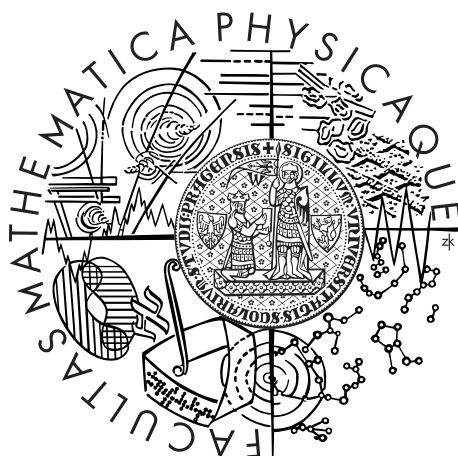


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Peter Hujer

Vytvořující funkce a jejich využití v teorii pravděpodobnosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Marek Omelka Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha ROK 2012

Týmto by som sa rád poďakoval svojmu vedúcemu bakalárskej práce, Ing. Marekovi Omelkovi, Ph.D., za odbornú pomoc a cenné rady, ktoré mi poskytol.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Vytvořující funkce a jejich využití v teorii pravděpodobnosti

Autor: Peter Hujer

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Marek Omelka Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Vytvořující funkcie sú vhodný matematický aparát pre opis rozdelenia náhodných veličín. V tejto práci predstavíme často používané druhy vytvorujúcich funkcií, ich základné vlastnosti, jednoznačnosť a výhody použitia. Zavedený matematický aparát použijeme na niektoré známe spojité a diskrétné rozdelenia, ale aj na nevšedné príklady z praxe. Silu vytvorujúcich funkcií potom naplno využijeme pri riešení zaujímavých problémov, často spájaných so vznikom teórie vetviacich procesov, dôležitej oblasti teórie pravdepodobnosti.

Klíčová slova: vytvorujúce funkcie, vlastnosti, použitie, vetviace procesy

Title: Generating functions and their use in the theory of probability

Author: Peter Hujer

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Ing. Marek Omelka Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Generating functions are suitable mathematical apparatus to describe the distribution of random variables. In this paper we introduce frequently used types of generating functions, their basic properties, uniqueness and benefits of use. We use this established mathematical apparatus for some known continuous and discrete distributions, but also the unusual practical examples. Then we fully utilize the strength of generating functions to solve interesting problems, often associated with creation of the theory of branching processes, an important area of probability theory.

Keywords: generating functions, properties, use, branching processes

Obsah

Úvod	2
1 Rôzne druhy vytvorujúcich funkcií	3
1.1 Momenty a momentová vytvorujúca funkcia	3
1.2 Vytvorujúca funkcia	8
1.3 Charakteristické funkcie	9
1.4 Vlastnosti vytvorujúcich funkcií	10
1.5 Hlava alebo znak	13
1.6 Spravodlivý pár kociek	15
2 Vetviace procesy	17
2.1 Historické pozadie	17
2.2 Problém vyhynutia	17
2.3 Problém distribúcie potomkov	19
Záver	22
Seznam použité literatury	23

Úvod

Ako už predpovedá názov tejto práce, budeme sa venovať vytvoreným funkciám náhodných veličín, špeciálne spojité a diskretné náhodných veličín. Predstavíme si tri druhy často používaných vytvorených funkcií a ukážeme si niektoré ich aplikácie v teórii pravdepodobnosti. Ako sa neskôr v práci dozvieme, vytvorené funkcie sú vhodným prostriedkom pre opis rozdelenia náhodných veličín. V celej práci budeme vychádzať najmä z kníh [1], [2] a [3].

V prvej kapitole si ako prvú predstavíme momentovú vytvorenú funkciu náhodnej veličiny. Uvedieme si jej definíciu, vzťah k momentom náhodnej veličiny, jednoznačnosť, a vypočítame ju pre niektoré známe diskretné a spojité rozdelenia. Nasledovať bude vytvorená funkcia, a podobne, ako v prvej časti, uvedieme jej definíciu, jej vzťah k rozdeleniu náhodnej veličiny a uvedieme jednoduchý príklad. Charakteristickej funkcii sa budeme venovať len okrajovo, uvedieme si jej základnú definíciu a jednoznačnosť. V ďalšom texte sa ňou už nebudeme zaoberať, na príklade si však ukážeme jej dôležité postavenie v teórii pravdepodobnosti. V ďalšej časti si ukážeme niekoľko dôležitých vlastností, ktoré nám v mnohých ohľadoch uľahčia počítanie. Demonštrujeme ich na niekoľkých jednoduchších príkladoch. Posledné dve časti v prvej kapitole sú venované zaujímavým príkladom z praxe, kde silu vytvorených funkcií naplno využijeme.

V druhej kapitole si najprv predstavíme dôležitú oblasť teórie pravdepodobnosti, vetviace procesy. Povieme si o problémoch, ktoré stáli pri vzniku tejto oblasti, a pomocou zavedeného matematického aparátu vytvorených funkcií sa tieto problémy pokúsime vyriešiť. Prvým z týchto problémov bude problém vyhynutia a druhým bude problém distribúcie potomkov.

1. Rôzne druhy vytvorujúcich funkcií

Predpokladajme pre nasledujúce, že sa nachádzame na pravdepodobnostnom priestore (Ω, \mathcal{A}, P) .

1.1 Momenty a momentová vytvorujúca funkcia

Definícia 1.1. Nech X je náhodná veličina a k je prirodzené číslo. Potom k -ty moment náhodnej veličiny X definujeme ako

$$\mu_k = E(X^k),$$

pokiaľ je výraz na pravej strane konečný.

Poznámka. Špeciálne pre spojitú náhodnú veličinu X s hustotou f_X dostávame pre k -ty moment vzťah

$$\begin{aligned}\mu_k &= E(X^k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx\end{aligned}$$

a pre diskrétnu náhodnú veličinu X s rozdelením p_X , kde $p_X(x_k) = P(X = x_k)$ pre $k = 1, 2, \dots$, k -ty moment vypočítame ako

$$\begin{aligned}\mu_k &= E(X^k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_X(x_k) dx.\end{aligned}$$

Všimnime si, že pomocou momentov môžeme vyjadriť často používané opisné štatistiky, ako sú stredná hodnota μ , rozptyl σ^2 , ale aj koeficient šikmosti γ_1 a koeficient špicatosti γ_2 náhodnej veličiny X :

$$\begin{aligned}EX &= \mu = \mu_1 \\ \text{var}(X) &= \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 \\ \gamma_1 &= \frac{\mu_3}{(\mu_2 - \mu_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \gamma_2 &= \frac{\mu_4}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2} - 3.\end{aligned}$$

Definícia 1.2. Nech X je náhodná veličina. Momentovou vytvorujúcou funkciou náhodnej veličiny X nazývame funkciu

$$g(t) = E(e^{tX}),$$

ak existuje $h > 0$, že $g(t)$ je konečná pre všetky t také, že $|t| < h$.

Poznámka. V anglickej literatúre sa pre momentovú vytvorenú funkciu používa názov *moment generating function*.

Poznámka. Znova špeciálne pre spojitý prípad vypočítame momentovú vytvorenú funkciu ako

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

a pre diskretný prípad máme

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tx_k} p_X(x_k).$$

Práve momentová vytvorená funkcia sa používa ako vhodný prostriedok pre opis momentov náhodnej veličiny X (odtiaľ pochádza aj jej názov). Ich výpočet z momentovej vytvorenú funkcie nám priblíži nasledujúca veta.

Veta 1.1. *Nech X je náhodná veličina a nech $g(t)$, kde $|t| \leq h$ pre nejaké $h > 0$, je jej momentová vytvorená funkcia. Potom $E|X|^r < \infty$ a pre každé prirodzené číslo n platí*

$$E(X^n) = \left. \frac{d^n}{dt^n} g(t) \right|_{t=0} = g^{(n)}(0)$$

Dôkaz. Na to, aby sme dokázali druhú časť tvrdenia vety, potrebujeme dokázať pre každé prirodzené číslo n rovnosť

$$\frac{d^n}{dt^n} \int_{\Omega} e^{tX} dP = \int_{\Omega} \frac{d^n}{dt^n} e^{tX} dP, \quad (1.1)$$

teda, po zderivovaní výrazu napravo

$$\frac{d^n}{dt^n} \int_{\Omega} e^{tX} dP = \int_{\Omega} X^n e^{tX} dP.$$

Taylorovým rozvojom funkcie $e^{(h-|t|)|x|}$ dostávame rovnosť

$$\begin{aligned} e^{(h-|t|)|x|} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((h-|t|)|x|)^k}{k!} \\ &= \frac{((h-|t|)|x|)^r}{r!} + R, \end{aligned}$$

kde $|t| < h$, r je prirodzené číslo a $R > 0$. Teda pre všetky $|t| < h$ a prirodzené čísla r platí nerovnosť

$$\begin{aligned} \frac{((h-|t|)|x|)^r}{r!} &< e^{(h-|t|)|x|} \\ |x|^r &< \frac{e^{(h-|t|)|x|} r!}{(h-|t|)^r} \end{aligned}$$

a keďže funkcia na pravej strane má konečný integrál, platí $E|X|^r < \infty$. Ďalej tiež platí

$$Ee^{h|x|} \leq Ee^{hx} + Ee^{-hx} < \infty.$$

Použitím vyššie získaných nerovností dostávame vzťah

$$|X|^r e^{t|X|} \leq \frac{e^{h|X|} r!}{(h - |t|)^r},$$

teda sme získali integrovateľnú majorantu vzhľadom k P a podľa vety o derivácii integrálu závislom na parametre ([7], Věta 13.31) platí rovnosť (1.1) pre $|t| < h$. Dosadením $t = 0$ do vzťahu

$$g^{(n)}(t) = \int_{\Omega} x^n e^{tx} dP$$

dostávame požadované. □

Poznámka. Vyjadrením funkcie e^{tX} kde $|t| < h$ pomocou Taylorovho rozvoja dostávame vzťah $e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k t^k}{k!}$ pre $|t| < h$. Jeho následným dosadením do definície momentovej vytvorujúcej funkcie, využitím vzťahu $Ee^{t|X|} < \infty$ a vety o zámene sumy a integrálu ([8], Věta 9.40) dostávame vzťah

$$\begin{aligned} g(t) &= E(e^{tX}) \\ &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k t^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k t^k}{k!} \end{aligned}$$

pre $|t| < h$.

O jednoznačnosti momentovej vytvorujúcej funkcie a rozdelenia hovorí následujúca veta.

Veta 1.2. *Nech X a Y sú náhodné veličiny a g_X a g_Y sú ich momentové vytvorujúce funkcie. Ak existuje $h > 0$, také, že $g_X = g_Y$ pre $|t| < h$, potom X a Y majú rovnaké rozdelenie.*

Dôkaz. Viz [6], Věta 15.18. □

Momentovú vytvorujúcu funkciu môžeme ľahko vypočítať pre niektoré známe rozdelenia a často nám uľahčí výpočet strednej hodnoty a rozptylu náhodnej veličiny.

Príklad 1.1 Nechť X je diskretná náhodná veličina s rozdelením

$$p_X(j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j},$$

pre $j = 0, 1, \dots, n$ (binomické rozdelenie). Potom

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{j=0}^n e^{tj} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (pe^t)^j q^{n-j} \\ &= (pe^t + q)^n. \end{aligned}$$

Poznamenanajme, že

$$\begin{aligned} \mu_1 &= g'(0) = n(pe^t + q)^{n-1} pe^t \Big|_{t=0} = np \\ \mu_2 &= g''(0) = n(n-1)p^2 + np, \end{aligned}$$

a teda stredná hodnota $\mu = \mu_1 = np$ a rozptyl $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = np(1-p)$.

Príklad 1.2 Nechť X je diskretná náhodná veličina s rozdelením

$$p_X(j) = q^j p,$$

pre $j = 0, 1, \dots$ (geometrické rozdelenie). Potom

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{tj} q^j p \\ &= \frac{pe^t}{1 - qe^t}. \end{aligned}$$

V tomto prípade

$$\begin{aligned} \mu_1 &= g'(0) = \frac{pe^t}{(1 - qe^t)^2} \Big|_{t=0} = \frac{1}{p}, \\ \mu_2 &= g''(0) = \frac{pe^t + pqe^{2t}}{(1 - qe^t)^3} \Big|_{t=0} = \frac{1+q}{p^2}, \end{aligned}$$

stredná hodnota je teda $\mu = \mu_1 = 1/p$ a rozptyl $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = q/p^2$.

Príklad 1.3 Nechť X je diskretná náhodná veličina s rozdelením

$$p_X(j) = e^{-\lambda} \lambda^j / j!,$$

pre $j = 0, 1, 2, \dots$ (Poissonove rozdelenie s parametrom λ). Potom

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} e^{tj} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}. \end{aligned}$$

Teda

$$\begin{aligned} \mu_1 &= g'(0) = e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda \\ \mu_2 &= g''(0) = e^{\lambda(e^t-1)} (\lambda^2 e^{2t} + \lambda e^t) \Big|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda, \end{aligned}$$

stredná hodnota $\mu = \mu_1 = \lambda$ a rozptyl $\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \lambda$.

Príklad 1.4 Nech X je spojité náhodná veličina s hustotou

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

kde $x \geq 0$ (exponenciálne rozdelenie s parametrom λ). V tomto prípade

$$\begin{aligned} \mu_n &= \int_0^{\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\frac{1}{\lambda} \right] = \frac{n!}{\lambda^n}, \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[\frac{\lambda e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-t}. \end{aligned}$$

Teraz môžeme priamo overiť, že

$$\mu_n = g^{(n)}(0) = \frac{\lambda n!}{(\lambda-t)^{n+1}} \Big|_{t=0} = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

1.2 Vytvorujúca funkcia

V praxi sa často stretávame s prípadmi, kedy náhodná veličina opisujúca nejaký jav nadobúda iba nezáporné celočíselné hodnoty. V tomto prípade sa často, nie len pre jednoduchosť, používa miesto momentovej vytvorujúcej funkcie vytvorujúca funkcia náhodnej veličiny.

Definícia 1.3. Nech X je náhodná veličina nadobúdajúca len nezáporné celočíselné hodnoty. Potom vytvorujúcou funkciou pre X nazveme funkciu

$$h(z) = E(z^X) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j P(X = j).$$

Poznámka. Vytvorujúcu funkciu môžeme nájsť v anglickej literatúre pod názvom *probability generating function*, alebo tiež *ordinary generating function*.

Všimnime si, že $h(1) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = j) = 1$ a teda vytvorujúca funkcia, ako mocninná rada, je definovaná určite pre $|t| < 1$. Platí tiež

$$\begin{aligned} h(z) &= g(\log(z)) \\ g(t) &= h(e^t) \end{aligned}$$

a teda funkcia $h(z)$ obsahuje rovnakú informáciu ako $g(t)$. Špeciálne platí vzťah

$$h(1) = g(0) = 1$$

$$h^{(n)}(1) = g^{(n)}(0),$$

pre n prirodzené. Podobne ako momentová vytvorujúca funkcia opisuje momenty, vytvorujúca funkcia opisuje jednotlivé pravdepodobnosti $p_X(j) = P(X = j)$:

$$\begin{aligned} p_X(j) &= \text{koefficient pri } z^j \text{ v } h(z) \\ &= \frac{h^{(j)}(0)}{j!} \end{aligned}$$

Rovnako ako pri momentových vytvorujúcich funkciách je vytvorujúca funkcia a rozdelenie náhodnej veličiny jednoznačne určené.

Veta 1.3. Nech X a Y sú náhodné veličiny nadobúdajúce len nezáporné celočíselné hodnoty a h_X a h_Y sú ich vytvorujúce funkcie. Ak $h_X = h_Y$, potom X a Y majú rovnaké rozdelenie.

Dôkaz. Tvrdenie plynie z vety 1.1 a vzťahu $h(z) = g(\log(z))$. \square

Príklad 1.5 Predpokladajme, že poznáme momenty nejakej diskkrétnej náhodnej veličiny X dané hodnotami

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 1, \\ \mu_k &= \frac{1}{2} + \frac{2^k}{4}, \quad \text{pre } k \geq 1.\end{aligned}$$

Potom momentová vytvorujúca funkcia X je

$$\begin{aligned}g(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k t^k}{k!} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{4} e^{2t}.\end{aligned}$$

Teda pri voľbe $z = e^t$ dostávame

$$h(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2.$$

Preto X nadobúda hodnoty $\{0, 1, 2\}$ s pravdepodobnosťami $\{1/4, 1/2, 1/4\}$.

1.3 Charakteristické funkcie

Charakteristické funkcie náhodných veličín sú užitočným nástrojom v prípadoch kedy rada momentov $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k t^k}{k!}$ nekonverguje, alebo aj v prípadoch kedy samotné momenty nie sú konečné.

Definícia 1.4. Nech X je náhodná veličina. Potom funkciu

$$\psi_X(\tau) = E(e^{i\tau X}),$$

kde τ je reálny parameter, nazývame *charakteristickou funkciou* náhodnej veličiny X .

Poznámka. Nech X je náhodná veličina, $\varphi_X(\tau)$ je jej charakteristická funkcia a $g_X(t)$ kde $|t| < h$ pre nejaké $h > 0$ je jej momentová vytvorujúca funkcia. Potom $\varphi_X(t) = g_X(it)$ pre $|t| < h$.

Veta 1.4. Nech X a Y sú náhodné veličiny a φ_X a φ_Y sú ich charakteristické funkcie. Potom X a Y majú rovnaké rozdelenie.

Dôkaz. Viz [6], Veta 15.9. □

Príklad 1.6 Nech X_1, X_2, \dots, X_n sú nezávislé náhodné veličiny s Cauchyho rozdelením a hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Budeme hľadať rozdelenie náhodnej veličiny $A_n = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$.

Poznamenanajme najprv, že

$$\mu_2 = E(X_1^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\pi(1+x^2)} dx$$

a keďže intergál na pravej strane diverguje, $E X_1^2$ neexistuje. Napriek tomu môžeme definovať charakteristickú funkciu $\varphi_{X_1}(\tau)$ vzťahom

$$\varphi_{X_1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx.$$

Z čoho teda dostávame, že

$$\varphi_{X_1}(\tau) = \dots = \varphi_{X_n}(\tau) = e^{-|\tau|}.$$

Z nezávislosti potom

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(\tau) = (e^{-|\tau|})^n = e^{-n|\tau|}$$

a keďže

$$\varphi_{A_n}(\tau) = \varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(\tau/n),$$

dostávame

$$\varphi_Z(\tau) = e^{-n|\tau/n|} = e^{-|\tau|}.$$

Teda $\varphi_{A_n} = \varphi_{X_i}$ a to použitím vety 1.2 vedie k záveru, že $f_{A_n} = f_{X_i}$ a teda A_n má tiež Cauchyho rozdelenie s hustotou $f(x)$.

1.4 Vlastnosti vytvorujúcich funkcií

V tejto časti spomenieme niekoľko vlastností momentovej vytvorujúcej funkcie, ktoré sú užitočné pri štúdiu náhodných veličín.

Veta 1.5. *Nech X je náhodná veličina s momentovou vytvorujúcou funkciou $g_X(t)$. Nech $Y = aX + b$ a nech $g_Y(t)$ je jej momentová vytvorujúca funkcia. Potom*

$$g_Y(t) = e^{tb} g_X(at).$$

Dôkaz. Použitím elementárnych úprav a vlastností strednej hodnoty dostávame:

$$\begin{aligned} g_Y(t) &= E(e^{tY}) \\ &= E(e^{t(aX+b)}) \\ &= e^{tb} E(e^{taX}) \\ &= e^{tb} g_X(at). \end{aligned}$$

□

Veta 1.6. *Nech X_1, X_2, \dots, X_n sú nezávislé náhodné veličiny.*

Nech $g_{X_1}, g_{X_2}, \dots, g_{X_n}$ sú postupne ich momentové vytvorujúce funkcie. Potom pre $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ platí $g_Z(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) \dots g_{X_n}(t)$, kde g_Z je vytvorujúca funkcia náhodnej veličiny Z .

Dôkaz. Poznamenajme najprv, že ak X_1, X_2, \dots, X_n sú nezávislé, potom aj $e^{tX_1}, e^{tX_2} \dots e^{tX_n}$ sú nezávislé a tiež, že pre nezávislé veličiny X_1, X_2, \dots, X_n platí

$$EX_1 X_2 \dots X_n = EX_1 EX_2 \dots EX_n.$$

Využitím týchto vlastností dostávame pre momentovú vytvorujúcu funkciu veličiny Z vzťah

$$\begin{aligned} g_Z(t) &= E(e^{tZ}) = E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}) \\ &= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) \\ &= g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) \dots g_{X_n}(t) \end{aligned}$$

□

Príklad 1.7 Nech X a Y sú nezávislé diskkrétne náhodné veličiny s binomickým rozdelením

$$p_X(j) = \binom{n_1}{j} p^j q^{n_1-j},$$

kde $j \in 0, 1, 2, \dots, n_1$ a

$$p_Y(j) = \binom{n_2}{j} p^j q^{n_2-j},$$

kde $j \in 0, 1, 2, \dots, n_2$ kde $p \in (0, 1)$ a $q = 1 - p$. Chceme vypočítať rozdelenie $Z = X + Y$.

Vieme že

$$\begin{aligned} h_X(z) &= \sum_{j=0}^{n_1} z^j \binom{n_1}{j} p^j q^{n_1-j} \\ &= (pz + q)^{n_1} \\ h_Y(z) &= \sum_{j=0}^{n_2} z^j \binom{n_2}{j} p^j q^{n_2-j} \\ &= (pz + q)^{n_2} \end{aligned}$$

Preto

$$\begin{aligned} h_Z(z) &= h_X(z)h_Y(z) = (pz + q)^{n_1+n_2} \\ &= \sum_{j=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{j} (pz)^j q^{n_1+n_2-j}, \end{aligned}$$

z čoho vidíme, že koeficient pri z^j je $p_Z(j) = \binom{n_1+n_2}{j} p^j q^{n_1+n_2-j}$, teda Z má binomické rozdelenie s parametrami $n_1 + n_2$ a p .

Pre názornosť, ukážeme aj tvar momentovej vytvorujúcej funkcie:

$$\begin{aligned} g_X(t) &= (pe^t + q)^{n_1} \\ g_Y(t) &= (pe^t + q)^{n_2} \\ g_Z(t) &= (pe^t + q)^{n_1+n_2} \end{aligned}$$

Preto

$$g_Z(t) = g_X(t)g_Y(t) = (pe^t + q)^{n_1+n_2}$$

Príklad 1.8 Nech X a Y sú nezávislé diskkrétne náhodné veličiny s negatívnym binomickým rozdelením s parametrami (n_1, p) a (n_2, p) . Teda

$$\begin{aligned} p_X(k) &= \binom{n_1 + k - 1}{k} p^{n_1} q^k \\ p_Y(k) &= \binom{n_2 + k - 1}{k} p^{n_2} q^k, \end{aligned}$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots$ a $q = 1 - p$. Budeme hľadať rozdelenie náhodnej veličiny $Z = X + Y$.

Najprv si upravíme výraz $\binom{n+k-1}{k}$:

$$\begin{aligned} \binom{n+k-1}{k} &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\dots(n)}{k!} \\ &= \frac{[-(-n-k+1)][-(-n-k+2)]\dots[-(-n)]}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{-n}{k}. \end{aligned}$$

Teraz vypočítame vytvorujúcu funkciu X a Y .

$$\begin{aligned} h_X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n_1 + k - 1}{k} p^{n_1} q^k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n_1}{k} p^{n_1} (qz)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p^{n_1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n_1}{k} (qz)^k \\
&= p^{n_1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n_1}{k} (-qz)^k \\
&= p^{n_1} \frac{1}{(1 - qz)^{n_1}} \\
&= \left(\frac{p}{1 - qz} \right)^{n_1},
\end{aligned}$$

kde tretia rovnosť vyplýva z Taylorovho rozvoja funkcie $(1 + x)^r$. Podobne

$$h_Y(z) = \left(\frac{p}{1 - qz} \right)^{n_2}.$$

Z nezávislosti X a Y teda dostávame pre vytvorujúcu funkciu náhodnej veličiny Z vzťah

$$h_Z(z) = h_X(z)h_Y(z) = \left(\frac{p}{1 - qz} \right)^{n_1+n_2}.$$

Vidíme teda, že Z má negatívne bnomické rozdelenie s parametrami $n_1 + n_2$ a p .

Teraz si ukážeme zaujímavejšie príklady využitia a sily vytvorujúcich funkcií.

1.5 Hlava alebo znak

Peter a Martin hrajú hru s názvom *hlava alebo znak*. V tejto hre je minca hodená v slede niekoľkokrát za sebou. Vždy keď padne hlava Peter vyhrá 1 cent od Martina a naopak, vždy keď padne znak, Martin vyhrá 1 cent od Petra.

Zaoberajme sa otázkou, kedy sa Peter dostane prvý krát do vedenia. Nech X_k reprezentuje výsledok k -teho hodu v hre, teda

$$X_k = \begin{cases} +1, & \text{ak } k\text{-ty hod je hlava,} \\ -1, & \text{ak } k\text{-ty hod je znak.} \end{cases}$$

Teda X_k sú nezávislé náhodné veličiny nadobúdajúci len dve hodnoty -1 a 1 . Definujme $S_0 = 0$ a pre $n \geq 1$ definujme

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Potom S_n opisuje Petrov majetok po n hodoch mincov a teda Peter je prvý krát vo vedení po n pokusoch ak $S_k \leq 0$ pre $1 \leq k < n$ a $S_n = 1$. To sa môže stať ak $n = 1$, v tom prípade sa nutne $S_1 = X_1 = 1$, alebo ak $n > 1$, a teda v tom prípade $S_1 = X_1 = -1$. V druhom prípade sa nutne $S_k = 0$ pre $k = n - 1$ a možno pre iné k medzi 1 a n . Najmenšie takéto k označme m . Teda $S_m = 0$ a $S_k < 0$ pre $1 \leq k < m$. V tomto prípade Peter v prvom pokuse prehrá, za ďalších $m - 1$ pokusoch sa dostane do počiatočnej pozície a po ďalších $n - m$ pokusoch

sa dostane do vedenia. Nech p je pravdepodobnosť, že padne hlava a $q = 1 - p$ že padne znak. Nech r_n je pravdepodobnosť že Peter je prvýkrát vo vedení po n pokusoch. Potom vidíme že

$$\begin{aligned} r_n &= 0, & \text{ak } n \text{ je párne,} \\ r_1 &= p & (= \text{pravdepodobnosť hlavy v jednom pokuse}), \\ r_n &= q(r_1 r_{n-2} + r_3 r_{n-4} + \dots + r_{n-2} r_1), & \text{ak } n > 1, n \text{ nepárne} \end{aligned}$$

Nech T je náhodná veličina označujúca počet pokusov potrebných pre Petra aby sa dostal do vedenia. Zavedieme vytvorujúcu funkciu $h_T(z)$ pre T :

$$h_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n.$$

Použitím vyššie uvedených vzťahov môžeme vyjadriť $h_T(z)$ ako

$$\begin{aligned} h_T(z) &= pz + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} r_{n+1} \\ &= pz + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1} q \sum_{k=1}^n r_k r_{n-k} \\ &= pz + qz \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n r_k r_{n-k} z^n \\ &= pz + qz \left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n \right)^2 \\ &= pz + qz (h(z))^2. \end{aligned}$$

Vyriešením tejto kvadratickej rovnice dostávame:

$$h_T(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2qz} = \frac{2pz}{1 \mp \sqrt{1 - 4pqz^2}}.$$

Z týchto dvoch riešení potrebujeme to, pre ktoré je mocninná rada konvergentná (napr., že konverguje pre $z = 0$). Preto volíme

$$h_T(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2qz} = \frac{2pz}{1 + \sqrt{1 - 4pqz^2}}.$$

Teraz sa môžeme pýtať: Aká je pravdepodobnosť že bude Peter niekedy vo vedení? Táto pravdepodobnosť je daná vzťahom

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r_n &= h_T(1) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2q} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - 2pq - 2p(1-p)}}{2q} \\ &= \frac{1 - \sqrt{-2pq + 1 - 2p + 2p^2}}{2q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \sqrt{-2pq + (1-p)^2 + p^2}}{2q} \\
&= \frac{1 - \sqrt{p^2 - 2pq + q^2}}{2q} \\
&= \frac{1 - |p - q|}{2q} \\
&= \begin{cases} p/q, & \text{ak } p < q \\ 1, & \text{ak } p \geq q \end{cases},
\end{aligned}$$

teda Peter si môže byť istý že sa dostane do vedenia ak $p \geq q$. Tiež nás ale určite zaujíma ako dlho mu to bude trvať, teda aká je očakávaná hodnota T ? Použitím vytvorenú funkcie $h_T(z)$ dostávame

$$E(T) = h'_T(1) = \begin{cases} 1/(p - q), & \text{ak } p > q \\ \infty, & \text{ak } p = q \end{cases}$$

Tento výsledok hovorí, že ak je $p > q$, potom môže Peter očakávať, že sa dostane do vedenia po približne $1/(p - q)$ pokusoch, ale ak $p = q$, môže očakávať, že si počká dlhú dobu.

1.6 Spravodlivý pár kociek

Dostali sme možnosť zahrať si hru Craps. V tejto hre sa hádže dvoma kockami a súčet hodených čísel ovplyvňuje výsledok (viac informácií o tejto hre možno nájsť v angličtine na <http://en.wikipedia.org/wiki/Craps>). Poznamenajme, že bežnou hracou kockou budeme rozumieť pravidelnú šesťstennú kocku s číslaním $1, \dots, 6$ a s pravdepodobnosťou hoddenia jednotlivých čísel $\frac{1}{6}$. Na výber sme dostali z dvoch párov hracích kociek. V prvom páre majú obidve hracie kocky tvar bežnej kocky, no čísla na jednotlivých stenách niesú bežné: na prvej kocke sú čísla 1, 2, 2, 3, 3, 4 a na druhej 1, 3, 4, 5, 6, 8. Druhé dve hracie kocky majú naopak číslovanie ako bežné hracie kocky, no ich tvar nie je pravidelný.

S ktorým párom kociek by sme mali hrať, aby bola hra spravodlivá? Teda, v reči matematiky, ktorý pár kociek má rovnaké rozdelenie súčtu hodených čísel ako dve bežné hracie kocky?

Označme X a Y čísla hodené na dvoch bežných hracích kockách. Potom vytvorená funkcia ich súčtu je

$$\begin{aligned}
g(z) &= E(z^{X+Y}) = E(z^X)E(z^Y) \\
&= \left(\frac{1}{6}(z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)\right)^2 \\
&= \frac{z^2}{36}(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 6z^5 + 5z^6 + 4z^7 + 3z^8 + 2z^9 + z^{10})
\end{aligned}$$

kde druhá rovnosť vyplýva z nezávislosti X a Y .

Teraz spočítajme vytvoriujúcu funkciu súčtu čísel A_1 a A_2 hodených na prvom páre hracích kociek ktoré máme na výber:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= E(z^{A_1+A_2}) \\ &= \frac{1}{6}(z + z^2 + z^2 + z^3 + z^3 + z^4) \frac{1}{6}(z + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^8) \\ &= \frac{z^2}{36}(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + 5z^4 + 6z^5 + 5z^6 + 4z^7 + 3z^8 + 2z^9 + z^{10}) \\ &= g(z) \end{aligned}$$

teda vidíme, že rozdelenie súčtu je rovnaké ako na bežných kockách.

Rozložením $g(z)$ na súčin dostávame $g(z) = \frac{1}{36}z^2(1+z)^2(1-z+z^2)^2(1+z+z^2)^2$. Ak by mal mať súčet B_1 a B_2 hodnôt hodených na druhom páre kociek rovnaké rozdelenie ako na bežných kockách muselo by platiť

$$g_2(z) = E(z^{B_1+B_2}) = E(z^{B_1})E(z^{B_2}) = \frac{1}{36}z^2(1+z)^2(1-z+z^2)^2(1+z+z^2)^2.$$

Keďže kocky v druhom páre majú číslovanie ako bežné kocky, musia obidve vytvoriujúce funkcie $E(z^{B_1})$ a $E(z^{B_2})$ obsahovať mocninu z^n pre $n = 1, 2, \dots, 6$. Za podmienky, že pre každú vytvoriujúcu funkciu g určite musí platiť $g(1) = 1$, dostávame jediné dve možnosti ako by mohli momentové vytvoriujúce funkcie vyzeráť:

(i)

$$\begin{aligned} E(z^{B_1}) &= \frac{1}{2}z(1+z)(1-z+z^2)^2 \\ E(z^{B_2}) &= \frac{1}{18}z(1+z)(1+z+z^2)^2 \end{aligned}$$

(ii)

$$E(z^{B_1}) = E(z^{B_2}) = \frac{1}{6}z(1+z)(1-z+z^2)(1+z+z^2)$$

Po roznásobení $E(z^{B_1})$ v možnosti (i) dostávame $E(z^{B_1}) = 1 - z + z^2 + z^3 - z^4 + z^5$. Keďže pravdepodobnosť je vždy nezáporné číslo a vo vytvoriujúcej funkcii je pri každej mocnine z^n pre $n = 1, 2, \dots, 6$ koeficient, ktorý predstavuje pravdepodobnosť, že na kocke spadne práve číslo n , táto funkcia určite nie je vytvoriujúca funkcia. Teda jediným riešením je

$$\begin{aligned} E(z^{B_1}) = E(z^{B_2}) &= \frac{1}{6}z(1+z)(1-z+z^2)(1+z+z^2) \\ &= \frac{1}{6}(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) \end{aligned}$$

čo by znamenalo, že majú obe kocky tvar bežnej hracej kocky a to nemajú. Z toho teda plynie, že pokiaľ máme dve kocky s bežným číslovaním ale nepravidelným tvarom, ich súčet nemôže mať rovnaké rozdelenie ako súčet bežných kociek. Ak by sme teda chceli hrať spravodlivú hru, mali by sme si vybrať prvý pár kociek.

2. Vetviace procesy

2.1 Historické pozadie

V tejto kapitole aplikujeme teóriu vytvorených funkcií na dôležitú oblasť v teórii pravdepodobnosti s názvom *vetviace procesy*. Vznik teórie vetviacich procesov sa často spája s problémom zverejneným Francisom Galtonom v *Educational Times* roku 1873.

Problém 4001: Majme národ s N dospelými mužmi, každého s iným priezviskom. V každej generácii tejto populácie nemá a_0 percent dospelých mužov žiadneho mužského potomka ktorý by sa dožil dospelosti, a_1 percent dospelých mužov má jedného takéhoto potomka, a_2 percent dvoch a tak ďalej, až a_5 percent ktorý majú piatich.

Nájdite (1) aký pomer priezvisk zanikne za r generácií; a (2) koľkokrát sa v populácii bude nachádzať m ľudí s rovnakým priezviskom.

Prvý pokus o vyriešenie tohto problému zverejnil Reverend H.W.Watson. Kvôli algebraickej chybe v jeho výpočtoch ale nesprávne prišiel k výsledku, že rodné meno vždy zanikne s pravdepodobnosťou 1. Avšak metódy ktoré použil pri riešení boli, a stále sú, základmy pre správne riešenie tohto problému.

Dnes vetviace procesy neslúžia len ako model pre rast populácie, ale často sa používajú ako modely v mnohých fyzikálnych procesoch ako napríklad chemické a nukleárne reťazové reakcie.

2.2 Problém vyhynutia

Vráťme sa teraz k prvému problému zverejnenému Galtonom, teda k nájdeniu pravdepodobnosti vyhynutia pre vetviaci proces. Začneme prvou 0-tou generáciou s jedným dospelým mužom. V prvej generácii môžeme mať 0, 1, 2, 3, ... mužských potomkov ktorý sa dožijú dospelosti (ďalej už len potomok) s pravdepodobnosťami p_0, p_1, p_2, \dots . Ak v prvej generácii máme k potomkov, potom v druhej generácii ich bude $X_1 + X_2 + \dots + X_k$, kde X_1, X_2, \dots, X_k sú nezávislé náhodné veličiny, každá s diskretným rozdelením $P(X = j) = p_j$, kde $j = 0, 1, 2, \dots$

Príklad 2.1 Predpokladajme, že $p_0 = 1/2$, $p_1 = 1/4$ a $p_2 = 1/4$. Poznamenajme, že pri určovaní pravdepodobností jednotlivých vetiev používame vlastnosti súčtu nezávislých náhodných veličín. Napríklad, ak v prvej generácii sú dvaja potomkovia, potom pravdepodobnosť, že budú dvaja potomkovia v druhej generácii je

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = 2) &= p_0 p_2 + p_1 p_1 + p_2 p_0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Teraz sa budeme zaoberať pravdepodobnosťou, že náš proces vymrie, teda že v nejakej generácii nie sú žiadny potomkovia.

Nech d_m je pravdepodobnosť, že proces vymrie do m -tej generácie. Samozrejme $d_0 = 0$ a z obrázku vidieť, že $d_1 = 1/2$ a $d_2 = 1/2 + 1/8 + 1/16 = 11/16$. Z definície d_m je jasné, že

$$0 = d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq 1.$$

Teda d_m konverguje k limite d (viď [5], Veta 2.7.), kde $0 \leq d \leq 1$ a d je pravdepodobnosť, že proces nakoniec vymrie. Práve túto hodnotu chceme zistiť. Začneme tým, že si vyjadríme pravdepodobnosti d_m z hľadiska všetkých možných výsledkov vzhľadom k prvej generácii. Ak je v prvej generácii j potomkov, potom, aby proces vymrel, musí každá z týchto línií vymrieť počas $m - 1$ generácií. Keďže pokračujú nezávisle na sebe, je táto pravdepodobnosť rovná $(d_{m-1})^m$. Preto

$$d_m = p_0 + p_1 d_{m-1} + p_2 (d_{m-1})^2 + p_3 (d_{m-1})^3 + \dots \quad (2.1)$$

Nech $h(z)$ je obyčajná vytvorujúca funkcia pre X_i :

$$h(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$$

Potom pomocou $h(z)$ môžeme prepísať vzťah 2.1 v tvare

$$d_m = h(d_{m-1}). \quad (2.2)$$

Pretože $d_m \rightarrow d$, dosadením do vzťahu 2.2 vidíme že hodnota d ktorú hľadáme musí spĺňať rovnosť

$$d = h(d) \quad (2.3)$$

Jedným riešením tejto rovnosti je vždy $d = 1$, keďže

$$1 = p_0 + p_1 + p_2 + \dots$$

Práve tu spravil Watson chybu. Prepokladal, že 1 je jediné riešenie rovnosti 2.3. Uvedomme si najprv, že riešenia tejto rovnosti reprezentujú priesečníky grafov

$$y = z$$

a

$$y = h(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots$$

Podme sa teda bližšie pozrieť na graf $y = h(z)$. Vieme, že $h(0) = p_0$ a tiež že

$$h'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + \dots \quad (2.4)$$

a

$$h''(z) = 2p_2 + 6p_3 z + 12p_4 z^2 + \dots$$

Vidíme, že pre $z \geq 0$ je $h'(z) \geq 0$ a $h''(z) \geq 0$, teda, že pre nezáporné z je funkcia $y = h(z)$ neklesajúca a konvexná. Preto jej graf môže preťať graf funkcie $y = z$

najviac v dvoch bodoch. Pretože vieme, že sa musia preŕať v bode $(1, 1)$, môžu nastať iba tri prípady:

V prípade (a) má rovnosť $d = h(d)$ korene d a 1 , kde $0 \leq d < 1$. V prípade (b) má iba jeden koreň $d = 1$ a v prípade (c) máme opäť dva korene 1 a d , kde $d > 1$. Keďže hľadáme iba riešenia $0 \leq d \leq 1$, vidíme, že v prípadoch (b) a (c) je naším jediným riešením číslo 1 . V týchto prípadoch teda proces vymrie s pravdepodobnosťou 1 . V prípade (a) máme stále možné riešenia dve.

Zo vzťahu 2.4 vidíme, že

$$h'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots =: k,$$

kde k je očakávaný počet potomkov jedného dospelého muža. V prípade (a) máme $h'(1) > 1$, v prípade (b) $h'(1) = 1$ a v (c) $h'(1) < 1$. Tieto tri prípady korešpondujú s prípadmi kedy $k > 1$, $k = 1$ a $k < 1$. Predpokladajme teraz $k > 1$. Pripomeňme, že $d_0 = 0, d_1 = h(d_0) = p_0, d_2 = h(d_1), \dots, d_m = h(d_{m-1})$.

Z konvexity funkcie $y = h(z)$ vieme, že body $(d_i, h(d_{i-1}))$ ležia nad grafom funkcie $y = z$ a teda musia konvergovať k prvému priesečníku kriviek grafov týchto funkcií, teda ku koreňu $d < 1$. To vedie k nasledujúcej vete.

Veta 2.7. *Predpokladajme vetviaci proces s vytvorujúcou funkciou $h(z)$ pre počet potomkov daného rodiča. Nech d je najmenší koreň rovnice $z = h(z)$. Nech k je priemerný počet potomkov jedného rodiča. Ak $k \leq 1$ potom $d = 1$ a proces vymrie s pravdepodobnosťou 1 . Ak $k > 1$ potom $d < 1$ a proces vymrie s pravdepodobnosťou d .*

2.3 Problém distribúcie potomkov

Uvažujme teraz druhý problém zverejnený Galtonom, teda distribúciu Z_n potomkov v n -tej generácii. Presnú podobu distribúcie poznáme len vo veľmi špeciálnych prípadoch ale môžeme opísať limitné správanie Z_n kde $n \rightarrow \infty$. Nech $h_n(z)$ je vytvorujúca funkcia pre Z_n . Najprv ukážeme, že vytvorujúcu funkciu $h_n(z)$ môžeme získať pomocou počiatkovej vytvorujúcej funkcie $h(z)$ pre akýkoľvek vetviaci proces. Ak $Z_n = k$, potom $Z_{n+1} = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, kde X_1, X_2, \dots, X_k sú nezávislé náhodné veličiny s vytvorujúcou funkciou $h(z)$. Potom

$$\begin{aligned} h_{n+1}(z) &= E(z^{Z_{n+1}}) \\ &= \sum_k E(z^{Z_{n+1}} | Z_n = k) P(Z_n = k) \\ &= \sum_k E(z^{X_1 + X_2 + \dots + X_k}) P(Z_n = k) \\ &= \sum_k (h(z))^k P(Z_n = k). \end{aligned}$$

Z definície vytvorujúcej funkcie je ale

$$h_n(z) = \sum_k P(Z_n = k) z^k$$

a preto

$$h_{n+1}(z) = h_n(h(z)).$$

Teda vytvorujúca funkcia pre Z_2 je $h_2(z) = h(h(z))$, pre Z_3 je $h_3(z) = h(h(h(z)))$ a tak ďalej. Z toho vidíme, že platí

$$h_{n+1} = h(h_n(z)). \quad (2.5)$$

Zderivovaním rovnosti 2.5 dostávame vzťah

$$h'_{n+1}(z) = h'(h_n(z))h'_n(z).$$

Ak teraz zvolíme $z = 1$ a použijeme fakt, že $h_n(1) = 1$ a $h'_n(1) = m_n$, kde m_n je stredná hodnota počtu potomkov v n -tej generácii, máme

$$m_{n+1} = m \cdot m_n.$$

Teda $m_2 = m \cdot m = m^2$, $m_3 = m \cdot m^2 = m^3$, ..., a teda

$$m_n = m^n.$$

Príklad 2.2 Pre vetviaci proces z príkladu 2.2 máme

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2, \\ h_2(z) &= h(h(z)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 \right]^2 \\ &= \frac{11}{16} + \frac{1}{8}z + \frac{9}{64}z^2 + \frac{1}{32}z^3 + \frac{1}{64}z^4. \end{aligned}$$

Pri jednotlivých mocninách z vidíme pravdepodobnosti pre počet potomkov v druhej generácii.

Je samozrejmé, že pre vyššiu ako druhú generácie by sme pomocou tejto metódy funkciu $h_n(z)$ len veľmi ťažko vyjadrili. Je tu ale jeden špeciálny prípad kedy to ide.

Príklad 2.3 Predpokladajme, že pravdepodobnosti p_1, p_2, \dots tvoria geometrickú radu: $p_k = bc^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, kde $0 < b \leq 1 - c$ a

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 - p_1 - p_2 - \dots \\ &= 1 - b - bc - bc^2 - \dots \\ &= 1 - \frac{b}{1 - c}. \end{aligned}$$

Potom vytvorujúca funkcia $h(z)$ pre toto rozdelenie je

$$\begin{aligned} h(z) &= p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots \\ &= 1 - \frac{b}{1 - c} + bz + bc^2z^2 + bc^2z^3 + \dots \\ &= 1 - \frac{b}{1 - c} - \frac{bz}{1 - cz}. \end{aligned}$$

Po zderivovaní dostávame

$$h'(z) = \frac{bcz}{(1-cz)^2} + \frac{b}{1-cz} = \frac{b}{(1-cz)^2}$$

a teda

$$m = h'(1) = \frac{b}{(1-c)^2}$$

Vieme, že ak $m \leq 1$ tak proces určite vymrie a $d = 1$. Aby sme našli pravdepodobnosť že proces vymrie ak $m > 1$ musíme nájsť koreň $d < 1$ rovnice

$$z = h(z) = 1 - \frac{b}{1-c} - \frac{bz}{1-cz}$$

To vedie k riešeniu kvadratickej rovnice. Vieme, že jeden koreň je $z = 1$. Vyriešením príslušnej rovnice dostaneme druhý koreň v tvare

$$d = \frac{1-b-c}{c(1-c)}.$$

Platí, že $d < 1$ ak $m > 1$. V tomto prípade je možné nájsť rozdelenie Z_n . Vytvorená funkcia pre $m \neq 1$ je:

$$h_n(z) = 1 - m^n \left[\frac{1-d}{m^n-d} \right] + \frac{m^n \left[\frac{1-d}{m^n-d} \right]^2 z}{1 - \left[\frac{m^n-1}{m^n-d} \right] z}.$$

Jej výpočet možno nájsť v [8] na strane 9.

Nakoniec, koeficienty pri mocninách z dávajú rozdelenie Z_n :

$$P(Z_n = 0) = 1 - m^n \frac{1-d}{m^n-d} = \frac{d(m^n-1)}{m^n-d}$$

a

$$P(Z_n = j) = m^n \left(\frac{1-d}{m^n-d} \right)^2 \cdot \left(\frac{m^n-1}{m^n-d} \right)^{j-1},$$

pre $j \geq 1$.

Závěr

V tejto práci sme sa snažili ukázať silu a využitie rôznych druhov vytvorujúcich funkcií. Zaviedli sme si základné pojmy a ukázali niektoré dôležité vlastnosti, ktoré sme demonštrovali na jednoduchých príkladoch. Nasledovali zaujímavé príklady, týkajúce sa hádzania mincou a kockovej hry Craps, kde sme silu vytvorujúcich funkcií naplno využili.

Ďalej sme si spomenuli problémy, ktoré stoja za vznikom vetviacich procesov, dôležitej oblasti v teórii pravdepodobnosti. Následne sme ukázali aplikáciu vytvorujúcich funkcií na dané problémy.

Vytvorujúce funkcie majú mnoho ďalších využití, ktoré nie sú spomenuté v tejto práci a o ktoré by sa dala práca rozšíriť. Využívajú sa napríklad pri dôkaze centrálnej limitnej vety, pri štúdiu náhodných vektorov alebo náhodných prechádzok, ďalšej dôležitej oblasti v teórii pravdepodobnosti.

Seznam použité literatury

- [1] GRINSTEAD, Charles M., SNELL, J. Laurie, : *Introduction to probability, Second Revised Edition*. American Mathematical Society, 1997.
- [2] GUT, Allan : *An Intermediate Course in Probability*. Springer-Verlag New York, 1995.
- [3] STIRZAKER, David : *Elementary Probability*. Cambridge University Press, 1994.
- [4] DUPAČ, Václav, HUŠKOVÁ, Marie : *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Nakladatelství Karolinum, Praha, 2009.
- [5] KOPÁČEK, Jiří : *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*. Matfyzpress, Praha, 2004.
- [6] LACHOUT, Petr : *Teorie pravděpodobnosti*. Nakladatelství Karolinum, Praha, 2004.
- [7] KOPÁČEK, Jiří : *Matematická analýza nejen pro fyziky (III)*. Matfyzpress, Praha, 2007.
- [8] LUKEŠ, Jaroslav : *Teorie míry a integrálu I.* Státní pedagogické nakladatelství Praha, 1997.
- [8] HARRIS, Theodore E. : *The Theory of Branching Processes*. Springer, Berlin, 1963.