UNIVERZITA KARLOVA v PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Rozvoj procesuálních číselných představ žáků 1. stupně ZŠ

Development of procesual number sense of primary school pupils

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Darina Jirotková, Ph.D.**

Autor diplomové práce: **Sandra Holáková**

Studijní obor: **Učitelství pro 1.stupeň ZŠ**

Forma studia: **prezenční**

Diplomová práce dokončena: **březen 2011**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a informačních zdrojů.

V Praze dne ……………….. Podpis: ………………………

Za podnětné připomínky, podporu a cenné rady během zpracování diplomové práce velmi děkuji RNDr. Darině Jirotkové, Ph.D. Děkuji také učitelkám, které mi vyšly vstříc i dětem, které se experimentů zúčastnily.

Anotace

Diplomová práce je zaměřena na studium kognitivních a komunikačních jevů, které se vyskytují při řešení úloh v sémantickém aritmetickém prostředí Krokování žáky 1. stupně ZŠ. Tyto jevy jsou odhalovány kvalitativní analýzou řady experimentů realizovaných se žáky 1. stupně ZŠ. Teoretickými východisky, která umožní odhalené jevy popsat, jsou Teorie generických modelů a sémantické ukotvení čísla od M. Hejného, Teorie proceptu (Gray a Tall), teorie budování matematických schémat (Hejný) a didaktický konstruktivismus, strukturální a sémantické představy čísla, proces, koncept a procept.

Klíčová slova

matematické podnětné prostředí

prostředí Krokování a Schody

číslo jako operátor

číslo jako adresa

představa záporného čísla

koncept

proces

procept

izolovaný a generický model

budování schémat matematických pojmů

Annotation

This diploma thesis is focused on study of cognitive and communicative phenomena, which appear at solving exercises in semantic and arithmetic environment First-Grade Students' Stepping. These phenomena are revealed by a set of quantitative analysis experiments undertaken with first-grade pupils. Theoretical basis, which make the description of revealed phenomena possible, are generic model theory and semantic embedding of number (Hejný), procept theory (Gray and Tall), mathematical schema building theory (Hejný) and didactic constructivism, structural and semantic conception of number, process, concept, procept.

Keywords

mathematical substantial environment
Stepping and Staircase environments
number as an operator
number as an address
understanding of negative number
concept
process
procept
isolated and generic model
building of schemas of mathematical terms

Obsah

1 Úvod

Tato diplomová práce je věnována experimentům s dětmi na 1. stupni základní školy, realizovaných v matematickém prostředí, a to Krokování.

K této práci jsem byla inspirovaná svými zkušenostmi z hodin didaktiky matematiky na pedagogické fakultě. Právě zde jsem se setkala s matematickými prostředími a konstruktivistickým přístupem k vyučování ze strany některých profesorů. Na praxi v druhém ročníku studia jsem se jako pozorovatel, zúčastnila hodiny matematiky na ZŠ Táborské vedené panem profesorem Hejným. Řešily se zde úlohy z prostředí Krokování. Díky netradičnímu způsobu výuky jsem si z hodiny odnesla silný zážitek. Otevřelo se mi prostředí, které propojuje žákův svět reality se světem čísel, a tak mu pomáhá při vstupu do aritmetiky.

Práce je členěna na tři části. V první části lze najít teoretická východiska, která popisují moje porozumění teorii. Tento materiál je mnou zestručněný, interpretovaný a komentovaný. Pro úplnost informací doporučuji odbornou literaturu uvedenou v závěru práce. V druhé části analyzuji sémantické prostředí Krokování a Schody. Zde se zabývám jednotlivými fázemi prostředí Kroků a jeho didaktickými aspekty. Třetí část je věnována mým experimentům, které jsem v tomto prostředí provedla.

Při seznámení se s tímto prostředím jsem si kladla následující otázky: Jaký jazyk vytváří žáci pro záznam kroků? Jakými způsoby žáci řeší úlohy s výskytem operátoru? Na jaké úrovni jsou schopen žák prvního stupně rozumět záporným číslům? Jaké obtíže můžou nastat při realizaci krokování? Odpovědi na jednotlivé otázky lze najít v této diplomové práci. S nimi úzce souvisí cíle mé diplomové práce, kterými jsou:

- hlouběji prozkoumat prostředí Krokování a Schody
- hlouběji porozumět Teorii generických modelů
- popsat etapy budování schématu Kroky
- připravit a realizovat experimenty v prostředí Krokování
- evidovat tyto experimenty
- popsat a analyzovat zajímavé jevy, které se při realizaci experimentů vynoří
- evidovat a reflektovat svou roli experimentátora.

2 Teoretická východiska aneb má snaha porozumět významu matematických prostředí

Cílem této kapitoly je ujasnit si pojmy, se kterými jsem se setkala na mé cestě za porozuměním významu matematických výukových prostředí.[1] Se studiem pojmu prostředí úzce souvisí studium mechanizmu poznávacího procesu,[2] pojmu schéma, didaktický konstruktivismus, strukturální a sémantické představy čísla, proces, koncept a procept.

Tento můj subjektivní výklad si neklade za cíl postihnout veškerou problematiku výše uvedených pojmů, ani je vysvětlovat. Spíše jde o popis mého porozumění jednotlivým teoretickým jevům tak, jak s nimi zacházím ve své práci. Pro ucelené informace odkazuji na odbornou literaturu.

2.1 Mechanizmus poznávacího procesu

Během studia jsem se setkala s více teoriemi o utváření pojmů a kognitivním vývoji žáka, jmenovitě dílo Jeana Piageta[3] či Lva Vygotského.[4] Zjistila jsem, že taktéž existuje nespočet teorií učení např. operantního podmiňování,[5] instrumentální konceptualismus.[6] Leč k porozumění, jak si žák buduje své matematické poznatky, jsem

[1] Termín „matematická prostředí“ budu dále ve své práci používat pro taková výuková prostředí, která jsou podnětná pro výuku matematiky na prvním stupni základních škol. V anglickém školství jsou prostředí tohoto charakteru označena názvem „substantial learning environments“.

[2] Konstrukce mechanizmu poznávacího procesu vychází z experimentálního vyučování profesora Hejného, ale využívá i pedagogické zkušenosti a pedagogickou filosofii autorova otce, dále i některé myšlenky J. Piageta a L.P. Vygotského, později při hlubším rozpracovávání byl mechanizmus obohacen i o myšlenky dalších autorů (Hejný, 2004).

[3] Pound, 2008.

[4] Pound, 2008.

[5] Tato teorie učení vychází z behavioristické školy, její princip vyložil B.F.Skinner (Fontana, 1997).

[6] Teorie pochází z kognitivní školy, její vysvětlení podává Bruner (Fontana, 1997).

přišla až v Hejného koncepci **mechanizmu poznávacího procesu** nazvané **Teorie generických modelů (TGM).**

Tento proces zrození a budování matematického poznatku je autorem mechanizmu rozložen do série hladin a dvou hladinových přechodů, zdvihů. Hejný (2004, s. 29) říká, že se poznávací proces otiskuje do několika hladin najednou a pouze hladina motivace je aktivní v průběhu celého procesu. Jedná se o tyto hladiny (Hejný, 2004):

1. hladina ***motivace****.*
*2. hladina separovaných/****izolovaných modelů****.*
1.hladinový přechod - z***obecnění.***
3. hladina ***generických modelů***
2. hladinový přechod - ***abstrakční zdvih***
4. hladina ***krystalizace***

2.1.1 Hladina motivace

Tato koncepce předpokládá vnitřní motivaci[7] žáka k učení, která je charakterizována žákovým zájmem a zvědavostí pramenící z rozporu mezi „nevím“ a „chtěl bych vědět“ (Hejný, 2004). Žák tedy řeší úlohy pro svoje vlastní uspokojení.

2.1.2 Hladina izolovaných modelů

V této hladině je žák vnitřně motivovaný pro řešení nabízených problematických úloh či matematických výzev. Ty všechny představují pro poznávajícího jednotlivé zkušenosti a v jeho vědomí jsou uloženy jako izolované modely. *Čím víc takových různorodých modelů dítě pozná, tím pevnější je jeho výsledné poznání* (Jirotková, 2010, s. 20).

[7] Lokšová a Lokša (1999) rozlišují motivaci vnitřní a vnější. O vnitřní hovoří tehdy, když člověk vykonává určitou činnost kvůli ní samé, aniž by očekával jakýkoliv vnější podnět, ocenění, pochvalu nebo jinou odměnu.

Jirotková (2010) dále píše, že mezi těmito modely hrají významnou roli i modely **překvapivé** (tváří se, že nejsou pravými modely objektu)**, zdánlivé** (nejsou modely objektu, ale jeví se, že jsou) **a ne-modely.**

Tato hladina obsahuje jednak první model pojmu a dále postupně přicházející další izolované modely, které postupem času začnou na sebe poukazovat a shlukovat se do skupin. Žák si může všimnout, že některé modely jsou ve své podstatě „stejné“ (isomorfní). Ve chvíli, kdy dojde ve vědomí žáka ke třídění modelů a vhledu do dosavadního poznání, můžeme mluvit o hladinovém přechodu – **zobecnění.** Většinou se jedná o krátký časový interval a to, co vznikne ve vědomí, je nazýváno **generickým modelem** (Jirotková, 2010).

Tento hladinový přechod najdeme i v jiné literatuře. Například Gardner (1999) se ve své knize odkazuje na Piagetovu historku o malém chlapci, který *při hravém přepočítávání skupiny předmětů získal zásadní vhled do království čísel.* Tedy klíčovým elementem vhledu (generického modelu) je opakovaná činnost (izolované modely).

SITUACE 1.1.: Na souvislé praxi jsem byla přítomna okamžiku porozumění jedné žačky sémanticky budovanému racionálnímu číslu. Tehdy jsme s žáky řešili slovní úlohu, kde bylo nutno při řešení sečíst dané ceny, které byly uvedené v českých korunách. Anet za mnou přišla s prosbou o pomoc, že neumí sečíst haléře. Jednalo se o sečtení 16,50 Kč a 12,70 Kč. Anet věděla, že 50 a 70 je 120, ale dál si nevěděla rady. Na výzvu „zkus se podívat do tabulky“, kde bylo napsáno 1Kč= 100 hal., reagovala s nadšením a úsměvem. Přitom mi sdělila, že už ví, že to bude „koruna a dvacet.“ Na otázku na celkový součet, řekla, že tu korunu přidá k dvojce, tak to bude 29,20Kč.

KOMENTÁŘ: Slovní úloha byla pro Anetu izolovaným modelem budoucího poznatku sčítání desetinných čísel. Při zvědomění vazby mezi korunami a haléři, že 1 Kč= 100 hal., došlo v jejím porozumění k posunu. Našla návod (generický model) na sčítání desetinných čísel, zatím pravděpodobně vázaný na kontext peněz. Tento její objev byl doprovázen úsměvem a radostí.

2.1.3 Hladina generických modelů

Generický model je zástupcem určité skupiny izolovaných modelů. Pokud bychom se dívali na izolovaný model jako na konkrétní ukázku jistého jevu, generický model by tento jev nějak reprezentoval, byl by to návod, poučka, vzor… (Hejný, 2009), ale stále vázaný na předmětnou představu. V poznávacím procesu se žákovi může vynořit i více generických modelů pro jeden pojem (objekt). Příkladem může být několik generických modelů zlomku.

SITUACE 1.2: Žáci měli za úkol popsat barevné části tyče. Ve třídě se shodli, že modrá část je –, žlutá –, ale u zelené a hnědé části se dva žáci dostali do konfliktu. Aleš tvrdil, že zelená část je — a hnědá –. Bedřich tvrdil, že zelená část je — a hnědá –. Aleš i Bedřich zkoušeli jeden druhého přesvědčit nejprve měřením. Poté Aleš přišel s modelem ciferníku, na kterém znázornil jednotlivé části (– + – + – + —). Takto podal důkaz o pravdivosti svého řešení.

KOMENTÁŘ: Pro pojem zlomek může mít žák více generických modelů, např. tyč, čokoláda, koláč či ciferník a soubor nějakých prvků. Aleš ve výše popsané situaci vymodeloval situaci s tyčí na svém generickém modelu (ciferníku), aby podal důkaz o pravdivosti svého řešení. A právě tento jeho model dokázal zastoupit izolovaný model s tyčí. Bedřich tomu rozuměl, tedy ciferník také akceptoval jako zástupný model konkrétní barevné tyče.

SITUACE 1.3: Při snaze porozumět mechanizmu poznávacímu procesu jsme se v diskuzi s kolegyní Věrkou Koudelkovou snažily najít obrazné vyjádření. Přirovnaly jsme mechanizmus k prázdnému pokoji, do kterého budeme ukládat knihy. Každý izolovaný model jsme si přirovnaly k jedné knize. S každým vyřešeným problémem jsme do našeho pokojíka začaly nanášet jednotlivé knihy. Knihy se začaly v pokoji hromadit na kupy, které spolu nesouvisí. Až jsme si všimly, že některé z nich jsou pohádky. Mustr, který nám umožnil z jednotlivých knih vybrat pouze pohádky, je právě ten „náš generický model“. Když se hledáním zákonitostí začalo objevovat, že další knihy jsou příběhy s dětským hrdinou a další fantasy, zjistily jsme, že jednotlivé kupky knih, můžeme dát do police a nazvat je literaturou pro děti. Ve chvíli, kdy jsme objevily společné prvky, všech jednotlivých žánrů, nastal onen „abstrakční zdvih“, který nám přinesl strukturaci knih.

Po hladině generických modelů následuje opět hladinový přechod – ***abstrakční zdvih****. Ten dává zrod abstraktnímu poznání* (Jirotková, 2010, s. 22). Abstraktní znalosti jsou zbaveny své závislosti na světě věcí a mají charakter matematické symboliky, zatímco modely generické mohou být ještě vázány na svět reality, např. pro počítání jsou častým generickým modelem prsty (Hejný, 2009).

2.1.4 Hladina krystalizace

Nové poznání se propojuje na předchozí vědomosti. Nejdříve na úrovni modelů, potom na úrovni abstraktního poznání. Obvykle jde o dlouhodobý proces (Hejný, 2004, s. 29).

Shrnutí: Poznávací proces je dlouhodobý proces neustálé tvorby nových pojmů. S narůstajícím množstvím izolovaných modelů, dochází v průběhu žákova poznávání k potřebě tyto modely třídit, hodnotit, a tak vzniká potřeba tvorby generických modelů, které se dalším abstrakčním zdvihem strukturují do žákova současného matematického poznání, neboli do schématu jistého pojmu.

Generické modely jsou vázány ještě na fyzikální nebo uměle vytvořený svět, ale abstraktní poznatky tuto vazbu ztrácejí a vyžadují přechod k matematické symbolice.

2.2 Matematická schémata

V předešlém oddíle jsem zmiňovala, že k žákovu poznání nutně patří tvorba generických modelů, které se dalším abstrakčním zdvihem strukturují do žákova matematického poznání. Čím je toto matematické poznání charakteristické?

Hejný a Jirotková (2004, s. 4) mluví o dvou rozsáhlých oblastech matematického poznání. Jedná se o: *obsah a schopnosti.*[8] Do oblasti **obsahu** patří: **objekty** (kružnice, celé číslo), **vztahy** (tvrzení a vzorce), **postupy** (písemné sčítání) *a* **schémata**. Schémata pak definují jako…

…ucelené představy, které se ve vědomí člověka vytvářejí na základě mnohanásobně opakované zkušenosti a jsou nositelem mnoha konkrétních poznatků, které člověk přímo neví, ale které z nich může vyvodit (Hejný; Jirotková, 2004, s. 4).

Tudíž soubor generických a i některých izolovaných modelů vytváří schéma matematického objektu. Když žák řeší úlohu týkající se určitého schématu (např. schématu čísla), volí si některý jeho generický model, který dané úloze nejlépe vyhovuje. Pakliže takový model nenajde, stává se pro něj úloha problémem. Tedy kvalitu matematických schémat určuje různorodost a bohatost generických modelů (Hejný, 2007).

Z hlediska výuky můžu pomocí mechanizmu poznávacího procesu a teorie budování schémat diagnostikovat úroveň žákova poznání. Úlohy, které jsou pro žáky nesnadné, poukazují na bohatost nebo nedostatečnost příslušných generických modelů. V případě nedostatečnosti bych v roli učitele měla reagovat tak, že obohatím žákovy zkušenosti (doplním další izolované modely) tvorbou kaskády úloh určitého problému individuálně pro daného žáka. Poskytnutím dalších izolovaných modelů se jeho schéma dále obohatí, žák nabyde dalších zkušeností, které vytvoří základ pro budoucí poznání určitého generického modelu. Tím se zároveň obohatí i jeho konkrétní schéma. Toto téma dále vysvětluje Hejný (2007, s. 86):

[8] Z hlediska didaktiky matematiky není tato oblast poznání utříděná, avšak Hejný a Jirotková (2004) mluví o jednotlivých schopnostech např. experimentování, analyzování situace, objevování, argumentace, formulování myšlenky.

Izolované modely vystupují jako informace shlukující se do klastrů[9] *a tvoří půdu pro vznik schématu. Schéma ale vzniká až objevením se prvního generického modelu. Všechny dřívější izolované modely i ty, které se objeví dodatečně, náleží do schématu, ale opěrnými sloupy schématu jsou modely generické.*

Když se vrátím k situaci 1.1, pak se mohu domnívat, že Anetčin generický model pro sčítání desetinných čísel může být jádrem pro její podschéma desetinné číslo a také „opěrným sloupem" pro vybudování rozsáhlého schématu číslo. V aritmetice primárního stupně má právě toto schéma „číslo" nejbohatší strukturu, protože jej tvoří různá podschémata (např. podschéma stav, operátor…).

Shrnutí: Schéma matematického pojmu je nositelem porozumění danému matematickému pojmu. Kvalita matematického poznání je dána kvalitou schémat a kvalita schémat je určována bohatostí a různorodostí generických modelů. Pokud chce učitel dbát o kvalitu žákova myšlení, pak by měl žákům poskytovat dostatečné množství vhodných úloh, kterými jim zajistí dobrou půdu pro tvorbu generických modelů. Soubor takových „vhodných úloh" poskytují právě matematická prostředí, neboť přispívají k budování schémat matematických pojmů.

2.2 Transmisivní nebo konstruktivistický přístup aneb mé pedagogické smýšlení

SITUACE 1.4: Ze zahraniční stáže ve Velké Británii jsem si přivezla několik zážitků z tamější školy. Jednou jsem pozorovala práci dětí, které patřily mezi nejslabší v matematické oblasti. Jednalo se o sčítání dvoumístných čísel. Učitelka zadávala úlohy typu 14 + 17, 11 + 19 apod. Chlapec měl počítat pomocí kostiček a pak učitelce sdělit výsledek. Chlapec počítal po jedné. Pro učitelku bylo jeho počítání velmi zdlouhavé, proto mu nabídla kostičkové panely. Jeden panel = 10 kostiček. Pak mu zadala úlohu 16 + 32. Chlapec si vzal

[9] Tímto termínem (Hejný, 2007, s. 86) označuje soubor zatím nepropojených nebo jen málo navzájem propojených informací náležejících k jednomu schématu.

1 desítkový panel a opět na něm počítal kostičky po jedné. Spočítal na něm kostičky (10), uvědomil si, že je to málo. Vzal si tedy druhý a opět začal počítat kostičky po jedné. Napočítal jich šest a přiložil panel k předcházejícímu a řekl: „To nejde, tady jich je moc, nemůžu počítat.“ Na to mu učitelka odpověděla, že je to špatně a že přeci musí dát jeden desítkový panel a k němu šest kostiček a názorně mu předvedla, jak číslo vymodeluje a úlohu vypočítá.

Bylo vidět, že žák čeká na radu, ne na návod. V jeho tváři bylo zřetelné velké zklamání.

KOMENTÁŘ: Chlapec se tak snažil poctivě počítat a mohl získat příležitost vyřešit jeden izolovaný model, který mohl být předstupněm k jeho porozumění dvoumístným číslům a následně jejich sčítání. Osobně bych problém řešila jiným způsobem, poskytla bych panely i kostičky ve stejný okamžik a nechala bych, ať si vybere, jak bude čísla modelovat. Myslím si, že pokud si tento žák nebyl schopen uvědomit, že číslo může rozdělit na 10 (1 panel) a 6 kostiček, pak ještě nemá porozumění zápisu dvojciferných čísel a možná také nemá vybudované dobré představy o čísle. Pravděpodobně bude sčítat dvoumístná čísla s obtížemi. Raději mohl dál počítat jen s kostičkami (izolované modely) tak dlouho, než by si sám všiml, že si může práci ulehčit s pomocí panelů. Kdyby totiž došel k tomuto porozumění sám, pak by i lehce úlohu spočítal.

Ze situace lze vidět, že žák byl vnitřně motivován objevovat, ale učitel mu jeho snažení přerušil v nesprávný čas podanou informací. Bylo takové jednání smysluplné? Ano i ne, záleží, který přístup k výuce je mi jako učiteli blízký. Mísí se zde tedy transmisivní přístup – učitel dává žákovi návod – a konstruktivistický, který zdůrazňuje aktivitu žáka (žák si sám modeluje úlohu).

Pokud bych odpověděla „ne“, pak spíše upřednostňuju druhý přístup, který zdůrazňuje úkol učitele „motivovat žáky k aktivitě“, a to otázkou, matematickou výzvou, problémovou úlohou. Učitel také poskytuje příležitost každému žáku řešit úkol podle svých schopností. Jeho úkolem je pak vést třídní diskuzi, kde žáci formulují své nápady, názory, výsledky, které pak hodnotí a porovnávají s ostatními. Tímto způsobem si žáci budují a obohacují svoji poznatkovou strukturu. Učitel pak shrnuje podstatné rysy učiva na vhodných příkladech či modelech.

Pokud bych odpověděla ano, pak spíše vyznávám transmisivní přístup, který zdůrazňuje přenos poznatků a považuje učitele za autoritu, která rozhoduje o správnosti výsledků. Ten žákům vykládá učivo, jež také shrnuje, dbá na jeho opakování i zápis učiva. Žáky klasifikuje a kárá za chyby. Pokud chce žák uspět, musí porozumět výkladu učitele – získat potřebné znalosti a osvojit si požadované dovednosti.

Takový přístup k vyučování jsem si prožila téměř na všech svých vzdělávacích stupních. Jako žákyně si pamatuji na tzv. „nudné, poslouchací" hodiny a nemožnost vyjádřit na daný problém svůj názor. Naučila jsem se tedy být tichá, snaživá a potlačovat svou kreativitu. Za jakoukoliv svou chybu jsem byla na sebe naštvaná. Silně jsem si prožila, jak negativní dopad má tento tradiční přístup na sebehodnocení žáka.

Až na fakultě jsem se seznámila s konstruktivistickým přístupem k vyučování, jehož hlavním rysem je: aktivita žáka, individualizace výuky a sociální interakce.[10] V tomto přístupu jsem uviděla náročnost na přípravu učitele, ale hlavně možnost pozitivně ovlivňovat sebevyjádření a sebeocenění žáka. V seminářích u některých pedagogů jsem si právě tyto pozitivní účinky prožila. Bylo to povzbuzující a příjemné.

Inspirována tímto přístupem a s touhou uplatnit své poznatky v praxi jsem se vrhla do prvních experimentů. Avšak místo očekávané radosti z vyučování přišlo velké zklamání. Při svých reflexích, pozorování se na videu a hodnocení mé výuky jinými lidmi jsem zjistila, že jsem příliš autoritativní, mám problémy s formulací otázek, „tlačím" na poznání žáka a stále málo přemýšlím o představách svého žáka. To vedlo v mé výuce k nedorozumění (viz experiment 3).

Uvědomila jsem si, jak hluboce je ve mně transmisivní přístup zakořeněn a jak obtížné je uplatňovat konstruktivistický přístup, i když mé pedagogické přesvědčení je již vyhraněné. Nadějí je pro mě má každodenní praxe, která se mi stává výzvou tyto zvyky překonat, a každodenní reflexe mé vlastní práce, ale i práce mých žáků.

Mé obtíže v praxi jsem diskutovala s doktorkou Jirotkovou. Z rozhovoru jsem si odnesla dvě doporučení, a to „nic neříkat" a „individualizovat" výuku. Tato doporučení jsem vzala za své a v praxi jsem pak zjistila, že spolu s nimi se v mé denní učitelské praxi realizují i další zásady konstruktivizmu, se kterými sympatizuji. Jedná se o tyto cíle:

[10] Moje zápisky ze semináře Dítě a matematika, který vedla PhDr. J. Michnová.

- podněcovat *aktivitu* žáků při *řešení úloh* (neboť přenosné jsou pouze informace, nikoliv poznatky);
- podporovat nabývání *zkušeností*, které si žák vytváří v kontaktu se světem reality i školy (experimentování, argumentování…);
- vytvářet při učení vhodné podmínky *sociální interakce* (diskuze, srovnávání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů, pokusy o formulace domněnek a tvrzení, hledání důkazů);
- podporovat *komunikaci* a *tvorbu různých jazyků* matematiky;
- snažit se hodnotit vzdělávací proces v matematice z těchto hledisek: *porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla a aplikace matematiky* (Hejný; Kuřina, 2009).

Shrnutí: Moje pedagogické smýšlení vzniklo prolnutím mých zkušeností s desaterem konstruktivizmu, se kterým sympatizuji. Pochopila jsem, že jako učitel je potřeba být nadmíru trpělivý a pokusit se připravovat výuku tak, aby se každému dostávalo úkolu podle svých schopností. Jsem si vědoma, že zatím mám málo zkušeností, které by mi poskytovaly vhled do různých situací. Proto si dávám za úkol důsledně si psát očekávání reakcí žáků do příprav a v hodinách více reagovat na odpovědi žáků, tedy rozmýšlet nad otázkou „Proč žák odpovídá tímto způsobem? Proč takto počítá? Jaké jsou jeho představy?“

2.4 Můj problém: komunikační nedorozumění

Jeden z problémů, se kterým se při své učitelské praxi potýkám, je komunikační nedorozumění. Ráda bych se zde tímto problémem zabývala, ale nejprve si ujasním, jak zde budu tento pojem chápat.

Jedním z charakteristických (a podle mě hlavních) prvků výuky je komunikace. Přikláním se k charakterizaci komunikace jako *přenos myšlenek z jednoho vědomí do vědomí jiného* (Jirotková, 2010, s. 83).

Zde bych se však chtěla zaměřit na komunikaci v oblasti matematiky. V tomto duchu je komunikační proces rozdělen na dva typy intelektuální činnosti (Jirotková, 2010, s. 84): **artikulace** – je přeměna myšlenky na vnějšího nositele (slova, obrázky, grafy, pohyby) a **interpretace –** je přeměna vnějšího nositele na mentální představu.

Z toho vyplývá, že komunikační nedorozumění lze chápat jako proces, kdy komunikační nositel (slovo, obrázek, gesto…) vyvolá různost představ (Jirotková, 2010). Jirotková (2010, s. 86 – 87) dále rozlišuje šest typů nedorozumění:

a) *oba komunikanti mají různé představy, ale ani jeden si to neuvědomuje;*
b) *představy jednoho komunikanta jsou deformované nebo prázdné, ale použitá slova korespondují se správnou představou druhého komunikanta;*
c) *jeden komunikant si uvědomuje různost představ, ale nezná představu druhého;*
d) *oba komunikanti si uvědomují různost svých představ, ale představu komunikačního partnera neznají; (Protože jsou však jejich představy odlišné, pokládají představu komunikačního partnera za chybnou Příklad tohoto typu nedorozumění lze najít v experimentu č.3.)*
e) *jeden z komunikantů se domnívá, že zná interpretaci pojmu partnera, ale tato domněnka je chybná, nebo nepřesná;*
f) *Jeden z komunikantů zná partnerovu interpretaci pojmu, situace, jevu (tím však nedorozumění končí).*

Kritérium odlišnosti jednotlivých typů nedorozumění je míra uvědomělosti různých představ komunikantů. Z hlediska konstruktivistického přístupu k výuce je těžiště komunikace v diskuzi, kterou řídí učitel. Diskuze probíhá buď mezi třídou a učitelem, nebo mezi žáky. Zde často dochází k nedorozumění, které je způsobené porovnáváním myšlenek artikulovaných různými jazyky.

Ve výše popsané situaci 1.2 (s. 11) se ukazuje, že oba žáci mají odlišné představy o jednotlivých částech tyče (typ nedorozumění d)), proto dochází ke konfrontaci jejich reprezentací o daném objektu (část tyče zapsaná ve zlomku). V diskuzi si vzájemně snaží vysvětlovat své představy a používají k tomu různé modely. K dorozumívání jim slouží komunikační nositel (např. obrázek koláče). Diskuze nad daným problémem vede k pochopení jednoho z komunikantů, že jeho představa o daném problému byla nepřesná.

I mezi učitelem a žákem dochází k nedorozumění, jež může být způsobeno např. špatnou formulací otázky. Práce s chybou se pak pro učitele stává zásadní. Může odhalit, zda opravdu výstižně formuloval otázku, jestli žák rozumí významu slov atd. Pokud ano, potom je potřeba hledat příčinu chyby žáka a ptát se „Proč k chybě došlo? Jaké jsou jeho představy o daném problému?“ (Jirotková, 2010).

Pokud učitel má o dané problematice dobré znalosti matematické a didaktické, dokáže z žákovy výpovědi poznat jeho představy a k chybným představám vytvořit úlohy, které chybujícím žákům pomohou jejich představy korigovat (Jirotková, 2010).

Shrnutí: Komunikační nedorozumění, práce s chybou, řízená diskuze, to vše souvisí s konstruktivistickým přístupem k výuce, pro který je podnětná diskuze klíčová. Poznala jsem, že alespoň na začátku své učitelské praxe se nedorozuměním nevyhnu. Když jsem se pozorovala na videoukázkách ze svých hodin a nacházela jsem svá další a další nedorozumění, byla jsem z toho deprimovaná a styděla jsem se za tyto situace. Nicméně nyní se dívám na své chyby jako na příležitost změnit se a zároveň si uvědomuji výzvu, která se za těmito nedorozuměními skrývá, a to prohlubovat své matematické, didaktické i psychologické znalosti.

2.5 Matematické prostředí jako klíč ke smysluplné výuce

2.5.1 Jak rozvíjet matematické myšlení žáka?

„*Představivost je důležitější než znalosti. Znalosti jsou omezené, ale představivost obklopuje celý svět.*“ *Albert Einstein*

Představivost je v psychologickém slovníku (Hartl, 1994, s. 158) definována jako *schopnost vytvářet představy; je předpokladem tvořivé činnosti.*[11] V první části této kapitoly bylo hovořeno o tom, jak si žák získává své matematické poznání budováním matematických schémat. Samotná definice schémat začíná slovy, že jde o *ucelené*

[11] Synonymem je slovo fantazie, která je vymezena jako *„myšlení v obrazech“; vytváření nových představ na základě dřívějšího vnímání, obměňování minulé zkušenosti představ* (Hartl, 1994, s. 51).

představy, které se ve vědomí člověka vytvářejí na základě mnohanásobně opakované zkušenosti (Hejný; Jirotková, 2004, s. 4). Přeneseno na oblast školní matematiky, citát poukazuje na to, že pro lidské poznání je důležitější mít schopnost vytvářet představy (obrazy, schémata) než mít znalosti. V souvislosti s mechanizmem poznávacího procesu, lze obecně říci, že nabývání zkušeností se snahou zkušenosti propojovat vede k rozvoji myšlení.[12]

Proč je důležité pro člověka 21. století mít kultivované myšlení? Myslím si, že pokud se učitelům a rodičům podaří kultivovat žákovo myšlení, pak to ovlivňuje jeho svobodnou vůli a v běžném životě to znamená, že se může snadněji rozhodovat a potažmo naplňovat své lidství, které nestojí v slepém následování masy lidí či klamných názorů, nýbrž v uvědomělém myšlení.

Tak stojím před otázkami: „**Jak rozvíjet matematické myšlení žáka prvního stupně? Co mu škola nabízí v prvních letech svého vzdělávání?**“ Trénink spojů typu 2 + 3 = 5 a 5 – 3 = 2, učení se nazpaměť násobilce nebo vkládání několika vzorečků do paměti atd. Lze si pak naučené znalosti a algoritmy vyzkoušet v různých nahodilých kontextech slovních úloh a také při ústním zkoušení u tabule či při písemce, kde je přísně zakázáno použít jakékoliv pomůcky. Na toto téma mluví i Kuřina (2007-2008): „*Dobrá paměť rozvíjená tréninkem se zdá být postačující k osvojení minima matematiky. Takováto matematika myšlení nerozvíjí.*“ Není divu, že mnoho žáků již v prvním roce školní výuky ztrácí chuť se učit, poznávat a objevovat.

Přístup k matematice jako nacvičení počtářských dovedností a přejímání hotových faktů totiž rozvíjí žákovu paměť, ale nevede k rozvoji myšlení. Domnívám se však, že ještě horšími následky jsou ztráta vnitřní motivace pro hledání řešení problémů i přirozeného pudu zvídavosti.

Výsledky Timss (2009, s. 34) ukázaly, že žáci čtvrtých tříd měli problém s úlohou, kde se zjišťuje, zda *žáci správně chápou pojem rovnice a rovnosti. Vysoká četnost chybných odpovědí nasvědčuje tomu, že žáci nesprávně chápou pojmy rovnost a rovnice, respektive „velmi volně“ zacházejí se znaménkem rovnosti.* Další problematickou úlohou se stala slovní úloha, při jejímž řešení museli žáci

[12] Myšlení je kognitivní proces, který podle (Trpišovská; Vacínová, 2001) završuje proces poznání tím, že přináší člověku nové, hlubší poznatky o předmětech a jevech, o jejich podstatě a vzájemných vztazích.

matematizovat reálnou situaci a provést odpovídající početní operaci s přirozenými čísly.

To poukazuje na to, že v naší školní matematice chybí úlohy, které by u žáků rozvíjely porozumění pojmu rovnosti, schopnost matematizovat reálné situace a konceptuální myšlení. Mohu se domnívat, že právě tyto problémy poukazují na problematiku tradičního přístupu k matematice, která klade důraz na uchování zprostředkovaných poznatků, nikoliv však na porozumění.

Vracím se tedy k výše položené otázce: „Jak rozvíjet matematické myšlení žáka prvního stupně?" Přikláním se k tvrzení:

Nejde o rozsah vědomostí, ale o kvalitu kognitivních schopností. K tomuto cíli vede jen vlastní intelektuální práce, hledání, uvažování, experimentování atd. (Hejný; Jirotková, 1999, s. 1).

2.5.2 Matematická prostředí a rozvoj myšlení

Proces a koncept

Při studiu matematiky a didaktiky matematiky na pedagogické fakultě, jsem se seznámila s mnoha matematickými prostředími. Každé takové prostředí obsahuje hluboce propracovanou kaskádu úloh, které spojuje společný kontext. Tím mohou být situace z reálného světa či uměle vytvořeného. Tyto kontexty jsou autory[13] důkladně propracované tak, aby přispívaly budování schémat různých matematických pojmů. Jejich ucelenou koncepci lze najít v řadě učebnic matematiky pro 1. st. ZŠ od autorů Hejný a kol.

Každé prostředí přináší něco specifického pro porozumění klíčovým matematickým pojmům, vztahům, jevům, …

Způsoby, jak naše vědomí vnímá nejen pojmy, ale i situace a události reálného světa, označují dvě slova, *proces* a *koncept* (Hejný, 2006). M. Hejný charakterizuje tyto způsoby takto:

[13] Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc., RNDr. Darina Jirotková, Ph. D., PhDr. Jana Slezáková-Kratochvílová, Ph. D.

Podstatou procesuálního způsobu je průběhovost, činnost, posloupnost myšlenkových kroků odehrávajících se v čase. Podstatou konceptuálního způsobu je produkt, výsledek činnosti, který se při kódování může rozkládat na části, ale tento rozklad nemá žádné pevné časové pořadí. Pro matematické poznání je příznačné, že v mnoha případech může stejné poznání kódovat obojím způsobem: procesuálně i konceptuálně (Hejný, 1999, s. 41).

M. Hejný v (Hejný, 2006) dále označuje adjektivem *procesuální* takové aktivity a obsahy vědomí, v nichž rozhodující roli hraje čas. Adjektivem *konceptuální* takové představy, obsahy a stavy vědomí, v nichž čas nehraje zásadní roli.

Pokud ve výuce preferujeme nacvičování řešitelských procesů, učíme žáky procesu. Učíme-li žáky, co je to např. čtverec, tak je naším cílem jim poskytnout takové vnější reprezentace, aby si vytvořili sami svoji mentální reprezentaci – koncept tohoto pojmu (Hejný, 2006).

Převedeno na školní praxi, můžeme rozdělit žáky na procesuální a konceptuální typ. Pokud učitel nabízí žákům převážně úlohy, které vyžadují konceptuální kódování poznatku do vědomí, pak jsou žáci procesuálního typu velmi znevýhodněni a může u nich často docházet k neporozumění tématu a demotivace k matematice. Abychom takovým stavům předešli, bylo by vhodné předkládat takové úlohy, které by vedly k procesuálnímu i konceptuálnímu kódování poznatků. A právě prostředí Krokování oba typy kódování podporuje.

Sémantická a strukturální prostředí

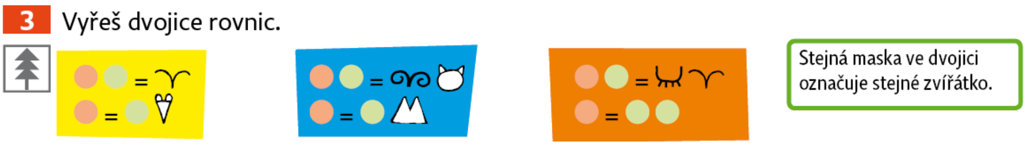
Ve třetím ročníku mého studia na PedF UK jsem se na jedné z přednášek dozvěděla, že didaktika matematiky zkoumá představy žáků o číslech a že lze tyto představy třídit například na sémantické[14] a na strukturální.[15]

V průběhu studia didaktiky matematiky jsme začali jednotlivá prostředí také charakterizovat jako sémantická a strukturální.

[14]Sémantická představa čísla je ukotvena v životní zkušenosti žáka. Kupříkladu „Bydlím ve třetím patře, Adam bydlí o čtyři patra výše. Ve kterém patře bydlí?“ (Hejný, M.: Přednášky2/Číslo.2008).
[15] Strukturální představa čísla vnímá číslo jako obyvatele světa čísel. Například úloha „vypočítej 4-3+2=?“.(Hejný, M.: Přednášky2/Číslo.2008).

Úlohy, se kterými jsem se zde setkala, nebylo pro mě vždy snadné vyřešit. Nejednou se objevování táhlo i přes několik dní či týdnů, doprovázené diskuzemi se spolubydlící, studující Matematicko – fyzikální fakultu UK v Praze. Byla jsem překvapená, s jakým nadšením byla ochotna se mnou diskutovat mé matematické problémy. Proč? Viděla za úlohami matematickou hloubku i cestu k „vyšší matematice“, o které já jsem neměla ani tušení.

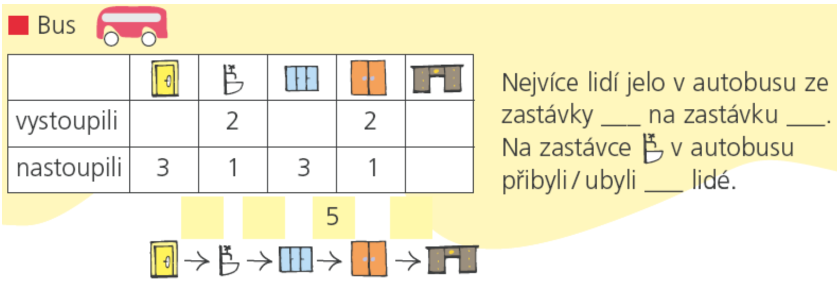
V sémantickém prostředí je číslo vázáno na předměty a jevy ze světa reality či světa uměle vytvořeného. Například v prostředí Dědy Lesoně žáci pracují s číslem jako veličinou, která je zapsána ikonicky (nikoliv číslem, ale ikonou příslušného zvířátka). Prostředí jim tak umožňuje řešit např. soustavu rovnic a využívat substituci, která obsahově patří k učivu 2. stupně ZŠ. Úlohu, ve které jsou řešeny právě soustavy dvou rovnic, uvádím na obrázku 2.1 (H4, s. 44).



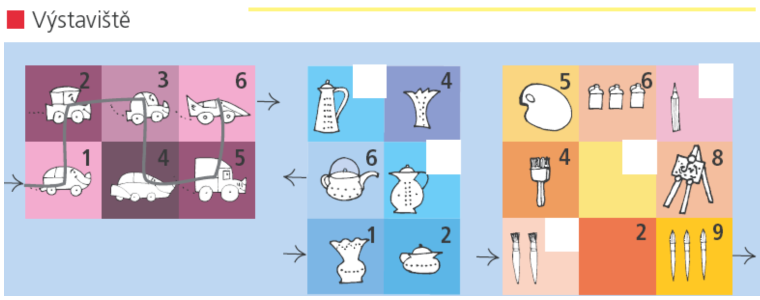
Obrázek 2.1

Dalšími sémantickými prostředími jsou Autobus, Výstaviště, Krokování atd. Autobus je prostředí, jehož kontext vychází ze světa reality. Žáci zde řeší úlohy o počtu nastupujících do autobusu, vystupujících z autobusu a celkovém počtu cestujících v autobuse. S přibývající náročností úloh si žáci začnou vytvářet evidenci těchto počtů (stavů). V praxi lze u žáků pozorovat i zdokonalování evidence. V tomto prostředí žák nabývá porozumění číslům vyjadřujícím změnu stavu, orientuje se v evidenci dat obsahujícím jak stavy, tak změny, ale i porovnání. Příklad úlohy z tohoto prostředí ukazuje obrázek 2.2 (H1/2, s. 62).

Kontext ze světa reality má i prostředí Výstaviště. Ve výstavišti jsou vyznačeny místnosti s pořadovými čísly 1 až … Žáci zakreslují do přiložené makety cestu, jak projít výstavištěm tak, aby do každé místnosti vstoupili jen jednou. V modelu výstaviště se můžeme pohybovat jen vodorovně a svisle. Řešením těchto úloh žák získává zkušenosti s orientací v prostředí, které propojuje geometrii a číselnou řadu. Rozvíjí se u něj schopnost vzájemně propojovat různé řešitelské strategie (Hejný, 2009). Příklad takové úlohy je uveden na obrázku 2.3 (H1/2, s. 58).



Obrázek 2.2

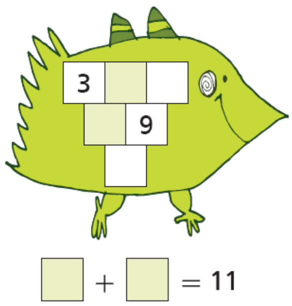


Obrázek 2.3

Prostředí Krokování je sémantické procesuální prostředí, které umožňuje žákům vstup do světa aritmetiky prostřednictvím kinestetického, akustického i vizuálního vnímání. Skrz tento pohyb (kroky) se žák seznamuje s čísly vyjadřujícími změnu polohy nebo jejich porovnání. Pomocí kroků si v pozdějších etapách buduje i vhled do záporných čísel i porozumění mínusu před závorkou. Krokování se také stává žákům pomůckou pro řešení rovnic. Z toho vyplývá, že žák si buduje porozumění číslu procesuálním způsobem, a to na základě svého vlastního kinestetického, vizuálního i akustického prožitku, a tak si vytváří hlubší poznání souvislostí a vztahů mezi čísly a získává zkušenosti pro pozdější porozumění složitějším pojmům jako například lineární rovnice anebo záporné číslo. Toto prostředí nabízí velmi odlišný přístup k výuce aritmetiky. Tuto originálnost mu právě dává přechod od procesu (kroky) ke konceptu (záznam kroků) a matematickému jazyku. Je to značně podnětné prostředí, které mi otevřelo nové cesty k matematice, a proto se jím dále zabývám ve své diplomové práci.

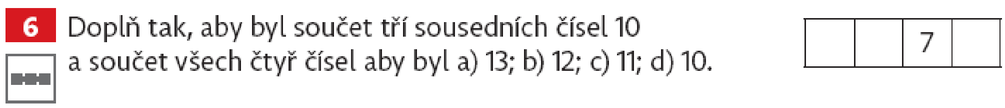
Žákovo poznání je rozvíjeno i strukturálními prostředími jako např. Součtové trojúhelníky, Algebrogramy, Sousedé. Strukturální prostředí nabízí žákovi budovat si představy o číslech bez sémantické opory, tzn. že každé číslo má význam samo o sobě a náleží do světa čísel.

Kontext prostředí Součtové trojúhelníky tvoří buňky či okénka uspořádaná do trojúhelníku, kam žáci doplňují čísla tak, aby číslo o úroveň níže bylo součtem dvou čísel nad ním. To umožňuje žákům poznávat bohaté vazby v souboru čísel. Při řešení úloh se u žáků rozvíjí schopnost řešit soustavu dvou rovnic metodou pokus – omyl. Snaží-li se žák urychlit řešení úlohy, tj. najít tzv. „fígl“ (jak jej děti označují), začne objevovat důležité zákonitosti. Na obrázku 2.4 uvádím ukázku úlohy, kde žáci řeší soustavu dvou rovnic (H2/1, s. 24).



Obrázek 2.4

V prostředí Sousedé jde o součet každých tří sousedních čísel, které např. tvoří součet 7. Při hledání strategie řešení žák získává vhled do vazby mezi sčítáním, součinem, odčítáním a rozdílem. Příklad úlohy z tohoto prostředí je uveden na obrázku 2.5 (H3, s. 39).



Obrázek 2.5

Z toho vyplývá, že pokud žák řeší úlohy v sémantických i strukturálních prostředích, pak dostává příležitost rozvíjet jak procesuální, tak i konceptuální myšlení. To znamená, že žák získává zkušenost s odlišnými izolovanými modely, které se vzájemně doplňují a v důsledku vedou k tvorbě poznatků jako schémat. A ta jsou důležitá pro rozvoj abstraktního myšlení.

Závěrem

Při hlubším poznávání jednotlivých prostředí jsem začala objevovat i další pozitivní aspekty těchto prostředí. Dnes oceňuji zejména tato hlediska: motivační aspekt, příležitost k dramatizaci problémových úkolů, modelování reálných situací a obzvláště možnost hledat svou vlastní strategii řešení, což je zásadní, protože při hledání své vlastní strategie řešení, dochází k rozvoji myšlení.

Myšlení souvisí s poznáním člověka. Součást tohoto poznání je i matematické poznání. Proto i v oblasti matematiky, především v didaktice matematiky, se mluví o *nízké či vysoké kultuře matematického myšlení*.[16]

Na souvislé praxi, ve třídě J. Michnové, jsem poznala, jak hluboce tato matematická prostředí rozvíjí žákův intelekt. Nejednou jsem se dostala do situace, kdy jsem nad žákovským řešením žasla a obdivovala jeho pravdivost a originálnost.

Když jsem v únoru letošního roku přebrala třídu čtvrťáků, kteří se podle slov bývalé paní učitelky učí v tomto duchu již od třetí třídy, nastalo pro mě velké překvapení. Žáci, kteří byli označeni za „matematicky slabé žáky“, kupodivu začali svými nápady a strategiemi hledání řešení převyšovat své vrstevníky a dosahovat laťky žáků označených jako „nejlepší žáci třídy“. Od kolegů jsem se dozvěděla, že žáci hodnotí výuku slovy „pořád si hrajeme“.

Jak více může být výuka smysluplnou než tehdy, když ji žáci vnímají jako hru a přitom objevují hluboké zákonitosti a vztahy matematiky. Ověřila jsem si, že tato matematická prostředí přináší žákům zaujetí pro matematiku a radost z jejich objevů. Myslím si, že autorům těchto prostředí patří ocenění nejvyššího řádu, protože co cennějšího může být než vzdělaný a přemýšlivý národ.

---

[16](Hejný, 2007, s. 90): „Naopak žák s vysokou kulturou matematického myšlení je schopen na problém se podívat s nadhledem, tzn. (1) ujasnit si, co je dáno a co se má najít, případně (2) udělat předběžnou sondu s cílem lépe porozumět situaci, (3) zvažovat různé řešitelské strategie, (4) rozložit daný problém na několik dílčích problémů a (5) oddělit podproblémy, které řešit dovede, od podproblémů, které řešit zatím nedovede, (6) analyzovat příčiny náročnosti (neřešitelnosti) problému, (7) převést daný problém do jiného kontextu pomocí izomorfismu nebo metafory, (8) použít překlad problému do jiného jazyka (obrázek, graf, tabulka,…) a (9) využít specifický kontext dané situace a řešení najít nestandardním postupem.

3 Moje seznámení s prostředím Krokování

Kapitola je rozdělena do dvou částí. V první jsou popsány jednotlivé etapy Krokování. Druhá část je věnována pohledu na dané prostředí z hlediska didaktiky matematiky.

Ani v této kapitole není mým cílem podrobně vysvětlovat danou problematiku. Spíše jde o popis jednotlivých etap jako prolnutí mých poznatků z odborné literatury a zkušeností z experimentů. Podobně jako v první, i v druhé části jde o záznam závažných momentů či problémů, které jsem při vedení experimentů zažila. Pro úplnost informací odkazuji na odbornou literaturu (Slezáková, 2007), učebnice a příručky matematiky od autorů Hejného a kol. (H1/1 – H4). Dále budu tuto literaturu nazývat *Hejného matematiku* a budu používat značky, jak je uvedeno v seznamu literatury.

Prostředí kroků je nový směr v oblasti vstupu dítěte do světa aritmetiky. Krokování respektuje poznávací proces dítěte a propojuje jeho svět reality se světem čísel. Jeho součástí je jazyk šipek, který vytváří prostor pro budování žákova poznání v dalších matematických jevech (např. problematika záporných čísel, rovnosti, kombinatoriky či pravděpodobnosti). Tato provázanost s dalšími oblastmi matematiky v jednom prostředí umožňuje žákům budovat si strukturální pohled na matematiku a nevidět ji jako několik izolovaných disciplín.

Současný stav poznání v tradičním pojetí školské matematiky je zaměřen na seznamování žáků s čísly převážně jako se statickými jevy. Žák je veden k takovému porozumění číslu, které je vázané na předměty (jablíčka, panenky, auta), později na model prstů. V době modernizace (po r. 1976) to byl počet prvků v množině. Poznávání pokračuje uchopováním aditivní triády jako spoje, který musí být žáky memorován. Žákovi je tedy předkládáno porozumění číslu jako nutnost pamatovat si čísla, aby uměl počítat. To znamená, že taková výuka neklade na první místo porozumění, ale spíše dává přednost sdělení návodu, jak reagovat na otázky pokládané učitelem či učebnicí (Kuřina, 2009).

Již v minulé kapitole byla zmíněna problematika výuky matematiky, která vede převážně k procesuálnímu kódování poznatků, tedy nácviku návodů a postupů. Slezáková (2006, s. 123) říká, že *na součet je nahlíženo jako na proces, který dvěma číslům přiřadí číslo třetí – jejich součet, resp. jejich rozdíl.* Nicméně pro porozumění aritmetice je důležité budovat triádu jako koncept či dokonce schéma. A právě v prostředí Krokování a na něj navazujícím prostředí Schody dochází k prolnutí obou vrstev: procesuální a konceptuální, což žákům umožňuje budovat si strukturální porozumění číslu jako konceptu již na prvním stupni ZŠ.

V dramatizaci krokování žák získává zkušenost s aditivní triádou, jež je procesuální. Děje se tak v první fázi, kdy je krokování ukotveno v pohybové a slovní zkušenosti žáka. V navazující etapě se žák seznámí se znakovým jazykem – jazykem šipek, který mu umožní přechod ke konceptu. Propojení konceptu a procesu vede ke vzniku proceptu[17]. To je považováno za kvalitnější porozumění pojmu, v našem případě aditivní triády. Další etapy svou náročností ukazují, že zdánlivě velmi primitivní prostředí může nabídnout úlohy, které svou obtížností převyšují úroveň matematiky prvního stupně základní školy (Slezáková, 2007).

3.1 Etapy krokování

V tomto oddíle popisuji proces budování schématu Kroky. Vycházím z literatury Slezáková (2007) a učebnic Hejného matematiky, avšak na základě vlastních zkušeností měním etapizaci seznamování se s prostředím Krokování. Některé etapy ilustruji situací doplněnou komentářem. Jednotlivé vstupy odlišuji graficky.

0. etapa – předpoklady pro vynoření krokování

Začínají se budovat již v mateřské škole. Důležité je rozvíjet schopnost synchronu kinestetické a akustické činnosti pochodováním při odříkávání říkanek,

[17] Procept je konceptualizovaný proces (zápisky z přednášek M. Hejného). Vytvoření proceptu je cílem vyučování každé matematické vědomosti. Mnoho pojmů vzniká právě z procesu, protože procesuální pochopení předchází konceptuálnímu. (Hejný, 1999)

pochodováním do rytmu písně či básně. J. Slezáková (2007) říká, že si dítě v této etapě uvědomuje sled kroků a jejich rytmičnost, ale nepropojuje je na čísla.

SITUACE: Moje první zkušenost s krokováním pochází ze setkání s předškoláky v Mateřské škole v Uherském Ostrohu. Když jsem s dětmi začala pracovat, tvořily jsme početnou skupinku, kde převažovaly děti ve věku čtyř let nad předškoláky. V průběhu druhé etapy většina čtyřletých dětí odešla, až na jednu holčičku, která pokračovala s předškoláky do třetí etapy, kde už mě děti nepotřebovaly, protože si začaly dávat povely samy. A já jsem mohla jejich učení sledovat jako hru. Všimla jsem si, že se k nim chtěl připojit pětiletý chlapeček, ale nevěděl, jak se podle povelu staršího kamaráda má pohybovat. O rok starší dívenka to viděla, vzala jej za ruku a pochodovala s ním. Když jsem se s dětmi loučila, řekly mi: „Paní učitelko, napište nám tuto hru na papír, ať ju s námi můžou hrát i paní učitelky, až tu nebudete.“ Protože to byl můj první zážitek s krokováním realizovaný s dětmi, hned jsem si jej musela poznamenat.

KOMENTÁŘ: Objevila jsem zde tři pro mě zajímavé aspekty. *Silná motivace k činnosti* – zaujatost dětí pro prostředí. *Sociální aspekt* – kdy dívenka bezprostředně poskytla pomoc mladšímu kamarádovi. *Dramatizace jako cesta k porozumění* – děti samotné si dokázaly svoji „hru“ řídit. Vnímaní krokování jako *hra*.

1. etapa – zavádění krokování (povel, normování kroků) [18]

První etapa většinou probíhá během vzdělávání předškoláků či prvňáčků. Počítáme kroky. Jeden či více žáků krokují. Společně s třídou počítáme kroky a případně vytleskáváme rytmus. Kroky jsou normovány podle krokovacího pásu. Počet kroků je řízen povely, které zprvu dává učitel, později jeho roli převezmou žáci. Povel zní například takto: „Jdi tři kroky vpřed, začni, teď.“ Klíčová slova povelu jsou „začni,

[18] V článku Slezákové (2006, s. 125 -126) je tato etapa rozdělena na čtyři fáze: vstup matematiky, funkce kolektivu, krokování podle povelů a normování kroků. Ve čtvrté fázi taktéž upozorňuje na problematiku způsobu krokování. V mých experimentech jsem tyto fáze spojila.

teď“. Umožňují sjednotit figurantovy kroky s rytmem tleskání či počítání ostatních žáků. Pokud se tak nestane, může nastat ve třídě zmatek a žáci nejsou schopni se orientovat v pohybu figuranta po krokovacím pásu.

Podle mé zkušenosti je z organizačních důvodů důležité, aby krokovací pás měl startovní čáru. Stávalo se mi, že žák přistoupil ke krokovacímu pásu a již tento první vstup počítal (viz experiment 3). V jiných experimentech zase byly vidět rozdíly ve způsobu krokování. Někteří žáci dokonce místo pochodování skákali. O dalších způsobech píše Slezáková (2007). Startovní čára tedy ošetří problémy se směrem, kterým se jde, a díky značkám krokovacího pásu se vyhneme problémům s různou délkou kroků u jednotlivých figurantů.

SITUACE: Žák druhé třídy pozoroval svého spolužáka, jak krokuje povel: „Jdi tři kroky a pak ještě tři kroky dopředu, začni, teď.“ Na otázku kolik kroků tento žák udělal, odvětil: „No záleží na tom, zda chceme vědět, kam se dostane nebo kolik kroků udělal celkem. Kroků udělal 6, ale stojí u sedmé značky.“

KOMENTÁŘ: Značky, u kterých jeho spolužák krokoval, nebyly označeny čísly, ani počáteční. Proto pozorující žák pravdivě komentoval pozorovanou situaci. K povšimnutí stojí žákova bystrost, se kterou dokázal svými slovy popsat číslo v roli adresy a číslo jako operátor změny. Mohu se domnívat, že jeho schéma čísla je již obohacené o tyto modely.

2. etapa – model aditivní triády

V této etapě učitel s žáky dramatizuje matematickou operaci. Vybere dva figuranty např. žákyni Annu a Barunku, které na počátku stojí vedle sebe u počátečního bodu krokovacího pásu. Potom vydá pokyn Anně: „Jdi jeden a pak tři kroky dopředu, začni teď.“ Po jejím odkrokování vydá povel Báře: „ Jdi čtyři kroky dopředu, začni, teď.“ Dívky se opět dostanou vedle sebe. Takové představení pak modeluje vztah 1+3 = 4. Dramatizace podobné úlohy je zachycena na obrázku 3.1 (H1/1, s. 22).

Obrázek 3.1

3. etapa – vícedílný pokyn s povelem dozadu

Učitel velí tří či vícedílný pokyn. Jeden z dílů povelu může obsahovat i pokyn ke krokování dozadu (tzn. kroky pozpátku). Např. „Jdi dva kroky dopředu, tři dozadu, pak čtyři dopředu, začni, teď.“ Žák udělá dva kroky dopředu, zastaví se, udělá tři kroky dozadu, zastaví se a jde čtyři kroky dopředu. Třída počítá: „Jeden, dva, (pauza) jeden, dva, tři, (pauza) jeden, dva, tři, čtyři.“

Při mých experimentech se ukázalo, že žáci druhého ročníku již po dvoudílných povelech s výzvou ke krokování pouze dopředu, sami začnou dávat pokyny vícedílné, kde minimálně jeden z dílů tvoří povel pro pohyb směrem vzad. Domnívám se, že je tomu tak, protože ve svém vědomí již mají mentální reprezentace pojmu sčítání i odčítání jednociferných čísel. Na základě těchto zkušeností jsem proto tyto etapy spojila.

Pokud učitel zvolí čtyřdílný povel, může předpokládat, že většina žáků si tento povel už nezapamatuje. To je impulsem k přechodu do další etapy, která se právě zabývá záznamem krokování.

4. etapa – zavádění jazyka

Při použití vícedílného povelu u žáků vzniká samovolně potřeba si tento povel zaznamenat. Zde je pravá chvíle k vybídnutí žáků k pokusu zaznamenat si takový povel. Z mých experimentů se ukázalo, že žáci často k záznamu používají tečky (příloha č. 2), šipky v kombinaci se symboly (příloha č.1) obloučky (příloha č. 1), někteří i čísla (příloha č.1). Alespoň jednou se v každé třídě objeví i šipkový záznam. Poloha „znaků“ na papíře či stíracích tabulkách je většinou totožná se směrem, podle kterého žáci krokovali (viz experiment č. 3).

Pokud učitel pracuje se svou třídou, může pokusy žáků nechat vyvěsit ve třídě a až po jisté době navrhne šipkový záznam. Ten je složen z šipek, které označují při dramatizaci směr kroků, a boxů s dělítky pro vícedílný pokyn. Každý díl boxu odpovídá jednomu dílu povelu. Například povel: „Jdi dva kroky dopředu, tři dozadu, pak čtyři dopředu, začni, teď,“ odpovídá takovému šipkovému záznamu:

→→	←←←	→→→→

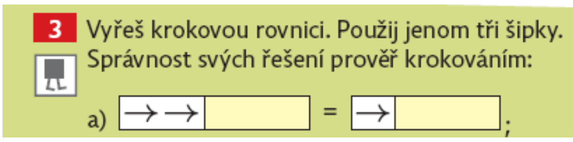
Z toho, že jednotlivé pokyny vkládáme do jednotlivých boxů, vyplývá, že do jednoho boxu se dostanou šipky pouze jednoho směru. Na toto se často zapomíná v etapě, kdy se řeší úlohy pouze na základě šipkového zápisu bez vazby na realizaci krokování a přepisu povelů.

5. etapa – přechod k rovnicím (od druhého ročníku ZŠ)

Od druhého ročníku základní školy jsou žáci schopni řešit úlohy tohoto typu:

→→→→	←	=	

Budeme je nazývat ***šipkové rovnice.*** Po jisté době se rovnice stávají složitější a jejich náročnost stále narůstá. Ve třetích a vyšších ročnících jsou žáci již v tomto prostředí schopni řešit i ***rovnice s absolutní hodnotou*** (Slezáková, 2007). Například v učebnici matematiky (H3, s. 25) je možno najít úlohu z obrázku 3.3.



Obrázek 3.3

Vyřeš krokovou rovnici. Použij právě tři šipky:

→→		=	→	

V každém boxu je po jednom prázdném poli a přitom je dán celkový počet šipek, které je nutno doplnit do označených dvou boxů. Úloha má dvě řešení:

první:

→→	→	=	→	→→

druhé:

→→	←←	=	→	←

Jestliže tuto úlohu převedeme do matematického jazyka, dostaneme soustavu rovnic:

$$2 + x = 1 + y, |x| + |y| = 3$$

J. Slezáková (2007, s. 130) upozorňuje na přesnou terminologii těchto rovnic: *Přesně řečeno, měli bychom mluvit o soustavě dvou rovnic, z nichž jedna je s absolutní hodnotou.*

Navazující etapy jsou:
6. etapa – koncept kombinatoriky;
7. etapa – koncept pravděpodobnosti;
8. etapa – krokování čelem vzad (mínus před závorkou);
9. etapa – rovnice dvoubarevné (dvojdimenzionální).

Paralelně s prostředím Krokování je vstupováno i do prostředí Schody. A protože v následujících etapách se střídají úlohy z prostředí Krokování a Schodů, rozhodla jsem se podat jeho stručnou charakteristiku nyní a k výše uvedeným etapám se vrátit v následujícím popisu.

Prostředí SCHODY

Číslo, které je jedním z prvních objektů tvořícího se světa matematiky dítěte předškolního a raně školního věku, je budováno v první etapě v úzké vazbě na životní zkušenost žáka. Slovo tři má pro dítě smysl jenom tenkrát, když je sémanticky ukotveno: tři jablka, třetí židle, o tři bonbóny více. Tyto tři základní typy sémantického ukotvení čísla nazýváme stav (S), adresa (A) a operátor (O) (Slezáková, 2007, 135).

V tradičním pojetí vzdělávání se matematice, jsme seznamováni převážně s číslem, které je sémanticky ukotveno jako stav. S úlohami, ve kterých by číslo bylo v roli operátoru nebo adresy, se v takovém přístupu setkáme ojediněle. Avšak experimenty s dětmi šestiletými (Slezáková, 2007) až osmiletými ukazují, že číslo jako adresa nebo operátor, jsou dětem dobře dostupné, pokud se zavádí ve shodě s životní zkušeností dítěte (Slezáková, 2007).

A právě v prostředí Schody se setkáváme s čísly jako adresou i operátorem. Jde zde o fiktivní schodiště (obr. fiktivní schodiště z učebnice Fraus), které je reprezentováno číselnou osou položenou na podlahu ve třídě.

Obrázek 3.4

Pracujeme zde jak s číslem jako adresou (tj. 3. schod rovná se schod číslo 3), tak i s operátorem změny (Oz) a porovnání (Op).

Název	**Značka**	**Příklad**
Operátor porovnání	Op	A stojí o 4 shody výše než B.
Operátor změny	Oz	A vystoupil o dva schody.

Tabulka: Operátory (Slezáková, 2007)

Popis situace v prostředí Schody: Stojím na schodu 3; jdu dva kroky vpřed (nahoru), pak tři kroky vzad (dolů) a končím na schodu 2.

3	→→	←←←	2

Zapsáno matematickým jazykem: 3 + 2 – 3 = 2.

Zde uvádím příklad úloh, se kterými se lze v tomto prostředí setkat.

Úloha: Doplň do prázdného pole číslo.

3	→→→→	

Již na konci prvního ročníku dokážou žáci tyto úlohy řešit i je přepisovat do jazyka čísel: 3 + 4 = _7_. V této úloze jsme zjišťovali součet dvou čísel, vyjádřený sémanticky ukotveným číslem jako adresou. Úlohu bychom tedy mohli přepsat do sémantické roviny jako A + Oz = A.

Obtížnější úroveň pro žáky představují úlohy, kde je více operátorů např.

5	→	←←←	→	

nebo kde neznají výchozí adresu:

	→	←←←	→	5

Jakým způsobem žáci řeší úlohy podobného typu, se zabývám v experimentu 9.

Dalším typem úloh jsou úlohy, kdy jsou zadány obě adresy, ale neznáme operátor změny, příkladem může být tato úloha:

2	←←←		4

V navazujících etapách se rovněž setkáme s úlohami z prostředí Schody.

6. etapa – koncept kombinatoriky

Ve všech úlohách, kde se ptáme na více řešení, u žáků rozvíjíme kombinatorické myšlení. Příklad úlohy:

Jednodílný zápis nahraď dvoudílným zápisem obsahující 6 šipek.

→→→→→→

Úloha má sedm řešení:

→→→→→→	

→→→→→	→

→→→→	→→

→→→	→→→

→→	→→→→

→	→→→→→

	→→→→→→

V prostředí Schody lze taktéž najít úlohy, které vedou k rozvoji kombinatorického myšlení. Příkladem může být úloha:

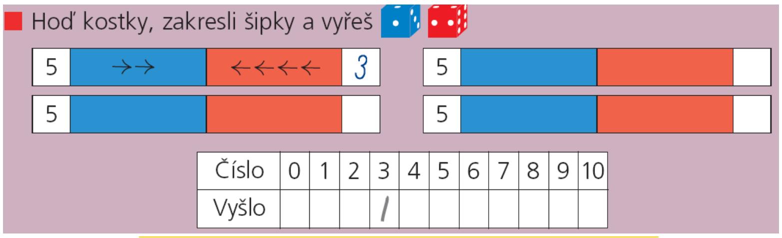
Kolika způsoby lze doplnit šipkový zápis pomocí nejvýše 3 šipek?

-1				2

7. etapa – koncept pravděpodobnosti

Zkušenosti s pravděpodobností je možné dětem dávat již od prvního ročníku. K rozvoji pravděpodobnostního myšlení přispíváme úlohami tohoto typu:

Žák hází dvěma kostkami, které jsou barevně odlišeny. První hází modrou kostkou. Číslo, které na kostce padne, označuje počet kroků směrem dopředu. Pak hází kostkou červenou. Číslo opět ukazuje, kolik kroků má žák udělat, ale tentokrát směrem dozadu. Kroky jsou přepisovány do tabulky jako šipky. Do přichystané tabulky dole žák zapisuje čárky číslům (adresám), na které v jednotlivých kolech došel. Následující typ úlohy ukazuje obrázek 3.5 z učebnice matematiky (H1/2, s. 53).



Obrázek 3.5

Po vyřešení úlohy žáky zaměří učitel pozornost na otázky tohoto typu: Které číslo vám padlo nejčastěji? Které číslo vám padlo nejméněkrát? A proč? Co kdybych připsala do tabulky číslo 11? Děti by měli přijít na to, že to je jev nemožný. Učitel také může s žáky evidovat výsledky celé třídy. Při počtu 25 žáků ve třídě, by se jednalo o sběr dat ze 100 hodů. Při takové evidenci může být pravděpodobnost výsledných čísel pro žáky zřetelnější. Tedy taková úloha je také vhodná pro práci s daty i práci s několika úrovňovým sběrem dat.

Pravděpodobnostní myšlení buduje učitel i hrami typu Fáborky.

Hra Fáborky

Žák obdrží tři fáborky a ty položí na tři značky - čísla krokovacího pásu. Například na číslo 4, 6 a 12. Pak se postaví na začátek, startovní čáru, a hodí dvěma kostkami. Sečte počet puntíků na padlých kostkách a tento součet odkrokuje. Kupříkladu když padne 3 a 6, odkrokuje 9 kroků. Má-li na značce, ke které došel, fáborek, získává bod. Pokud nemá, nezíská nic. V závislosti na prostoru třídy může učitel umožnit hrát více žákům najednou. Je však důležité, aby se celá třída vystřídala třeba během jednoho týdne a aby měl každý žák aspoň tři pokusy s možností položit svoje fáborky (Slezáková, 2007).

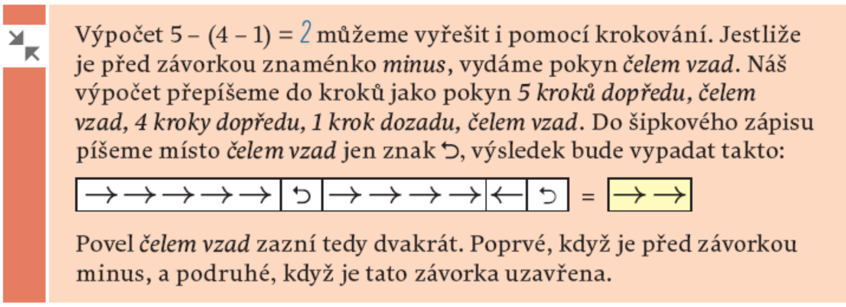
Když s tím žáci nepřijdou sami, navrhne učitel evidovat jednotlivé výsledky žáků do přehledné tabulky. Z tabulky pak lze zjistit, že některé výsledky jsou častější než jiné. Žáky, kteří si této skutečnosti všimnou, povede toto poznání ke kladení fáborků k nejčastěji frekventovaným značkám.

Ti žáci, kteří tak činí, mají již vytvořený první klastr budoucího schématu pravděpodobnosti výsledku v jevu „hod dvěma kostkami“ (Slezáková, 2007, s. 132).

8. etapa – krokování čelem vzad (mínus před závorkou)

V této etapě žák získává zkušenost se sémanticky reprezentovaným znaménkem „mínus před závorkou“. V šipkovém zápise je tato reprezentace zaznamenána znakem ⮌, slovně je vyjádřena pokynem „čelem vzad“.

Jak vypadá zavedení tohoto nového jevu, popisuje situace na obrázku 3.6 z učebnice (H3, s. 91).


Výpočet 5 – (4 – 1) = 2 můžeme vyřešit i pomocí krokování. Jestliže je před závorkou znaménko *minus*, vydáme pokyn *čelem vzad*. Náš výpočet přepíšeme do kroků jako pokyn *5 kroků dopředu, čelem vzad, 4 kroky dopředu, 1 krok dozadu, čelem vzad*. Do šipkového zápisu píšeme místo *čelem vzad* jen znak ⮌, výsledek bude vypadat takto:

→→→→→ ⮌ →→→→ ← ⮌ = →→

Povel *čelem vzad* zazní tedy dvakrát. Poprvé, když je před závorkou minus, a podruhé, když je tato závorka uzavřena.

Obrázek 3.6

3.2 Krokování z hlediska didaktiky

V této části se dívám na prostředí Krokování z hlediska didaktiky matematiky. Zabývám se zde důležitými aspekty, které považuji v prostředí Krokování za klíčové.

3.2.1 Motivační aspekt a různé strategie řešení

Jistě každý ve své paměti najde vzpomínky na děti, které pokládají jednu otázku za druhou, objevují, jak věci fungují apod. Děti jsou zvídavé a mají potřebu objevovat, experimentovat. Matematika vycházející z životních zkušeností dítěte tak motivuje k akci (viz uvedená situace v první etapě), umožňuje simulaci reálných situací a přitom uspokojuje právě výše popsané potřeby. Děje se tomu tak, protože prostředí jim nabízí hledat různé strategie řešení. Tato cesta objevování je pak cestou ke kultivaci žákova myšlení (Hejný, 2007). Myslím si, že právě tyto charakteristiky prostředí Krokování splňuje.

3.2.2 Různé modely čísla.

Podívejme se na situaci, kdy učitel zadá žáku například tento povel: „Jdi čtyři kroky dopředu, začni, teď." Žák – figurant jde podél krokovacího pásu a do rytmu krokování počítá spolu s ostatními žáky jednotlivé kroky: „Jeden, dva, tři, čtyři." A tak se žák setkává s různými modely čísla. Když krokuje, tleská nebo dupe do rytmu, pak se setkává s modelem kinestetickým. Žákův pohyb je doprovázen slovy, tak se setkává s modelem akustickým. A v neposlední řadě s modelem vizuálním. Když krokuje, vidí jednotlivé značky krokovacího pásu. Stejně tak když jeho pohyb sleduje spolužák, tak vidí nejen značky, ale také spolužákův pohyb. Tyto modely se v prostředí krokování propojují a vyjadřují jedno a totéž číslo. Takové poznání vede k tvorbě generického modelu. Rytmus provazuje akustický a kinestetický model. Proto je v první etapě krokování důležité budovat synchron těchto modelů.

3.2.3 Stav, Operátor změny, Adresa

V klasické matematice se žák setkává převážně s modelem čísla jako stavu[19]: „pět autíček". V prostředí krokování žák poznává číslo jako operátor změny „jdi pět kroků dopředu".

SITUACE: Na matematickém kroužku jsem zadala tuto slovní úlohu:
Paní Nováková si šetřila peníze na nové piano, a tak si ukládala peníze na účet. V dubnu vložila na tento účet 1500 Kč. Následující dva měsíce měla nečekané výdaje, a proto v každém z těchto měsíců musela zaplatit 450 Kč. V červenci ušetřila 520 Kč, a tak je tam přidala. Nyní má ušetřeno 19 700. Jakou částku měla paní Nováková v březnu na účtu? První reakce jednoho žáka páté třídy

[19] Stav i adresu popisuje J. Slezáková (2007, s. 136) jako údaj uzavřený. Informace u stolu „je pět židlí" nevyvolává další otázky o číslech.

byla, že úlohu nelze vypočítat, protože se neví, kolik měla paní Nováková na začátku.

Operátor je údaj otevřený. Informace „dvě židle ubyly“ vyvolává otázku o počtu židlí, které zde byly původně, a o počtu židlí, které jsou zde teď. Tato dvě čísla jsou v operátoru změny virtuálně přítomna (Slezáková, 2007, s. 136).

Z dané situace vyplývá, že právě ona náročnost přítomnosti dvou virtuálních údajů u operátorů změny vedla chlapce k jeho první otázce a způsobovala mu problémy při řešení úlohy. Podobně píše J. Slezáková (2006): *děti, které počítají operátorové úlohy, se dožadují virtuálních údajů.*

Když se nad situací zamyslíme z hlediska poznávacího procesu, můžeme říci, že pokud chlapec není schopen řešit úlohy operátorového typu, pak jeho schéma čísla není bohaté na modely čísla sémanticky ukotveného jako operátor. Jinými slovy, chlapec nemá dostatek zkušeností, které by mu přinesly vhled do podobných úloh. Jaké je řešení? Poskytnout žáku příležitosti pro získání zkušeností s úlohami, kde je číslo sémanticky ukotveno jako operátor.

V prostředí Krokování jsou řazeny operátorové úlohy už od prvního ročníku. Prochází-li žák všemi etapami již na prvním stupni, pak jeho matematické poznání bude obohacené o generický model čísla v roli operátoru změny.

Krokování podporuje budování číselných představ převážně v roli operátoru, což je přínosné, protože v samotné výuce je toto prostředí doplňováno strukturálními prostředími. Žák si tak buduje schéma čísla obohacené o rozmanité modely.

V prostředí Schody žák pracuje s číslem ve významu adresy (stojím na čísle dva) i operátoru (jdi o tři kroky dozadu).

3.2.4 Procesuální prostředí – pomíjivost jevu

Model „udělej čtyři kroky“ je v tomto prostředí nejprve realizován pohybem – kinestetikou těla. Toto „pohybové představení“ je proces, který trvá jen tak dlouho, dokud jej žák nebo žáci odehrávají. Poté proces pomíjí, avšak žákovi zůstává vzpomínka – zkušenost. To vede k snadnějšímu zapamatování a lepšímu porozumění v prostředí, které dítě důvěrně zná.

Každé představení „krokování“ (vlastní odkrokování úlohy) je izolovaný model čísla. V momentě, kdy se žák už pohybuje v rovině šipek, stávají se šipky modelem generickým, zastupující jeden izolovaný model či více izolovaných modelů. Čím je bohatší, tím více izolovaných modelů zastupuje. Generický, zástupný model, poznáme tak, že dítě řeší šipkovou úlohu, aniž by ji potřebovalo fyzicky odkrokovat.

3.2.5 Spoj x Koncept

V tradiční matematice jde o automatizování aritmetických operací, např. sčítání jednomístných čísel. Žák si tedy musí nacvičovat spoje typu 2 + 3 = ___. Ty jsou pak vkládány učitelem do různých kontextů. Často žák umí rychle počítat, aniž by porozuměl konkrétní operaci. Například ví hned, že 2 . 3 = 6, leč netuší, kdy to použít. Rovnost bývá vnímána silně procesuálně.

Naopak v „Krokování“ žák poznává, že určitý jednodílný povel lze nahradit dvoudílným povelem, který jej přivede na stejné místo na krokovacím pásu, a naopak. Na obou stranách ale mohou být i vícedílné povely. Tudíž žáka, až začne šipkový zápis přepisovat do číselného, nezaskočí, že za znakem = není vždy jen jedno číslo (výsledek). V jeho budování poznatků o číslech a jejich vztazích vzniká konceptuální porozumění rovnosti.

3.2.6 Komutativnost

Rovnost v prostředí Krokování bývá interpretována pomocí dvou žáků, kteří po odkrokování svých povelů stojí na stejné značce. Situace se zapíše, ale přitom není určeno pořadí, v jakém mají být povely pro jednotlivé žáky zapsány. A tak se žáci seznamují se symetrií rovnosti i s komutativností sčítání.

SITUACE z experimentu č.9[20]: Žák 5. třídy řešil několik úloh tohoto typu „Vyřeš šipkovou rovnici pomocí tří, anebo čtyř šipek. Hledej více řešení.“ Na závěr hodiny jsem jej požádala, aby písemně odpověděl na otázku, zda něco nového objevil. V jeho pracovním listu byla zapsána tato odpověď: Že se dají obrátit

→	=	←←	→→→

a je to stejné jako

→	=	→→→	←←

KOMENTÁŘ: Žák svými slovy popsal svůj objev komutativnosti sčítání, kdy zjistil, že nezáleží na pořadí zapsaných kroků (tedy jestli první zapíše dva a pak tři kroky, či naopak), aby byl výsledek stejný.

V prostředí Schodů je méně vhodné osvětlovat komutativnost sčítání. Rovnost je zde interpretována chůzí (krokováním) jednoho žáka. Poslední číslo, na které žák přijde, je výsledek krokování. Zde nelze příliš osvětlit symetrii rovnosti, která je v tomto případě silně procesuální. Objevení komutativnosti sčítání v tomto prostředí nebude jednoduché, ale u některých nadaných jedinců by se tak stát mohlo, avšak sama jsem se s takovou situací nesetkala.

3.2.7 Číselná osa a Celá čísla

Žák v procesu pochodování po krokovacím pásu získává zkušenosti nejen s číselnou osou, ale i s krokováním dozadu. Chůzí vzad se přirozeně dostává i do záporných čísel, například pokynem: „Udělej dva kroky dopředu, 3 kroky dozadu.“ Výsledkem je jeden krok dozadu, tedy záporný operátor -1.

[20] Tato část experimentu není v diplomové práci blíže analyzována, zde z něj uvádím pouze tuto situaci.

V prostředí Krokování je záporné číslo sémanticky ukotveno jako krok dozadu a je v roli operátoru změny. V prostředí Schody je vyjádřeno značkou např. -1 a je v roli adresy.

Žák tedy poznává celá čísla ve dvou rolích, buduje si o nich představy a je pak schopen je využívat při řešení různých typů úloh.

3.2.8 Jazyk šipek

Jazyk je prostředkem běžné komunikace a slouží nám k formulování myšlenek. Jirotková (2010) píše o tom, že různým úrovním myšlení vyhovují různé typy jazyků a případná nerovnováha mezi typem myšlení a jazykem může vést k zpomalení myšlení a demotivaci žáka.

D. Jirotková v (Jirotková, 2010) také říká, že v učebnicích pro první ročníky základních škol se můžeme setkat s předčasným psaním číslic, což vede k riziku brzkého odtrhnutí matematiky od životních zkušeností žáka. To však není žádoucí, protože žákovo porozumění matematickým pojmům vychází právě z jeho zkušeností.

To poukazuje na důležitost budování jazyka, který se vyvíjí podle potřeb žáka. Pokud si žák tvoří jazyk pro potřebu dané situace, nebo se alespoň na tvorbě jazyka podílí, pak je schopen v tomto jazyce formulovat otázky, tvořit úlohy (viz experiment 5). To vede ke zdokonalování daného jazyka na základě re–schematizace jeho poznání. Klíčovým kritériem je, že „svému jazyku“ dobře rozumí, což mu umožňuje snadný přechod k zavedení matematického jazyka. Jinými slovy, nejde o přijetí jazyka od autority – učitele, aniž by měl žák vybudované představy o číslech, ale jde o smysluplný přechod do matematického jazyka, jenž je podložen různorodými mentálními reprezentacemi.

V prostředí Krokování se setkáváme s třemi jazyky. Verbálním, když zadáváme slovní povel. Kinestetickým, jehož prostředkem je krokování. A se třetím jazykem znakovým, který tvoří jazyk šipek. Tyto tři jazyky vedou ke schopnosti žáka pracovat s operátorem změny (Slezáková, 2007).

Pomocí znakového jazyka šipek můžeme s dětmi evidovat každý proces krokování, který byl do této chvíle pomíjivý. Můžeme jím zaznamenávat představení krokování nebo jej použít jako zápis, jehož čtením vznikne povel, který se pak realizuje krokováním. Šipkový jazyk tvoří „spojovatele“ mezi zkušeností žáka s krokováním a matematickým jazykem.

3.2.9 Jaké komplikace mohou nastat při výuce?

- Způsob krokování. Jako korektní způsob krokování je v literatuře uznán způsob jeden po druhém (Slezáková, 2007). Eliminuje totiž problém „tři kroky“ při dvou krocích, kdy u jiných způsobů krokování žáci počítají ještě přísun nohou za krok. Podrobně mluví na toto téma J. Slezáková v (Slezáková, 2007, s. 133 – 134).
- Vynechání povelu: „Začni, teď.“ Každý povel by měl být ukončen „Začni, teď.“ Tato slova pomáhají žáku orientovat se v povelu. Tedy kdy je jeho konec a kdy má začít krokovat. Sama mám zkušenost, že žáci začínají krokovat, ještě než dokončím povel.
- Neschopnost synchronu akustického a pohybového. Je důležité, aby alespoň v prvních fázích žáci počítali společně nahlas. U mladších žáků (v prvním ročníku) se může stát, že počítají v jiném rytmu, než chodí. Pohybový rytmus není v souladu se zvukovým. Ale i u těchto žáků je potřeba rytmus propojit a vybudovat synchron. Učitel může těmto žákům pomoci: „Teď to pojďte dělat stejně s kamarádem.“ Žáci se tak učí nápodobou od ostatních spolužáků a vzájemně si pomáhají. Sociální interakce s vrstevníky pomáhá slabším žákům vyrovnat se se svými problémy.
- Neporozumění rovnosti, slovům či pokynům. Je zásadní, aby byly vždy vysvětleny všechny obraty, aby žáci řešili s porozuměním a pracovali bez přílišného energetického výdaje. Proto povely musí být jasné a žák musí vědět odkud kam jít.

  První fáze krokování se zdají být velmi snadné, ale je důležité, aby jimi každý žák prošel. Mám zkušenost, že u některých žáků dochází k neporozumění rovnosti, když se tyto etapy nedostatečně projdou.

3.3 Shrnutí

Prostředí Krokování stejně jako ostatní matematická prostředí, důsledně dodržuje poznávací proces (teorie generického modelu a budování schémat). Cesta matematického poznání jde od zkušenosti (jdu dva kroky dopředu), kde žák poznává izolované modely čísla, přes sémantický jazyk (nejprve jazyk slov, pak různorodých záznamů, dále jazyk šipek, pak čísel a šipek), kde se jazyk šipek stává generickým modelem čísla, až k matematickému jazyku (jazyku čísel), jež tvoří abstraktní model čísla obohacující žákovo schéma čísla.

V tradiční matematice je to často naopak. Jde se od matematického jazyka („Děti tohle: $2 \cdot 2 = 4$ je násobilka.“) přes sémantický jazyk („To, děti, znamená, že ….“) ke zkušenosti („Tak si to teda ukážeme. A teď se to naučíme: 2, 4, 6…“). U některých žáků může nastat situace, že dokáží odříkat násobilku, takže se to učiteli jeví, že násobilku umí, ale žák sám neví, v jaké situaci má daný spoj využít.

SITUACE: Sama mám zkušenost, kdy žáci byli schopni rychle odříkat násobilku dvou, ale na úlohu „Po každém tlesknutí udělej dva dřepy. Kolik uděláš dřepů, když tlesknu dvakrát?“ nebyli schopni ti samí žáci odpovědět. Taktéž nebyli schopni udělat daný počet dřepů při opakování situace s obměnou tlesknutí.

KOMENTÁŘ: Buď to byla pro žáky nová neznámá situace, která způsobila obtíže s řešením, nebo jsou u nich tyto poznatky z násobilky pouze otázkou pamětného počítání bez porozumění.

Ukazuje se tedy, že prostředí Krokování je velmi podnětné prostředí, které žákům nabízí smysluplný vstup do světa aritmetiky.

4 Experimenty

V této kapitole se nejprve zabývám metodologií výzkumu. Poté uvádím poznámky ke zpracování experimentů, přehled experimentů a vlastní experimenty. V tomto posledním oddíle se věnuji popisu a analýze realizovaných experimentů.

4.1 Příprava a realizace

Cílem experimentální části bylo najít a analyzovat problematické jevy při výuce v prostředí krokování. Zaměřila jsem se na hledání odpovědí na tyto otázky:

- Jaký jazyk žáci vytvářejí pro záznam kroků?
- Jakými způsoby žáci řeší úlohy s výskytem operátoru?
- Na jaké úrovni jsou žáci prvního stupně schopni rozumět záporným číslům?
- Jaké obtíže můžou nastat při realizaci krokování?

V neposlední řadě bylo mým cílem evidovat a reflektovat svou roli experimentátora a učitele. Specifické cíle jednotlivých experimentů[21] jsou uvedeny v příslušném protokolu.

V závislosti na charakteru stanovených cílů jsem zvolila kvalitativní výzkum (Maňák; Švec, 2004), který je zaměřen na průběh experimentu, nikoli na výsledný produkt.

Své zkoumání na poli krokování jsem začala v roce 2007 videozáznamem vyučovací hodiny, která je zaměřena na krokování. Na přelomu roku 2008/2009 jsem provedla dva experimenty na anglické škole Bishop Lonsdale School ve Velké Británii při studiu na University of Derby. V roce 2009 a 2010 jsem pokračovala dalšími experimenty realizovanými v rámci matematického kroužku v homogenní variantě při

[21] Experiment je v této práci chápan obšírněji jako „pokus“ nebo „zkoušení“ (Gavora, 1996, s. 87).

studiu na PedF UK. Poslední v řadě byly uskutečněny experimenty na různých základních školách v různých třídách. Jako poslední jsem realizovala experiment ve spolupráci s kolegyní Věrou Koudelkovou na Základní škole Slovenská v Praze.

Všechny experimenty proběhly na školní půdě, většinou během vyučování, nebo odpoledne po vyučování (v případě matematického kroužku). Třídy, v nichž byly experimenty realizovány, byly vybrány náhodně.

4.2 Poznámky ke zpracování experimentů

Z realizovaných experimentů jsem vybrala tři. Experimenty jsou analyzovány s cílem popsat jevy, které se při experimentech vyskytly, spekulovat nad nimi a pokusit se je vysvětlit. Při popisu jevů je mou snahou ptát se, proč k tomuto jevu dochází.

Celkové množství realizovaných experimentů nelze zpracovat do jedné diplomové práce, proto jsem dala přednost experimentům, které obsahují pro mě velmi zajímavé jevy či evidují moje chyby. Uvědomila jsem si, že právě rozborem situací, ve kterých jsem chybovala, se mohu nejvíce poučit.

Když jsem začala s přepisem videozáznamu u prvních experimentů, byla jsem zděšená a zničená z toho, kolik chyb jsem při vedení experimentu udělala. Nemohla jsem uvěřit, jak jsem byla autoritativní. Byla jsem na sebe velmi naštvaná a vážně jsem v té době přemýšlela o ukončení své začínající učitelské praxe. Trvalo mi dva měsíce, než jsem se mohla vrátit k rozboru experimentu, a ještě déle, než jsem přišla na myšlenku, že právě skrz tyto analýzy vede cesta mého učitelského vývoje. Proč?

Myslím si, že klíčem k nápravě je právě „uvědomění si chyby“. Všeobecně vzato, pokud člověk neví, že chybu dělá, pak nemá co napravovat, protože si chybu neuvědomuje. Skutečnost, že jsem si uvědomila význam chyb a jejich rozboru, mi znovu dodalo sílu pro další analýzy.

V pořadí prvním experimentu předkládám analýzu záznamů řešení úlohy realizované dramatizací. V pořadí druhý experiment je zaměřen na žákovo poznávání rovnosti. A posledním uvedeném experimentu jde o pozorování strategií žáků při řešení úloh z prostředí Schody.

Z uvedených experimentů jsou zpracovány pouze relevantní části. Ke každému experimentu připojuji protokol, kde zaznamenávám datum uskutečnění experimentu, jména a věk účastníků, místo realizace. Dále eviduji cíle každého experimentu, další účastníky a materiál získaný z experimentů. Pokud je v evidenci uveden čas, tak neodpovídá času celého experimentu, ale pouze dané části a je zaznamenán v minutách a sekundách. Z důvodu zachování soukromí žáků jsou jména všech účastníků z ČR změněna, a proto také nepřikládám videozáznamy, kde by byli žáci rozpoznatelní.

V záznamech používám tuto symboliku:

Ex-01: znamená první vstup experimentátora do rozhovoru.

Xx-01: znamená první vstup žáka do rozhovoru (xx jsou první dvě písmena jména žáka).

V závorkách uvádím činnost, kterou žák nebo experimentátor vykonával a poznámky vysvětlující danou situaci. Příklad: (krokuje sedm kroků způsobem normální chůze).

4.3 Přehled experimentů

Experiment:	**0**	**1 a) b) c)**	**2**	**3**	**4**
Datum:	19. 6. 2008	24. 11. 2008	8. 12. 2008	27. 10. 2009	1. 12. 2009
Účastníci:	žáci 2. třídy	žáci Key Stage II, Year 3	žáci Key Stage II, Year 3	2. třída: Ota, Pavel 5. třída: Norbert, Jana, Tamara	2. třída: Ota, Pavel
Věk:	8 a 9 let	7 a 8 let	7 a 8 let	8 a 10 let	8 let
Místo:	ZŠ Ing. M. Plesingerova-Božinova, Neratovice, ČR	Bishop Lonsdale School, Velká Británie	Bishop Lonsdale School, Velká Británie	matematický kroužek, ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR	matematický kroužek, ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR
Další přítomní:	třídní učitelka	studentky Lenka a Ivana	studentka Zuzana	studentky PedF UK v Praze	studentky PedF UK v Praze
Evidence:	VZ, ZŽŘ	VZF, ZŽŘ	VZF, ZŽŘ	VZ, ZŽŘ	VZ, ZŽŘ
Nástroj:	úlohy	úlohy	úlohy	úlohy	úlohy
Poznámky:	v době vyučování	v době vyučování na chodbě	v době vyučování	po vyučování ve volném čase	po vyučování ve volném čase
Kde:	AA	AA	AA	str. 52	AA

Vysvětlivky: **VZ** – videozáznam, **VZF** – videozáznam na fotoaparátu,
ZŽŘ – záznam žákova/žákovských řešení; **AA** – archiv autora

Experiment:	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Datum:	8. 12. 2009	15. 12. 2009	19. 3. 2010	29. 4. 2010	4. 5. 2010
Účastníci:	2. třída: Ota	1. třída: Kamil 2. třída: Ota a Pavel	žáci 2. třídy	žáci 2. třídy	1. třída: Kamil, Anežka 2. třída: Ota, Pavel 5. třída: Lukáš, Illy, Tamara
Věk:	8 let	7 a 8 let	8 až 9 let	8 až 9 let	7, 8 a 11 let
Místo:	matematický kroužek, ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR	matematický kroužek, ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR	ZŠ Kunratice, Praha 4, ČR	ZŠ Šeberov, Praha 4, ČR	matematický kroužek, ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR
Další přítomní:	studentky PedF UK v Praze	studentky PedF UK v Praze	třídní učitelka	třídní učitelka, zástupkyně ředitele	studentky PedF UK v Praze
Evidence:	VZ, ZŽŘ	VZ, ZŽŘ	ZŽŘ	ZŽŘ	fotografie, ZŽŘ
Nástroj:	úlohy	úlohy	úlohy	úlohy	úlohy
Poznámky:	po vyučování ve volném čase	po vyučování ve volném čase	v době vyučování	v době vyučování	po vyučování ve volném čase
Kde:	str. 74	AA	AA	AA	str. 79

Experiment:	**10**	**11**	**12**	**13**	
Datum:	11. 5. 2010	19. 5. 2010	17. 1. 2011	8. 2. 2011	
Účastníci:	5. třída: Tamara, Illy, Lukáš	žáci 5. třídy	žáci 4. třídy	žáci 4. třídy	
Věk:	11 let	11 a 12 let	9 a 10 let	9 a 10 let	
Místo:	matematický kroužek, ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR	ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR	ZŠ Slovenská, Praha 2, ČR	ZŠ Slovenská, Praha 2, ČR	
Další přítomní:	studentky PedF UK v Praze	studentky PedF UK v Praze	třídní učitelka	studentka Věrka	
Evidence:	ZŽŘ	ZŽŘ	ZŽŘ	VZ, ZŽŘ	
Nástroj:	úlohy	úlohy	úlohy	úlohy	
Poznámky:	po vyučování ve volném čase	v době vyučování	v době vyučování	v době vyučování	
Kde:	AA	AA	AA	AA	

Vysvětlivky: **VZ** – videozáznam, **VZF** – videozáznam na fotoaparátu, **ZŽŘ** – záznam žákova/žákovských řešení; **AA** – archiv autora

4.4 Vlastní experimenty

- Experiment 3 – způsob chůze/záznam krokování
- Experiment 5 – kombinatorická úloha
- Experiment 9 – prostředí Schody

4.4.1 Experiment 3 – způsob chůze/záznam krokování

Tato kapitola je rozdělena do čtyř částí. Je zde možno najít scénář i evidenci experimentu. Oddíl Evidence průběhu experimentu obsahuje přepis části videozáznamu s mými komentáři, dále evidenci a rozbor žákovských záznamů krokování. V části Přehled jevů popisuji jevy, které se při rozboru experimentu vyskytly. Na závěr hodnotím experiment a svou roli v něm.

Z důvodu ochrany osobních dat jsou jména účastníků experimentu změněna.

PROTOKOL

DATUM: 27. 10. 2009, 14:00 – 14:45

ÚČASTNÍCI: 2. třída: Ota, Pavel

5. třída: Norbert, Jana, Tamara

VĚK: 8 a 11 let

MÍSTO: ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR

MATERIÁL: videozáznam, písemná řešení žáků 5. třídy a záznamy žáků 2. třídy

NÁSTROJ EXPERIMENTU: úlohy

CÍL EXPERIMENTU: Evidovat způsoby krokování žáků i jejich záznamy krokování.

KOMENTÁŘ: Experiment byl vytvořen se dvěma cíli, jednak připravit smysluplnou náplň matematického kroužku a jednak získat experimentální materiál z prostředí krokování. Věděla jsem, že experimentu se budou účastnit žáci rozdílných ročníků s odlišnou matematickou úrovní, proto jsem experiment rozdělila na dvě části. Pro pátou třídu byl nachystán pracovní list s šipkovými rovnicemi. Pro žáky druhé třídy úlohy ke krokování.

V tomto experimentu vystupuji ve dvou rolích, jak v roli experimentátora, tak v roli učitele. Experimentu byly přítomné ještě další čtyři studentky homogenní varianty PedF UK v Praze. Experiment proběhl v přátelské atmosféře, nic jej nenarušilo.

SCÉNÁŘ

Úlohy byly rozděleny na tři části. První část „ úvodní“ – byla připravena s myšlenkou obohatit vstup žáků do prostředí Krokování a pracovat s oběma třídami dohromady. Druhá i třetí část byla připravena pro žáky druhé třídy s těmito cíli:

- Žák krokuje podél krokovacího pásu jednodílný i vícedílný pokyn.
- Seznamuje se s modelem aditivní triády v prostředí Krokování.
- Žák svým vlastním způsobem zaznamenává vícedílný povel.

Pro žáky páté třídy byl připraven pracovní list s šipkovými rovnicemi a výzvou Krokuj a vyřeš. Dohled nad těmito žáky zajišťovaly přítomné studentky, které pro práci s žáky dostaly instrukce.

Ve scénáři používám tyto zkratky: **U/E** – učitel nebo experimentátor, Ž – žáci, OT – organizace třídy, U – úloha, Oč. – očekávání

Část úvodní

OT: Obě skupiny žáků přijdou ke krokovacímu pásu. Na jedné lavici jsou zde pro ně přichystané papíry pro případ, že si budou chtít daný pokyn zaznamenat.

U/E: Přečte úvodní příběh:

Na ostrov pokladů, který je osídlován piráty, lidojedy i lesními lidmi, právě připluli lovci pokladů. Nikolas, vedoucí skupiny, hlídkuje spolu s ostatními lovci na kraji ostrova, zatímco Jack už stojí u stromu, kolem nějž se někde nachází poklad. Jack čeká na velitelův příkaz. Vedoucí výpravy volá na Jacka příkaz: „Postav se ke stromu a jdi 5 kroků dopředu, pak dva zpátky, pak tři kroky dopředu a nakonec ještě čtyři kroky zpátky.“ Jack má ale špatnou paměť, kapitán musí tedy sdělit Jackovi jednodílný pokyn, tedy kolik kroků musí Jack udělat celkem. *Dokázali byste kapitánovi poradit, co má na Jacka zavolat? Na kolik kroků je od daného stromu vzdálen poklad? Kdo by mu poradil?*

Oč.: Očekávám od žáků různé výsledky, protože povel je vícedílný a jedno poslechnutí těžko zapamatovatelný.

U/E: Navrhne, abychom si situaci odehráli a ujistili se, který výsledek je správný a proč.

Oč.: Žáci uvidí, že vícedílný pokyn vede na stejné místo na krokovacím pásu jako jednodílný. Je možné, že se u žáků objeví i potřeba povel si zaznamenat. Pokud k tomu dojde, pak je nechám.

U/E: Rozdá žákům páté třídy pracovní listy a s žáky druhé třídy pokračuje v zadávání povelů a krokování.

Část krokovací

Oč.: V procesu Krokování jde v prvních fázích o budování představy o čísle. Myslím si, že žáci druhého ročníku již mají tyto první představy o číslech vybudované, a proto by jim průřez jednotlivými etapami neměl způsobovat obtíže. Očekávám, že žáci zvládnou i synchron kinestetický s akustickým.

U/E: Postupně žákům dává povely tohoto typu:

(Tři kroky dopředu, pak čtyři kroky dopředu. Začni

→→→	→→→→

teď.)

Oč.: Myslím, že žáci nebudou mít potíže s krokováním na povel. U mého krokovacího pásu není vyznačen startovní bod, tak nevím, jestli toto nebude způsobovat obtíž v orientaci ve směru krokování.

U/E: Seznámí žáky s aditivní triádou v prostředí Krokování. Zvolí si k tomu dva figuranty.

→→→	→→→→	=	

→		=	→→→→

	→→→	=	→→→→→

	→→	=	→→→→→

Oč.: Myslím, že pro žáky budou obtížné pouze poslední dvě úlohy.

U/E: Nechá žáky tvořit a zadávat své povely.

Oč.: Zatím nemám zkušenosti a nevím, jestli můžu očekávat, zda žáci samovolně objeví krokování vzad nebo začnou používat nějaký pokyn pro nulu.

U/E: Mezi povely začne používat i pokyn pro krokování vzad, pak s jeho pomocí modeluje i situaci s operací odčítání. (Pro označení záporných čísel mám připravené zelené body, které se přilepí ke krokovacímu pásu.)

→→→	←←	→	=	

→→→→→	←	=	

→→	←←←←	=	

→	←←←	→	=	→	

Další úlohy: (u třetí úlohy je potřeba doplnit právě dvě šipky)

→→		=	→

→	←		=	→

→→→		=	→	

3 řešení, najít všechna.

Oč.: Domnívám se, pro žáky budou situace, v nichž bude výsledek „záporný operátor“, nové. Myslím, že nebudou schopni tato čísla pojmenovat, protože tradiční výuka neposkytuje mnoho příležitostí pro setkání se zápornými čísly.

Třetí část – záznam krokování

U/E: Navrhne žákům, ať zkusí vymyslet nějaký povel pro kamaráda a zkusí jej zaznamenat na papír.

Oč.: Možná se v jejich záznamech objeví slova, tečky, čárky, kostičky. Po zkušenostech s experimenty v Anglii bych mohla předpokládat, že alespoň u jednoho žáka se vyskytnou i šipky.

EVIDENCE PRŮBĚHU EXPERIMENTU

Pozn. V rámci komentářů uvádím jevy, které jsem při rozboru experimentu objevila. Když jsem se při revizi dokumentu znovu zabývala obsahem této kapitoly, objevila jsem další jevy. Tyto jevy jsem očíslovala JEV 2.1 a JEV 2.2.

EVIDENCE:	KOMENTÁŘ:

PRVNÍ ČÁST – ÚVODNÍ

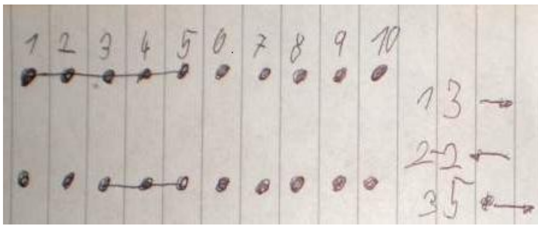
V příběhu zazněla tato úloha:

„Jdi pět kroků dopředu, pak dva zpátky, pak tři kroky dopředu a nakonec ještě čtyři kroky zpátky. Na kolik kroků je od daného stromu vzdálen poklad? Kdo by mu poradil?“

Žáci navrhli výsledky dva, tři a čtyři kroky dopředu. Komentovali je slovy, že si nejsou jisti, že to potřebují slyšet znova. Tak jsem je vybídla k dramatizaci situace. Pokyn jsem znova přečetla, ale žáci si jej celý nezapamatovali a začali se mezi sebou hádat, jak to bylo. Navrhla jsem, že si můžou pokyn zaznamenat, aby jej věděli. Žáci na návrh přistoupili.	I když žáci navrhli různé výsledky, nepřišli s možností zaznamenat si povel, jak jsem očekávala. Jeden z nich naopak apeloval, abych pokyn zopakovala, že si jej chce zapamatovat.
U dvou žáků páté třídy se vyskytl číselný zápis 5-2+3-4=2 a u jedné dívky čísla se šipkami 5↑2↓3↑4↓ (každé číslo se šipkou bylo zapsáno pod sebou).	Co to znamená, že jedni žáci zaznamenávají povel jako číselný spoj dané rovnosti a jiní používají sice čísla, ale operaci vyjádří šipkovým záznamem? **JEV 1: záznam povelu matematickým jazykem** Myslím si, že žáci, kteří jsou schopni zaznamenat jednotlivé kroky jako čísla a směr kroků vyjádřit danou operací, mají již vybudovanou abstraktní představu čísla i operace. A ti, kteří přiřazují operacím znak šipky, dosáhli poznání operace sčítání i odčítání na úrovni generického modelu,

neboť je vázáno na konkrétní představu. Je zajímavé, že dívka, která zaznamenala pohyb po číselné ose směrem dopředu, seděla u začátku krokovacího pásu, takže viděla pohyb po krokovacím pásu jako chůzi nahoru a dolů, proto patrně použila šipky vertikální.

Naproti tomu žáci druhé třídy zaznamenali povel tečkami, viz obrázky 1A a 1B.

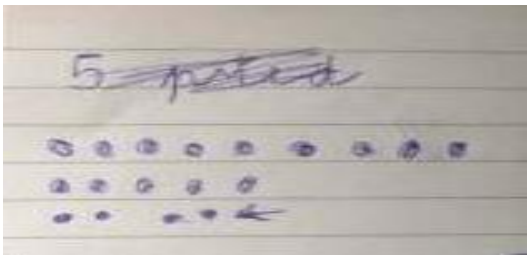


Obr.1A

Zde můžeme vidět, že Ota si nejdříve předkreslil číselnou osu, kterou začal od čísla jedna a nikoliv 0. První díl pokynu zaznamenal souvislou čárou protínající tečky. Další části pokynu si očísloval a zapsal k nim počet kroků. Směr pohybu zaznamenal směrem čáry doprava či doleva. Lze také vidět, že počítá značky místo kroků. Myslím si, že Otův zápis je velmi procesuální, neboť zdůrazňuje pořadí pohybů. Za povšimnutí také stojí, že na rozdíl od zápisu výše popsaného se zde vyskytují šipky zapsané horizontálně. Mohu se domnívat, že je to proto, že chlapec seděl u středu krokovacího pásu, a proto se mu pohyb po číselné ose jevil jako směr doprava či doleva.

JEV 2: číselná osa bez nuly

JEV 3: velmi procesuální záznam



Obr.1B

Na obrázku 1B je trochu odlišný záznam. Pavel se nejdříve pokoušel povel zapsat číslem a slovy. Pak jej zaškrtal a pokoušel se o záznam tečkami. Je možné, že tento způsob zápisu viděl u spolužáka a převzal jej, nebo jednoduše zakreslil situaci s krokovacím pásem ve třídě, neboť krokovací pás tvořily kulaté značky.

Zakreslil pět teček (první díl povelu) a čtyři tečky s šipkou doleva (poslední díl povelu).

	JEV 4: záznam počtu kroků jako počet teček

DRUHÁ ČÁST – KROKOVACÍ

Z této části hodiny zde eviduji pouze fragment. Uvádím přepis jeho videozáznamu.

Celá situace se odehrává u krokovacího pásu, který je tvořen značkami (tj. červená kolečka nalepená na zemi).

00:00	
Ex-01: „Tři kroky dopředu, a pak čtyři kroky dopředu.“ *Pa-01: (krokuje sedm kroků způsobem normální chůze, až u závěrečné značky přinoží)*	Zapomněla jsem na povel „Začni, teď“. **JEV 5: nepřítomnost části povelu „Začni, teď“.** Na videozáznamu jsem si také všimla, že Pavel při poslouchání povelu stojí před krokovacím pásem. Nepočítá kroky, ale značky. **JEV 6: chůze se závěrečným přinožením** **JEV 7: počítání značek místo kroků** Proč jsem nedbala na slovní doprovod chůze? Měla jsem zdůraznit, že budeme jednotlivé části pokynu počítat. Tímto se dvoudílný povel vytratil a pozorovateli se může zdát, že povel zněl „sedm kroků dopředu.“ **JEV 8: krokování bez slovního doprovodu** Nemohla jsem zjistit, zda je u žáků již vybudovaný synchron pohybu se zvukovým doprovodem, který byl možný u žáků druhé třídy předpokládat.
00:13	
Ex-02: „Co myslíš, udělal to správně? Kolik kroků musel udělat?“ *Pa-02: „Čtyři plus tři.“* *Ot-01: „Sedm.“*	Zde jsem se odklonila od scénáře a začala jsem s modelováním aditivní triády.
Ex-03: „Oto, kolik kroků musíš udělat, aby ses dostal k Pavlovi?“	Položila jsem otázku, kterou se opět ptám na celkový počet kroků.

00:42	
Ot-02: „Odtamtud? ...sedm.“	
Ex04: „Tak to vyzkoušíme, jestli je to správně.“	Nereaguji na vzniklou situaci. Spíše jsem se mohla zeptat, „odkud“ to myslí.
Ot-03: (krokuje a počítá každou značku, na kterou krokem vpřed vždy stoupne)	Počáteční značku počítá jako jedna. Ota nepočítá kroky, ale značky. **JEV 7: počítání značek místo kroků**
00:57	
Pa-03: „Teď já budu kontrolovat a on bude dělat další příkaz.“	
Ex-05: „Pozor! Udělej dva kroky dopředu, pak jeden zpátky a pak tři kroky dopředu.“	Ještě stále jsem si zde neuvědomila, že vynechávám povel „Začni, teď“. **JEV 5: nepřítomnost části povelu „Začni, teď“.**
Ot-04: (při zadávání příkazu si ukazuje na body na zemi a pak krokuje způsobem, že značky na zemi jsou uprostřed jeho chůze)	Vypadá to, že si Ota ukazováním počítá, u které značky skončí. Nepřinožuje, přinoží až u závěrečné značky. Soustředí se na značky na zemi.
Ex-06: (pauza)	**JEV 7: počítání značek místo kroků**
01:31	
Pa-04: „Ne, to by bylo až tady.“ (ukazuje na zem, o jednu značku před Otu)	
Ex-07: „Pavle, vzpomeneš si, jaký byl příkaz?“	Vstupuji do diskuze žáků. Pavel na mou otázku nereaguje, protože je vtažen do problému. Nechávám jej řešit a snažím se situaci pozorovat.
Ot-05: (krokuje bokem a počítá značky – jedna, dva, jedna (krok dozadu), jedna, dva, tři)	
Pa-05: „Dva dopředu, jeden zpátky a čtyři dopředu.“	
Ot-06: „Tři dopředu?“	
Ex-08: „Tři dopředu.“	

01:45	
Ex-09: „Oto, stůj tady a Pavle, zkus udělat to samé, zkus, ať vidíme na ty značky a budeme počítat nahlas, abychom se pak nemuseli hádat.“	Vyzvala jsem Otu, aby zůstal na své značce a Pavla, aby znova odkrokoval povel. Upozornila jsem je, abychom společně počítali. Pavel začne krokovat a počítat kroky.
Pa-06: „Raz.“(postaví se na první bod a od něj udělá krok dopředu k druhému bodu) „Dva.“ (dělá krok zpět)	
02:01	
Ot-07: „Ne.“ (ukazuje, že na raz by měl být na prvním bodu)	Ota s tím nesouhlasí a na jeho výzvu Pavel znova začíná krokovat.
Pa-07: (začíná znovu krokovat) „RAZ,“ (počítá první značku) „DVA“ (druhou), „TŘI“(dělá krok dozadu)	
Ot-08: „A tři.“	Upozorňuje Pavla na zbývající tři kroky, které mu chybí ještě udělat.
Pa-08: (jde tři kroky dopředu a stojí u stejného bodu jako Ota) „Šest.“	
Ot-09: „Ne, šest kroků jsi udělal, ale stojíme na čtvrté značce.“	Ota rozlišuje počet provedených kroků (číslo v roli operátoru změny) a místo, na kterém stojí (číslo v roli adresy).
02:20	
Pa-09: „No, ale takhle (stoupne si k první značce), raz.“ (experimentátorka jej přeruší)	**JEV 9: rozlišení operátoru změny a adresy**
Ex-10: „Kluci, co myslíte, že si řekneme, co bude jeden krok dopředu.“	Zde (Ex-10) jsem do diskuze zasáhla. Myslím si, že to nebylo vhodné. Kdybych nezasáhla, mohla jsem zjistit, jak by žáci situaci vyřešili sami. Nebo jsem žákům mohla položit otázky tohoto typu: Kde začíná a kde končí jeden krok? Jak si to představuješ?
O-10: „Jó, to myslím.“	**JEV 10: chyba experimentátora – vstup do**

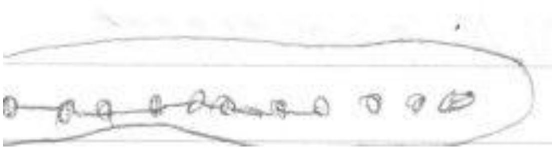
	diskuze
Ex-11: „Jakým způsobem, abychom se nehádali, jakým způsobem budeme krokovat, abychom ten příklad vyřešili?“ (po dobu mluvení experimentátorky Pavel pobíhal kolem krokovacích bodů) „Pavle, co bys navrhoval?“	Domnívám se, že zásah do diskuze žáků podnítil u Pavla ztrátu zájmu řešit danou situaci. V jeho vědomí zůstalo hledání správného výsledku, nikoli hledání řešení nedorozumění, které situaci způsobilo. Nedorozumění vzniklo, protože jsme se s žáky nedohodli, co bude startovní bod. Pavel svým pobíháním dává najevo, že problém, který řešíme, pro něj není důležitý. Proto jsem se jej snažila otázkou vtáhnout zpět do problému.
02:45 *Pa-10: „Buď dva.“ (stoupne si k počátečnímu bodu)* *Ex-12: „Pojď tady na druhou stranu, ať si nezavazíte.“ (vedle krokovacího pásu)* *Pa-11: (přechází na druhou stranu, kde mu experimentátorka ukázala) „Dva mínus jedna…(pauza)plus tři.“*	Pavel chce začít popisovat svůj návrh, ale já do toho vstupuji. Nyní si kladu otázku: Proč jsem jej nevyslechla? Neměla jsem možná dostatek trpělivosti. Vystoupila jsem tím z role experimentátora, dala jsem direktivní příkaz. **JEV 11: chyba experimentátora – netrpělivost**
03:05 *Ex-13: (bere Pavla za rameno) „Tak půjdeme spolu, takže* (stoupnou si oba *na pravou stranu od krokovací osy), budeme spolu počítat, jo.“* *Ex-14 a Pa- 12: (Jdou podél krokovacího pásu a přitom počítají.) „Raz, dva, tři. Jedna (krok dozadu). Jedna, dva (dva kroky dopředu).* *Ex-15: „Zůstaň tady, Pavle, jak stáls“ (ukazuju na danou krokovací značku) „Kolik kroků musíš udělat, aby ses dostal k Pavlovi?“ (otázka*	Pavlovo chování mě vyvedlo z míry. Jako učitelka jsem se o něco snažila a on nedával pozor. Tento postoj k žáku mi nebyl příjemný, ale nevěděla jsem, co v této situaci dělat. Vzala jsem jej proto za rameno a snažila se mu můj způsob vnutit. Opět to byla chyba. **JEV 12: chyba experimentátora – dominantnost učitele**

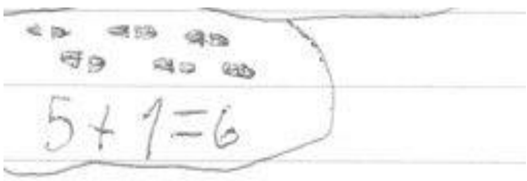
směřuje k Otovi)	
03:36	
Ot-09: „I zpátky (pauza), nebo jenom tam (ukazuje směr dopředu)?“	Ota neví přesně, co má dělat. Uvědomuje si nejednoznačnost otázky a ujasňuje si, co experimentátor myslí.
Ex-16: „K němu, aby ses dostal. Když se postavíš tady na začátek (ukazuju na první krokovací značku). Pojď tady, z této druhé strany, abys Pavlovi nezavazel.“ (přecházím k první krokovací značce)	**JEV 13: komunikační nedorozumění experimentátor-žák** Je to chyba experimentátora: vyložil si chlapcovu váhavost jako jeho neporozumění otázce, ale přitom on rozuměl dobře, jen otázka nebyla jasně formulovaná.
Pa-12: „Já vím, kolik.“	
03:57	
Ex-17: „Vyzkoušíme to, jo. Zkus se postavit tady na ty puntíky.“(názorně předvede, kde si má Ota stoupnout)	Snažím se o organizaci krokování.
„To znamená, tady vedle a budeme nahlas společně počítat. I s Pavlem, jo.“	Uvědomila jsem si důležitost počítání nahlas (Ex-17) z důvodu větší přehlednosti realizace pokynu. Proto trvám na tom, abychom nahlas počítali kroky.
Ot-11: (začne krokovat)	
Ex-18: (Ota právě udělal první krok a dostal se k první krokovací značce) „Postav se na začátek (Ota přišel k prvnímu krokovací značce), tady je začátek, jo.“	Násilně žákům nutím (Ex-18) začátek krokovacího pásu místo toho, abych rozvinula diskuzi o tom, kde by měl být a proč.
04:13	
Ot-12: „Aha, tak já jsem myslel, že tady to je už jeden krok (udělá krok vzad- tudíž se dostane před krokovací značky), takhle jsem to myslel.“	Zde žák potvrdil, že opravdu začátek krokovacího pásu mu byl vnucen, protože on to myslel jinak. Ota demonstruje pohybem a slovním doprovodem, jak vnímá začátek krokovacího pásu.
Ex-19: „Aha, takto jsi to myslel.	**JEV 14: argumentace**

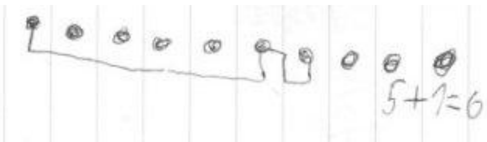
Dobře. Domluvíme se, že tady bude začátek (ukáže na první krokovací značku). Dobře, tak zkusíme počítat.“ *Pa-13: (není příliš zaujat naší debatou)* *04:33* *Ex-20: (reaguje na Pavla) „Pavle, můžeš zůstat stát.“* *Ot-13: Teď si myslím, že pět, protože…“*	Otovo pojetí bylo odlišné od mého. Stanovila jsem tedy počátek krokovacího pásu. Nyní si myslím, že by bylo vhodnější otevřít diskuzi.
Ex-21: …protože tam jsi měl ten začátek.“	Zde jsem dopověděla (Ex-21) Otovo vysvětlení.
Ot-14: (krokuje a počítá) „Jeden, dva, tři, čtyři, pět.“ (Stojí vedle Pavla.)	
Ex-22: „Výborně, takže je to správně.“ *04:52*	Hodnotím situaci. Potvrzuji správnost řešení. Je to pro mě východisko z bezradné situace.

TŘETÍ ČÁST – ZÁZNAM KROKOVÁNÍ

Otázka: Dokázali byste vytvořit povel pro kamaráda a zapsat jej na papír?

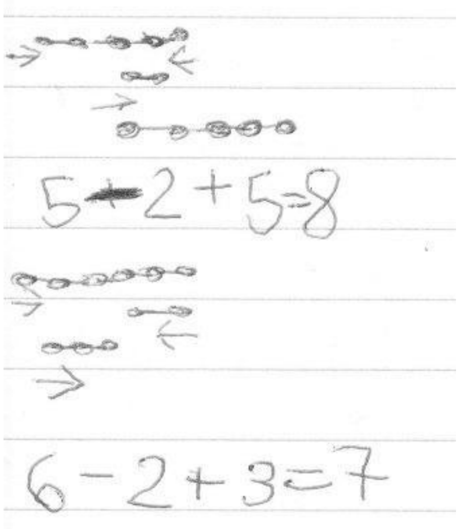
 Obr. 2A	Pavel vytvořil osu z teček a do ní zaznamenal povel pomocí spojnic mezi tečkami (obr. 2A). Není zřejmé, zda by povel zněl: „Jdi sedm kroků dopředu,“ kde by byl krok reprezentován spojnicí mezi tečkami, nebo „Jdi osm kroků dopředu,“ což by znamenalo, že jeden krok představuje jedna tečka.
 Obr. 2B	Otův návrh obsahuje také osu z teček (obr. 2B). Je jasně vidět, že jeden krok představuje jednu tečku a také, kde jedna část povelu začíná a končí. Svůj záznam doplňuje číselným zápisem. Tyto písemné

<table>
<tr><td></td><td>záznamy můžou svědčit o procesuálním přístupu k úloze.
Je možné, že žáci zaznamenávali reálnou situaci při představení krokování. Tedy na jakou značku při krokování šlápne. Pak by číslo mělo význam adresy.
JEV 2.1: číslo v roli adresy</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otázka: Dokázali byste zaznamenat povel: „Jdi pět kroků dopředu a jeden krok dopředu.“</td></tr>
<tr><td>

Obr. 3A


Obr.3B</td><td>Pavel nejprve zaznamenal povel pomocí šlápot, viz obr 3A, které zachovávají význam kroku. Na jeho záznamu je vidět, že jedna šlápota znamená jeden krok. Z tohoto záznamu však nepoznáme, že je povel rozdělen na dvě části. Možná si tohoto problému všiml, a proto jej doplnil číselným zápisem.

V Otově zápisu obr. 3B je vidět, že nyní bere v úvahu první tečku jako bod, od kterého krokující vychází, nikoli jako cíl prvního kroku. Z tohoto důvodu je v jeho záznamu o tečku navíc, která mu umožňuje počítat krok jako úsek mezi dvěma tečkami.
JEV 15: tečka ve významu startovního bodu
Je zajímavé, že sémantický model čísla jsou žáci schopni zaznamenat i matematickým jazykem. Můžeme se domnívat, že jejich představy o číslech jsou na úrovni abstraktního poznatku.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otázka: Dokážete vymyslet a napsat ještě další povely nebo třeba i příklad?
Když žáci zapsali povely na obr. 4A a 4B, vyzvala jsem je, aby si papíry mezi sebou vyměnili a zkusili je přečíst.</td></tr>
</table>



Obr. 4A – záznam Pavla

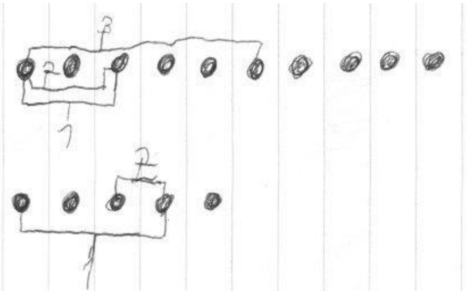
Ota neměl problém s přečtením povelu, četl takto: „ *Už to vidim. Jó, už to vidim. Jedna, dva, tři, čtyři, pět (počítá tečky v jednom řádku). To je pět (přejíždí prstem první řádek) mínus dva (přejíždí prstem druhý řádek)a plus pět (přejíždí prstem třetí řádek). Jó, dobrý. Dobrý.“*

V Pavlově zápisu se poprvé objevily šipky, které značí směr krokovaní. Počet kroků je zde zaznamenán počtem teček, které jsou propojené souvislou čárou. Pavel již odstoupil od záznamu kroků do osy z teček.

JEV 2.2: změna znakového zápisu

Za povšimnutí také stojí, že zapsal třídílný povel. Stále mi však není jasné, proč Pavel svůj záznam doplňuje číselným zápisem dané rovnosti. Mohu se domnívat, že důvodem může být jeho pocit, že zápis není dostačující.

JEV 16: šipka jako směr pohybu



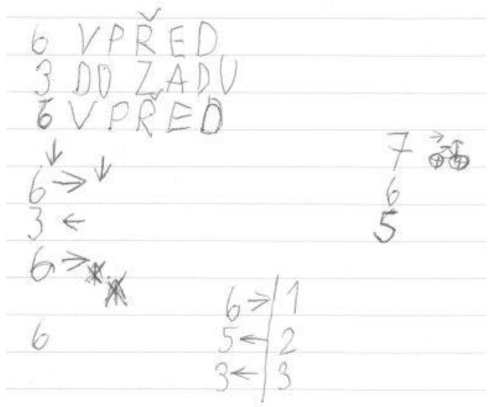
Obr. 4B – záznam Oty

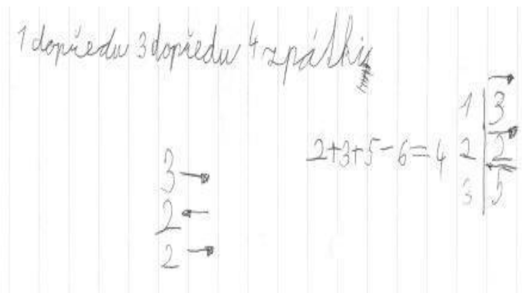
Pavel Otově záznamu nerozuměl. Ota mu jej vysvětluje: *„Tady jsou ty tečky (přejíždí po ose vytvořené z teček). Ty čárky jsou ty trasy. Takže když je tam čárka a číslo, tak to znamená, kolikátá je to trasa (ukazuje na spodní čáru s jedničkou). Tak abys nešel třeba první*

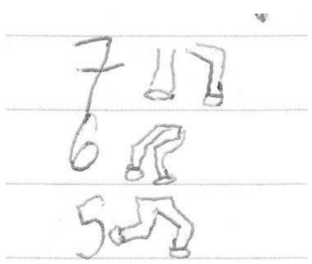
Ota pokračuje ve své stylu záznamu. Objevuje se u něj nový prvek, a to číslovaná „trasa“. Slovo „trasa“ použil sám Ota při vysvětlování tohoto povelu a znamená část povelu. Číslo trasy pak vyjadřuje pořadí těchto částí. Směr pohybu je zřejmý ze zakreslení tras do osy z teček.

Myslím si, že tento záznam vyjadřuje procesuální vnímání povelu, protože zdůrazňuje důležitost pořadí jednotlivých částí povelů, které na sebe musí navazovat.

JEV 3: velmi procesuální záznam

<table>
<tr><td>tuto trasu (ukazuje na čáru nad osou).“
Pavel reaguje: „Takže napřed půjdu dva kroky dopředu (ukazuje na prostřední čáru), potom krok dozadu.“
Ota: „Ne, dva kroky dozadu.“
Pavel: „Aha a potom půjdu sem (jde po ose teček do místa, kde ukazuje konec povelu vrchní čára).“</td><td>Proč Pavel myslel, že zpět musí udělat pouze jeden krok? Domnívám se, že důvodem byla tečka uprostřed Otovy druhé zakreslené trasy.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Výzva: Zkuste povel zaznamenat tak, aby mu kamarád rychle porozuměl.</td></tr>
<tr><td>

Obr.5A


Obr.5B

</td><td>Pavel (obr. 5B) i Ota (obr. 5A) nezávisle na sobě zaznamenali povel číslem a slovem vyjadřující směr pohybu. Záznamy se liší pouze v tom, že jeden je zapsán vertikálně (5A) a druhý (5B) horizontálně.

Pak se snažili o další záznamy, kde se již objevila čísla se šipkami. Čísla vyjadřují počet kroků a šipka směr pohybu.

Na obr. 5A v dolní části a na obr. 5B v pravé části lze také vidět svislou čáru před šipkami (obr.5A) a za šipkami (obr.5B). Před nebo za ní jsou další čísla. Ta zdůrazňují pořadí částí povelů.
JEV 17: čísla se šipkami vyjadřující povel

Mezi Pavlovými záznamy se objevil tento zápis. Pavel zde zaznamenal počet kroků čísly, ale směr pohybu zakreslil symbolem nohou. Kam směřují kolena, tam se má jít.
Myslím, že tento zápis není v matematice příliš využitelný kvůli náročnosti zachycení pohybu. Je</td></tr>
</table>

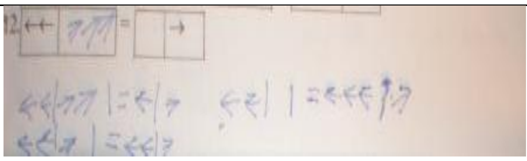
	ale vidět, že žák má výtvarné nadání a je kreativní.

EVIDENCE PRACOVNÍCH LISTŮ ŽÁKŮ 5. TŘÍDY:

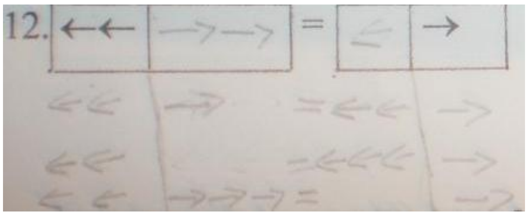
Ukázalo se, že pro žáky byla nejobtížnější úloha č. 12.

Úloha:[22] K řešení použij právě tři šipky, najdi všechna řešení.

←←		=		→



Obr. 6 A



Obr. 6 B

JEV 2: **číselná osa bez nuly**

JEV 3: **velmi procesuální záznam**

Obr. 6 C

Náročnost této úlohy spočívá v opačném směru daných šipek, prázdném boxu na pravé straně a nalezení všech řešení. Jedná se o soustavu dvou rovnic, kdy jedna z nich je s absolutní hodnotou. Tím, že se ptáme na všechna řešení, se dostáváme také do oblasti kombinatoriky. Dva žáci našli všechna čtyři řešení. Zvlášť u Norberta (obr. 6A) je patrné, že postupoval strategicky. Lze si všimnout, že na levé straně postupně doplňoval do prázdného pole šipky tři, pak dvě, jednu a nakonec žádnou. Podobně postupovala i Tamara (obr. 6B), která si jako proměnou zvolila šipky v prázdném boxu na pravé straně. Jana (6C) hledala řešení tak, aby se na každé straně šipky rovnaly nule.

[22] Úloha je převzata z mých záznamů z přednášek didaktiky matematiky profesora M. Hejného.

PŘEHLED JEVŮ

Pozorované jevy experimentu jsem roztřídila do těchto kategorií: komunikační, kognitivní a jevy týkající se experimentátora. Po diskuzi nad tímto experimentem s D. Jirotkovou jsem se znovu zamýšlela nad uvedenými jevy. U některých jsem se nemohla rozhodnout, zda je zařadit do oblasti komunikační či kognitivní. Vždy jedno hledisko nasvědčovalo buď jedné či druhé oblasti. Pro oblast komunikace vždy nasvědčoval záznam žákovy myšlenky, nebo záznam procesu představení krokování. Pro oblast kognice obsah daného záznamu. Proto jsem se rozhodla, že tyto jevy označím kategorií: Komunikační i kognitivní jevy.

1) Komunikační i Kognitivní jevy

   a) **JEV 1: záznam povelu matematickým jazykem**

      Přemýšlela jsem, zda tento jev zařadit do oblasti jevů komunikačních nebo kognitivních. Pro oblast komunikace svědčí způsob, jakým žák vyjadřuje svoji myšlenku. V tomto případě jde o matematické vyjádření úlohy, kterou žák pouze slyšel. Na oblast kognice poukazuje zase číselný zápis. Mohu se domnívat, že žáci, kteří sémanticky ukotvené číslo spontánně zapíší abstraktním zápisem matematiky, mají již vybudované schéma čísla obohacené o různé mentální reprezentace. Z těchto důvodů tedy přiřazuji tento jev do obou oblastí.

   b) **JEV 2: číselná osa bez nuly**

      Obr. 1A dokumentuje osu, která začíná číslem jedna. Jde o záznam žákovy myšlenky v jazyce teček. Můžeme předpokládat, že k takovému záznamu žáka vedly jeho zkušenosti s číselnou osou bez nuly. Je možné, že nula v jeho představách o číslech nemá mnoho reprezentací.

   c) **JEV 4: záznam počtu kroků jako počet teček, JEV 7: počítání značek místo kroků a JEV 2.1: číslo v roli adresy**

Myslím si, že pokud žák zaznamenal číslo pomocí teček (viz obr.2B), patrně chybí v jeho schématu čísla reprezentace čísla v roli operátoru změny. Jeho záznam vystihuje proces chůze, jehož výsledkem je značka, ke které krokováním přijdu.

Podobně je tomu i v kinestetickém modelu. Je možné, že žák význam čísla vnímá spíše jako adresu než operátor, proto krok identifikuje se značkou krokovacího pásu.

d) **JEV 3: velmi procesuální záznam**

Tento jev je pozorovatelný na obr. 2A. Žák přiřazuje jednotlivým dílům povelu jejich pořadí.

e) **JEV 15: tečka ve významu startovního bodu**

V záznamu žák vyjádřil první tečku jako startovní bod. Můžeme se domnívat, že takový záznam vyjadřuje představu kroku z jednoho místa na druhé. Jde o představu čísla v roli operátoru změny.

2) <u>Komunikační jevy</u>

a) **JEV 13: komunikační nedorozumění experimentátor-žák**

Z žákovy odpovědi je zřetelné, že experimentátorova otázka nebyla vhodně formulovaná. Experimentátor neporozuměl, na co a proč se chlapec ptá. Reakce žáka, které se neshodují s očekáváním učitele, bývají často považovány za chybné nebo za neporozumění ze strany žáka. Zde je vidět, že je vhodné zkusit si formulovat otázky v přípravě vyučovací hodiny.

b) JEV 14: argumentace

Ze situace je zřejmé, že žák se snaží obhájit svou myšlenku. Používá k tomu pohyb a slovní doprovod.

c) JEV 2.2: změna znakového zápisu

Není mi jasné, co bylo u žáka impulsem k změně jeho znakového jazyka. Mohu se domnívat, že to bylo slovo „příklad“, které zaznělo jako poslední v mé otázce. Ke změně jazyka by mělo docházet z vnitřní potřeby žáka na základě náročnějších úloh, které učitel žákům/žákovi předkládá. Tuto skutečnost jsem si v mém experimentu ještě neuvědomovala. Nyní nesouhlasím s otázkami, kterými jsem se snažila žáky dovést k šipkovému záznamu.

d) **JEV 16: šipka jako směr pohybu**

Lze pozorovat, že žákův tečkový záznam je doplněný šipkami, které vyjadřují směr pohybu. Tento symbol má podstatný význam pro budování schématu Kroky. Symbol šipky je spojnice mezi reálným krokováním a matematickým jazykem. Proto použití symbolu šipek může mít klíčovou roli při pozdější domluvě jazyka pro prostředí Krokování.

e) JEV 17: čísla se šipkami vyjadřující povel

Oba žáci spontánně zaznamenali povel, jehož jednotlivé díly byly zapsány číslem a šipkou. Význam kroku nese číslo a šipka označuje směr pohybu. Tento záznam je velmi podobný šipkovému jazyku. Myslím si, že pro tyto žáky by v dalších hodinách nebyl problém šipkový záznam přijmout.

3) <u>Kognitivní jevy</u>

a) JEV 6: chůze se závěrečným přinožením

Je to jeden ze způsobu krokování, který by byl považován za nekorektní, kdyby žák počítal i poslední přinožení jako krok. Pak by měl učitel s žákem otevřít diskuzi, co to znamená udělat jeden krok, protože na dva kroky vykoná figurant tři pohyby.

b) **JEV 9: rozlišení operátoru změny a adresy**

Žák rozlišuje celkový počet kroků od čísla, na kterém zůstane stát. Z toho vyplývá, že má vybudovanou představu čísla jako operátor i jako adresa. Myslím, že schopnost rozlišovat tyto dvě rozdílné role čísla je dána žákům, kteří již mají mnoho zkušeností s číslem v různých situacích (izolovaných modelů).

4) <u>Jevy u experimentátora</u>

a) JEV 5: nepřítomnost části povelu „Začni, teď“.

Tento povel označuje „načasování“. Tedy je pro žáka impulsem, kdy má začít krokovat. Myslím si, že je opravdu důležitý. Viděla jsem, jak žáci bez tohoto pokynu vždy chvíli stojí před krokovacím pásem, jakoby nevěděli, co mají dělat.

b) **JEV 8: krokování bez slovního doprovodu**

Jako experimentátor jsem nedbala na slovní doprovod. Neosvědčilo se mi to, protože pak jednotlivé díly povelu splynuly. Pro pozorovatele nebylo zřejmé, který díl povelu žák zrovna krokuje.

c) JEV 10: chyba experimentátora – vstup do diskuze

Vstoupila jsem do diskuze žáků v nepravý okamžik. Měla jsem raději pozorovat, jakým způsobem jsou schopni problém sami vyřešit.

d) JEV 11: chyba experimentátora – netrpělivost

Z role experimentátora jsem vypadla tím, že jsem neměla dostatek trpělivosti, abych si vyslechla celý žákův návrh. Není to správné, protože tak experimentátor přichází o zkušenosti s způsoby řešení žáků.

e) JEV 12: chyba experimentátora – dominantnost učitele

Uvědomila jsem si, že v situaci, kdy si nevím rady (nenapadá mě vhodná otázka, ani úloha či výzva), využiji autoritu učitele a začnu žákům vnucovat svůj názor na daný problém. Jsem si vědoma skutečnosti, že tento způsob řešení není správný. Vím, že alespoň na začátku své učitelské praxe budu podobné situace zažívat častěji. Do budoucna je tedy mým cílem dávat si na tyto situace pozor a hledat vhodná řešení.

ZÁVĚR EXPERIMENTU

Cílem experimentu bylo evidovat způsoby krokování žáků i jejich záznamy krokování. V experimentu se objevil způsob krokování normální chůzí se závěrečným přinožením (viz JEV 6).

Záznam krokování se během hodiny vyvíjel. Je důležité položit si otázku: Co žáka vedlo ke změně znakového záznamu? Byla to jeho vnitřní potřeba změny záznamu? Myslím si, že jako experimentátor jsem zde selhala, protože jsem žáky vedla návodnými otázkami a neposkytla jsem jim situace, které by je vedly k vnitřní potřebě zdokonalit svůj jazyk.

Poslední záznamy, které se u žáků druhé třídy objevily, vyjadřovaly počet kroků číslem a směr pohybu šipkou. Každá část povelu byla označena pořadovým číslem. Z tohoto důvodu považuji tento záznam za procesuální. U žáků páté třídy se v úvodní části hodiny objevil záznam povelu jako číselný zápis rovnosti a čísla s šipkami ve vertikální poloze.

SEBEREFLEXE

Uvědomila jsem si, že prostředí Krokování není nutné dávat do příběhu. Cítila jsem, že to zdržuje spád hodiny a žáci jej nepotřebují. Úlohy byly pro ně dostatečně motivující.

V průběhu experimentu jsem se nedržela scénáře. Myslím si, že by mi to usnadnilo roli experimentátora i učitele. I když jsem etapizaci krokování měla nastudovanou a v souladu s ní připravený scénář, přesto jsem v praxi nebyla schopna těchto poznatků využít. Poznala jsem, že nestačí mít nastudovanou teorii, učitel potřebuje hlavně praxi, aby zjistil, jak hodiny vést a na co se ptát apod. Uvědomila jsem si, že je nutné více pokládat otázky typu: Jak jsi na to přišel? Co si pod tím představuješ? Jak to myslíš? Tedy dávat žákům větší prostor pro vyjádření svých myšlenek a snažit se je pochopit, položit si otázku Proč to asi říká takto…? O čem to svědčí? Jak mu mohu pomoci?

Poučila jsem se pro příště, abych žákům nevstupovala do řešení problému, ale počkala na vhodný okamžik.

Myslím si, že přede mnou stojí velký kus práce kvůli snaze zlepšit své reakce na potřeby žáků a vzniklé situace. Uvědomila jsem si, že ve chvílích, kdy si nevím rady, jak situaci řešit, začnu využívat autority učitele a žákům vnucovat svůj „správný způsob“. Do budoucna si tedy kladu za cíl: Při výuce dávat dostatečný prostor pro myšlenky svých žáků.

V příštích experimentech bych vyznačila startovní značku, nebo čáru a taky se snažila důsledně dbát na hlasité počítání. Poznala jsem, že je to důležité při orientaci žáků v jednotlivých částech povelu při dramatizaci krokování.

4.4.2 Experiment 5 – kombinatorická úloha

Z důvodu ochrany osobních dat je jméno účastníka experimentu změněno.

PROTOKOL

DATUM: 8. 12. 2009, 14:00 – 14:45
ÚČASTNÍCI: 2. třída: Ota
VĚK: 8 let
MÍSTO: ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR
DALŠÍ ÚČASTNÍCI: studentky homogenní varianty PedF UK v Praze, vedoucí semináře
MATERIÁL: videozáznam z fotoaparátu, písemná řešení žáka
NÁSTROJ EXPERIMENTU: úlohy
CÍL EXPERIMENTU: Žák poznává rovnost v prostředí Krokování.
KOMENTÁŘ: Experiment byl připraven pro žáky druhé třídy, kteří se pravidelně účastní matematického kroužku. Avšak v tento den byl přítomný pouze Ota. Při experimentu byly přítomné dvě studentky homogenní varianty PedF. UK v Praze. Experiment proběhl v přátelské atmosféře, nic jej nenarušilo. Z experimentu jsem vybrala pouze jednu úlohu, o které si myslím, že stojí za povšimnutí kvůli žákovskému řešení.

SCÉNÁŘ

Celé znění lze najít v příloze 4. Níže uvedená úloha nebyla připravena ve scénáři. Ota všechny připravené úlohy zvládl bez potíží, proto jsem na hodině vymýšlela nové. Níže uvádím jednu z nich.

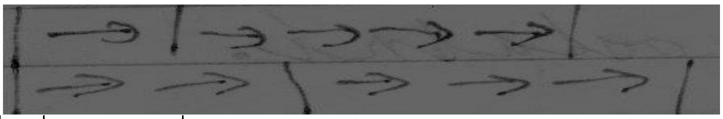
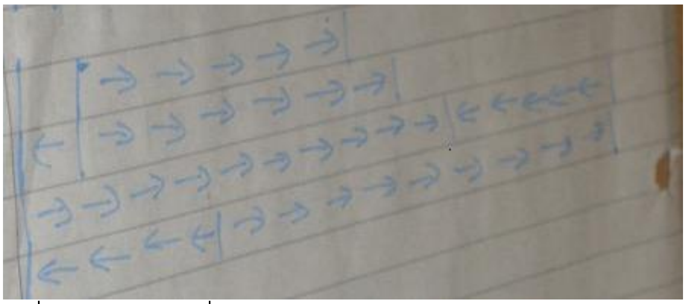
ZADÁNÍ

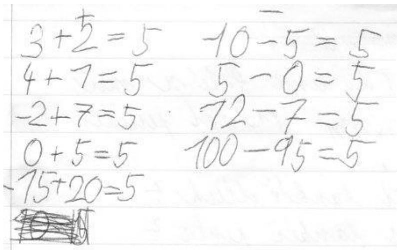
„Zapiš číslo pět v šipkovém zápisu různými způsoby.“

CHARAKTRISTIKA ÚLOHY

Jedná se o kombinatorickou úlohu, která má nekonečně mnoho řešení.

EVIDENCE EXPERIMENTU

<table>
<tr><th>EVIDENCE:</th><th>KOMENTÁŘ:</th></tr>
<tr><td>Ota zapsal tato řešení:

|→| →→→→| ;
|→→| →→→| ;
Po zapsání tohoto šipkového zápisu, se Ota zeptal, zda má zapisovat řešení, která jsou prohozená. Na otázku: „Jak to myslíš?“ odvětil, že kdyby napsal napřed tři šipky a pak dvě šipky, tak je to úplně stejné, protože to bude pořád stejně pět. A že je to zbytečné psát.</td><td>Ota začal šipkovým zápisem, který bychom mohli převést do matematického jazyka jako 1+4, 2+3. V tradiční matematice jsou to jedny z prvních spojů aditivní triády, kterým se má žák naučit.
JEV 1: základní spoje
Z Otovy výpovědi mi bylo jasné, že již objevil komutativnost operace sčítání, kterou popsal slovy „ řešení prohozená.“
JEV 2: komutativnost sčítání</td></tr>
<tr><td>
| ---| →→→→→| ;</td><td>Překvapivým momentem pro mě bylo, že žák druhé třídy dokáže v takovém typu úlohy využívat záporná čísla. I když jsou v tomto případě ukotvená sémanticky kroky vzad, myslím si, že jsou to</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>| ←| →→→→→→| ;
| →→→→→→→→→→| ←←←←←| ;
| ←←←←| →→→→→→→→→| ;
Když dopsal poslední dvojici pokynů, řekl, že existuje milion řešení a že by mohl stále pokračovat.</td>
<td>nestandardní řešení.
JEV 3: záporná čísla – kroky vzad
Ota použil slovo „milion řešení“ jako výraz pro nekonečně mnoho řešení.
JEV 4: generický model</td>
</tr>
<tr>
<td>Položila jsem mu otázku: „Dokázal bys zapsat číslo 5 jako součet dvou čísel různými způsoby?“ Ota začal zapisovat tato řešení:
3+2 = 5
4+1 = 5
-2+7 = 5
0+5 = 5
-15 +20 = 5

Zde se Ota zeptal, zda to může zapsat i odčítáním. Souhlasila jsem.
10-5 = 5
5-0 = 5
12-7 = 5
100 -95 = 5</td>
<td>Je zajímavé, že Ota opět začal základními spoji z první desítky, ale dále již pokračoval neobvyklými. Nečekaný je i jeho správný zápis záporných čísel.
JEV 5: záporná čísla – jazyk matematiky
Na začátku druhého ročníku žáci zvládají aritmetické počty sotva do 30. Tento žák dokáže zapsat číslo pět pomocí rovnosti jako 100–95= 5.
JEV 6: procept</td>
</tr>
</table>

PŘEHLED JEVŮ

Zde uvádím v souhrnu jevy, které se v experimentu vyskytly. Ve všech případech jde o jevy **kognitivní**.

a) **JEV 1: základní spoje**

Účastník experimentu je ve škole vzděláván tradiční cestou. Ta klade důraz na nácvik spojů aditivní triády. Žák v tomto experimentu uvedl základní spoje jako možná první řešení úlohy.

b) **JEV 2: komutativnost sčítání**

Zde žák slovy „řešení jsou prohozená, ale výsledek je stejný“ popsal komutativnost sčítání. Prostředí krokování se jeví jako pro žáky vhodné prostředí na objevování komutativnosti. Žák jednak při realizaci, jednak v šipkovém záznamu zjišťuje, že výsledek sčítání kroků nebo šipek je vždy stejný.

c) **JEV 3: záporná čísla – kroky vzad, JEV 5: záporná čísla – jazyk matematiky**

Je zajímavé, že žák druhé třídy dokáže při řešení úlohy využívat i záporná čísla. Jednou jsou ukotvená sémanticky jako kroky vzad, podruhé jako šipky směřující doleva a potřetí jako číselný zápis.

d) **JEV 4: generický model**

Ota při vypisování jednotlivých řešení řekl, že úloha má „milion řešení“. Myslím si, že toto slovní spojení vyjadřuje Otův generický model pro skutečnost, že úloha má nekonečně mnoho řešení.

e) **JEV 6: procept**

Žák dokáže zapsat číslo pět pomocí dvoudílného šipkového záznamu i jako záznam rovnosti v matematickém jazyce. Dovede přecházet z procesuálního řešení úlohy (-15+20= 5) ke konceptuálnímu (100–95= 5) a naopak. Mohu se domnívat, že jeho porozumění číslu 5 a možná i dalším číslům bude na úrovni proceptu.

ZÁVĚR EXPERIMENTU

Nejenom, že Ota dokázal najít různá řešení v šipkovém jazyce, ale dokázal je najít i v jazyce matematickém. Mohu se domnívat, že právě zkušenost s krokováním v minulých hodinách přispěla k Otovu objevu, že daná úloha může mít jeho slovy „milion řešení“.

Ota se svými řešeními pohybuje v oboru celých čísel. Nedělá mu potíže pracovat se zápornými čísly. Dokáže i svými slovy popsat komutativnost sčítání, které rozumí. Mohu se domnívat, že jeho schéma čísla je již obohacené o modely záporného čísla. A skutečnost, že dokáže rovnost čísla pět zapsat jako součet: -15 +20 nebo rozdíl: 100 – 95 nasvědčuje tomu, že jeho model čísla je již na abstraktní úrovni.

SEBEREFLEXE

Když jsem pozorovala Otu při řešení úloh, byla jsem většinou vždy tak ohromená, že jsem ze sebe stěží dostala nějakou otázku. Uvědomila jsem si, že jsem mohla klást více otázek typu: „Proč si to myslíš? Jak si na to přišel?“

Při vytváření scénáře na tuto hodinu mě nenapadlo, jak rozsáhlé matematické poznání může mít žák druhé třídy. Proto úlohy, které jsem měla připravené, byly rychle vyřešené a já musela na hodině tvořit nové. Poučila jsem se, že vždy bych měla do své přípravy zahrnout i mnohem náročnější úlohy.

4.4.3 Experiment 9 - prostředí Schody

PROTOKOL

DATUM: 4. 5. 2010

ÚČASTNÍCI: 1. třída: Anežka, Kamil

2. třída Ota, Pavel

VĚK: 7 a 8 let

MÍSTO: ZŠ Uhelný trh, Praha 1, ČR

DALŠÍ ÚČASTNÍCI: studentka Anna (do experimentu nijak nezasahuje), vedoucí semináře

NÁSTROJ EXPERIMENTU: úlohy

MATERIÁL: videozáznam z fotoaparátu, fotografie, záznam žákovských řešení

CÍL EXPERIMENTU: Pozorovat způsob řešení úloh v prostředí Schodů.

KOMENTÁŘ: Experiment nic nenarušilo. Proběhl v přátelské atmosféře.

ZADÁNÍ

„Vydej povel, krokuj a vyřeš. Potom přepiš do čísel.“

3	→→→→		3	+ 4	=	
5	→→		5	+ 2	=	
	→→	5		+ 2	=	5
8		11	8		=	11
	→→→→	11		+ 4	=	11
5	←←		5	-2	=	
4		1	4		=	1
11	←←←←←				=	
	←←←←	2			=	
	←←	9			=	
8		5			=	

Tabulka č. 1

CHARAKTRISTIKA ÚLOH A MOJE OČEKÁVÁNÍ

V úlohách, které jsem si pro žáky připravila, se jedná o schéma aditivní triády, kde je každé z čísel triády sémanticky ukotveno (viz tabulka č. 2) jako adresa (Ad), nebo jako operátor změny (Op). Jde o typ úloh Ad ± Oz = Ad. V každé úloze je právě jedno z těchto čísel skryto.

Číslo	Úloha			Přepis úlohy do				Sémantický typ
1.	3	→→→→		3	+ 4	=		Ad+ Oz = ?
2.	5	→→		5	+ 2	=		Ad+ Oz = ?
3.		→→	5		+ 2	=	5	? + Oz = Ad
4.	8		11	8		=	11	Ad+ ? = Ad
5.		→→→→	11		+ 4	=	11	? + Oz = Ad
6.	5	←←		5	-2	=		Ad - Oz = ?
7.	4		1	4		=	1	Ad - ? = Ad
8.	11	←←←←←←				=		Ad – Oz = ?
9.		←←←←	2			=		? – Oz = Ad
10..		←←	9			=		? – Oz = Ad
11.	8		5			=		Ad - ? = Ad

Tabulka č. 2

Tento experiment byl zpracován již v minulém roce. Měla jsem zde napsaná svá očekávání, roztříděná podle přítomnosti procesuality, nebo konceptuality řešení Když jsem se po roku vrátila k tomuto záznamu experimentu, uvědomila jsem si, že s tímto roztříděním již nyní nemohu souhlasit. Domnívám se, že u některých řešení nelze tento jev jednoznačně určit, ale že je potřeba jej doplnit promyšleným dotazováním se žáka, jak danou úlohu řešil.

Proto jsem očekávání zachovala, ale nově roztřídila. Zvolila jsem si nové kritérium, jímž bylo, zda se řešení úlohy bude odehrávat:

a) v žákově představě,
b) nebo realizací krokováním.

Při opětovném pročtení rozepsaných očekávání jsem si uvědomila, že jde o popis strategií řešení. Tyto strategie jsem roztřídila pro přehlednost do tabulky a symbolem + a – jsem v ní označila, zde je očekávána při řešení dané úlohy či nikoliv.

V tabulce i dále v textu se odkazuji se na čísla úloh, která lze najít v tabulce č 2.

Vysvětlivky: (jedná se o značení, které dále využívám při popisu)
Ad1 – znamená adresu, ze které se vychází
Ad2 – znamená adresu, na kterou žák přijde
Oz – znamená operátor změny, tedy počet kroků, které žák musí vykonat mezi Ad1 a Ad2
Oč. – očekávání

Označení	**Úloha:** **Sémantický typ:** / **Strategie**	**1., 2., 6. a 8.** Ad1 ± Oz = ?	**3., 5., 9. a 10.** ? ± Oz = Ad2	**4.** Ad1+ ? = Ad2	**7. a 11.** Ad1- ? = Ad2
OS	Operace sčítání	+	-	-	-
P-O	Pokus-omyl	-	+	-	-
SOZ	Strategie odzadu (antisignál)	-	+	+	-
DP	Dopočítávání	-	+	+	+
OOD	Operace odčítání	+	-	-	+

Tabulka č. 3

Přehled očekávání:

Pozn. Za popisem očekávání uvádím v závorce, o jakou jde strategii.

Úlohy 1., 2., 6. a 8. (Typ úlohy: Ad1 ± Oz = ?)

Řešení úlohy v mysli žáka:

Oč.1: K vyřešení prvních dvou úloh stačí žáku přičíst počet kroků k dané známé počáteční adrese (OS).

Oč.2: Analogicky u úlohy 6. a 8. od dané adresy odečte operátor změny a zjistí výslednou adresu (OOD).

Řešení realizována dramatizací:

Oč.3: Žák provede jednoduchým pokynem: „Postav se na …… a udělej …… kroky nahoru/dolů." Číslo schodu, na kterém žák skončí, mu prozradí řešení úlohy čili výslednou adresu (OS,OOD).

Úlohy 3., 5., 9. a 10. (Typ úlohy: ? ± Oz = Ad2)

Řešení úlohy v mysli žáka:

Oč.4: Bude tipovat počáteční adresu, k níž bude přičítat/ od níž bude odečítat operátor změny tak dlouho, dokud po jeho přičtení/ odečtení nedostane výslednou adresu. (P-O).

Oč.5: U úlohy 3. a 5. by žák mohl od operátoru změny dopočítávat do výsledné adresy (DP).

Oč.6: Od výsledné adresy odečte či přičte operátor změny, tím dostane výchozí adresu (SOZ).

Řešení realizována dramatizací:

Oč. 7: Stoupne si na výslednou adresu a v opačném směru šipek krokuje operátor změny, své krokování skončí na počáteční adrese (SOZ)

Úlohu 4. (Typ úlohy: Ad1 + ? = Ad2)

Řešení úlohy v mysli žáka:

Oč.8: Žák vyřeší úlohu dopočítáním do výsledné adresy (DP),

Oč.9: Žák odečte od výsledné adresy počáteční (SOZ).

Řešení realizována dramatizací:

Oč.10: Postaví se na počáteční adresu a dokrokuje na výslednou (DP), počet kroků určí počet šipek, které žák zapíše do prázdného boxu.

Úlohy 7. a 11. (Typ úlohy: Ad1 - ? = Ad2)

Řešení úlohy v mysli žáka:

Oč.11: Odečte od počáteční adresy výslednou (OOD).

Řešení realizována dramatizací:

Oč.12: Postaví se na počáteční adresu a dokrokuje do výsledné adresy, počet kroků určí počet šipek, které žák zapíše do prázdného boxu (DP).

PRŮBĚH EXPERIMENTU

Žáci se rozdělili do páru. Každá dvojice měla část svého schodiště, kde úlohy realizovala. Nemohla jsem sledovat obě dvojice současně, proto jsem požádala studentku Annu, aby mi zapisovala a nahrávala řešení první dvojice.

CHYBA

Při přípravě tohoto experimentu jsem zapomněla na zásadní věc: připravit si značky s čísly. První dvojice žáků krokovala u části schodiště, kde jednotlivé schody byly označeny značkou. Barevnou značkou byl odlišen nultý schod – startovní bod. Druhá dvojice měla označen pouze nultý schod. Tedy mnou připravované prostředí schody se změnilo na prostředí krokování na schodech. Při realizaci pokynů se daný žák měl postavit na počáteční adresu a nikoli ji odkrokovat. V té chvíli mnou výše popsané adresy v tabulce č. 2 se změnily na operátory změny. Tato situace se vyskytuje například při řešení úlohy č. 5 první dvojicí. Avšak u úlohy č. 9 již žáci chápou první číslo jako adresu schodu.

EVIDENCE PRŮBĚHU EXPERIMENTU

<table>
<tr><th>EVIDENCE:</th><th>KOMENTÁŘ:</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. a 2. Úloha
<table>
<tr><td>1.</td><td>3</td><td>→→→→</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>5</td><td>→→</td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Ex-01: „Postav se na trojku.“
Ot-01: (postavil se na třetí schod)
Ex-02: „Udělej čtyři kroky nahoru.“
Ot-02: (odkrokoval)</td><td>První a druhou úlohu jsme řešili společně. Děti se dívaly do pracovního listu, já jsem zadávala pokyny.
Záměr společného řešení byl: seznámit děti</td></tr>
</table>

Děti již samy odpovídaly, že do prázdného okénka zapíší sedmičku.

Vyřešení druhé úlohy probíhalo obdobně, o realizaci pokynu se tentokrát postaral Pavel.

s tímto prostředím.

3. a 5. Úloha

3.		→→	5
5.		→→→→	11

První dvojice řešila procesem, kdy jeden žák vydal pokyn např. v úloze 5. „Jdi 4 dopředu a kolik musíš udělat, aby ses dostal na 11?“ a druhý z dvojice krokoval než došel k schodu jedenáct.

Jde o řešení úlohy strategií dopočítávání, realizovanou jednou dramatizací. Není mi jasné, proč žáci využili tuto strategii při dramatizaci. Tuto situaci jsem neočekávala. Při rozboru řešení jsem si uvědomila, že žák „dokrokovává“ do výsledné adresy. Tudíž počáteční adresa, kterou dvojice zjistila, není adresou, ale operátorem změny.

JEV 1: zjištění adresy operátorem

Druhá dvojice řešila ústně. Ota se zeptal Kamila: *„Čtyři a kolik je do 11?“*Kamil odpověděl: *„Sedm.“*

Jde o strategii řešení dopočítávání, ale tentokrát otázkou žáka. Tato strategie byla očekávána, viz Oč. 5.

7. a 11. Úloha

7.	4		1
11.	8		5

První skupina opět řešila realizací, kdy jeden žák vydal pokyn a druhý krokoval. Například u 11. úlohy žákyně vydala povel: *„Jdi na osmý schod, teď 3 dolů.“*  Ten, co vydával pokyn, spočítal schody od nuly ke krokujícímu, aby si zkontroloval správnost procesu a doplnil tři šipky doleva.	První dvojice sice řešila úlohu dramatizací. Tedy procesem. Proč? Myslela jsem, že ani jedna dvojice nebude potřebovat dramatizaci. Je možné, že Pavel bral ohledy na Anežku, která se kroužku účastnila poprvé a krokování neznala. Na obrázku je vidět, jak si žákyně ukazuje na schody. To odpočítává pátý schod, na kterém by měl Pavel zůstat stát. Kvůli mojí chybě si žáci podobně odpočítávali adresy schodů.
Druhá dvojice řešila slovně: „Osm mínus pět?“ Druhý z dvojice odpověděl tři a zapsali tři šipky doleva. 	Toto řešení je popsáno jako Oč. 12. Ota, který zapisoval, okamžitě úlohu přepisoval do číselného zápisu.

9. úloha

9.		←←←←	2

Pa-01: „Jdi na osmičku.“ *An-01: (vystoupá na osmý schod od startovní značky)* *Pa-02: „Bež čtyři dolů.“* *An-02: (udělá čtyři kroků dolů) „Čtvrtý.“*	**JEV 2: strategie pokus-omyl** Pavel tipuje počáteční schod, na který se měla Anežka postavit. Tento způsob hledání řešení je časově náročný. **JEV 3: spolupráce**

Pa-03: „Aha, to nesedí. Tak jdi na sedmičku.“ *An-03: (postaví se na sedmý schod)* *Pa-04: „ A teď, bež čtyři dolů.“* *An-04: (udělá čtyři kroků dolů)„Třetí.“* *Pa-05: „Jojo, už vím. Musíš začít na šestce.“* *An-05: (postaví se na šestý schod)* *Pa-06: „ No, a teď zase čtyři dolů.“* *An-06: (dělá čtyři kroků dolů)* *Pa-07: „ Konečně, teď to vyšlo.“ Ozvalo se s radostí.*	Za povšimnutí stojí role Aničky. Překvapilo mě, s jakou důvěrou vykonávala všechny povely, které Pavel řekl. Mohla třeba začít protestovat, že jí dává špatné povely apod., ale to se nestalo. Domnívám se, že v okamžiku, kdy Pavel (Pa-05) pronesl: „Jojo, už vím. Musíš začít na šestce,“ mohlo u něj dojít k abstraktnímu zdvihu na úroveň generického modelu, protože již v následujícím příkladu řešil podobnou úlohu jiným způsobem. Tuto větu pronesl Pavel *(Pa-07)* s velkou radostí. Tato úloha byla pro něj obtížná, proto asi přišla radost, když ji s pomocí Anežky vyřešil. Je známo, že abstrakční zdvih bývá doprovázen emocemi. Je možné, že Pavlova radost právě vyjadřovala vnitřní posun v jeho poznání.

10. úloha (první dvojice)

10.		←←	9

Pa-08: „Začni na devítce.“ *An-07: (vystoupá na devátý schod od značky)* *Pa-09: „Bež ještě dva nahoru.“* *An-08: (udělá dva kroky nahoru) „Jedenáct.“* *Pa-10: (zapíše číslo 11 do prázdného boxu)*	Úloha byla řešená odzadu. V tomto případě představuje směr šipek antisignál, protože poukazuje na krokování dozadu. Ale žák (Pa-09) správně zadal povel: *„Bež ještě dva nahoru.“* **JEV 4:antisignál a strategie odzadu** Strategii jsem očekávala, viz. Oč.7. Avšak jsem si neuvědomovala, že jde o antisignál. Uvědomila jse si to, když jsem viděla, že Pavel říká:*„Bež ještě dva nahoru.“* Ale v záznamu jsou dvě šipky dolů.

10. úloha (druhá dvojice)

10.		←←	9

Ka-01: „Dva kroky dolů.“ *Ot-01: (postavil se o dva schody níž než*	Aniž by Ota odpověděl, Kamil (Ka-02) zapsal do prázdného okna číslo jedenáct. Zde jsem se měla

je schod, na který si kluci nalepili značku pro nultý schod) *Ka-02: „Kolik jich musíme udělat dopředu, abysme byli na 9?“(rovnou zapisuje do prázdného okna číslo 11)* *Ot-02: (jde po schodech nahoru a počítá každý schod, než vystoupá na devátý schod) „Jedenáct.“* *Ka-03: „Ano, správně.“*	zeptat, jak na výsledek přišel. Nyní by mě zajímalo, jak řešil. Na základě jeho povelu se nyní se mohu pouze domnívat, že řešil způsobem -2 + 9, tedy dopočítáním. Otázkou zůstává, jestli je tomu opravdu tak. Nebo v jeho představách proběhla strategie odzadu? Je vůbec nutné znát odpověď? Není jen samotné spekulování pro mě obohacující? **JEV 5: chyba experimentátora** Při tomto způsobu řešení se počáteční adresa změní na operátor změny. Tuto skutečnost vystihuje žákova otázka (Ka-02): *„Kolik jich musíme udělat dopředu…“* Toto řešení pro mě bylo překvapivé. Neočekávala jsem, že žáci půjdou do záporných čísel a přitom zjistí neznámou adresu pomocí operátoru změny. **JEV 1: zjištění adresy operátorem** **JEV 6: záporné číslo**

PŘEHLED JEVŮ

Zde uvádím přehled všech jevů, které jsem v experimentu objevila. Každý z nich doplňuji svým komentářem. Jevy jsem rozdělila do kategorií: metakognitivní, kognitivní, komunikační jevy a jevy u experimentátora.

1) **metakognitivní**
   a) **JEV 2: strategie pokus-omyl**

Je známo, že tuto strategii používají žáci, kteří mají málo zkušeností v dané matematické oblasti. Tato strategie je časově náročná. Domnívám se ale, že je důležitá a významná pro poznávací proces žáka. A to z důvodu nabývání zkušeností.

Rovněž si myslím, že tuto strategii umí spíše využívat žáci, kteří jsou vedeni v duchu konstruktivismu. Na praxi jsem se setkala, že žáci, kteří jsou vedeni spíše instruktivně, při setkání s novým typem úlohy, na ni reagují: „To jsme se neučili.“ nebo „Já nevím, jak to mám řešit. Nebudu to řešit.“ Naopak na souvislé praxi ve třídě J.Michnové, o které si myslím, že je vedená konstruktivisticky, jsem setkala s častým využívám této strategie. Jistě popsaná skutečnost není pravidlo, je to jen má domněnka opřená o zkušenost.

b) JEV 4:antisignál a strategie odzadu

Přítomnost antisignálu v úloze poukazuje na opačnou operaci, jež má být pro řešení úlohy použita. Zde (úloha č.10) při řešení Oty a Aničky se vyskytl při řešení úlohy odzadu. Šipky v úloze poukazují na krokování dozadu (v prostředí schody dolů), ale pro vyřešení úlohy se musí jít dopředu (nahoru).

Nemohla jsem se rozhodnout, zda tento jev patří do oblasti metakognice (dále jen MK) či jen kognice(dále jen K). Pro K nasvědčuje odhalení antisignálu. Pro MK, že jde o strategii řešení úlohy, a to řešení odzadu. Proto tento jev řadím do obou oblastí.

2) kognitivní

a) **JEV 1: zjištění adresy operátorem**

Mohu se domnívat, že pokud žák dokáže zaměňovat tyto dvě role čísla, pak jeho představy o číslech jsou bohaté na sémantické modely těchto čísel.

b) JEV 4:antisignál a strategie odzadu

Viz 1.b)

c) **JEV 6: záporné číslo**

Žák se krokem vzad dostal do záporných čísel. Šel s takovou samozřejmostí, že jsem se při pozorování domnívala, že úlohu krokuje jen pro kontrolu svého řešení. Myslím si, že právě tyto zkušenosti se zápornými čísly budují u žáků citlivost na oblast celých čísel.

3) **komunikační**

a) **JEV 3: spolupráce**

Žáci mezi sebou spolupracovali. V jejich komunikace byla znát důvěra. Při řešení úloh byla pozorovatelná souhra mezi tím, co jeden říká a druhý podle jeho povelů vykonává.

4) **jevy u experimentátora**

a) **JEV 5: chyba experimentátora**

V této situaci (úloha 10 – druhá dvojice) jsem se mohla žáka zeptat, jak na řešení přišel. Neudělala jsem to a nyní mohu nad jeho řešením pouze spekulovat. Avšak objevuji, že samotné přemýšlení nad jeho řešením je pro mě obohacující.

ZÁVĚR EXPERIMENTU

Dva zúčastnění žáci měli již v době tohoto experimentu zkušenosti s krokováním z předchozích experimentů. Měli zkušenosti i s šipkovým záznamem. Domnívám se, že proto pro ně bylo snadné přijmout obdobu číselné osy ve směru vertikálním. Mohla k tomu přispět i skutečnost, že schody nebyly označeny čísly a tudíž zde neviděli takovou odlišnost. V tomto případě prostředí nepřispívalo k pochopení další role čísla, a to adresy. Myslím, že je to i jeden z důvodů, proč dokázali zaměňovat roli čísla jako adresy za operátor změny. Avšak z žákovských rozhovorů a záznamů vyplynulo, že žáci někdy chápali číslo jako operátor změny a jinde i jako adresu.

SEBEREFLEXE

Z hlediska matematiky jsem si až při rozboru žákovské evidence a jejím porovnávání s mými očekáváními uvědomila, že úloha typu: ? ± Oz = Ad obsahuje při řešení odzadu antisignál. V tomto případě je to kladný nebo záporný operátor, který nabádá k opačné operaci než té, které je nutno k vyřešení úlohy použít. Dále jsem zjistila, že při řešení úlohy výše uvedeného typu způsobem, že se žák postaví na nultý schod, odkrokuje operátor změny, a pak krokuje zbývající schody do výsledné adresy, setká s výsledkem operátoru změny nikoli číslem v roli adresy. V tomto případě jde o strategii dopočítávání.

Uvědomila jsem si, že při opětném rozboru žákovských řešení a porovnávání s mými očekáváními jsem se obohatila o nové poznatky. Jsem z těchto poznatků nadšená a ráda bych tento nástroj (psát si očekávání a pak je porovnávat s evidencí žáků) využívala dál při učitelské praxi.

V tomto experimentu jsem pozorovala strategie, jakým způsobem žáci dané úlohy řeší. Myslím, že se mi již dařilo nevstupovat žákům do jejich řešení úloh. Avšak při analýze žákovských řešení jsem zjistila, že ne u všech úloh vím, jak řešení v mysli žáka probíhalo. Nicméně si myslím, že již samotné spekulování nad žákovským řešením bylo pro mě obohacující.

5 Závěr

Tato diplomová práce se zabývá sémantickým aritmetickým prostředím Krokování. Pro její vypracování bylo stanoveno několik cílů. Dále popisuji, jak jsem své cíle splnila.

Prostudovala jsem odbornou literaturu, která se věnuje koncepci mechanizmu poznávacího procesu a Teorii generických modelů. Ve snaze hlouběji proniknout do této problematiky, jsem se pokoušela tuto teorii aplikovat na své zkušenosti z praxe. Dané situace popisuji v druhé kapitole, ale i tak mi zůstává otazník, jestli je daná situace pochopena správně. Dále jsem se prostřednictvím studia a aplikace poznatků na zkušenosti s žáky snažila porozumět pojmům jako proces, koncept a procept, didaktický konstruktivismus, tvorba jazyka a v neposlední řadě problematice nedorozumění při výuce. Na základě těchto poznatků, náslechu u zkušené učitelky J. Michnové v tomto matematickém prostředí a realizaci prvních experimentů jsem prozkoumávala jednotlivé etapy budování schématu Kroky a Schody. Nedílnou součástí zkoumání těchto matematických prostředí bylo seznámení se s úlohami z prostředí Krokování a Schody v učebnicích matematiky (H1-H4) a jejich příručkách (PU 1-4).

Přípravy na experimenty se vyvíjely paralelně se získáváním zkušeností v tomto prostředí a při jejich rozboru. Celkově jsem uskutečnila 13 experimentů. Všechny experimenty proběhly na školní půdě, většinou v době vyučování, nebo odpoledne po vyučování (v případě matematického kroužku). Třídy, v nichž byly experimenty realizovány, byly vybrány náhodně. Ve svých experimentech jsem se zaměřila na zjištění způsobu žákovských záznamů kroků a řešení úloh s výskytem operátoru. Své výsledky představuji ve zpracovaných experimentech č. 3 a 9. Ve svých experimentech jsem také hledala odpověď na následující otázku: Na jaké úrovni je schopen žák prvního stupně rozumět záporným číslům? Odpověď jsem našla v experimentu č. 5. Při realizaci experimentů jsem taktéž zjistila obtíže, které mohou nastat při realizaci krokování.

Získaný materiál (videonahrávky a videozáznamy na fotoaparátu) jsem řádně evidovala. A to buď přepisem nebo písemnou evidencí doplněnou o žákovská řešení úloh či záznamy krokování. Evidované experimenty jsem analyzovala s cílem popsat jevy, které se při experimentech vyskytly. Při popisu jevů bylo mou snahou ptát se, proč k tomuto jevu dochází. Jevy jsem třídila na jevy komunikační, kognitivní a metakognitivní. Při těchto analýzách jsem objevila i jevy týkající se experimentátora. Jednalo se spíše o mé chyby. První chyby bylo těžké přijmout, avšak poznání jejich významu mi přineslo nový pohled na analýzy. Nyní jsem se na ně mohla dívat jako na příležitost „stát se vnímavější" k žákovu poznání. Svou roli jako experimentátor shrnuji v sebereflexích, které uvádím v závěru zpracování každého experimentu.

Při zpracovávání diplomové práce jsem si uvědomila, že mé učitelské přednosti nejsou právě v tomto oboru. Častokrát jsem musela bojovat i s myšlenkou celou tuto práci vzdát. Nicméně jsem to neudělala a místo toho jsem se opět ponořila do práce. Dnes toho nelituji, díky vypracování této práce jsem si vědoma obrovského vývoje v oblasti didaktiky matematiky, který mi pomáhá nejen více rozumět žákům, ale mít i vhodné argumenty pro rodiče, kteří novou koncepci matematiky (M. Hejného) spolu se svými dětmi teprve poznávají.

Nyní jsem si vědoma, že úsilí věnované práci mi přineslo nové zkušenosti (např. že je vhodné do své přípravy zahrnout i mnohem náročnější úlohy), nový pohled na děti (př. jak rozsáhlé matematické poznání může mít žák druhé třídy) a nová zjištění o sobě samé, a to hlavně o mém přístupu k žákům (který jsem k mému neočekávání hodnotila jako silně autoritativní) a o mých slabých místech. Poučila jsem se například, že musím dbát o to, abych žákům nevstupovala do řešení problému, ale počkala na vhodný okamžik. Také jsem si uvědomila, že jsem díky opětnému rozboru žákovských řešení a porovnávání s mými očekáváními získala nástroj (psát si očekávání a pak je porovnávat s evidencí žáků), který bych ráda dále využívala při své učitelské praxi. Při analýze žákovských řešení jsem také zjistila, že ne u všech úloh vím, jak řešení v mysli žáka probíhalo. Nicméně si myslím, že již samotné spekulování nad žákovským řešením bylo pro mě obohacující.

Svojí diplomovou prací se zabývám od přelomu roku 2007/ 2008. Od této doby zkušenosti stále přibývaly, a tak jsem se dostala do koloběhu přepisování práce. Nyní jsem dostala touhu znova ji přepsat. Uvědomila jsem si však, že je to nekončící proces vývoje, který se nikdy nezastaví. Proto jsem musela říci stop a nechat práci v této poslední verzi.

Literatura a informační zdroje

Seznam literatury

Bezpečné klima ve třídě je nutnou podmínkou kvalitního učení. In NOVÁČKOVÁ, J. *Mýty ve vzdělávání : O škodlivosti některých zaběhaných představ o učení, škole a výchově a cestách, jak je překonat.* 3. vyd. Kroměříž : Spirála, 2006. s. 48. ISBN 80-901873-8-2.

CIHLÁŘ, J.; LESÁKOVÁ, E.; ŘÍDKÁ, E.; ZELENKA, M. *Očekávané výstupy v RVP ZV z matematiky ve světle testových úloh*. Praha : ÚIV - Tauris, 2007. ISBN 978-80-211-0544-7.

DAVIS, J. *Maths and the Greeks*. Leamington : Hopscotch Educational Publishing Ltd., 2002. ISBN 1-902239-94-6.

FONTANA, D.: *Psychologie ve školní praxi*. Praha : Portál, 1997. ISBN 80-7178-063-4.

FRÝZKOVÁ, M.; POTUŽNÍKOVÁ, E.; TOMÁŠEK, V. Netradiční úlohy : *Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA*. ÚIV – Tauris, 2006. ISBN 80-211-0522-4.

GARDNER, H. *Dimenze myšlení : Teorie rozmanitých inteligencí*. Praha : Portál, 1999. ISBN 80-7178-279-3.

HARTL, P. *Psychologický slovník*. 2. vyd. Praha : Nakladatelství Budka, 1994. ISBN 80-901549-0-5.

HEJNÝ, M., aj. Rozvoj konceptuálního myšlení v matematice. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2006 : Sborník příspěvků.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta a SUMA JČMF, 2007. s. 179. ISBN 978-80-7290-268-6.

HEJNÝ, M. Budování matematických schémat. In HOSPEŠOVÁ, A.; STEHLÍKOVÁ, N.; TICHÁ, M. *Cesty zdokonalování kultury matematického myšlení.* České Budějovice : Jihočeská univerzita v českých Budějovicích, 2007. s. 218. ISBN 978-80-7394-052-2.

HEJNÝ, M.; KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika.* Praha : Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, M. Otváranie a utvárenie matematického světa. In *Předškolní a primární pedagogika*. Praha: Portál, 2001. s. 455. ISBN 80-7178-585-7.

HEJNÝ, M. Procept. In *Zbornik bratislavského seminára z teorie vyučovania matematiky*. Bratislava : MFF UK, Katedra základov a didaktiky matematiky, 1999. ISBN 80-223-1435-8.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D. *Čtverečkovaný papír jako most mezi aritmetiou a geometrií.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 1999. ISBN 80-86039-92-7.

HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D. Svět aritmetiky a geometrie. In HEJNÝ, M.; NOVOTNÁ, J.; STEHLÍKOVÁ, D. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2004. s. 212. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, M; STEHLÍKOVÁ, N. *Číselné představy dětí : kapitoly z didaktiky matematiky*. Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 1999. ISBN 80-86039-98-6.

HOLT, J. *Jak se děti učí*. Praha : Agentura Strom, 1995. ISBN 80-901662-7-X.

JIROTKOVÁ, D. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2010. ISBN 978-80-7290-399-3.

KUŘINA, F., aj. *Matematika a porozumění světu : Setkání s matematikou po základní škole*. Praha : Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1743-7.

KUŘINA, F. Matematika – základ evropské vzdělanosti. *Matematika ; fyzika ; informatika : časopis pro výuku na základních a středních školách*. 2007-2008, 17, 9. ISSN 1210-1761.

LANGMEIER, J.; KREJČÍKOVÁ, D. *Vývojová psychologie.* 2. vyd. Praha : Grada Publishing, 2006. ISBN 80-247-1284-9.

LOKŠOVÁ, I.; LOKŠA, J. *Pozornost, motivace, relaxace a tvořivost dětí ve škole.* Praha : Portál, 1999. ISBN 80-7178-205-X.

MARTINEC, L., aj. *Co umí čeští žáci : výzkum PISA*. Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2008. ISBN 978-80-211-0555-3.

MOONEY, C. G. *An Introduction to Dewey, Montessori, Erikson, Piaget and Vygotsky.* USA : Redleaf Press, 2000. ISBN 978-1-884834-85-1.

POUND, L. *How children learn.* London: Step Forward, 2008. ISBN 978-4-904575-37-5.

SLEZÁKOVÁ, J. Prostředí Krokování. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2006. Sborník příspěvků.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta a SUMA JČMF, 2007. s. 179. ISBN 978-80-7290-268-6.

STEHLÍKOVÁ, N. *Náměty na podnětné vyučování v matematice.* Praha : Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007. ISBN 978-80-7290-342-9.

TOMÁŠEK, V., aj. *Výzkum TIMMS 2007 : Úlohy z matematiky a přírodovědy pro 4. ročník*. Praha : Ústav pro informace ve vzdělávání, 2009. ISBN 978-80-211-0586-7.

TRPIŠOVSKÁ, D.; VACÍNOVÁ, M. *Základy psychologie.* Ústí nad Labem : Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Pedagogická fakulta, 2001. ISBN 80-7044-368-5.

Učebnice

H1/1 - HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1 : učebnice pro 1. ročník základní školy. 1. díl.* Plzeň : Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-626-0.
H1/2 - HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 1 : učebnice pro 1. ročník základní školy. 2. díl.* Plzeň : Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-627-7.
H2/1 - HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2 : učebnice pro 2. ročník základní školy. 1. díl.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7.
H2/2 - HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2 : učebnice pro 2. ročník základní školy. 2. díl.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-769-4.
H2/3 - HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ, J. *Matematika 2 : učebnice pro 2. ročník základní školy. 3. díl.* Plzeň : Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-770-0.
H3 - HEJNÝ, M., aj. *Matematika 3 : učebnice pro 3. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-824-0.
H4 - HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; BOMEROVÁ, E. *Matematika 4 : učebnice pro 4. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7.
H4/S1 - HEJNÝ, M., aj. *Matematika 4 : pracovní sešit 1 pro 4. ročník základní školy.* Plzeň : Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-941-4.
H4/S2 - HEJNÝ, M., aj. *Matematika 4 : pracovní sešit 2 pro 4. ročník základní školy*. Plzeň : Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-942-1.

Matematika (příručka učitele): Hejného matematika

PU1 – Hejný M.; Jirotková, D.; Slezáková-Kratochvílová, J. *Matematika. Příručka učitele pro 1. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2007, ISBN 978–80–7238–628–4.

PU2 – Hejný M., aj. *Matematika. Příručka učitele pro 2. ročník základní školy*. Plzeň: Fraus, 2008, ISBN 978–80–7238–771–7.

PU3 – Hejný M., aj. *Matematika. Příručka učitele pro 3. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2009, ISBN 978–80–7238–827–1.

PU4 – Hejný M., aj. *Matematika. Příručka učitele pro 4. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978–80–7238–943–8.

Vlastní zápisky z přednášek M. Hejného a seminářů D. Jirotkové

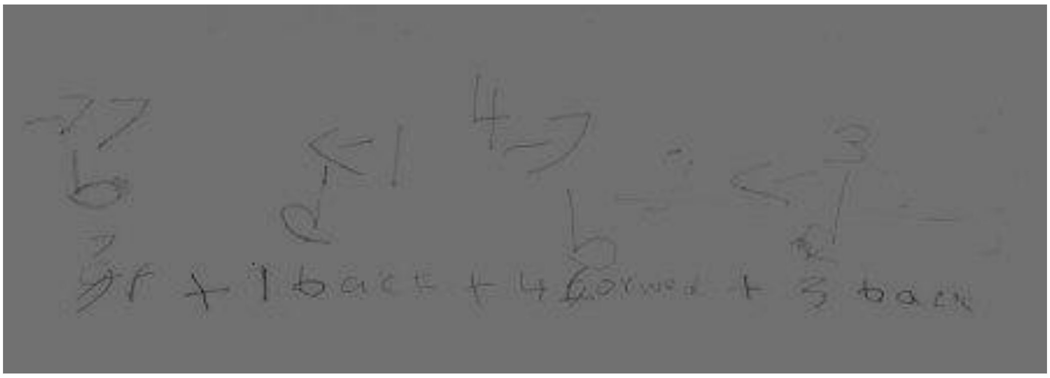
Elektronické zdroje

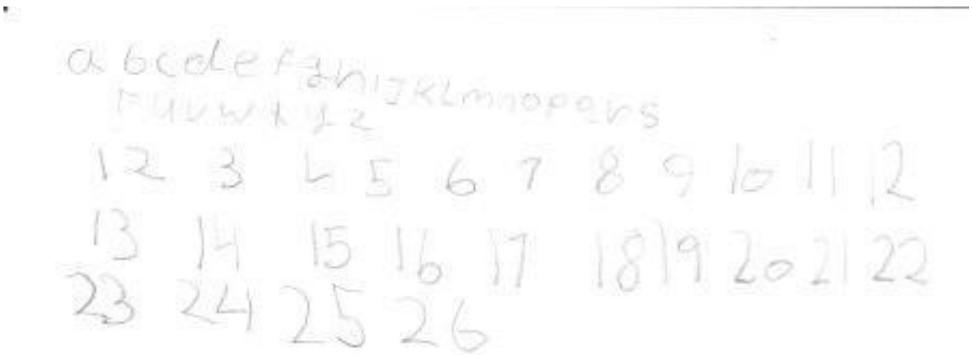
HEJNÝ, M. *Číslo*.[online]. 2008 .[cit.2010-12-12]. Přednáška. Dostupné z WWW: <http://kmdm.pedf.cuni.cz/>.

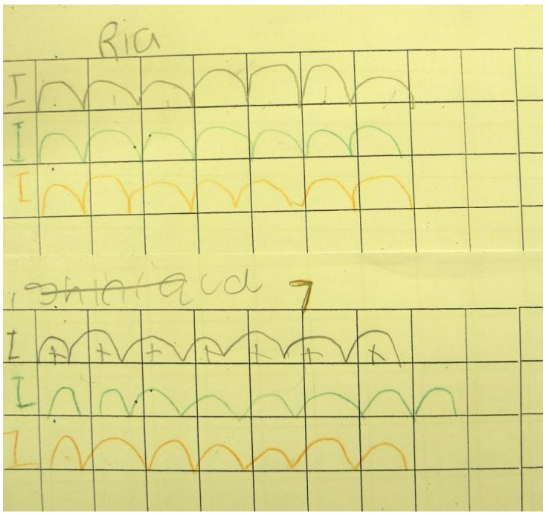
Přílohy

- » PŘÍLOHA Č. 1 – různé způsoby záznamu krokování
- » PŘÍLOHA Č. 2 – záznam z teček
- » PŘÍLOHA Č. 3 – objev komutativnosti sčítání
- » PŘÍLOHA Č. 4 – ukázka přípravy experimentu

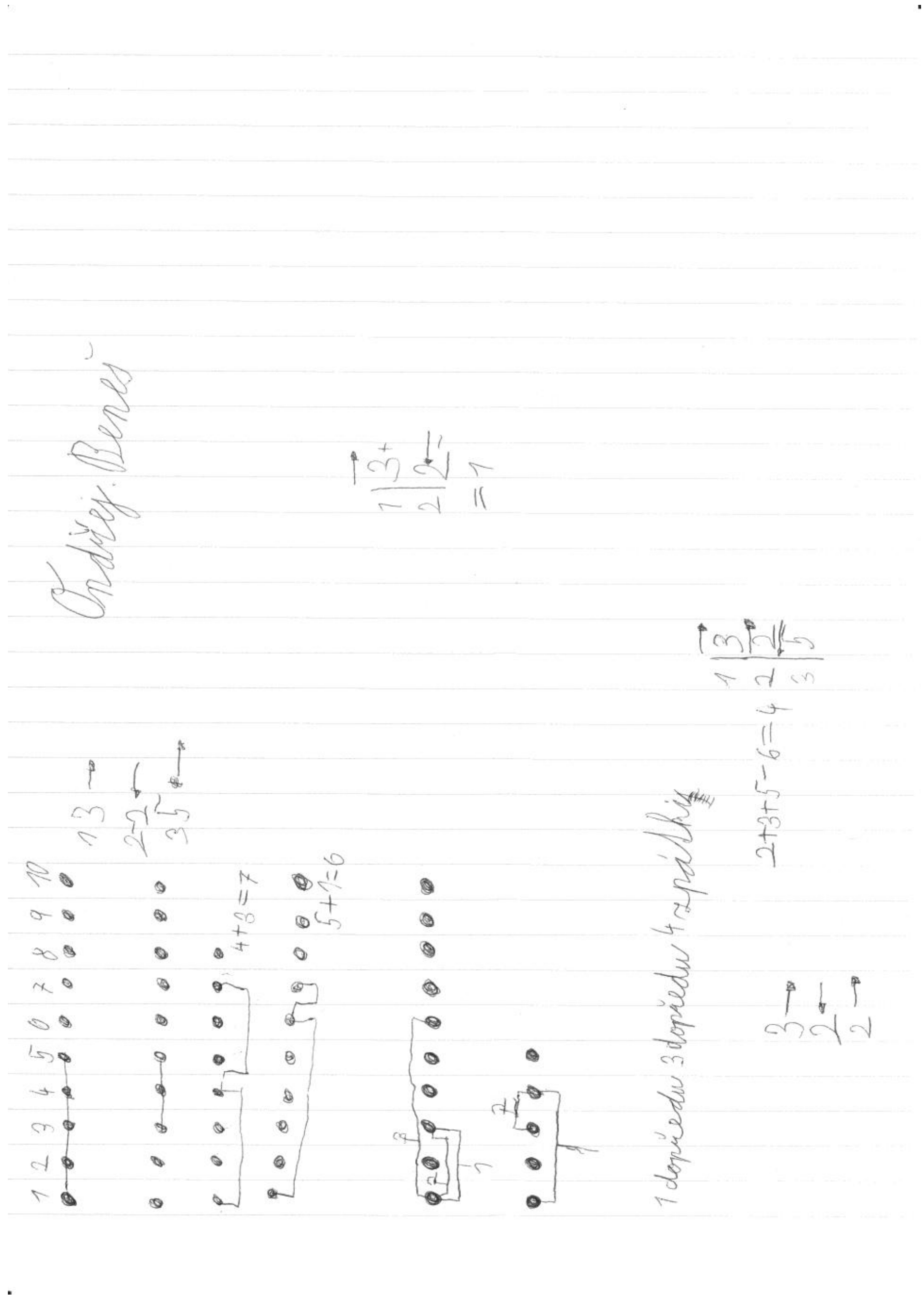
PŘÍLOHA Č. 1 – různé způsoby záznamu krokování







PŘÍLOHA Č. 2 – záznam z teček



PŘÍLOHA Č. 3 – objev komutativnosti sčítání

ze se dají obratit |→ =|←←|→→→| a je to stejné jako |→|=→→→|←←|.

Vyřeš krokovou rovnici pomocí tří, anebo čtyř šipek. Hledej více řešení.

−1−2 ←←|→ ← = →→ $\boxed{←←←←}$

←←	←	→	=	→→	←←←←←
←←	→	→	=	→→	←←
←←	→→	→	=	→→	←
←←	→→→	→	=	→→	
←←	→→→→	→	=	→→	→
←←		→		→→	←←←

←	→→→→	=	→→→	
←	→→→	=	→→→	←
←	→→	=	→→→	←←
←	→	=	→→→	←←←
←		=	→→→	←←←←

s 3 šipkami a 4 šipkami není více řešení →

←←		=	→	←←←	=		←←
←←	→→	=	→	←←	=	→→	←←
←←		=	→		=		←←
←←		=	→		=		←←

−1	←←		→		=	→→→	←←←	←
0	←←		→	→	=	→→→	←←	←
1	←←		→	→→	=	→→→	←	←
−1	←←	→	→	→	=	→→→	←	←
2	←←	→	→	→→	=	→→→		←
2	←←	→→→	→		=	→→→		←

→→→

→→ →

→→ ←

→ ←←

→→→

PŘÍLOHA Č. 4 – ukázka přípravy experimentu

Příprava na 8.12.2009

Téma: krokování pokračování – 2.třída

Pomůcky: krokovací pás s barevným odlišením počátečního bodu.

UPOZORNIT: startovní bod, při pochodování počítáme společně nahlas.

Cíl: Žák propojuje číslo a rytmus (zvukový i pohybový). Žák poznává, že dvoudílný i jednodílný pokyn vede ke stejnému přemístění – přiřazuje tomuto úkonu operaci součtu.

1) EVOKACE (připomenutí prostředí krokování)
   a) Krokuj: →→→→→→
   b) Dej pokyn/ Krokuj/ Zapiš (3 figuranti) 3 x
   c) Zapiš jednodílný pokyn k dvoudílnému. →→→→/→→ →→→→→/←←← (ZAPISUJI JAKO ROVNICE – PŘED PŘÍPRAVA NA ROVNICE)

Cíl: Žák aplikuje poznání o operátoru změny v jiném prostředí.

2) UVĚDOMĚNÍ SI VÝZNAMU
   a) Otázky na zkušenost dětí – co znamená šetřit apod. (bankovní konto)
   b) Vyřeš: František si střádá do prasátka. Tatínek mu do něj přidal 5 korun, a pak další týden 3 koruny. Kolik korun přibylo Františkovi do prasátka? (řešíme krokováním)
   c) Vyřeš: Jenda hrál s kamarádem kuličky. Nejprve vyhrál 3 kuličky, ale pak 1 prohrál. O kolik se změnil jeho celkový stav kuliček?

Cíl: Žák krokuje dozadu. Žák řeší úlohu krokováním – přiřazuje své strategii řešení operaci odčítání a při vyřešení se setkává se záporným číslem.

3) ZÁPORNÁ ČÍSLA
   a) Najdi správnou dvojici. Která dvojice ti přijde NOVÁ, ZAJÍMAVÁ?
   b) Povely (pochodují oba žáci naráz)

      →→→/←← →→→→→/←←←

      →→/←←← →→→/←←←←←

      Sledovat strategie řešení – barevné značení, červená čísla; lze/nelze.
   c) Vyřeš: Teplota v poledne stoupla o 3 stupně, večer klesla o 5 stupňů. O kolik stupňů se teplota změnila? (čísla dozadu barevně označíme). – [illegible]

4) REFLEXE
   a) Co bylo dnes pro tebe zajímavé? (vyber z možností)
   b) Kde ses nudil? (vyber z možností)