blíže k pozorovaným datům (střední kvadratická odchylka od pozorovaných dat bude menší, viz dále).

*Střední kvadratická odchylka* (*Mean Squared Error*, MSE) funkce  $g$  od původních dat je dána jako

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - g(T_i))^2, \quad (11)$$

kde  $y_1, \dots, y_N$  jsou hodnoty pozorované v časech  $T_1, \dots, T_N$  a  $g(T_1), \dots, g(T_N)$  jsou hodnoty funkce  $g$  v těchto časech.

Srovnání středních kvadratických odchylek kubických splajnů s vyhlazujícími konstantami  $\lambda$  rovno 0, 0,1, 1, 3, 10, 100, 1 000, 10 000 a 100 000 je možné provést na základě tabulky 3, kde je dobře vidět, jak střední kvadratická odchylka roste s rostoucí hodnotou  $\lambda$ .

Tabulka 3: Střední kvadratické odchylky kubických splajnů od dat

$\lambda$	MSE
0	0
0,1	0,00129697
1	0,00285841
3	0,00457044
10	0,00817404
100	0,01494824
1 000	0,02619366
10 000	0,08300627
100 000	0,11623805

## 2.3 Vyrovnávání

V této podkapitole představíme jeden z nejjednodušších modelů pro vyrovnávání dat - vyrovnávání polynomem a také na dva asi nejčastěji používané modely pro konstrukci výnosových křivek, a to Nelsonův-Siegelův model a jeho rozšíření, model Svenssonův, které jsou v praxi často využívány i centrálními bankami včetně Evropské centrální banky a v některých výpočtech i České národní banky.

Mějme tedy opět  $N$  bezkupónových dluhopisů  $1, \dots, N$  s jednotkovou nominální hodnotou, dobami do splatnosti  $T_1, \dots, T_N$  a výnosy do splatnosti  $y_1, \dots, y_N$ . Regresní model bude mít tvar

$$y_i = g(T_i; \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

kde hypotetická výnosová křivka  $g$  známého tvaru závisí na neznámém (vektorovém) parametru  $\boldsymbol{\theta}$ , jenž budeme chtít odhadnout, a  $\varepsilon_i$  jsou chyby s nulovou střední hodnotou. [1] Odhad  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  parametru  $\boldsymbol{\theta}$  budeme hledat pomocí metody nejmenších čtverců<sup>11</sup>, tj. řešením optimalizační úlohy

$$\arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^N (y_i - g(T_i; \boldsymbol{\theta}))^2. \quad (12)$$

Odhad  $\widehat{y}_T$  výnosu  $y_T$  pro splatnost  $T \neq T_i, i = 1, \dots, N$ , pak získáme dosazením odhadu  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  parametru  $\boldsymbol{\theta}$  do funkce  $g$ , tedy

$$\widehat{y}_T = g(T; \hat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Volba vhodné funkce  $g$  je potom klíčovou úlohou. Jak jsme již uvedli, v této práci si ukážeme vyrovnávání polynomem (v části 2.3.1), tj. situaci, kdy za  $g$

<sup>11</sup>Možné je i použití jiných metod, např. metody nejmenší absolutní odchylky.

volíme polynom nízkého stupně  $K$ , a dále vyrovnávání složitějšími funkcemi typu Nelson-Siegel (v části 2.3.2) a Svensson (v části 2.3.3).

Každou z představených metod (voleb funkce  $g$ ) budeme následně ilustrovat na příkladu dat z tabulky 2. Pro řešení optimalizační úlohy (12) budeme používat software *Wolfram Mathematica 9*, resp. jeho funkci `FindFit`.

### 2.3.1 Vyrovnávání polynomem

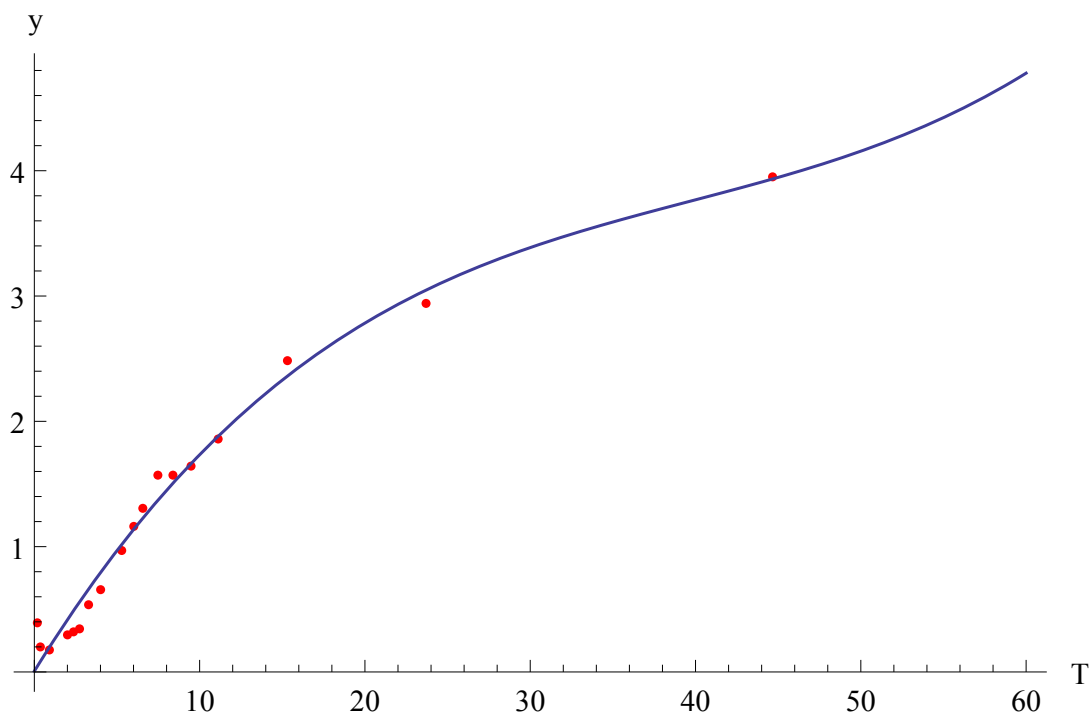
Předpokládejme nyní, že funkce  $g$  je polynom<sup>12</sup> stupně  $K$  tvaru

$$g(t; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=0}^K \theta_i t^i.$$

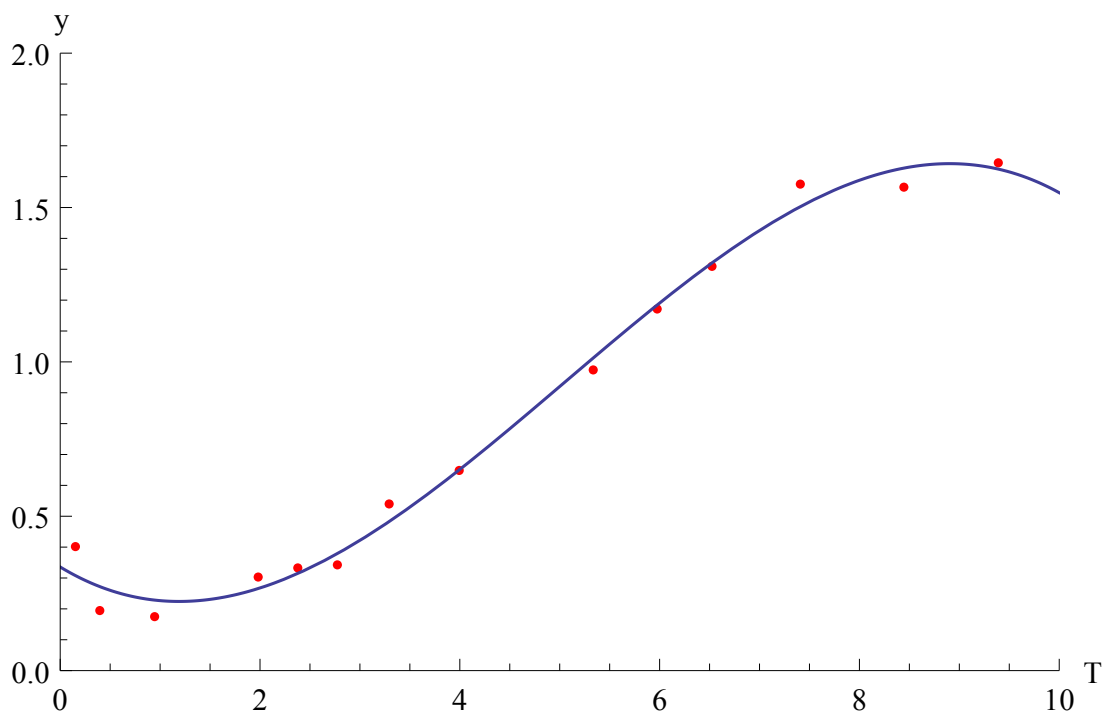
Pro  $K = 1$  jde o vyrovnávání příjímkou, pro  $K = 2$  o vyrovnávání parabolou, pro  $K = 3$  o vyrovnávání kubickým polynomem atd. Tento model je sice poměrně jednoduchý (odhadujeme  $K+1$  parametrů), nicméně nedává příliš dobré výsledky. Asi největším problémem je chování polynomu pro delší splatnosti. Pro dobu do splatnosti jdoucí do nekonečna budou totiž funkční hodnoty neomezené (limita bude  $+\infty$  nebo  $-\infty$ ), a tak se může stát, že pro delší splatnosti bude model dávat nesmyslně vysoké nebo záporné výnosy do splatnosti. To je vidět i na obrázku 9, kde bylo vyrovnání kubickým polynomem použito na data z tabulky 2. Na obrázku 10 je pak znázorněna situace, kdy jsme kubickým polynomem vyrovnali pouze data pro splatnosti do 10 let, tj. prvních 14 bodů. S rostoucím  $K$  se pak dostaneme až k interpolaci (nejpozději pro  $K - 1$  rovno počtu pozorování), kdy polynom bude procházet všemi pozorovanými body. To s sebou postupně přinese také oscilace funkčních hodnot polynomu, jaké jsme viděli v části 2.1.2.

---

<sup>12</sup>Stupeň polynomu  $g$  by neměl být moc vysoký, aby nedocházelo k nežádoucím oscilacím podobně jako v případě interpolace polynomem.



Obrázek 9: Vyrovnávání dat polynomem řádu 3



Obrázek 10: Vyrovnávání dat pro prvních 10 let polynomem řádu 3

### 2.3.2 Nelsonův-Siegelův model

Jedním z modelů dávajících lepší výsledky je model, který poprvé prezentovali v roce 1987 Charles R. Nelson a Andrew F. Siegel ve svém článku [10]. Jejich hlav-

ním cílem bylo představit jednoduchý model s nepřiliš mnoha parametry, který by byl dostatečně flexibilní, aby dokázal pokrýt všechny základní tvary výnosových křivek (viz 1.4) a také predikovat ceny dluhopisů pro dlouhé splatnosti.

Pomocí myšlenky, že třída funkcí s tvary typickými pro výnosové křivky je spojena s řešením diferenciálních a diferenčních rovnic, a následného sloučení dvou parametrů v jeden (detaily je možné nalézt v [10]) došli pánové Nelson a Siegel k základnímu tvaru modelu pro okamžitou forwardovou míru

$$f(T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-T/\tau} + \beta_2 \frac{T}{\tau} e^{-T/\tau}, \quad (13)$$

kde  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  a  $\tau$  jsou reálné parametry,  $\tau > 0$ .

Funkce  $f(T)$  z rovnice (13) se skládá se tří sčítanců. První je konstanta  $\beta_0$ , ke které se forwardová míra  $f(T)$  blíží pro velké splatnosti ( $\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = \beta_0$ ). Druhý sčítanec,  $\beta_1 e^{-T/\tau}$ , je pro  $\beta_1 > 0$  klesající, resp. pro  $\beta_1 < 0$  rostoucí, exponenciální funkce a třetí sčítanec,  $\beta_2 \frac{T}{\tau} e^{-T/\tau}$ , generuje „hrb“, resp. „tvar U“. [11]

S využitím vztahu (5) můžeme (pro  $T > 0$ ) přejít k spojitě úročené spotové úrokové míře a z (13) tak dostaneme

$$r(T) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau} - \beta_2 e^{-T/\tau} \quad (14)$$

se stejnými parametry  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  a  $\tau$ .

Rovnici (14) můžeme přepsat do tvaru

$$r(T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau} + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau} - e^{-T/\tau} \right),$$

kdy se funkce  $r(T)$  skládá opět ze tří sčítanců. První je konstanta  $\beta_0$ , ke které se spotová míra  $r(T)$  blíží pro splatnosti jdoucí k nekonečnu ( $\lim_{T \rightarrow \infty} r(T) = \beta_0$ ).

Druhý,  $\beta_1 \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau}$ , je pro  $\beta_1 > 0$  klesající, resp. pro  $\beta_1 < 0$  rostoucí, a ovlivňuje sklon křivky. Tento sčítanec se blíží k nule pro dobu do splatnosti jdoucí k nekonečnu a k  $\beta_1$  pro dobu do splatnosti jdoucí k nule, tedy  $\lim_{T \rightarrow \infty} \beta_1 \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau} = 0$  a  $\lim_{T \rightarrow 0} \beta_1 \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau} = \beta_1$ . Třetí sčítanec, tj.

$$\beta_2 \left( \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau} - e^{-T/\tau} \right),$$

vytváří pro  $\beta_2 > 0$  „hrb“, resp. pro  $\beta_2 < 0$  „tvar U“, neboť jeho hodnota začíná v nule, tedy

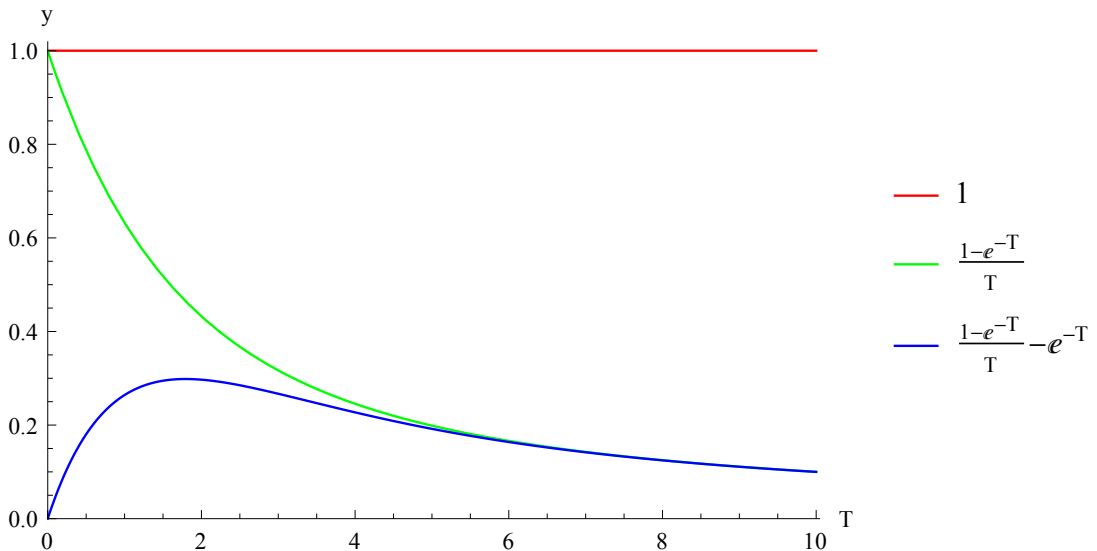
$$\lim_{T \rightarrow 0} \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau} - e^{-T/\tau} \right) = 0,$$

potom se s rostoucí dobou do splatnosti pro  $\beta_2 > 0$  zvyšuje, resp. pro  $\beta_2 < 0$  snižuje, a následně jde zpět k nule, tj.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-T/\tau}}{T/\tau} - e^{-T/\tau} \right) = 0.$$

Další možný úhel pohledu na jednotlivé parametry modelu představený v [10] je dívat se na parametry  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  a  $\beta_2$  jako na míry vlivu krátkodobé, střednědobé a dlouhodobé komponenty okamžité forwardové (a tím i spotové) křivky. Vliv dlouhodobé komponenty je měřen velikostí parametru  $\beta_0$ , vliv krátkodobé komponenty velikostí  $\beta_1$  a vliv střednědobé komponenty velikostí  $\beta_2$ . Dlouhodobá komponenta modelu je konstanta 1, která s dobou splatnosti jdoucí k nekonečnu neklesá k nule a která tak má na křivku v oblasti dlouhých splatností největší vliv. Střednědobá komponenta, tj.  $\frac{T}{\tau} e^{-T/\tau}$ , jako jediná začíná v nule a zase se k nule vrací s dobou do splatnosti jdoucí k nekonečnu, a proto není její hlavní přínos ani v krátkodobé ani v dlouhodobé složce. Krátkodobá komponenta,  $e^{-T/\tau}$ , pak klesá k nule nejrychleji ze všech složek modelu, a proto má největší vliv pro krátké splatnosti.

Jednotlivé složky modelu jsou znázorněny na obrázku 11, na jehož základě si lze představit, jaké tvary forwardových (a potažmo spotových) křivek je možné získat různou volbou vah  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  a  $\beta_2$  pro jednotlivé komponenty.



Obrázek 11: Komponenty modelu (13)

Protože pro limity v nekonečnu platí

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} r(T) = \beta_0,$$

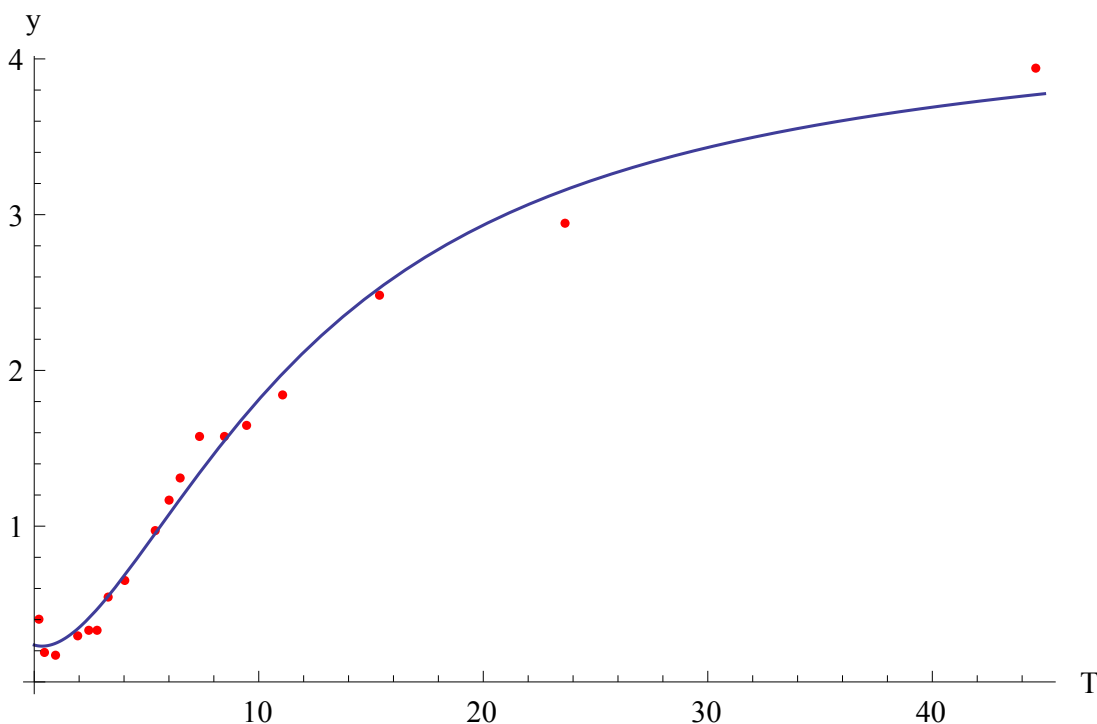
budeme vyžadovat omezení  $\beta_0 > 0$ , abychom se vyhnuli případným záporným úrokovým mírám pro velké splatnosti.

Dále pro limity v nule platí

$$\lim_{T \rightarrow 0} f(T) = \lim_{T \rightarrow 0} r(T) = \beta_0 + \beta_1,$$

odkud dostáváme podmínku  $\beta_0 + \beta_1 > 0$  neboli  $\beta_0 > \beta_1$ .

Vyrovnaní dat z tabulky 2 křivkou (14) Nelsonova-Siegelova modelu je znázorněno na obrázku 12.



Obrázek 12: Vyrovňování dat metodou Nelson-Siegel

### 2.3.3 Svenssonův model

Lars E. O. Svensson navrhl ve svém článku [12] z roku 1995 přidání dalšího členu ve tvaru  $\beta_3 \frac{T}{\tau_2} \exp\left\{-\frac{T}{\tau_2}\right\}$ , kde hodnota  $\tau_2$  je omezená na kladná čísla, k Nelsonově-Siegelově modelu okamžité forwardové míry (13) za účelem zvýšení flexibility a schopnosti lepšího vyrovnaní dat. Tento přidaný člen generuje další „hrb“, resp. „tvar U“. Svenssonův model pro okamžitou forwardovou míru je tedy

$$f(T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-T/\tau_1} + \beta_2 \frac{T}{\tau_1} e^{-T/\tau_1} + \beta_3 \frac{T}{\tau_2} e^{-T/\tau_2}, \quad (15)$$

kde  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1$  a  $\tau_2$  jsou reálné parametry,  $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ .

Zintegrováním funkce (15) dle (5) dostaneme tvar Svenssonova modelu pro spojitě úročené spotové míry

$$r(T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-T/\tau_1}}{T/\tau_1} + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-T/\tau_1}}{T/\tau_1} - e^{-T/\tau_1} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-T/\tau_2}}{T/\tau_2} - e^{-T/\tau_2} \right), \quad (16)$$

opět s parametry  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1$  a  $\tau_2$ .

Pro limity okamžité forwardové míry i spotové míry stejně jako v případě Nelsonova-Siegelova modelu platí

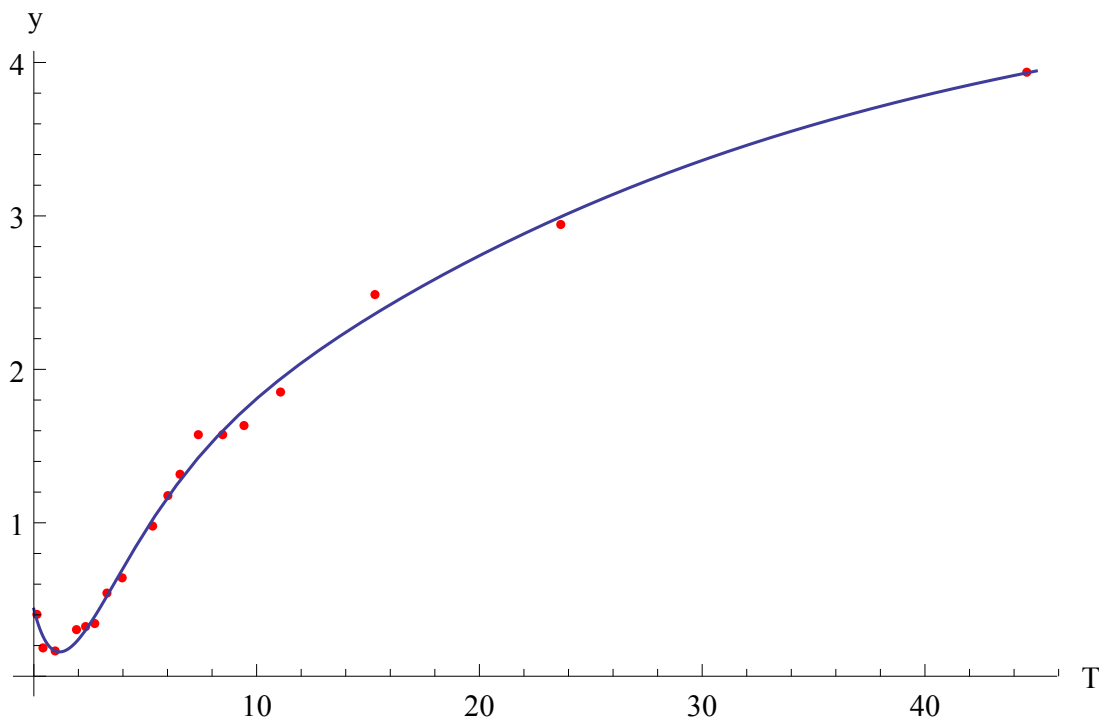
$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} r(T) = \beta_0$$

a

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} f(T) = \lim_{T \rightarrow 0^+} r(T) = \beta_0 + \beta_1,$$

a tak opět dostáváme omezení  $\beta_0 > 0$  a  $\beta_0 + \beta_1 > 0$ .

Na obrázku 13 můžeme vidět použití Svenssonovy metody na naše ukázková data z tabulky 2, tedy vyrovnání těchto dat Svenssonovou funkcí pro spotové úrokové míry (16).



Obrázek 13: Vyrovnávání dat metodou Svensson

Vzhledem k tomu, že Svenssonův model je často využíván v praxi, předvedeme si v kapitole 3 celý postup jeho aplikace na reálná data, včetně použití metody bootstrap.

## 2.4 Srovnání metod

Provedme nyní srovnání výše uvedených metod. Zřejmě nejjednodušším způsobem, kterým lze odhadnout výnosovou křivku na základě množiny dvojic dob a výnosů do splatnosti, je lineární interpolace. Jejími hlavními výhodami jsou právě jednoduchost a intuitivnost a dále fakt, že vzhledem ke své podstatě nemůže dávat zcela nesmyslné výsledky, alespoň ve smyslu velkých nereálných výkyvů výnosové křivky. Naopak nevýhody lineární interpolace pramení zejména z po částech lineárního průběhu, kvůli kterému není křivka hladká. To potom působí problémy při odvozování okamžité forwardové výnosové křivky ze spotové. Navíc je zřejmé, že reálná výnosová křivka nikdy nebude po částech lineární se „zlomy“ v pozorovaných bodech. Nicméně v některých situacích, například pokud potřebujeme hrubý odhad výnosu do splatnosti pro okamžik mezi dvěma pozorovanými body, může být použití lineární interpolace vhodným řešením.

Problém s hladkostí křivky sice nemáme u dalšího z uvedených typů interpolace, tedy interpolace polynomem, narážíme zde ale na problém oscilace křivky mezi danými body (daty), viz obrázky 4 a 5. Dostáváme tak naprosto nereálné hodnoty výnosů pro některé splatnosti, a to jak velmi vysoké kladné, tak i záporné. Interpolace polynomem proto nebude vhodnou metodou pro konstrukci výnosových křivek.

Jako daleko vhodnější se ukazuje použití splajnů, konkrétně kubického splajnu. Už v definici kubického splajnu je požadována dostatečná hladkost a díky možnosti volby vyhlazující konstanty ve výrazu (10) můžeme nalézt kompromis mezi hladkostí a odchylkou odhadnuté křivky od pozorovaných dat. Výsledkem je pak křivka vyrovnávající data, která dává smysluplné hodnoty pro nepozorované časy do splatnosti a jejíž odchylka od pozorovaných dat zároveň není příliš velká.

Jako další jsme uvedli vyrovnávání polynomem, což je opět poměrně jednoduchá, ale ne příliš dobré výsledky dávající metoda, jak jsme již popsali v kapitole 2.3.1. Zřejmě proto se v praxi vyrovnávání polynomem ke konstrukci výnosových křivek nepoužívá.

Naopak modely, které jsou v praxi často používány, jsou modely Nelsonův-Siegelův a Svenssonův představené v částech 2.3.2 a 2.3.3, jež dávají dobrý kompromis mezi jednoduchostí a dobrými výsledky při aplikaci na reálná data a chovají se poměrně dobře i pro splatnosti za posledním pozorovaným bodem. Svenssonův model je díky jednomu členu navíc (viz vztahy (13) a (15), resp. (14) a (16))

schopný zachytit více různých tvarů výnosových křivek, nicméně někdy může být vhodnější použití jednoduššího Nelsonova-Siegelova modelu. Při výběru konkrétního modelu záleží na vstupních datech a konečná volba je pak vždy na odborném úsudku aktuára, který křivky modeluje (viz [14]).

Očekávání lepšího vyrovnání dat Svenssonovou křivkou oproti kubickému polynomu i Nelsonově-Siegelově křivce potvrzuje i srovnání středních kvadratických odchylek (11). Ty jsou pro každou z našich třech metod uvedeny v tabulce 4.

Tabulka 4: Střední kvadratické odchylky křivek od původních dat

Křivka pro vyrovnávání	Střední kvadratická odchylka
Kubický polynom	0,0194311474
Nelson-Siegel	0,0131907864
Svensson	0,0042936437

Z tabulky 4 je tedy vidět, že největší střední kvadratickou odchylku dává vyrovnávání kubickým polynomem a naopak nejmenší dává vyrovnávání Svenssonovou funkcí. Výpočet střední kvadratické odchylky v programu *Wolfram Mathematica 9* je možné nalézt v příloze č. 2.

### 3 Reálná data

V této kapitole si ukážeme celý postup konstrukce bezrizikové výnosové křivky na konkrétním případě českých státních dluhopisů. Naším cílem bude odhadnout výnosovou křivku teoretických bezkupónových dluhopisů z reálných kupónových.

K tomuto účelu musíme nejprve získat vstupní data (dvojice dob a výnosů do splatnosti), která dostaneme z tržních cen českých státních dluhopisů. Následně zkonstruujeme kupónovou výnosovou křivku a z té potom pomocí metody bootstrap odvodíme křivku bezkupónovou. Při tom budeme chtít, aby cena každého z pozorovaných dluhopisů spočtená na základě odhadnuté kupónové výnosové křivky jako

$$\hat{P} = \sum_t \frac{CF_t}{(1 + \widehat{R}(t))^t}, \quad (17)$$

kde  $CF_t$  jsou peněžní toky plynoucí z držení dluhopisu v časech  $t$  a  $\widehat{R}(t)$  jsou vypočtené úrokové míry na  $t$  období (body na křivce)<sup>13</sup>, nebyla příliš rozdílná od pozorované ceny tohoto dluhopisu, resp. aby součet druhých mocnin těchto odchylek a potažmo střední kvadratická odchylka cen byly „rozumně velké“ (opět aktuárský úsudek).<sup>14</sup>

#### 3.1 Vstupní data

Jako vstupní data použijeme průměrné tržní ceny jednotlivých českých státních dluhopisů s pevným kupónem na OTC trzích k 7.5.2013.<sup>15</sup> Pro výpočty časů kupónových plateb i dob do splatnosti používáme kalendářní konvenci pro počet dnů 30/360.

V tabulce 5 jsou uvedeny všechny dluhopisy s pevným kupónem, které se k 7.5.2013 obchodovali na OTC trzích, jejich splatnosti, kupónové sazby, data, ke kterým jsou kupóny vypláceny, a průměrné čisté ceny (průměr nabízené a požadované čisté ceny) na OTC trzích k 7.5.2013 v procentech nominální hodnoty. Nominální hodnota všech dluhopisů je 10 000 Kč.

Pomocí vztahu

$$P + AÚV = \sum_t \frac{CF_t}{(1 + YTM)^t},$$

kde  $P$  je čistá cena dluhopisu,  $AÚV$  je alikvótní úrokový výnos daný jako poměrná část kupónové platby ( $AÚV = C \cdot \frac{\Delta t}{360}$ , kde  $C$  je kupón a  $\Delta t$  je počet dní od poslední kupónové platby spočtený dle standardu 30/360),  $CF_t$  jsou opět pe-

<sup>13</sup>Případně můžeme použít spojitě úročené analogie úrokových měř a vzorce (17).

<sup>14</sup>Za informace ohledně toho, jak se v praxi postupuje při konstrukci bezkupónové výnosové křivky, tímto děkuji panu Mgr. Petru Posoldovi, ALM specialistovi v České pojišťovně, a.s.

<sup>15</sup>Tato data jsme získali na webové stránce <http://gov.cbonds.com/>.

Tabulka 5: České státní dluhopisy k 7. 5. 2013

Dluhopis	Splatnost	Kupónová sazba	Kupón vyplácen	Cena
CZ0001000814	16. 6. 2013	3,70 %	Ročně k 16. 6.	100,33
CZ0001002729	16. 9. 2013	2,80 %	Ročně k 16. 9.	100,92
CZ0001002869	31. 3. 2014	2,75 %	Ročně k 31. 3.	102,34
CZ0001001143	11. 4. 2015	3,80 %	Ročně k 11. 4.	106,78
CZ0001002737	1. 9. 2015	3,40 %	Ročně k 1. 9.	107,12
CZ0001000749	26. 1. 2016	6,95 %	Ročně k 26. 1.	117,77
CZ0001003842	28. 7. 2016	0,50 %	Ročně k 28. 7.	100,01
CZ0001001903	11. 4. 2017	4,00 %	Ročně k 11. 4.	112,90
CZ0001000822	18. 8. 2018	4,60 %	Ročně k 18. 8.	119,02
CZ0001002471	11. 4. 2019	5,00 %	Ročně k 11. 4.	122,28
CZ0001003834	29. 10. 2019	1,50 %	Ročně k 28. 10.	102,10
CZ0001001317	12. 9. 2020	3,75 %	Ročně k 12. 9.	116,92
CZ0001002851	29. 9. 2021	3,85 %	Ročně k 29. 11.	118,34
CZ0001001945	12. 9. 2022	4,70 %	Ročně k 12. 9.	127,47
CZ0001002547	25. 5. 2024	5,70 %	Ročně k 25. 5.	140,30
CZ0001003859	25. 8. 2028	2,50 %	Ročně k 25. 8.	102,58
CZ0001001796	4. 12. 2036	4,20 %	Ročně k 4. 12.	121,60
CZ0001002059	26. 11. 2057	4,85 %	Ročně k 26. 11.	122,75

něžní toky plynoucí z držení dluhopisu v časech  $t$  a  $YTM$  je výnos do splatnosti, si spočítáme výnosy do splatnosti pro jednotlivé dluhopisy.<sup>16</sup> Pro výpočet byly použity funkce `FinancialBond` a `FindRoot` softwaru *Wolfram Mathematica 9* (viz Příloha č. 3).

V tabulce 6 je potom ke každému dluhopisu uvedena doba a výnos do splatnosti.

Dále je třeba si rozmyslet, k jakému účelu bude hledaná výnosová křivka sloužit. Na základě toho je pak možné vzít v úvahu jen část vstupních dat. Například pokud bychom měli zájem o výnosovou křivku pro splatnosti do deseti let, nedávalo by smysl zahrnout do vstupních dat dluhopis se splatností za 44,55 roku apod.

Stejně tak je možné vyjmout z množiny vstupních dat ty body, které se zdají být co do výnosu nesmyslně vychýleny od ostatních. To může být způsobeno například malým objemem obchodu s daným dluhopisem v den pozorování, který

<sup>16</sup>Přitom dluhopis CZ0001003842 je obchodován teprve od 28. 1. 2013 a kupón vyplácí k 28. 7., takže 28. 7. 2013 bude výše vyplaceného kupónu 25 Kč, kdežto další roky bude vyplácet standardních 0,50% nominální hodnoty, tj. 50 Kč. Nicméně vzhledem k tomu, že k čisté ceně se připočítává alikvótní úrokový výnos, vyjde výnos do splatnosti stejně jako kdyby byl dluhopis emitován např. o rok dříve, a tedy nejbližší kupónová platba byla v plné výši. Ostatní dluhopisy mají již po první kupónové platbě, takže vyplácejí kupón ve výši dle kupónové sazby.

Tabulka 6: Doby a výnosy do splatnosti dluhopisů z tabulky 5

Dluhopis	Doba do splatnosti	Výnos do splatnosti
CZ0001000814	0,11	0,63 %
CZ0001002729	0,36	0,23 %
CZ0001002869	0,90	0,14 %
CZ0001001143	1,93	0,27 %
CZ0001002737	2,32	0,31 %
CZ0001000749	2,72	0,37 %
CZ0001003842	3,23	0,50 %
CZ0001001903	3,93	0,66 %
CZ0001000822	5,28	0,90 %
CZ0001002471	5,93	1,10 %
CZ0001003834	6,48	1,16 %
CZ0001001317	7,35	1,32 %
CZ0001002851	8,39	1,51 %
CZ0001001945	9,35	1,52 %
CZ0001002547	11,05	1,67 %
CZ0001003859	15,30	2,30 %
CZ0001001796	23,58	2,92 %
CZ0001002059	44,55	3,78 %

může mít za výsledek zkreslenou cenu tohoto dluhopisu. Ta potom samozřejmě zkreslí i výnos do splatnosti.

Výběr vstupních dat, které budou vzaty v úvahu, je pak opět (podobně jako výběr konkrétní metody konstrukce křivky) předmětem odborného aktuárského úsudku.

Vzhledem k tomu, že cílem této práce je hlavně demonstrace procesu konstrukce výnosové křivky na reálných datech, není třeba žádný z pozorovaných bodů vyřazovat. V aktuárské praxi se ovšem často uvažují pouze dluhopisy se splatností do 10, 15 či 20 let, protože pro dluhopisy s delšími splatnostmi rychle narůstá problém s jejich likviditou (15 let bývá označováno jako tzv. *poslední likvidní bod*<sup>17</sup>).

V této práci proto budeme uvažovat nejprve celou množinu vstupních dat danou tabulkou 6, následně se omezíme na dluhopisy se splatností do 15 let (tj. vyřadíme z tabulky 6 poslední tři dluhopisy) a porovnáme takto získané výnosové křivky.

<sup>17</sup>Z anglického Last Liquid Point. Např. dle Solventnosti II je poslední likvidní bod stanoven na 15 let.

## 3.2 Konstrukce kupónové výnosové křivky

Po volbě vstupních dat bude dalším krokem odhadnutí výnosů pro teoretické kupónové dluhopisy se splatnostmi, které nemáme k dispozici z pozorování, tedy konstrukce kupónové výnosové křivky. K tomu využijeme Svenssonova modelu, neboť se v praxi používá nejčastěji a zároveň dává při srovnání s ostatními metodami vyrovnávání uvedenými v této práci co se střední kvadratické odchylky týče nejlepší výsledky.

### 3.2.1 Formulace optimalizační úlohy

Protože Svenssonovou funkcí vyrovnáváme výnosy do splatnosti, ale zároveň bychom chtěli, aby výsledná výnosová křivka dávala co nejlepší výsledky (co nejmenší kvadratické odchylky) při zpětném stanovení ceny původních pozorovaných dluhopisů, přidáme při minimalizaci odchylek výnosů do splatnosti váhy. Tím se metoda nejmenších čtverců (optimalizační úloha (12)) změní na váženou metodu nejmenších čtverců a nová optimalizační úloha bude

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{i=1}^N w_i (y_i - g(T_i; \boldsymbol{\theta}))^2, \quad (18)$$

kde  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , jsou výnosy do splatnosti,  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , jsou doby do splatnosti,  $g(T; \boldsymbol{\theta})$  je v našem případě Svenssonova funkce (16) s parametrem  $\boldsymbol{\theta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)^T$  a  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , jsou váhy.

Váhy přitom přidáváme z toho důvodu, že chyba v odhadu výnosu do splatnosti pro delší splatnost se do chyby ve vypočtené ceně dluhopisu promítne více než v absolutním měřítku stejně velká chyba ve výnosu pro kratší splatnost. Proto by zřejmě bylo vhodné volit váhy v (18) tak, aby větší váhu měly výnosy do splatnosti s delšími splatnostmi.

Volba konkrétních vah je pak opět založena na aktuárském úsudku a i v literatuře lze najít různé možnosti této volby. Dle odborného doporučení České společnosti aktuárů (viz [14]) se volí

$$w_{1,i} = (T_i \kappa_i)^3, \quad (19)$$

kde  $\kappa_i = \frac{2}{5}$  pro  $i$  takové, že  $T_i > 10$  let,  $\kappa_i = 1$  jinak.

Další možnou volbou vah, na kterou je možné často narazit v literatuře (viz např. [6] nebo [11]), je volit za váhy u výnosů do splatnosti jednotlivých dluhopisů hodnotu modifikované durace těchto dluhopisů, tj.

$$w_{2,i} = D_i^M, \quad (20)$$

kde durace  $D$  a modifikovaná durace dluhopisu  $D^M$  jsou definovány jako

$$D = \frac{\sum_t \frac{t \cdot CF_t}{(1+y)^t}}{\sum_t \frac{CF_t}{(1+y)^t}}$$

a

$$D^M = \frac{D}{1+y},$$

kde  $CF_t$  jsou peněžní toky plynoucí z držení dluhopisu v časech  $t$  a  $y$  je výnos do splatnosti tohoto dluhopisu.

Tato volba vychází z toho, že modifikovaná durace je považována za ukazatel citlivosti současné hodnoty (ceny dluhopisu) na změny v úrokových sazbách (výnosu do splatnosti), neboť relativní přírůstek současné hodnoty peněžního toku  $\mathbf{CF} = (CF_{T_1}, CF_{T_2}, \dots, CF_{T_N})^T$  (hrubé ceny dluhopisu, z jehož držení plynou peněžní toky  $\mathbf{CF}$ ) při změně úrokové sazby (výnosu do splatnosti)  $y$  o  $\Delta y > 0$  lze pro malé  $\Delta y$  aproximovat pomocí prvního členu Taylorova rozvoje jako

$$\frac{PV(\mathbf{CF}, y + \Delta y) - PV(\mathbf{CF}, y)}{PV(\mathbf{CF}, y)} \approx -\frac{1}{1+y} \cdot D \cdot \Delta y = -D^M \cdot \Delta y.$$

V této práci zkusíme obě zmíněné volby vah, (19) a (20), a následně porovnáme součty čtverců odchylek vypočtených a pozorovaných cen dluhopisů pro každou z nich.

### 3.2.2 Samotná konstrukce kupónové výnosové křivky

Přejdeme nyní k samotnému vyrovnávání. Abychom mohli data z tabulky 6 vyrovnávat funkcí (16), je třeba převést výnosy do splatnosti z této tabulky na odpovídající výnosy do splatnosti při spojitém úročení podle vztahu

$$y(T) = \ln(1 + Y(T)),$$

kde při splatnosti  $T$  je  $y(T)$  výnos do splatnosti při spojitém a  $Y(T)$  při složeném ročním úročení.

Výnosy do splatnosti z tabulky 6 přepočtené na spojitý případ jsou společně s příslušnými dobami do splatnosti uvedeny v tabulce 7.

Ve zbytku této kapitoly budeme pojmem „výnos do splatnosti“ označovat výnos do splatnosti při spojitém úročení, pokud nebude řečeno jinak. Pozorované výnosy do splatnosti budeme označovat jako  $y_i$  a jim odpovídající doby do splatnosti jako  $T_i$ , kde  $i = 1, \dots, N$  označuje  $i$ -tý dluhopis po jejich seřazení podle doby do splatnosti.

Tabulka 7: Doby a výnosy z tabulky 6 při spojitém úročení

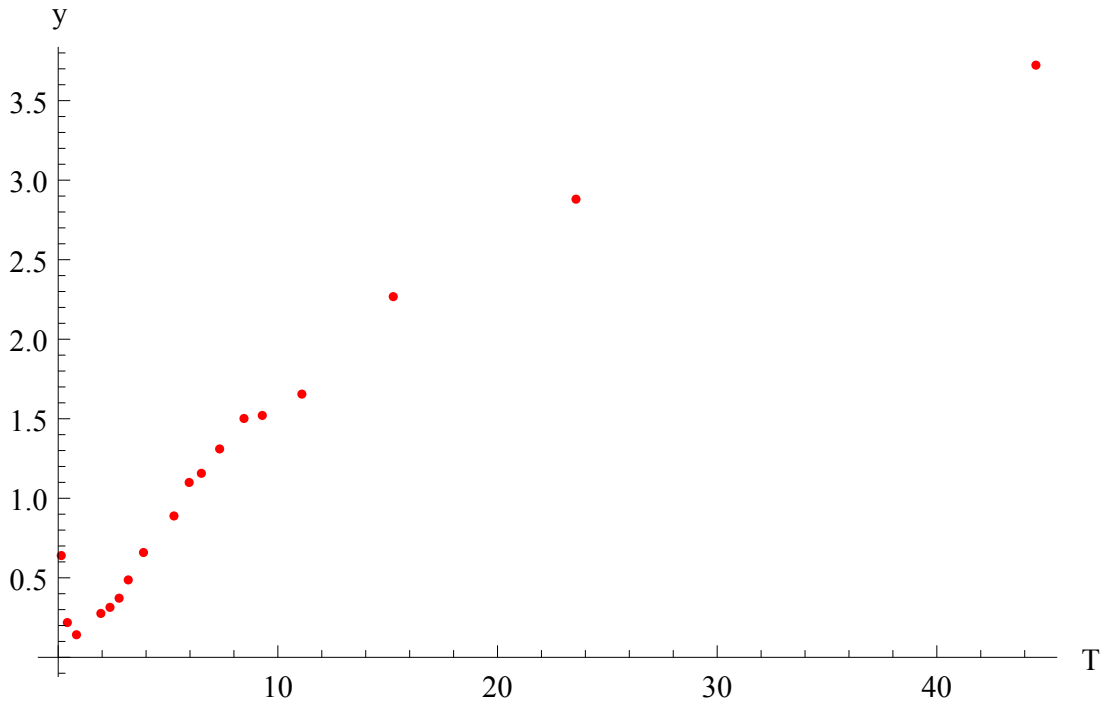
Dluhopis	Doba do splatnosti	Výnos do splatnosti
CZ0001000814	0,11	0,63 %
CZ0001002729	0,36	0,23 %
CZ0001002869	0,90	0,14 %
CZ0001001143	1,93	0,27 %
CZ0001002737	2,32	0,31 %
CZ0001000749	2,72	0,37 %
CZ0001003842	3,23	0,50 %
CZ0001001903	3,93	0,66 %
CZ0001000822	5,28	0,89 %
CZ0001002471	5,93	1,09 %
CZ0001003834	6,48	1,15 %
CZ0001001317	7,35	1,31 %
CZ0001002851	8,39	1,50 %
CZ0001001945	9,35	1,51 %
CZ0001002547	11,05	1,66 %
CZ0001003859	15,30	2,27 %
CZ0001001796	23,58	2,88 %
CZ0001002059	44,55	3,71 %

Dvojice z tabulky 7 pro nás budou představovat pozorované body v prostoru dvojic doba do splatnosti - výnos do splatnosti. Znázorněny jsou na obrázku 14.

Pomocí funkce `NonlinearModelFit` programu *Wolfram Mathematica 9* budeme hledat řešení úlohy (18), a to jak pro vektor vah  $\mathbf{w}_1 = (w_{1,1}, \dots, w_{1,N})^T$  dle (19), tak pro vektor vah  $\mathbf{w}_2 = (w_{2,1}, \dots, w_{2,N})^T$  dle (20)<sup>18</sup>. Tato řešení porovnáme s řešením pomocí klasické metody nejmenších čtverců (12). Všechny související výpočty jsou součástí přílohy č. 4.

Jako startovací hodnoty parametrů  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1$  a  $\tau_2$  Svenssonovy funkce (16) pro optimalizační algoritmus se v praxi volí za  $\beta_0$  výnos do splatnosti pro nejdelší uvažovanou pozorovanou splatnost, za  $\beta_1$  rozdíl výnosů do splatnosti pro nejdelší a nejkratší uvažovanou pozorovanou splatnost, za  $\beta_2$  a  $\beta_3$  nula a za  $\tau_1$  a  $\tau_2$  dvojka. Tedy máme startovací hodnoty dané tabulkou 8.

<sup>18</sup>Přitom v případě některých výpočtů bylo třeba zvýšit maximální počet iterací, které algoritmus provede, aby našel řešení při požadované (automaticky zvolené) přesnosti.



Obrázek 14: Výnosy do splatnosti českých státních dluhopisů

Tabulka 8: Startovací hodnoty parametrů Svenssonovy funkce

Parametr	Startovací hodnota
$\beta_0$	$y_N$
$\beta_1$	$y_N - y_1$
$\beta_2$	0
$\beta_3$	0
$\tau_1$	2
$\tau_2$	2

V případě, že pak výnosové křivky konstruujeme pravidelně, např. každý měsíc, bereme jako startovací hodnoty parametrů hodnoty jejich odhadů z poslední předchozí konstrukce (nejsou-li na trhu pozorovány extrémní výkyvy v minulých a aktuálních vstupních datech<sup>19</sup>).

Následně po tom, co takto získáme kupónovou výnosovou křivku, porovnáme současné hodnoty (ceny) dluhopisů vypočtené na základě získané křivky s jejich původními pozorovanými cenami upravenými o alikvótní úrokový výnos. Kvantitativním kritériem bude pro nás střední kvadratická odchylka cen (Mean Price Squared Error, MPSE) daná jako

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - \widehat{P}_i)^2, \quad (21)$$

<sup>19</sup>Ve smyslu že by výnosy do splatnosti u pozorovaných dluhopisů byly výrazně odlišné od posledního minulého pozorování.

kde  $N$  je počet pozorovaných dluhopisů,  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , jsou jejich pozorované tržní ceny a  $\widehat{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , jsou jejich ceny vypočtené na základě odhadnuté výnosové křivky.

Dále se podíváme, jak by výnosová křivka vypadala, kdybychom místo minimalizace součtu kvadratických odchylek odhadnutých a pozorovaných výnosů do splatnosti minimalizovali přímo součet kvadratických odchylek pozorovaných cen od cen spočtených na základě odhadované křivky.

### 3.2.2.1 Nevážené vyrovnávání Svenssonovou funkcí

Začneme nejprve klasickým vyrovnáváním dat Svenssonovou funkcí bez použití různých vah pro jednotlivá pozorování. Budeme tedy v prostoru dvojic doba do splatnosti - výnos do splatnosti vyrovnávat pozorované body dané tabulkou 7 tak, abychom s použitím Svenssonovy funkce (16) dostali řešení úlohy (12). Řešení budeme opět hledat pomocí funkce `FindFit` programu *Wolfram Mathematica 9*. Výpočty jsou též součástí přílohy č. 4.

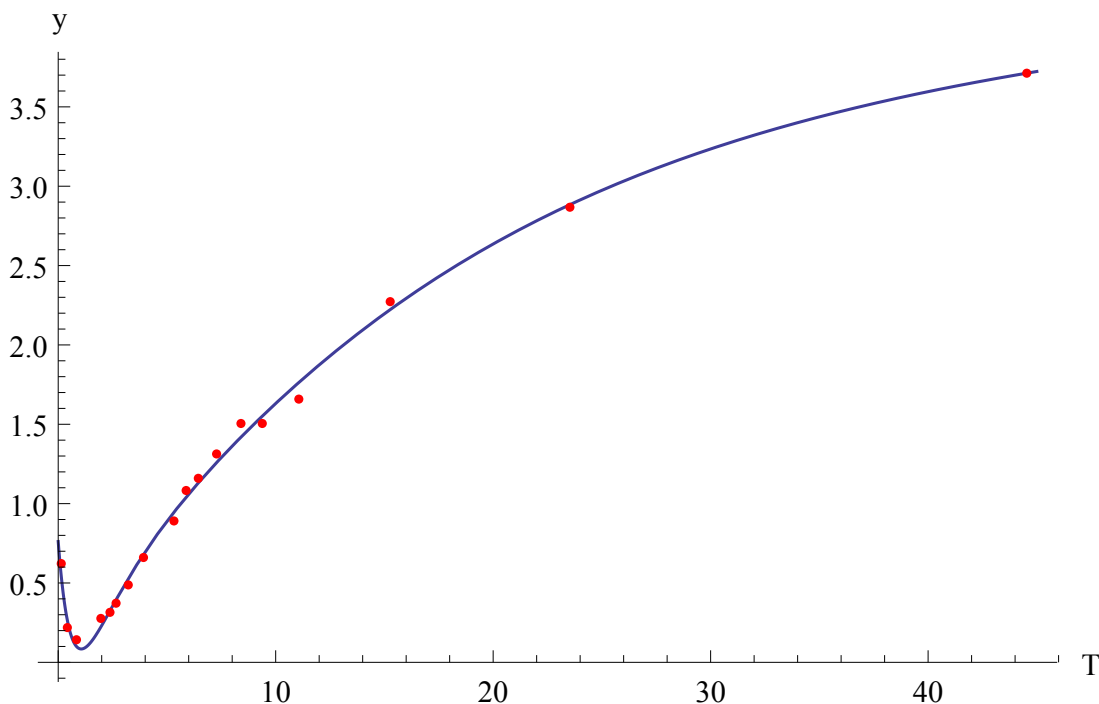
Startovací hodnoty parametrů Svenssonovy funkce necháme nejprve automaticky zvolit. Výsledné hodnoty parametrů nalezené *Mathematicou* jsou uvedeny v tabulce 9. Výsledná křivka po dosazení těchto parametrů spolu se vstupními daty je pak znázorněna na obrázku 15.

Tabulka 9: Parametry Svensson - bez vah, bez startovacích hodnot

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	4,77001
$\beta_1$	-4,00898
$\beta_2$	-3,21961
$\beta_3$	-2,54750
$\tau_1$	6,29722
$\tau_2$	0,68643

Střední kvadratická odchylka (11) je v tomto případě 0,0023866 a střední kvadratická odchylka cen (21) je 20,1975201. Navíc i z obrázku 15 se zdá, že takto odhadnutá výnosová křivka vyrovnává data poměrně dobře.

V případě, že zvolíme startovací hodnoty parametrů pro funkci `FindFit` tak, jak je uvedeno v tabulce 8, dostaneme velmi podobné hodnoty parametrů, viz tabulka 10, a proto i výsledná výnosová křivka není příliš rozdílná od té na obrázku 15. Podobně střední kvadratická odchylka výnosů do splatnosti a střední kvadratická odchylka cen jsou téměř totožné (liší se až na desátém a čtvrtém desetinném místě).



Obrázek 15: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tabulky 9

Tabulka 10: Parametry Svensson - bez vah, startovací hodnoty dle tabulky 8

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	4,77001
$\beta_1$	-4,00898
$\beta_2$	-3,21959
$\beta_3$	-2,54751
$\tau_1$	6,29726
$\tau_2$	0,68644

### 3.2.2.2 Vyrovnávání Svenssonovou funkcí s použitím vah

Podívejme se nyní na vyrovnávání dat Svenssonovou funkcí s použitím vah pro jednotlivá pozorování. Budeme tedy řešit úlohu (18), přičemž váhy budeme volit podle (19) a (20).

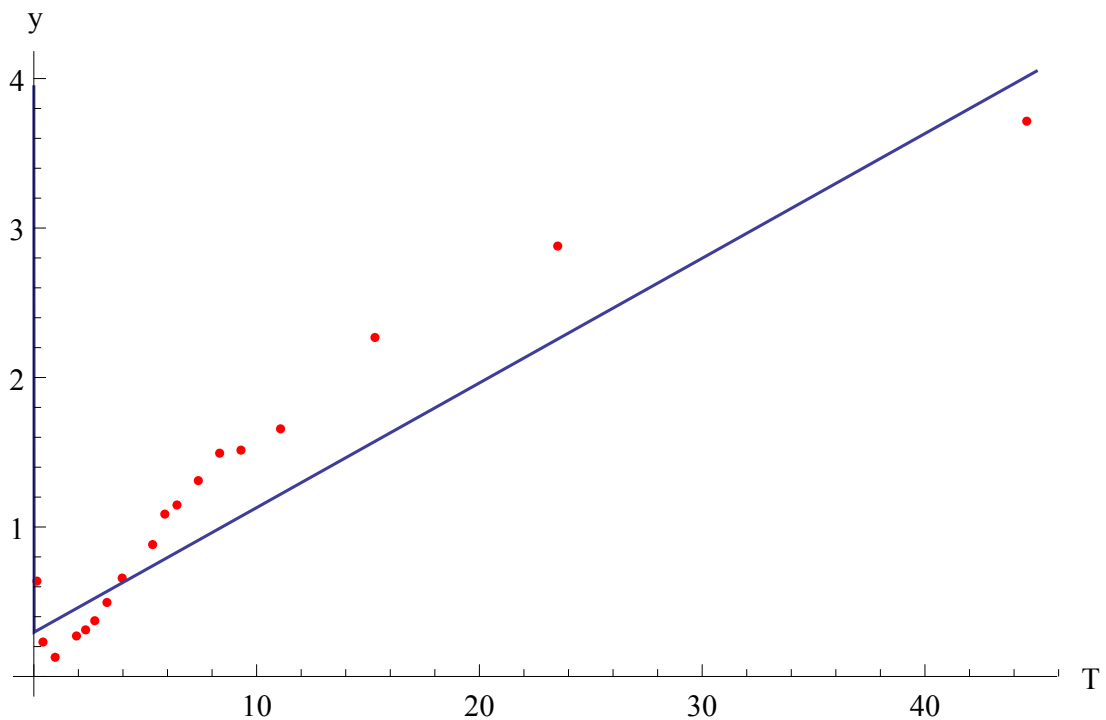
Začneme volbou vah uvedenou v (19). Nejprve necháme opět algoritmus hledat řešení bez zadání startovacích hodnot parametrů. V tom případě sice funkce `NonlinearModelFit` nalezne řešení, ale zřejmě jde o nějaké lokální minimum, které pro naše účely nebude vhodné.<sup>20</sup> Takto získané parametry Svenssonovy funkce totiž nabývají nesmyslných hodnot, viz tabulka 11.

<sup>20</sup>Pokud nechceme zadávat startovací hodnoty parametrů, bude z tohoto důvodu lepší použít místo funkce `NonlinearModelFit` raději funkci `Minimize` či `NMinimize`, tedy provést přímou minimalizaci výrazu (18).

Tabulka 11: Parametry Svensson - váhy (19), bez startovacích hodnot

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	360,67718
$\beta_1$	360,38195
$\beta_2$	10290,76816
$\beta_3$	57608,22062
$\tau_1$	233418,21534
$\tau_2$	475218,38476

Proto i graficky vypadá výnosová křivka v tomto případě nereálně, což je vidět na obrázku 16. Dále i střední kvadratická odchylka je 0,1243843 a střední kvadratická odchylka cen je 64,8931452, tedy obě hodnoty jsou výrazně vyšší než v případech uvedených v 3.2.2.1.



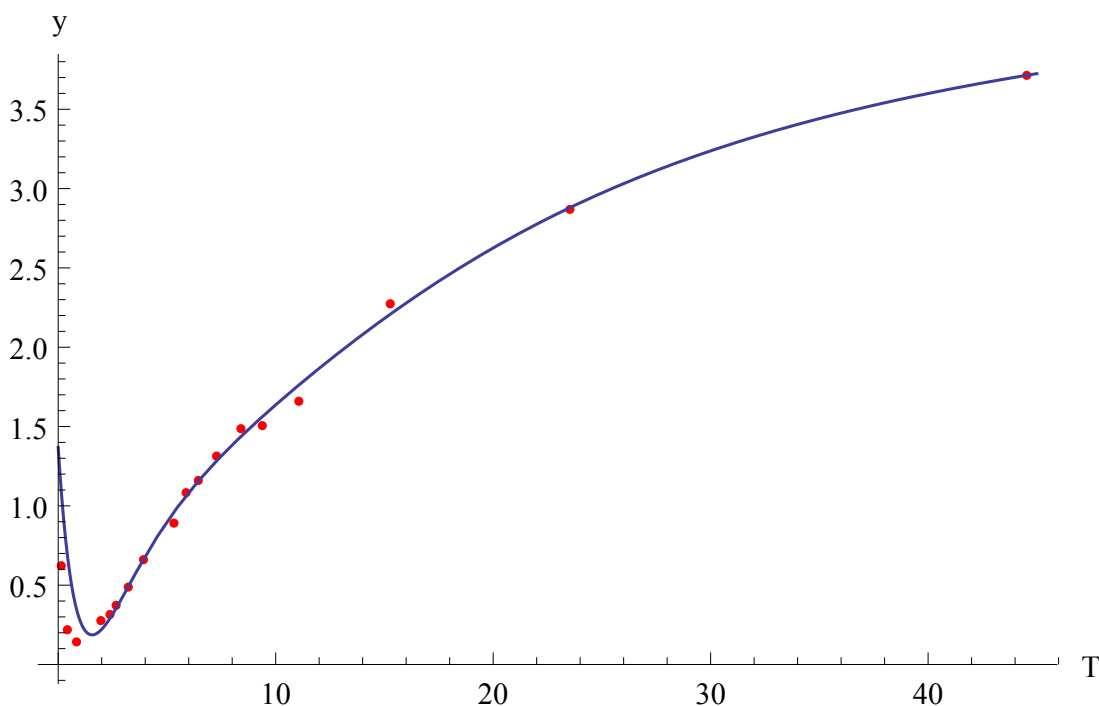
Obrázek 16: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tabulky 11

Pokud zvolíme startovací hodnoty dle tabulky 8, výsledek je o poznání lepší. Dostaneme totiž parametry uvedené v tabulce 12 a výsledkem bude výnosová křivka znázorněná na obrázku 17.<sup>21</sup>

<sup>21</sup>Další možnou volbou startovacích parametrů, která se nabízí, je zvolit za ně hodnoty získané při vyrovnávání bez vah, tj. hodnoty z tabulky 9. V tomto případě však *Mathematica* nalezne řešení, které je co do střední kvadratické odchylky výnosů do splatnosti i cen horší než to získané při volbě startovacích hodnot parametrů dle tabulky 8.

Tabulka 12: Parametry Svensson - váhy (19), startovací hodnoty dle tabulky 8

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	4,74080
$\beta_1$	-3,37312
$\beta_2$	-6,54972
$\beta_3$	-6,84992
$\tau_1$	1,07466
$\tau_2$	5,12642



Obrázek 17: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tabulky 12

Střední kvadratická odchylka je v tomto případě 0,0347364 a střední kvadratická odchylka cen vychází 20,2334592. Jak můžeme vidět při srovnání těchto hodnot s hodnotami, které jsme dostali při neváženém vyrovnání dat Svenssonovou funkcí, takto zvolené váhy dávají v tomto případě horší obě střední kvadratické odchylky.

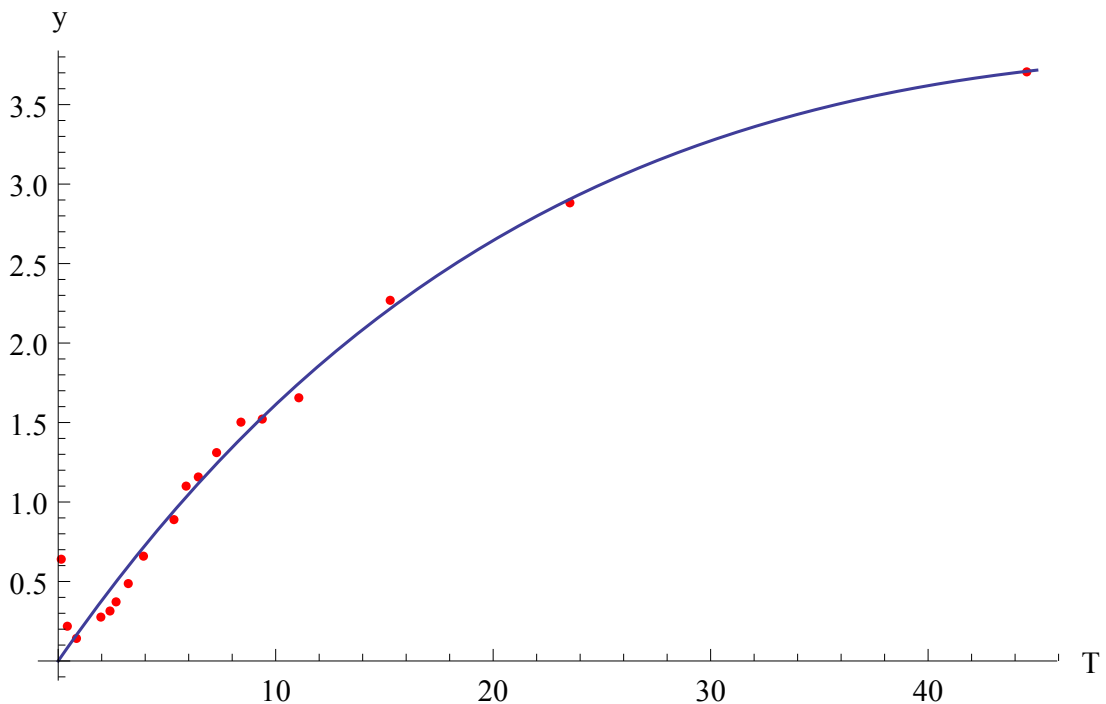
V případě střední kvadratické odchylky výnosů do splatnosti se toto dalo očekávat, avšak možná trochu překvapující je, že váhy zde nesplnily svůj účel a střední kvadratická odchylka cen nevyšla nižší, ale dokonce se zvětšila. Když se ale podíváme na obrázek 15, vidíme, že původní (nevážené) vyrovnání Svenssonovou funkcí vyrovnává data velmi dobře zejména v oblasti delších splatností. I když při použití vah (19) je potom odhad výnosů do splatnosti na dlouhém konci křivky nepatrně lepší (ve smyslu menších odchylek), je to na úkor krátkého konce křivky v takové míře, že celkové střední kvadratické odchylky jsou větší.

Srovnání odhadnutých a pozorovaných výnosů do splatnosti je možné nalézt v příloze č. 5.

V případě našich vstupních dat tedy zřejmě není použití vah (19) příliš vhodné. Podívejme se tedy, jaký bude výsledek v případě volby vah dle (20). Pokud opět nejprve necháme program zvolit startovací hodnoty parametrů Svenssonova modelu automaticky, dostaneme výnosovou křivku danou Svenssonovou funkcí s parametry z tabulky 13, která je zobrazena na obrázku 18.

Tabulka 13: Parametry Svensson - váhy (20), bez startovacích hodnot

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	$1,83022 \cdot 10^{-10}$
$\beta_1$	153,03624
$\beta_2$	453,19901
$\beta_3$	12,75581
$\tau_1$	$5,86338 \cdot 10^{-13}$
$\tau_2$	32,24291



Obrázek 18: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tabulky 13

Už z tabulky i z obrázku je vidět, že toto řešení nebude nejlepší, a to i přes to, že střední kvadratická odchylka cen je rovna 19,5216772, což je dosud nejnižší hodnota. Střední kvadratická odchylka výnosů do splatnosti je však 0,0269756.

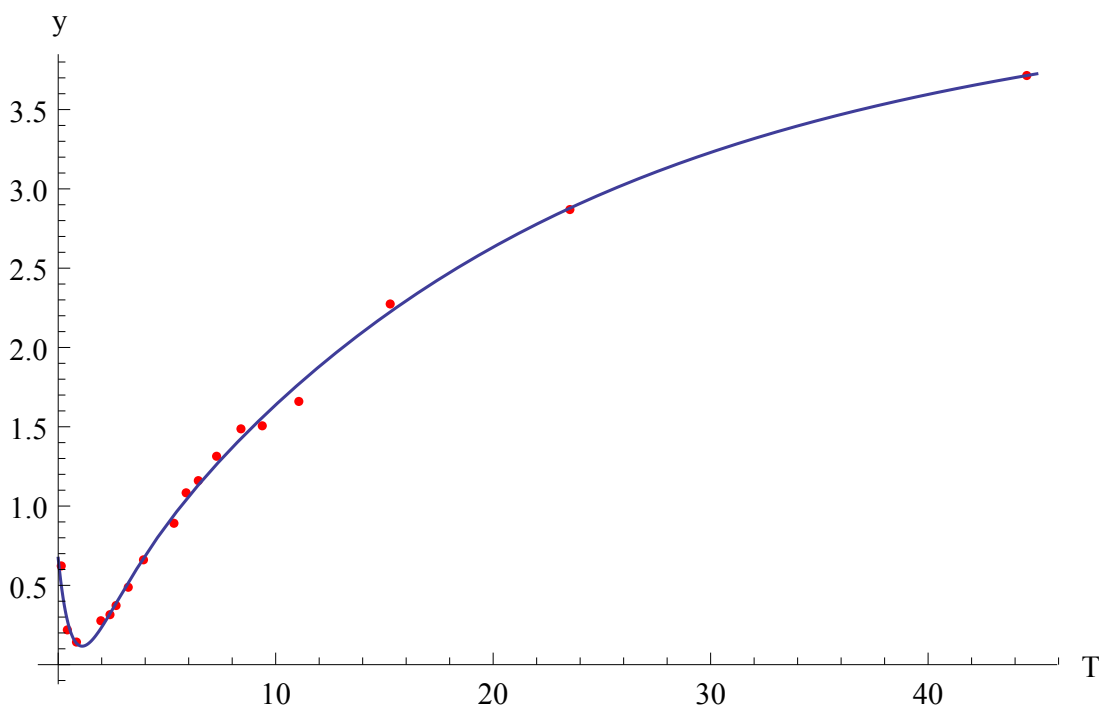
Dalším problémem tohoto řešení je chování v okolí nuly, kde křivka nejprve strmě klesá z vysokých hodnot až do záporných čísel a pak opět roste k nule (což

na obrázku ani není patrné, protože se tak děje pro příliš malé doby do splatnosti - pro splatnosti řádově do jedné tisíce roku), odkud pokračuje tak, jak je vidět na obrázku 18. Tento problém by se ale dal ignorovat, vzhledem k tomu, že křivka pro takto krátké doby do splatnosti nemá praktický význam. Křivka ale z tohoto důvodu „přichází o jeden „hrb“ (tento „hrb“ už je v okolí nuly), a proto i opticky tak dobře nevyrovnává data na svém krátkém konci.

Situace je opět o poznání lepší v případě, kdy jako startovací hodnoty parametrů zvolíme hodnoty z tabulky 8. Takto získané výsledné parametry jsou uvedeny v tabulce 14 a výnosová křivka je vidět na obrázku 19.

Tabulka 14: Parametry Svensson - váhy (20), startovací hodnoty dle tabulky 8

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	4,80688
$\beta_1$	-4,13601
$\beta_2$	-2,82065
$\beta_3$	-2,28456
$\tau_1$	6,77126
$\tau_2$	0,77910



Obrázek 19: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tabulky 14

Střední kvadratická odchylka výnosů do splatnosti je zde 0,0026009, což je číslo nepatrně horší než v případě neváženého vyrovnání, ale poměrně znatelně

lepší než v případě vyrovnání s váhami (19). Střední kvadratická odchylka cen je pak 20,2343340, což je více než v případě bez vah i s váhami dle (19).

Pokud za startovací hodnoty parametrů zvolíme jejich výsledné hodnoty z neváženého vyrovnání, dostaneme v tomto případě zcela totožný výsledek jako právě zmíněný (tj. se startovacími parametry dle tabulky 8).

Výnosy do splatnosti získané z této výnosové křivky (body na křivce) jsou též uvedeny v příloze č. 5.

### 3.2.2.3 Minimalizace odchylek cen

Zabývejme se nyní tím, jak se výnosová křivka, resp. parametry Svenssonovy funkce změní v případě, že místo výnosů do splatnosti budeme minimalizovat přímo součet odchylek (nebo střední kvadratickou odchylku) pozorovaných cen jednotlivých dluhopisů od cen spočtených na základě hledané křivky.

Budeme tedy minimalizovat výraz

$$\sum_{i=1}^N (P_i - \widehat{P}_i)^2,$$

kde  $N$  je počet pozorovaných dluhopisů,  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , jsou jejich pozorované tržní ceny a  $\widehat{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , jsou jejich ceny vypočtené na základě odhadnuté výnosové křivky (současné hodnoty z nich plynoucích peněžních toků diskontované dle hledané křivky), vzhledem k  $\widehat{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Ekvivalentně můžeme (opět vzhledem k  $\widehat{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) minimalizovat výraz (21).

Řešení budeme hledat opět pomocí softwaru *Wolfram Mathematica 9*, tentokrát s využitím funkce `Minimize`. Toto řešení je součástí přílohy č. 4.

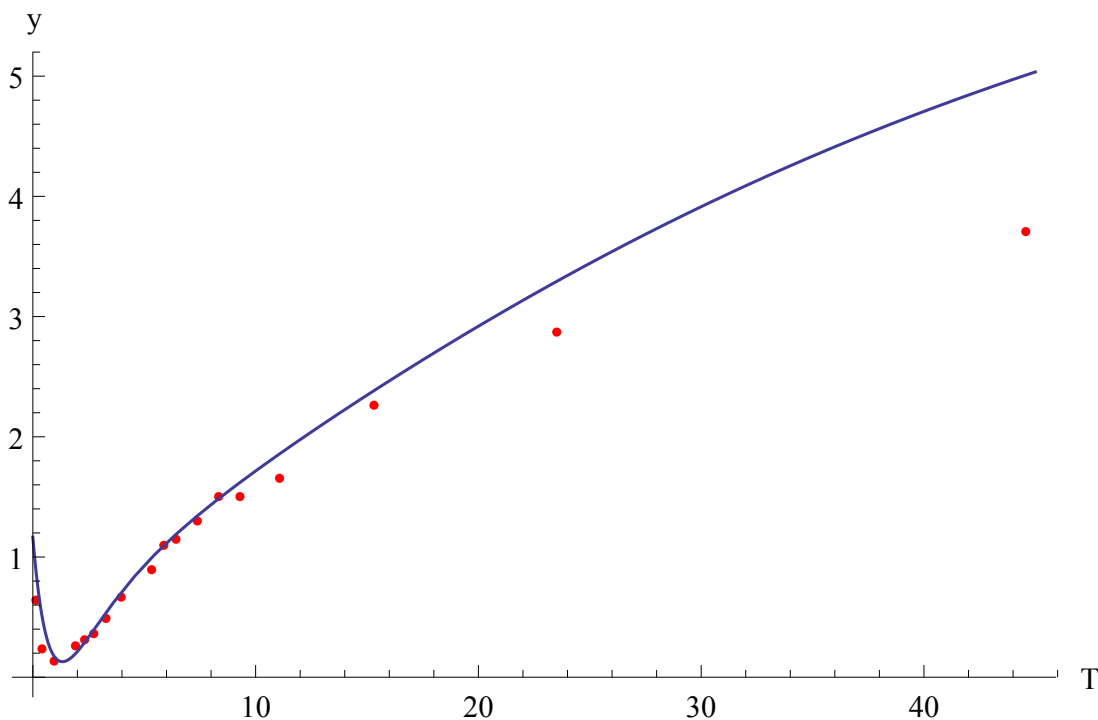
Výsledkem jsou parametry Svenssonovy funkce uvedené v tabulce 15.

Tabulka 15: Parametry Svensson - minimalizace čtverců odchylek cen

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	8,63991
$\beta_1$	-7,47501
$\beta_2$	-6,09273
$\beta_3$	-3,75575
$\tau_1$	12,67425
$\tau_2$	0,82062

Výnosová křivka tvořená Svenssonovou funkcí s těmito parametry je zobrazena na obrázku 20.

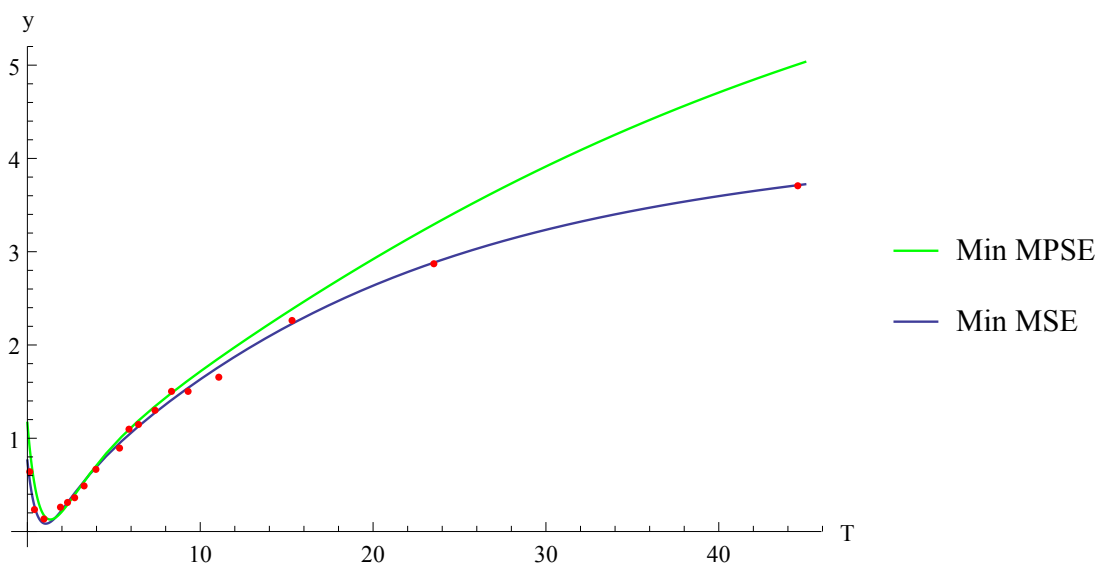
Jak je z obrázku ihned patrné, takto získaná výnosová křivka se zejména na svém dlouhém konci neblíží pozorovaným bodům tak dobře jako křivky diskuto-



Obrázek 20: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tabulky 15

vané v předchozích částech této kapitoly. Střední kvadratická odchylka výnosů do splatnosti je 0,1193337, což je výrazně více než např. 0,0023866 v části 3.2.2.1.

Na druhou stranu střední kvadratická odchylka cen je v tomto případě mnohem nižší, pouze 1,1976045 oproti 20,1975201 z části 3.2.2.1. Je tedy vidět, že jsme volbou nové optimalizační úlohy splnili cíl, tj. našli jsme křivku, která lépe zpětně oceňuje dluhopisy, i když na úkor větší střední kvadratické odchylky ve výnosech do splatnosti.



Obrázek 21: Srovnání křivek při minimalizaci MSE a MPSE

Srovnání výsledných křivek při nevážené minimalizaci středních kvadratických odchylek výnosů do splatnosti (MSE) a minimalizaci středních kvadratických odchylek cen (MPSE) je vidět na obrázku 21.

### 3.2.2.4 Dluhopisy se splatností do 15 let

Pokud porovnáme pozorované ceny dluhopisů s cenami spočtenými na základě některé z křivek získaných při minimalizaci střední kvadratické odchylky výnosů do splatnosti, uvidíme, že velké rozdíly mezi nimi jsou na dlouhém konci křivky, viz tabulka 16 obsahující pozorované ceny a ceny spočtené diskontováním peněžních toků pomocí Svenssonovy funkce s parametry z tabulky 9.

Tabulka 16: Pozorované a spočtené ceny dluhopisů

Dluhopis	Doba do splatnosti	Pozorovaná cena *	Spočtená cena
CZ0001000814	0,11 let	103,629	103,634
CZ0001002729	0,36 let	102,717	102,685
CZ0001002869	0,90 let	102,623	102,665
CZ0001001143	1,93 let	107,054	107,168
CZ0001002737	2,32 let	109,443	109,455
CZ0001000749	2,72 let	119,720	119,643
CZ0001003842	3,23 let	100,398	100,298
CZ0001001903	3,93 let	113,189	113,178
CZ0001000822	5,28 let	122,329	122,273
CZ0001002471	5,93 let	122,641	123,240
CZ0001003834	6,48 let	102,883	103,120
CZ0001001317	7,35 let	119,368	120,098
CZ0001002851	8,39 let	120,671	120,098
CZ0001001945	9,35 let	130,538	131,126
CZ0001002547	11,05 let	145,715	146,156
CZ0001003859	15,30 let	104,330	106,526
CZ0001001796	23,58 let	123,385	129,560
CZ0001002059	44,55 let	124,919	142,736

\* Pozorovaná cena je upravena o alikvótní úrok.

Největší chyby v odhadnutých cenách jsou tedy u posledních dvou až třech dluhopisů, kde odhadnuté ceny jsou poměrně výrazně vyšší než ceny pozorované. To může být způsobeno tím, že jejich splatnosti jsou velmi dlouhé, a proto jsou tyto dluhopisy obchodovány pouze v malém objemu (jsou nelikvidní). To potom může i zásadně zkreslovat jejich cenu.

Odtud se již nabízí myšlenka vyřadit tyto dluhopisy ze vstupních dat, a tedy použít jen dluhopisy se splatnostmi kratšími než 15 let (se splatnostmi před posledním likvidním bodem).

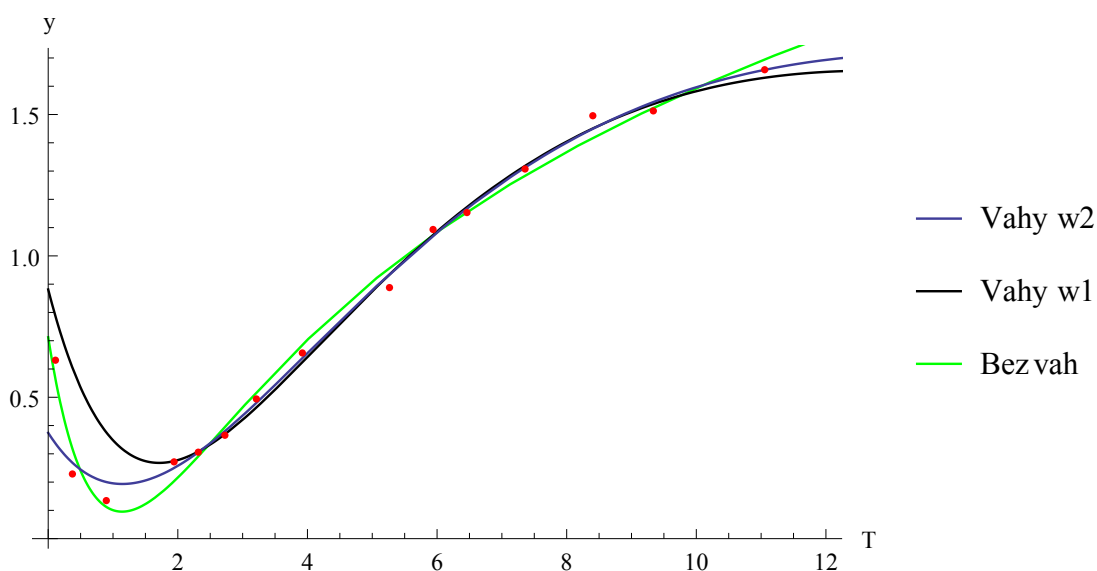
Podívejme se tedy, jaké výsledky bychom dostali, kdybychom se omezili na prvních 15 dluhopisů, a to jak při minimalizaci středních kvadratických odchylek výnosů do splatnosti bez vah a s váhami dle (19) a (20), tak při minimalizaci střední kvadratické odchylky cen dluhopisů. Výpočty je pak možno nalézt v příloze č. 6.

V případě minimalizace odchylek výnosů do splatnosti použijeme startovací hodnoty parametrů Svenssonovy funkce dané tabulkou 8. Výsledkem budou hodnoty uvedené pro minimalizaci bez vah i s váhami  $w_1$  dle (19) a  $w_2$  (20) v tabulce 17.

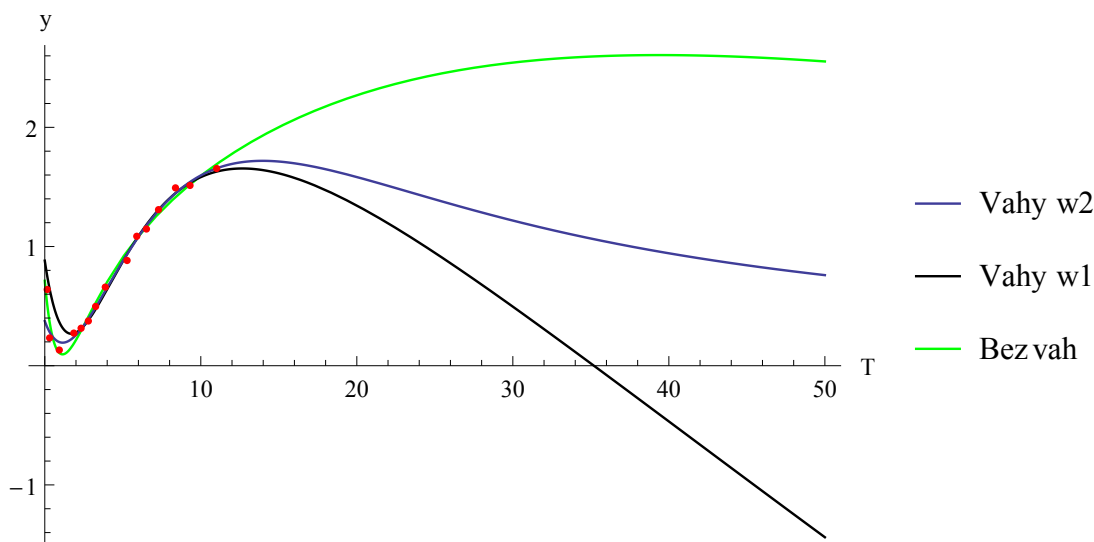
Tabulka 17: Parametry Svensson - splatnosti do 15 let

Parametr	Bez vah	Váhy $w_1$	Váhy $w_2$
$\beta_0$	0,000023	5,09171	$8,83065 \cdot 10^{-10}$
$\beta_1$	0,71219	-4,21045	0,374194
$\beta_2$	7,77600	-7,13648	8,36397
$\beta_3$	-2,68636	-66,54850	-4,96316
$\tau_1$	23,9456	1,94087	5,68443
$\tau_2$	0,835379	237,72434	2,33760

Výnosové křivky zkonstruované ze Svenssonovy funkce s těmito parametry jsou zobrazeny na obrázcích 22 a 23. Na obrázku 22 vidíme, jak vypadají tyto křivky pro splatnosti v okolí pozorovaných splatností, tj. pro splatnosti do 12ti let, na obrázku 23 pak pro splatnosti do 50ti let.



Obrázek 22: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tab. 17 - 12 let



Obrázek 23: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tab. 17 - 50 let

Při prohlédnutí těchto dvou obrázků je vidět, že křivky vypadají rozumně pouze v okolí pozorovaných bodů a pro delší splatnosti postupně nabývají nepravděpodobných či dokonce nereálných hodnot.<sup>22</sup> Proto zřejmě tyto křivky nebudou vhodné pro odhad výnosů do splatnosti pro delší splatnosti, než jaké bereme v úvahu na vstupu (tj. pro tzv. *extrapolaci*).

Co se týče středních kvadratických odchylek výnosů do splatnosti i cen, jsou uvedeny v tabulce 18, odkud je vidět, že použití vah  $w_1$  není vhodné ani z jednoho z těchto dvou hledisek. Naopak použití vah  $w_2$  je oproti variantě bez vah výhodné co do zlepšení odchylky cen, avšak na úkor odchylky výnosů do splatnosti.

Tabulka 18: Střední kvadratické odchylky jednotlivých křivek

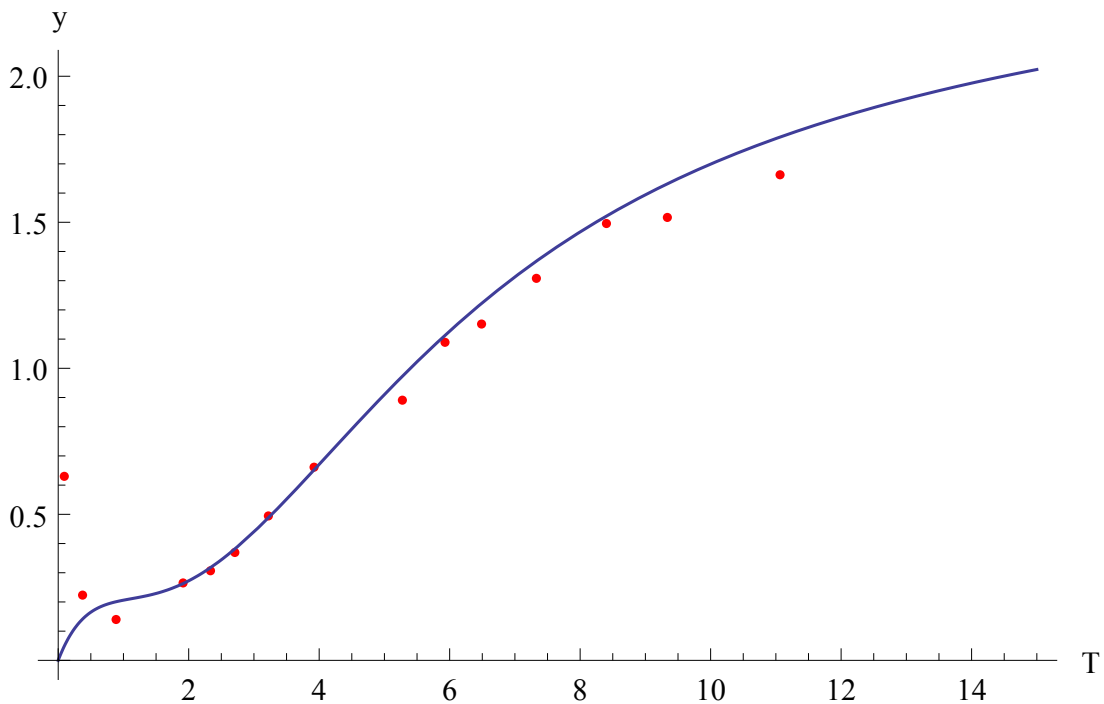
Varianta vyrovnávání	MSE	MPSE
Bez vah	0,0023803	0,2702515
S váhami $w_1$	0,0160378	0,3192130
S váhami $w_2$	0,0066036	0,2596305

V případě, že budeme opět minimalizovat střední kvadratickou odchylku cen dluhopisů, bude její hodnota pouze 0,0298543. Pochopitelně se ale na druhou stranu zvětší střední kvadratická odchylka výnosů do splatnosti, která bude 0,0248044. Hodnoty parametrů Svenssonovy funkce získané tímto způsobem jsou uvedeny v tabulce 19 a výsledná výnosová křivka je pak zobrazena na obrázku 24.

<sup>22</sup>Možná kromě případu neváženého vyrovnání, kdy výnosová křivka ani po 50ti letech nereálně nevypadá. Její  $\beta_0$  je však téměř nulová, z čehož je jasné, že pro ještě delší splatnosti bude dále klesat.

Tabulka 19: Parametry Svensson - minimalizace MPSE, splatnosti do 15 let

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	2,67654
$\beta_1$	-2,67648
$\beta_2$	-62,39289
$\beta_3$	58,53635
$\tau_1$	1,10187
$\tau_2$	1,05739



Obrázek 24: Výnosová křivka - Svenssonova funkce s parametry z tabulky 19

Podle obrázku vidíme, že takto získaná výnosová křivka zřejmě nebude dávat příliš reálné hodnoty na svém nejkratším konci.

### 3.2.3 Výběr nejvhodnější křivky

V části 3.2.2 jsme představili několik možností vyrovnávání pozorovaných dat. V zásadě nejjednodušší bylo nevážené vyrovnávání, které navíc dávalo velmi dobré výsledky co do střední kvadratické odchylky výnosů do splatnosti.

Volbou vah pro jednotlivé pozorované výnosy do splatnosti se nám v několika případech podařilo dosáhnout lepšího zpětného ocenění dluhopisů (menší střední kvadratické odchylky pozorovaných a odhadnutých cen dluhopisů), avšak vždy to bylo na úkor střední kvadratické odchylky výnosů do splatnosti.

Nakonec nejmenší odchylka pozorovaných a odhadnutých cen dluhopisů byla dosažena přímo minimalizací této hodnoty. V tomto případě však odchylky výnosů do splatnosti výrazně rostly.

Pokud máme z těchto variant konstrukce výnosových křivek vybrat tu nejvhodnější, je třeba pečlivě zvážit, k jakému účelu má být výsledná výnosová křivka využita. Má-li být použita k oceňování dluhopisů, bylo by zřejmě vhodné zvolit tu, která má minimální střední kvadratickou odchylku cen (viz např. 3.2.2.3).

Pokud budeme chtít odhadovat výnosy do splatnosti pro splatnosti kratší, než je nejdelší splatnost u pozorovaných dluhopisů, bude asi nejvhodnější vybrat takovou křivku, která má co nejmenší střední kvadratickou odchylku výnosů do splatnosti, případně zkonstruovanou i na základě zredukované množiny vstupních dluhopisů (viz např. 3.2.2.1 a 3.2.2.4). V případě, že nás zajímají např. výnosy do splatnosti pro prvních 15 let, nemá zřejmě význam zahrnovat do vstupních dat i dluhopisy se splatnostmi přes 20 let apod. To potvrzuje i srovnání středních kvadratických odchylek výnosů do splatnosti pro všechny, resp. pro prvních 15 pozorovaných bodů (výnosy do splatnosti pro dluhopisy se splatnostmi do 15 let) při neváženém vyrovnání, kdy výnosová křivka získaná v části 3.2.2.1 vyrovnáním všech dat dává střední kvadratickou odchylku 0,0027193 oproti 0,0023803 z části 3.2.2.4, kde jsme vyrovnávali pouze prvních 15 bodů.

Budeme-li naopak chtít odhadovat výnosy do splatnosti pro splatnosti za posledním pozorovaným bodem, zřejmě by nebylo vhodné použít křivku, která se pro velké splatnosti chová neopodstatněně (viz 3.2.2.4).

Konečná volba však bude vždy předmětem již zmiňovaného aktuárského úsudku. Pro další účely této práce použijeme křivku z obrázku 15 danou Svenssonovou funkcí s parametry z tabulky 9.

### 3.3 Konstrukce bezkupónové křivky - metoda bootstrap

Zkonstruujme nyní z kupónové výnosové křivky z obrázku 15 dané Svenssonovou funkcí s parametry z tabulky 9 křivku bezkupónovou. K tomu použijeme metodu bootstrap, o které již byla řeč v části 1.3.2.

Uvědomíme-li si, že kupónový dluhopis s cenou ve výši 100 % nominální hodnoty, kupónovou platbou ve výši  $C$  % nominální hodnoty a splatností za  $N \in \mathbb{N}$  let má výnos do splatnosti (při ročním složeném úročení) právě  $C$  %, můžeme pro každou celočíselnou splatnost použít jeden takovýto teoretický dluhopis, kde  $C$  bude pro danou splatnost odpovídat bodu na kupónové křivce s ročním úročením odvozené z výnosové křivky pro spojitě úročení zkonstruované v části 3.2.

Jinými slovy ke konstrukci bezkupónové křivky např. na 45 let můžeme využít 45 teoretických kupónových dluhopisů se splatnostmi  $n = 1, 2, \dots, 45$  let, pro

kteřé s využitím vztahu

$$P_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_n}{(1 + YTM_n)^i} + \frac{N_n + C_n}{(1 + YTM_n)^n},$$

kde  $P_n$  je cena,  $N_n$  je nominální hodnota,  $C_n$  je výše kupónové platby a  $YTM_n$  je výnos do splatnosti  $n$ -tého dluhopisu, resp. dluhopisu se splatností  $n$  let, a s volbou  $P_i = 100$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dostaneme  $C_i = YTM_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Za  $YTM_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pak bereme hodnoty na kupónové výnosové křivce s ročním úročením pro splatnosti  $i = 1, \dots, n$  let.

Tyto teoretické dluhopisy pak budou představovat data, na která se aplikuje metoda bootstrap představená v části 1.3.2.

Podívejme se tedy na konstrukci bezkupónové křivky na konkrétním případu českých státních dluhopisů. Již dříve jsme získali kupónovou křivku. Nyní použijeme tu získanou v části 3.2.2.1. Z té zjistíme výnosy do splatnosti pro splatnosti 1, 2, ..., 45 let a tyto výnosy do splatnosti převedeme na výnosy do splatnosti při složeném ročním úročení. Následně pak aplikujeme metodu bootstrap a získáme tak bezkupónové sazby na 1, 2, ..., 45 let.

V tabulce 20 jsou uvedeny výnosy do splatnosti při spojitém i složeném ročním úročení (pro převod ze spojitého na složené roční úročení jsme využili známého vztahu  $Y(T) = e^{y(T)} - 1$ , kde  $Y(T)$  je při ročním a  $y(T)$  při složeném úročení).

Ročně úročené výnosy do splatnosti následně použijeme jako kupónové sazby teoretických dluhopisů s příslušnými dobami do splatnosti a aplikujeme metodu bootstrap z části 1.3.2, čímž získáme bezkupónové spotové sazby  $R(1), \dots, R(45)$ . Ukažme si tento postup pro první tři roky.

1) V prvním kroku vypočteme  $R(1)$  jako výnos do splatnosti dluhopisu se splatností jeden rok. Vzhledem k tomu, jak máme dány naše teoretické dluhopisy, nemusíme ve skutečnosti nic počítat, protože výnos do splatnosti je pro první dluhopis roven jeho kupónové sazbě, a tedy po zaokrouhlení  $R(1) = 0,08530\%$ .

2) V druhém kroku použijeme tuto již známou spotovou bezkupónovou sazbu pro první období a spolu s ostatními známými hodnotami pro dluhopis se splatností dva roky ji dosadíme do vztahu (8), z něhož vyjádřením  $R(2)$  po zaokrouhlení dostaneme  $R(2) = 0,23223\%$ .

3) Dále použitím známých informací o třetím dluhopisu a již spočtených sazeb  $R(1)$  a  $R(2)$  spočítáme pomocí vzorce (9) pro  $j = 3$  hledanou sazbu na tři roky, tj.  $R(3)$ . Po zaokrouhlení dostaneme  $R(3) = 0,47819\%$ .

Dále bychom postupovali analogicky dle vztahu (9) tak dlouho, až bychom získali bezkupónové sazby pro všech 45 let. Tyto sazby jsou uvedeny v posledním sloupci tabulky 20.

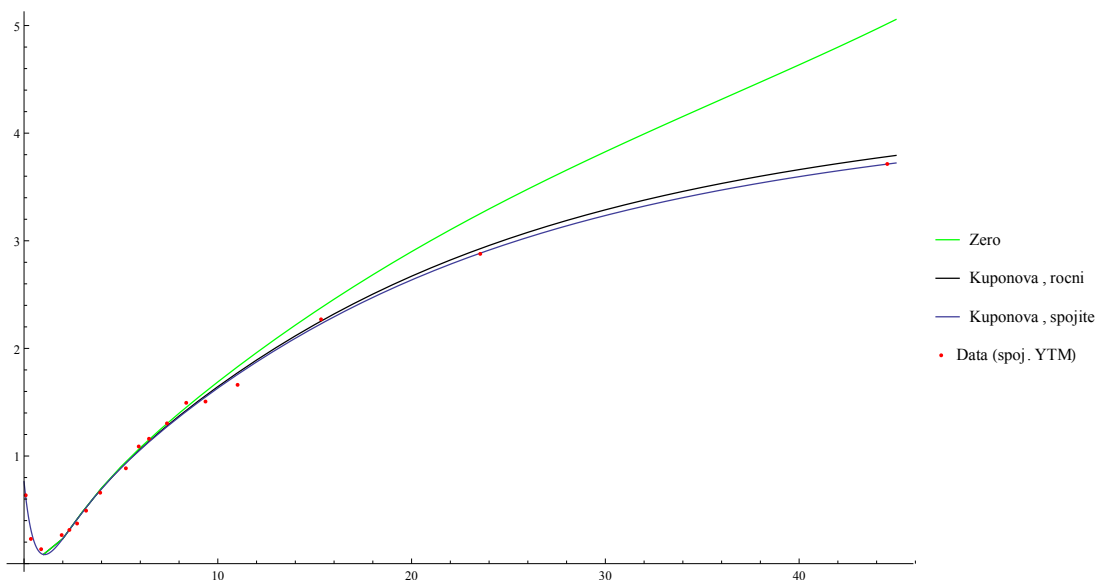
Tabulka 20: Výnosy do splatnosti - body na kupónové výnosové křivce

Doba do splatnosti	YTM - spojitě úročení	YTM - roční úročení	Bezкупónová sazba
1 rok	0,08526 %	0,08529 %	0,08529 %
2 roky	0,23179 %	0,23206 %	0,23223 %
3 roky	0,47565 %	0,47678 %	0,47819 %
4 roky	0,69693 %	0,69936 %	0,70328 %
5 let	0,88893 %	0,89289 %	0,90044 %
6 let	1,05989 %	1,06552 %	1,07779 %
7 let	1,21644 %	1,22387 %	1,24204 %
8 let	1,36254 %	1,37187 %	1,39725 %
9 let	1,50037 %	1,51168 %	1,54569 %
10 let	1,63114 %	1,64451 %	1,68862 %
11 let	1,75554 %	1,77104 %	1,82677 %
12 let	1,87401 %	1,89168 %	1,96059 %
13 let	1,98683 %	2,00670 %	2,09035 %
14 let	2,09424 %	2,11632 %	2,21626 %
15 let	2,19644 %	2,22074 %	2,33848 %
16 let	2,29362 %	2,32013 %	2,45715 %
17 let	2,38598 %	2,41467 %	2,57242 %
18 let	2,47370 %	2,50455 %	2,68442 %
19 let	2,55699 %	2,58996 %	2,79328 %
20 let	2,63603 %	2,67108 %	2,89916 %
21 let	2,71102 %	2,74810 %	3,00219 %
22 let	2,78216 %	2,82122 %	3,10253 %
23 let	2,84964 %	2,89063 %	3,20033 %
24 let	2,91366 %	2,95652 %	3,29576 %
25 let	2,97439 %	3,01907 %	3,38895 %
26 let	3,03201 %	3,07845 %	3,48009 %
27 let	3,08671 %	3,13484 %	3,56932 %
28 let	3,13863 %	3,18840 %	3,65681 %
29 let	3,18794 %	3,23930 %	3,74274 %
30 let	3,23480 %	3,28769 %	3,82726 %
31 let	3,27933 %	3,33370 %	3,91055 %
32 let	3,32169 %	3,37747 %	3,99277 %
33 let	3,36199 %	3,41914 %	4,07412 %
34 let	3,40036 %	3,45883 %	4,15475 %
35 let	3,43691 %	3,49665 %	4,23488 %
36 let	3,47174 %	3,53271 %	4,31467 %
37 let	3,50497 %	3,56711 %	4,39434 %
38 let	3,53667 %	3,59996 %	4,47411 %
39 let	3,56695 %	3,63133 %	4,55418 %
40 let	3,59589 %	3,66132 %	4,63481 %
41 let	3,62355 %	3,69000 %	4,71626 %
42 let	3,65002 %	3,71745 %	4,79879 %
43 let	3,67537 %	3,74374 %	4,88273 %
44 let	3,69965 %	3,76894 %	4,96842 %
45 let	3,72293 %	3,79310 %	5,05625 %

Tímto jsme tedy dostali výnosy do splatnosti teoretických bezкупónových dluhopisů neboli bezкупónové sazby na jeden rok až 45 let (vždy jen pro celé

roky). Budeme-li chtít zkonstruovat celou bezkupónovou křivku, je možné použít některou z metod představených v kapitole 2.

Pro hrubé srovnání, jak se liší bezkupónová křivka od kupónové, je zřejmě dostatečná i lineární interpolace, což je vidět na obrázku 25, kde „zlomy“ na bezkupónové křivce nejsou patrné (to je samozřejmě způsobeno mj. tím, že je zde křivka pro 45 let a „zlomy“ jsou v každém celém roce).



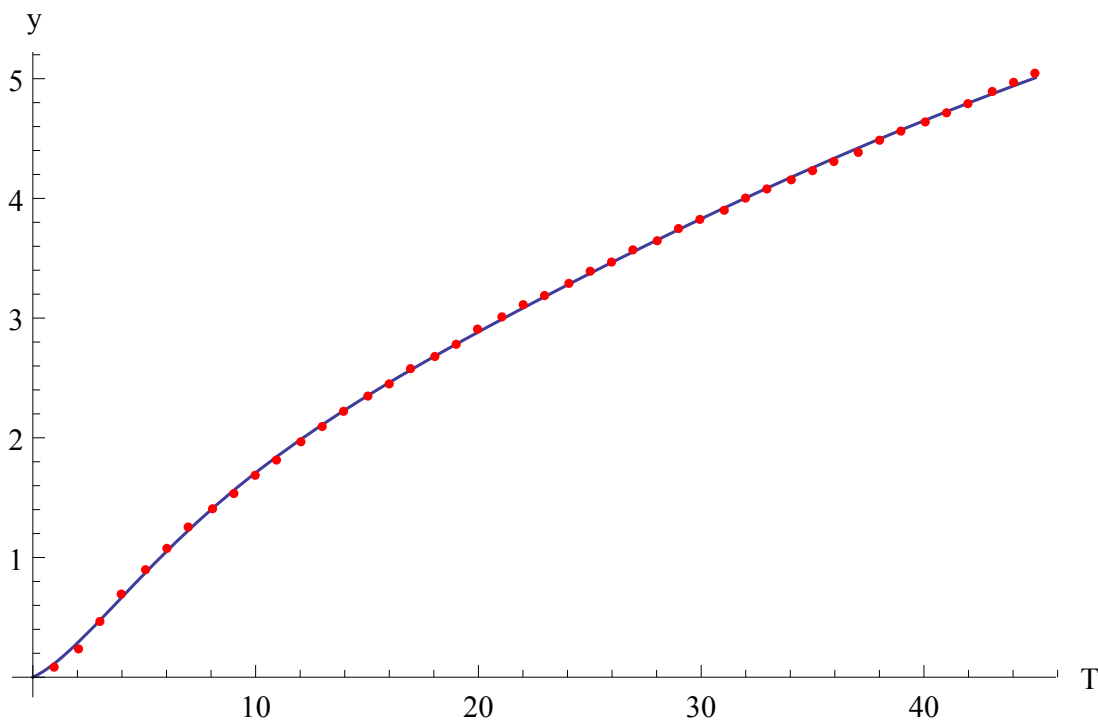
Obrázek 25: Kupónová a bezkupónová křivka - české státní dluhopisy 7. 5. 2013

Pokud potřebujeme, aby byla výsledná bezkupónová křivka hladká, je možné použít opět např. Svenssonův model. V našem případě získáme (neváženým) vyrovnáváním spotových sazeb Svenssonovou funkcí hodnoty parametrů uvedené v tabulce 21 (pro spojitě úročení).

Tabulka 21: Parametry Svensson - spotové bezkupónové sazby

Parametr	Odhadnutá hodnota
$\beta_0$	8,89052
$\beta_1$	-8,89052
$\beta_2$	-4,75732
$\beta_3$	-12,78830
$\tau_1$	3,30091
$\tau_2$	11,8391

Výsledná hladká bezkupónová křivka pro složené roční úročení je spolu s původními bezkupónovými sazbami pro každý celý rok znázorněna na obrázku 26.



Obrázek 26: Hladká bezkupónová křivka - české státní dluhopisy 7. 5. 2013

Výpočty a grafy v této části (3.3) byly zpracovány opět v programu *Wolfram Mathematica 9* a jsou k nalezení v příloze č. 7.

### 3.4 Konstrukce forwardové křivky

Někdy může být užitečné znát úrokovou sazbu mezi  $x$ -tým a  $(x + 1)$ -ním rokem od současnosti (neboli znát roční forwardové sazby) nebo také okamžité forwardové sazby (okamžitou forwardovou křivku).

Ukažme si proto ještě, jak lze z výsledků, které jsme dostali postupně v předchozích částech tohoto textu, dostat roční forwardové bezkupónové sazby a okamžitou forwardovou bezkupónovou výnosovou křivku.

Chceme-li spočítat forwardové bezkupónové sazby (při složeném ročním úročení) v čase 0 platné od času za  $T$  let na jeden rok, stačí vzít spotové bezkupónové sazby  $R(T)$  a  $R(T + 1)$  z posledního sloupce tabulky 20 a dosadit je do vztahu

$$F(T, T + 1) = \frac{(1 + R(T + 1))^{T+1}}{(1 + R(T))^T}.$$

Forwardové bezkupónové sazby  $F(T, T + 1)$  z českých státních dluhopisů k 7. 5. 2013 platné ihned a dále za jeden rok až za 15 let na jeden rok jsou uvedeny v tabulce 22, pro celých 45 let jsou pak k nalezení v příloze č. 7.

Tabulka 22: Forwardové sazby k 7. 5. 2013 platné od času  $T$  na jeden rok

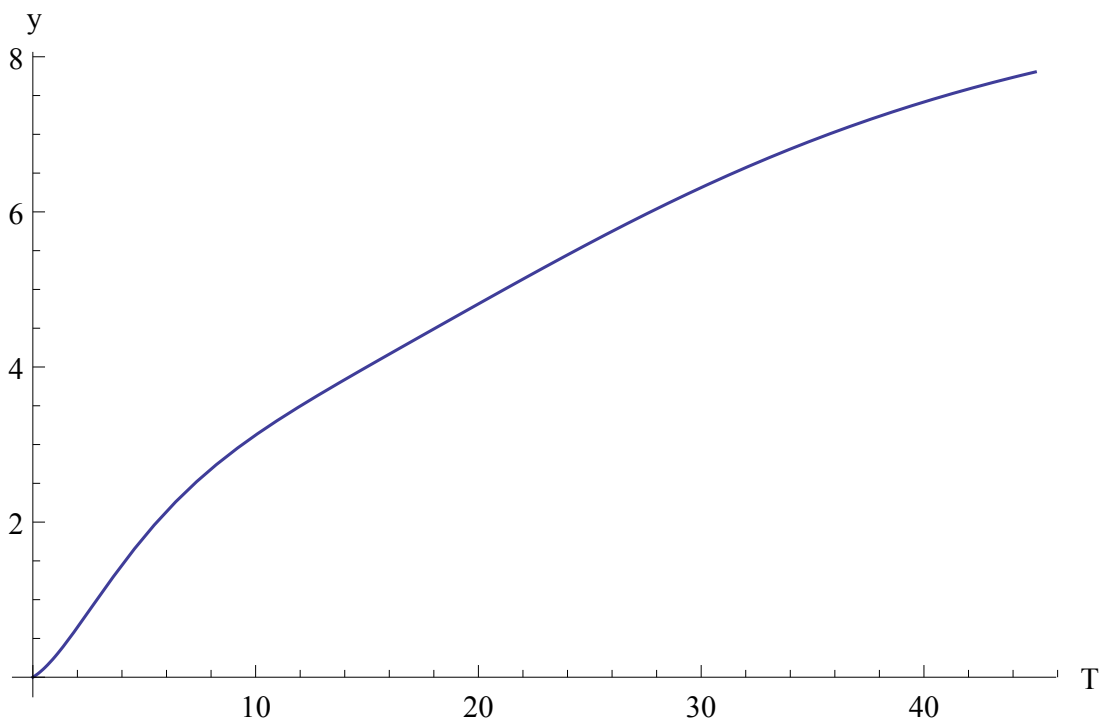
$T$ (let)	$F(T, T + 1)$ (v %)
0	0,08529
1	0,37938
2	0,97193
3	1,38156
4	1,69293
5	1,96923
6	2,23320
7	2,49040
8	2,74101
9	2,98408
10	3,21868
11	3,44422
12	3,66043
13	3,86728
14	4,06499
15	4,25388

Ke konstrukci okamžité forwardové křivky potom stačí vzít spojitě úročenou spotovou křivku  $r(T)$  a aplikovat na ní vzorec

$$f(T) = r(T) + Tr'(T).$$

Okamžitá forwardová křivka získaná tímto způsobem z hladké bezkupónové křivky z českých státních dluhopisů z obrázku 26 převedené na spojitě úročení je k vidění na obrázku 27. Celá konstrukce v programu *Wolfram Mathematica 9* je součástí přílohy č. 7.

Připomeňme ještě na závěr této kapitoly, že vstupní data se v praxi před použitím ke konstrukci výnosových křivek mnohdy různě upravují (ať už přiřazením různých vah nebo odstraněním některých částí dat před či po prvním vyrovnání apod.). Vše je pak vždy, jak jsme již několikrát zmínili, otázkou odborného aktuárského úsudku. Výsledné křivky by se po takových úpravách mohly i výrazně lišit od námi zkonstruovaných, nicméně principiálně jde vždy o stejný postup.



Obrázek 27: Okamžitá forwardová křivka - české státní dluhopisy 7. 5. 2013

## Závěr

V této práci jsme se zabývali modelováním výnosových křivek, jehož výsledek, tedy výnosové křivky, jsou důležitým aparátem používaným při ohodnocování peněžních toků, finančním rozhodování, tvorbě rezerv v pojišťovnictví i v mnoha dalších oblastech. Přitom bezriziková výnosová křivka, označovaná též jako časová struktura úrokových měr, udává závislost výnosnosti teoretického bezrizikového aktiva na době do jeho splatnosti a slouží tak i jako tzv. „benchmark“ (srovnávací ukazatel) pro ohodnocení ostatních aktiv na trhu. I proto bylo cílem této práce nejen představení základních modelů pro konstrukci výnosových křivek, ale i jejich aplikace na reálná data ve formě českých státních dluhopisů, neboť výnosová křivka zkonstruovaná z bezkupónových státních dluhopisů bývá považována za bezrizikovou. Vzhledem k tomu, že bezkupónové státní dluhopisy se na trhu téměř nevyskytují, bylo třeba aplikovat metodu známou jako bootstrapping na dluhopisy kupónové.

Nejprve jsme uvedli základní pojmy a definice spojené s teorií výnosových křivek. To jsme proto udělali v první kapitole, kde jsme zároveň představili několik základních modelů výnosových křivek a dvě hlavní metody, kterými lze odvodit výnosy teoretických bezkupónových dluhopisů, metodu STRIPS dluhopisů a metodu bootstrap, přičemž druhé z nich jsme věnovali více prostoru právě z důvodu potřeby jejího použití při konstrukci bezrizikové výnosové křivky ze státních dluhopisů. Na závěr první kapitoly jsme popsali základní tvary výnosových křivek, které se v praxi vyskytují.

Vzhledem k tomu, že výnosové křivky znázorňují výnosnosti cenných papírů určitého typu na době do jejich splatnosti, je zřejmé, že nikdy nebudeme mít dostatek těchto cenných papírů k tomu, abychom pokryli úplně všechny splatnosti (resp. všechny splatnosti ve zvoleném intervalu, např. od 0 do 45 let). Proto se křivky konstruují na základě známých bodů v prostoru doba do splatnosti - výnos do splatnosti, kde tyto body jsou dány právě jednotlivými cennými papíry, které máme k dispozici.

Samotné metody konstrukce výnosových křivek na základě pozorovaných bodů byly předmětem zájmu v druhé kapitole, kde jsme představili jak některé jednoduché, tak i složitější a v praxi používanější z nich. Začali jsme zřejmě nejjednodušší lineární interpolací, jejímž výsledkem je lomená čára spojující pozorované body. Ta nám může dávat nějaký první odhad výnosnosti pro splatnost, kterou neznáme z pozorování, ale přináší některé komplikace, zejména není hladká ve „zlomových“ bodech. Proto jsme vyzkoušeli i interpolaci polynomem, která však nedávala dobré výsledky.

Jako výrazně lepší se ukázalo použití kubických splajnů, tedy po částech kubických funkcí. V tomto případě můžeme vhodnou volbou vyhlazující konstanty zvolit kompromis mezi hladkostí a přiblížením k pozorovaným datům, což bylo dobře viditelné na obrázcích v části 2.2, kde jsme na stejnou sadu dat použili splajny s různými hodnotami vyhlazující konstanty.

Jako další jsme představili parametrické modely Nelsonův-Siegelův a jeho rozšíření, model Svenssonův. Právě model Svenssonův je jedním z modelů, které jsou v praxi nejčastěji používány, a to zřejmě proto, že ač není zbytečně složitý (neobsahuje příliš mnoho parametrů), dává dobré výsledky.

To byl i důvod, proč jsme Svenssonův model používali ve třetí kapitole, kde jsme ukázali kompletní postup konstrukce výnosových křivek z českých státních dluhopisů.

Jako vstupní data nám posloužily tržní ceny všech českých státních dluhopisů s pevným kupónem k 7. 5. 2013. Z nich jsme pro každý dluhopis spočítali dobu do splatnosti dle standardu 30/360 a výnos do splatnosti. Tyto dvojice ve tvaru doba do splatnosti - výnos do splatnosti pro nás pak představovali pozorované body, které jsme vyrovnávali Svenssonovou funkcí.

Protože jsme požadovali, aby výsledná výnosová křivka zároveň i dobře zpětně oceňovala vstupní dluhopisy (ve smyslu střední kvadratické odchylky pozorovaných a odhadnutých cen dluhopisů), vyzkoušeli jsme mimo klasického vyrovnávání i vyrovnávání s přiřazením různých vah jednotlivým pozorovaným bodům, konkrétně vah dle doporučení České společnosti aktuárů [14] a vah daných modifikovanou durací. Možná poněkud překvapující byl výsledek, tedy že vážené vyrovnání nedávalo výrazně lepší střední kvadratické odchylky pozorovaných a odhadnutých cen než vyrovnání nevážené, v některých případech byly tyto odchylky dokonce větší, což bylo způsobeno tím, že nevážené vyrovnání dávalo velmi dobré výsledky na dlouhém konci křivky, tj. pro pozorované body, kterým jsem potom přiřadili největší váhy. Proto se pak sice přiblížení vážených křivek těmto bodům oproti křivce nevážené ještě o něco zlepšilo (odchylky křivky od těchto bodů se zmenšily), ale bylo to na úkor krátkého konce křivky v takové míře, že celková střední kvadratická odchylka výnosů do splatnosti vzrostla a střední kvadratická odchylka cen se nezmenšila nijak výrazně, resp. v některých případech dokonce také vzrostla.

Jako další jsme proto zkusili ještě jednu možnost vyrovnávání, a to vyrovnání tak, abychom minimalizovali přímo střední kvadratickou odchylku pozorovaných a spočtených cen dluhopisů. V takovém případě odchylka cen poměrně významně klesla, avšak (dle očekávání) odchylka výnosů do splatnosti se zřetelně zvětšila. Přitom takto zkonstruovaná křivka se od dřívějších lišila zejména na svém

dlouhém konci, což bylo pravděpodobně způsobeno nízkou likviditou dluhopisů s nejdelšími splatnostmi.

Právě z toho důvodu jsme se v další části třetí kapitoly omezili na dluhopisy se splatnostmi do 15ti let a aplikovali jsme celý postup konstrukce křivky na takto zredukovanou množinu pozorovaných bodů. Jak se dalo očekávat, výsledné křivky se znatelně lišily od těch z předchozí části.

V části 3.3 jsme následně z kupónové křivky odvodili teoretickou křivku bezkupónovou, a to pomocí metody bootstrap aplikované na sadu hypotetických kupónových dluhopisů, jejichž splatnosti by byly vždy celočíselné a jejichž výnosy do splatnosti by se rovnaly výnosům do splatnosti na odhadnuté kupónové křivce. Na takovou množinu dluhopisů už je totiž možné použít metodu bootstrap v takové podobě, v jaké byla představena v první kapitole. Výsledkem pak byly pro každý celý rok výnosy do splatnosti teoretických bezkupónových bezrizikových dluhopisů, neboli bezrizikové spotové úrokové sazby.

Ty jsme následně znovu vyrovnali Svenssonovou funkcí, čímž jsme získali hladkou bezkupónovou křivku. Ta nám potom v závěru třetí kapitoly posloužila ke konstrukci okamžité forwardové křivky, čímž jsme (spolu se spočtením forwardových sazeb platných k 7. 5. 2013 na jeden rok od času  $T$  pro  $T = 0, 1, \dots, 44$  let) třetí kapitolu zakončili.

Máme-li tedy shrnout přínos této práce, je jím nejen rekapitulace nejdůležitějších metod konstrukce výnosových křivek, ale zejména popis celého procesu konstrukce bezrizikové bezkupónové křivky z českých státních dluhopisů tak, jak se v praxi opravdu aplikuje.

Výsledkem jsou roční spotové a forwardové sazby i okamžitá forwardová a spojitě úročena spotová výnosová křivka k datu 7. 5. 2013. Postup jejich konstrukce lze však pouze s drobnými úpravami snadno aplikovat na jakoukoli množinu vstupních dluhopisů. Za tímto účelem je možné využít i přílohy obsahující zdrojové kódy programu *Wolfram Mathematica 9* (na přiložené CD jsou mj. také přímo notebooky spustitelné v tomto programu).

## Seznam použité literatury

- [1] DUPAČOVÁ, J., HURT, J., ŠTĚPÁN, J.: Stochastic Modeling in Economics and Finance. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 2002. ISBN: 1-4020-0840-6.
- [2] BRIGO, D., MERCURIO, F.: Interest Rate Models: Theory and Practice - With Smile, Inflation and Credit. 2nd ed. Springer. Berlin, 2006. ISBN: 978-3-540-22149-4.
- [3] CIPRA, T.: Finanční ekonometrie. Ekopress. Praha, 2008. ISBN: 978-80-86929-43-9.
- [4] BUREŠ, J.: Úvod do problematiky výnosových křivek [online]. *Přednáška předmětu Makroekonomická analýza, Vysoká škola ekonomická v Praze.* Praha, 2007 [cit. 2013-03-28].  
Dostupný z: [http://ksp.vse.cz/KHP/WCMS\\_KHP.nsf/pages/5PH501-Makroekonomicka-Analyza.html](http://ksp.vse.cz/KHP/WCMS_KHP.nsf/pages/5PH501-Makroekonomicka-Analyza.html)
- [5] CAIRNS, A.: Interest rate models: an introduction. Princeton University Press. Princeton, 2004. ISBN 0-691-11894-9.
- [6] MÁLEK, J., RADOVÁ, J., ŠTĚRBA F.: Konstrukce výnosové křivky pomocí vládních dluhopisů v České republice. *Politická ekonomie*. 2007, 6, s. 792 - 808. ISSN 0032-3233.
- [7] SACK, B.: Using Treasury STRIPS to Measure the Yield Curve [online]. Division of Monetary Affairs, Federal Reserve Board of Governors. Washington D.C., 2000 [cit. 2013-04-22]. Dostupný z: <http://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2000/200042/200042pap.pdf>.
- [8] FAJMON, B., RŮŽIČKOVÁ, I.: Matematika 3 [online]. Skripta, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Vysoké učení technické v Brně. Brno, 2007 [cit. 2013-04-24].  
Dostupný z: <http://www.umat.feec.vutbr.cz/~novakm/matematika3.pdf>.
- [9] WAGGONER, D.: Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices. *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper*. 1997, 97-10.
- [10] NELSON, C. R., SIEGEL, A. F.: Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*. 1987, 60(4), s. 473-489. ISSN: 0021-9398.

- [11] KLADÍVKO, K.: The Czech Treasury Yield Curve from 1999 to the Present. *Finance a úvěr - Czech Journal of Economics and Finance*. 2010, 60(4), s. 307 - 335. ISSN: 0015-1920.
- [12] SVENSSON, L. E. O.: Estimating forward interest rates with the extended Nelson & Siegel method. *Penning & Valutapolitik - Sveriges Riksbank Quarterly Review*. 1995, 3(1), s. 13-26.
- [13] HURT, J.: Yield Curves with Mathematica 6.0 [online]. Wolfram Technology Conference 2007. Champaign (IL), 2007 [cit. 30-04-2013].  
Dostupný z: <http://library.wolfram.com/infocenter/Conferences/6956/>.
- [14] Odborné doporučení České společnosti aktuárů č.1: Stanovení bezrizikové výnosové křivky [online]. Česká společnost aktuárů. Praha, 2003 [cit. 01-05-2013].  
Dostupný z: <http://www.actuaria.cz/doporuceni1.asp>

## Seznam tabulek

1	Dluhopisy pro příklad použití metody bootstrap . . . . .	9
2	Data pro ilustraci použitých metod . . . . .	11
3	Střední kvadratické odchyly kubických splajnů od dat . . . . .	19
4	Střední kvadratické odchyly křivek od původních dat . . . . .	27
5	České státní dluhopisy k 7. 5. 2013 . . . . .	29
6	Doby a výnosy do splatnosti dluhopisů z tabulky 5 . . . . .	30
7	Doby a výnosy z tabulky 6 při spojitém úročení . . . . .	33
8	Startovací hodnoty parametrů Svenssonovy funkce . . . . .	34
9	Parametry Svensson - bez vah, bez startovacích hodnot . . . . .	35
10	Parametry Svensson - bez vah, startovací hodnoty dle tabulky 8 . . . . .	36
11	Parametry Svensson - váhy (19), bez startovacích hodnot . . . . .	37
12	Parametry Svensson - váhy (19), startovací hodnoty dle tabulky 8 . . . . .	38
13	Parametry Svensson - váhy (20), bez startovacích hodnot . . . . .	39
14	Parametry Svensson - váhy (20), startovací hodnoty dle tabulky 8 . . . . .	40
15	Parametry Svensson - minimalizace čtverců odchylek cen . . . . .	41
16	Pozorované a spočtené ceny dluhopisů . . . . .	43
17	Parametry Svensson - splatnosti do 15 let . . . . .	44
18	Střední kvadratické odchyly jednotlivých křivek . . . . .	45
19	Parametry Svensson - minimalizace MPSE, splatnosti do 15 let . . . . .	46
20	Výnosy do splatnosti - body na kupónové výnosové křivce . . . . .	49
21	Parametry Svensson - spotové bezkupónové sazby . . . . .	50
22	Forwardové sazby k 7. 5. 2013 platné od času $T$ na jeden rok . . . . .	52

# Přílohy

## Příloha 1

Použití metod pro konstrukci výnosových křivek na data z tabulky 2 v programu *Wolfram Mathematica 9*.

```
In[1]:= data = {{0.16, 0.40}, {0.41, 0.19}, {0.95, 0.17}, {1.98, 0.30},
              {2.37, 0.33}, {2.77, 0.34}, {3.28, 0.54}, {3.98, 0.65},
              {5.33, 0.97}, {5.98, 1.17}, {6.53, 1.31}, {7.40, 1.58},
              {8.44, 1.57}, {9.40, 1.64}, {11.10, 1.85}, {15.35, 2.48},
              {23.63, 2.95}, {44.60, 3.94}};

In[2]:= dataplot = ListPlot[data, PlotRange → All, PlotStyle → Red,
                             AxesLabel → {"T", "Y"}, AxesOrigin → {0, 0}];

In[3]:= intdata = Interpolation[data, InterpolationOrder → 1];
intdataplot = Plot[intdata[t], {t, 0.16, 44.60}, AxesLabel → {"T", "Y"},
                  AxesOrigin → {0, 0}];

In[5]:= lagrf = InterpolatingPolynomial[data, t]; (* Lagrangeova funkce *)
lagrfplot = Plot[lagrf, {t, 0.16, 44.6}, PlotRange → All,
                 AxesLabel → {"T", "Y"}, AxesOrigin → {0, 0}];

In[7]:= pol3[alfa_, beta_, gamma_, delta_, x_] :=
        alfa + beta * x + gamma * x^2 + delta * x^3;
pol3fit = FindFit[data, pol3[alfa, beta, gamma, delta, x],
                 {alfa, beta, gamma, delta}, x];
pol3plot = Plot[pol3[alfa, beta, gamma, delta, t] /. pol3fit, {t, 0, 60}];

In[10]:= nelsonsiegelspot[b0_, b1_, b2_, c_, t_] :=
        b0 + (b1 + b2) (1 - Exp[-t/c]) / (t/c) - b2 * Exp[-t/c];
neslonsiegelfit = FindFit[data, nelsonsiegelspot[b0, b1, b2, c0, t0],
                          {b0, b1, b2, c0}, t0];
nelsonsiegelplot =
        Plot[nelsonsiegelspot[b0, b1, b2, c0, t0] /. nelsonsiegelfit,
            {t0, 0, 45}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0},
            AxesLabel → {"T", "Y"}, PlotLabel → "Nelson-Siegel"];
```

```

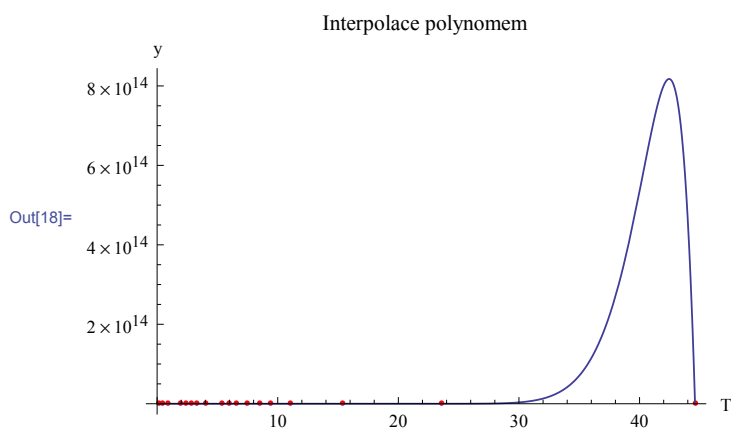
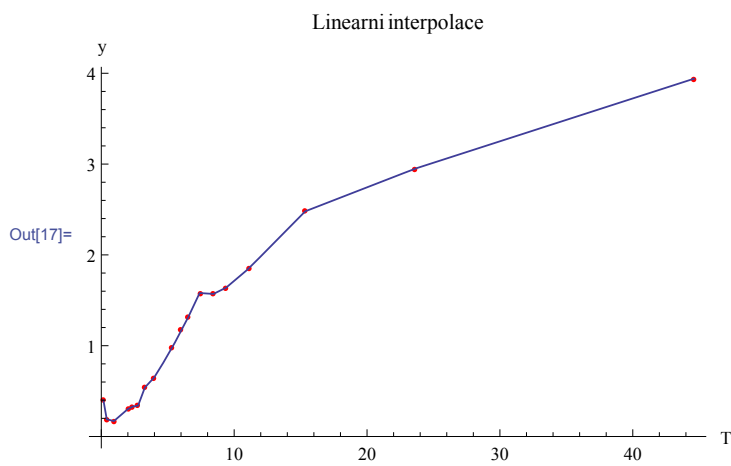
In[13]:= svenssonforward [b0_, b1_, b2_, b3_, c1_, c2_, t_] :=
    b0 + b1 * Exp[-t / c1] + b2 * (t / c1) * Exp[-t / c1] + b3 (t / c2) * Exp[-t / c2];
svenssonspot [b0_, b1_, b2_, b3_, c1_, c2_, t_] =
    (1 / t) * Integrate [svenssonforward [b0, b1, b2, b3, c1, c2, u], {u, 0, t}];
svenssonfit =
    FindFit [data, {svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0,
        b0 + b1 > 0, c1 > 0, c2 > 0}, {b0, b1, b2, b3, c1, c2}, t];
svenssonplot = Plot [svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. svenssonfit,
    {t, 0, 45}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0},
    AxesLabel -> {"T", "Y"}];

```

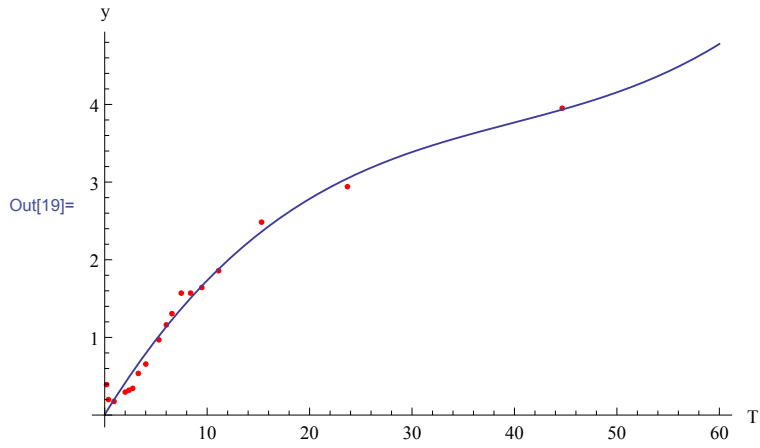
```

In[17]:= Show [dataplot, intdataplot, PlotLabel -> "Linearni interpolate"]
Show [dataplot, lagrfplot, PlotLabel -> "Interpolace polynomem"]
Show [dataplot, pol3plot, PlotLabel -> "Vyrovnavani kubickym polynomem"]
Show [dataplot, nelsonsiegelplot, PlotLabel -> "Nelson-Siegel"]
Show [dataplot, svenssonplot, PlotLabel -> "Svensson"]

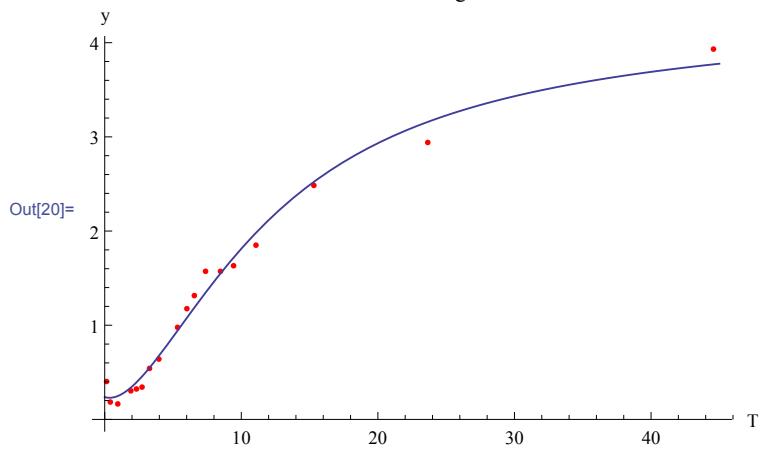
```



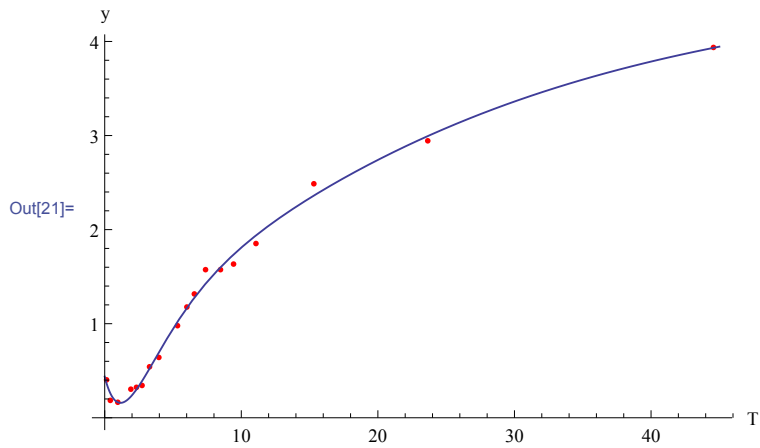
Vyrovnavani kubickym polynomem



Nelson-Siegel



Svensson



## Příloha 2

Srovnání vyrovnávání dat různými křivkami pomocí střední kvadratické odchylky v programu *Wolfram Mathematica 9*.

```
In[1]:= data = {{0.16, 0.40}, {0.41, 0.19}, {0.95, 0.17}, {1.98, 0.30},
              {2.37, 0.33}, {2.77, 0.34}, {3.28, 0.54}, {3.98, 0.65},
              {5.33, 0.97}, {5.98, 1.17}, {6.53, 1.31}, {7.40, 1.58},
              {8.44, 1.57}, {9.40, 1.64}, {11.10, 1.85}, {15.35, 2.48},
              {23.63, 2.95}, {44.60, 3.94}};

In[2]:= dataplot = ListPlot[data, PlotRange → All, PlotStyle → Red,
                             AxesLabel → {"T", "Y"}, AxesOrigin → {0, 0}];

In[3]:= intdata = Interpolation[data, InterpolationOrder → 1];
intdataplot = Plot[intdata[t], {t, 0.16, 44.60}, AxesLabel → {"T", "Y"},
                  AxesOrigin → {0, 0}];

In[5]:= lagrf = InterpolatingPolynomial[data, t]; (* Lagrangeova funkce *)
lagrfplot = Plot[lagrf, {t, 0.16, 44.6}, PlotRange → All,
                 AxesLabel → {"T", "Y"}, AxesOrigin → {0, 0}];

In[7]:= pol3[alfa_, beta_, gamma_, delta_, x_] :=
        alfa + beta * x + gamma * x^2 + delta * x^3;
pol3fit = FindFit[data, pol3[alfa, beta, gamma, delta, x],
                  {alfa, beta, gamma, delta}, x];
pol3plot = Plot[pol3[alfa, beta, gamma, delta, t] /. pol3fit, {t, 0, 60}];

Out[8]= {alfa → 0.00605529, beta → 0.214184,
         gamma → -0.00452237, delta → 0.0000379719}

In[10]:= nelsonsiegelspot[b0_, b1_, b2_, c_, t_] :=
        b0 + (b1 + b2) (1 - Exp[-t/c]) / (t/c) - b2 * Exp[-t/c];
nelsonsiegefit =
        FindFit[data, {nelsonsiegelspot[b0, b1, b2, c0, t0], b0 > 0,
        b0 + b1 > 0, c0 > 0}, {b0, b1, b2, c0}, t0];
nelsonsiegelplot =
        Plot[nelsonsiegelspot[b0, b1, b2, c0, t0] /. nelsonsiegefit,
        {t0, 0, 45}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0},
        AxesLabel → {"T", "Y"}, PlotLabel → "Nelson-Siegel"];

Out[11]= {b0 → 4.46862, b1 → -4.23168, b2 → -4.52694, c0 → 3.55725}

In[13]:= svenssonforward[b0_, b1_, b2_, b3_, c1_, c2_, t_] :=
        b0 + b1 * Exp[-t/c1] + b2 * (t/c1) * Exp[-t/c1] + b3 (t/c2) * Exp[-t/c2];
svenssonspot[b0_, b1_, b2_, b3_, c1_, c2_, t_] =
        (1/t) * Integrate[svenssonforward[b0, b1, b2, b3, c1, c2, u], {u, 0, t}];
svenssonfit =
        FindFit[data, {svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0,
        b0 + b1 > 0, c1 > 0, c2 > 0}, {b0, b1, b2, b3, c1, c2}, t];
svenssonplot = Plot[svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. svenssonfit,
                    {t, 0, 45}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0},
                    AxesLabel → {"T", "Y"}];
```

```
Out[15]= {b0 → 5.32229, b1 → -4.88545, b2 → -5.40377,  
          b3 → -6.14416, c1 → 1.70315, c2 → 7.35352 }
```

```
In[17]:= MSE[t_, y_, fce_] :=  
          (1 / Length[t]) * Sum[(y[[i]] - fce[t[[i]])]^2, {i, 1, Length[t]}]
```

```
In[18]:= casy = Transpose[data][[1]];  
vynosy = Transpose[data][[2]];
```

```
In[20]:= NSfce[t_] := nelsonsiegelspot[b0, b1, b2, c0, t] /. nelsonsiegefit
```

```
In[21]:= Sfce[t_] := svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. svenssonfit
```

```
In[22]:= pol3fce[t_] := pol3[alfa, beta, gamma, delta, t] /. pol3fit
```

```
In[23]:= MSE[casy, vynosy, pol3fce]  
MSE[casy, vynosy, NSfce]  
MSE[casy, vynosy, Sfce]
```

```
Out[23]= 0.0194311
```

```
Out[24]= 0.0131908
```

```
Out[25]= 0.00429364
```

## Příloha 3

Výpočet výnosu do splatnosti pro dluhopisy z tabulky 5 v programu *Wolfram Mathematica 9*.

```
In[1]:= (* Data ve tvaru {splatnost, kuponova sazba v procentech, cena} *)
bonds = {{{2013, 06, 16}, 3.7, 100.33}, {{2013, 9, 16}, 2.8, 100.92},
  {{2014, 3, 31}, 2.75, 102.34}, {{2015, 4, 11}, 3.8, 106.78},
  {{2015, 9, 1}, 3.4, 107.12}, {{2016, 1, 26}, 6.95, 117.77},
  {{2016, 7, 28}, 0.5, 100.01}, {{2017, 4, 11}, 4, 112.9},
  {{2018, 8, 18}, 4.6, 119.02}, {{2019, 4, 11}, 5, 122.28},
  {{2019, 10, 29}, 1.5, 102.1}, {{2020, 9, 12}, 3.75, 116.92},
  {{2021, 9, 29}, 3.85, 118.34}, {{2022, 9, 12}, 4.7, 127.47},
  {{2024, 5, 25}, 5.7, 140.3}, {{2028, 8, 25}, 2.5, 102.58},
  {{2036, 12, 4}, 4.2, 121.6}, {{2057, 11, 26}, 4.85, 122.75}};

(* Seznam vynosu do splatnosti *)

In[2]:= Table[
  y /.
  FindRoot[
    FinancialBond [{"FaceValue" → 100, "Coupon" → bonds[[i]][[2]] / 100,
      "Maturity" → bonds[[i]][[1]],
      {"InterestRate" → y, "Settlement" → {2013, 05, 07},
      "DayCountBasis" → "30/360"}] == bonds[[i]][[3]], {y, 0.0001}],
    {i, 1, 18}]

Out[2]= {0.00632726, 0.00226572, 0.00138333, 0.00268966, 0.00310298, 0.00369651,
  0.00496799, 0.0066175, 0.0089538, 0.01097, 0.0116124, 0.0131787,
  0.0150685, 0.0152369, 0.0167453, 0.0229762, 0.0291897, 0.0378457}

(* Vynosy do splatnosti v procentech i s dobami do splatnosti *)

In[3]:= data =
Table[
  {DateDifference[{2013, 05, 07}, bonds[[i]][[1]],
    DayCountConvention → "Thirty360"] / 360,
  100 * y /.
  FindRoot[
    FinancialBond [{"FaceValue" → 100, "Coupon" → bonds[[i]][[2]] / 100,
      "Maturity" → bonds[[i]][[1]],
      {"InterestRate" → y, "Settlement" → {2013, 05, 07},
      "DayCountBasis" → "30/360"}] == bonds[[i]][[3]], {y, 0.0001}],
    {i, 1, 18}]
```

```
Out[3]= {{ { 13/120, 0.632726 }, { 43/120, 0.226572 }, { 9/10, 0.138333 },
           { 347/180, 0.268966 }, { 139/60, 0.310298 }, { 979/360, 0.369651 },
           { 129/40, 0.496799 }, { 707/180, 0.66175 }, { 1901/360, 0.89538 }, { 1067/180, 1.097 },
           { 583/90, 1.16124 }, { 529/72, 1.31787 }, { 1511/180, 1.50685 }, { 673/72, 1.52369 },
           { 221/20, 1.67453 }, { 153/10, 2.29762 }, { 943/40, 2.91897 }, { 16039/360, 3.78457 } }
```

(\* Ukazka, ze funkce FinancialBond funguje - prvni bond \*)

```
In[4]:= FindRoot[100.33 + 3.7 * (360 - 39) / 360 == (100 + 3.7) / ((1 + ytm) ^ (39 / 360)),
              {ytm, 0}]
```

```
Out[4]= {ytm -> 0.00632726 }
```

(\* Tedy vynos do splatnosti vysel stejne. \*)

## Příloha 4

Konstrukce kupónové výnosové křivky z reálných českých státních (kupónových) dluhopisů v programu *Wolfram Mathematica 9*.

```
In[1]:= (* Data ve tvaru {splatnost, kuponova sazba v procentech, cena} *)
bonds = {{{2013, 06, 16}, 3.7, 100.33}, {{2013, 9, 16}, 2.8, 100.92},
  {{2014, 3, 31}, 2.75, 102.34}, {{2015, 4, 11}, 3.8, 106.78},
  {{2015, 9, 1}, 3.4, 107.12}, {{2016, 1, 26}, 6.95, 117.77},
  {{2016, 7, 28}, 0.5, 100.01}, {{2017, 4, 11}, 4, 112.9},
  {{2018, 8, 18}, 4.6, 119.02}, {{2019, 4, 11}, 5, 122.28},
  {{2019, 10, 29}, 1.5, 102.1}, {{2020, 9, 12}, 3.75, 116.92},
  {{2021, 9, 29}, 3.85, 118.34}, {{2022, 9, 12}, 4.7, 127.47},
  {{2024, 5, 25}, 5.7, 140.3}, {{2028, 8, 25}, 2.5, 102.58},
  {{2036, 12, 4}, 4.2, 121.6}, {{2057, 11, 26}, 4.85, 122.75}};

In[2]:= (* Dvojice doba a vynos do splatnosti pro spojite uroceni *)
spojdata =
Table[
  DateDifference[{2013, 05, 07}, bonds[[i]][[1]],
    DayCountConvention -> "ThirtyE360"] / 360,
  100 *
  Log[
    1 + y /.
    FindRoot[
      FinancialBond[{"FaceValue" -> 100,
        "Coupon" -> bonds[[i]][[2]] / 100,
        "Maturity" -> bonds[[i]][[1]],
        {"InterestRate" -> y, "Settlement" -> {2013, 05, 07},
        "DayCountBasis" -> "30E/360"}] == bonds[[i]][[3]],
        {y, 0.0001}]], {i, 1, 18}]

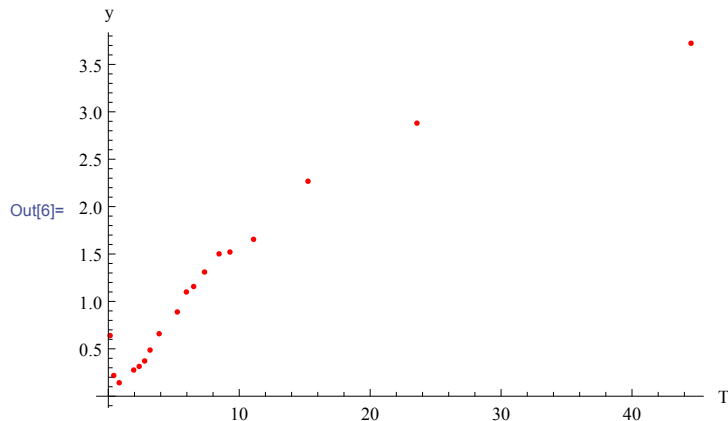
Out[2]= {{ {13/120, 0.630732}, {43/120, 0.226316}, {323/360, 0.138237},
  {347/180, 0.268605}, {139/60, 0.309818}, {979/360, 0.368969},
  {129/40, 0.495569}, {707/180, 0.65957}, {1901/360, 0.891395}, {1067/180, 1.09103},
  {583/90, 1.15455}, {529/72, 1.30926}, {1511/180, 1.49561}, {673/72, 1.5122},
  {221/20, 1.66067}, {153/10, 2.27162}, {943/40, 2.87718}, {16039/360, 3.71472} }

In[3]:= casy = Transpose[spojdata][[1]];
vynosy = Transpose[spojdata][[2]];

In[5]:= (* POZOR: Vynos do splatnosti je pocitan z HRUBE ceny *)
Solve[100.33 + 3.7 * (1 - casy[[1]]) == 103.7 / (1 + YTM) ^ casy[[1]],
  YTM]

Out[5]= {{YTM -> 0.00632726}}
```

```
In[6]:= (* Plot vstupnich dat *)
spojdataplot = ListPlot[spojdata, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red,
  AxesLabel -> {"T", "y"}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



```
In[7]:= (* Svenssonuv model *)
svenssonforward[b0_, b1_, b2_, b3_, c1_, c2_, t_] :=
  b0 + b1 * Exp[-t / c1] + b2 * (t / c1) * Exp[-t / c1] + b3 (t / c2) * Exp[-t / c2]
svenssonspot[b0_, b1_, b2_, b3_, c1_, c2_, t_] =
  (1 / t) * Integrate[svenssonforward[b0, b1, b2, b3, c1, c2, u], {u, 0, t}]
```

$$\text{Out[8]} = \frac{1}{t} \left( b_1 \left( c_1 - c_1 e^{-\frac{t}{c_1}} \right) + b_0 t + b_2 \left( c_1 - e^{-\frac{t}{c_1}} (c_1 + t) \right) + b_3 \left( c_2 - e^{-\frac{t}{c_2}} (c_2 + t) \right) \right)$$

```
In[9]:= (* Stredni kvadraticka odchylka *)
MSE[fce_] :=
  (1 / Length[bonds]) * Sum[(vynosy[[i]] - fce[casy[[i]]])^2,
    {i, 1, Length[bonds]}]
```

```
In[10]:= (* PV i-teho bondu spoctena dle fce *)
PV[i_, fce_] := 100 * Exp[-(fce[casy[[i]]] / 100) * casy[[i]]] +
  Sum[bonds[[i]][[2]] *
    Exp[-(fce[k + FractionalPart[casy[[i]]]] / 100) *
      (k + FractionalPart[casy[[i]]])], {k, 0, IntegerPart[casy[[i]]}]
```

```
In[11]:= (* Soucet ctvercu odchylek cen *)
PSE[fce_] :=
  Sum[
    ((bonds[[i]][[3]] + bonds[[i]][[2]] * (1 - FractionalPart[casy[[i]]])) -
      PV[i, fce])^2, {i, 1, Length[bonds]}]
```

```
In[12]:= (* Prumerna kvadraticka odchylka cen *)
MPSE[fce_] :=
  (1 / Length[bonds]) *
  Sum[
    ((bonds[[i]][[3]] + bonds[[i]][[2]] * (1 - FractionalPart[casy[[i]]])) -
      PV[i, fce])^2, {i, 1, Length[bonds]}]
```

In[13]:= (\* BEZ VAH \*)

In[14]:= (\* Puvodni fit Svenssonovy fce - bez vah \*)

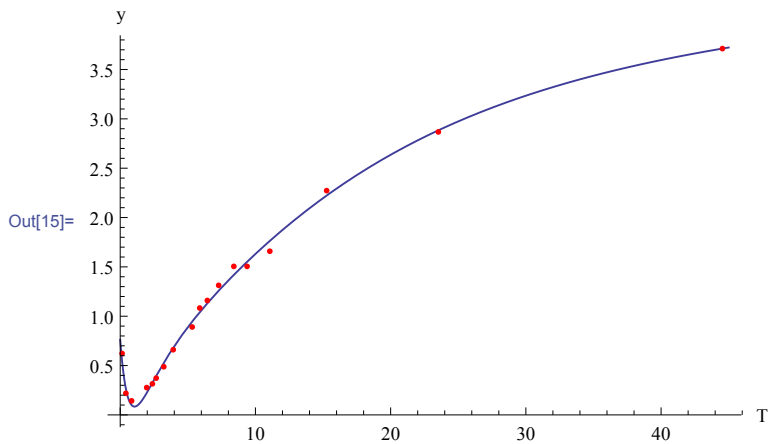
**svenssonfit =**

```
FindFit[spojdata, {svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t],  
b0 > 0, b0 + b1 > 0, c1 > 0, c2 > 0}, {b0, b1, b2, b3, c1, c2}, t]
```

Out[14]= {b0 → 4.77001, b1 → -4.00898, b2 → -3.21961,  
b3 → -2.5475, c1 → 6.29722, c2 → 0.686432}

In[15]:= **svenssonplot =**

```
Show[Plot[svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. svenssonfit,  
{t, 0, 45}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0},  
AxesLabel → {"T", "Y"}], spojdataplot]
```



In[16]:= **Sfce [t\_] = svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. svenssonfit;**

In[17]:= **MSE [Sfce]**

Out[17]= 0.00238661

In[18]:= **PSE [Sfce]**

Out[18]= 363.555

In[19]:= **MPSE [Sfce]**

Out[19]= 20.1975

In[20]:= (\* Puvodni fit Svenssonovy fce - bez vah s pocatecnimi hodnotami \*)

**svenssonfit2 =**

```
FindFit[spojdata, {svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t],  
b0 > 0, b0 + b1 > 0, c1 > 0, c2 > 0},  
{b0, vynosy [[Length [vynosy]]]},  
{b1, vynosy [[Length [vynosy]]] - vynosy [[1]]}, {b2, 0}, {b3, 0},  
{c1, 2}, {c2, 2}, t, MaxIterations → 1 000 000]
```

Out[20]= {b0 → 4.77001, b1 → -4.00898, b2 → -3.21959,  
b3 → -2.54751, c1 → 6.29726, c2 → 0.686435}

In[33]= **MPSE[wlfite]**

Out[33]= 64.8931

In[34]= (\* Se startovnimi hodnotami parametru \*)

```
wlfite1 = NonlinearModelFit[spojdata,  
  {svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0, b0 + b1 > 0,  
  c1 > 0, c2 > 0}, {{b0, vynosy[[Length[vynosy]]]},  
  {b1, vynosy[[Length[vynosy]]] - vynosy[[1]]}, {b2, 0}, {b3, 0},  
  {c1, 2}, {c2, 2}}, t, Weights -> w1, MaxIterations -> 1 000 000]
```

Out[34]= FittedModel [

$$\frac{1}{t}(-3.37312(1.07466 - 1.07466e^{-\langle\langle 19 \rangle\rangle t}) + \langle\langle 1 \rangle\rangle \langle\langle 1 \rangle\rangle \langle\langle 1 \rangle\rangle - 6.84992(\langle\langle 19 \rangle\rangle - \langle\langle 1 \rangle\rangle \langle\langle 1 \rangle\rangle))$$

In[35]= **MSE[wlfite1]**

Out[35]= 0.0347364

In[36]= **PSE[wlfite1]**

Out[36]= 364.202

In[37]= **MPSE[wlfite1]**

Out[37]= 20.2335

In[38]= (\* Za startovni hodnoty dosadime hodnoty parametru z fitu bez vah \*)

```
wlfite2 = NonlinearModelFit[spojdata,  
  {svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0, b0 + b1 > 0,  
  c1 > 0, c2 > 0}, {{b0, 4.7700077423979605`}, {b1, -4.008975709477763`},  
  {b2, -3.219614198547103`}, {b3, -2.5475027541181494`},  
  {c1, 6.297218627527928`}, {c2, 0.6864319498146662`}}, t,  
  Weights -> w1, MaxIterations -> 1 000 000]
```

Out[38]= FittedModel [

$$\frac{1}{t}(-2.44034(5.70219 - 5.70219e^{-\langle\langle 20 \rangle\rangle t}) + \langle\langle 1 \rangle\rangle \langle\langle 1 \rangle\rangle \langle\langle 1 \rangle\rangle - 4.88793(\langle\langle 18 \rangle\rangle - e^{\langle\langle 1 \rangle\rangle} \langle\langle 1 \rangle\rangle))$$

In[39]= **MSE[wlfite2]**

Out[39]= 0.154318

In[40]= **PSE[wlfite2]**

Out[40]= 363.829

In[41]= **MPSE[wlfite2]**

Out[41]= 20.2127

```
In[42]:= (* VAHY POMOCI MODIFIKOVANE DURACE *)
w2 =
Table[FinancialBond [
  {"FaceValue" → 100, "Coupon" → bonds[[i]][[2]] / 100,
   "Maturity" → bonds[[i]][[1]]},
  {"InterestRate" → vynosy[[i]] / 100, "Settlement" → {2013, 05, 07},
   "DayCountBasis" → "30E/360"}, "ModifiedDuration"],
{i, 1, Length[vynosy]}];
```

```
In[43]:= (* Bez startovnich hodnot *)
w2fit = NonlinearModelFit[spojdata,
  {svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0, b0 + b1 > 0,
   c1 > 0, c2 > 0}, {b0, b1, b2, b3, c1, c2}, t, Weights → w2,
  MaxIterations → 1 000 000]
```

```
Out[43]= FittedModel [

$$\frac{1}{t} (153.036(5.86338 \times 10^{-13} - 5.86338 \times 10^{-13} e^{-\langle\langle 21 \rangle\rangle t}) + \langle\langle 1 \rangle\rangle - \langle\langle 1 \rangle\rangle + 12.7558(\langle\langle 1 \rangle\rangle))$$
]
```

```
In[44]:= MSE[w2fit]
```

```
Out[44]= 0.0269756
```

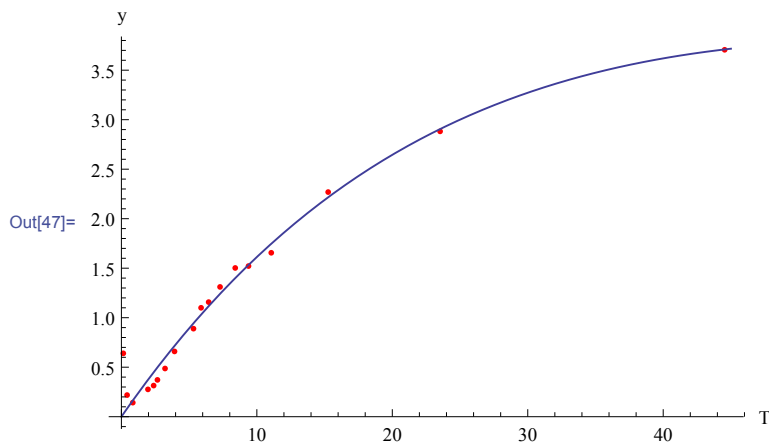
```
In[45]:= PSE[w2fit]
```

```
Out[45]= 351.39
```

```
In[46]:= MPSE[w2fit]
```

```
Out[46]= 19.5217
```

```
In[47]:= Show[spojdataplot, Plot[w2fit[t], {t, 0, 45}]]
```



```
In[48]:= (* Se startovnimi hodnotami parametru *)
w2fit1 = NonlinearModelFit [spojdata,
  {svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0, b0 + b1 > 0,
    c1 > 0, c2 > 0}, {{b0, vynosy [[Length[vynosy]]]},
  {b1, vynosy [Length[vynosy]] - vynosy [[1]]}, {b2, 0}, {b3, 0},
  {c1, 2}, {c2, 2}}, t, Weights -> w2, MaxIterations -> 1 000 000]
```

```
Out[48]= FittedModel [
  
$$\frac{1}{t}(-4.13601(6.77126 - 6.77126e^{-\langle 20 \rangle t}) + \langle 1 \rangle \langle 1 \rangle \langle 1 \rangle - 2.82065(\langle 18 \rangle - e^{\langle 1 \rangle \langle 1 \rangle}))$$

]
```

```
In[49]:= MSE[w2fit1]
```

```
Out[49]= 0.0026009
```

```
In[50]:= PSE[w2fit1]
```

```
Out[50]= 364.218
```

```
In[51]:= MPSE[w2fit1]
```

```
Out[51]= 20.2343
```

```
In[52]:= (* Za startovni hodnoty dosadime hodnoty parametru z fitu bez vah *)
```

```
w2fit2 = NonlinearModelFit [spojdata,
  {svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0, b0 + b1 > 0,
    c1 > 0, c2 > 0}, {{b0, 4.7700077423979605`}, {b1, -4.008975709477763`},
  {b2, -3.219614198547103`}, {b3, -2.5475027541181494`},
  {c1, 6.297218627527928`}, {c2, 0.6864319498146662`}}, t,
  Weights -> w2, MaxIterations -> 1 000 000]
```

```
Out[52]= FittedModel [
  
$$\frac{1}{t}(-4.13601(6.77126 - 6.77126e^{-\langle 20 \rangle t}) + \langle 1 \rangle \langle 1 \rangle \langle 1 \rangle - 2.82065(\langle 18 \rangle - e^{\langle 1 \rangle \langle 1 \rangle}))$$

]
```

```
In[53]:= MSE[w2fit2]
```

```
Out[53]= 0.0026009
```

```
In[54]:= PSE[w2fit2]
```

```
Out[54]= 364.218
```

```
In[55]:= MPSE[w2fit2]
```

```
Out[55]= 20.2343
```

```
In[56]:= (* MINIMALIZACE ODCHYLEK CEN *)
```

```
sfc [t_] := svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t]
```

```
In[57]:= pmin = Minimize [{PSE[sfc], b0 > 0, b0 + b1 > 0, c1 > 0, c2 > 0},
  {b0, b1, b2, b3, c1, c2}]
```

```
Out[57]= {1.1976, {b0 -> 8.63991, b1 -> -7.47501,
  b2 -> -6.09273, b3 -> -3.75575, c1 -> 12.6742, c2 -> 0.820622}}
```

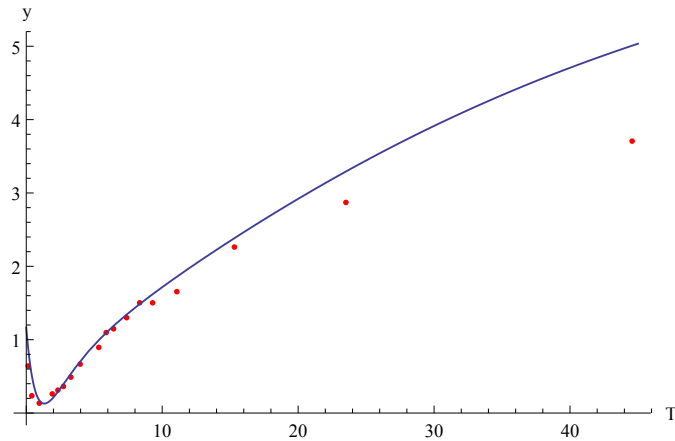
```
In[58]:= pminplot = svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. Last[pmin]
```

$$\text{Out[58]} = \frac{1}{t} \left( -7.47501 \left( 12.6742 - 12.6742 e^{-0.0789002t} \right) + \right. \\ \left. 8.63991 t - 3.75575 \left( 0.820622 - e^{-1.21859t} \left( 0.820622 + t \right) \right) - \right. \\ \left. 6.09273 \left( 12.6742 - e^{-0.0789002t} \left( 12.6742 + t \right) \right) \right)$$

```
fc[t_] :=
```

$$\frac{1}{t} \left( -7.475010654982959 \left( 12.67424673126262 - 12.67424673126262 e^{-0.0789001525063714t} \right) + \right. \\ \left. 8.639908186574871 t - 3.7557535836472167 \left( 0.8206216090080016 - e^{-1.2185884322603175t} \left( 0.8206216090080016 + t \right) \right) - \right. \\ \left. 6.092728322414346 \left( 12.67424673126262 - e^{-0.0789001525063714t} \left( 12.67424673126262 + t \right) \right) \right)$$

```
Show[spojdataplot, Plot[pminplot, {t, 0, 45}]]
```



```
MSE [fc]
```

```
0.119334
```

```
0.11933373069484814
```

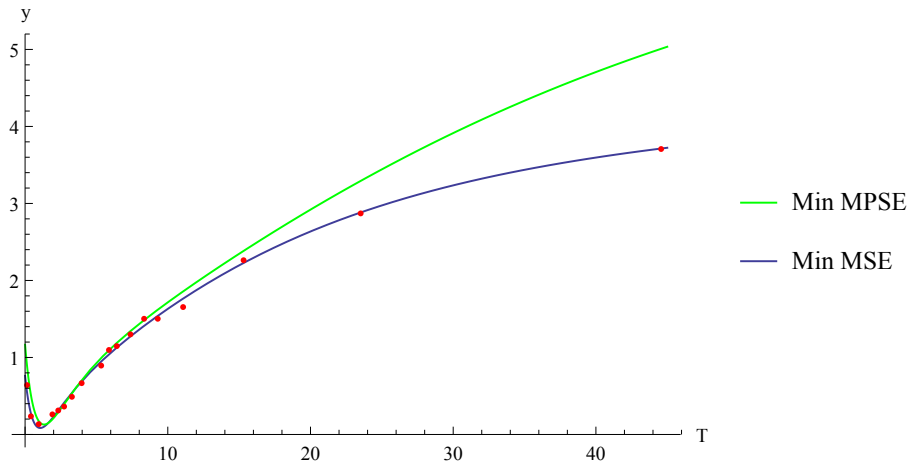
```
PSE [fc]
```

```
1.1976
```

```
MPSE [fc]
```

```
0.0665336
```

```
Show[Plot[svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. svenssonfit,
  {t, 0, 45}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"T", "y"},
  PlotLegends -> {"Min MSE"}],
Plot[pminplot, {t, 0, 45}, PlotStyle -> Green,
  PlotLegends -> {"Min MPSE"}], spojdataplot]
```



## Příloha 5

Pozorovaný výnos do splatnosti a výnosy do splatnosti odhadnuté dle kupónové výnosové křivky tvořené Svenssonovou funkcí s parametry z tabulek 9, 12 a 14.

Doba do splatnosti	Pozorovaný YTM	Tab. 9	Tab. 12	Tab. 14
0,11 let	0,63073 %	0,58687 %	1,15200 %	0.53661 %
0,36 let	0,22632 %	0,31162 %	0,76683 %	0.31739 %
0,90 let	0,13823 %	0,09263 %	0,32104 %	0.12757 %
1,93 let	0,26861 %	0,21489 %	0,21219 %	0.22152 %
2,32 let	0,30982 %	0,30875 %	0,27768 %	0.30656 %
2,72 let	0,36897 %	0,40808 %	0,36731 %	0.40031 %
3,23 let	0,49557 %	0,52824 %	0,49186 %	0.51759 %
3,93 let	0,65957 %	0,68201 %	0,66421 %	0.67207 %
5,28 let	0,89140 %	0,93868 %	0,95357 %	0.93532 %
5,93 let	1,09103 %	1,04808 %	1,07072 %	1.04786 %
6,48 let	1,15455 %	1,13619 %	1,16158 %	1.13819 %
7,35 let	1,30926 %	1,26822 %	1,29266 %	1.27283 %
8,39 let	1,49561 %	1,41781 %	1,43604 %	1.42423 %
9,35 let	1,51220 %	1,54653 %	1,55728 %	1.55358 %
11,05 let	1,66067 %	1,76160 %	1,75981 %	1.76814 %
15,30 let	2,27162 %	2,22611 %	2,21110 %	2.22766 %
23,58 let	2,87718 %	2,88686 %	2,88288 %	2.88149 %
44,55 let	3,71472 %	3,71264 %	3,71456 %	3.71503 %

Pozn.: YTM je výnos do splatnosti (roční při spojitém úročení).

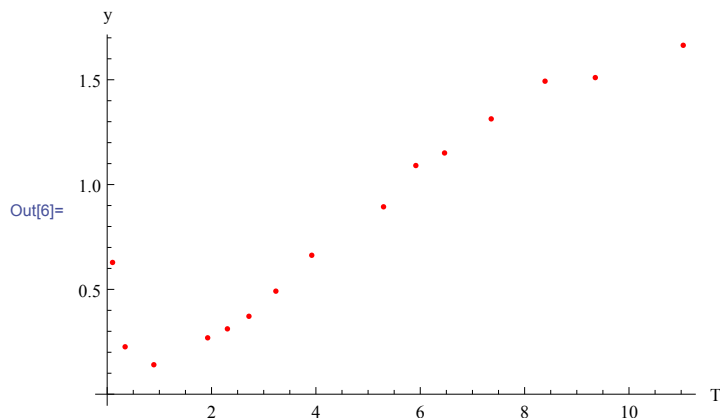
## Příloha 6

Konstrukce kupónové výnosové křivky z reálných českých státních (kupónových) dluhopisů se splatnostmi do 15 let v programu *Wolfram Mathematica 9*.

```
In[5]:= (* Data zkracena o splatnosti nad 15 let *)
sdashort = Take[spojdata, 15]

Out[5]= {{13/120, 0.630732}, {43/120, 0.226316}, {323/360, 0.138237},
{347/180, 0.268605}, {139/60, 0.309818}, {979/360, 0.368969}, {129/40, 0.495569},
{707/180, 0.65957}, {1901/360, 0.891395}, {1067/180, 1.09103}, {583/90, 1.15455},
{529/72, 1.30926}, {1511/180, 1.49561}, {673/72, 1.5122}, {221/20, 1.66067}}
```

```
In[6]:= (* Plot zkracenyh dat *)
sdashortplot = ListPlot[sdashort, PlotRange -> All,
PlotStyle -> Red, AxesLabel -> {"T", "y"}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



```
In[7]:= casy = Transpose[spojdata][[1]];
vynosy = Transpose[spojdata][[2]];

```

```
In[13]:= (* Vahy dle Ceske spolecnosti aktuaru *)
hkappa[x_] := Piecewise[{{1, x <= 10}, {2/5, x > 10}}];
kappa = Table[hkappa[caasy[[i]]], {i, 1, Length[caasy]};
wlshort = Table[(caasy[[i]] * kappa[[i]])^3, {i, 1, 15}];

```

```
(* Vahy dle modifikovane durace *)
```

```
w2short =
Table[FinancialBond[{"FaceValue" -> 100, "Coupon" -> bonds[[i]][[2]]/100,
"Maturity" -> bonds[[i]][[1]]},
{"InterestRate" -> vynosy[[i]]/100, "Settlement" -> {2013, 05, 07},
"DayCountBasis" -> "30E/360"}, {"i, 1, 15}];

```

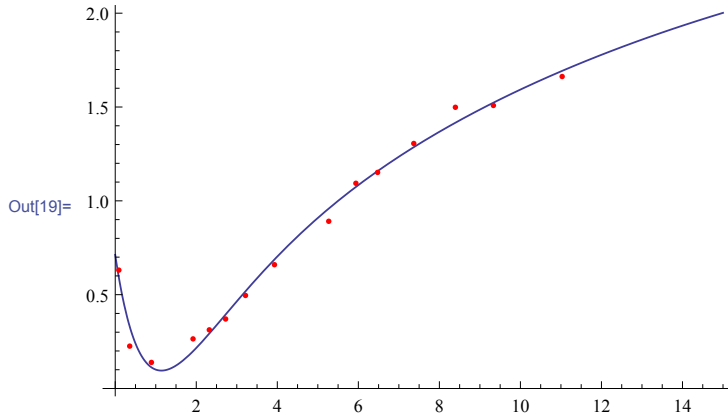
```
In[17]:= svnsionfitshort =
FindFit[sdashort, {svnsionspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t],
b0 > 0, b0 + b1 > 0, c1 > 0, c2 > 0},
{{b0, vynosy[[15]]}, {b1, vynosy[[15]] - vynosy[[1]]}, {b2, 0},
{b3, 0}, {c1, 2}, {c2, 2}}, t, MaxIterations -> 1000000]

```

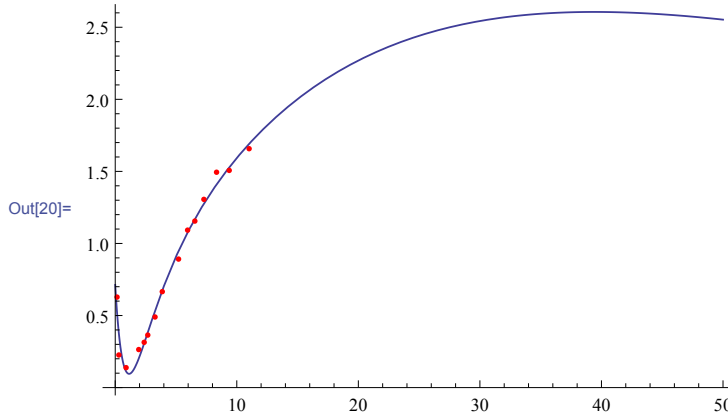
```
Out[17]= {b0 → 0.0000231798, b1 → 0.71219, b2 → 7.776,
          b3 → -2.68636, c1 → 23.9456, c2 → 0.835379}
```

```
In[18]:= Sfceshort [t_] = svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /.
          svenssonfitshort ;
```

```
In[19]:= Show[Plot[Sfceshort [t], {t, 0, 15}], sdatashortplot]
```



```
In[20]:= Show[Plot[Sfceshort [t], {t, 0, 50}], sdatashortplot]
```



```
In[21]:= wlfitshort = NonlinearModelFit [sdatashort,
          {svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0, b0 + b1 > 0,
          c1 > 0, c2 > 0}, {{b0, vynosy[[Length[vynosy]]]},
          {b1, vynosy[[Length[vynosy]] - vynosy[[1]]}, {b2, 0}, {b3, 0},
          {c1, 2}, {c2, 2}}, t, Weights → wlshort, MaxIterations → 1000000]
```

```
Out[21]= FittedModel [  $\frac{1}{t} (-4.21045(1.94087 - 1.94087 e^{-\ll 19 \gg t}) + \ll 1 \gg - \ll 1 \gg - 66.5485(\ll 19 \gg - \ll 1 \gg))$  ]
```

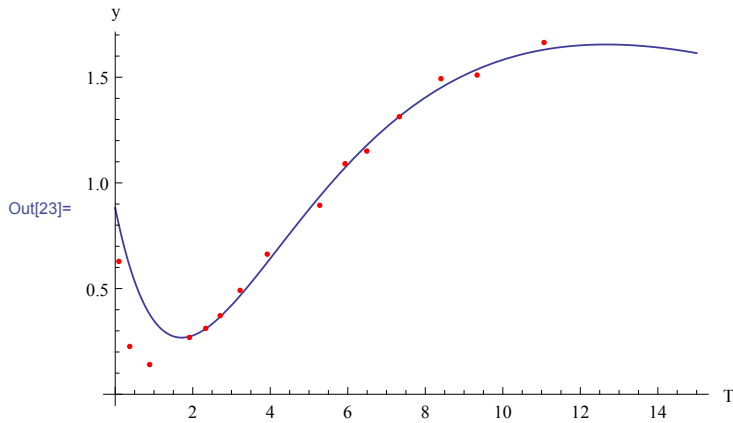
```
In[22]:= wlfitshort [t]
```

```
Out[22]=  $\frac{1}{t} (-4.21045 (1.94087 - 1.94087 e^{-0.515234t}) +$   

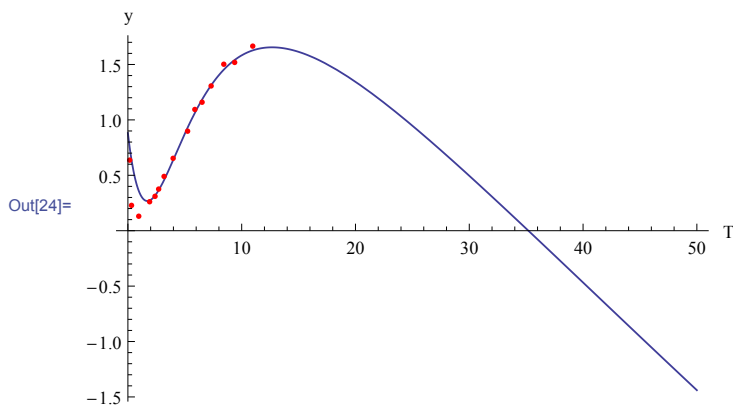
 $5.09171 t - 7.13648 (1.94087 - e^{-0.515234t} (1.94087 + t)) -$   

 $66.5485 (237.724 - e^{-0.00420655t} (237.724 + t)))$ 
```

```
In[23]:= Show[Plot[wlfitshort [t], {t, 0, 15}, PlotRange → All, AxesOrigin → {0, 0},
          AxesLabel → {"T", "Y"}], sdatashortplot]
```



```
In[24]:= Show[Plot[w1fitshort[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> All,
  AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"T", "y"}], sdatashortplot]
```



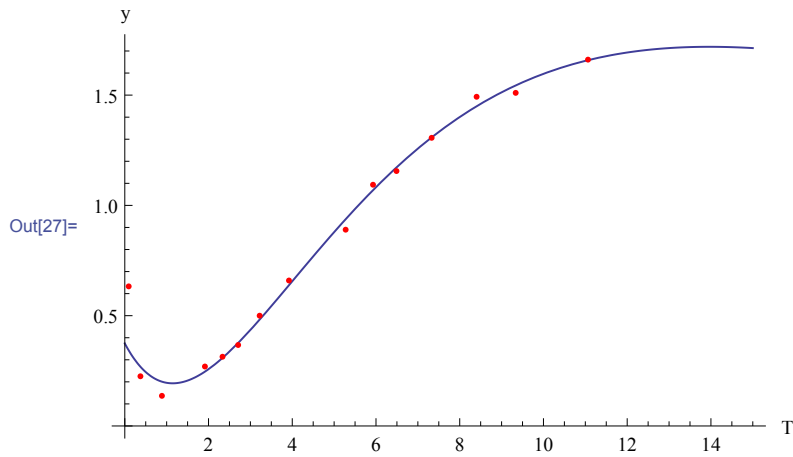
```
In[25]:= w2fitshort = NonlinearModelFit[sdatashort,
  {svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0, b0 + b1 > 0,
  c1 > 0, c2 > 0}, {{b0, vynosy[Length[vynosy]]}},
  {b1, vynosy[Length[vynosy]] - vynosy[[1]]}, {b2, 0}, {b3, 0},
  {c1, 2}, {c2, 2}}, t, Weights -> w2short, MaxIterations -> 1000000]
```

Out[25]= FittedModel 
$$\left[ \frac{0.374194(5.68443 - 5.68443e^{-\ll 20 \gg t}) + \ll 23 \gg t - \ll 1 \gg + 8.36397(\ll 1 \gg)}{t} \right]$$

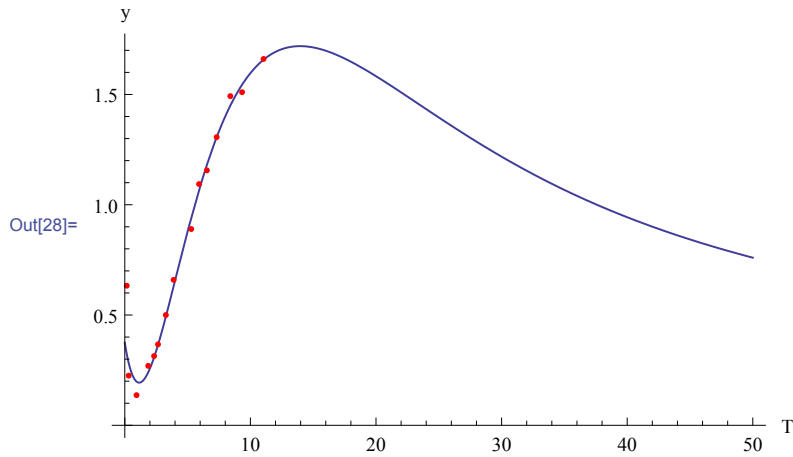
```
In[26]:= w2fitshort[t]
```

Out[26]= 
$$\frac{1}{t} \left( 0.374194 (5.68443 - 5.68443 e^{-0.175919t}) + 8.83065 \times 10^{-10} t - 4.96316 (2.3376 - e^{-0.42779t} (2.3376 + t)) + 8.36397 (5.68443 - e^{-0.175919t} (5.68443 + t)) \right)$$

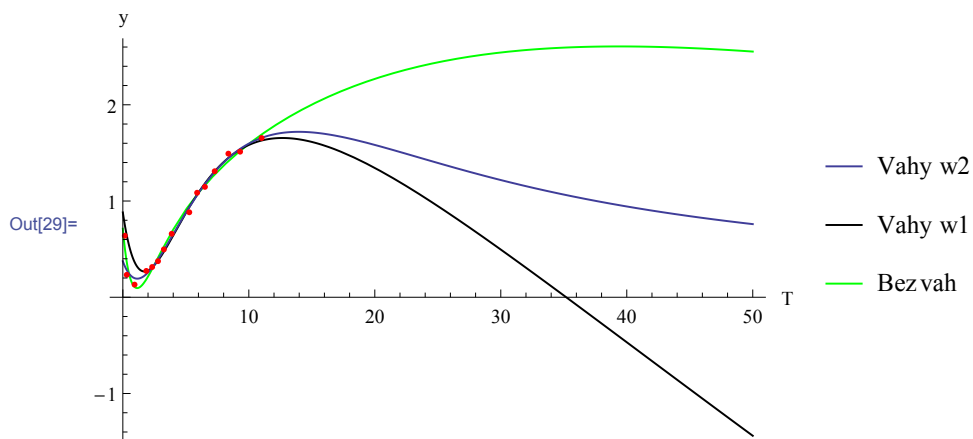
```
In[27]:= Show[Plot[w2fitshort[t], {t, 0, 15}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0},
  AxesLabel -> {"T", "y"}], sdatashortplot]
```



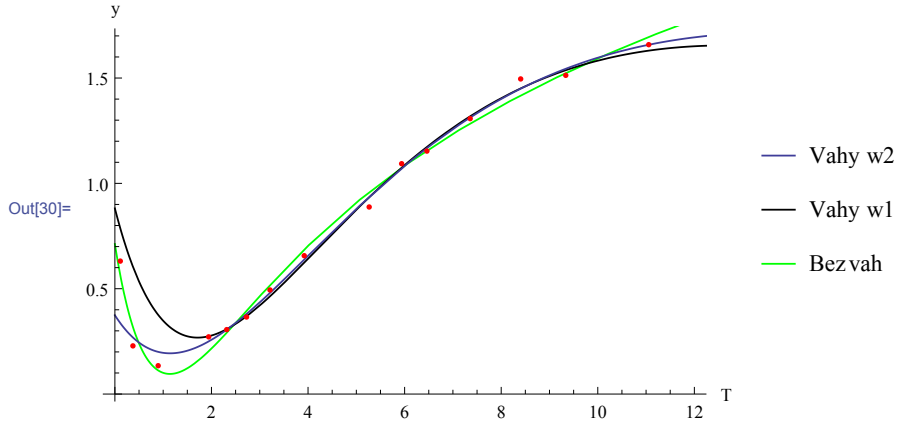
```
In[28]:= Show[Plot[w2fitshort[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> All,
  AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"T", "y"}], sdatashortplot]
```



```
In[29]:= Show[Plot[Sfcshort[t], {t, 0, 50}, PlotStyle -> Green,
  PlotLegends -> {"Bez vah"}],
  Plot[w1fitshort[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Black,
  PlotLegends -> {"Vahy w1"}],
  Plot[w2fitshort[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> All,
  PlotLegends -> {"Vahy w2"}], sdatashortplot, AxesOrigin -> {0, 0},
  AxesLabel -> {"T", "y"}, PlotRange -> All]
```



```
In[30]:= Show[Plot[Sfceshort[t], {t, 0, 50}, PlotStyle -> Green,
  PlotLegends -> {"Bez vah"}],
  Plot[w1fitshort[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Black,
  PlotLegends -> {"Vahy w1"}],
  Plot[w2fitshort[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> All,
  PlotLegends -> {"Vahy w2"}], sdatashortplot, AxesOrigin -> {0, 0},
  AxesLabel -> {"T", "y"}, PlotRange -> {{0, 12}, {0, 1.7}}]
```



```
In[31]:= (* Stredni kvadraticka odchylka *)
```

```
MSEshort[fce_] :=
  (1 / 15) * Sum[(vynosy[[i]] - fce[casy[[i]])]^2, {i, 1, 15}]
```

```
In[32]:= (* PV i-teho bondu spoctena dle fce *)
```

```
PV[i_, fce_] := 100 * Exp[-(fce[casy[[i]]] / 100) * casy[[i]]] +
  Sum[bonds[[i]][[2]] *
  Exp[-(fce[k + FractionalPart[casy[[i]]]] / 100) *
  (k + FractionalPart[casy[[i]]])], {k, 0, IntegerPart[casy[[i]]}]
```

```
In[33]:= (* Soucet odchylek spoctenych a pozorovanych cen *)
```

```
PSEshort[fce_] :=
  Sum[
  ((bonds[[i]][[3]] + bonds[[i]][[2]] * (1 - FractionalPart[casy[[i]]])) -
  PV[i, fce])^2, {i, 1, 15}]
```

```
In[34]:= (* Stredni kvadraticka odchylka cen *)
```

```
MPSEshort[fce_] :=
  (1 / 15) *
  Sum[
  ((bonds[[i]][[3]] + bonds[[i]][[2]] * (1 - FractionalPart[casy[[i]]])) -
  PV[i, fce])^2, {i, 1, 15}]
```

```
In[35]:= PSEshort[Sfceshort]
PSEshort[w1fitshort]
PSEshort[w2fitshort]
```

```
Out[35]= 4.05377
```

```
Out[36]= 4.7882
```

```
Out[37]= 3.89446
```

```
In[38]:= MSEshort [Sfceshort ]
MSEshort [w1fitshort ]
MSEshort [w2fitshort ]
```

Out[38]= 0.00238031

Out[39]= 0.0160378

Out[40]= 0.00660359

```
In[41]:= MPSEshort [Sfceshort ]
MPSEshort [w1fitshort ]
MPSEshort [w2fitshort ]
```

Out[41]= 0.270251

Out[42]= 0.319213

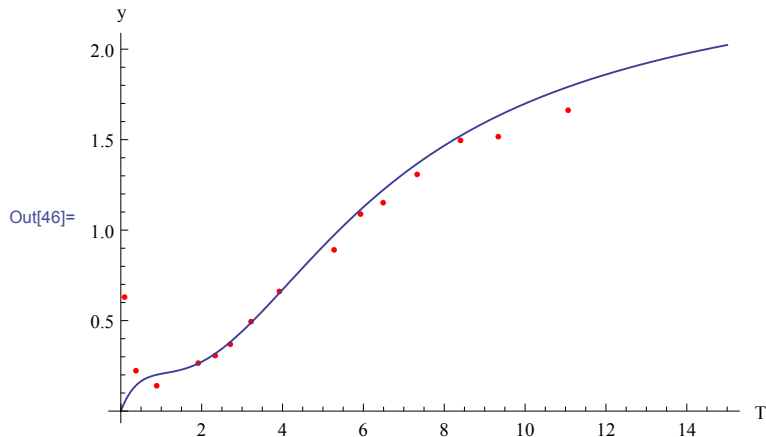
Out[43]= 0.25963

```
In[44]:= sfc [t_] := svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t]
```

```
In[45]:= pminshort = NMinimize [{PSEshort [sfc], b0 > 0, b0 + b1 > 0, c1 > 0, c2 > 0},
{b0, b1, b2, b3, c1, c2}, MaxIterations -> 1000000]
```

Out[45]= {0.446988, {b0 -> 2.67654, b1 -> -2.67648, b2 -> -62.3929, b3 -> 58.5363, c1 -> 1.10187, c2 -> 1.05739}}

```
In[46]:= pminshortplot =
Show[sdatashortplot,
Plot[svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. Last[pminshort],
{t, 0, 15}, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"T", "Y"}]]
```



```
In[47]:= svenssonspot [b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. Last[pminshort]
```

$$\frac{1}{t} \left( -2.67648 \left( 1.10187 - 1.10187 e^{-0.90754t} \right) + \right. \\ \left. 2.67654 t + 58.5363 \left( 1.05739 - e^{-0.94572t} \left( 1.05739 + t \right) \right) - \right. \\ \left. 62.3929 \left( 1.10187 - e^{-0.90754t} \left( 1.10187 + t \right) \right) \right)$$

```
In[48]:= fcshort2 [ t_ ] :=
  1
  t
  (-2.6764770813373184 `
    (1.1018748287380928 ` - 1.1018748287380928 ` e-0.9075441002180225t) +
    2.6765422643822303 ` t +
    58.53634560483413 `
    (1.0573936898205685 ` - e-0.9457215506645328t (1.0573936898205685 ` + t)) -
    62.39288848898385 `
    (1.1018748287380928 ` - e-0.9075441002180225t (1.1018748287380928 ` + t)))
```

```
In[49]:= MSEshort [fcshort2]
```

```
Out[49]= 0.0260178
```

```
In[50]:= MPSEshort [fcshort2]
```

```
Out[50]= 0.0297992
```

## Příloha 7

Konstrukce bezkupónové křivky metodou bootstrap a konstrukce forwardových sazeb a okamžité forwardové křivky v programu *Wolfram Mathematica 9*.

```
In[1]:= (* Data ve tvaru {splatnost, kuponova sazba v procentech, cena} *)
bonds = {{{2013, 06, 16}, 3.7, 100.33}, {{2013, 9, 16}, 2.8, 100.92},
  {{2014, 3, 31}, 2.75, 102.34}, {{2015, 4, 11}, 3.8, 106.78},
  {{2015, 9, 1}, 3.4, 107.12}, {{2016, 1, 26}, 6.95, 117.77},
  {{2016, 7, 28}, 0.5, 100.01}, {{2017, 4, 11}, 4, 112.9},
  {{2018, 8, 18}, 4.6, 119.02}, {{2019, 4, 11}, 5, 122.28},
  {{2019, 10, 29}, 1.5, 102.1}, {{2020, 9, 12}, 3.75, 116.92},
  {{2021, 9, 29}, 3.85, 118.34}, {{2022, 9, 12}, 4.7, 127.47},
  {{2024, 5, 25}, 5.7, 140.3}, {{2028, 8, 25}, 2.5, 102.58},
  {{2036, 12, 4}, 4.2, 121.6}, {{2057, 11, 26}, 4.85, 122.75}};

In[2]:= (* Dvojice doba a vynos do splatnosti pro spojite uroceni *)
spojdata =
Table[
  {DateDifference[{2013, 05, 07}, bonds[[i]][[1]],
    DayCountConvention -> "ThirtyE360"]/360,
  100 *
  Log[
    1 + y /.
    FindRoot[
      FinancialBond[{"FaceValue" -> 100,
        "Coupon" -> bonds[[i]][[2]]/100,
        "Maturity" -> bonds[[i]][[1]],
        {"InterestRate" -> y, "Settlement" -> {2013, 05, 07},
        "DayCountBasis" -> "30E/360"}] == bonds[[i]][[3]],
      {y, 0.0001}]]], {i, 1, 18}];

In[3]:= (* Plot vstupnich dat *)
spojdataplot = ListPlot[spojdata, PlotRange -> All, PlotStyle -> Red,
  AxesLabel -> {"T", "y"}, AxesOrigin -> {0, 0},
  PlotLegends -> {"Data (spoj. YTM)"}];

In[4]:= (* Svenssonuv model *)
svenssonforward[b0_, b1_, b2_, b3_, c1_, c2_, t_] :=
  b0 + b1 * Exp[-t/c1] + b2 * (t/c1) * Exp[-t/c1] + b3 (t/c2) * Exp[-t/c2]
svenssonspot[b0_, b1_, b2_, b3_, c1_, c2_, t_] =
  (1/t) * Integrate[svenssonforward[b0, b1, b2, b3, c1, c2, u], {u, 0, t}];

In[6]:= (* Fit Svenssonovy fce - bez vah *)
svenssonfit =
  FindFit[spojdata, {svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t],
    b0 > 0, b0 + b1 > 0, c1 > 0, c2 > 0}, {b0, b1, b2, b3, c1, c2}, t]

Out[6]= {b0 -> 4.77001, b1 -> -4.00898, b2 -> -3.21961,
  b3 -> -2.5475, c1 -> 6.29722, c2 -> 0.686432}
```

```

In[7]:= svenssonplot =
  Show[Plot[svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. svenssonfit,
    {t, 0, 45}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0},
    AxesLabel -> {"T", "y"}, PlotLegends -> {"Kuponova, spojite"}],
  spojdataplot];

In[8]:= Sfce[t_] = svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. svenssonfit;

In[9]:= (* Pro cele roky - 45 let*)
  YTM1 = Table[Sfce[i], {i, 1, 45}];

In[10]:= (* Rocne urocene, stale v procentech *)
  YTM2 = (Exp[YTM1/100] - 1) * 100

Out[10]:= {0.0852937, 0.232058, 0.476784, 0.69936, 0.892894, 1.06552, 1.22387,
  1.37187, 1.51168, 1.64451, 1.77104, 1.89168, 2.0067, 2.11632, 2.22074,
  2.32013, 2.41467, 2.50455, 2.58996, 2.67108, 2.7481, 2.82122,
  2.89063, 2.95652, 3.01907, 3.07845, 3.13484, 3.1884, 3.2393, 3.28769,
  3.3337, 3.37747, 3.41914, 3.45883, 3.49665, 3.53271, 3.56711,
  3.59996, 3.63133, 3.66132, 3.69, 3.71745, 3.74374, 3.76894, 3.7931}

In[11]:= (* Vytvoreni listu *)
  spots = Table[1, {45}];

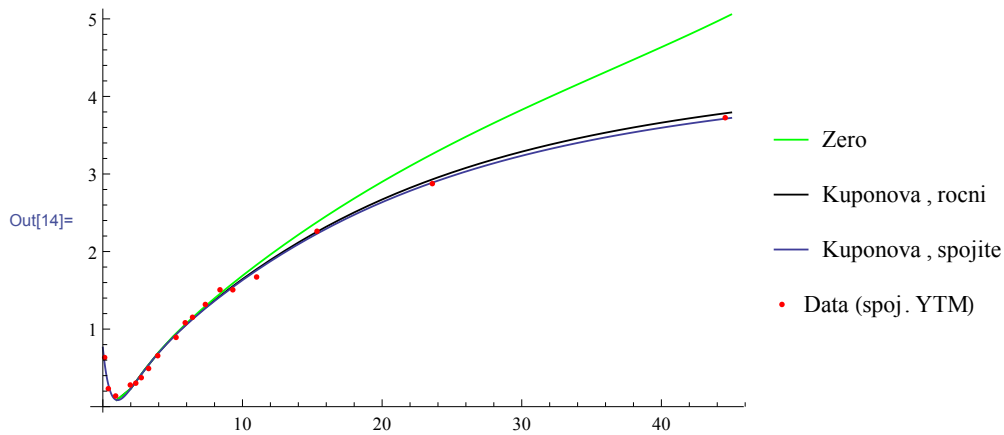
In[12]:= (* Bootstrap rocnich spotovych mer *)
  For[i = 1, i < 46, i++,
    spots[[i]] =
      FindRoot[100 == Sum[YTM2[[i]] / (1 + spots[[j]] / 100)^j, {j, 1, i - 1}] +
        (100 + YTM2[[i]]) / (1 + c/100)^i, {c, 1}]

In[13]:= spots

Out[13]:= {0.0852937, 0.232229, 0.478192, 0.703278, 0.900435, 1.07779, 1.24204,
  1.39725, 1.54569, 1.68862, 1.82677, 1.96059, 2.09035, 2.21626, 2.33848,
  2.45715, 2.57242, 2.68442, 2.79328, 2.89916, 3.00219, 3.10253, 3.20033,
  3.29576, 3.38895, 3.48009, 3.56932, 3.65681, 3.74274, 3.82726, 3.91055,
  3.99277, 4.07412, 4.15475, 4.23488, 4.31467, 4.39434, 4.47411,
  4.55418, 4.63481, 4.71626, 4.79879, 4.88273, 4.96842, 5.05625}

In[14]:= Show[ListLinePlot[YTM2, PlotStyle -> Black,
  PlotLegends -> {"Kuponova, rocni"}],
  ListLinePlot[spots, PlotStyle -> Green, PlotLegends -> {"Zero"}],
  svenssonplot, PlotRange -> All]

```



```
In[15]= (* Prevod spotovych sazeb na spojite uroceni *)
spojspots = 100 * Log[1 + spots / 100]
```

```
Out[15]= {0.0852573, 0.23196, 0.477053, 0.700816, 0.896406, 1.07202, 1.23439,
1.38758, 1.53386, 1.67452, 1.81029, 1.94162, 2.0688, 2.19206, 2.31156,
2.42745, 2.53989, 2.64902, 2.75498, 2.85793, 2.95801, 3.05538, 3.15019,
3.24261, 3.33279, 3.4209, 3.50709, 3.59154, 3.6744, 3.75584, 3.83602,
3.91512, 3.99331, 4.07076, 4.14766, 4.22418, 4.30053, 4.37691,
4.45353, 4.53061, 4.60842, 4.68721, 4.76727, 4.84894, 4.93257}
```

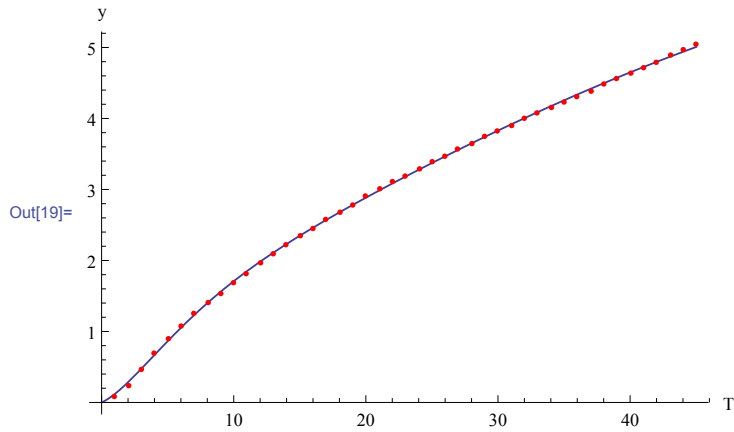
```
In[16]= (* Prolozeni spotovych sazeb *)
spojspotsfit = FindFit[Table[Flatten[{i, spojspots[[i]]}], {i, 1, 45}],
{svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t], b0 > 0, b0 + b1 > 0,
c1 > 0, c2 > 0}, {{b0, Last[spojspots]},
{b1, Last[spojspots] - First[spojspots]}, {b2, 0}, {b3, 0},
{c1, 2}, {c2, 2}}, t, MaxIterations -> 1000000]
```

```
Out[16]= {b0 -> 8.89052, b1 -> -8.89052, b2 -> -4.75732,
b3 -> -12.7883, c1 -> 3.30091, c2 -> 11.8391}
```

```
In[17]= (* Hladka spotova krivka pro spojite uroceni *)
Sf[t_] = svenssonspot[b0, b1, b2, b3, c1, c2, t] /. spojspotsfit;
```

```
In[18]= (* Hladka spotova krivka pro ročni uroceni *)
Sfrocni[t_] := 100 * (Exp[Sf[t] / 100] - 1)
```

```
In[19]= Show[Plot[Sfrocni[t], {t, 0, 45}, PlotRange -> All, AxesOrigin -> {0, 0},
AxesLabel -> {"T", "Y"}],
ListPlot[Table[Flatten[{i, spots[[i]]}], {i, 1, 45}], PlotStyle -> Red]]
```



```
In[20]:= (* Forwardove sazby na 1 rok *)
forws =
Prepend[
  100 * Table[ ((1 + spots[[i]] / 100) ^ i) / ((1 + spots[[i - 1]] / 100) ^ (i - 1)) -
    1, {i, 2, 45}], spots[[1]]]
```

Out[20]= {0.0852937, 0.37938, 0.971932, 1.38156, 1.69293, 1.96923, 2.2332, 2.4904, 2.74101, 2.98408, 3.21868, 3.44422, 3.66043, 3.86728, 4.06499, 4.25388, 4.43443, 4.60718, 4.7727, 4.93164, 5.08466, 5.23243, 5.37562, 5.51494, 5.65108, 5.78472, 5.91658, 6.04735, 6.17777, 6.30856, 6.44048, 6.57433, 6.71093, 6.85116, 6.99596, 7.14636, 7.30348, 7.46855, 7.64299, 7.82835, 8.02646, 8.23941, 8.46965, 8.72008, 8.99417}

```
In[21]:= (* Okamzita forwardova krivka *)
instf[t_] = 100 * (Sf[t] / 100 + t * D[Sf[t] / 100, t]);
```

```
In[22]:= (* Plot okamzite forwardove krivky *)
Plot[instf[t], {t, 0, 45}, PlotRange -> All, AxesLabel -> {"T", "y"}]
```

