

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁRSKA PRÁCA



Jana Černá

**Chybový člen symetrické Gaussovy-Lobattovy  
kvadraturní formule na třídě analytických funkcí**

*Katedra numerické matematiky*

Vedúci bakalárskej práce: *doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.*

Študijný program: *Matematika*  
Študijný obor: *Obecná matematika*

Praha 2011

Chcela by som poďakovať vedúcemu práce doc. RNDr. Josefovi Kofroňovi, CSc. za jeho ochotu a čas, ktorý mi venoval. Veľké poďakovanie patrí môjmu manželovi, ktorý mi bol pri písaní práce oporou.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, obzvlášť skutočnosť, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 2. decembra 2011

Jana Černá

Názov práce: *Chybový člen symetrické Gaussovy-Lobattovy kvadraturní formule na třídě analytických funkcí*

Autor: *Jana Černá*

Katedra: *Katedra numerické matematiky*

Vedúci bakalárskej práce: *doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.*

Abstrakt: *Bakalárska práca sa zaoberá štúdiom Gauss-Lobattovej kvadratúry, špeciálne so symetrickou váhovou funkciou na triede analytických funkcií na eliptickej oblasti. V tejto práci využijeme čiastočne Schirov prístup a sformulujeme postačujúce podmienky, za ktorých jadro integrálu nadobúda svoje maximálne hodnoty na prieniku eliptickej oblasti buď s reálnou, alebo s imaginárnou osou. Využijeme možnosť skúmania jednotlivých výrazov namiesto skúmania jadra. V závere práce ukazujeme praktickú aplikáciu výpočtu pomocou Gegenbauerovej váhovej funkcie, kde je názorná ukážka konvergenzie kvadraturnej formuly k presnej hodnote integrálu cez príslušnú funkciu.*

Klíčové slová: kvadratura formula, Gauss-Lobatto kvadratura formula, analytické funkcie

Title: *Error term of symmetric Gauss-Lobatto quadrature formula on the class of analytic functions*

Author: *Jana Černá*

Department: *Department of Numerical Mathematics*

Supervisor: *doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.*

Abstract: *In the bachelor thesis we study the problem of Gauss-Lobatto quadrature formulae associated with symmetric weight functions. The kernel of the remainder term for classes of analytic functions is investigated on elliptical contours. In this work we apply Schira's approach to obtain sufficient conditions ensuring that the kernel attains its maximal absolute value at the intersection point of the contour with either the real or the imaginary axis. We utilize a useful feature to replace the examination of the kernel by the examination of the terms appearing in its expansion. In conclusion, we show the practical application of the calculation using Gegenbauer weight function, which is by showing the convergence of quadrature formulae to the exact value of the integral over the corresponding function.*

Keywords: Quadrature formula, Gauss-Lobatto quadrature formula, analytic functions

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Pomocné tvrdenia</b>	<b>10</b>
2.1	Funkcia $v_m(z)$ . . . . .	14
2.2	Funkcia $\nu_m(z)$ . . . . .	18
2.3	Funkcia $\mu_m(z)$ . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Hlavné dôkazy</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Dôsledky a aplikácie</b>	<b>26</b>
4.1	Gegenbauerova váha . . . . .	26
4.2	Limitné prípady . . . . .	27
4.3	Konkrétne hodnoty . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Príklady</b>	<b>29</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>49</b>

# Kapitola 1

## Úvod

V úvode uvediem základne pojmy a výrazy využívané v bakalárskej práci.

Uvažujme  $n$ -uzlovú Gaussovú-Lobatovú kvadratúrnú formulu s nezápornou váhovou funkciou  $w$  všade na intervale  $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 w(x)f(x)dx = \sum_{\nu=1}^n w_{\nu,n}f(x_{\nu,n}) + R_n(f), \quad (1.1)$$

kde uzly  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{n,n} \in [-1, 1]$ .

Označme  $Q_n$  interpolačnú kvadratúrnú formulu, ktorú budeme študovať:

$$Q_n[f] := \sum_{\nu=1}^n w_{\nu,n}f(x_{\nu,n}), \quad (1.2)$$
$$-1 \leq x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} \leq 1.$$

Ďalej označme  $I$  integrál:

$$I[f] := \int_{-1}^1 w(x)f(x)dx. \quad (1.3)$$

Ak je funkcia  $f$  analytická na nejakej jednoducho súvislej a obmedzenej oblasti  $G$  komplexnej roviny obsahujúcej interval  $[-1, 1]$  vo svojom vnútri, potom zvyškový člen  $R_n := I - Q_n$  môže byť vyjadrený ako krivkový integrál na  $\Gamma := \partial G$ ,

$$R_n[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K_n(z; w)f(z)dz, \quad (1.4)$$

kde  $K_n(\cdot; w)$  označuje jadro funkcionálu  $R_n$  (respektíve jadro kvadratúrnej formuly  $Q_n$ ), a je dané ako

$$K_n(z; w) := \frac{q_n(z)}{p_n(z)}. \quad (1.5)$$

Kde  $p_n(z) := c(z - x_{1,n}) \cdots (z - x_{n,n})$  je uzlový polynóm. Ďalej  $q_n$  pre  $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  je dané ako

$$q_n(z) := \int_{-1}^1 w(x) \frac{p_n(x)}{z - x} dx. \quad (1.6)$$

Alternatívna reprezentácia  $K_n(z; w)$  je

$$K_n(z; w) := R_n \left[ \frac{1}{z - \cdot} \right] = \int_{-1}^1 \frac{w(x)}{z - x} dx - \sum_{\nu=1}^n \frac{w_{\nu,n}}{z - x_{\nu,n}}. \quad (1.7)$$

Formula (1.4) vedie na odhad chyby

$$|R_n[f]| \leq \frac{l(\Gamma)}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} |K_n(z; w)| \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \quad (1.8)$$

(iný spôsob odhadu  $R_n[f]$  rozoberá Hunter v [6]).

Typickou voľbou hranice  $\Gamma$  sú

- sústredné kružnice so stredom v počiatku
- konfokálne elipsy  $\varepsilon_\varrho$  s ohniskami v  $\pm 1$  a súčtom poloosí  $\varrho > 1$ :

$$\varepsilon_\varrho := \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2}(\varrho e^{i\theta} + \varrho^{-1} e^{-i\theta}), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \varrho > 1 \quad (1.9)$$

Odvedenie správnych obmedzení pre  $|R_n[f]|$  na základe (1.8) je možné jedine v prípade, že máme dobré odhady pre  $\max_{z \in \Gamma} |K_n(z; w)|$ . Obzvlášť užitočným je prípad, keď vieme identifikovať extrémny bod  $\xi \in \Gamma$ , v ktorom nadobúda  $|K_n|$  svoje maximum. V takomto prípade sa namiesto hľadania hornej hranice pre  $\max_{z \in \Gamma} |K_n(z; w)|$  môžeme jednoducho pokúsiť vypočítať hodnotu  $|K_n(\xi; w)|$ . Vo všeobecnosti to nemusí byť úloha jednoduchá. Avšak v prípade, kedy je  $Q_n$  kvadrátúra gaussovského typu, existujú efektívne algoritmy na výpočet  $K_n(z; w)$  v ľubovoľnom bode mimo intervalu  $[-1, 1]$  (viď Gautschi, Varga [4]).

Hľadaniu maximálneho bodu jadra  $|K_n(z; w)|$  Gaussovských kvadrátúrnych formulí cez kružnicové i eliptické hranice bola venovaná značná pozornosť (viď [1, 2, 3, 4, 5, 7]). Výsledky dosiahnuté v tomto smere sú typicky buď pre prípad špecifických váh (napríklad Čebyševove váhy), alebo pri obmedzeniach na monotónnosť (napríklad  $w(x)/w(-x)$  je monotónne). Pri takýchto predpokladoch je ukázané, že maximálny bod  $\xi$  leží na priesečníku príslušnej hranice s reálnou alebo imaginárnou osou, alebo je v blízkosti takéhoto priesečníku.

Nech váhová funkcia  $w$  je symetrická všade na intervale  $[-1, 1]$  (teda pre každé  $x \in [-1, 1]$  platí  $w(-x) = w(x)$ ). Preskúmame zovšeobecnenú symetrickú Gauss-Lobattovej kvadrátúrnu formulu príslušnú k  $w$

$$Q_n^{(\sigma)}[f] := \sum_{\mu=0}^{\sigma-1} a_{\mu,n}^{(\sigma)} [f^{(\mu)}(-1) + (-1)^\mu f^{(\mu)}(1)] + \sum_{\nu=1}^n w_{\nu,n}^{(\sigma)} f(x_{\nu,n}^{(\sigma)}). \quad (1.10)$$

Formula  $Q_n^{(\sigma)}$  je jednoznačne definovaná vlastnosťou, že jej zvyškový člen  $R_n^{(\sigma)} := I - Q_n^{(\sigma)}$  je identický rovný nule na množine všetkých algebraických polynómov stupňa nanejvýš  $2(n+\sigma)-1$ . Konkrétne  $Q_n^{(0)}$  je Gaussova kvadrátúra na  $n$  bodoch

$$Q_n^G[f] := \sum_{\nu=1}^n w_{\nu,n}^G f(x_{\nu,n}^G), \quad (1.11)$$

kde  $G$  označuje Gaussovú kvadrátúru,  $Q_n^{(1)}$  je Gauss-Lobatto kvadrátúrna formula na  $(n+2)$  bodoch

$$Q_{n+2}^{Lo}[f] := a_n^{Lo}[f(-1)] + f(1) + \sum_{\nu=1}^n w_{\nu,n}^{Lo} f(x_{\nu,n}^{Lo}), \quad (1.12)$$

kde  $Lo$  označuje Gauss-Lobatto kvadrátúru a  $Q_n^{(2)}$  je Gauss-Lobatto kvadrátúrna formula na  $(n+2)$  bodoch s dvojitými koncovými uzlami  $Q_{n+2}^{Lo,d}$  (každá z troch vyššie uvedených formulí prislúcha váhovej funkcii  $w$ ), kde  $Lo, d$  označuje Gauss-Lobatto kvadrátúru s dvojitým uzlom.

Jadro  $K_n^G(\cdot; w)$  Gaussovej kvadrátúrnej formuly (1.11) cez eliptickú hranicu bolo študované v článku Schira [10].

Označme ako  $z_r = z_r(\varrho)$  a  $z_i = z_i(\varrho)$  priesečníky elipsy  $\varepsilon_\varrho$  s pozitívnymi časťami reálnej a imaginárnej osi, teda

$$z_r := \frac{\varrho + \varrho^{-1}}{2}, \quad z_i := \frac{i(\varrho - \varrho^{-1})}{2}.$$

Pre váhovú funkciu  $w(x)$  symetrickú na  $(-1, 1)$  a splňujúcu podmienku, že buď  $w(x)\sqrt{1-x^2}$  je rastúca, alebo  $w(x)/\sqrt{1-x^2}$  je klesajúca na intervale  $(0, 1)$  ukázal Schira, že extrémálny bod  $\xi$  sa zhoduje v prvom prípade so  $z_r$  a v druhom prípade so  $z_i$  (príslušné  $\varrho$  nie je menšie než predom daná hodnota, viď. Veta 1.1). Predpoklady pre  $w$  sú splnené, teda napríklad pre Gegenbauerovu váhovú funkciu

$$w_\alpha(x) := (1-x^2)^\alpha, \quad \alpha > -1, \quad \alpha \notin (-1/2, 1/2).$$

**Veta 1.1** (Veta 3.2 z [10], v origináli Theorem 3.2). *Jadro  $K_n$  Gaussovej kvadrátúrnej formuly prislúchajúcej k symmetrickej váhovej funkcii  $w$  na intervale  $(-1, 1)$  splňuje*

(i) ak  $w(x)\sqrt{1-x^2}$  je rastúce na intervale  $(0, 1)$ , potom

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_n(z)| = K_n\left(\frac{1}{2}(\varrho + \varrho^{-1})\right) \quad \text{pre} \quad \varrho \geq \varrho_n^* := \begin{cases} 2,4139, & n = 2 \\ 2,0017, & n = 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}), & n \geq 4; \end{cases}$$

(ii) ak  $\frac{w(x)}{\sqrt{1-x^2}}$  je klesajúce na intervale  $(0, 1)$ , potom

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_n(z)| = |K_n\left(\frac{i}{2}(\varrho - \varrho^{-1})\right)| \quad \text{pre} \quad \varrho \geq \varrho_n^*.$$

Kde  $\varrho_n^* := 1 + \sqrt{2}$  ak je  $n \geq 1$  nepárne. Ak je  $n \geq 2$  párne, potom  $\varrho_n^*$  je najväčší nulový bod výrazu

$$d_n(\varrho) := (\varrho - \varrho^{-1})^2 - 4 - (\varrho^2 - \varrho^{-2})^2 \left( \frac{(n+1)^2}{(\varrho^{n+1} + \varrho^{-n-1})^2} + \frac{(n+3)^2}{(\varrho^{n+3} + \varrho^{-n-3})^2} \right).$$

Dôkaz uviedol Schira v [10].

Schira v [8] ukázal podobný výsledok pre Gauss-Lobattovu kvadratúrnu formulu (1.12):

**Veta A** (Veta 4.4. z [8], v origináli Satz 4.4). *Nech  $K_{n+2}^{Lo}(\cdot; w)$  je jadro Gauss-Lobattovej kvadratúrnej formuly (1.12) príslušnej k symetrickej váhovej funkcii  $w$  na intervale  $(-1, 1)$ . Ak  $w(x)\sqrt{1-x^2}$  je rastúce na  $(0, 1)$ , potom*

$$\max_{x \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2}^{Lo}(z; w)| = |K_{n+2}^{Lo}(z_r; w)| \quad \text{pre všetky } \varrho \geq \varrho_* := \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$$

(pre  $n = 0$  to platí pre všetky  $\varrho > 1$ ).

Dôkaz uviedol Schira v [8].

V tejto práci využijeme Schirov prístup a ukážeme vetu analogickú k Vete A, ale pre symetrické váhové funkcie  $w$  také, že  $w(x)/\sqrt{1-x^2}$  je klesajúce na intervale  $(0, 1)$  – Veta 3.5. Ako sa ukáže, tento prístup sa dá čiastočne aplikovať aj na zovšeobecnené symetrické Gauss-Lobattovej kvadratúrnej formuly (1.10) – Veta 3.6.

## Kapitola 2

# Pomocné tvrdenia

V tejto kapitole uvediem dve pomocné tvrdenia zo Schirovho článku [10] a pomocné definície.

**Definícia 2.1.** Zobrazenie  $z = (u + u^{-1})/2$  je konformné (tj. spojité zobrazenie zachovávajúce uhly), ktoré transformuje sústredné kružnice  $|u| = \varrho$  ( $\varrho > 1$ ) na konfokálne elipsy  $\varepsilon_\varrho$ . Ortogonálne polynómy s váhou  $w = 1/\sqrt{1-x^2}$ , v intervale  $[-1,1]$  nazývame Čebyševové polynómy prvého druhu:

$$T_n(z) = \frac{u^n + u^{-n}}{2} \quad (2.1)$$

a ortogonálne polynómy s váhou  $w = \sqrt{1-x^2}$ , v intervale  $[-1,1]$  nazývame Čebyševové polynómy druhého druhu.

$$U_n(z) = \frac{u^{n+1} - u^{-n-1}}{u - u^{-1}}, \quad (2.2)$$

kde  $u = \varrho e^{i\theta}$ .

Ďalej budeme používať zaužívané značenie

$$a_m(\varrho) := \frac{1}{2}(\varrho^m + \varrho^{-m}). \quad (2.3)$$

**Lemma 2.2** ([10], lemma 2.1). Nech  $w$  a  $\tilde{w}$  sú dve symetrické váhové funkcie na intervale  $(-1, 1)$  a nech uzly  $x_{k,n}$  a  $\tilde{x}_{k,n}$  odpovedajúceho ortogonálneho polynómu stupňa  $n$  sú klesajúco usporiadané. Ak  $w/\tilde{w}$  je rastúce na intervale  $(0, 1)$ , potom nerovnosti  $x_{k,n} \geq \tilde{x}_{k,n}$  platia pre všetky  $k = 1, \dots, [\frac{n}{2}]$ .

*Dôkaz.* Predpokladajme, že výraz  $w/\tilde{w}$  nie je na intervale  $(0, 1)$  konštantný (inak by totiž mali  $\pi_n$  a  $\tilde{\pi}_n$  totožné nulové body). Pre  $k \in 1, \dots, [\frac{n}{2}]$  ľubovoľné ale pevné položíme  $\lambda_k := w(\tilde{x}_k^{(n)})/\tilde{w}(\tilde{x}_k^{(n)}) \geq 0$  a skonštruujeme polynóm stupňa  $(2n-2)$  nasledovne

$$p(x) := \left[ \prod_{\nu=1}^{k-1} (x^2 - (x_{\nu}^{(n)})^2)^2 \right] (x^2 - (\tilde{x}_k^{(n)})^2) \left[ \prod_{\nu=k+1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (x^2 - (\tilde{x}_{\nu}^{(n)})^2)^2 \right] x^{2(n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}.$$

Napríklad pre  $n = 8$  dostávame polynom stupňa  $(2n - 2) = 2 \cdot 8 - 2 = 14$ . Dosadením do polynomu pre najvyššie mocniny dostávame

$$x^{4(k-1)} x^2 x^{4(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k)} x^{2(n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)} \Rightarrow x^{4k} x^{-4} x^2 x^{4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{-4k} x^{2n} x^{-4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Rightarrow x^{-4} x^2 x^{2n} \Rightarrow x^{2n-2}.$$

Teda konštruovaný polynom je maximálne stupňa  $(2n - 2)$ .

Očividne  $p(x) \leq 0$  ak  $|x| \leq \tilde{x}_k^{(n)}$  a  $p(x) \geq 0$  ak  $|x| \geq \tilde{x}_k^{(n)}$ . Tým, že  $w$  a  $\tilde{w}$  sú symetrické a výraz  $w/\tilde{w}$  monotónny na intervale  $(0, 1)$  dostávame, že aj funkcia  $w(x) - \lambda_k \tilde{w}(x)$  je nezáporná pre  $|x| \geq \tilde{x}_k^{(n)}$  a nekladná pre  $|x| \leq \tilde{x}_k^{(n)}$ . Takže platí, že  $p(x)(w(x) - \lambda_k \tilde{w}(x)) \geq 0$ ,  $x \in (-1, 1)$  a zároveň

$$0 < \int_{-1}^1 p(x) (w(x) - \lambda_k \tilde{w}(x)) dx = \sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(n)} p(x_{\nu}^{(n)}) - \lambda_k \sum_{\nu=1}^n \tilde{w}_{\nu}^{(n)} p(\tilde{x}_{\nu}^{(n)})$$

keďže polynom  $p$  stupňa  $2n-2$  je presne integrovaný Gaussovými kvadrátúrnymi pravidlami vzťahujúcimi sa k  $w$  a  $\tilde{w}$  (s uzlami  $x_{\nu}^{(n)}$  a  $\tilde{x}_{\nu}^{(n)}$  a príslušnými pozitívnymi váhami  $w_{\nu}^{(n)}$  a  $\tilde{w}_{\nu}^{(n)}$ ). Spôsob konštrukcie  $p$  a symetria nulových bodov nám dávajú

$$0 < \sum_{\nu=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} w_{\nu}^{(n)} p(x_{\nu}^{(n)}) - \lambda_k \sum_{\nu=1}^{k-1} \tilde{w}_{\nu}^{(n)} p(\tilde{x}_{\nu}^{(n)}).$$

Keďže  $\forall \nu_0 \in \{k, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$  platí

$$p(x_{\nu_0}^{(n)}) > 0,$$

a

$$x_{\nu_0}^{(n)} \geq \tilde{x}_k^{(n)},$$

dostávame

$$\sum_{\nu=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} w_{\nu}^{(n)} p(x_{\nu}^{(n)}) - \lambda_k \sum_{\nu=1}^{k-1} \tilde{w}_{\nu}^{(n)} p(\tilde{x}_{\nu}^{(n)}) \leq \sum_{\nu=k}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} w_{\nu}^{(n)} p(x_{\nu}^{(n)}).$$

□

**Lemma 2.3** ([10], lemma 4.1). *Funkcia*

$$g(z) := \frac{z^2 - s^2}{z^2 - t^2}, \quad s, t \in (0, 1)$$

má tú vlastnosť, že pre každú elipsu  $\varepsilon_\rho$  s  $\rho \geq \rho_* := \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$  platí

$$\max_{z \in \varepsilon_\rho} |g(z)| = \begin{cases} g(z_r) & \text{ak } s < t \\ g(z_i) & \text{ak } s > t. \end{cases}$$

Funkcie  $g(z_r)$  a  $g(z_i)$  sú definované na stránke 7, teda

$$z_r := \frac{\rho + \rho^{-1}}{2}, \quad z_i := \frac{i(\rho - \rho^{-1})}{2}.$$

*Dôkaz.* Použitím polárnych súradníc  $z = \frac{1}{2}(u + u^{-1}) \in \varepsilon_\rho$ ,  $u = \rho e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\rho > 1$ , teda vyplýva

$$\begin{aligned} |z^2 - s^2|^2 &= \frac{1}{16} |u^2 + u^{-2} + 2 - 4s^2|^2 \\ &= \frac{1}{16} [(\rho^2 + \rho^{-2} + 2 - 4s^2)^2 - 4(2 - 4s^2)(\rho^2 + \rho^{-2}) \sin^2 \theta - 4 \sin^2 2\theta] \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} [(\rho^2 + \rho^{-2} - 2 + 4s^2)^2 + 4(2 - 4s^2)(\rho^2 + \rho^{-2}) \cos^2 \theta - 4 \sin^2 2\theta]. \quad (2.5)$$

V prípade  $s < t$  nám (2.4) spolu s  $a_2(\rho) := \frac{1}{2}(\rho^2 + \rho^{-2})$  dáva

$$|g(z)|^2 = \frac{(a_2(\rho) + 1 - 2s^2)^2 - 4(1 - 2s^2)a_2(\rho) \sin^2 \theta - 4 \sin^2 2\theta}{(a_2(\rho) + 1 - 2t^2)^2 - 4(1 - 2t^2)a_2(\rho) \sin^2 \theta - 4 \sin^2 2\theta} \leq \left| g\left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1})\right) \right|^2.$$

pre všetky  $z \in \varepsilon_\rho$  práve vtedy ak  $\varphi_1(\theta) \leq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  kde

$$\begin{aligned} \varphi_1(\theta) &:= 8a_2(\rho)[(1 - 2s^2)(1 - 2t^2) - a_2^2(\rho)] \sin^2 \theta + 4[a_2(\rho) + 1 - s^2 - t^2] \sin^2 2\theta \\ &= 8\{a_2(\rho)[(1 - 2s^2)(1 - 2t^2) - a_2^2(\rho)] + 2[a_2(\rho) + 1 - s^2 - t^2] \cos^2 \theta\} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

V prípade  $s > t$  nám pre zmenu (2.5) dáva

$$|g(z)|^2 = \frac{(a_2(\rho) - 1 + 2s^2)^2 + 4(1 - 2s^2)a_2(\rho) \cos^2 \theta - \sin^2 2\theta}{(a_2(\rho) - 1 + 2t^2)^2 + 4(1 - 2t^2)a_2(\rho) \cos^2 \theta - \sin^2 2\theta} \leq \left| g\left(\frac{i}{2}(\rho - \rho^{-1})\right) \right|^2$$

pre všetky  $z \in \varepsilon_\rho$  práve vtedy keď  $\varphi_2(\theta) \leq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , kde

$$\begin{aligned} \varphi_2(\theta) &:= 8a_2(\rho)[(1 - 2s^2)(1 - 2t^2) - a_2^2(\rho)] \cos^2 \theta + 4[a_2(\rho) - 1 + s^2 + t^2] \sin^2 2\theta \\ &= 8\{a_2(\rho)[(1 - 2s^2)(1 - 2t^2) - a_2^2(\rho)] + 2[a_2(\rho) - 1 + s^2 + t^2] \sin^2 \theta\} \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Zvyčajne platí  $\varphi_\nu(\theta) \leq 0$  pre  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $\nu = 1, 2$  práve vtedy keď

$$d_\nu(\rho) := a_2(\rho)[(1 - 2s^2)(1 - 2t^2) - a_2^2(\rho)] + 2[a_2(\rho) + (-1)^\nu (s^2 + t^2 - 1)] \leq 0.$$

Pre  $s, t \in (0, 1)$  sú splnené podmienky

$$(1 - 2s^2)(1 - 2t^2) \leq 1$$

$$(-1)^\nu (s^2 + t^2 - 1) \leq 1, \nu \in \{1, 2\}.$$

A teda

$$d_\nu(\varrho) \leq -a_2^3(\varrho) + 3a_2(\varrho) + 2 = -[a_2(\varrho) + 1]^2[a_2(\varrho) - 2] \leq 0$$

ak  $a_2(\varrho) - 2 = \frac{1}{2}(\varrho^2 + \varrho^{-2}) - 2 \geq 0$ , tj.  $\varrho \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}) =: \varrho_*$   
 Následne  $\varphi_\nu(\theta) \leq 0$  pre všetky  $\theta \in [0, 2\pi)$  a  $\nu \in \{1, 2\}$  ak  $\varrho \geq \varrho_*$ , čím je tvrdenie dokázané. □

Nasledujúce jednoduché lemma vyjadruje vzťah medzi veličinami  $a_m(\varrho)$ .

**Lemma 2.4.** *Pre každé pevné  $\varrho_0 > 1$  a pre každé nezáporné celé číslo  $m$  platí nasledujúca nerovnosť*

$$a_{2m}(\varrho) \leq d_m a_{2m+2}(\varrho) \quad \text{pre každé } \varrho \geq \varrho_0, \quad (2.6)$$

kde

$$d_m = \frac{\varrho_0^{4m} + 1}{\varrho_0^{4m+2}}. \quad (2.7)$$

*Dôkaz.* Najprv sa pozrime, pre ktoré kladné konštanty  $c$  sú nerovnosti

$$a_{2m+2}(\varrho) \geq c\varrho^2 a_{2m}(\varrho) \quad (2.8)$$

splnené pre každé  $\varrho \geq \varrho_0$ . Pomocou (2.3) dôjdeme k záveru, že (2.8) platí ak

$$c \leq \frac{\varrho^{4m}}{\varrho^{4m} + 1}.$$

Keďže pravá strana poslednej nerovnosti rastie s rastúcim  $\varrho$ , pri voľbe

$$c = \frac{\varrho_0^{4m}}{\varrho_0^{4m} + 1}$$

máme zaručenú platnosť (2.8) pre všetky  $\varrho \geq \varrho_0$ . Teda pre  $\varrho \geq \varrho_0$  máme

$$a_{2m}(\varrho) \leq \frac{\varrho_0^{4m} + 1}{\varrho^2 \varrho_0^{4m}} a_{2m+2}(\varrho) \leq \frac{\varrho_0^{4m} + 1}{\varrho_0^{4m+2}} a_{2m+2}(\varrho).$$

Tým je lemma dokázané. □

Budeme ešte potrebovať jednoduché nerovnosti vyjadrené v nasledujúcom lemma, ktoré uvediem bez dôkazu.

**Lemma 2.5.** *Pre každé celé číslo  $m \in \mathbb{N}$  a pre každé  $\theta \in \mathbb{R}$  platia nasledujúce nerovnosti*

$$(i) \quad \sin^2 2m\theta \leq 4m^2 \sin^2 \theta,$$

$$(ii) \quad \cos^2(2m+1)\theta \leq (2m+1)^2 \cos^2 \theta.$$

Uvedené v Schirovom článku [10].

## 2.1 Funkcia $v_m(z)$

V tejto sekcii si zavedieme istú funkciu  $v_m(z)$  a ukážeme si jej základnú vlastnosť v podobe lemma. Túto vlastnosť potom využijeme v nasledujúcej sekcii na odvodenie vlastností ďalších funkcií.

**Definícia 2.6** ([11]). *Symbolom  $v_m(z)$  budeme označovať nasledujúcu funkciu*

$$v_m(z) := \frac{U'_{m-2}(z)}{U'_m(z)}$$

O tejto funkcii by sa dali ukázať aj silnejšie tvrdenia, avšak pre naše potreby úplne vystačí nasledujúce.

**Lemma 2.7** ([11]). *Pre ľubovoľné celé číslo  $m \geq 6$  a pre ľubovoľné  $\varrho \geq 2, 3$  platí*

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |v_m(z)| = |v_m(z_i)|.$$

*Dôkaz.* Použitím diferenciálnej rovnice

$$(1 - z^2)T_n''(z) - zT_n'(z) + n^2T_n(z) = 0$$

a rovnosti

$$T'_{n+1} = (n+1)U_n$$

dostávame

$$v_m(z) = \frac{(m-1)T_{m-1}(z) - zU_{m-2}(z)}{(m+1)T_{m+1}(z) - zU_m(z)}.$$

Pre  $z \in \varepsilon_\varrho$  rovnice (2.1) a (2.2) vedú na

$$|v_m(z)|^2 = \frac{g_{m-2}(\varrho, \theta)}{g_m(\varrho, \theta)}, \quad (2.9)$$

kde

$$\begin{aligned} g_n(\varrho, \theta) &= n^2 [a_{2n+4}(\varrho) - \cos(2n+4)\theta] - 2n(n+2) \cos 2\theta a_{2n+2}(\varrho) \\ &+ (n+2)^2 [a_{2n}(\varrho) - \cos 2n\theta] + 2n(n+2) \cos(2n+2)\theta a_2(\varrho). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Uvediem dôkaz pre  $m$  párne. Prípad, kedy je  $m$  nepárne je analogický a myšlienka dôkazu je identická. Takže nech  $m$  je párne. Potom máme

$$g_{m-2}(\varrho, \theta) = A_{m-2}(\varrho) - 2B_{m-2}(\varrho, \theta), \quad (2.11)$$

kde

$$\begin{aligned} A_{m-2}(\varrho) &= (m-2)^2 a_{2m}(\varrho) + 2(m-2)ma_{2m-2}(\varrho) \\ &+ m^2 a_{2m-4}(\varrho) - 2(m-2)ma_2(\varrho) - m^2 - (m-2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{m-2}(\varrho, \theta) &= 2(m-2)m \cos^2 \theta a_{2m-2}(\varrho) - 2(m-2)m \cos^2(m-1)\theta a_2(\varrho) \\ &- (m-2)^2 \sin^2 m\theta - m^2 \sin^2(m-2)\theta. \end{aligned}$$

Analogické vzťahy platia pre  $A_m(\varrho)$  a  $B_m(\varrho)$ . Na základe rovníc (2.9) a (2.11) odvodíme

$$|v_m(z_i)|^2 - |v_m(z)|^2 = \frac{A_{m-2}(\varrho)}{A_m(\varrho)} - \frac{A_{m-2}(\varrho) - 2B_{m-2}(\varrho, \theta)}{A_m(\varrho) - 2B_m(\varrho, \theta)},$$

a následne aj

$$\text{sign} \{|v_m(z_i)|^2 - |v_m(z)|^2\} = \text{sign} \{A_m(\varrho)B_{m-2}(\varrho, \theta) - A_{m-2}(\varrho)B_m(\varrho, \theta)\}.$$

Musíme teda študovať znamienko poslednej rovnice. Následne učiníme výpočet, v ktorom opakovane využívame rovnosť  $a_k a_l = (a_{k+l} + a_{|k-l|})/2$ . Výpočet je jednoduchý, avšak pomerne zdĺhavý, preto uvediem len výsledok, ktorým je nasledujúci vzťah

$$A_m B_{m-2} - A_{m-2} B_m = \sum_{k=0}^{2m+1} c_k(\theta) a_{2k}(\varrho),$$

kde

$$\begin{aligned} c_{2m+1}(\theta) &= 4(m-2)m \cos^2 \theta, \\ c_{2m-1}(\theta) &= -4(m+2)m \cos^2 \theta, \\ c_{m+3}(\theta) &= -m^3(m-2) \cos^2(m-1)\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{m+2}(\theta) &= 2m^2(m^2-4) [\cos^2 \theta - \cos^2(m-1)\theta] \\ &- m^2 [(m-2)^2 \sin^2 m\theta + m^2 \sin^2(m-2)\theta], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{m+1}(\theta) &= 2m(m+2) [m^2 + (m-2)^2] \cos^2 \theta + m(m-2)^2(m+2) \cos^2(m+1)\theta \\ &- (m-2)m [m^2 + (m+2)^2] \cos^2(m-1)\theta \\ &- 2m(m+2) [(m-2)^2 \sin^2 m\theta + m^2 \sin^2(m-2)\theta], \end{aligned}$$

$$c_m(\theta) = 2m^2(m^2 - 4) [\cos^2(m+1)\theta - \cos^2(m-1)\theta] \\ + m^2 [(m-2)^2 \sin^2(m+2)\theta - (m+2)^2 \sin^2(m-2)\theta],$$

$$c_{m-1}(\theta) = m(m+2)[m^2 + (m-2)^2] \cos^2(m+1)\theta \\ + 2(m-2)m[m^2 \sin^2(m+2)\theta + (m+2)^2 \sin^2 m\theta] \\ - 2(m-2)m[(m+2)^2 + m^2] \cos^2 \theta \\ - m(m-2)(m+2)^2 \cos^2(m-1)\theta,$$

$$c_{m-2}(\theta) = 2m^2(m^2 - 4)[\cos^2(m+1)\theta - \cos^2 \theta] \\ + m^2[m^2 \sin^2(m+2)\theta + (m+2)^2 \sin^2 m\theta],$$

$$c_{m-3}(\theta) = m^3(m+2) \cos^2(m+1)\theta, \\ c_3 = -4m^3 \cos^2 \theta,$$

$$c_2(\theta) = 2m^2(m^2 - 4)[\cos^2(m-1)\theta - \cos^2(m+1)\theta],$$

$$c_1(\theta) = 4m(m^2 - 4) \cos^2 \theta + 2(m-2)m[(m+2)^2 + m^2] \cos^2(m-1)\theta \\ + 2(m+2)m[(m-2)^2 \sin^2 m\theta + m^2 \sin^2(m-2)\theta] \\ - 2(m-2)m[m^2 \sin^2(m+2)\theta + (m+2)^2 \sin^2 m\theta] \\ - 2(m+2)m[m^2 + (m-2)^2] \cos^2(m+1)\theta,$$

$$c_0(\theta) = 2m^2(m^2 - 4)[\cos^2(m-1)\theta - \cos^2(m+1)\theta] \\ + [(m+2)^2 + m^2][(m-2)^2 \sin^2 m\theta + m^2 \sin^2(m-2)\theta] \\ - [m^2 + (m-2)^2][m^2 \sin^2(m+2)\theta + (m+2)^2 \sin^2 m\theta].$$

Všetky ostatné koeficienty sú rovné nule.

Ďalej vydelíme výraz  $A_m B_{m-2} - A_{m-2} B_m$  výrazom  $\cos^2 \theta$ , a aplikujeme lemma (2.5), čím dostávame odhad

$$\frac{A_m B_{m-2} - A_{m-2} B_m}{\cos^2 \theta} \geq 4m(m-2)a_{4m+2} - 4m(m+2)a_{4m-2} \\ - m^3(m-1)^2(m-2)a_{2m+6} \\ - 4m^3(m-2)^2(m+1)a_{2m+4} \\ - 6m^6 a_{2m+2} - 3m^6 a_{2m} - m^6 a_{2m-2} - m^6 a_{2m-4} \\ - m^6 a_6 - 3m^6 a_4 - 11m^6 a_2 - 10m^6 a_0.$$

Teda

$$\frac{A_m B_{m-2} - A_{m-2} B_m}{\cos^2 \theta} \geq 4m(m-2)a_{4m+2} - 4m(m+2)a_{4m-2} - \sum_{j=0}^{m+3} \alpha_j a_{2j}. \quad (2.12)$$

Všimneme si, že kvôli jednoduchosti sú odhady pre členy s koeficientami „nižšieho stupňa“ (tj.  $a_j$  s indexami menšími než  $2m+4$ ) pomerne hrubé. Dôvod, prečo môžeme byť spokojný aj s takýmto hrubým odhadom je, že hodnota  $a_m(\varrho)$  veľmi rýchlo rastie s rastúcim  $m$  (ak  $\varrho$  nie je príliš blízko 1), výsledkom čoho je, že len prvých pár členov pravej strany nerovnosti (2.12) je dôležitých.

Teraz odhadneme pravú stranu nerovnosti (2.12) s pomocou lemma (2.3). Pre  $\varrho \geq 2,3$  platí nerovnosť  $a_{2j}(\varrho) \leq d_j a_{2j+2}(\varrho)$ , napríklad pre  $d_0 = 0,4$ ,  $d_1 = 0,2$ ,  $d_m = 0,19$ , pre každé  $m \geq 2$ . Označme  $d = d_{m,m \geq 2} = 0,19$ . Následne dostávame

$$10a_0 \leq 4a_2$$

$$10a_0 + 11a_2 \leq 3a_4$$

$$10a_0 + 11a_2 + 3a_4 \leq 1,14a_6$$

$$10a_0 + 11a_2 + 3a_4 + a_6 \leq 0,41a_8 \leq 0,41a_{2m-4}$$

a opakovaním tejto postupnosti sa dostaneme k nerovnosti

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m+3} \alpha_j a_{2j} &\leq (2m^6 - 6,28m^5 + 5m^4 + 1,04m^3)a_{2m+6} \\ &\leq 2m^5(m-2)a_{2m+6} \\ &\leq 2m^5(m-2)d^{m-2}a_{4m+2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Taktiež pre  $m \geq 6$  dostávame

$$\begin{aligned} 4m(m+2)a_{4m-2} &\leq 4m(m-2)\frac{m+2}{m-2}d^2a_{4m+2} \\ &\leq 0,29m(m-2)a_{4m+2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Skombinovaním (2.13) a (2.14) dostaneme

$$4m(m-2)a_{4m+2} - 4m(m+2)a_{4m-2} - \sum_{j=0}^{m+3} \alpha_j a_{2j} \geq [3,71 - 2m^4 d^{m-2}]m(m-2)a_{4m+2}. \quad (2.15)$$

Na dokázanie lemma 2.7 pre párne  $m$  stačí ukázať, že hodnota  $\delta(m) := 2m^4 d^{m-2}$  neprekročí hodnotu 3,71 pre žiadne  $m \geq 6$ . Toto je však jednoduché nahliadnuť, keďže  $\delta(6) \leq 3,38$  a  $\delta(m)$  monotónne klesá s rastúcim  $m$ .

Opakovanie rovnakých postupov v prípade keď je  $m$  nepárne vedie k rovnakým záverom. Tým je lemma 2.7 dokázané.  $\square$

## 2.2 Funkcia $\nu_m(z)$

**Definícia 2.8** ([11]). *Pre ľubovoľné prirodzené  $m \geq 2$  definujeme funkciu:*

$$\nu_m(z) := \frac{z}{(z^2 - 1)^2 U'_m(z) U'_{m+2}(z)}.$$

**Lemma 2.9** ([11]). *Pre každé prirodzené  $m \geq 2$  a pre každé  $\varrho \geq \varrho_* = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$  platí*

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\nu_m(z)| = \nu_m(z_r).$$

*Dôkaz.* Prípád  $m = 2$  sa dá nahliadnuť priamo, uvažujme teda  $m \geq 3$ . Napíšme

$$\nu_m(z) = z \xi_m(z) \xi_{m+2}(z),$$

kde

$$\xi_m(z) = \frac{1}{(z^2 - 1) U'_m(z)}.$$

Teraz je očividné, že lemma bude dokázané, ak ukážeme, že pre každé  $m \geq 3$  a pre každé  $\varrho \geq \varrho_*$  platí:

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\xi_m(z)| = \xi_m(z_r). \quad (2.16)$$

Z toho dostávame

$$\begin{aligned} \max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\nu_m(z)| &\leq \max_{z \in \varepsilon_\varrho} |z| \max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\xi_m(z)| \max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\xi_{m+2}(z)| \\ &= z_r \xi_m(z_r) \xi_{m+2}(z_r) \\ &= \nu_m(z_r). \end{aligned}$$

Využitím dobre známych vlastností Čebyševových polynómov prvého a druhého stupňa maximalizácia výrazov rozpadá na malé a explicitne riešiteľné problémy, čím dostávame

$$|\xi_m(z)|^2 = \frac{4(a_2(\varrho) - \cos 2\theta)}{g_m(\varrho, \theta)},$$

kde  $g_m$  je definované rovnako ako v (2.10).

Napíšeme

$$\begin{aligned} g_m(\varrho, \theta) &= g_m(\varrho, 0) + (g_m(\varrho, \theta) - g_m(\varrho, 0)) \\ &= C_m(\varrho) + 2D_m(\varrho, \theta), \end{aligned}$$

kde

$$C_m = m^2 a_{2m+4} - 2m(m+2)a_{2m+2} + (m+2)^2 a_{2m} + 2m(m+2)a_2 - m^2 - (m+2)^2$$

a

$$D_m = 2m(m+2)[a_{2m+2} \sin^2 \theta - a_2 \sin^2(m+1)\theta] + m^2 \sin^2(m+2)\theta + (m+2)^2 \sin^2 m\theta.$$

Teda

$$|\xi_m(z_r)|^2 - |\xi_m(z)|^2 = \frac{4(a_2(\varrho) - 1)}{C_m(\varrho)} - \frac{4(a_2(\varrho) - 1 + 2 \sin^2 \theta)}{C_m(\varrho) + 2D_m(\varrho, \theta)},$$

a následne

$$\begin{aligned} \text{sign} \{ |\xi_m(z_r)|^2 - |\xi_m(z)|^2 \} &= \text{sign} \{ (a_2(\varrho) - 1)D_m(\varrho, \theta) - C_m(\varrho) \sin^2 \theta \} \\ &=: \text{sign} \varepsilon(\varrho, \theta). \end{aligned}$$

Výpočet  $\varepsilon(\varrho, \theta)$  vedie k výsledku

$$\begin{aligned} \varepsilon(\varrho, \theta) &= 2m \sin^2 \theta a_{2m+4} - 2(m+2) \sin^2 \theta a_{2m} - m(m+2) \sin^2(m+1)\theta a_4 \\ &\quad + [m \sin(m+2)\theta + (m+2) \sin m\theta]^2 (a_2 - 1) \\ &\quad + m(m+2) \sin^2(m+1)\theta + 4 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Ignorujeme posledné nezáporné členy a aplikujeme lemma 2.5 aby sme dostali

$$\sin^{-2} \theta \varepsilon(\varrho, \theta) \geq 2ma_{2m+4} - 2(m+2)a_{2m} - m(m+2)(m+1)^2 a_4. \quad (2.17)$$

Teraz ukážeme, že pre  $\varrho \geq \varrho_*$  je pravá strana nerovnosti (2.17) nezáporná. Dôvod je rovnaký ako v záverečnej časti dôkazu lemma 2.7. Na základe lemma 2.4 pre  $\varrho \geq \varrho_*$  a pre každé  $j \geq 2$  máme  $a_{2j} \leq da_{2j+2}$ , kde môžeme zvoliť  $d = 0, 27$ . Pre  $\varrho \geq \varrho_*$  dostávame

$$a_4 \leq (0, 27)^m a_{2m+4}$$

a

$$2(m+2)a_{2m} = 2m \frac{m+2}{m} a_{2m} \leq 2m \frac{5}{3} (0, 27)^2 a_{2m+4} < 0, 243ma_{2m+4}.$$

Teda

$$\begin{aligned} 2ma_{2m+4} - 2(m+2)a_{2m} - m(m+2)(m+1)^2 a_4 &\geq \\ &\geq [1, 757 - (m+1)^2(m+2)(0, 27)^m]ma_{2m+4}. \end{aligned}$$

Výraz v hranatých zátvorkách je kladný pre  $m \geq 3$ . Tým je lemma ukázané.  $\square$

## 2.3 Funkcia $\mu_m(z)$

**Definícia 2.10** ([11]). Pre ľubovoľné prirodzené  $m \geq 2$  definujeme funkciu:

$$\mu_m(z) := \frac{z}{(z^2 - 1)U'_m(z)U'_{m+2}(z)}.$$

**Lemma 2.11** ([11]). Pre každé prirodzené  $m \geq 4$  a pre každé  $\varrho \geq \varrho_*$  platí

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\mu_m(z)| = |\mu_m(z_i)|, \quad (2.18)$$

kde

$$\varrho_* = \begin{cases} 3,88 & \text{ak } m \text{ je párne} \\ 3,72 & \text{ak } m \text{ je nepárne.} \end{cases}$$

*Dôkaz.* Použitím explicitného tvaru  $\mu_4$  a  $\mu_5$  a aplikovaním lemma 2.4 a lemma 2.7 dostaneme po zdĺhavých, avšak priamočiarych výpočtoch, že

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\mu_4(z)| = |\mu_4(z_i)| \quad \text{pre každé } \varrho \geq 3,88$$

a

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\mu_5(z)| = |\mu_5(z_i)| \quad \text{pre každé } \varrho \geq 3,72.$$

Dôkaz potom pokračuje indukciou. Za predpokladu že (2.18) platí pre nejaké prirodzené  $m - 2 \geq 4$ , aplikovaním lemma 2.7 dostaneme, že pre  $z \in \varepsilon_\varrho$  a pre  $\varrho \geq \varrho_*$  platí

$$\begin{aligned} |\mu_m(z)| &= \left| \frac{U'_{m-2}(z)}{U'_m(z)} \right| \left| \frac{U'_m(z)}{U'_{m+2}(z)} \right| |\mu_{m-2}(z)| \\ &\leq \left| \frac{U'_{m-2}(z_i)}{U'_m(z_i)} \right| \left| \frac{U'_m(z_i)}{U'_{m+2}(z_i)} \right| |\mu_{m-2}(z_i)| \\ &= |\mu_m(z_i)|. \end{aligned}$$

Tým je lemma dokázané. □

# Kapitola 3

## Hlavné dôkazy

V tejto kapitole uvediem hlavné tvrdenia a dôkazy.

**Definícia 3.1.** Pre ľubovoľné nezáporné celé číslo  $\sigma$  označme symbolom  $\pi_m^{(\sigma)}$   $m$ -tý ortonormálny polynóm vzhľadom k váhovej funkcii

$$w^{(\sigma)}(x) := (1 - x^2)^\sigma w(x),$$

symbolom  $c_m^{(\sigma)}$  označme koeficient u najvyššej mocniny polynómu  $\pi_m^{(\sigma)}$ . Bez ujmy na obecnosti predpokladáme, že  $c_m^{(\sigma)} > 0$ .

**Veta 3.2** ([10], veta 3.1). Jadro  $K_n$  Gaussovej kvadrátúrnej formuly príslušnej k symetrickej váhovej funkcii  $w$  na intervale  $(-1, 1)$  splňuje identitu

$$K_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{n+2\nu+2}}{c_{n+2\nu}} \frac{z}{\pi_{n+2\nu}(z)\pi_{n+2\nu+2}(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad (3.1)$$

kde  $c_k$  je koeficient u najvyššej mocniny ortonormálneho polynómu  $\pi_k$ .

*Dôkaz.* Z definície  $K_n(z)$  nám pre  $n \in \mathbb{N}$  vyplýva

$$K_n(z) - K_{n+2}(z) = \frac{1}{\pi_n(z)\pi_{n+2}(z)} \int_{-1}^1 \frac{\pi_{n+2}(z)\pi_n(x) - \pi_{n+2}(x)\pi_n(z)}{z - x} w(x) dx. \quad (3.2)$$

Nasledujúci rekurentný vzťah medzi ortonormálnymi polynómami

$$\pi_{\nu+1}(x) = \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} x \pi_\nu(x) - \frac{c_{\nu+1}c_{\nu-1}}{c_\nu^2} \pi_{\nu-1}(x), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

spolu s Christoffel-Darbouxovou formulou (viď Szegö [12]) dohromady dávajú

$$\begin{aligned} & \pi_{n+2}(z)\pi_n(x) - \pi_{n+2}(x)\pi_n(z) \\ &= \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} ((z-x)\pi_{n+1}(x)\pi_n(z) + z(\pi_{n+1}(z)\pi_n(x) - \pi_{n+1}(x)\pi_n(z))) \end{aligned}$$

$$= (z - x) \left( \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}} \pi_{n+1}(x) \pi_n(z) + z \frac{c_{n+2}}{c_n} \sum_{\nu=0}^n \pi_\nu(z) \pi_\nu(x) \right).$$

Ak toto dosadíme do (3.2) a zintegrujeme, dostaneme z ortonormality  $\pi_k$

$$K_n(z) - K_{n+2}(z) = \frac{c_{n+2}}{c_n} \frac{z}{\pi_n(z) \pi_{n+2}(z)}.$$

A teda pre  $m \geq 1$  platí

$$\begin{aligned} K_n(z) - K_{n+2m}(z) &= \sum_{\nu=0}^{m-1} (K_{n+2\nu}(z) - K_{n+2\nu+2}(z)) \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{c_{n+2\nu+2}}{c_{n+2\nu}} \frac{z}{\pi_{n+2\nu}(z) \pi_{n+2\nu+2}(z)}. \end{aligned}$$

Keďže funkcia  $f_z(x) := (z - x)^{-1}$  je spojitá pre  $x \in [-1, 1]$ ,  $z \notin [-1, 1]$ , tak dostávame, že

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K_{n+2m}(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} R_{n+2m}(f_z) = 0.$$

A teda pre  $m \rightarrow \infty$  dostávame vzťah (3.1). □

Základným pojmom pri dôkazoch viet 3.5 a 3.6 je nasledujúca rozšírená formula pre jadro  $K_n^{(\sigma)}(\cdot; w)$  zovšeobecnenej Gauss-Lobattovej kvadrátúrnej formuly (1.10).

**Veta 3.3.** *Jadro  $K_n^{(\sigma)}(\cdot; w)$  zovšeobecnenej Gauss-Lobattovej kvadrátúrnej formuly (1.10) prislúchajúcej k symetrickej váhovej funkcii  $w$  na intervale  $(-1, 1)$  má reprezentáciu*

$$K_n^{(\sigma)}(z; w) = (-1)^\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{n+2\nu+2}^{(\sigma)}}{c_{n+2\nu}^{(\sigma)}} \frac{z}{(z^2 - 1)^\sigma \pi_{n+2\nu}^{(\sigma)}(z) \pi_{n+2\nu+2}^{(\sigma)}(z)}, \quad (3.3)$$

$$z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

$\sigma$  je nezáporné číslo.

*Dôkaz vety 3.3.* Známym faktom je, že uzly  $\{x_{\nu,n}^{(\sigma)}\}_{\nu=1}^n$  zovšeobecnenej Gauss-Lobattovej kvadrátúrnej formuly (1.10) sú presne nulovými bodmi  $\pi_n^{(\sigma)}$ , kde  $\pi_n^{(\sigma)}$  je ortonormálny polynóm stupňa  $n$  príslušný k váhovej funkcii  $w^{(\sigma)}$ , kde  $w^{(\sigma)}(x) = (1 - x^2)^\sigma w(x)$ . Funkcie  $p_n = p_n^{(\sigma)}$  a  $q_n = q_n^{(\sigma)}$  sú v tomto prípade dané takto

$$p_n^{(\sigma)}(x) = (1 - x^2)^\sigma \pi_n^{(\sigma)}(x)$$

a

$$q_n^{(\sigma)}(z) = \int_{-1}^1 w_\sigma(x) \frac{\pi_n^{(\sigma)}(x)}{z - x} dx.$$

Pozorujeme, že

$$K_n^{(\sigma)}(z; w) = \frac{q_n^{(\sigma)}(z)}{p_n^{(\sigma)}(z)} = \frac{K_n^G(z; w^{(\sigma)})}{(1-z^2)^\sigma},$$

kde  $K_n^G(\cdot; w)$  je jadro Gaussovej kvadráturnej formuly na  $n$  bodoch príslušnej k váhovej funkcii  $w^{(\sigma)}(x)$ . Na dokončenie dôkazu stačí použiť presne rovnaké argumenty ako použil Schira v dôkaze [10, veta 3.1].  $\square$

**Poznámka 3.4.** Špeciálne prípady vety 3.3, v ktorých  $\sigma = 0$  a  $\sigma = 1$ , boli už dokázané Schirom (viď [10, veta 3.1] a [8, (4.13)]).

V špeciálnom prípade, kedy je  $\sigma = 1$  (tj. kedy  $Q_n^{(\sigma)}$  je obvyklá Gauss-Lobattová kvadrátúrna formula  $Q_{n+2}^{Lo}$ ) veta 3.3 hovorí, že

$$\begin{aligned} K_{n+2}^{Lo}(z; w) &= - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{n+2j+2}}{c_{n+2j}} \frac{z}{(z^2-1)\pi_{n+2j}(z)\pi_{n+2j+2}(z)} \\ &=: - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{n+2j+2}}{c_{n+2j}} \psi_{n+2j}(z), \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde  $\pi_m$  je  $m$ -tý ortogonálny polynóm príslušný k váhe  $(1-x^2)w(x)$  a  $c_m > 0$  je koeficient u jeho najvyššej mocniny. Konkrétne pre druhú Čebyševovu váhovú funkciu  $w_{1/2}(x) = \sqrt{1-x^2}$  dostávame

$$\begin{aligned} K_{n+2}^{Lo}(z; w_{1/2}) &= - \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \frac{z}{(z^2-1)U'_{n+2j+1}(z)U'_{n+2j+3}(z)} \\ &=: - \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \mu_{n+2j+1}(z) \end{aligned} \quad (3.5)$$

s pozitívnymi konštantami  $\gamma_j$ .

Pre jadro  $K_{n+2}^{Lo,d}(\cdot; w_{1/2})$  Gauss-Lobattovej kvadráturnej formuly s dvojitými koncovými uzlami príslušnej k prvej Čebyševovej váhovej funkcii, nám veta 3.3 hovorí, že

$$\begin{aligned} K_{n+2}^{Lo,d}(z; w_{-1/2}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \frac{z}{(z^2-1)^2 U'_{n+2j+1}(z)U'_{n+2j+3}(z)} \\ &=: \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \nu_{n+2j+1}(z) \end{aligned} \quad (3.6)$$

s pozitívnymi konštantami  $\delta_j$ .

Veľmi užitočnou vlastnosťou formuly (3.3) je, že namiesto skúmania  $K_n^{(\sigma)}(\cdot; w)$  môžeme skúmať jednotlivé výrazy vyskytujúce sa v jej rozšírení. Ak všetky tieto

výrazy nadobúdajú svoju maximálnu hodnotu v  $z_r$  (alebo v  $z_i$ ), potom je táto vlastnosť zdedená aj jadrom (a nadobúda svoju maximálnu hodnotu tamtiež). S pomocou vety (3.3) dokážeme nasledujúce vety.

**Veta 3.5.** *Nech  $K_{n+2}^{Lo}(\cdot; w)$  je jadro Gauss-Lobattovej kvadrátúrnej formuly (1.12) prislúchajúcej k symmetrickej váhovej funkcii  $w$  na intervale  $(-1, 1)$ .*

*Ak  $w(x)/\sqrt{1-x^2}$  je klesajúce na intervale  $(0, 1)$ , potom pre  $n \geq 3$*

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2}^{Lo}(z; w)| = |K_{n+2}^{Lo}(z_i; w)| \quad \text{pre všetky } \varrho \geq \varrho_*,$$

kde

$$\varrho_* = \begin{cases} 3,88 & \text{ak } n \text{ je nepárne} \\ 3,72 & \text{ak } n \text{ je párne.} \end{cases}$$

*Dôkaz vety 3.5.* Funkcie  $\psi_m(z)$  objavujúce sa vo vzorci (3.4) sa dajú vyjadriť ako

$$\psi_m(z) = \mu_{m+1}(z) \frac{U'_{m+1}(z)U'_{m+3}(z)}{\pi_m(z)\pi_{m+2}(z)}, \quad (3.7)$$

kde  $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ .

Porovnajme teraz jednotlivé členy objavujúce sa v rovniciach (3.4) a (3.5). Polynóm  $U'_m$  je ortogonálny vzhľadom k váhovej funkcii  $\tilde{w}(x) = (1-x^2)^{3/2}$  a polynóm  $\pi_m$  je ortogonálny vzhľadom k váhovej funkcii  $w^{(1)}(x) = (1-x^2)w(x)$ . Je predpoklad, že  $w^{(1)}(x)/\tilde{w}(x)$  je monotónne klesajúci na intervale  $(0, 1)$  a preto je výraz  $\tilde{w}(x)/w^{(1)}(x)$  monotónne rastúci na tomto intervale. Teda z lemma 2.2 odvodíme, že

$$\eta_m(z) := \frac{U'_{m+1}(z)U'_{m+3}(z)}{\pi_m(z)\pi_{m+2}(z)} = \prod_{j=1}^{m+1} \frac{z^2 - s_j^2}{z^2 - t_j^2}$$

kde  $s_j$  a  $t_j$  sú nulové body odpovedajúceho ortogonálneho polynómu stupňa  $n$ ,  $s_j := \tilde{z}_j^{(n)}$ ,  $t_j := z_j^{(n)}$  a kde

$$0 \leq t_j \leq s_j < 1 \quad (j = 1, \dots, m+1).$$

Aplikáciou lemma 2.3 na každý činiteľ v  $\eta_m$  dostaneme

$$\max_{x \in \varepsilon_\varrho} |\eta_m(z)| = |\eta_m(z_i)| \quad \text{pre každé } \varrho \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}). \quad (3.8)$$

Na základe lemma 2.11 dostávame pre  $m \geq 3$

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\mu_{m+1}(z)| = |\mu_{m+1}(z_i)| \quad (3.9)$$

pre každé  $\varrho \geq 3,88$  ak je  $m$  nepárne, resp. pre každé  $\varrho \geq 3,72$  ak  $m$  je párne. Skombinovaním posledných dvoch záverov dostávame pre  $m \geq 3$

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\psi_m(z)| = |\psi_m(z_i)| \quad \text{pre každé } \varrho \geq \varrho_*, \quad (3.10)$$

kde  $\varrho_*$  je definované rovnako ako vo vete 3.5. Zároveň z pozorovania, že nulové body  $\pi_m$  sú rozmiestnené symetricky vzhľadom k počítaku vyplýva, že

$$|\psi_{n+2\nu}(z_i)| = i(-1)^n \psi_{n+2\nu}(z_i). \quad (3.11)$$

Preto pre  $\varrho \geq \varrho_*$  z rovnice (3.4) vyplýva

$$\begin{aligned} |K_{n+2}^{Lo}(z; w)| &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{n+2\nu+2}}{c_{n+2\nu}} |\psi_{n+2\nu}(z)| \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{n+2\nu+2}}{c_{n+2\nu}} |\psi_{n+2\nu}(z_i)| \\ &= |K_{n+2}^{Lo}(z_i; w)|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tým je hotový dôkaz vety 3.5. □

**Veta 3.6.** *Nech  $w$  je symetrická váhová funkcia taká, že  $w(x)\sqrt{1-x^2}$  je rastúce na intervale  $(0, 1)$ . Potom pre jadro  $K_{n+2}^{Lo,d}(\cdot; w)$  Gauss-Lobattovej kvadrátúrnej formuly s dvojitémi koncovými uzlami máme*

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2}^{Lo,d}(z; w)| = |K_{n+2}^{Lo}(z_r; w)| \quad \text{pre všetky } \varrho \geq \varrho_* := \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}).$$

*Dôkaz vety 3.6.* Dôkaz je v podstate rovnaký ako v predchádzajúcom prípade. V tomto prípade však po dvojiciach porovnáme členy z výrazov (3.3) (so  $\sigma = 2$ ) a (3.6), pričom využijeme rovnosť

$$\psi_m(z) = \nu_{m+1}(z) \frac{U'_{m+1}(z)U'_{m+3}(z)}{\pi_m(z)\pi_{m+2}(z)}. \quad (3.13)$$

Tvrdenie potom priamo vyplýva z lemma 2.2, 2.3 a 2.9. □

# Kapitola 4

## Dôsledky a aplikácie

### 4.1 Gegenbauerova váha

Najdôležitejšou aplikáciou vety A a viet 3.5 a 3.6 je pre prípad Gegenbauerovej váhovej funkcie

$$w_\alpha(x) = (1 - x^2)^\alpha, \alpha > -1, \alpha \notin (-1/2, 1/2).$$

V tomto prípade

$$w_\alpha(x)\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\alpha+1/2}$$

a

$$w_\alpha(x)/\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\alpha-1/2},$$

takže okamžite dostávame nasledujúce dva dôsledky.

**Dôsledok 4.1.** Jadro  $K_{n+2}^{Lo}(\cdot; w_\alpha)$  Gauss-Lobattovej kvadráturnej formuly na  $(n+2)$  uzloch príslušnej ku Gegenbauerovej váhovej funkcii  $w_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha \notin (-1/2, 1/2)$  splňa na každej elipse  $\varepsilon_\varrho$ ,  $\varrho \geq \varrho_*$

$$\max_{x \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2}^{Lo}(z; w_\alpha)| = \begin{cases} |K_{n+2}^{Lo}(z_r; w_\alpha)| & \text{ak } -1 < \alpha \leq -\frac{1}{2}, n \geq 1 \\ |K_{n+2}^{Lo}(z_i; w_\alpha)| & \text{ak } \alpha \geq \frac{1}{2}, n \geq 3. \end{cases} \quad (4.1)$$

Parameter  $\varrho_*$  je definovaný rovnako ako vo Vete A (v prípade  $\alpha \in (-1, -1/2]$ ) alebo rovnako ako vo vete 3.5 (v prípade  $\alpha \geq 1/2$ ).

**Dôsledok 4.2.** Jadro  $K_{n+2}^{Lo,d}(\cdot; w_\alpha)$  Gauss-Lobattovej kvadráturnej formuly na  $(n+2)$  uzloch s dvojitými koncovými uzlami príslušnej ku Gegenbauerovej váhovej funkcii  $w_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha$ ,  $\alpha \notin (-1, -1/2]$  splňa na každej elipse  $\varepsilon_\varrho$ ,  $\varrho \geq \varrho_*$

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2}^{Lo,d}(z; w_\alpha)| = |K_{n+2}^{Lo,d}(z_r; w_\alpha)|. \quad (4.2)$$

Parameter  $\varrho_*$  je rovnaký ako vo vete 3.6.

## 4.2 Limitné prípady

Tvrdenia uvedené v dôsledkoch 4.1 a 4.2 môžu byť zosilnené pre limitné prípady  $\alpha = \pm 1/2$ . Pre jadro Gauss-Lobattovej kvadrátúrnej formuly príslušnej k prvej Čebyševovej váhe  $w_{-1/2}(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$  ukázal Gautschi ([1, veta 4.1]), že

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2}^{Lo}(z; w_{-1/2})| = K_{n+2}^{Lo}(z_r; w_{-1/2}) \quad \text{pre } \forall \varrho > 1.$$

Pre jadro  $K_{m+2}^{Lo}(z; w_{1/2})$  ukázal Schira [9], že pre  $n \geq 3$

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2}^{Lo}(z; w_{1/2})| = |K_{n+2}^{Lo}(z_i; w_{1/2})| \quad \text{pre } \forall \varrho > \varrho(n),$$

kde parameter  $\varrho(n)$  je definovaný ako jedinečný koreň istej nelineárnej rovnice a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(n) = 1.$$

To potvrdzuje isté empirické výsledky o chovaní  $|K_{n+2}^{Lo}(z; w_{1/2})|$  dosiahnuté v [1].

Pre jadro Gauss-Lobatto kvadrátúrnej formuly s dvojitými koncovými uzlami príslušnej k prvej Čebyševovej váhe, Gautschi a Li [3] ukázali, že

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2}^{Lo,d}(z; w_{-1/2})| = K_{n+2}^{Lo,d}(z_r; w_{-1/2}) \quad \text{pre } \forall \varrho > 1.$$

## 4.3 Konkrétne hodnoty

Obmedzenie kladené na  $\varrho$  je v znení vety 3.6 uvedené preto, aby zaistilo že lemma 2.3 platí. Schira ukázal v [10], že v určitom zmysle nemôže byť hodnota  $\varrho_* = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})$  v lemma 2.3 nahradená žiadnou menšou hodnotou.

Zlepšenie je však možné vo vete 3.5. Hodnoty  $\varrho_* = 3,88$  a  $\varrho_* = 3,72$  sú v skutočnosti najmenšími možnými hodnotami, pre ktoré máme dôkaz, že  $\mu_4$  a  $\mu_5$  dosahujú maximálnu absolútnu hodnotu pre  $z = z_i$  pričom  $\varrho \geq \varrho_*$ .

Dalo by sa skúsiť vyjadriť kritické parametre  $\varrho(m)$  zabezpečením, že

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\mu_{m+1}(z)| = |\mu_{m+1}(z_i)| \quad \text{pre } \forall \varrho \geq \varrho(m) \quad (4.3)$$

ako riešenie istých rovníc, ako bolo učené v [9]. Iný spôsob odhadu hornej hranice pre  $\varrho(m)$  je priama aplikácia lemma 2.4 a 2.5 pre  $|\mu_{m+1}(z)|$ . Každopádne vyzerajú byť oba prístupy pomerne pracné.

Na druhej strane, naša metóda dôkazu implikuje, že ak je (4.3) splnené pre nejaké pevné  $m \geq 3$  s  $\varrho(m) \geq 2,3$ , potom

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |\mu_{m+2j+1}(z)| = |\mu_{m+2j+1}(z_i)| \quad \text{pre } \forall \varrho \geq \varrho(m), j = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Následne pre  $n \geq 3$  a váhovú funkciu  $w$  splňujúcu predpoklady vety 3.5 máme

$$\max_{z \in \varepsilon_\varrho} |K_{n+2j}^{Lo}(z_i; w)| = |K_{n+2j}^{Lo}(z_i; w)| \quad \text{pre } \forall \varrho \geq \varrho(n), j = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Rovnaké dôsledky platia pre ten druhý prípad v dôsledku 4.1.

V tabuľke 4.1 sú uvedené číselné hodnoty  $\varrho(n)$  pre  $3 \leq n \leq 30$ ,  $n = 60$ ,  $n = 100$ .

$n$	3	4	5	6	7
$\varrho(n)$	3,8318	3,2308	3,0022	2,8791	2,8000
$n$	8	9	10	11	12
$\varrho(n)$	2,7447	2,7036	2,6718	2,6464	2,6256
$n$	13	14	15	16	17
$\varrho(n)$	2,6083	2,5937	2,5811	2,5702	2,5607
$n$	18	19	20	21	22
$\varrho(n)$	2,5522	2,5447	2,5380	2,5319	2,5264
$n$	23	24	25	26	27
$\varrho(n)$	2,5214	2,5168	2,5126	2,5087	2,5052
$n$	28	29	30	60	100
$\varrho(n)$	2,5019	2,4988	2,4959	2,4548	2,4385

Tabuľka 4.1: Hodnoty  $\varrho(n)$

## Kapitola 5

# Príklady

### Príklad 1

V tabuľke 5.1 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sqrt{x}$ , presné riešenie je 0,6666666666666667. Grafy chýb sú znázornené v obrázku 5.1. Keďže nemáme konvergenciu v bode 1 potrebujeme viacej uzlov. Pre ukážku uvádzam výsledok pri 100 uzloch. Výsledok je rovný 0,666666262189992, chyba je rovná 4,044766747091089e-007, relatívna chyba je 6,067150120636633e-007.

### Príklad 2

V tabuľke 5.2 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sqrt{x^3}$ . Grafy chýb sú znázornené v obrázku 5.2. Presné riešenie je 0.4.

### Príklad 3

V tabuľke 5.3 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}$ . Grafy chýb sú znázornené v obrázku 5.3. Presné riešenie je 0.693147180559945.

### Príklad 4

V tabuľke 5.4 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}$ . Presné riešenie je 0,866972987339911.

### Príklad 5

V tabuľke 5.5 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+\exp^x}$ . Už pri deviatich uzloch dostávame presné riešenie. Presné riešenie je 0,379885493041722.

### Príklad 6

V tabuľke 5.6 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin 10\pi x}$ . Presné riešenie je 1,154700538379252. Pre ukážku uvediem aj výsledok pri 100 uzloch.

Výsledok pri 100 uzloch je 1,154700536689560, chyba 1,689691719874986e-009, relatívna chyba je 1,463315953975958e-009.

### **Príklad 7**

V tabuľke 5.7 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \log(x+1)$ . Presné riešenie je 0,386294361119891.

### **Príklad 8**

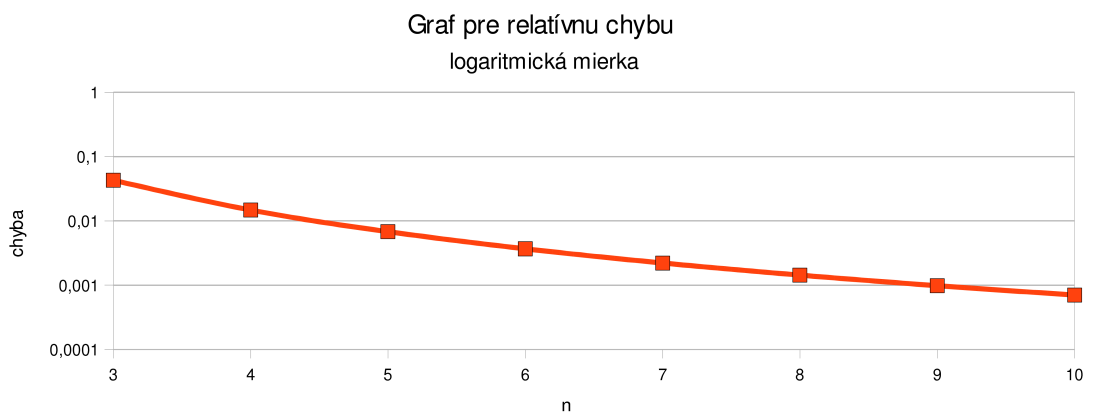
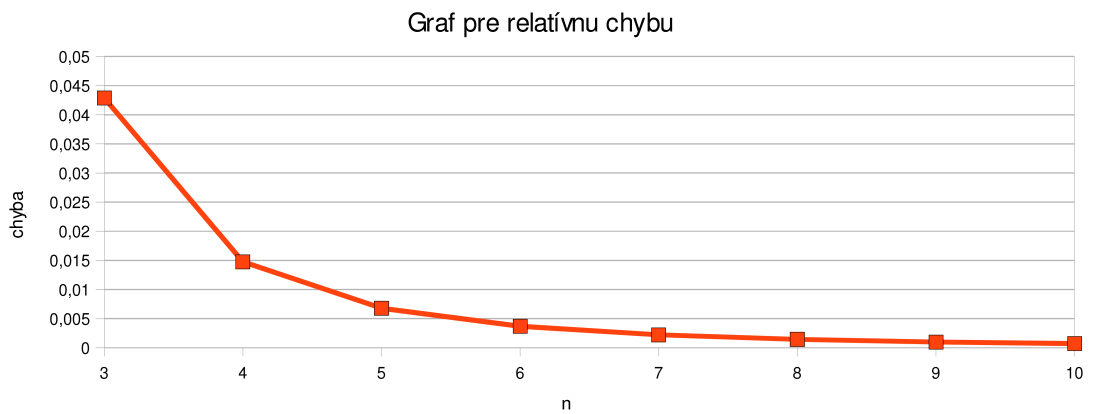
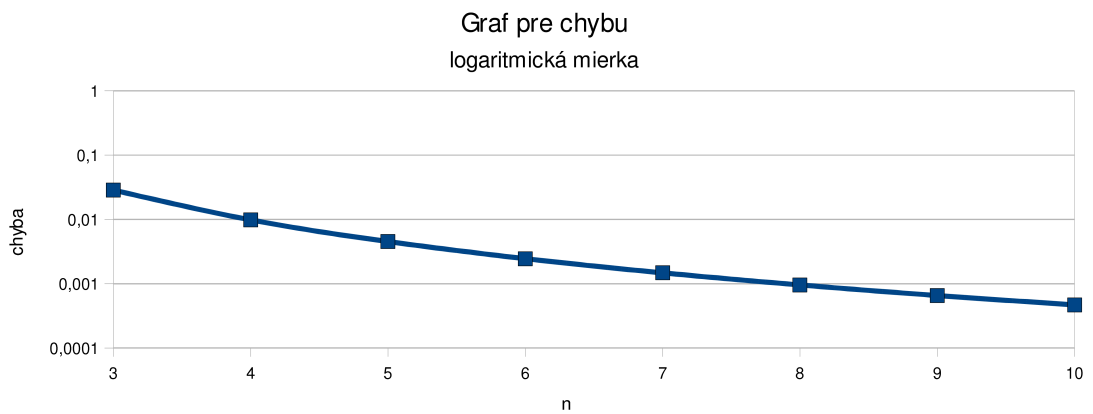
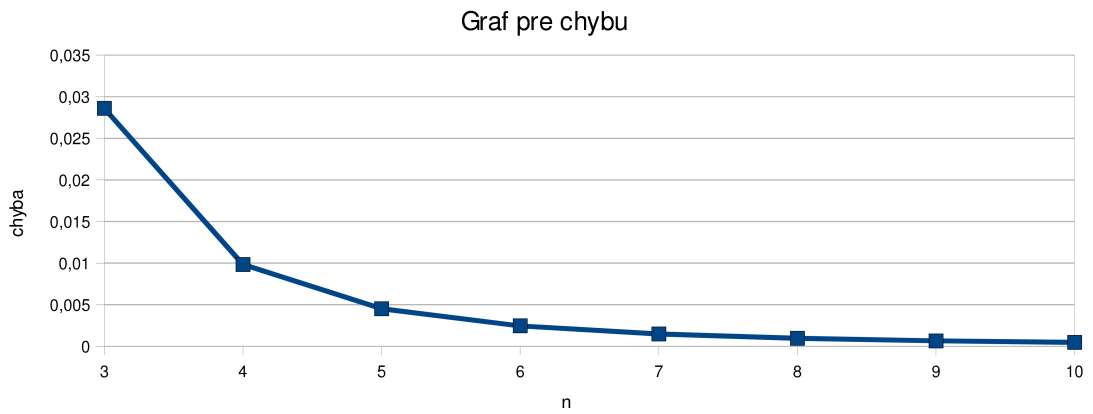
V tabuľke 5.8 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sin(\pi x)$ . Presné riešenie je 0,615626470386014.

### **Príklad 9**

V tabuľke 5.9 sú uvedené hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \tan(x)$ . Presné riešenie je 0,615626470386014.

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	0	0.638071187457698
	0,5	0.666666666666667	0.707106781186548	0.028595479208968
	1	0.166666666666667	1	0.042893218813452
4	0	0.083333333333333	0	0.656825800196322
	0.276393202250021	0.416666666666667	0.525731112119134	0.009840866470344
	0.723606797749979	0.416666666666667	0.850650808352040	0.014761299705516
	1	0.083333333333333	1	
5	0	0.05	0	0.662141410481317
	0.172673164646011	0.272222222222222	0.415539606591251	0.004525256185350
	0.5	0.355555555555555	0.707106781186548	0.006787884278024
	0.827326835353989	0.272222222222222	0.909575085055648	
1	0.05	1		
6	0	0.033333333333333	0	0.664216407722334
	0.117472338035268	0.189237478148923	0.342742378522510	0.002450258944332
	0.357384241759677	0.277429188517743	0.597816227414142	0.003675388416499
	0.642615758240323	0.277429188517743	0.801633181848358	
	0.882527661964732	0.189237478148923	0.939429434265678	
	1	0.033333333333333	1	
7	0	0.023809523809524	0	0.665191934912815
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.291355542011331	0.001474731753852
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.515340279101724	0.002212097630778
	0.5	0.243809523809524	0.707106781186548	
	0.734424396735357	0.215872690604931	0.856985645583027	
	0.915111948139284	0.138413023680783	0.956614837925528	
	1	0.023809523809524	0	
8	0	0.017857142857143	0	0.665710596835615
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.253238870920711	9.560698310521199e-004
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.451829513515252	0.001434104746578
	0.395350391048761	0.206229397329352	0.628768948858609	
	0.604649608951239	0.206229397329352	0.777592186786390	
	0.795850090716571	0.170561346241752	0.892104304841408	
	0.935870074254803	0.105352113571753	0.967403780359992	
	1	0.017857142857143	1	
	0	0.013888888888889	0	0.666011683706075
0.050121002294270	0.082747680780403	0.223877203605615	6.549829605914104e-004	
0.161406860244631	0.137269356250081	0.401754726474538	9.824744408871156e-004	
0.318441268086911	0.173214255486523	0.564306005715792		
0.5	0.185759637188209	0.707106781186548		
0.681558731913089	0.173214255486523	0.825565704176893		
0.838593139755369	0.137269356250081	0.915747312174799		
0.949878997705730	0.082747680780403	0.974617359636965		
1	0.013888888888889	1		
10	0	0.011111111111111	0	0.666198408623221
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.200581768655007	4.682580434457462e-004
	0.130613067447247	0.112444671031563	0.361404299154351	7.023870651686193e-004
	0.261037525094778	0.146021341839842	0.510918315481817	
	0.417360521166807	0.163769880591949	0.646034458188421	
	0.582639478833194	0.163769880591949	0.763308246276164	
	0.738962474905222	0.146021341839842	0.859629265965987	
	0.869386932552753	0.112444671031563	0.932409208745148	
	0.959766954083229	0.066652995425535	0.979676964148504	
	1	0.011111111111111	1	

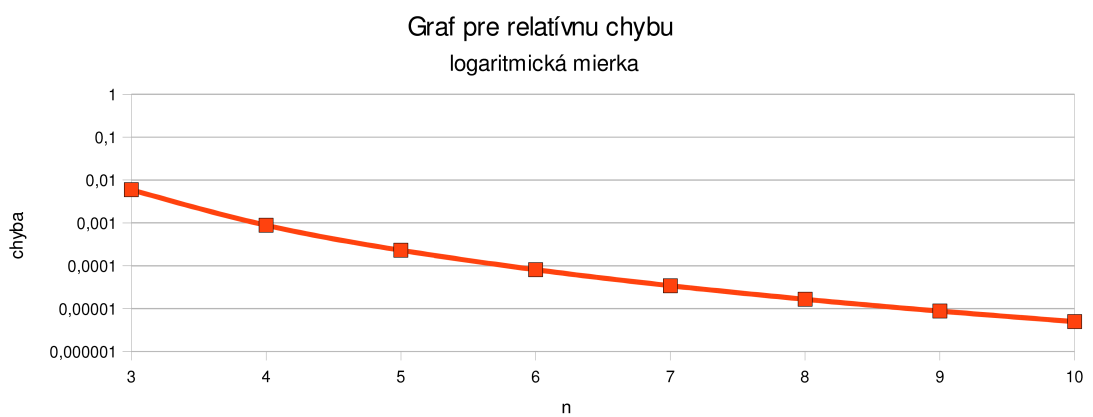
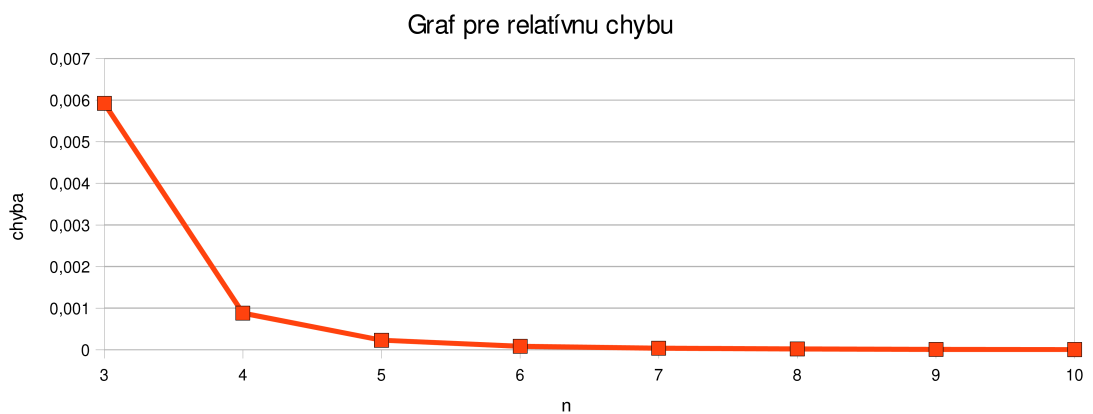
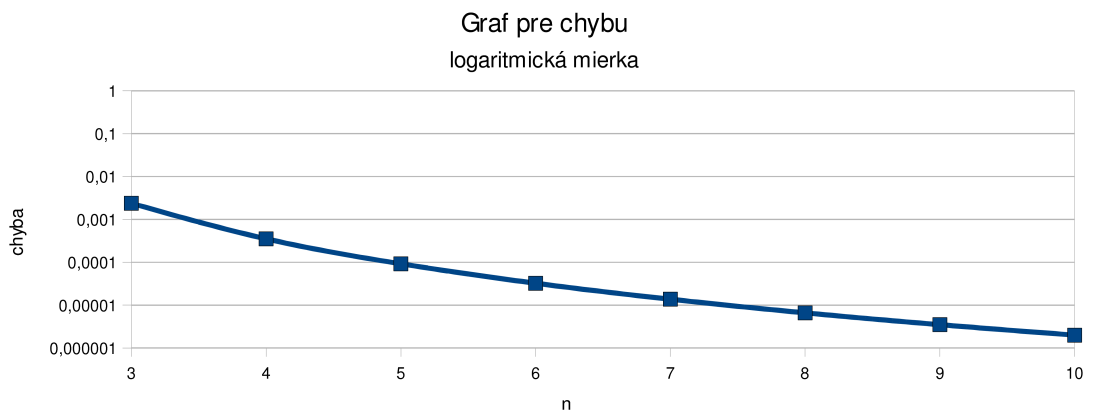
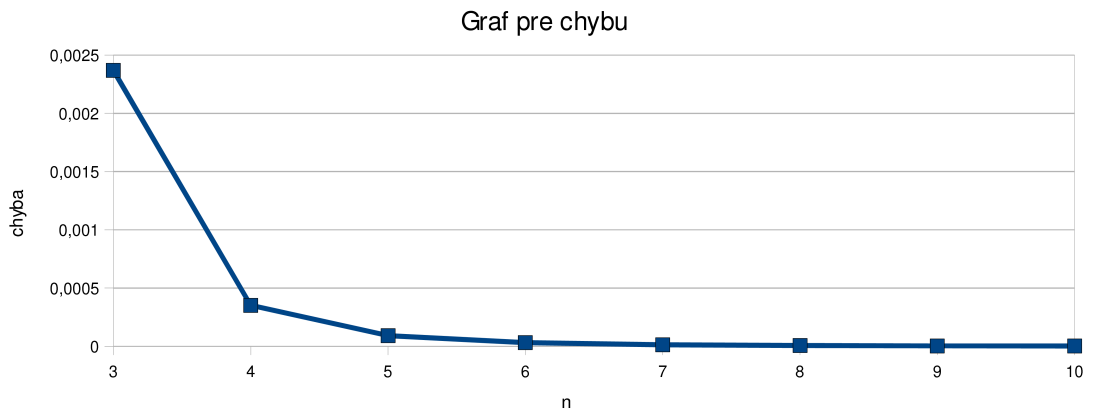
Tabuľka 5.1: Príklad 1. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sqrt{x}$



Obr. 5.1: Príklad 1. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sqrt{x}$

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	0	0.402368927062183
	0.5	0.666666666666667	0.353553390593274	0.002368927062183
	1	0.166666666666667	1	0.005922317655456
4	0	0.083333333333333	0	0.400352172098384
	0.276393202250021	0.416666666666667	0.145308505601072	3.521720983844512e-004
	0.723606797749979	0.416666666666667	0.61536707435051	8.804302459611280e-004
5	0	0.05	0	0.400092051997319
	0.172673164646011	0.272222222222222	0.071752538905870	9.205199731898706e-005
	0.5	0.355555555555555	0.353553390593274	2.301299932974676e-004
6	0	0.033333333333333	0	0.400032368846301
	0.117472338035268	0.189237478148923	0.040262748548808	3.236884630097858e-005
	0.357384241759677	0.277429188517743	0.213650099146034	8.092211575244646e-005
7	0	0.023809523809524	0	0.400013711858694
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.024732604360165	1.371185869386560e-005
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.136861805509010	3.427964673466399e-005
8	0	0.017857142857143	0	0.400006606445834
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.016240189987943	6.606445834167474e-006
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.092240954195714	1.651611458541868e-005
9	0	0.013888888888889	0	0.400003498925997
	0.050121002294270	0.082747680780403	0.011220949835552	3.498925997047486e-006
	0.161406860244631	0.137269356250081	0.064845968988696	8.747314992618716e-006
10	0	0.011111111111111	0	0.400001992722332
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.008070015508364	1.992722331589647e-006
	0.130613067447247	0.112444671031563	0.047204124101172	4.981805828974117e-006
	0.261037525094778	0.146021341839842	0.133368852598966	
	0.417360521166807	0.163769880591949	0.269629278161235	
	0.582639478833194	0.163769880591949	0.444733518799423	
	0.738962474905222	0.146021341839842	0.635233769879186	
	0.869386932552753	0.112444671031563	0.810624381874883	
	0.959766954083229	0.066652995425535	0.940261575866315	
	1	0.011111111111111	1	

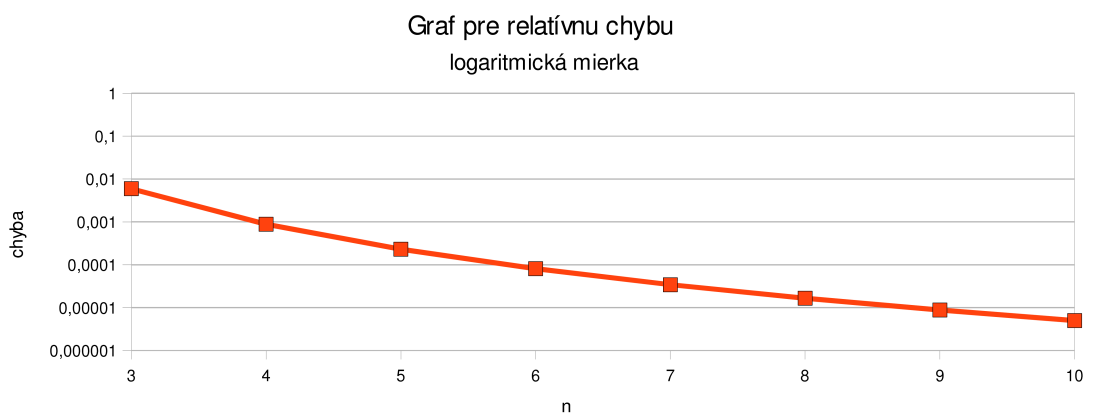
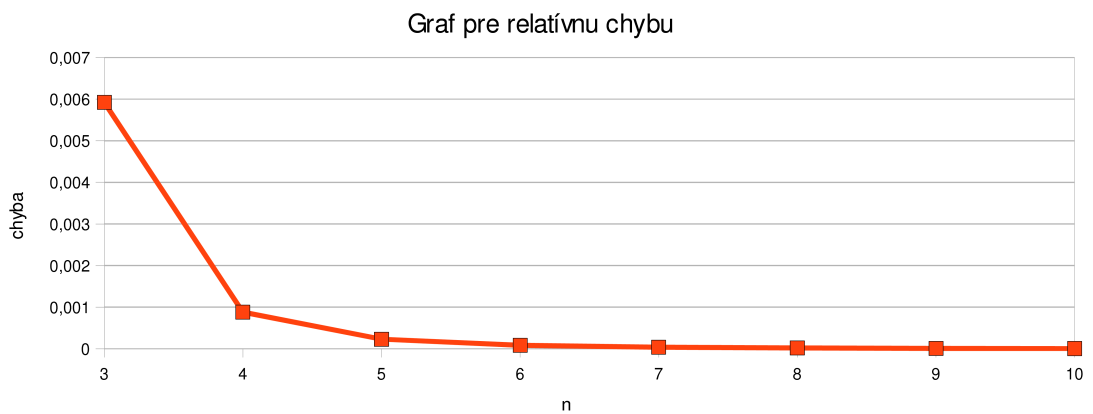
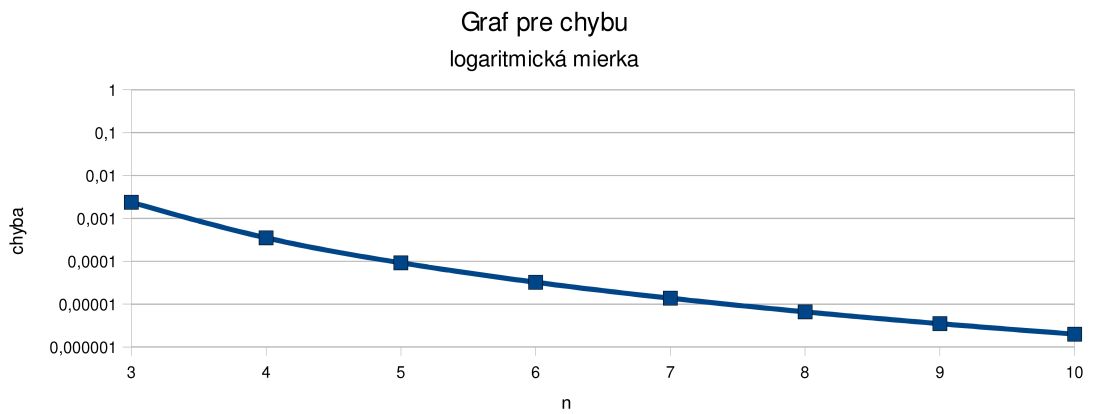
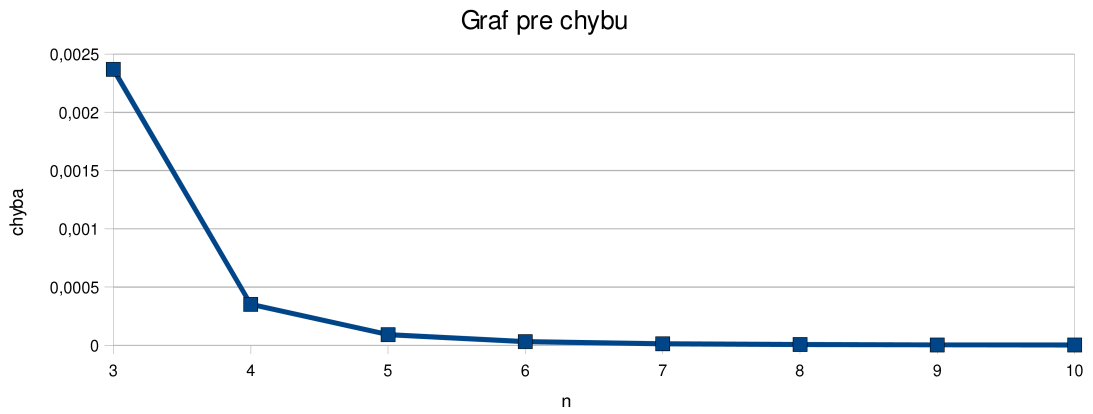
Tabuľka 5.2: Príklad 2. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sqrt{x^3}$



Obr. 5.2: Príklad 2. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sqrt{x^3}$

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	1	0.694444444444445
	0.5	0.666666666666667	0.666666666666667	0.001297263884499
	1	0.166666666666667	0.5	0.001871556172891
4	0	0.083333333333333	1	0.693181818181818
	0.,276393202250021	0.,416666666666667	0.783457635340900	3.463762187283503e-005
	0.723606797749979	0.416666666666667	0.580178728295464	4.997152530412619e-005
5	0	0.05	1	0.693148148148148
	0.172673164646011	0.272222222222222	0.852752523165195	9.675882028936655e-007
	0.5	0.355555555555555	0.666666666666667	1.395934701937356e-006
6	0	0.033333333333333	1	0.693147208121827
	0.117472338035268	0.189237478148923	0.894876737403803	2.756188210994992e-008
	0.357384241759677	0.277429188517743	0.736711072101166	3.976339063759099e-008
7	0	0.023809523809524	1	0.693147181353161
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.921754090926596	7.932160484003248e-010
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.790154296132470	1.144368859380689e-009
8	0	0.017857142857143	1	0.693147180582913
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.939734872412044	2.296796086653785e-011
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.830461383828102	3.313576324148594e-011
9	0	0.013888888888889	1	0.693147180560613
	0.050121002294270	0.082747680780403	0.952271212379557	6.675771047071066e-013
	0.161406860244631	0.137269356250081	0.861024705665478	9.631101783719549e-013
10	0	0.011111111111111	1	0.693147180559965
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.961323045759123	1.942890293094024e-014
	0.130613067447247	0.112444671031563	0.884475890817225	2.802998190838053e-014

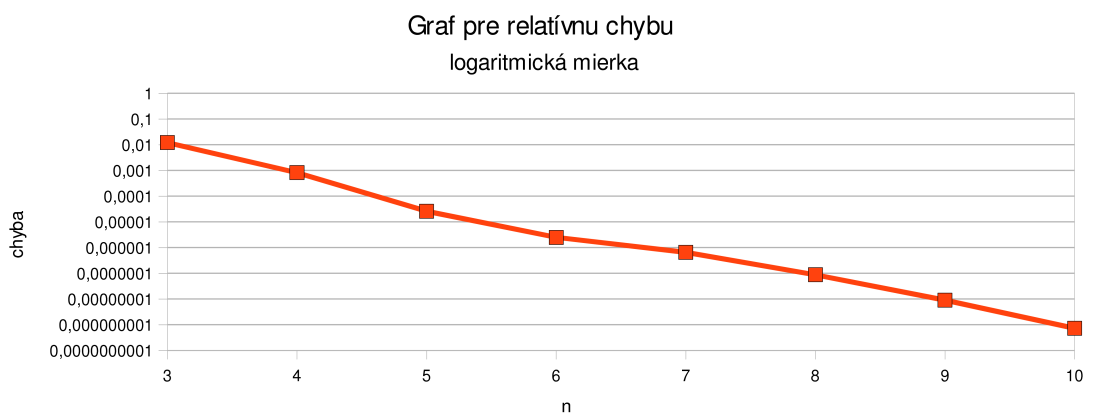
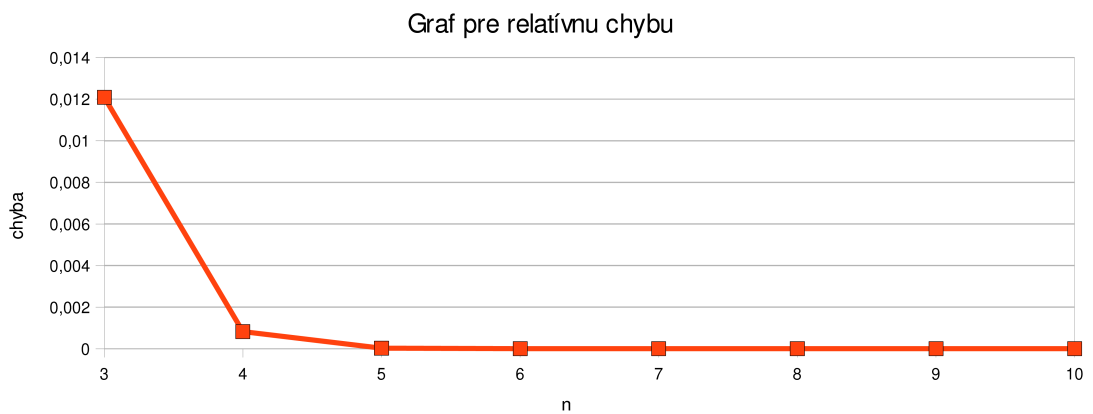
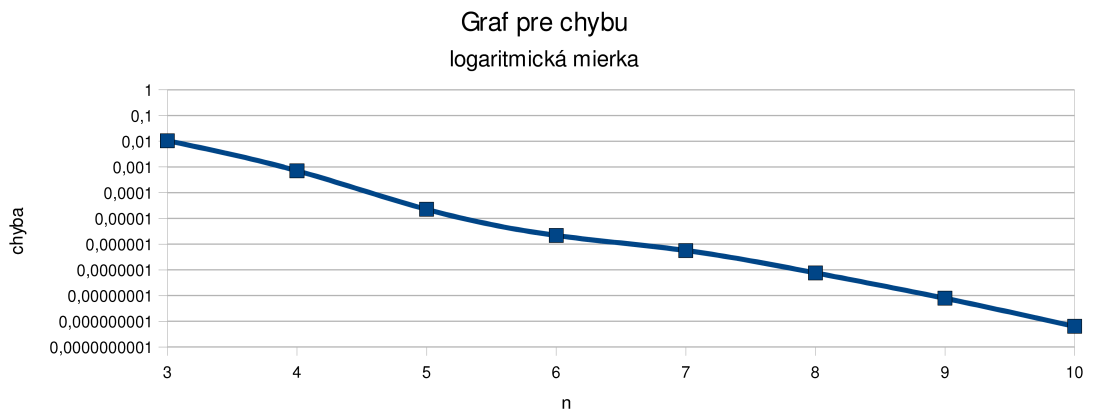
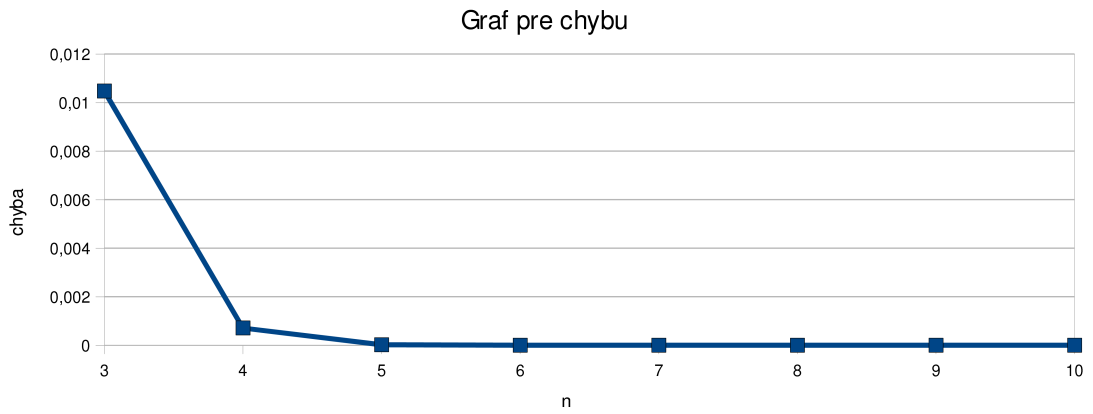
Tabuľka 5.3: Príklad 3. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}$



Obr. 5.3: Príklad 3. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}$

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	1	0.877450980392157
	0.5	0.666666666666667	0.941176470588235	0.010477993052246
	1	0.166666666666667	0.5	0.012085720322608
4	0	0.083333333333333	1	0.866260923845193
	0.276393202250021	0.416666666666666	0.994197939021526	7.120634947175297e-004
	0.723606797749979	0.416666666666667	0.784828278206939	8.213214311351474e-004
5	0	0.05	1	0.866995455025309
	0.172673164646011	0.272222222222222	0.999111794455112	2.246768539748700e-005
	0.5	0.355555555555555	0.941176470588235	2.591509277171767e-005
6	0	0.033333333333333	1	0.866975159676507
	0.117472338035268	0.189237478148923	0.999809603152185	2.172336595496205e-006
	0.357384241759677	0.277429188517743	0.983948560318065	2.505656608934812e-006
7	0	0.023809523809524	1	0.866972422064408
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.999948076528989	5.652755028506817e-007
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.995050086060191	6.520105137128755e-007
8	0	0.017857142857143	1	0.866973063707680
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.999983086417634	7.636776888642061e-008
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.998266024107047	8.808552284972101e-008
9	0	0.013888888888889	1.000000000000000	0.866972979515231
	0.050121002294270	0.082747680780403	0.999993689318700	7.824680237078496e-009
	0.161406860244631	0.137269356250081	0.999321744544741	9.025287236556889e-009
10	0	0.011111111111111	1.000000000000000	0.866972987974086
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.99997379823703	6.341744906990243e-010
	0.130613067447247	0.112444671031563	0.999709048809183	7.314812571552310e-010

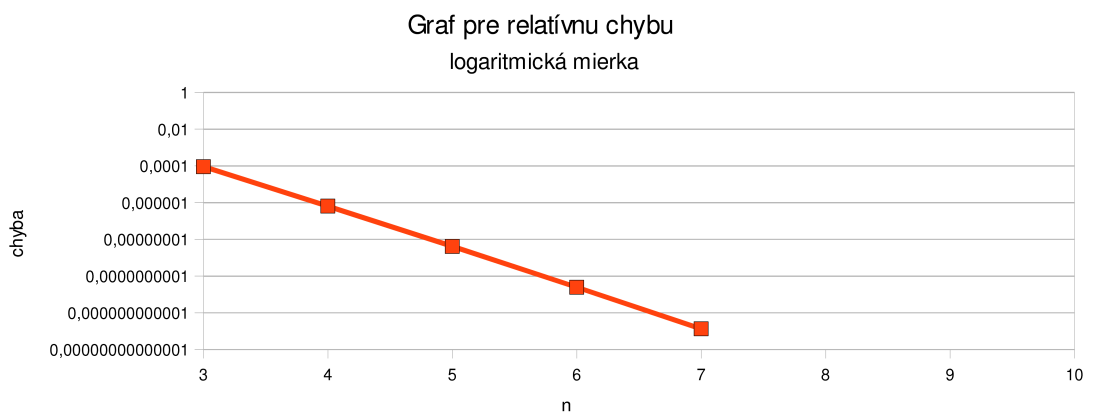
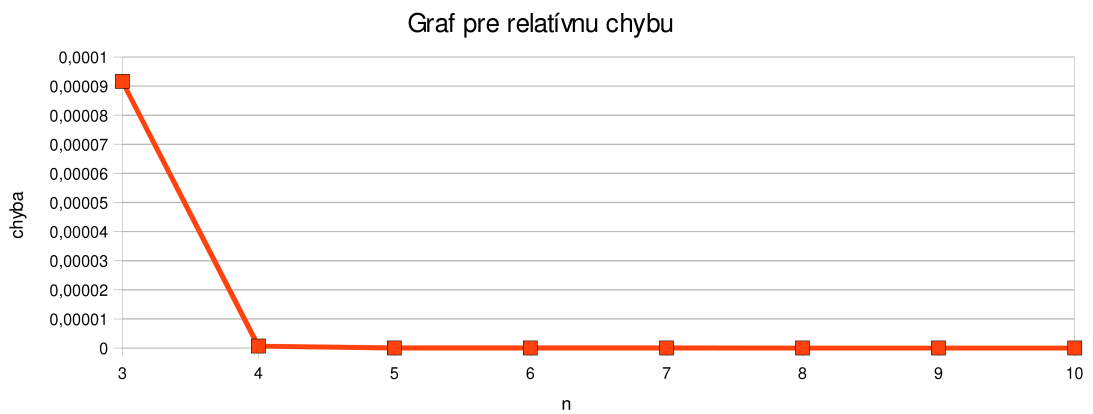
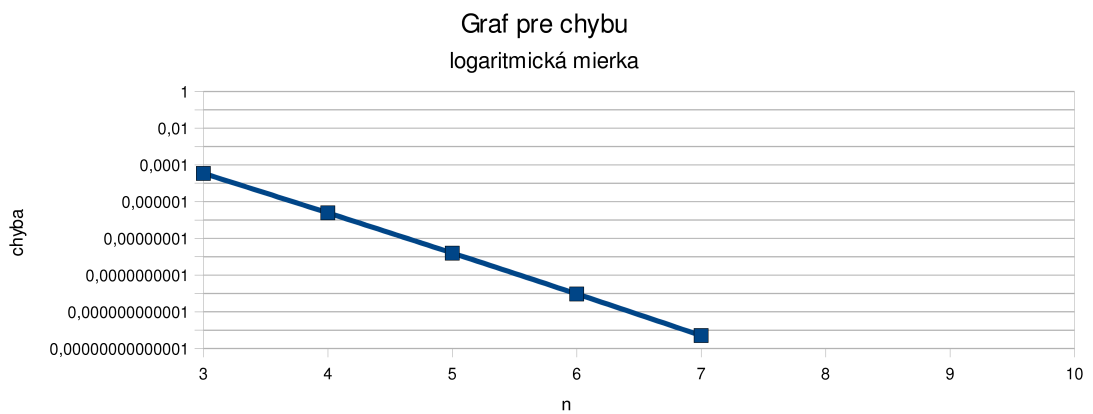
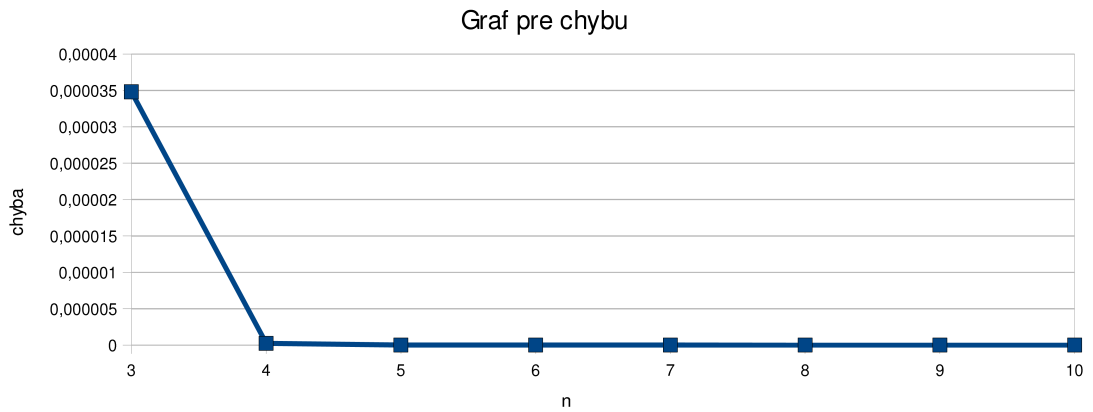
Tabuľka 5.4: Príklad 4. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}$



Obr. 5.4: Príklad 4. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}$

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	0.500000000000000	0.379850682760429
	0.500000000000000	0.666666666666667	0.377540668798145	3.481028129304065e-005
	1.000000000000000	0.166666666666667	0.268941421369995	9.163361573593299e-005
4	0	0.083333333333333	0.500000000000000	0.379885738437400
	0.276393202250021	0.416666666666667	0.431338251483823	2.453956772230370e-007
	0.723606797749979	0.416666666666667	0.326599236491937	6.459727515735523e-007
5	0	0.050000000000000	0.500000000000000	0.379885491455087
	0.172673164646011	0.272222222222222	0.456938648889610	1.586635267614156e-009
	0.500000000000000	0.355555555555555	0.377540668798145	4.176614523787296e-009
6	0	0.033333333333333	0.500000000000000	0.379885493051153
	0.117472338035268	0.189237478148923	0.470665641636557	9.431011527283317e-012
	0.357384241759677	0.277429188517743	0.411592914400775	2.482593228756834e-011
7	0	0.023809523809524	0.500000000000000	0.379885493041671
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.478790721644165	5.118128143521972e-014
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.433993598734253	1.347281809195028e-013
8	0	0.017857142857143	0.500000000000000	0.379885493041723
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.483973010966773	2.220446049250313e-016
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.449139045220005	5.845040386963246e-016
9	0	0.013888888888889	0.500000000000000	0.379885493041722
	0.050121002294270	0.082747680780403	0.487472371886709	0
	0.161406860244631	0.137269356250081	0.459735661471326	0
10	0	0.011111111111111	0.500000000000000	0.379885493041722
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.489943095075187	0
	0.130613067447247	0.112444671031563	0.467393075525151	0

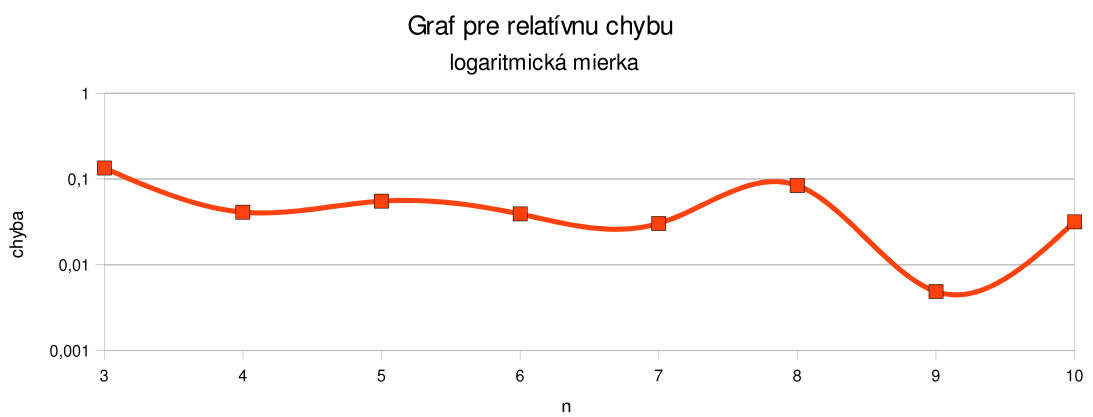
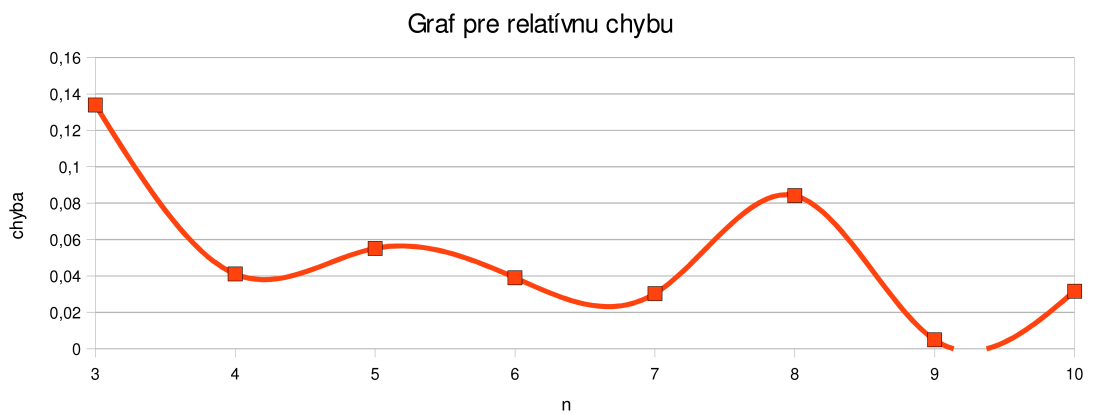
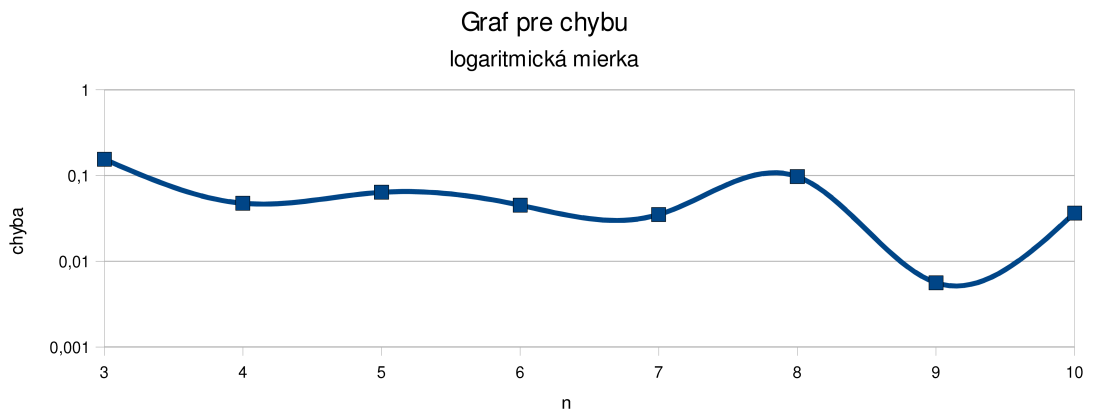
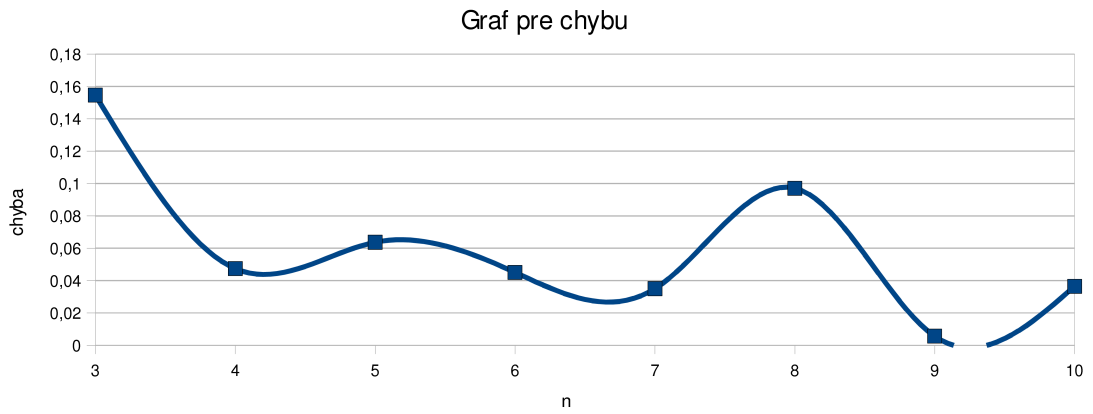
Tabuľka 5.5: Príklad 5. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+\exp^x}$



Obr. 5.5: Príklad 5. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+\exp^x}$

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	1.000000000000000	1
	0.500000000000000	0.666666666666667	1.000000000000000	0.154700538379251
	1.000000000000000	0.166666666666667	1.000000000000001	0.133974596215561
4	0	0.083333333333333	1.000000000000000	1.107299687118235
	0.276393202250021	0.416666666666667	0.747526539075721	0.047400851261016
	0.723606797749979	0.416666666666667	1.509992710008042	0.041050341353048
	1.000000000000000	0.083333333333333	1.000000000000001	
5	0	0.050000000000000	1.000000000000000	1.091002251063283
	0.172673164646011	0.272222222222222	1.608831391065400	0.063698287315968
	0.500000000000000	0.355555555555555	1.000000000000000	0.055164334993189
	0.827326835353989	0.272222222222222	0.725462592432374	
	1.000000000000000	0.050000000000000	1.000000000000001	
6	0	0.033333333333333	1.000000000000000	1.199782809144278
	0.117472338035268	0.189237478148923	1.352957898194310	0.045082270765027
	0.357384241759677	0.277429188517743	1.947822601282171	0.039042391742802
	0.642615758240323	0.277429188517743	0.672673088387074	
	0.882527661964732	0.189237478148923	0.793097702160029	
	1.000000000000000	0.033333333333333	1.000000000000001	
7	0	0.023809523809524	1.000000000000000	1.119688596040201
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.813960624485459	0.035011942339050
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.693805628592267	0.030321231501453
	0.500000000000000	0.243809523809524	1.000000000000000	
	0.734424396735357	0.215872690604931	1.789952215608540	
	0.915111948139284	0.138413023680783	1.296278197018234	
	1.000000000000000	0.023809523809524	1.000000000000001	
8	0	0.017857142857143	1.000000000000000	1.057606335745498
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.688923108356571	0.097094202633754
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.938965271762983	0.084086046041025
	0.395350391048761	0.206229397329352	1.078488553434936	
	0.604649608951239	0.206229397329352	0.932160668548334	
	0.795850090716571	0.170561346241752	1.069521135455535	
	0.935870074254803	0.105352113571753	1.823289682107881	
	1.000000000000000	0.017857142857143	1.000000000000001	
9	0	0.013888888888889	1.000000000000000	1.160320038327635
	0.050121002294270	0.082747680780403	0.666668272294798	0.005619499948383
	0.161406860244631	0.137269356250081	1.880537567573823	0.004866629711865
	0.318441268086911	0.173214255486523	1.376917093462726	
	0.500000000000000	0.185759637188209	1.000000000000000	
	0.681558731913089	0.173214255486523	0.785089664534662	
	0.838593139755369	0.137269356250081	0.681088878616577	
	0.949878997705730	0.082747680780403	1.999985549486028	
	1.000000000000000	0.013888888888889	1.000000000000001	
10	0	0.011111111111111	1.000000000000000	1.191195167253331
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.677210053039438	0.036494628874079
	0.130613067447247	0.112444671031563	1.695183953068155	0.031605275706638
	0.261037525094778	0.146021341839842	0.680160881260397	
	0.417360521166807	0.163769880591949	0.794042327907693	
	0.582639478833194	0.163769880591949	1.350217728103693	
	0.738962474905222	0.146021341839842	1.887648629663731	
	0.869386932552753	0.112444671031563	0.709172821772101	
	0.959766954083229	0.066652995425535	1.910755178456849	
	1.000000000000000	0.011111111111111	1.000000000000001	

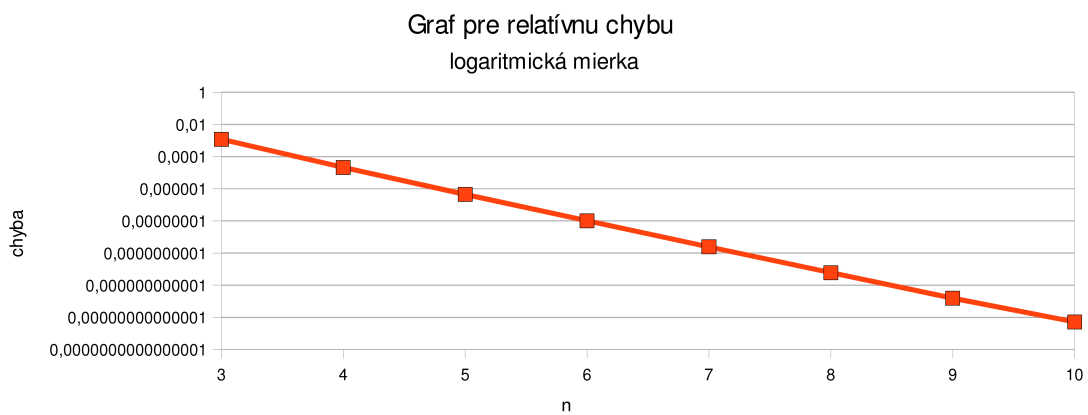
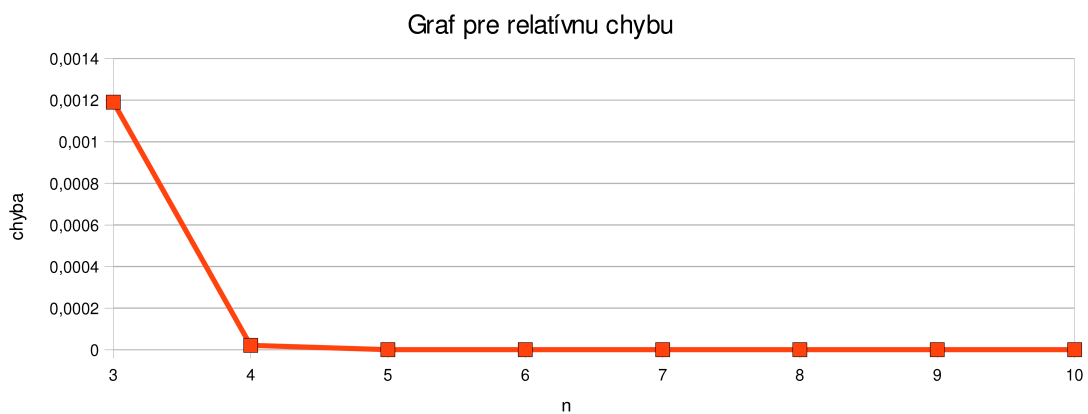
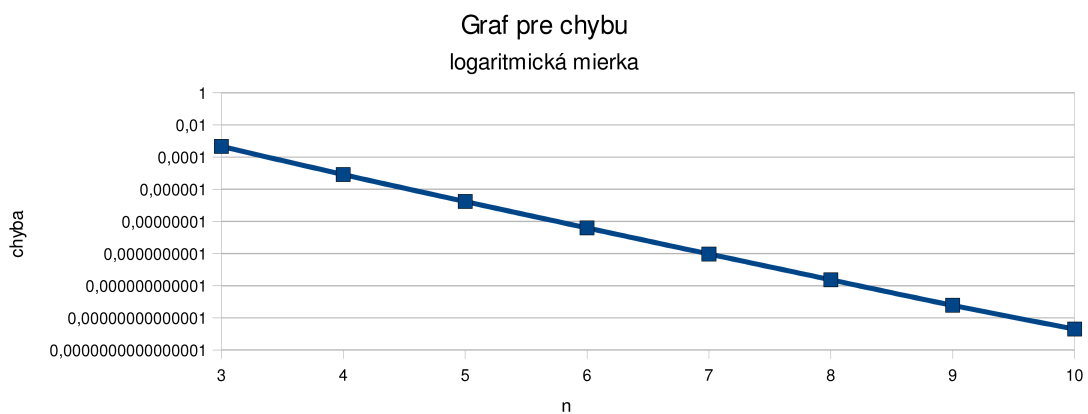
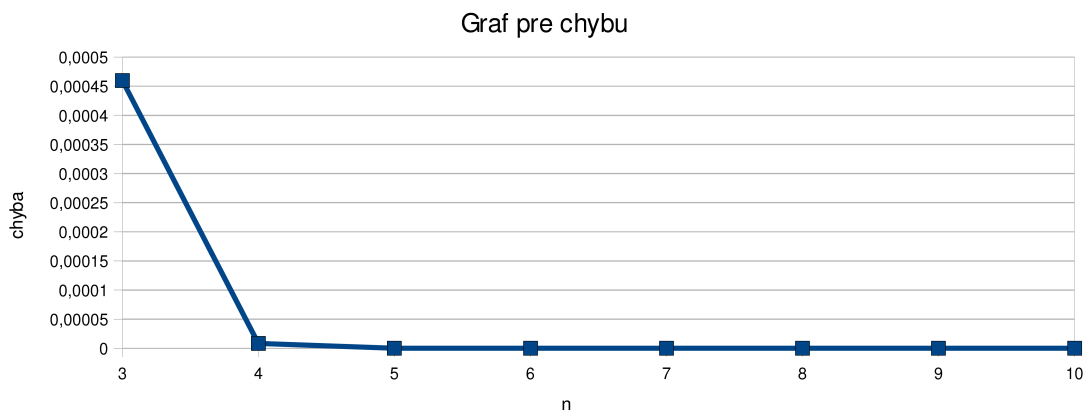
Tabuľka 5.6: Príklad 6. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin 10\pi x}$



Obr. 5.6: Príklad 6. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \frac{2}{2+\sin 10\pi x}$

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	0	0.385834602165434
	0.500000000000000	0.666666666666667	0.405465108108164	4.597589544568237e-004
	1.000000000000000	0.166666666666667	0.693147180559945	0.001190177752334
4	0	0.083333333333333	0	0.386286165198441
	0.276393202250021	0.416666666666667	0.244038289687009	8.195921449294374e-006
	0.723606797749979	0.416666666666667	0.544419070677261	2.121677734444247e-005
5	0	0.050000000000000	0	0.386294189412555
	0.172673164646011	0.272222222222222	0.159285898830891	1.717073351836795e-007
	0.500000000000000	0.355555555555555	0.405465108108164	4.444986840757644e-007
6	0	0.033333333333333	0	0.386294357208097
	0.117472338035268	0.189237478148923	0.111069293763213	3.911793500233074e-009
	0.357384241759677	0.277429188517743	0.305559496084785	1.012645768085392e-008
7	0	0.023809523809524	0	0.386294361026103
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.081476803660650	9.378753329514211e-011
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.235527041031801	2.427877358169206e-010
8	0	0.017857142857143	0	0.386294361117564
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.062157494127332	2.327082970765559e-012
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.185773848507600	6.024118405506116e-012
9	0	0.013888888888889	0	0.386294361119831
	0.050121002294270	0.082747680780403	0.048905397810038	5.917488721252084e-014
	0.161406860244631	0.137269356250081	0.149632080813372	1.531859979549515e-013
10	0	0.011111111111111	0	0.386294361119889
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.039444770662802	1.554312234475219e-015
	0.130613067447247	0.112444671031563	0.122760023167891	4.023647225833622e-015
	0.261037525094778	0.146021341839842	0.231934814743646	
	0.417360521166807	0.163769880591949	0.348796354012471	
	0.582639478833194	0.163769880591949	0.459094009435463	
	0.738962474905222	0.146021341839842	0.553288656591437	
	0.869386932552753	0.112444671031563	0.625610533559371	
	0.959766954083229	0.066652995425535	0.672825565195200	
	1.000000000000000	0.011111111111111	0.693147180559945	

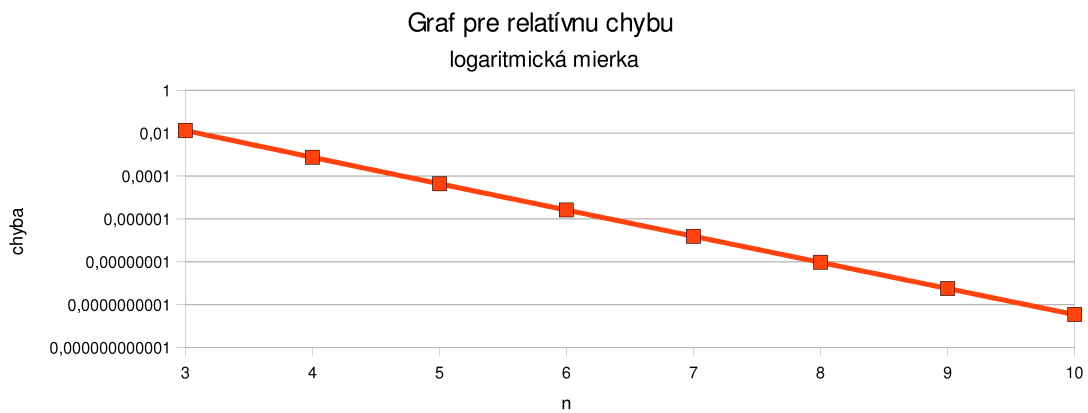
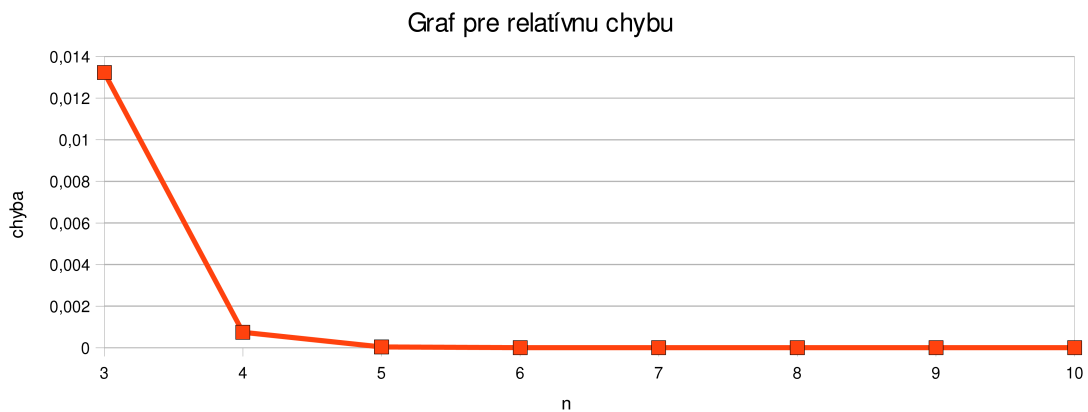
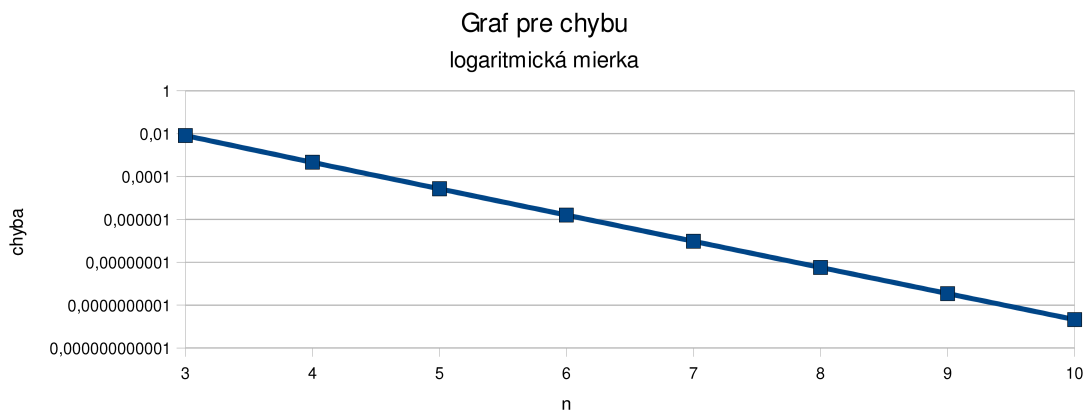
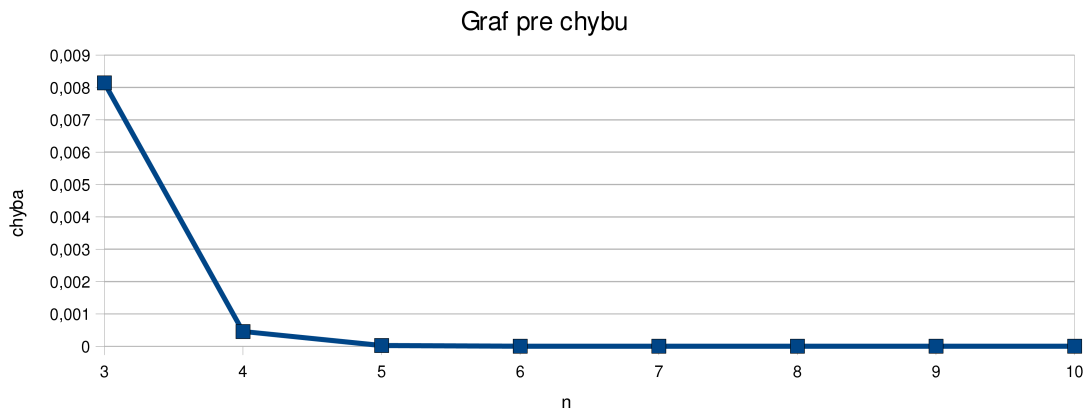
Tabuľka 5.7: Príklad 7. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \log(x+1)$



Obr. 5.7: Príklad 7. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \log(x+1)$

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	0	0.623769614005011
	0.500000000000000	0.666666666666667	0.546302489843790	0.008143143618997
	1.000000000000000	0.166666666666667	1.557407724654902	0.013227409818637
4	0	0.083333333333333	0	0.616085151435674
	0.276393202250021	0.416666666666667	0.283653319951446	4.586810496592930e-004
	0.723606797749979	0.416666666666667	0.883469498563190	7.450638848776073e-004
5	0	0.050000000000000	0	0.615653223633374
	0.172673164646011	0.272222222222222	0.174410024369740	2.675324736023388e-005
	0.500000000000000	0.355555555555555	0.546302489843790	4.345694775511988e-005
6	0	0.033333333333333	0	0.615628058225214
	0.117472338035268	0.189237478148923	0.118015700512634	1.587839200234420e-006
	0.357384241759677	0.277429188517743	0.373419425724507	2.579225027862759e-006
7	0	0.023809523809524	0	0.615626565588484
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.085092541874250	9.520246946337352e-008
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.272000646625122	1.546432358629398e-007
8	0	0.017857142857143	0	0.615626476130337
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.064217985201312	5.744322240097688e-009
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.207034132577702	9.330856479410062e-009
9	0	0.013888888888889	0	0.615626470734056
	0.050121002294270	0.082747680780403	0.050163014415555	3.480420396329009e-010
	0.161406860244631	0.137269356250081	0.162823289062912	5.653461252481058e-010
10	0	0.011111111111111	0	0.615626470407162
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.040254768365147	2.114763919536244e-011
	0.130613067447247	0.112444671031563	0.131360914211384	3.435141309323868e-011
	0.261037525094778	0.146021341839842	0.267132796947028	
	0.417360521166807	0.163769880591949	0.443410403936133	
	0.582639478833194	0.163769880591949	0.658947456350244	
	0.738962474905222	0.146021341839842	0.911188789786425	
	0.869386932552753	0.112444671031563	1.183851506618612	
	0.959766954083229	0.066652995425535	1.427649219285410	
	1.000000000000000	0.011111111111111	1.557407724654902	

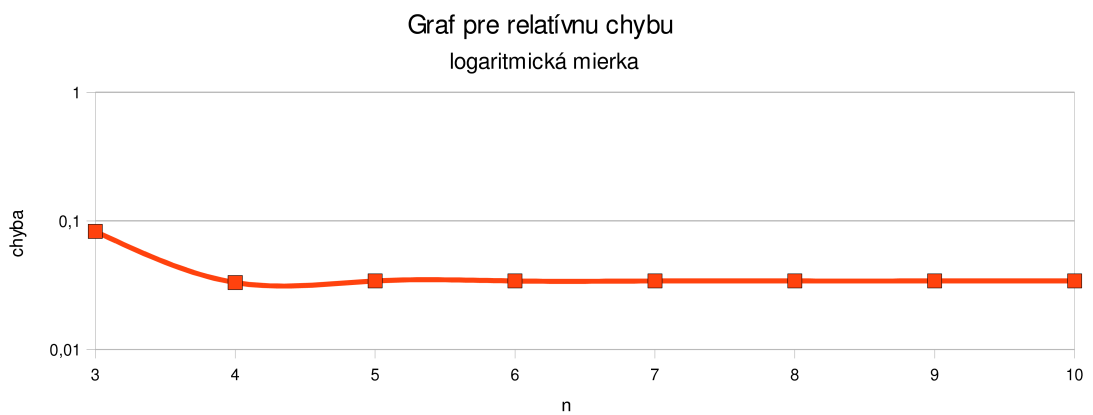
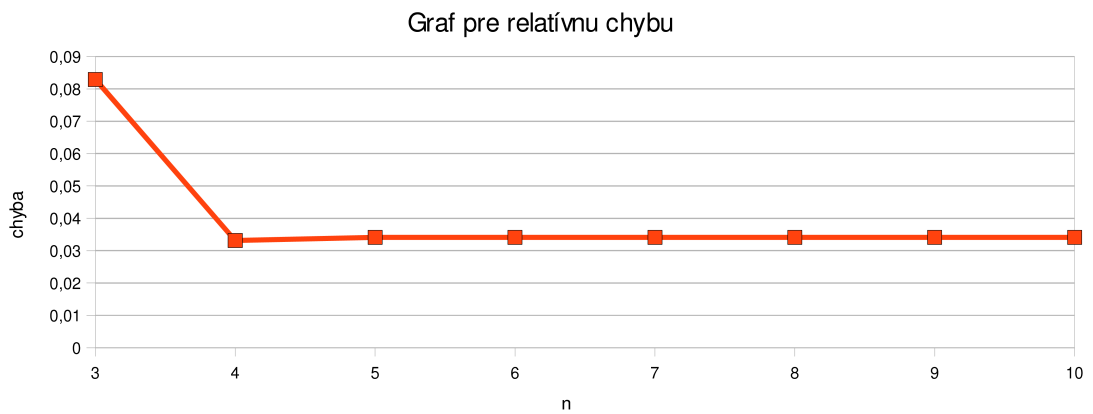
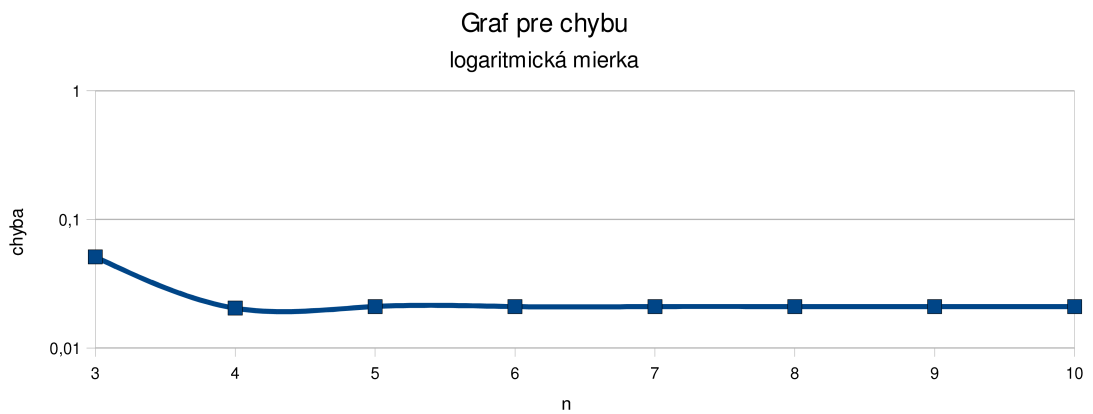
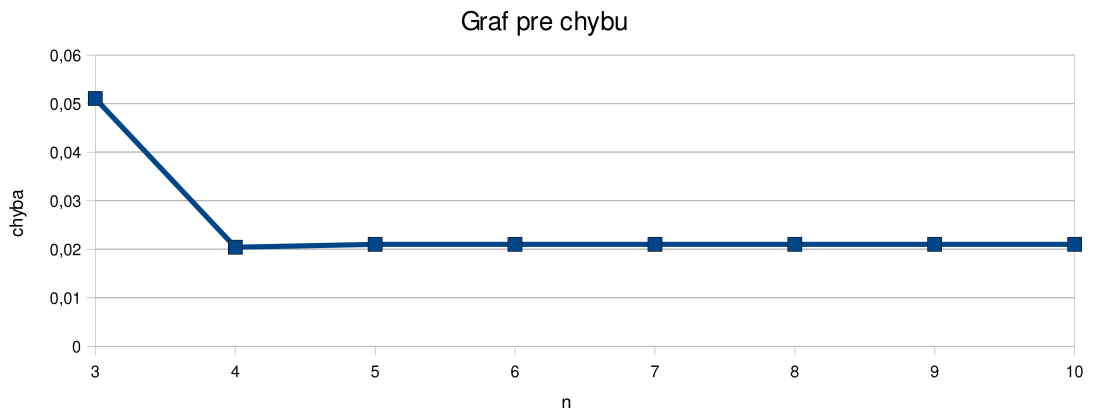
Tabuľka 5.8: Príklad 8. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sin(\pi x)$



Obr. 5.8: Príklad 8. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \sin(\pi x)$

n	x	w	f	výsledok
				chyba
				relatívna chyba
3	0	0.166666666666667	0	0.666666666666667
	0.500000000000000	0.666666666666667	1.000000000000000	0.030046894299085
	1.000000000000000	0.166666666666667	0.000000000000000	0.047197551196598
4	0	0.083333333333333	0	0.636034354353796
	0.276393202250021	0.416666666666667	0.763241225224555	5.854180137850884e-004
	0.723606797749979	0.416666666666667	0.763241225224556	9.195724656931810e-004
5	0	0.050000000000000	0	0.636626027485129
	0.172673164646011	0.272222222222222	0.516251887217583	6.255117547371292e-006
	0.500000000000000	0.355555555555555	1.000000000000000	9.825515667081127e-006
6	0	0.033333333333333	0	0.636619730316261
	0.117472338035268	0.189237478148923	0.360729776345847	4.205132075885132e-008
	0.357384241759677	0.277429188517743	0.901297636795794	6.605406018487763e-008
7	0	0.023809523809524	0	0.636619772561495
	0.084888051860717	0.138413023680783	0.263533803195956	1.939136629047766e-010
	0.265575603264643	0.215872690604931	0.740846900945995	3.045988694061669e-010
8	0	0.017857142857143	0	0.636619772366930
	0.064129925745197	0.105352113571753	0.200109914994354	6.509237593377293e-013
	0.204149909283429	0.170561346241752	0.598282417837088	1.022468650191230e-012
9	0	0.013888888888889	0	0.636619772367583
	0.050121002294270	0.082747680780403	0.156809913493841	1.665334536937735e-015
	0.161406860244631	0.137269356250081	0.485622040421670	2.615901373506474e-015
10	0	0.011111111111111	0	0.636619772367581
	0.040233045916771	0.066652995425535	0.126059562142960	1.110223024625157e-016
	0.130613067447247	0.112444671031563	0.398914755854673	1.743934249004316e-016
	0.261037525094778	0.146021341839842	0.731196019546212	
	0.417360521166807	0.163769880591949	0.966487706891009	
	0.582639478833194	0.163769880591949	0.966487706891009	
	0.738962474905222	0.146021341839842	0.731196019546212	
	0.869386932552753	0.112444671031563	0.398914755854673	
	0.959766954083229	0.066652995425535	0.126059562142961	
	1.000000000000000	0.011111111111111	0.000000000000000	

Tabuľka 5.9: Príklad 9. – hodnoty pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \tan(x)$



Obr. 5.9: Príklad 9. – grafy chýb pre funkciu  $\int_0^1 f(x) = \int_0^1 \tan(x)$

# Literatúra

- [1] W. Gautschi, On the remainder term for analytic functions of Gauss-Lobatto and Gauss-Radau quadratures, *Rocky Mountain J. Math* 21 (1991), 209-226. Corrected in W. Gautschi, *Rocky Mountain J. Math.* 21 (1991), 1143.
- [2] W. Gautschi, Remainder estimates for analytic functions, *Numerical Integration* (T. O. Espelid, A. Genz, eds.), Kluwer Academic Publishers, 1992, 133-145.
- [3] W. Gautschi and S. Li, The remainder term for analytic functions of Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadrature rules with multiple endpoints, *J. Comp. Appl. Math.* 33 (1990), 315-329.
- [4] W. Gautschi and R. S. Varga, Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions *SIAM J.Numer. Anal.* 20 (1983), 1170=1186.
- [5] W. Gautschi, E. Tychopoulos and R. S. Varga, A note on the contour representation of the remainder term for a Gauss-Chebyshev quadrature rule, *SIAM J. Numer. Anal.* 27 (1990), 219-224.
- [6] D. B. Hunter, Some error expansions for Gaussian quadrature, *BIT* 35 (1995), 64082.
- [7] F. Peherstorfer, On the remainder of Gaussian quadrature formulas for Bernstein-Szegö weight functions. *Math. Comp.* 60 (1993), 317-325.
- [8] T. Schira, Ableitungsfreie Fehlerabschätzungen bei numerischer Integration holomorpher Funktionen, Ph.D. Dissertation, Univ. Karlsruhe, 1994.
- [9] T. Schira, The remainder term for analytic functions of Gauss-Lobatto quadratures, *J. Comp. Appl. Math.* 76 (1996), 171-193.
- [10] T. Schira, The remainder term for analytic functions of symmetric Gaussian quadratures, *Math. Comp.* 66 (1997), 297-310.
- [11] D. Hunter and G. Nikolov, On the error term of symmetric Gauss-Lobatto quadrature formulae for analytic functions, *Mathematics of Computation* 69 (1999), 269-282

- [12] G. Szegő, *Orthogonal polynomials* (fourth edition), American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, Providence, RI, 1975.
- [13] J. Černá, *Chybový člen symetrické Gaussovy-Lobattovy kvadraturní formule na třídě analytických funkcí*, diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, 2010.