Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Branislav Ján Roháľ

Hausdorffova metrika a její použití ve fraktálech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2012

Vyslovujem poďakovanie vedúcemu tejto bakalárskej práce prof. RNDr. Miroslavovi Huškovi, DrSc. za túto dobrú a zaujímavú tému, za jeho vedenie, pomoc, ochotu a vytrvalosť pri konzultáciách a za poskytnutie literatúry o nových výsledkoch výskumu. Ďakujem všetkým, ktorí mi umožnili štúdium, vypracovanie tejto práce a sú mi oporou, najmä mojej rodine a priateľom.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 1. srpna 2012 Branislav Ján Roháľ

Název práce: Hausdorffova metrika a její použití ve fraktálech

Autor: Branislav Ján Roháľ

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V tejto práci sa zaoberáme viacerými témami, prirodzene sa spájajúcimi s pojmom fraktál. V prvej časti práce venujeme pozornosť Banachovej vete o pevnom bode a Hausdorffovej metrike, ktoré ďalej používame pri štúdiu samopodobných množín. Ďalej sú zaradené state o Hausdorffovej, podobnostnej či mriežkovej (angl. *box-counting*) dimenzii. V druhej časti práce referujeme o nových prístupoch k fraktálnej dimenzii a o niektorých ich vlastnostiach. Uvádzame zovšeobecnenie tohto pojmu na ľubovoľný priestor pripúšťajúci fraktálnu štruktúru a na vzdialenostný priestor, kde už zohľadňujeme aj „veľkosť“ množín na jednotlivých úrovniach fraktálnej štruktúry. V poslednej kapitole demonštrujeme prínos nových prístupov, umožňujúcich definovať potrebné pojmy a počítať fraktálnu dimenziu aj tam, kde to klasické prístupy neumožňovali. Uvádzame aplikáciu na obor slov (angl. *domain of words*) a počítame dimenzie jazyka generovaného regulárnym výrazom.

Klíčová slova: Hausdorffova metrika, Banachova veta o pevnom bode, samopodobná množina, Hausdorffova dimenzia, fraktálna dimenzia

Title: Hausdorff metric and its application in fractals

Author: Branislav Ján Roháľ

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this thesis we focus on the themes naturally connected with the concept of a fractal. In the first part of the thesis we pay attention to Banach fixed point theorem and to the Hausdorff metric which are later used when studying self-similar sets. There are included parts on the Hausdorff, similarity, and box-counting dimension, too. In the second part of the thesis the new approaches to fractal dimension and some their properties are refered. We introduce generalization of this concept for any space admitting a fractal structure and for a distance space where also the “size” of sets on each level of fractal structure is considered. In the last chapter the contribution of new approache is demonstrated, — this enables defining the notion needed and counting fractal dimension where it was not possible under the classical approaches, too. Application to the domain of words and counting of dimensions of a language generated by a regular expresion are presented.

Keywords: Hausdorff metric, Banach fixed point theorem, self-similar set, Hausdorff dimension, fractal dimension

Obsah

Úvod

Odkedy na začiatku sedemdesiatych rokov dvadsiateho storočia Benoît Mandelbrot predstavil koncept fraktálov, ukázalo sa štúdium a analýza týchto nelineárnych objektov veľmi dôležitým ([3] str. 1) tak pre matematiku samotnú ako aj v rôznorodých aplikáciách. Niektorí matematici uprednostňujú prístup, kedy sa pojem *fraktál* nepokúšame definovať, podobne ako je v biológii problematická definícia života (viď napr. [1] str. xx), ale radšej sa snažíme získať „cit“ pre tento typ objektu. V [1] sa na str. xiv uvádza, že mnohé fraktálne množiny sú samopodobné, vykazujú „jemnú štruktúru“, ktorej detaily sú komplikované, často sa dajú definovať pomerne priamym spôsobom a získať rekurzívnou procedúrou, geometria (aj lokálna) fraktálnej množiny nie je ľahko popísateľná klasickými metódami a ich „veľkosť“ nie je kvantifikovaná zvyčajným mierami: hoci ide často o istým spôsobom veľké množiny (napr. nespočítateľné), často každá prijateľná definícia miery, na prvý pohľad vhodná pre daný typ množiny, dáva nulu.

Mnohé „typické“ a dôležité fraktály sú práve samopodobné či kvázi samopodobné (napr. Juliova množina — viď [1] str. xvii) množiny a samopodobnosť a súvisiaci pojem iterovaných funkcionálnych schém sú prirodzeným a efektívnym spôsobom ako generovať fraktály. Týmto pojmom sa venujeme v kapitole 1.4. Účinným nástrojom ako pracovať so samopodobnými množinami je Banachova veta o pevnom bode, ktorú uvádzame a dokazujeme v kapitole 1.1. K fraktálom môžeme pristupovať aj ako k limite postupnosti množín, na čo však potrebujeme nájstoj, ktorým by sme mohli popísať vzdialenosť a konvergenciu množín. V našom prípade na tento účel volíme Hausdorffovu metriku, ktorej sa venujeme v kapitole 1.2.

Ďalším užitočným nástrojom pri štúdiu samopodobných a fraktálnych množín je (fraktálna) dimenzia v rôznych podobách, významoch a rozšíreniach tohto pojmu. V kapitole 1.3 predstavujeme Hausdorffovu dimenziu, ktorá je klasickou zástupkyňou a inšpiráciou ideí, ktoré môžu byť ďalej zovšeobecňované. V súvislosti so samopodobnými množinami spomíname v kapitole 1.4 aj podobnostnú dimenziu. V kapitole 2.2 pripomíname ďalšiu tradičnú dimenziu: mriežkovú, ktorá sa v anglicky písanej literatúre objavuje pod intuitívnym názvom *box-counting dimension*. Tento prístup slúži ako odrazový mostík pre rozšírenia prezentované v [3], ktorých prezentácii sa venujeme v kapitolách 2.3 a 2.4. Prvé zovšeobecnenie definuje fraktálnu dimenziu nad ľubovoľným priestorom pripúšťajúcim fraktálnu štruktúru. Samotná myšlienka fraktálnej štruktúry súvisí s diskretizáciou výslednej fraktálnej množiny či v tomto prípade celého priestoru pomocou postupnosti úrovní fraktálnej štruktúry. Pri tejto definícii nezohľadňujeme „veľkosť“ prvkov úrovní fraktálnej štruktúry. Keď sa snažíme vysporiadať s touto vlastnosťou v kapitole 2.4, potrebujeme už zaviesť funkciu, ktorá bude bodom priestoru priradzovať *vzdialenosť* a tak množinám *diametre*.

Myšlienky prezentované v kapitole 2 možno kombinovať s Hausdorffovým prístupom a ďalej ich rozširovať. O takomto zovšeobecnení pojednáva [4].

Vďaka týmto rozšíreniam môžeme fraktálnu dimenziu uvažovať a počítať aj tam, kde to pri klasických prístupoch nebolo možné. V kapitole 3 prezentujeme použitie a výpočet fraktálnej dimenzie jazyka definovaného pomocou regulárneho výrazu. Pri výklade postupujeme podľa [3], kap. 5.1 a 5.2.

Ak sa zameriame iba na samotný kalkulus, alebo ak prijmeme myšlienku ďalšieho zovšeobecnenia pojmu fraktálna štruktúra, kedy síce stále budeme požadovať zjemňujúce sa pokrytia, no sme ochotní vzdať sa vlastnosti, aby sa v každom bode priestoru jednalo o „bázu otvorených okolí“ (tento pojem by stratil zmysel), môžeme sa oprostiť od potreby množinovej funkcie správajúcej sa ako vzdialenosť. Pri druhej zovšeobecnenej verzii fraktálnej dimenzie budeme však stále potrebovať spôsob ako priradiť množinám ich diametre na jednotlivých úrovniach „fraktálnej štruktúry“.

Poznamenajme ešte, že v literatúre boli vety, ktoré uvádzame v tejto práci, často formulované iba pre priestor $\mathbb{R}^n$ a na mnohých miestach boli uvažované iba podobnosti. Tieto definície, tvrdenia a ich dôkazy sme rozšírili tak, aby pracovali s metrickými priestormi (niekedy bolo nutné požadovať ich úplnosť) a so všeobecnejšími kontrakciami. Väčšina literatúry definuje iterované funkcionálne schémy a samopodobné množiny práve pomocou kontrakcií a pre prípad, keď sú použité podobnosti, vyhradzuje termín striktne samopodobných množín, takže sme sa nedostali ani do kolízie s bežne požívaným názvoslovím.

Taktiež sme zaradili komentáre, poznámky, vysvetlenia a príklady poukazujúce na súvislosti a snažiace sa lepšie ozrejmiť danú situáciu a motiváciu našich úvah a konania.

Pri niektorých termínoch sme sa nestretli s prekladom do slovenčiny alebo do češtiny, a tak sme zaviedli vlastné názvoslovie. V takýchto prípadoch explicitne uvádzame aj anglickú podobu daného pojmu.

1. Základné pojmy a tvrdenia

1.1 Banachova veta o pevnom bode

Mnohé významné fraktály spadajú do triedy samopodobných množín, ku ktorým je často výhodné pristupovať ako k pevným bodom (kontraktívnych) zobrazení na vhodných priestoroch. Takéto prístupy sú typicky inšpirované práve Banachovou vetou o pevnom bode alebo jej modifikáciami a preformuláciami. V tejto časti zavedieme nevyhnutné pojmy a uvedieme a dokážeme toto široko uplatniteľné tvrdenie, ktorého dôkaz zároveň poskytuje návod ako skonštruovať pevný bod zobrazenia.

Definícia 1. *Nech je X topologický priestor. Bod $x \in X$ nazveme pevný bod zobrazenia $f\colon X \to X$, ak $f(x) = x$.*

Poznámka. *Pevný bod zobrazenia môžeme definovať aj pre X iba neprázdnu množinu bez ďalšej štruktúry.*

Definícia 2. *Nech je (X, ρ) metrický priestor. Zobrazenie $f : X \to X$ nazveme* kontrakcia, *ak existuje konštanta $r \in \langle 0, 1)$ taká, že je pre všetky $x, y \in X$ splnené $\rho(f(x), f(y)) \leq r\rho(x, y)$. Konštantu r budeme nazývať* kontraktívny faktor. *Ak $r \in (0, 1)$ a $\rho(f(x), f(y)) = r\rho(x, y)$, zobrazenie $f : X \to X$ nazveme* podobnosť *a konštantu r* podobnostný faktor *alebo* koeficient podobnosti.

Poznámka. *Pripomeňme, že kontraktívne zobrazenia sú spojité, dokonca rovnomerne spojité.*

Veta 1. *(Banachova veta o pevnom bode) Kontrakcia f na úplnom neprázdnom metrickom priestore X má jednoznačne určený pevný bod.*

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľne $x_0 \in X$ (X je neprázdny). Pre $n \geq 0$ rekurzívne definujme postupnosť $x_{n+1} = f(x_n)$. Platí

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq r\rho(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq r^n\rho(x_1, x_0)\,.$$

Označme $a = \rho(x_1, x_0)$. Pre $m > n$ máme

$$\rho(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \rho(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=n}^{m-1} r^i a = a\frac{(1 - r^m) - (1 - r^n)}{1 - r} =$$
$$= a\frac{r^n - r^m}{1 - r} = a\frac{r^n\,(1 - r^{m-n})}{1 - r} \leq a\frac{r^n}{1 - r}.$$

Pre daný $\varepsilon > 0$ nájdeme dostatočne veľké $n_0 \in \mathbb{N}$, aby $ar^{n_0}/\,(1 - r) < \varepsilon$. Potom pre $m, n \geq n_0$ máme $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, čo dáva, že postupnosť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská. X je úplný, teda táto postupnosť je konvergentná. Jej limitu označme x. f je spojité zobrazenie, takže $f(x_n) \to f(x)$, no zároveň $f(x_n) = x_{n+1}$, odkiaľ $f(x_n) \to x$. Z jednoznačnosti limity máme $f(x) = x$, teda x je hľadaný pevný bod.

Ak by boli x a y oba pevné body, potom $\rho(x, y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq r\rho(x, y)$. Metrika je nezáporná a $0 \leq r < 1$, takže nutne $\rho(x, y) = 0$, teda $x = y$, čím sme dokázali jednoznačnosť. □

Dôsledok 1. *Nech je f kontrakcia na úplnom neprázdnom metrickom priestore X. Ak je $x_0 \in X$ ľubovoľný bod a pre všetky $n \in \mathbb{N}_0 : x_{n+1} = f(x_n)$, potom postupnosť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k pevnému bodu zobrazenia f.*

1.2 Hausdorffova metrika

Pri štúdiu špeciálne fraktálnych a samopodobných množín je dôležité mať k dispozícii nástroj umožňujúci popísať konvergenciu množín. Na tento účel je veľmi vhodná Hausdorffova metrika. Aby sa jednalo skutočne o metriku, budeme sa musieť, — ako sa neskôr ukáže, — obmedziť na špeciálne triedy množín.

Definícia 3. *Nech je (X, ρ) metrický priestor, $A, B \subseteq X$ podmnožiny X a $r > 0$. Otvorené r-okolie množiny A definujeme ako*

$$\Delta_r(A) = \{y \in X \mid \exists\, x \in A \colon \rho(x, y) < r\}\,.$$

V literatúre sa pre množinu $\Delta_r(A)$ používajú rôzne konvencie a značenia. V anglickojazyčnej literatúre medzi inými môžeme nájsť aj názvy ako *open r-neighbourhood* (napr. v [2] str. 66) či *δ-parallel body* (napr. v [1] str. 113). Vzhľadom na to, že v práci využívame písmená N a U, bežne používané na označovanie okolí, pri definovaní iných pojmov, zaviedli sme toto „hybridné“ značenie.

Definícia 4. *Nech je (X, ρ) metrický priestor a $A, B \subseteq X$ podmnožiny X. Hausdorffova funkcia je definovaná nasledovne:*

$$D_H(A, B) = \inf \{r \mid A \subseteq \Delta_r(B) \wedge B \subseteq \Delta_r(A)\}\,,$$

pričom kladieme $\inf \emptyset = \infty$.

Poznámka. *Funkcia D_H nedefinuje metriku. Uvažujme $(\mathbb{R}, |.|)$. Platí:*

- $D_H(\{0\}, \langle 0, \infty)) = \infty$,
- $D_H(\emptyset, \{0\}) = \inf \emptyset = \infty$,
- $D_H((0, 1), \langle 0, 1\rangle) = 0$.

Z príkladov uvedených vyššie vyplýva, že na získanie metriky je vhodné obmedziť sa na neprázdne ohraničené a uzavreté množiny.

Označenie. *Systém všetkých neprázdnych ohraničených a uzavretých množín metrického priestoru (X, ρ) označme $\mathcal{K}(X)$.*

Poznámka. *V metrických priestoroch ohraničené uzavreté množiny splývajú s kompaktnými množinami, čo však v topologických či aj v niektorých menej všeobecných priestoroch neplatí. V celej prvej kapitole pracujeme iba s metrickými priestormi, takže $\mathcal{K}(X)$ je systém všetkých neprázdnych kompaktných množín metrického priestoru (X, ρ). Dokedy nebudeme v dôkazoch a v úvahách používať vety v bakalárskom štúdiu formulované pre (topologické) kompaktné množiny, budeme preferovať úvahy vykonávané s dôrazom na ohraničenosť a uzavretosť.*

Veta 2. *Nech je (X, ρ) metrický priestor a $A, B \in \mathcal{K}(X)$, teda neprázdne ohraničené a uzavreté podmnožiny X. Hausdorffova funkcia D_H je metrikou na množine $\mathcal{K}(X)$.*

Dôkaz. Priamo z definície vyplýva, že $D_H(A, B) \geq 0$ a $D_H(A, B) = D_H(B, A)$. A aj B sú neprázdne ohraničené a uzavreté, teda $A \cup B$ je tak isto neprázdna ohraničená a uzavretá množina. Potom existuje $x \in X$ a $0 < r < \infty$, že $A \cup B \subseteq B(x, r)$, teda $A \subseteq \Delta_{2r}(B)$ a $B \subseteq \Delta_{2r}(A)$, čo dáva $D_H(A, B) < \infty$.

Ak $A = B$, potom pre každý $\varepsilon > 0$ platí $A \subseteq \Delta_\varepsilon(B)$, z čoho $D_H(A, B) = 0$. Teraz uvažujme $A, B \in \mathcal{K}(X)$ spĺňajúce $D_H(A, B) = 0$. Ak $x \in A$, potom pre každý $\varepsilon > 0$ máme $x \in \Delta_\varepsilon(B)$, takže $\operatorname{dist}(x, B) = 0$. B je uzavretá, čo implikuje $x \in B$. Potom $A \subseteq B$. Analogicky $B \subseteq A$, teda celkovo $A = B$.

Uvažujme $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$. Nech je $\varepsilon > 0$. Majme $a \in A$. Potom existuje $b \in B$, že $\rho(a, b) < D_H(A, B) + \varepsilon$, a ďalej existuje $c \in C$, že $\rho(b, c) < D_H(B, C) + \varepsilon$, z čoho vyplýva, že množina A je obsiahnutá v $(D_H(A, B) + D_H(B, C) + 2\varepsilon)$-okolí množiny C. Analogicky získame, že množina C je obsiahnutá v $(D_H(C, B) + D_H(B, A) + 2\varepsilon)$-okolí množiny A. Celkovo $D_H(A, C) \leq D_H(A, B) + D_H(B, C) + 2\varepsilon$. Táto nerovnosť platí pre každý $\varepsilon > 0$, teda $D_H(A, C) \leq D_H(A, B) + D_H(B, C)$, čím sme overili platnosť trojuholníkvej nerovnosti. $\square$

Teraz už môžeme pristúpiť k definícii Hausdorffovej metriky pomocou Hausdorffovej funkcie.

Definícia 5. *Nech je (X, ρ) metrický priestor. Pre neprázdne ohraničené a uzavreté podmnožiny X je* Hausdorffova metrika d_H *definovaná ako Hausdorffova funkcia, t. j. $d_H(A, B) = D_H(A, B)$.*

Poznámka. *Hausdorffovu metriku možno pre $A, B \in \mathcal{K}(X)$ definovať ekvivalentne nasledujúcim spôsobom:*

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b)\right\}.$$

Vzhľadom na predpoklady Banachovej vety o pevnom bode je pre nás výhodné pracovať s úplnými metrickými priestormi, k čomu smerujú nadchádzajúce tvrdenia.

Uveďme pomocné tvrdenie z [2] str. 66:

Lema 1. *Nech je $\{A_n\}$ postupnosť neprázdnych ohraničených a uzavretých podmnožín metrického priestoru (X, ρ). Ak A_n v Hausdorffovej metrike konvergujú k množine A, potom*

$$A = \{x \in X \mid \exists\ \{x_n\}; x_n \in A_n \colon x_n \to x\}.$$

Veta 3. *Nech je (X, ρ) úplný metrický priestor. Potom je $\mathcal{K}(X)$ úplný.*

Dôkaz. Majme cauchyovskú postupnosť $\{A_n\}$ v $\mathcal{K}(X)$. Potrebujeme ukázať, že $\{A_n\}$ konverguje. Nech

$$A = \{x \in X \mid \exists \{x_k\}; x_k \in A_k \colon x_k \to x\}.$$

Ukážeme, že A_n konverguje k A.

Nech je $\varepsilon > 0$ daný. Potom z cauchyovskosti existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $m, n \geq n_0$ je splnené $d_H(A_m, A_n) < \varepsilon/2$. Teraz potrebujeme ukázať, že $d_H(A_n, A) \leq \varepsilon$.

Nech $x \in A$. Potom existuje postupnosť $\{x_k\}$ spĺňajúca $x_k \in A_k$ a $x_k \to x$, takže pre dostatočne veľké k máme $\rho(x_k, x) < \varepsilon/2$. Keďže pre $k \geq n_0$ už máme $d_H(A_k, A_n) \leq \varepsilon/2$, existuje $y \in A_n$ spĺňajúci $\rho(x_k, y) < \varepsilon/2$. Potom $\rho(y, x) \leq \rho(y, x_k) + \rho(x_k, x) < \varepsilon$, čo dáva $A \subseteq \Delta_\varepsilon(A_n)$.

Teraz predpokladajme, že $y \in A_n$. Zvoľme prirodzené čísla $k_1 < k_2 < \ldots$, kde $k_1 = n$, tak, aby bolo pre všetky $m \geq k_j$ splnené $d_H\big(A_m, A_{k_j}\big) < 2^{-j}\varepsilon$. Definujme postupnosť $\{y_k\}$, kde $y_k \in A_k$: pre $k < n$ volíme ľubovoľné $y_k \in A_k$, $y_n = y$ a pre k; $k_j < k \leq k_{j+1}$ volíme y_k tak, aby $\rho\big(y_k, y_{k_{j+1}}\big) < 2^{-j}\varepsilon$. Potom je postupnosť $\{y_k\}$ zrejme cauchyovská a v úplnom priesotre X konvergentná. Jej limitu označme x. Iste $x \in A$. Máme $\rho(y, x) = \lim \rho(y, y_k) < \varepsilon$, teda $y \in \Delta_\varepsilon(A)$, čo dáva $A_n \subseteq \Delta_\varepsilon(A)$.

Teraz máme $d_H(A_n, A) \leq \varepsilon$, čo implikuje, že A_n konverguje k A.

Zo vzťahu $A_n \subseteq \Delta_\varepsilon(A)$ ďalej vyplýva, že je A neprázdna množina. Teraz je už ohraničenosť a uzavretosť zrejmá, takže iste $A \in \mathcal{K}(X)$. □

Tvrdenie 1. *Nech je $\{A_n\}$ postupnosť neprázdnych kompaktných podmnožín metrického priestoru (X, ρ) spĺňajúca $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ Potom A_n v Hausdorffovej metrike konvergujú k prieniku $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Dôkaz. Nech je $\varepsilon > 0$ daný. Zrejme pre všetky $n \in \mathbb{N}$: $A \subseteq A_n$, teda $A \subseteq \Delta_\varepsilon(A_n)$, čo dáva jednu potrebnú inklúziu.

Z definície vyplýva, že ε-okolie $\Delta_\varepsilon(A)$ množiny A je otovrená množina. Potom je systém

$$\{X \setminus A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\Delta_\varepsilon(A)\}$$

ovorené pokrytie množiny A_1. Táto je podľa predpokladu kompaktná, teda možno vybrať konečné podpokrytie, čo v tomto prípade znamená, že pre vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ pre všetky $n \geq n_0$ platí, že $A_1 \subseteq (X \setminus A_n) \cup \Delta_\varepsilon(A)$. Keďže $A_n \subseteq A_1$, máme $A_n \subseteq \Delta_\varepsilon(A)$. Pre všetky $n \geq n_0$ máme $d_H(A_n, A) \leq \varepsilon$, teda $A_n \to A$ v Hausdorffovej metrike. □

Nasledujúca veta je použitím Banachovej vety o pevnom bode a popisuje dôležitý a praktický spôsob, ako získavať samopodobné množiny a fraktály, pričom je zároveň dôležitým nástrojom pri ich štúdiu.

Veta 4. *Nech je (X, ρ) úplný metrický priestor, $I = \{1, \ldots, m\}$ konečná indexová množina a nech sú $f_1, \ldots, f_m$ kontrakcie na X, t. j. pre všetky $i = 1, \ldots, m$ a pre všetky $x, y \in X$ je splnené*

$$\rho(f_i(x), f_i(y)) \leq c_i\, \rho(x, y)\,,$$

kde $c_i \in \langle 0, 1)$. Potom existuje jednoznačne určená neprázdna kompaktná množina F, ktorá je invariantná vzhľadom na f_i, t. j. spĺňa

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(F)\,.$$

Ďalej na $\mathcal{K}(X)$ definujme pre každé $K \in \mathcal{K}(X)$, ktoré pre všetky $i = 1, \dots, m$ spĺňa $f_i(K) \subset K$, transformáciu

$$f(K) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(K)$$

a zaveďme označenie f^k pre k-tu iteráciu f, t. j. $f^0(K) = K$ a pre $k \geq 1$: $f^k(K) = f\big(f^{k-1}(K)\big)$. Potom platí

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(K)\,.$$

Dôkaz. Prvú časť tejto vety dokážeme v kapitole 1.4 ako samostatnú vetu pomocou Banachovej vety o pevnom bode.

Pre dôkaz druhej časti vety si všimnime, že f transformuje množiny z $\mathcal{K}(X)$ opäť na množiny z $\mathcal{K}(X)$. Nech je K ľubovoľná množina z $\mathcal{K}(X)$ pre všetky $i = 1, \dots, m$ spĺňajúca $f_i(K) \subset K$. Potom máme $f^k(K) \subset f^{k-1}(K)$, takže $\big\{f^k(K)\big\}$ je klesajúca postupnosť neprázdnych kompaktných množín, teda má neprázdny kompaktný prienik $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(K)$. Navyše, pretože je táto postupnosť klesajúca, platí, že $f(F) = F$, teda F je invariantná množina z tvrdenia.

$\square$

1.3 Hausdorffova miera a dimenzia

Zovšeobecnenia pojmu *dimenzia* sa ukazujú ako užitočný nástroj pri štúdiu „netypických“ množín, ako sú napríklad fraktály, ktorých dimenzia je typicky neceločíselná. Aby sme si lepšie uvedomili pôvod a motiváciu niektorých myšlienok, objavujúcich sa pri definovaní rôznych dimenzií, venujme sa na chvíľu ilustratívnemu príkladu na priamke a v rovine, ktorý sa čiastočne dotýka aj samopodobnosti, s ktorou sa stretneme v ďalšej podkapitole:

Úsečku rozdeľme na štyri rovnaké menšie úsečky. Koeficient podobnosti je zrejme $\frac{1}{4}$. Očakávame, že dimenzia úsečky bude 1. Platí $-\ln 4/\ln\frac{1}{4} = 1$. Ďalej štvorec rozdeľme tak, že zo stredov strán budeme viesť kolmice. Koeficient podobnosti strán takto vzniknutých menších štvorcov vzhľadom na stranu pôvodného štvorca je $\frac{1}{2}$ a počet nových štvorcov je 4. Očakávame, že dimenzia štvorca bude 2. Platí $-\ln 4/\ln\frac{1}{2} = 2$.

Takto motivovaný prístup sa v zovšeobecnej podobe používa napríklad pri definovaní takzvanej *podobnostnej dimenzie* (viď [1] str. xix), o ktorej podrobnejšie pojednáme a zavedieme ju vo väčšej všeobecnosti v kapitole 1.4 (viď [2] str. 106), kde aj ukážeme, že sme sa práve zaoberali jej špeciálnym prípadom. Všimnime si, že rovnako v definícii mriežkovej ako aj nových fraktálnych dimenzií, ktoré uvedieme v nasledujúcej kapitole, je prítomný princíp logaritmického pomeru počtu pokrývajúcich množín a *škály*, s ktorou súvisia ich diametre. Pri Hausdorffovej dimenzii sa tak isto objavuje pokrývanie skúmanej množiny „testovacími“ množinami a *škála*, súvisiaca s ich diametrom, ibaže namiesto logaritmického pomeru používame sofistikovanejšiu manipuláciu s nimi, ktorá zaručuje dobré teoretické vlastnosti no nezriedka aj problematickosť výpočtu tejto veľmi dôležitej fraktálnych dimenzie.

Hausdorffov prístup možno ďalej zovšeobecňovať a kombinovať aj s inými myšlienkami. Fúzia s prístupom z kapitoly 2 sa dá nájsť v [4].

Definícia 6. *Nech je (X, ρ) metrický priestor a $U \subseteq X$ jeho neprázdna podmnožina. Diameter množiny U definujeme nasledovne*

$$\operatorname{diam} U = \sup \{\rho(x, y) \mid x, y \in U\} .$$

Ak je $\{U_i\}_{i \in I}$ spočítateľný systém množín s diametrom najviac δ, ktoré pokrývajú U, t. j. $U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, kde pre každé $i \in I \colon 0 < \operatorname{diam} U_i \leq \delta$, hovoríme, že $\{U_i\}_{i \in I}$ je δ-pokrytie množiny U.

Definícia 7. *Nech je (X, ρ) metrický priestor, $F \subseteq X$ jeho podmnožina a $s \geq 0$. Pre ľubovoľnú $\delta > 0$ definujeme*

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}^s U_i \mid \{U_i\} \text{ je } \delta\text{-pokrytie } F \right\} .$$

Poznámka. *Nulový diameter pokrývajúcich množín v definícii δ-pokrytia vylučujeme, lebo ak by sme tak neurobili, potom, — pretože pripúšťame aj $s = 0$, — by sme sa dostali do situácie, kedy by sme sa potrebovali vysporiadať s výrazom „0^0“, ktorý síce môžeme „nejako zadefinovať“, no potom musíme obzvlášť pozorne skúmať, či sme takto získali riešenie vyhovujúce vo všetkých možných prípadoch. Jedným z možných prístupov je uvažovať iba $s > 0$, kedy je vhodné uistiť sa, že neskôr „neprídeme“ o množiny s Hausdorffovou dimenziou nula. Ako uvedieme po zadefinovaní tohto pojmu, spočítateľné množiny majú Hausdorffovu dimenziu nulovú.*

Keď δ klesá, trieda vhodných pokrytí množiny F sa zmenšuje, takže infímum $\mathcal{H}^s_\delta$ rastie a pre $\delta \to 0_+$ dosahuje svoju limitu, teda nasledujúca definícia je korektná pre každú podmnožinu každého metrického priestoru.

Definícia 8. *Nech je (X, ρ) metrický priestor, $F \subseteq X$ jeho podmnožina a $s \geq 0$. Potom je s-dimenzionálna Hausdorffova miera množiny F definovaná nasledovne*

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \to 0_+} \mathcal{H}^s_\delta(F) .$$

Ako môžeme nájsť v [1] str. 25 a 26, ďalej je možné overiť, že $\mathcal{H}^s$ je skutočne miera na algebre borelovských množín.

Nasledujúce tvrdenie ukazuje, že sa špeciálne s-dimenzionálna Hausdorffova miera v $\mathbb{R}^s$ pri „nafukovaní“ alebo „zmenšovaní“ množiny správa ako príslušný s-dimenzionálny objem, no túto škálovaciu vlastnosť si zachováva aj pre neceločíselné hodnoty s.

Tvrdenie 2. *Nech $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$ a $\lambda > 0$. Potom*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F) ,$$

kde $\lambda F = \{\lambda x \mid x \in F\}$.

Dôkaz. Ak je $\{U_i\}$ δ-pokrytie F, potom je $\{\lambda U_i\}$ $\lambda\delta$-pokrytie λF, odkiaľ získame, že pre každé δ-pokrytie $\{U_i\}$ platí

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \sum \operatorname{diam}^s(\lambda U_i) = \lambda^s \sum \operatorname{diam}^s U_i ,$$

čo po aplikácii infíma (nemá vplyv na ľavú stranu) dáva

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(\lambda F)\,.$$

Limitným prechodom $\delta \to 0_+$ obdržíme

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(\lambda F)\,.$$

Pre opačnú nerovnosť λ nahradíme $1/\lambda$ a množinu F množinou λF. Postupujme analogicky ako v predošlom prípade: ak je $\{\lambda U_i\}$ δ-pokrytie λF, potom je $\left\{\frac{1}{\lambda}U_i\right\}$ $\frac{\delta}{\lambda}$-pokrytie F, z čoho

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{\delta/\lambda}(F) &\leq \sum \operatorname{diam}^s\left(\frac{1}{\lambda}U_i\right) = \frac{1}{\lambda^s}\sum \operatorname{diam}^s U_i \\
\mathcal{H}^s_{\delta/\lambda}(F) &\leq \frac{1}{\lambda^s}\mathcal{H}^s_\delta(\lambda F) \\
\mathcal{H}^s(F) &\leq \frac{1}{\lambda^s}\mathcal{H}^s(\lambda F) \\
\lambda^s\mathcal{H}^s(F) &\leq \mathcal{H}^s(\lambda F)\,,
\end{aligned}$$

čím sme dokázali tvrdenie. □

Uveďme tvrdenie, poskytujúce odhad správania sa Hausdorffovej miery pri o čosi všeobecnejšej transformácii, konkrétne pri Hölderovom zobrazení.

Tvrdenie 3. *Nech sú (X,ρ) a (Y,σ) metrické priestory, $s \geq 0$, $F \subseteq X$ a $f\colon F \subseteq X \to Y$ zobrazenie, ktoré pre všetky $x, y \in F$ spĺňa*

$$\sigma(f(x), f(y)) \leq c\rho^\alpha(x,y)\,,$$

kde sú $c > 0$ a $\alpha > 0$ konštanty. Potom pre každé $s \geq 0$ platí

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)\,.$$

Dôkaz. Nech je $\{U_i\}$ δ-pokrytie množiny F. Platí $F \cap U_i \subseteq U_i$, odkiaľ $\operatorname{diam} f(F \cap U_i) \leq c \operatorname{diam}^\alpha(U_i)$. Označme $\varepsilon = c\delta^\alpha$. Potom je $\{f(F \cap U_i)\}$ ε-pokrytie množiny $f(F)$. Získavame

$$\sum \operatorname{diam}^{s/\alpha}(f(F\cap U_i)) \leq c^{s/\alpha}\sum \operatorname{diam}^{\alpha s/\alpha}(U_i) = c^{s/\alpha}\sum \operatorname{diam}^s(U_i)\,,$$

čo dáva

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}_\varepsilon(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_\delta(F)\,.$$

Keď $\delta \to 0_+$, tak aj $\varepsilon \to 0_+$, takže týmto limitným prechodom obdržíme

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)\,.$$

□

Z definície $\mathcal{H}^s_\delta$ je zrejmé, že pre danú množinu F a pre $\delta < 1$ je $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ nerastúca v s, takže podľa svojej definície je $\mathcal{H}^s$ taktiež nerastúca. V [1] str. 28 nachádzame, že platí aj nasledujúce zrejmé tvrdenie.

Tvrdenie 4. *Nech je (X,ρ) metrický priestor, $F \subseteq X$ jeho podmnožina, $\delta > 0$, $\{U_i\}$ δ-pokrytie množiny F a $t > s \geq 0$. Potom platí*

$$\sum_i \operatorname{diam}^t U_i \leq \delta^{t-s} \sum_i \operatorname{diam}^s U_i,$$

čo po aplikácii infím dáva

$$\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(F) .$$

Z limitného prechodu $\delta \to 0_+$ získame, že ak $\mathcal{H}^s_\delta(F) < \infty$, tak pre $t > s$ platí $\mathcal{H}^t_\delta(F) = 0$. Takže (pre pevnú množinu F) dosahuje $\mathcal{H}^s(F)$ ako funkcia s buď iba hodnotu ∞, alebo iba hodnotu 0, alebo existuje kritický bod, nazývaný *Hausdorffova dimenzia* množiny F, v ktorom dochádza k skoku z hodnoty ∞ na hodnotu 0.

Definícia 9. *Nech je (X,ρ) metrický priestor a $F \subseteq X$ jeho podmnožina. Hausdorffova dimenzia množiny F je definovaná ako*

$$\dim_H(F) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \max\{0, \sup\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}^s(F) = \infty\}\} .$$

Teda máme

$$\mathcal{H}^s(F) \begin{cases} = \infty, & \text{ak } s < \dim_H(F)\,, \\ \in \langle 0, \infty \rangle\,, & \text{ak } s = \dim_H(F)\,, \\ = 0, & \text{ak } s > \dim_H(F)\,. \end{cases}$$

Uveďme niektoré základné vlastnosti Hausdorffovej dimenzie, pre prípad $X = \mathbb{R}^n$ podrobnejšie rozoberané v [1] str. 29, ktoré môžu byť považované za príznačné pre „dobre sa správajúce“ dimenzie. Najskôr ale zaraďme ešte jednu definíciu.

Definícia 10. *Nech je d množinová funkcia do $\langle 0, \infty \rangle$, I indexová množina a $\{A_i\}_{i \in I}$ systém množín, na ktorých je funkcia d definovaná. Hovoríme, že funkcia d je konečne / spočítateľne stabilná, ak je pre ľubovoľnú konečnú / spočítateľnú indexovú množinu $J \subseteq I$ splnené*

$$d\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \sup_{j \in J} d(A_j) .$$

Tvrdenie 5. *Platí:*

1. *Ak je $F \subseteq \mathbb{R}^n$ otvorená množina, potom $\dim_H(F) = n$.*
2. *Ak je F hladká m-dimenzionálna varieta, potom $\dim_H(F) = m$. Špeciálne majú hladké krivky dimenziu 1, hladké povrchy dimenziu 2 atakďalej.*
3. *Ak $E \subseteq F$, potom $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$.*
4. *Hausdorffova dimenzia je spočítateľne stabilná.*
5. *Ak je F spočítateľná množina, potom $\dim_H(F) = 0$.*

1.4 Samopodobné množiny

Množiny presnejšie špecifikované v tejto podkapitole, ktoré sú zjednotením svojich obrazov, pričom zobrazujeme pomocou kontrakcií, nazývame *samopodobné množiny.* Ide o prirodzený a často pomerne jednoduchý spôsob ako generovať fraktály. Vlastnosti samopodobnosti zároveň vedú k ďalšiemu spôsobu ako definovať jeden typ fraktálnej dimenzie. Užitočným nástrojom pri štúdiu týchto množín je Banachova veta o pevnom bode.

Definícia 11. *Nech je X metrický priestor a $I = \{1, \dots, m\}$ konečná indexová množina. Systém kontrakcií $\{f_i \mid i \in I, f_i \colon X \to X\}$ nazývame* iterovaný funkcionálny systém *a $(X, \{f_i \mid i \in I\})$ nazývame* iterovaná funkcionálna schéma, *v skratke IFS. Neprázdnu kompaktnú množinu $K \subseteq X$ spĺňajúcu $K = \bigcup_{i \in I} f_i(K)$ nazývame* samopodobná množina.

Poznámka. *Neskôr ukážeme, že v úplnom metrickom priestore táto neprázdna kompaktná množina existuje a je určená jednoznačne. Zodpovedajúcu samopodobnú množinu budeme nazývať* atraktor *príslušnej iterovanej funkcionálnej schémy.*

Typickým príkladom samopodobnej množiny je napríklad Cantorovo diskontinuum alebo Sierpińského prach, o ktorých uvádzame viac informácií v Príklade 1.

Uveďme vetu, ktorej výsledky spolu s nasledujúcou vetou budú viesť k definícii *podobnostnej dimenzie.*

Veta 5. *Nech je $I = \{1, \dots, m\}$ konečná indexová množina. Majme čísla $r_1, \dots$ $\dots, r_m$, ktoré pre každé $i \in I$ spĺňajú $0 < r_i < 1$. Potom existuje jednoznačne určené nezáporné číslo s spĺňajúce*

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1, \tag{1.1}$$

pričom $s = 0$ práve vtedy, keď $m = 1$.

Dôkaz. Uvažujme funkciu $\Phi \colon \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ definovanú nasledovne

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{m} r_i^s.$$

Φ je zrejme spojitá funkcia a platí, že $\Phi(0) = m \geq 1$ a $\lim_{s \to \infty} \Phi(s) = 0 < 1$, teda podľa Vety o spojitom obraze intervalu existuje aspoň jedna hodnota s taká, že $\Phi(s) = 1$. Derivácia funkcie Φ je

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s \ln r_i,$$

čo je vždy záporné ($r_i < 1$), takže Φ je monotónne klesajúca funkcia, čo znamená, že existuje jediné s, že $\Phi(s) = 1$.

Ďalej je pre $m > 1$: $\Phi(0) > 1$, takže pre $m > 1$ je $s \neq 0$. □

Obsah tvrdenia nasledujúcej vety je súčasťou Vety 4, ktorá mohla byť vyslovená a dokázaná už aj v kapitole 1.2 pomocou elementárnejších prostriedkov. (Dôkaz viď napr. v [1] str. 114 a 115.) Uvádzame ju aj s dôkazom radšej až na tomto mieste, pretože práve definované pojmy nám umožňujú jej elegantnejšiu formuláciu a aj dôkaz, v ktorom navyše dobre vynikne použitie Banachovej vety o pevnom bode.

Veta 6. *Nech je (X, ρ) úplný metrický priestor, $I = \{1, \ldots, m\}$ konečná indexová množina a $(X, \{f_i \mid i \in I\})$ iterovaná funkcionálna schéma. Potom existuje jednoznačne určená neprázdna kompaktná množina $K \subseteq X$, ktorá je invariantná vzhľadom na túto iterovanú funkcionálnu schému, t. j. spĺňa*

$$K = \bigcup_{i \in I} f_i(K)\,, \tag{1.2}$$

takže je jej atraktorom.

Dôkaz. Uvažujme metrický priestor $\mathcal{K}(X)$ neprázdnych kompaktných podmnožín X s Hausdorffovou metrikou d_H. X je úplný, takže aj $\mathcal{K}(X)$ je úplný. Definujme množinovú funkciu $F\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ nasledovne

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(A)\,.$$

Spojitý obraz kompaktnej množiny je kompaktný a zjednotenie konečne veľa kompaktných množín je opäť kompaktná množina, takže kompaktnosť A implikuje, že aj $F(A)$ je kompaktná množina.

Dokážeme, že F je kontrakcia. Položme $r = \max\{r_1, \ldots, r_m\}$. Iste $r < 1$. Chceme ukázať, že

$$d_H(F(A), F(B)) \leq r d_H(A, B)\,.$$

Nech je $q > d_H(A, B)$ dané. Majme $x \in F(A)$ ľubovoľný prvok $F(A)$. Potom existujú $i \in I$ a $a \in A$ také, že $x = f_i(a)$. Pretože $q > d_H(A, B)$, existuje $b \in B$, že $\rho(a, b) < q$. Potom bod $y = f_i(b) \in F(B)$ spĺňa $\rho(x, y) \leq r_i\, \rho(a, b) < rq$. Tento vzťah platí pre všetky $x \in F(A)$, takže množina $F(A)$ je obsiahnutá v rq-okolí množiny $F(B)$. Analogicky získame, že množina $F(B)$ je obsiahnutá v rq-okolí množiny $F(A)$. Celkovo pre všetky $q > d_H(A, B)$ máme $d_H(F(A), F(B)) \leq rq$, takže $d_H(F(A), F(B)) \leq r d_H(A, B)$.

Dokázali sme, že F je kontrakcia na úplnom metrickom priestore $\mathcal{K}(X)$, takže podľa Banachovej vety o pevnom bode má jednoznačne určený pevný bod. Stačí si uvedomiť, že pevný bod množinovej funkcie F je invariantná množina zo znenia vety, čo dokončuje dôkaz. □

Ak neprázdnu kompaktnú množinu možno písať v tvare (1.2), pričom sú f_i podobnosti a koeficienty podobnosti r_i podobností f_i spĺňajú rovnosť (1.1) pre nejaké nezáporné číslo s, tak toto číslo nazývame *podobnostná dimenzia* tejto neprázdnej kompaktnej množiny.

Poznámka. *Vráťme sa k úvahám zo začiatku kapitoly 1.3. Pri súčasnom značení sme dimenziu v ilustratívnych príkladoch (empiricky) počítali podľa vzťahu*

$$s = -\frac{\ln m}{\ln r}.$$

Podobnostnú dimenziu z diskutovaného príkladu počítajme podľa vzorca 1.1:

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{i=1}^{m} r_i^s = \sum_{i=1}^{m} r^s = mr^s \\ r^s &= \frac{1}{m} \\ s = \log_r r^s &= \log_r \frac{1}{m} \\ s &= -\log_r m = -\frac{\ln m}{\ln r}.\end{aligned}$$

Predošlá veta spolu s dôsledkom Banachovej vety o pevnom bode poskytujú návod, ako nájsť invariantnú množinu:

Dôsledok 2. *Nech je X úplný metrický priestor, $I = \{1, \ldots, m\}$ konečná indexová množina a $(X, \{f_i \mid i \in I\})$ iterovaná funkcionálna schéma. Majme ľubovoľnú neprázdnu kompaktnú množinu $A_0 \subseteq X$ a pre $k \geq 0$ induktívne definujme*

$$A_{k+1} = \bigcup_{i \in I} f_i(A_k)\,.$$

Potom postupnosť $\{A_k\}$ konverguje v Hausdorffovej metrike k invariantnej množine tejto iterovanej funkcionálnej schémy.

Na záver uveďme dva príklady charakteristických samopodobných množín.

Príklad 1. *1. Na $\mathbb{R}$ uvažujme zobrazenia*

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \frac{1}{3}x, \\ f_2(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Cantorovo diskontinuum C, niekedy nazývané aj „strednotretinové“ (angl. middle third) Cantorovo diskontinuum, je atraktor iterovanej funkcionálnej schémy $(\mathbb{R}, \{f_1, f_2\})$ a jeho podobnostná dimenzia je rovná $\log_3 2 = \ln 2 / \ln 3$.

2. Na $\mathbb{R}^2$ uvažujme zobrazenia

$$\begin{aligned}g_1(x, y) &= \left[\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right], \\ g_2(x, y) &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right], \\ g_3(x, y) &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

Sierpińského prach je atraktor iterovanej funkcionálnej schémy $(\mathbb{R}^2, \{g_1, g_2, g_3\})$ a jeho podobnostná dimenzia je rovná $\log_2 3 = \ln 3 / \ln 2$.

2. Nové prístupy k fraktálnej dimenzii

V tejto kapitole uvádzame niektoré z výsledkov prezentovaných v [3], odkiaľ preberáme aj definície a tvrdenia, ak nebude uvedené inak. Po predstavení potrebných pojmov bude naším hlavným cieľom zaviesť nové typy fraktálnej dimenzie, ktoré prirodzeným spôsobom zovšeobecňujú tradičné prístupy. Takto získame možnosť zaoberať sa fraktálnou štruktúrou a dimenziou aj v takých oblastiach, kde klasické prístupy nemali zmysel. Taktiež uvedieme niekoľko základných vlastností novodefinovaných pojmov. V ďalšej kapitole budeme ich pomocou počítať fraktálnu dimenziu jazyka. Autori [3] vo svojich ďalších prácach (viď napríklad [4]) ponúkajú zovšeobecnenia pracujúce aj s ideami Hausdorffovej dimenzie.

2.1 Fraktálna štruktúra, samopodobnosť a ďalšie pojmy

Začnime zavedením pojmov nevyhnutných pre ďalšiu prácu a pripomenutím už známych poznatkov z kapitoly 1.4 venovanej samopodobným množinám.

Označenie. *Nech je Γ pokrytie X. Potom označme $St(x,\Gamma) = \bigcup\{A \in \Gamma \mid x \in A\}$ a $U_{x,\Gamma} = X \setminus \bigcup\{A \in \Gamma \mid x \notin A\}$. Ak je $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ spočítateľný systém pokrytí X, potom označíme $U_{x,n} = U_{x,\Gamma_n}$, $\mathcal{U}_x^{\mathbf{\Gamma}} = \{U_{x,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ a $St(x,\mathbf{\Gamma}) = \{St(x,\Gamma_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.*

Definícia 12. *Nech je X topologický priestor. Prefraktálna štruktúra na X je taký spočítateľný systém pokrytí (nazývaných úrovne) $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, že pre každý bod $x \in X$ je $\mathcal{U}_x^{\mathbf{\Gamma}}$ báza otovrených okolí bodu x. Ak je Γ_{n+1} zjemnenie Γ_n (označenie $\Gamma_{n+1} \preceq \Gamma_n$), ktoré má navyše tú vlastnosť, že ak pre každé $x \in A$, že $A \in \Gamma_n$, existuje $B \in \Gamma_{n+1}$, že $x \in B \subseteq A$, hovoríme, že $\mathbf{\Gamma}$ je fraktálna štruktúra na X.*

Definícia 13. *Ak je $\mathbf{\Gamma}$ (pre)fraktálna štruktúra na topologickom priestore X, hovoríme, že $(X,\mathbf{\Gamma})$ je zovšeobecnený (pre)fraktálny priestor, v skratke (pre)GF priestor. Ak je z kontextu zrejmé, akú (pre)fraktálnu štruktúru uvažujeme, hovoríme len o zovšeobecnenom (pre)fraktálnom priestore X.*

Definícia 14. *Ak je $\mathbf{\Gamma}$ fraktálna štruktúra na topologickom priestore X a pre každé $x \in X$ je $St(x,\mathbf{\Gamma})$ báza okolí bodu x, potom $\mathbf{\Gamma}$ nazývame hviezdicovitá fraktálna štruktúra. Ak je $\mathbf{\Gamma}$ fraktálna štruktúra na topologickom priestore X a pre každé $n \in \mathbb{N}$ je Γ_n konečné pokrytie, potom $\mathbf{\Gamma}$ nazývame konečná fraktálna štruktúra.*

Všeobecne ak má Γ_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$ vlastnosť V, hovoríme, že $\mathbf{\Gamma}$ je fraktálna štruktúra s vlastnosťou V.

Pripomeňme názvoslovie a už známe fakty:

Poznámka. *Nech je $I = \{1,\ldots,m\}$ konečná indexová množina a $\{f_i \mid i \in I\}$ systém kontrakcií definovaných z úplného metrického priestoru X do seba. Potom existuje jednoznačne určená neprázdna kompaktná množina $K \subseteq X$ spĺňajúca*

$K = \bigcup_{i \in I} f_i(K)$. Túto množinu nazývame samopodobná množina. *$(X, \{f_i \mid i \in I\})$ nazývame* iterovaná funkcionálna schéma, *v skratke* IFS, *a zodpovedajúcu samopodobnú množinu K* atraktor *tejto iterovanej funkcionálnej schémy.*

Typickým príkladom samopodobnej množiny je napríklad Cantorovo diskontinuum alebo Sierpińského prach (viď Príklad 1).

Definícia 15. *Nech je $I = \{1, \ldots, m\}$ konečná indexová množina a $(X, \{f_i \mid i \in I\})$ iterovaná funkcionálna schéma s atraktorom K.* Prirodzená fraktálna štruktúra *na samopodobnej množine K je spočítateľný systém pokrytí $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kde pre každé $n \in \mathbb{N} : \Gamma_n = \{f_\omega^n(K) \mid \omega \in I^n\}$, kde $\omega = \omega_1 \ldots \omega_n \in I^n$ a $f_\omega^n = f_{\omega_1} \circ \ldots \circ f_{\omega_n}$.*

Poznámka. *Prirodzenú fraktálnu štruktúru možno opísať aj induktívne nasledovným spôsobom: $\Gamma_1 = \{f_i(K) \mid i \in I\}$ a $\Gamma_{n+1} = \{f_i(A) \mid A \in \Gamma_n, i \in I\}$.*

2.2 Klasická definícia fraktálnej dimenzie nad euklidovskými priestormi

Jednou z „klasických“ fraktálnych dimenzií je *mriežková dimenzia*, ktorá podľa [3] síce nemá také dobré teoretické vlastnosti ako napríklad Hausdorffova a je definovaná len pre podmnožiny $\mathbb{R}^d$, no na druhej strane je v mnohých prípadoch možný priamo jej výpočet či aspoň pomerne nenáročný empirický odhad. O myšlienkach, ktoré sa uplatňujú pri formulovaní tejto dimenzie, sme čiastočne pojednali na začiatku kapitoly 1.3.

Kvôli jednoduchšiemu vyjadrovaniu a vyššej konzistentnosti budeme v niektorých situáciách *limes superior* nazývať ako *hornú limitu* a *limes inferior* ako *dolnú limitu*.

Definícia 16. *δ-kocka v $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ je množina tvaru $\langle k_1\delta, (k_1 + 1)\,\delta\rangle \times \ldots \times \langle k_d\delta, (k_d + 1)\,\delta\rangle$, kde pre všetky $i \in \{1, \ldots, d\} \colon k_i \in \mathbb{Z}$.*

Definícia 17. *Horná mriežková dimenzia množiny $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je definovaná ako*

$$\overline{\dim}_B(F) = \limsup_{\delta \to 0_+} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta},$$

dolná mriežková dimenzia množiny $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je definovaná ako

$$\underline{\dim}_B(F) = \liminf_{\delta \to 0_+} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

a mriežková dimenzia množiny $F \subseteq \mathbb{R}^d$ je definovaná ako

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \to 0_+} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta},$$

kde je $N_\delta(F)$ počet δ-kociek pretínajúcich množinu F.

Definíca pomocou δ-kociek umožňuje nahliadnuť motiváciu anglického názvu mriežkovej dimenzie: *box-counting dimension*. Hodnotu $N_\delta(F)$ možno získať viacerými spôsobmi, ktoré dávajú tú istú hodnotu mriežkovej dimenzie danej množiny. Niektoré z nich uveďme s odvolaním sa na [1] str. 41 a na [3] str. 6.

Poznámka. *V definícii mriežkovej dimenzie možno $N_\delta(F)$ ekvivalentne definovať ako niektorý z nasledujúcich výrazov:*

1. *počet δ-kociek pretínajúcich množinu F,*
2. *počet $\left(\delta = \frac{1}{n}\right)$-kociek pretínajúcich množinu F, pričom $n \in \mathbb{N}$,*
3. *najmenší počet množín s diametrom najviac δ pokrývajúcich F,*
4. *najmenši počet uzavretých gúľ s polomerom δ pokrývajúcich F,*
5. *najmenší počet d-rozmerných kociek so stranou dĺžky δ pretínajúcich F,*
6. *najväčší počet disjunktných gúľ s polomerom δ a so stredom v množine F.*

Poznámka. *Pri výpočte (hornej / dolnej) mriežkovej dimenzie ľubovoľnej množiny F priestoru X je postačujúce pracovať s limitou pre $\delta \to 0_+$ pomocou klesajúcej postupnosti $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ spĺňajúcej pre všetky $n \in \mathbb{N}: \delta_{n+1} \geq c\delta_n$, kde je $c \in (0,1)$ vhodná konštanta.*

2.3 Zovšeobecnená definícia fraktálnej dimenzie vzhľadom na ľubovoľnú fraktálnu štruktúru

Pri definovaní fraktálnej dimenzie na priestore majúcom fraktálnu štruktúru je prirodzeným krokom skúmať vyšetrovanú množinu na jednotlivých úrovniach tejto štruktúry. Takto môžeme nahradiť limitný proces cez diameter pokrývajúcich množín limitným procesom cez rastúcu „hĺbku“ fraktálnej štruktúry. Kvôli lepšiemu pochopeniu zvoleného tvaru výrazu definujúceho prvú verziu fraktálnej dimenzie, vychádzajúcej z tejto myšlienky a z definície mriežkovej dimenzie, začnime nasledujúcou definíciou.

Definícia 18. *Prirodzená fraktálna štruktúra na euklidovskom priestore $\mathbb{R}^d$ je definovaná ako spočítateľný systém pokrytí $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kde pre každé $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma_n = \left\{\left\langle \frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}\right\rangle \times \ldots \times \left\langle \frac{k_d}{2^n}, \frac{k_d+1}{2^n}\right\rangle \mid i \in \{1,\ldots,d\}, k_i \in \mathbb{Z}\right\}$.*

Všimnime si, že prirodzená fraktálna štruktúra na $\mathbb{R}^d$ pozostáva z $\frac{1}{2^n}$-kociek. Pamätajúc na definíciu mriežkovej dimenzie toto pozorovanie premietneme do definície fraktálnej dimenzie I nasledujúcim spôsobom:

Označenie. *Nech je $(X, \mathbf{\Gamma})$ zovšeobecnený fraktálny priestor a $F \subseteq X$. Pre každú úroveň fraktálnej štruktúry $\mathbf{\Gamma}$ označme*

$$\mathcal{A}_n(F) = \{A \in \Gamma_n \mid A \cap F \neq \emptyset\}.$$

Definícia 19. *Nech je $(X, \mathbf{\Gamma})$ zovšeobecnený fraktálny priestor. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ označme $N_n(F)$ počet prvkov $\mathcal{A}_n(F)$. Potom je horná fraktálna dimenzia I neprázdnej ohraničenej množiny $F \subseteq X$ definovaná ako*

$$\overline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}(F) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(F)}{n \ln 2},$$

dolná fraktálna dimenzia I neprázdnej ohraničenej množiny $F \subseteq X$ je definovaná ako
$$\underline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}(F) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(F)}{n \ln 2}$$
a fraktálna dimenzia I neprázdnej ohraničenej množiny $F \subseteq X$ je definovaná ako
$$\dim^I_{\mathbf{\Gamma}}(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(F)}{n \ln 2},$$
ak táto limita existuje.

Na základe úvah vyššie môžeme očakávať, že mriežková a fraktálna dimenzia I budú na $\mathbb{R}^d$ splývať, teda že fraktálna dimenzia I rozširuje a zovšeobecňuje mriežkovú dimenziu. Je to skutočne tak. Tento výrok budeme formulovať ako samostatné tvrdenie:

Veta 7. *Nech je $\mathbf{\Gamma}$ prirodzená fraktálna štruktúra na euklidovskom priestore $\mathbb{R}^d$ a $F \subseteq \mathbb{R}^d$ neprázdna ohraničená množina. Potom sú (horná / dolná) mriežková a (horná / dolná) fraktálna dimenzia I ekvivalentné.*

Uveďme niekoľko základných vlastností fraktálnej dimenzie I:

Tvrdenie 6. *Nech je $(X, \mathbf{\Gamma})$ zovšeobecnený fraktálny priestor. Potom platí:*

1. $\overline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}$ *a* $\underline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}$ *sú monotónne,*
2. $\overline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}$ *je konečne stabilná,*
3. $\overline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}$ *a* $\underline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}$ *nie sú spočítateľne stabilné,*
4. *existuje spočítateľná množina $F \subseteq X$ taká, že $\dim^I_{\mathbf{\Gamma}}(F) \neq 0$.*

Teraz definujme pojmy, ktoré budú veľmi dôležité pre naše ďalšie úvahy.

Definícia 20. *Nech je $\mathbf{\Gamma}$ fraktálna štruktúra na metrickom priestore (X, ρ) a $F \subseteq X$ podmnožina X. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme diameter úrovne Γ_n fraktálnej štruktúry $\mathbf{\Gamma}$ nasledovne*
$$\operatorname{diam}(\Gamma_n) = \sup \{\operatorname{diam}(A) \mid A \in \Gamma_n\}$$
a diameter množiny F na úrovni Γ_n fraktálnej štruktúry $\mathbf{\Gamma}$ nasledovne
$$\operatorname{diam}(F, \Gamma_n) = \sup \{\operatorname{diam}(A) \mid A \in \mathcal{A}_n(F)\}.$$

V prípade, že diameter množiny s rastúcou úrovňou fraktálnej štruktúry klesá *vhodným spôsobom*, získavame tam, kde sú obe definované, horný odhad mriežkovej dimenzie pomocou fraktálnej dimenzie I.

Veta 8. *Nech je $\mathbf{\Gamma}$ fraktálna štruktúra na metrickom priestore (X, ρ) a $F \subseteq X$ neprázdna ohraničená podmnožina X. Predpokladajme, že existuje konštanta $c \in (0, 1)$ taká, že je pre všetky $n \in \mathbb{N}$ splnené*
$$\operatorname{diam}(F, \Gamma_{n+1}) \leq c \operatorname{diam}(F, \Gamma_n).$$
Označme konštantu $\gamma_c = -\frac{\ln 2}{\ln c}$. Potom platí:

1. $\overline{\dim}_B(F) \leq \gamma_c \overline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}(F)$,

2. $\underline{\dim}_B(F) \leq \gamma_c \underline{\dim}^I_{\mathbf{\Gamma}}(F)$,

3. *ak navyše existujú mriežková aj fraktálna dimenzia I množiny F, potom* $\dim_B(F) \leq \gamma_c \dim^I_{\mathbf{\Gamma}}(F)$.

Dôsledok 3. *Nech je $\mathbf{\Gamma}$ prirodzená fraktálna štruktúra na samopodobnej množine K vybavenej euklidovskou vzdialenosťou. Potom sú nerovnosti z predchádzajúcej vety splnené, pričom je konštanta c maximom kontraktívnych faktorov c_i kontrakcií f_i z iterovanej funkcionálnej schémy $(X, \{f_i \mid i \in I\})$, ktorej zodpovedajúca samopodobná množina je K.*

Do definície fraktálnej dimenzie I významným spôsobom vstupuje fraktálna štruktúra, ktorú pre jej výpočet zvolíme, ale ako ukazuje nasledujúca poznámka, nezanedbateľnú rolu hrá aj to, že sa táto verzia fraktálnej dimenzie správa, ako keby boli všetky prvky na každej fraktálnej úrvoni rovnako „veľké“, čo však nemusí korešpondovať s voľbou fraktálnej štruktúry.

Poznámka. *Nech je X podpriestor euklidovského priestoru. Potom je možné získať rôzne hodnoty jeho fraktálnej dimenzie I v závislosti od fraktálnej štruktúry $\mathbf{\Gamma}$, ktorú zvolíme pre tento výpočet.*

2.4 Druhá verzia fraktálnej dimenzie na zovšeobecnených fraktálnych priestoroch

Pokúsme sa odstrániť vlastnosť fraktálnej dimenzie I, na ktorú sme narazili na konci predchádzajúcej podkapitoly a ktorá vyplýva z jej definície. Prirodzeným spôsobom, ako to urobiť, je zohľadniť diameter množiny na jednotlivých úrovniach fraktálnej štruktúry. Následne budeme venovať pozornosť vlastnostiam tohto ďalšieho typu fraktálnej dimenzie a jej súvislosti s už známymi dimenziami.

Najskôr zadefinujme potrebné pojmy.

Definícia 21. *Zobrazenie $d \colon X \times X \to \mathbb{R}^+_0$ definované na množine X sa nazýva vzdialenostná funkcia alebo vzdialenosť na X, ak je pre každé $x \in X$ splnené $d(x, x) = 0$.*

Poznámka. *Diametre podmnožín, pokrytí atakďalej vzhľadom na vzdialenostnú funkciu sú definované rovnakým spôsobom ako pre metriku.*

Teraz môžeme pristúpiť k samotnej definícii ďalšej verzie fraktálnej dimenzie:

Definícia 22. *Nech je $\mathbf{\Gamma}$ fraktálna štruktúra na vzdialenostnom priestore (X, d). Pre každé $n \in \mathbb{N}$ označme $N_n(F)$ počet prvkov $\mathcal{A}_n(F)$. Potom je horná fraktálna dimenzia II neprázdnej ohraničenej množiny $F \subseteq X$ je definovaná ako*

$$\overline{\dim}^{II}_{\mathbf{\Gamma}}(F) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(F)}{-\ln \operatorname{diam}(F, \Gamma_n)},$$

dolná fraktálna dimenzia II neprázdnej ohraničenej množiny $F \subseteq X$ je definovaná ako

$$\underline{\dim}^{II}_{\mathbf{\Gamma}}(F) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(F)}{-\ln \operatorname{diam}(F, \Gamma_n)}$$

a fraktálna dimenzia II neprázdnej ohraničenej množiny $F \subseteq X$ je definovaná ako

$$\dim_{\mathbf{\Gamma}}^{II}(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(F)}{-\ln \operatorname{diam}(F, \Gamma_n)},$$

ak táto limita existuje.

V definícii fraktálnej dimenzie II sme mohli uvažovať aj $\operatorname{diam}(\Gamma_n)$ namiesto $\operatorname{diam}(F, \Gamma_n)$, čo by však prinieslo isté nevýhody, ako ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 2. *Nech je $\mathbf{\Gamma}$ konečná fraktálna štruktúra na euklidovskom priestore $\mathbb{R}^d$ definovaná ako spočítateľný systém pokrytí $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kde máme pre každé $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma_n = \left\{\left\langle \frac{k_1}{2^n}, \frac{k_1+1}{2^n}\right\rangle \times \ldots \times \left\langle \frac{k_d}{2^n}, \frac{k_d+1}{2^n}\right\rangle \mid i \in \{1, \ldots, d\}, k_i \in \{-n2^n, \ldots, n2^n - 1\}\right\} \cup \left\{\mathbb{R}^d \setminus (-n, n)^d\right\}$. Potom pre každú podmnožinu $F \subseteq \mathbb{R}^d$ a pre každé $n \in \mathbb{N}$ máme $\operatorname{diam}(\Gamma_n) = \infty$, no zároveň existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $\operatorname{diam}(F, \Gamma_n) < \infty$.*

Fraktálna dimenzia I a II budú iste splývať, keď budeme uvažovať fraktálnu štruktúru $\mathbf{\Gamma}$, ktorá pre všetky $n \in \mathbb{N}$ spĺňa $\operatorname{diam}(F, \Gamma_n) = \frac{1}{2^n}$.

Ďalej fraktálna dimenzia II zovšeobecňuje mriežkovú aj fraktálnu dimenziu I na $\mathbb{R}^d$ s prirodzenou fraktálnou štruktúrou.

Veta 9. *Nech je $\mathbf{\Gamma}$ prirodzená fraktálna štruktúra na euklidovskom priestore $\mathbb{R}^d$. Potom pre neprázdnu ohraničenú podmnožinu $F \subseteq \mathbb{R}^d$ platí $\dim_{\mathbf{\Gamma}}^{I}(F) = \dim_{\mathbf{\Gamma}}^{II}(F) = \dim_B(F)$, pričom to isté platí aj pre horné a dolné dimenzie.*

Uveďme niekoľko základných vlastností fraktálnej dimenzie II:

Tvrdenie 7. *Nech je $\mathbf{\Gamma}$ fraktálna štruktúra na vzdialenostnom priestore (X, d). Potom platí:*

1. $\overline{\dim}_{\mathbf{\Gamma}}^{II}$ *a* $\underline{\dim}_{\mathbf{\Gamma}}^{II}$ *sú monotónne,*
2. $\overline{\dim}_{\mathbf{\Gamma}}^{II}$ *nie je konečne stabilná,*
3. $\overline{\dim}_{\mathbf{\Gamma}}^{II}$ *a* $\underline{\dim}_{\mathbf{\Gamma}}^{II}$ *nie sú spočítateľne stabilné,*
4. *existuje spočítateľná množina $F \subseteq X$ taká, že $\dim_{\mathbf{\Gamma}}^{II}(F) \neq 0$.*

Protipríklad na konečnú stabilitu je nasledujúci:

Príklad 3. *Nech je $\mathbf{\Gamma}_1$ prirodzená fraktálna štruktúra na klasickom „strednotretinovom“ Cantorovom diskontinue C_1 na intervale $\langle 0, 1\rangle$. Nech je $\mathbf{\Gamma}_2$ fraktálna štruktúra na množine $C_2 = \langle 2, 3\rangle$ určená ako $\mathbf{\Gamma}_2 = \{\Gamma_{2,n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, kde pre každé $n \in \mathbb{N}: \Gamma_{2,n} = \left\{\left\langle \frac{k}{2^{2n}}, \frac{k+1}{2^{2n}}\right\rangle \mid k \in \{2^{2n+1}, \ldots, 3 \cdot 2^{2n} - 1\}\right\}$. Teraz na množine $C = C_1 \cup C_2$ uvažujme fraktálnu štruktúru $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kde pre každé $n \in \mathbb{N}: \Gamma_n = \Gamma_{1,n} \cup \Gamma_{2,n}$. Potom $\dim_{\mathbf{\Gamma}}^{II}(C_1) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ a $\dim_{\mathbf{\Gamma}}^{II}(C_2) = 1$, no $\dim_{\mathbf{\Gamma}}^{II}(C) = \frac{\ln 4}{\ln 3} > 1$.*

Ak pripustíme prirodzenú hypotézu, že $\operatorname{diam}(F, \Gamma_n) \to 0_+$, je možné nájsť horný odhad pre mriežkovú dimenziu ľubovoľnej podmnožiny pomocou jej fraktálnej dimenzie II tam, kde sú obe definované. Dokonca nájdeme súvislosť medzi Hausdorffovou a fraktálnou dimenziou II.

Veta 10. *Nech je* $\mathbf{\Gamma}$ *fraktálna štruktúra na metrickom priestore* (X,ρ) *a* $F \subseteq X$ *neprázdna ohraničená podmnožina* X. *Predpokladajme, že* $\operatorname{diam}(F,\Gamma_n) \to 0_+$. *Potom platí:*

1. $\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \underline{\dim}^{II}_{\mathbf{\Gamma}}(F)$,
2. *ak existujú mriežková aj fraktálna dimenzia II množiny* F, *potom* $\dim_B(F) \leq \dim^{II}_{\mathbf{\Gamma}}(F)$,
3. *ak navyše predpokladáme, že existuje konštanta* $c > 0$ *taká, že je pre všetky* $n \in \mathbb{N}$ *splnené* $\operatorname{diam}(F,\Gamma_n) \leq c\operatorname{diam}(F,\Gamma_{n+1})$, *potom* $\overline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}^{II}_{\mathbf{\Gamma}}(F)$.

Táto veta platí špeciálne pre samopodobné množiny s prirodzenou fraktálnou štruktúrou. Posledný bod práve uvedenej vety sa dá v takomto prípade formulovať aj v inej podobe.

Dôsledok 4. *Nech je* $I = \{1,\ldots,m\}$ *konečná indexová množina a* $\left(\mathbb{R}^d, \{f_i \mid i \in I\}\right)$ *iterovaná funkcionálna schéma so zodpovedajúcou samopodobnou množinou* K. *Nech je* $\mathbf{\Gamma}$ *prirodzená fraktálna štruktúra na samopodobnej množine* K. *Potom pre podmnožinu* $F \subseteq K$ *platí:*
Ak existuje také $i \in I$, *že* f_i *je bilipschitzovské kontraktívne zobrazenie, potom* $\overline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}^{II}_{\mathbf{\Gamma}}(F)$. *Špeciálne je táto nerovnosť splnená pre striktne samopodobné množiny, teda také samopodobné množiny, kde sú zobrazenia* f_i, *vystupujúce v iterovanej funkcionálnej schéme v ich definícii, podobnosti (no ich koeficienty podobnosti môžu byť rôzne).*

Uveďme ale, že ani samopodobné množiny nevykazujú vo vzťahu k fraktálnej dimenzii II vždy optimálne správanie, ak nepredpokladáme ďalšie podmienky navyše.

Poznámka. *V euklidovskej rovine s prirodzenou fraktálnou štruktúrou* $\mathbf{\Gamma}$ *existuje samopodobná množina* K, *pre ktorú* $\dim_B(K) \neq \dim^{II}_{\mathbf{\Gamma}}(K)$.

3. Aplikácia na obor slov

V tejto kapitole sa budeme venovať aplikácii nových prístupov k fraktálnej dimenzii v oblastiach, kde mriežková dimenzia nemá zmysel. Zameriame sa na fraktálnu dimenziu jazyka generovaného pomocou regulárneho výrazu.

S prekladom anglického výrazu *domain of words* sme sa nestretli v literatúre písanej po slovensky alebo po česky, takže bolo potrebné zaviesť vlastné názvoslovie: používame termín *obor slov*.

3.1 Fraktálna štruktúra a obor slov

Nech je Σ konečná neprázdna abeceda (množina). Označme Σ^∞ systém konečných $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n\right)$ a nekonečných $\left(\Sigma^{\mathbb{N}}\right)$ postupností (nazývaných slová) nad Σ. Prázdne slovo označme ε.

Označenie. *Nech $x, y \in \Sigma^\infty$. Ak je x prefixom y, použijeme označenie $x \sqsubseteq y$. Spoločný prefix x a y označíme $x \sqcap y$. Dĺžku slova x označíme $l(x)$, pričom kladieme $l(\varepsilon) = 0$.*

Teraz môžeme na Σ^∞ definovať vzdialenostnú funkciu (vzdialenosť) d nasledovne:

1. $d(x, y) = 0$, ak $x \sqsubseteq y$,
2. $d(x, y) = 2^{-l(x\sqcap y)}$ inak.

Označenie. *Nech $w \in \Sigma^n$. Množinu prefixov w označíme*

$$w^{\sqsubseteq} = \left\{u \in \Sigma^k \mid k \leq n, u \sqsubseteq w\right\}$$

a množinu slov (konečných či nekonečných), ktoré začínajú na w, alebo sú prefixom w, označíme

$$w^{\#} = \{wu \mid u \in \Sigma^\infty\} \cup w^{\sqsubseteq}.$$

Podľa [3] str. 22 funkcia d indukuje fraktálnu štruktúru na Σ^∞, ktorú možno opísať pomocou úrovní, t. j. $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kde

$$\Gamma_n = \left\{w^{\#} \mid w \in \Sigma^n\right\} \cup \left\{w^{\sqsubseteq} \mid w \in \Sigma^k, k < n\right\}.$$

Navyše pre každé $w \in \Sigma^n$ platí $w^{\#} = B_{d^{-1}}(w, 2^{-n})$ a pre každé $w \in \Sigma^k$, kde $k < n$, platí $w^{\sqsubseteq} = B_{d^{-1}}(w, 2^{-n})$. Použili sme označenie $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$.

Potom je jazyk L definovaný ako podpriestor Σ. Zvyčajne je definovaný pomocou formálnej gramatiky. Ako špeciálny prípad môžeme uvažovať jazyk generovaný regulárnymi výrazmi.

Keďže máme fraktálnu štruktúru a funkciu určujúcu vzdialenosť, pomocou ktorej môžeme získať diametre množín (na úrovniach tejto fraktálnej štruktúry), môžeme počítať fraktálnu dimenziu ľubovoľného jazyka.

3.2 Fraktálna dimenzia jazyka generovaného regulárnym výrazom

Uvažujme regulárny výraz $(00+1)^+$, skonštruovaný reťazením 00 a 1 po sebe (aspoň jedenkrát). Náš hlavný zámer spočíva vo výpočte fraktálnej dimenzie tohto jazyka $L \subset \Sigma^\infty$ generovaného pomocou predchádzajúceho regulárneho výrazu. V nasledujúcom výpočte aplikujeme model fraktálnej dimenzie I. Najskôr si uvedomme, že jazyk L môže byť opísaný ako nasledujúca množina:

$$L = \{1, 00, 11, 100, 001, 111, 0000, 0011, 1001, 1100, 1111, \ldots\}.$$

Nech je $\mathbf{\Gamma}$ fraktálna štruktúra z predchádzajúcej podkapitoly. V [3] autori poukazujú na to, že táto fraktálna štruktúra je generovaná funkciou d. Pri výpočte fraktálnej dimenzie I nie je pre nás podstatné, ako sme fraktálnu štruktúru získali, dôležité je, že ju vieme definovať. Stačí nám iba to, že máme definované úrovne fraktálnej štruktúry a sme schopní určiť počet ich prvkov. Takýmto spôsobom môžeme uvažovať, iba ak sa zameriame na púhy kalkulus, alebo ak sme ochotní pripustiť zovšeobecnenie pojmu fraktálna štruktúra, pri ktorom by sme síce stále požadovali zjemňujúce sa pokrytia, no už by sme nevyžadovali niektoré iné vlastnosti, najmä bázu otvorených okolí bodu, pre ktorých získanie je funkciu d vhodné použiť. Nasledujúcim spôsobom vypočítame fraktálnu dimenziu I jazyka L bez zohľadnenia funkcie d iba s využitím fraktálnej štruktúry $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, kde sú prvé úrovne tvaru: $\Gamma_1 = \left\{1^\#, 0^\#\right\}, \Gamma_2 = \left\{10^\#, 11^\#, 00^\#, 1^\sqsubseteq\right\}, \Gamma_3 = \left\{000^\#, 001^\#, 100^\#, 111^\#, 110^\#, 00^\sqsubseteq, 11^\sqsubseteq, 1^\sqsubseteq\right\}, \ldots$ Ďalej si všimnime, že $N_1(L) = 2, N_2(L) = 3+1, N_3(L) = 5+3, N_4(L) = 8+6, N_5(L) = 13+11$ atakďalej, kde je prvý sčítanec počtom prvkov príslušnej úrovne tvaru $w^\#$ a druhý sčítanec počtom prvkov každej úrovne tvaru $w^\sqsubseteq$.

Ak označíme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Fibonacciho postupnosť, kde $f_1 = f_2 = 1$ a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pre všetky $n \geq 3$, potom pre všetky $n \in \mathbb{N}$ získame

$$N_n(L) = f_{n+2} + \sum_{i=2}^{n} f_i.$$

Fibonacciho postupnosť pre $n \geq 2$ spĺňa

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1,$$

takže pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$N_n(L) = f_{n+2} + [(f_{n+2} - 1) - 1] = 2\,(f_{n+2} - 1)\,.$$

Pre prvky Fibonacciho postupnosti pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n = \frac{\varphi^n - \beta^n}{\varphi - \beta}$, kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Teraz počítajme fraktálnu dimenziu I jazyka L:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(L)}{n \ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[2\,(f_{n+2} - 1)\right]}{n \ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2 + \ln\left(f_{n+2} - 1\right)}{n \ln 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(f_{n+2}-1)}{n\ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln f_{n+2}}{n\ln 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{\varphi^{n+2}-\beta^{n+2}}{\varphi-\beta}}{n\ln 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\varphi^{n+2}-\beta^{n+2}) - \ln(\varphi-\beta)}{n\ln 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\varphi^{n+2}-\beta^{n+2})}{n\ln 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[\left(1-\left(\frac{\beta}{\varphi}\right)^{n+2}\right)\varphi^{n+2}\right]}{n\ln 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\left(\frac{\beta}{\varphi}\right)^{n+2}\right) + \ln\varphi^{n+2}}{n\ln 2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\left(\frac{\beta}{\varphi}\right)^{n+2}\right) + (n+2)\ln\varphi}{n\ln 2} =$$

$$= \frac{\ln(1-0)}{n\ln 2} + \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)\log_2\varphi =$$

$$= \log_2\varphi.$$

Pri výpočte sme využili, že $\left|\frac{\beta}{\varphi}\right| < 1$.

Pri výpočte fraktálnej dimenzie II si uvedomme, že nám stačí mať funkciu, ktorá na každej úrovni množine priradí nezáporné reálne číslo, nazývajme ho diameter. Toto vyššie difenovaná funkcia d spĺňa. Z tvaru jednotlivých fraktálnych úrovní je zrejmé, že každá obsahuje aspoň dve slová s rôznymi začiatkami, teda s prázdnym spoločným prefixom (napríklad slová začínajúce na 0 a na 1). Označme tieto slová x a y. Potom $d(x,y) = 2^0 = 1$, čo je maximálna možná hodnota d, teda pre všetky $n \in \mathbb{N}$ máme $\operatorname{diam}(L,\Gamma_n) = 1$, takže

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(L)}{-\ln \operatorname{diam}(L,\Gamma_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(L)}{-\ln 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln N_n(L)}{0} = \infty.$$

Záver

V práci sme najskôr predstavili základné pojmy a nástroje súvisiace a potrebné pri štúdiu samopodobných množín a fraktálov. Banachova veta o pevnom bode a Hausdorffova metrika nám umožnili popísať konvergenciu množín a samopodobné množiny, úzko späté s iterovanými funkcionálnymi schémami, vnímať ako pevné body množinových zobrazení. Po oboznámení sa s viacerými klasickými prístupmi k dimenzii vhodnej na popis fraktálov (Hausdorffova, podobnostná a mriežková dimenzia) a po zavedení fraktálnej štruktúry a zovšeobecneného fraktálneho priestoru sme mohli upriamiť pozornosť na zovšeobecnenia pojmu fraktálna dimenzia a na ich vlastnosti, popísané v [3]. Takto sme sa dostali do situácie, keď bolo možné uvažovať a počítať fraktálnu dimenziu na ľubovoľnom priestore pripúšťajúcom fraktálnu štruktúru či s inými vlastnosťami na vzdialenostnom priestore vybavenom takouto štruktúrou. Použitie týchto nových prístupov sme demonštrovali výpočtom fraktálnych dimenzií jazyka v kapitole 3, kde sme narazili aj na inšpiráciu pre ďalšie možné všeobecnejšie prístupy.

Zoznam použitej literatúry

[1] Falconer, Kenneth J. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 1990. ISBN 0-471-92287-0.

[2] Edgar, Gerald A. *Measure, Topology, and Fractal Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1990. ISBN 0-387-97272-2.

[3] Sánchez-Granero, M. A., Fernández-Martínez, M. *Fractal Dimension for Fractal Structures*. arXiv:1007.3236v2 [nlin.CD] 22 Jul 2010, arXiv:submit/0080411[nlin.CD] 22 Jul 2010.

[4] Fernández-Martínez, M., Sánchez-Granero, M. A. *Fractal Dimension for Fractal Structures: A Hausdorff Approach*. arXiv:1007.3960v1 [nlin.CD] 22 Jul 2010, arXiv:submit/0080421[nlin.CD] 22 Jul 2010.