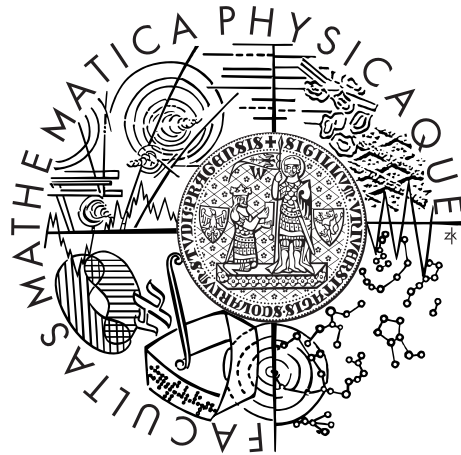


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tomáš Zbyňovský

Nestandardní přístupy v analýze finančních časových řad

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijný program: Matematika

Studijný obor: Finanční matematika

Praha 2012

Chcel by som sa poďakovať RNDr. Jitke Zichovej, Dr. za usmernenie a pomoc pri tvorení tejto práce a kolegovi Martinovi Žatkulákovi za technickú podporu.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Zb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzatvorenie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V dňa

Podpis autora

Název práce: Nestandardní přístupy v analýze finančních časových řad

Autor: Tomáš Zbyňovský

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., KPMS

Abstrakt: Štandardné metódy pre odhad parametrov lineárneho autoregresného modelu finančných časových rád používajú metódu maximálnej vierohodnosti založenú na predpoklade normality náhodných chýb. Práca je však zameraná na neštandardné postupy pre odhad parametrov v nezáporných časových radách s predpokladom exponenciálneho rozdelenia chýb. Tieto klasické aj neštandardné, jednorozmerné i mnohorozmerné modely sú ďalej podliehané testovaniu na forexových dátach ECB a zistenia zhrnuté v závere.

Klíčová slova: nezáporné finančné časové rady, lineárna autoregresia, exponenciálne rozdelenie chýb, neštandardné odhady parametrov

Title: Non-standard approaches in the financial time series analysis

Author: Tomáš Zbyňovský

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr., KPMS

Abstract: Standard procedures for parameter estimation in autoregressive models use maximum likelihood method based on normal random error distribution assumption. However, this thesis is focused on non-standard approaches for parameter estimation in non-negative time series based on the assumption of exponential probability distribution. Both standard and non-standard approaches were tested on forex time series and the results summarized in the thesis.

Keywords: non-negative financial time series, linear autoregression, exponential error distribution, non-standard estimates of parameters

Obsah

Úvod	2
1 Boxova-Jenkinsova metodológia	3
1.1 Základné pojmy	3
1.2 Autoregresné procesy	4
1.3 Identifikácia modelu	6
1.4 Odhad parametrov	8
1.5 Diagnostika modelu	9
2 Odhady v nezáporných časových radách	10
2.1 Nezáporný proces AR(1)	10
2.2 Nezáporný proces AR(2)	12
3 Vektorová autoregresia	17
3.1 Základné pojmy	17
3.2 Vektorové autoregresné procesy	18
3.3 Identifikácia modelu VAR	19
3.4 Odhad modelu VAR	20
3.5 Diagnostika modelu VAR	21
4 Odhady v nezáporných mnohorozmerných časových radách	22
4.1 Nezáporný proces VAR(1)	22
4.2 Nezáporný proces VAR(2)	26
5 Praktická časť	28
5.1 Jednorozmerné procesy	29
5.1.1 USD/EUR	29
5.1.2 CAD/EUR	31
5.2 Nezáporné jednorozmerné procesy	33
5.3 Mnohorozmerné procesy	34
5.4 Nezáporné mnohorozmerné procesy	35
Záver	36
Zoznam použitej literatúry	37

Úvod

Finančné dáta možno často nájsť v podobe časových rád. Štandardné metódy pre odhad parametrov lineárneho autoregresného modelu finančných časových rád používajú metódu maximálnej vierohodnosti založenú na predpoklade normality náhodných chýb. Existujú však aj alternatívne neštandardné metódy s predpokladom exponenciálneho rozdelenia chýb a nezápornosti rady, ktorým sa práca venuje podrobnejšie.

Text práce je rozdelený na dva celky. Prvé štyri kapitoly predstavujú teoretickú časť, piata kapitola je praktická s aplikáciami na reálnych finančných dátach získaných z [7].

Teoretická časť sa dá ďalej rozdeliť na polovicu, dve kapitoly venujeme pre jednorozmerné a dve pre viacrozmerné časové rady. V prvej kapitole sa sústreďíme na Boxovu-Jenkinsovu metodológiu, definíciu základných pojmov, popis autoregresných procesov, ukážeme postupy používané pri identifikácii modelu, odhade parametrov a diagnostike modelu. V tejto časti budeme vychádzať najmä z literatúry [6] a [9].

V druhej kapitole ukážeme typy odhadov pre nezáporné procesy AR(1) a AR(2) podľa klasickej literatúry (opäť [6] a [9]) a neštandardnejších podielových odhadov podľa [2] a [3].

Tretia kapitola je venovaná vektorovej autoregresii a je zobecnením kapitoly 1 pre mnohorozmerné časové rady. Opäť definujeme základné pojmy, priblížime viacrozmerné autoregresné procesy a ukážeme postupy pre ich identifikáciu, odhady parametrov a diagnostiku podľa [6] a [9].

Vo štvrtej a poslednej teoretickej kapitole sa budeme venovať odhadom v nezáporných mnohorozmerných časových radoch opäť klasickým postupom podľa [9] a ďalej neštandardným podľa [4],[12] a [13].

V poslednej piatej kapitole a síce praktickej časti aplikujeme vyššie popísané modely na dáta z [7] za pomoci Time Series balíka programu Mathematica ([10], [11]) a štatistického softvéru NCSS a vyhodnotíme ich klady a zápory a vhodnosť použitia na dané dáta.

1. Boxova-Jenkinsova metodológia

1.1 Základné pojmy

Náhodný proces je množina $\{y_t, t \in T\}$ kde y_t sú náhodné veličiny. Prvky z množiny T sa obvykle interpretujú ako čas. Označme Z množinu celých čísel a N množinu prirodzených čísel. V prípade, že platí $T = Z$ alebo $T = N + 0$, vravíme o náhodnom procese s diskretným časom alebo časovej rade. Naďalej budeme uvažovať len procesy s celočíselnými časmi.

Rozlišujeme **stacionaritu** náhodného procesu y_t

- striktnú - pravdepodobnostné chovanie príslušného stochastického procesu je invariantné voči posunom v čase, tj. pravdepodobnostné rozdelenie vektoru $(y_{t_1}, \dots, y_{t_k})$ je rovnaké ako rozdelenie vektoru $(y_{t_1+h}, \dots, y_{t_k+h})$ pre ľubovoľné h , kde t_1, \dots, t_k, h sú celé.
- slabú - tu stačí, aby bol príslušný proces invariantný voči posunom v čase len v rámci momentov do druhého rádu, tj. pre každé $s, t \in Z$

$$E(y_t) = \mu = konst; cov(y_s, y_t) = cov(y_{s+k}, y_{t+k}) \text{ pre } k \in Z. \quad (1.1)$$

Naďalej budeme slabú stacionaritu nazývať len stacionaritou.

Biely šum ϵ_t je postupnosť nekorelovaných náhodných veličín, tj. $cov(\epsilon_t, \epsilon_{t-k}) = 0, k \neq 0$. Spravidla predpokladáme $E\epsilon_t = 0, var\epsilon_t = \sigma^2$ pre všetky t .

Lineárny proces je

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \quad (1.2)$$

kde $\psi_0 = 1, \epsilon_t$ je biely šum s nulovou strednou hodnotou a $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$.

Autokorelačná funkcia (ACF) pre oneskorenie k sa definuje ako

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_y^2}, k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

kde γ_k je autokovariančná funkcia pre oneskorenie k

$$\gamma_k = cov(y_t, y_{t-k}) = E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu), k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (1.4)$$

Pre pozorovanú stacionárnu časovú radu y_1, \dots, y_n odhadujeme autokorelačnú funkciu ako

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}, k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.5)$$

kde c_k je odhad autokovariančnej funkcie

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y}), k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (1.6)$$

a

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t.$$

Parciálna autokorelačná funkcia (PACF) značená ako ρ_{kk} je definovaná ako parciálny korelačný koeficient medzi y_t a y_{t-k} pri pevných hodnotách $y_{t-k+1}, \dots, y_{t-1}$ viď napríklad [1]. Zrejme je $\rho_{00} = 1$ a $\rho_{11} = \rho_1$.

V praxi používame rekurentný výpočet odhadu

$$r_{11} = r_1, \quad r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} \cdot r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} \cdot r_j} \text{ pre } k > 1, \quad (1.7)$$

kde

$$r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} \cdot r_{k-1,k-j} \text{ pre } j = 1, \dots, k-1 \quad (1.8)$$

1.2 Autoregresné procesy

Nadalej budeme v kapitole 1 uvažovať časové rady s nulovou strednou hodnotou.

Autoregresný model rádu p značený ako $AR(p)$ má tvar

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \epsilon_t, \text{ tj. } y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \dots - \varphi_p y_{t-p} = \varphi(B)y_t = \epsilon_t, \quad (1.9)$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sú parametre, $\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \dots - \varphi_p B^p$ je autoregresný operátor a B je operátor spätného posunutia definovaný predpisom $B^k y_t = y_{t-k}$; $k = 1, 2, \dots$

Proces $AR(p)$ je stacionárny, ak všetky korene z_1, \dots, z_p polynómu $\varphi(z)$ ležia mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine. Proces má v tom prípade rozptyl

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots - \varphi_p \rho_p}. \quad (1.10)$$

Autokorelačná funkcia procesu $AR(p)$ spĺňa diferenčnú rovnicu

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \text{ pre } k > 0. \quad (1.11)$$

Jej riešenie možno vyjadriť v tvare

$$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k} \text{ pre } k \geq 0, \quad (1.12)$$

kde z_1, \dots, z_p sú navzájom rôzne korene polynómu $\varphi(z)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sú pevné koeficienty. Ak zapíšeme (1.11) len pre $k = 1, \dots, p$, potom dostaneme tzv. sústavu

Yule-Walkerových rovníc pre vyjadrenie parametrov $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ pomocou autokorelácií ρ_1, \dots, ρ_p alebo naopak.

Parciálna autokorelačná funkcia procesu $AR(p)$ má bod useknutia k_0 (bod, od ktorého graf PACF nevykazuje aktivitu, to znamená ρ_{kk} je takmer 0 pre $k > k_0$) rovný rádu modelu p .

Autokorelačná funkcia ρ_k je bez bodu useknutia a má tvar lineárnej kombinácie geometricky klesajúcich postupností, a sínusoid s geometricky klesajúcou amplitúdou.

Špeciálne prípady sú

Proces **AR(1)** definovaný predpisom

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \epsilon_t. \quad (1.13)$$

Je stacionárny pre $|\varphi_1| < 1$. V tom prípade má nulovú strednú hodnotu, rozptyl

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1^2} \quad (1.14)$$

a autokorelačnú funkciu

$$\rho_k = \varphi_1^k \text{ pre } k \geq 0. \quad (1.15)$$

Proces **AR(2)** definovaný predpisom

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \epsilon_t. \quad (1.16)$$

Je stacionárny pre

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < 1, \quad -1 < \varphi_2 < 1 \quad (1.17)$$

Vtedy má AR(2) rozptyl

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \varphi_2 \rho_2} \quad (1.18)$$

a autokorelačnú funkciu

$$\rho_k = \frac{z_1^{-1}(1 - z_2^{-2})z_1^{-k} - z_2^{-1}(1 - z_1^{-2})z_2^{-k}}{(z_1^{-1} - z_2^{-1})(1 + z_1^{-1}z_2^{-1})} \text{ pre } k \geq 0, \quad (1.19)$$

kde z_1, z_2 sú navzájom rôzne korene polynómu $\varphi(z)$.

1.3 Identifikácia modelu

Identifikácia pomocou tvaru ACF a PACF

Model identifikujeme na základe obecných poznatkov o tvare autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie procesov. Graf ACF a PACF nazývame korelogram. Identifikačný postup spočíva v analýze grafického záznamu odhadnutého korelogramu a parciálneho korelogramu modelovanej časovej rady, kedy sa snažíme tejto rade priradiť najvhodnejší typ modelu. Napríklad charakteristiky stacionárneho modelu AR(p) sú nasledovné:

ρ_k : v tvare krivky U (tvar lineárnej kombinácie geometricky klesajúcich postupností, alebo tvar sínusoidy s geometricky klesajúcou amplitúdou), neexistuje bod useknutia k_0 , ρ_{kk} : $k_0 = p$.

V prípade nejasnosti môžeme testovať potenciálny bod useknutia k_0 pomocou

Quenouilleovej aproximácie s kritickým oborom na hladine významnosti 5 percent

$$|r_k| \geq 2\sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{pre niektoré } k > k_0 \quad (1.20)$$

alebo pomocou Bartlettovej aproximácie s asymptotickým kritickým oborom na hladine významnosti 5 percent

$$|r_k| \geq 2\sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k_0} r_j^2 \right)} \quad \text{pre niektoré } k > k_0. \quad (1.21)$$

Niekedy sa pre kontrolu správnosti identifikovaného modelu využívajú tiež nerovnosti pre odhadnuté autokorelácie r_k , ktoré by teoreticky mali platiť za predpokladu stacionarity modelu.

Identifikácia pomocou informačných kritérií

Jedná sa o modernejší prístup, ktorý umožňuje identifikáciu modelu plne zautomatizovať bez subjektívneho zásahu analytika. Jedno z kritérií na výber modelu môže byť napríklad reziduálna chyba (MSE)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - y_t)^2 \quad (1.22)$$

kde \hat{y}_t sú hodnoty odhadnuté modelom a y_t sú dáta, tj. preferujeme model s najnižšou hodnotou MSE. Adekvátnejšie je však spolu s využitím teórie informácie zároveň penalizovať zbytočne veľké rády p a často tak doceliť konzistenciu odhadov. Najviac využívané informačné kritériá sú AIC (Akaike information criterion)

$$AIC(p) = \ln \hat{\sigma}_p^2 + \frac{2p}{n} \quad (1.23)$$

a BIC (Bayes information criterion)

$$BIC(p) = \ln \hat{\sigma}_p^2 + \frac{p \cdot \ln n}{n} \quad (1.24)$$

kde $\hat{\sigma}_p^2$ je odhadnutý rozptyl bieleho šumu procesu AR(p). BIC poskytuje silno konzistentný odhad rádu modelu, ale s veľkým rozptylom, AIC nám dáva naopak nekonzistentný, ale eficientný odhad rádu modelu. Spomínané vlastnosti odhadov sú definované napr v [1]. Preferujeme model s najnižším AIC, resp. BIC.

1.4 Odhad parametrov

OLS metóda

OLS (z angličtiny Ordinary Least Squares) metóda alebo metóda najmenších štvorcov je pravdepodobne najčastejšie využívaný prístup k odhadovaniu v štatistike. Pri AR(p) modeloch môžeme za predpokladu $cov(y_t, \epsilon_t) = 0$ pre všetky t použiť klasický odhad metódou najmenších štvorcov (OLS odhad) spočívajúcej v minimalizácii

$$\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 = \sum_{t=p+1}^n (y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \dots - \varphi_p y_{t-p})^2.$$

Odhad je nestranný a konzistentný. V modeli AR(1) dostávame OLS odhad parametru φ_1 v tvare

$$\hat{\varphi}_1 = r_1. \quad (1.25)$$

Niekedy sa namiesto štvorcov volí iný tvar optimalizačného kritéria, napríklad namiesto druhých mocnín volíme absolútne hodnoty (LAD, Least Absolute Deviations, metóda najmenších absolútnych odchyliet), štvorce s rôznymi váhami (WLS, Weighted Least Squares, vážená metóda najmenších štvorcov), exponenciálne vyrovňovanie, atď. Niekedy účelovo volíme obecnjšiu funkciu G s vhodnými vlastnosťami, napríklad v prípade keď dáta obsahujú odľahlé pozorovania skresľujúce výsledok analýzy. Vhodnou voľbou G tak môžeme výpočet voči nim z odolniť. Uvedené postupy sú popísané v [6].

ML metóda

ML (z angličtiny Maximum Likelihood) metódu alebo metódu maximálnej vierohodnosti možno použiť pre všeobecný stacionárny AR(p) model

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

kde biely šum tvoria nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny z $N(0, \sigma_\epsilon^2)$ kde združená hustota $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)'$ je

$$f(\epsilon | \varphi, \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 \right]. \quad (1.26)$$

Nech $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$ a predpokladajme počiatočné podmienky $y_* = (y_{1-p}, \dots, y_{-1}, y_0)'$. Máme podmienenú logaritmickú ML funkciu

$$\ln L_*(\varphi, \mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{S_*(\varphi, \mu)}{2\sigma^2}, \quad (1.27)$$

kde

$$S_*(\varphi, \mu) = \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2(\varphi, \mu, y) \quad (1.28)$$

je podmienená funkcia súčtu štvorcov. Hodnoty $\hat{\varphi}$, $\hat{\mu}$, ktoré maximalizujú funkciu (1.27), nazývame odhady metódou podmienenej maximálnej vierohodnosti. Pretože $\ln L_*(\varphi, \mu, \sigma^2)$ pracuje s dátami len prostredníctvom $S_*(\varphi, \mu)$, sú tieto odhady rovnaké ako odhady pomocou podmienenej metódy OLS z minimalizácie podmieneného súčtu štvorcov $S_*(\varphi, \mu)$. Všimnime si, že neobsahujú parameter σ^2 .

1.5 Diagnostika modelu

Kontrola stacionarity

Kontrolujeme, či model spĺňa podmienku stacionarity, tj. či sú korene jeho odhadnutého autoregresného polynómu mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine. Môžeme tiež rozdeliť radu na viac úsekov a testovať medzi nimi zhodnosť odhadnutých úrovní, autokorelácií, rozptylov, alebo vyšších momentov ako napr. šikmosť.

Kontrola štruktúry ARMA

Touto kontrolou je zhoda korelačnej štruktúry odhadnutej z dát (ACF a PACF) s teoretickou korelačnou štruktúrou použitého modelu, ktorý verifikujeme. Inou kontrolou môže byť testovanie nekorelovanosti pre vypočítaný biely šum pomocou Q - testov (viď ďalej).

Grafická analýza bieleho šumu

Dôležitým nástrojom je vypočítaný biely šum $\hat{\epsilon}_t$ z odhadnutého modelu časovej rady. Jeho grafický výstup, histogram, odhadnutý korelogram a pod. môžu indikovať prípadné vady modelu. Obvykle očakávame biely šum s nulovou strednou hodnotou, konštantným rozptylom, nekorelovanosťou a normalitou.

Testovanie nekorelovanosti pre biely šum

Nekorelovanosť vypočítaného bieleho šumu môžeme za predpokladu normality testovať priamo pomocou testu založenom na aproximácii (1.20), kde pracujeme s odhadnutými autokoreláciami vypočítaného bieleho šumu $r_k(\hat{\epsilon}_t)$. Nulová hypotéza nekorelovanosti má zrejme kritický obor na hladine významnosti 5 percent

$$|r_k(\hat{\epsilon}_t)| \geq 2\sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots$$

Často využívané sú *Q - testy*, ktoré testujú významnosť prvých K autokorelácií odhadnutého bieleho šumu. K sa volí vopred s odporúčanou výškou $K \approx \sqrt{n}$, kde n je dĺžka danej rady. Súčasne dochádza k overeniu štruktúry $AR(p)$, pretože testová Q -štatistika má za platnosti nulovej hypotézy, že pôvodná rada sa riadi modelom $AR(p)$, asymptoticky rozdelenie $\chi^2(K - p)$. Pritom ako Q -štatistika sa v praxi najčastejšie používa *Boxova-Pierceova* štatistika s kritickým oborom

$$Q = n \sum_{k=1}^K (r_k(\hat{\epsilon}_t))^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(K - p) \quad (1.29)$$

a testovo silnejšia *Ljungova-Boxova* štatistika s kritickým oborom

$$Q^* = n(n + 2) \sum_{k=1}^K \frac{1}{n - k} (r_k(\hat{\epsilon}_t))^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(K - p). \quad (1.30)$$

2. Odhady v nezáporných časových radách

2.1 Nezáporný proces AR(1)

Majme AR(1) proces y_t zadaný ako

$$y_t = \varphi y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (2.1)$$

kde $\epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ sú nezávislé rovnako rozdelené nezáporné náhodné veličiny, $E\epsilon_t^2 < \infty$, $0 \leq \varphi < 1$ a $y_1 \geq 0$ (*) je daná nezávislá na $\epsilon_2, \dots, \epsilon_n$. Nech F je distribučná funkcia bieleho šumu ϵ_t . Vzhľadom k tomu, že $y_t/y_{t-1} = \varphi + \epsilon_t/y_{t-1}$, $\epsilon_t \geq 0$, $t = 2, \dots, n$, je zrejmé $\varphi \leq y_t/y_{t-1}$ pre $t = 2, \dots, n$. Preto možno ako jednoduchý odhad parametru φ navrhnúť

$$\varphi^* = \min\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2}, \dots, \frac{y_n}{y_{n-1}}\right). \quad (2.2)$$

K odvodeniu silnej konzistencie odhadu φ^* použijeme Borel-Cantelliho vetu (viď [8], strana 135).

Najprv pripomeňme pojmy limes superior a limes inferior pre postupnosti náhodných javov B_n .

$\overline{\lim} B_n$ je limes superior postupnosti B_n , tj. $\overline{\lim} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} B_m \right)$ a $\overline{\lim} B_n$ znamená nastanie nekonečne mnoho javov B_n .

Analogicky $\underline{\lim} B_n$ je limes inferior postupnosti B_n , tj. $\underline{\lim} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} B_m \right)$

Borel-Cantelliho veta [8] nám vraví: Buď B_n postupnosť javov. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty \Rightarrow P(\overline{\lim} B_n) = 0. \quad (2.3)$$

Tvrdenie 1: Odhad φ^* je silno konzistentný, t.j. $\varphi^* \rightarrow \varphi$ skoro určite (s.u., viď [1]) pre $n \rightarrow \infty$ práve vtedy, keď $F(d) - F(c) < 1$ pre všetky $0 < c < d < \infty$.

Dôkaz: Predpokladajme $\varphi < 1$. Definujeme φ_n^* ako v (2.2). Vyššie sme spomínali, že $y_t/y_{t-1} = \varphi + \epsilon_t/y_{t-1}$ pre $t = 2, \dots, n$. Preto $\varphi_n^* = \min(\varphi + M_n)$ kde $M_n = \min(\epsilon_2/y_1, \epsilon_3/y_2, \dots, \epsilon_n/y_{n-1})$. Potom $\varphi_n^* \xrightarrow{s.u.} \varphi$ práve vtedy keď $M_n \xrightarrow{s.u.} 0$. Uvažujme $\eta > 0$. Môžeme písať

$$\begin{aligned} P[M_n > \eta] &= P[\epsilon_j > \eta y_{j-1}; 2 \leq j \leq n] \\ &= P[\epsilon_j > \eta(\epsilon_{j-1} + \varphi \epsilon_{j-2} + \dots + \varphi^{j-3} \epsilon_2 + \varphi^{j-2} y_1); 2 \leq j \leq n] \text{ vzhľadom k (*)} \\ &\leq P[\epsilon_j > \eta \epsilon_{j-1}; 2 \leq j \leq n] \leq P[\epsilon_{2j} > \eta \epsilon_{2j-1}; 1 \leq j < n/2] \\ &= P[\epsilon_2 > \eta \epsilon_1]^{[n/2]}, \end{aligned}$$

kde $[x]$ je najväčšie celé číslo menšie než x .

Ak $P[\epsilon_2 > \eta\epsilon_1] < 1$, potom

$$\sum_{n=2}^{\infty} P[M_n > \eta] \leq \sum_{n=2}^{\infty} P[\epsilon_2 > \eta\epsilon_1]^{[n/2]} < \infty.$$

Ak položíme v Borel-Cantelliho vete $B_n = [M_n > \eta]$, dostávame, že pre všetky dostatočne malé η sa prípady $[M_n > \eta]$ vyskytnú len konečne mnoho krát, z čoho plynie požadovaný dôsledok $M_n \xrightarrow{s.u.} 0$.

Prípady $P[\epsilon_2 > \eta\epsilon_1] = 1$ pre niektoré $\eta > 0$ nastáva práve vtedy, keď existujú konštanty $0 < c < d < \infty$ také, že $P[c < \epsilon_1 < d] = F(d) - F(c) = 1$ (viď [5]). Aby sme si uvedomili, prečo nie je φ^* konzistentný pre $P[c < \epsilon_1 < d] = 1$ pre kladné konštanty c a d , ukážme najprv, že

$$M_n \geq c \min(1/y_j; 1 \leq j \leq n-1) \geq \frac{c}{y_1 + d/(1-\varphi)} > 0.$$

Máme

$$\begin{aligned} y_j &= \epsilon_j + \varphi\epsilon_{j-1} + \dots\varphi^{j-2}\epsilon_2 + \varphi^{j-1}y_1 \\ &\leq d(1 + \varphi + \dots + \varphi^{j-2}) + \varphi^{j-1}y_1 \\ &= \frac{d(1 - \varphi^{j-1})}{1 - \varphi} + \varphi^{j-1}y_1 \\ &\leq y_1 + d/(1 - \varphi), \text{ pretože } 0 \leq \varphi < 1 \end{aligned}$$

Takže $\lim_n(M_n) > 0$ z čoho $\lim_n(\varphi_n^*) > \varphi$, čím dôkaz končí.

Ak majú ϵ_t exponenciálne rozdelenie, tj. $\epsilon_t \sim Ex(a)$ kde hustota $Ex(a)$ je $f(\epsilon) = a^{-1}exp(-\epsilon/a)$ pre $\epsilon > 0$, potom funkcia maximálnej vierohodnosti y_2, \dots, y_n pri danom y_1 je

$$L = a^{-n+1}exp\left(-\sum_{t=2}^n \frac{y_t - \varphi y_{t-1}}{a}\right) \quad (2.4)$$

$$\text{pre } y_t - \varphi y_{t-1} \geq 0, \quad t = 2, \dots, n \quad (2.5)$$

a nula inak. Potom φ^* definované v (2.2) maximalizuje vierohodnostnú funkciu (2.4) za podmienok (2.5), (viď [3]). Táto interpretácia φ^* umožňuje vyššie popísanej metóde odhadov zovšeobecnenie na AR procesy vyšších rádo.

Predpokladajme, že $y_1 \sim Ex(\mu)$, $\mu = \frac{a}{1-\varphi}$. Anděl dokázal v článku [2], že pri týchto predpokladoch je rozdelenie φ^* dané predpisom

$$P(\varphi^* < v) = 0 \text{ pre } v \leq \varphi \quad (2.6)$$

$$P(\varphi^* < v) = 1 - (1 - \varphi) [\{v + (1 - \varphi)\} \{v^2 + (1 - \varphi)(1 + v)\} x \dots \\ \times \{v^{n-2} + (1 - \varphi)(1 + v + \dots + v^{n-3})\} \{v^{n-1} + (1 - \varphi)(1 + v + \dots + v^{n-2}) - \varphi\}^{-1}$$

pre $v > \varphi$. Tento výsledok môžeme použiť na výpočet vychýlenia φ^* , kvantilov φ^* a konfidenčných intervalov pre φ .

Simulácie potvrdili, že φ^* je podstatne lepší odhad ako odhad OLS metódou, ak rozdelenie bieleho šumu nie je normálne. φ^* možno teda považovať za jednoduchý neparametrický odhad koeficientu φ v modeli AR(1).

2.2 Nezáporný proces AR(2)

V tejto časti generalizujeme predošlú metódu na odhad parametrov AR procesov druhého rádu.

Nech ϵ_t sú nezáporné, nezávislé, rovnako rozdelené náhodné veličiny s distribučnou funkciou F . Predpokladajme že $E\epsilon_t^2 < \infty$ a že $F(d) - F(c) < 1$ pre všetky $0 < c < d < \infty$. Nech $\varphi_1 \geq 0$ a $\varphi_2 \geq 0$ sú také koeficienty, že polynóm $1 - \varphi_1 z - \varphi_2 z^2 = 0$ má všetky korene mimo jednotkového kruhu. Nech y_t je AR(2) proces definovaný ako

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \epsilon_t. \quad (2.7)$$

Priame zobecnenie vzorca (2.2) vedie ku skúmaniu podielov

$$\frac{y_t}{y_{t-1}} = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 y_{t-2} + \epsilon_t}{y_{t-1}}. \quad (2.8)$$

Ak je n dostatočne veľké, potom môžeme s veľkou pravdepodobnosťou očakávať, že existuje minimálne jedno t také, že y_{t-2} a ϵ_t sú malé a y_{t-1} je veľmi veľké.

Tvrdenie 2:

$$\varphi_1^* = \min_{2 \leq t \leq n} \left(\frac{y_t}{y_{t-1}} \right) \quad (2.9)$$

je silno konzistentný odhad pre φ_1 . Dôkaz možno nájsť v článku [3]

Podobne dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{y_t}{y_{t-2}} &= \frac{\varphi_1 y_{t-1} + \epsilon_t}{y_{t-2}} + \varphi_2 \\ &= \frac{\varphi_1(\varphi_1 y_{t-2} + \varphi_2 y_{t-3} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t}{y_{t-2}} + \varphi_2 \\ &= \varphi_2 + \varphi_1^2 + \frac{\varphi_1 \varphi_2 y_{t-3} + \varphi_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t}{y_{t-2}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tvrdenie 3:

$$\varphi_2' = \min_{3 \leq t \leq n} \left(\frac{y_t}{y_{t-2}} \right) \quad (2.11)$$

je silno konzistentný odhad pre $\varphi_2 + \varphi_1^2$ a

$$\varphi_2^* = \varphi_2' - \varphi_1^{*2} \quad (2.12)$$

je silno konzistentný odhad pre φ_2 .

Dôkaz možno nájsť v článku [3].

Odhady φ_1^* a φ_2^* môžeme považovať za prirodzené zovšeobecnenie odhadu φ^* definovaného vzťahom (2.2) pre AR(2) procesy. Aj keď má φ^* uspokojivé limitné správanie, φ_1^* a φ_2^* sú málo prakticky využiteľné, pretože, ako uvádza Anděl v [3], konvergencia v tvrdeniach 2 a 3 je extrémne pomalá.

V predošlej časti sme uviedli, že φ^* je odhad metódou maximálnej vierohodnosti pre φ v modeli AR(1), ak $\epsilon_t \sim Ex(a)$ a y_1 je pevné. Na rovnakej myšlienke možno založiť odvodenie iného typu odhadov v nezápornom AR(2) procese.

Nech v modeli (2.7) platí $\epsilon_t \sim Ex(a)$. Potom pre dané y_1 a y_2 je podmienená vierohodnostná funkcia

$$L = a^{-n+2} \exp \left(- \sum_{t=3}^n \frac{y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2}}{a} \right) \quad (2.13)$$

pre

$$y_t - \varphi_1 y_{t-1} - \varphi_2 y_{t-2} \geq 0, \quad t = 3, \dots, n \quad (2.14)$$

a nula inak. Odhady pre φ_1 a φ_2 maximalizujú

$$\varphi_1 \sum_{t=3}^n y_{t-1} + \varphi_2 \sum_{t=3}^n y_{t-2} \quad (2.15)$$

za podmienok (2.14).

Ak je n veľké, súčty v (2.15) sa od seba príliš nelíšia, stačí teda maximalizovať $\varphi_1 + \varphi_2$ za podmienok (2.14) a získame odhady φ_1^+ a φ_2^+ .

Samozrejme, tento postup môžeme aplikovať aj v prípade, kedy ϵ_t nemá exponenciálne rozdelenie. Simulačné štúdie vedené Andělom potvrdili kvalitné fungovanie odhadnutej procedúry aj pre biely šum s iným než exponenciálnym rozdelením. Musia byť ale splnené všeobecné predpoklady, ktoré sme stanovili vyššie. Dokážeme silnú konzistenciu φ_1^+ a φ_2^+ .

Tvrdenie 4: Nech $n \rightarrow \infty$, potom $\varphi_1^+ \rightarrow \varphi_1$ s.u. a $\varphi_2^+ \rightarrow \varphi_2$ s.u.

Dôkaz: Definujme

$$M_n = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0, y_t - \beta_1 y_{t-1} - \beta_2 y_{t-2} \geq 0 \text{ pre } t = 3, \dots, n\}.$$

Nech M je štvoruholník s vrcholmi

$$(0, 0), \quad (\varphi_1, 0), \quad (\varphi_1, \varphi_2), \quad (0, \varphi_2 + \varphi_1^2).$$

Je zřejmé, že $M_3 \supset M_4 \supset \dots$. Dokážeme, že $M_n \rightarrow M$ s.u. Nech p je priamka daná rovnicou

$$y_t - \beta_1 y_{t-1} - \beta_2 y_{t-2} = 0 \quad (2.16)$$

v rovine (β_1, β_2) . Ak $\beta_1 = 0$, potom $\beta_2 = y_t/y_{t-2}$, ak $\beta_2 = 0$, potom $\beta_1 = y_t/y_{t-1}$. Všetky ďalšie uvádzané konvergencie sú s.u.

Zvážme prípad (i) $\varphi_1 > 0, \varphi_2 > 0$. Pretože podľa tvrdenia 2 $\varphi_1^* \rightarrow \varphi_1$, existuje postupnosť indexov t_n takých, že

$$\frac{y_{t_n}}{y_{t_n-1}} \rightarrow \varphi_1.$$

Použitím (2.8) dostávame

$$\frac{\varphi_2 y_{t_n-2} + \epsilon_{t_n}}{y_{t_n-1}} \rightarrow 0, \text{ odkiaľ plynie}$$

$$\frac{y_{t_n-2}}{y_{t_n-1}} \rightarrow 0.$$

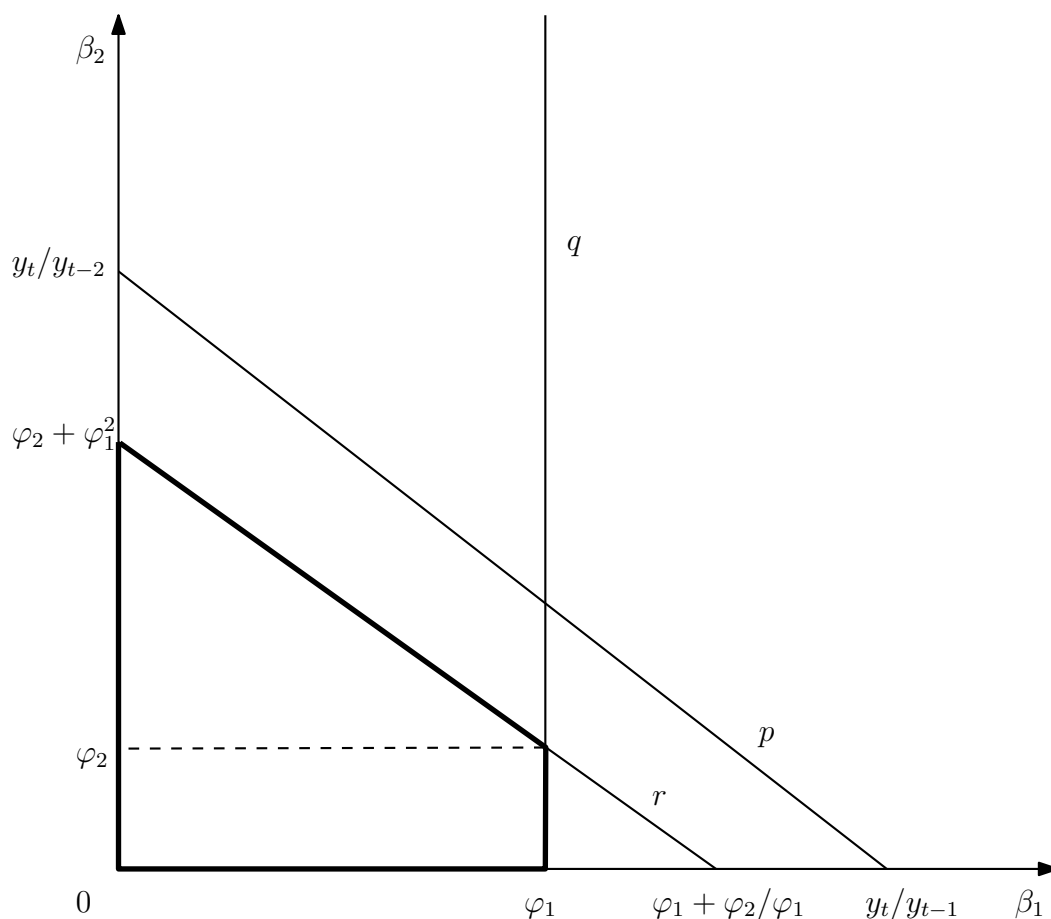
Pretože podľa (2.10)

$$\frac{y_{t_n}}{y_{t_n-2}} = \varphi_2 + \frac{\varphi_1 y_{t_n-1} + \epsilon_{t_n}}{y_{t_n-2}},$$

máme

$$\frac{y_{t_n}}{y_{t_n-2}} \rightarrow \infty.$$

V tomto prípade p dosiahne priamku q viď obrázok.



Pretože podľa tvrdenia 3 $\varphi_2' \rightarrow \varphi_2 + \varphi_1^2$, existujú vzhľadom k (2.10) indexy s_n také, že

$$\frac{\varphi_1 \varphi_2 y_{s_n-3} + \varphi_1 \epsilon_{s_n-1} + \epsilon_{s_n}}{y_{s_n-2}} \rightarrow 0.$$

Potom máme

$$\frac{y_{s_{n-3}}}{y_{s_{n-2}}} \rightarrow 0, \quad \frac{\epsilon_{s_{n-1}}}{y_{s_{n-2}}} \rightarrow 0, \quad \frac{\epsilon_{s_n}}{y_{s_{n-2}}} \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

Úpravami dostávame

$$\begin{aligned} \frac{y_{s_n}}{y_{s_{n-1}}} &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2 y_{s_{n-2}} + \epsilon_{s_n}}{y_{s_{n-1}}} = \varphi_1 + \frac{\varphi_2 \varphi_1 (y_{s_{n-2}} + \epsilon_{s_n}/\varphi_2)}{y_{s_{n-1}}} = \\ &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2 y_{s_{n-1}}}{\varphi_1 y_{s_{n-1}}} + \frac{\varphi_2 - y_{s_{n-1}} + \varphi_1 y_{s_{n-2}} + \epsilon_{s_n} \varphi_1 / \varphi_2}{y_{s_{n-1}}} = \\ &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{1 - \varphi_2 y_{s_{n-1}} + \varphi_1 \varphi_2 y_{s_{n-2}} + \varphi_1 \epsilon_{s_n}}{y_{s_{n-1}}} = \\ &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{1 - \varphi_2 (\varphi_1 y_{s_{n-2}} + \varphi_2 y_{s_{n-3}} + \epsilon_{s_{n-1}}) + \varphi_1 \varphi_2 y_{s_{n-2}} + \varphi_1 \epsilon_{s_n}}{y_{s_{n-1}}} = \\ &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{1 - \varphi_1 \varphi_2 y_{s_{n-2}} - \varphi_2^2 y_{s_{n-3}} - \varphi_2 \epsilon_{s_{n-1}} + \varphi_1 \varphi_2 y_{s_{n-2}} + \varphi_1 \epsilon_{s_n}}{y_{s_{n-1}}} = \\ &= \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{1 - \varphi_2^2 y_{s_{n-3}} - \varphi_2 \epsilon_{s_{n-1}} + \varphi_1 \epsilon_{s_n}}{\varphi_1 y_{s_{n-2}} + \varphi_2 y_{s_{n-3}} + \epsilon_{s_{n-1}}} = \\ &= \varphi_1 + \varphi_2 / \varphi_1 + Q_n, \end{aligned}$$

kde

$$Q_n = \varphi_1^{-1} \frac{\varphi_1 \epsilon_{s_n} - \varphi_2^2 y_{s_{n-3}} - \varphi_2 \epsilon_{s_{n-1}}}{\varphi_1 y_{s_{n-2}} + \varphi_2 y_{s_{n-3}} + \epsilon_{s_{n-1}}}.$$

Pre menovateľ Q_n platí

$$\varphi_1^2 y_{s_{n-2}} + \varphi_1 \varphi_2 y_{s_{n-3}} + \varphi_1 \epsilon_{s_{n-1}} \geq \varphi_1^2 y_{s_{n-2}}.$$

Máme teda

$$|Q_n| \leq \varphi_1^{-1} \frac{\epsilon_{s_n}}{y_{s_{n-2}}} + \frac{\varphi_2^2 y_{s_{n-3}}}{\varphi_1^2 y_{s_{n-2}}} + \frac{\varphi_2 \epsilon_{s_{n-1}}}{\varphi_1^2 y_{s_{n-2}}} \rightarrow 0 \text{ podľa (2.17).}$$

Na obrázku môžeme vidieť ako sa priamka p približuje k priamke r .

Ďalej dokážeme, že žiadna z priamok (2.16) pre $t \geq 3$ neprejde cez bod vo vnútri M . Z (2.10) plynie $y_t/y_{t-2} \geq \varphi_2 + \varphi_1^2$. Označme zvislú súradnicu priesečníku p a q ako z . Jednoduchým výpočtom dostaneme

$$\begin{aligned} p : \beta_2 &= -\frac{y_{t-1}}{y_{t-2}} \beta_1 + \frac{y_t}{y_{t-2}} \\ q : \beta_1 &= \varphi_1 \\ z &= \frac{y_t - \varphi_1 y_{t-1}}{y_{t-2}} = \frac{\varphi_2 y_{t-2} + \epsilon_t}{y_{t-2}} \geq \varphi_2. \end{aligned}$$

Takže p nepretne M .

Ešte je nevyhnutné ukázať, že

$$\max_{(\beta_1, \beta_2) \in M} (\beta_1 + \beta_2)$$

dosiahneme v $\beta_1 = \varphi_1, \beta_2 = \varphi_2$. Je zrejmé, že maximum dosiahneme v niektorom vrchole M . Pretože

$$\varphi_1 + \varphi_2 > \varphi_1^2 + \varphi_2, \quad \varphi_1 + \varphi_2 > \varphi_1, \quad \varphi_1 + \varphi_2 > 0,$$

dokázali sme, že maximum bolo dosiahnuté v bode (φ_1, φ_2) .

Dôkazy ostatných troch prípadov, (ii) $\varphi_1 > 0, \varphi_2 = 0$, (iii) $\varphi_1 = 0, \varphi_2 > 0$, (iv) $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$, je možné predviesť analogicky.

3. Vektorová autoregresia

3.1 Základné pojmy

Väčšinu definícií a postupov pre jednorozmerné rady môžeme zobecniť pre viacroz-
merné rady, kde y_t sú m -rozmerné náhodné vektory

$$y_t = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tm})'.$$

Slabá stacionarita (ďalej len stacionarita) časovej rady y_t je definovaná rovnako, tj. príslušný proces je invariantný voči posunom v čase v rámci momentov do druhého rádu, tj.

$$E(y_t) = \mu = konst; \quad (3.1)$$

$$cov(y_s, y_t) = E(y_s - \mu)(y_t - \mu)' = cov(y_{s+h}, y_{t+h}) \text{ pre ľubovoľné } h, s, t \in Z, \quad (3.2)$$

takže

$$var(y_t) = \Sigma_{yy} = konst. \quad (3.3)$$

Analogicky sa definuje tiež **maticová autokovariančná funkcia**

$$\Gamma_k = cov(y_t, y_{t-k}) = E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)', \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (3.4)$$

a **maticová autokorelačná funkcia**

$$\rho_k = D^{-1/2} \Gamma_k D^{-1/2}, \quad k = \dots, -1, 0, 1, \dots, \quad (3.5)$$

kde $D = diag \Sigma_{yy} = diag \{var(y_{t1}), \dots, var(y_{tm})\}$ a *diag* značí diagonálnu maticu.

Prvok $\gamma_{ij}(k)$ na pozícií (i, j) matice $\Gamma_k = (\gamma_{ij}(k))$ sa nazýva **vzájomná kovari-
ančná funkcia** časových rád y_{ti} a y_{tj} . Analogicky značíme **vzájomnú korelačnú
funkciu** $\rho_{ij}(k)$. Zrejme je

$$\Gamma_k = \Gamma_{-k}', \quad \rho_k = \rho_{-k}' \quad (3.6)$$

(tj. $\gamma_{ij}(k) = \gamma_{ji}(-k)$ a $\rho_{ij}(k) = \rho_{ji}(-k)$). Odhad autokovariančnej funkcie na
základe pozorovaných hodnôt y_1, \dots, y_n je

$$C_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})', \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.7)$$

a odhad autokorelačnej funkcie

$$R_k = \hat{D}^{-1/2} C_k \hat{D}^{-1/2}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.8)$$

diagonálna matica \hat{D} má diagonálu zhodnú s diagonálou matice C_0 .

Okrem vzájomnej korelačnej funkcie $\rho_{ij}(k)$ sa používa tiež **vzájomná parciálna
korelačná funkcia** značená ako $\rho_{ij}(k, k)$ a definovaná ako parciálny korelačný
koeficient medzi y_{it} a $y_{j,t-k}$ pri pevných hodnotách $y_{t-k+1}, \dots, y_{t-1}$. Jej odhadom
je odhadnutý parameter $\hat{\Phi}_{ij}(kk)$ v modeli s maticovými koeficientami

$$y_t = \Phi(11)y_{t-1} + \dots + \Phi(kk)y_{t-k} + \epsilon_t, \quad (3.9)$$

kde **viacrozmerný biely šum** ϵ_t je analógiou jednorozmerného bieleho šumu, tj. zložky vektorov ϵ_t majú nulovú strednú hodnotu, sú v rôznych časoch navzájom nekorelované, ale v rovnakom čase môžu byť korelované s konštantnou pozitívne definitnou rozptylovou maticou Σ

$$E(\epsilon_t) = 0, \quad E(\epsilon_s \epsilon_t') = \Sigma \text{ pre } s = t, \quad E(\epsilon_s \epsilon_t') \text{ je nulová matica pre } s \neq t. \quad (3.10)$$

Nadalej budeme v kapitole 3 predpokladať procesy s nulovou strednou hodnotou.

Model (3.9) je príkladom **viacrozmerného lineárneho procesu**, ktorý má analogicky k jednorozmernému lineárnemu procesu obecný tvar

$$y_t = \epsilon_t + \Psi_1 \epsilon_{t-1} + \Psi_2 \epsilon_{t-2} + \dots = (1 + \Psi_1 B + \Psi_2 B^2 + \dots) \epsilon_t = \Psi(B) \epsilon_t \quad (3.11)$$

pri nasledovnej požiadavke na maticové koeficienty pre dosiahnutie stacionarity: matice koeficientov Ψ_s , kde $s = 1, \dots, m$, musia byť štvorcové spočetné v zmysle že každá z $m \times m$ postupností ich prvkov $\psi_{ij,s}$ je spočetná v štvorcoch tj.

$$\sum_{s=0}^{\infty} \psi_{ij,s}^2 < \infty \text{ pre } i, j = 1, 2, \dots, m$$

3.2 Vektorové autoregresné procesy

Vektorová autoregresia je zobecnením jednorozmerného autoregresného procesu (1.9). **Vektorový autoregresný model rádu** p značený ako VAR(p) má tvar

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \epsilon_t, \quad (3.12)$$

alebo

$$(I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p) y_t = \epsilon_t \quad (3.13)$$

kde ϵ_t je m -rozmerný biely šum. Postačujúcou podmienkou stacionarity a lineariry procesu je, že všetky korene polynómu

$$\Phi(z) = |I - \Phi_1 z - \dots - \Phi_p z^p| \quad (3.14)$$

ležia mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine. Symbol $|A|$ označuje determinant matice A .

Autokovariančná funkcia (3.4) spĺňa viacrozmernú verziu Yule-Walkerových rovníc

$$\Gamma_k = \Phi_1' \Gamma_{k-1} + \dots + \Phi_p' \Gamma_{k-p} \text{ pre } k > 0 \quad (3.15)$$

a

$$\Gamma_0 = \Phi_1' \Gamma_1' + \dots + \Phi_p' \Gamma_p' + \Sigma. \quad (3.16)$$

Špeciálnym prípadom je

Model **VAR(1)** v tvare

$$y_t = \Phi y_{t-1} + \epsilon_t \quad (3.17)$$

$$\text{alebo } (I - \Phi_1 B) y_t = \epsilon_t \quad (3.18)$$

Pre $m = 2$

$$\begin{bmatrix} y_{t1} \\ y_{t2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1,1} \\ y_{t-1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{t1} \\ \epsilon_{t2} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

alebo

$$\begin{aligned} y_{t1} &= \phi_{11}y_{t-1,1} + \phi_{12}y_{t-1,2} + \epsilon_{t1} \\ y_{t2} &= \phi_{21}y_{t-1,1} + \phi_{22}y_{t-1,2} + \epsilon_{t2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Podmienku pre stacionaritu modelu VAR(1) možno formulovať tak, že všetkých m vlastných čísel matice Φ leží v jednotkovom kruhu v komplexnej rovine, čo je ekvivalentné s tým, že všetkých m koreňov autoregresného maticového polynómu $\Phi(z) = |I - \Phi \cdot z|$ leží mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine.

Tento proces môžeme zapísať v tvare m -rozmerného lineárneho procesu

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \Phi\epsilon_{t-1} + \Phi^2\epsilon_{t-2} + \Phi^3\epsilon_{t-3} + \dots, \quad (3.21)$$

takže jeho rozptylová matica je

$$\Gamma_0 = \text{var}(y_t) = \Sigma + \Phi\Sigma\Phi' + \Phi^2\Sigma(\Phi^2)' + \dots \quad (3.22)$$

a autokovariančná funkcia spĺňa

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= E[y_t y_{t-k}'] \\ &= E[(\Phi y_{t-1} + \epsilon_t) y_{t-k}'] \\ &= \Phi E y_{t-1} y_{t-k}' + E \epsilon_t y_{t-k}' \\ &= \begin{cases} \Phi\Gamma_{-1} + \Sigma = \Phi\Gamma_1' + \Sigma, & k = 0, \\ \Phi\Gamma_{k-1} = \Phi^k\Gamma_0, & k \geq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Pre $k = 1$ máme $\Gamma_1 = \Phi\Gamma_0$ a teda

$$\Phi = \Gamma_1\Gamma_0^{-1} \quad (3.24)$$

a

$$\Sigma = \Gamma_0 - \Gamma_1\Gamma_0^{-1}\Gamma_1'. \quad (3.25)$$

Model VAR(2) v maticovom tvare (4.11) môžeme tiež rozpísať po zložkách

$$\begin{aligned} y_{t1} &= \phi_{11}y_{t-1,1} + \phi_{12}y_{t-1,2} + \varphi_{11}y_{t-2,1} + \varphi_{12}y_{t-2,2} + \epsilon_{t1} \\ y_{t2} &= \phi_{21}y_{t-1,1} + \phi_{22}y_{t-1,2} + \varphi_{21}y_{t-2,1} + \varphi_{22}y_{t-2,2} + \epsilon_{t2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3 Identifikácia modelu VAR

Rád p možno síce identifikovať zobecnením parciálneho korelogramu pre viacroz-
merný prípad, čo je ale pomerne pracné. V praxi preto používame identifikačné
postupy založené na štatistických testoch alebo informačných kritériách.

Štatistickým identifikačným testom je najčastejšie LR-test s kritickým oborom

$$LR = n(\ln |\hat{\Sigma}_R| - \ln |\hat{\Sigma}_U|) > \chi_{1-\alpha}^2(qm^2), \quad (3.27)$$

kde $\hat{\Sigma}_R$ je odhadnutá rozptylová matica konštruovaná z odhadnutej reziduálnej zložky v obmedzenom modeli s nulovými parametrickými maticami Φ_i pre posledných q oneskorení, pričom pôvodnému neobmedzenému modelu zodpovedá odhad $\hat{\Sigma}_U$.

Čo sa týka informačných kritérií pre určenie rádu modelu VAR, používajú sa analogicky ako pri jednorozmerných časových radách. Napríklad m -rozmerná verzia kritéria AIC je

$$AIC(p) = \ln \left| \hat{\Sigma}_p \right| + 2m^2 \frac{p}{n}, \quad (3.28)$$

kde p je rád AR, n dĺžka rady, $\hat{\Sigma}_p$ odhadnutá rozptylová matica reziduálnej zložky v modeli VAR(p). Volíme rád p modelu VAR pri ktorom je hodnota AIC minimalizovaná.

3.4 Odhad modelu VAR

Model VAR môžeme odhadovať ML-metódou (tj. pomocou maximálnej vierohodnosti za predpokladu o type rozdelenia bieleho šumu), ale tiež klasickou OLS metódou. Za rutinných podmienok sú oba postupy asymptoticky ekvivalentné a odhady majú asymptoticky normálne rozdelenie.

Zlogaritmovaná funkcia maximálnej vierohodnosti je za predpokladu normality bieleho šumu

$$\begin{aligned} \ln L(\Phi, \Sigma | y) &= -\frac{nm}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \epsilon_t' \Sigma^{-1} \epsilon_t \\ &= -\frac{nm}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} S(\Phi) \end{aligned} \quad (3.29)$$

kde

$$\epsilon_t = y_t - \Phi_1 y_{t-1} - \dots - \Phi_p y_{t-p} \quad (3.30)$$

a

$$S(\Phi) = \sum_{t=1}^n \epsilon_t \epsilon_t'. \quad (3.31)$$

Ak by sme nemali k dispozícii y_t pre $t \leq 0$, môžeme alternatívne zvoliť podmienenú log ML funkciu

$$\ln L_*(\Phi, \Sigma | y) = -\frac{n-p}{2} \ln |(2\pi)\Sigma| - \frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} S_*(\Phi) \quad (3.32)$$

kde

$$S_*(\Sigma) = \sum_{t=p+1}^n \epsilon_t \epsilon_t'. \quad (3.33)$$

3.5 Diagnostika modelu VAR

V rámci diagnostiky modelu VAR sa v prvom rade kontroluje splnenie podmienky stacionarity (3.14). Potom sa aplikujú diagnostické procedúry na časovú nekorelovanosť vo vypočítanom bielom šume.

Jedna z nich je Quenouilleova aproximácia (1.21), kde sa výška kritickej hodnoty $2\sqrt{(1/n)}$ na hladine 5 percent aplikuje na jednotlivé odhadnuté autokorelácie a vzájomné korelácie vypočítaného bieleho šumu, ktoré majú nenulové oneskorenie.

Ďalšou je m -rozmerná metóda Q -testu s kritickým oborom (viď napr. (1.30))

$$Q_m = n^2 \sum_{k=1}^K \frac{1}{n-k} \text{tr} \left(\hat{\Gamma}'_k \hat{\Gamma}_0^{-1} \hat{\Gamma}_k \hat{\Gamma}_0^{-1} \right) \geq \chi^2_{1-\alpha} (m^2(K-p)) \quad (3.34)$$

pre rôzne volené K (skúšame najmä $K \approx \sqrt{n}$)

Môžeme použiť aj ďalšie testy, napríklad LM test, test Jarque-Bera ako je uvedené v [6].

4. Odhady v nezáporných mnohorozmerných časových radách

4.1 Nezáporný proces VAR(1)

Majme m -dimenzionálny proces $y_t = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tm})'$ daný ako

$$y_t = \Phi y_{t-1} + \epsilon_t \quad (4.1)$$

kde $\Phi = (\phi_{ij})$ je matica $m \times m$ a $\epsilon_t = (\epsilon_{t1}, \epsilon_{t2}, \dots, \epsilon_{tm})'$ sú náhodné vektory. Zavedieme nasledovné predpoklady:

- P1. Stacionarita procesu y_t viď kapitola 3.2.
- P2. Náhodné vektory ϵ_t sú nezávislé, rovnako rozdelené, s distribučnou funkciou F .
- P3. Náhodné vektory ϵ_t majú konečné druhé momenty.

Tieto predpoklady nám zabezpečujú existenciu stacionárneho riešenia y_t rovnice (4.1), ktoré je možné zapísať v tvare

$$y_t = \epsilon_t + \Phi \epsilon_{t-1} + \Phi^2 \epsilon_{t-2} + \dots \quad (4.2)$$

Označme $\Phi^k = (\phi_{ij}^{(k)})$. Potom môžeme (4.2) vyjadriť ako

$$y_{ti} = \epsilon_{ti} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m \phi_{ij}^{(k)} \epsilon_{t-k,j} \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Poznamenajme, že za platnosti predpokladov P1-P3 máme

$$\sum_k \sum_i \sum_j \left| \phi_{ij}^{(k)} \right| < \infty \quad (4.4)$$

Označme $\mu_i = E y_{ti}$, $i = 1, \dots, m$.

Ak sú všetky prvky matice Φ nezáporné rovnako ako všetky veličiny ϵ_{ti} , potom je zrejmé $y_{ti} \geq 0$ pre všetky t a i . Tieto postačujúce podmienky však obecné nie sú nutné. Anděl uvádza v článku [4] nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 5: Nech $\epsilon_{t1}, \dots, \epsilon_{tm}$ sú nezávislé nezáporné náhodné veličiny. Predpokladajme že $P(\epsilon_{ti} < \delta) > 0$ pre $i = 1, \dots, m$ a pre ľubovoľné $\delta > 0$ a že $P(\epsilon_i = 0) < 1$ pre $i = 1, \dots, m$. Potom má proces VAR(1) definovaný v (4.1) všetky zložky nezáporné práve vtedy keď sú všetky prvky ϕ_{ij} matice Φ nezáporné.

Dôkaz možno nájsť v [4].

Poznámka 1: Ak sú všetky veličiny ϵ_{tj} nezáporné, potom môžu byť všetky premenné y_{ti} nezáporné napriek tomu, že sú niektoré prvky ϕ_{ij} matice Φ záporné.

Poznámka 2: Ak sú všetky prvky ϕ_{ij} matice Φ kladné, potom môžu byť všetky premenné y_{ti} kladné, aj keď je niektorá zložka náhodného vektoru ϵ_t záporná.

Konkrétne príklady k poznámkam 1 a 2 nájdeme v článku [4].

Ďalej predpokladáme nielen P1-P3, ale aj nasledujúce P4-P7.

- P4. Všetky prvky ϕ_{ij} matice Φ sú nezáporné.
- P5. Náhodné vektory ϵ_t majú len nezáporné zložky.
- P6. $P(\epsilon_{t1} < z, \dots, \epsilon_{tm} < z) > 0$ pre všetky $z > 0$.
- P7. Existuje číslo $\gamma > 0$ také, že pre každé $\eta > 0$ a pre každé $i \in \{1, \dots, m\}$

$$P(\epsilon_{t1} < \eta, \dots, \epsilon_{t,i-1} < \eta, \epsilon_{ti} > \gamma, \epsilon_{t,i+1} < \eta, \dots, \epsilon_{tm} < \eta) > 0.$$

Ako sme už spomenuli vyššie, P1-P5 zaisťujú nezápornosť všetkých premenných y_{ti} .

Poznámka 3: Nech $m = 2$. Ak platí P4, potom má $|\Phi - \lambda I|$ len reálne korene, pretože

$$|\Phi - \lambda I| = \lambda^2 - (\phi_{11} + \phi_{22})\lambda + \phi_{11}\phi_{22} - \phi_{12}\phi_{21}$$

takže korene sú

$$\lambda_{12} = \frac{1}{2} \left\{ \phi_{11} + \phi_{22} \pm [(\phi_{11} - \phi_{22})^2 + 4\phi_{12}\phi_{21}]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Poznámka 4: Uvážme prípad $m = 2$. Nech ξ_{ti} sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s exponenciálnym rozdelením kde $i = 1, 2, 3$ a $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Ak $\epsilon_{t1} = \xi_{t1} + \xi_{t3}$, $\epsilon_{t2} = \xi_{t2} + \xi_{t3}$, potom je splnený predpoklad P7, pretože

$$\begin{aligned} & P(\xi_{t1} + \xi_{t3} < \eta, \xi_{t2} + \xi_{t3} > \gamma) \geq \\ & \geq P\left(\xi_{t1} < \frac{\eta}{2}, \xi_{t3} < \frac{\eta}{2}, \xi_{t2} > \gamma\right) = \\ & = P\left(\xi_{t1} < \frac{\eta}{2}\right) P\left(\xi_{t3} < \frac{\eta}{2}\right) P(\xi_{t3} > \gamma) > 0 \end{aligned}$$

pre každé $\eta, \gamma > 0$. Ak $\epsilon_{t1} = \xi_{t1} + \xi_{t2}$, $\epsilon_{t2} = \xi_{t1}$, potom $P(\xi_{t1} + \xi_{t2} < \eta, \xi_{t1} > \gamma) = 0$ pre každé $0 < \eta < \gamma$, a preto nie je predpoklad P7 splnený.

Tvrdenie 6: Definujme

$$\phi_{ij}^* = \min_{2 \leq t \leq n} (y_{ti}/y_{t-1,j})$$

pre $i, j = 1, \dots, m$. Potom pre $n \rightarrow \infty$ a pre každé $i, j \in \{1, \dots, m\}$ platí $\phi_{ij}^* \rightarrow \phi_{ij}$ skoro určite.

Dôkaz: Najprv zväžme prípad $i = j = 1$. Pretože

$$y_{t1} = \sum_{\beta=1}^m \phi_{1\beta} y_{t-1,\beta} + \epsilon_{t1},$$

dostávame

$$\phi_{11}^* = \phi_{11} + \min_{2 \leq t \leq n} \left(\sum_{\beta=2}^m \phi_{1\beta} y_{t-1,\beta} + \epsilon_{t1} \right) / y_{t-1,1}.$$

Pretože $y_{t-1,1} \geq \epsilon_{t-1,1}$, stačí ukázať, že

$$\min_{2 \leq t \leq n} \left(\sum_{\beta=2}^m \phi_{1\beta} y_{t-1,\beta} + \epsilon_{t1} \right) / \epsilon_{t-1,1} \rightarrow 0 \text{ s.u. pre } n \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Nech $\delta > 0$ je daná ľubovoľne. Uvažujme náhodné javy

$$Q_t = \left[\left(\sum_{\beta=2}^m \phi_{1\beta} y_{t-1,\beta} + \epsilon_{t1} \right) / \epsilon_{t-1,1} < \delta \right].$$

S využitím (4.3) môžeme písať

$$\begin{aligned} Q_t = & \left[\epsilon_{t1} + \sum_{\beta=2}^m \phi_{1\beta} \left(\epsilon_{t-1,\beta} + \sum_{k=2}^n \sum_{r=1}^m \phi_{\beta r}^{(k)} \epsilon_{t-k,r} \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{\beta=2}^m \phi_{1\beta} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{r=1}^m \phi_{\beta r}^{(k)} \epsilon_{t-k,r} < \delta \epsilon_{t-1,1} \right]. \end{aligned}$$

Označme $A = 2m[1 + (m-1)(n-1)]$. Je zrejmé, že $Q_t \supset Q_{tn1} \cap Q_{tn2}$, kde

$$\begin{aligned} Q_{tn1} = & \{ \epsilon_{t-1,1} > \gamma, \epsilon_{t1} < \delta\gamma/A, \phi_{1\beta} \epsilon_{t-1,\beta} < \delta\gamma/A \text{ pre } \beta = 2, \dots, m; \\ & \phi_{1\beta} \phi_{\beta r}^{(k)} \epsilon_{t-k,r} < \delta\gamma/A \text{ pre } \beta = 2, \dots, m, k = 2, \dots, n, r = 1, \dots, m \}. \\ Q_{tn2} = & \{ Z_{tn} < \delta\gamma/2 \}, \end{aligned}$$

kde

$$Z_{tn} = \sum_{\beta=2}^m \phi_{1\beta} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{r=1}^m \phi_{\beta r}^{(k)} \epsilon_{t-k,r}.$$

Zo (4.4) vidíme, že existuje $\Lambda > 0$ také, že

$$0 \leq \phi_{ij}^{(k)} < \Lambda \quad \text{pre všetky } i, j, k.$$

Potom $P(Q_{tn1}) \geq \pi_n$ kde

$$\begin{aligned} \pi_n = & P(\epsilon_{t1} < \delta\gamma/A) P \left(\epsilon_{t-1,1} > \gamma, \epsilon_{t-1,\beta} < \frac{\delta\gamma}{A\Lambda} \text{ pre } \beta = 2, \dots, m \right) \cdot \\ & \cdot \left[P \left(\epsilon_{t-2,r} < \frac{\delta\gamma}{A\Lambda^2} \text{ pre } r = 1, \dots, m \right) \right]^{n-1}. \end{aligned}$$

Naše predpoklady implikujú že ani $P(Q_{tn1})$ ani π_n nezáležia na t . Hodnota γ môže byť zvolená tak, aby $\pi_n > 0$. Je ľahko dokázateľné, že $EZ_{tn} \rightarrow 0$ a $\text{var}Z_{tn} \rightarrow 0$ pre $n \rightarrow \infty$. Preto $P(Q_{tn2}) \rightarrow 1$ a $P(Q_{tn2})$ nezáleží na t . Nech w_n je najmenšie celé číslo také, že $w_n\pi_n \geq 1$, $n = 2, 3, \dots$. Nech S_2 obsahuje j_2 trojíc

$$(1, 2, 3), \dots, (3j_2 - 2, 3j_2 - 1, 3j_2),$$

S_3 obsahuje j_3 štvoríc

$$(3j_2 + 1, 3j_2 + 2, 3j_2 + 3, 3j_2 + 4), \dots, (3j_2 + 4j_3 - 3, \dots, 3j_2 + 4j_3)$$

a tak ďalej. Posledné čísla trojíc, štvoríc atď. označíme ako t_1, t_2, \dots . Ak $t_i \in S_n$, potom definujeme

$$A_i = Q_{t_in1}, \quad B_i = Q_{t_in2}.$$

Náhodné javy A_1, A_2, \dots sú nezávislé,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \geq \sum_{n=2}^{\infty} w_n\pi_n = \infty,$$

javy A_i a B_i sú nezávislé pre každé i a $P(B_i) \rightarrow 1$ pre $i \rightarrow \infty$. Z vety 8.1 v článku [4] dostávame, že s pravdepodobnosťou 1 nastane nekonečne veľa javov $A_i \cap B_i$ a preto aj nekonečne veľa javov Q_t , odkiaľ plynie (4.5). Dôkaz pre ostatné odhady ϕ_{ij}^* je analogický. V článku [4] je uvedené, že podobne ako v jednorozmernom AR(2), aj tu je konvergencia podielových odhadov zavedených v tvrdení 6 veľmi pomalá. Preto bola venovaná pozornosť tiež vierohodnostnému prístupu.

Pre zjednodušenie značenia a dôkazov ďalej ukážeme procedúru **odhadovania parametrov** len pre prípad $m = 2$. Pre vyššie m je postup zrejme podobný.

Motivácia: Nech $\epsilon_{t1}, \epsilon_{t2}$ sú nezávislé náhodné veličiny také, že platí $\epsilon_{t1} \sim Ex(\lambda_1)$, $\epsilon_{t2} \sim Ex(\lambda_2)$. Potom je podmienená vierohodnostná funkcia y_2, \dots, y_n pri danom y_1

$$\lambda_1^{-n+1} \exp \left\{ - \sum_{t=2}^n (y_{t1} - \phi_{11}y_{t-1,1} - \phi_{12}y_{t-1,2}) / \lambda_1 \right\} \times \\ \times \lambda_2^{-n+1} \exp \left\{ - \sum_{t=2}^n (y_{t2} - \phi_{21}y_{t-1,1} - \phi_{22}y_{t-1,2}) / \lambda_2 \right\}$$

pre

$$y_{t1} - \phi_{11}y_{t-1,1} - \phi_{12}y_{t-1,2} \geq 0, \quad t = 2, \dots, n, \quad \phi_{11} \geq 0, \phi_{12} \geq 0, \quad (4.6)$$

$$y_{t2} - \phi_{21}y_{t-1,1} - \phi_{22}y_{t-1,2} \geq 0, \quad t = 2, \dots, n, \quad \phi_{21} \geq 0, \phi_{22} \geq 0. \quad (4.7)$$

Podmienená vierohodnosť je maximálna pre také ϕ_{11} a ϕ_{12} , ktoré maximalizujú

$$\phi_{11} \sum_{t=2}^n y_{t-1,1} + \phi_{12} \sum_{t=2}^n y_{t-1,2} \quad (4.8)$$

pod podmienkou (4.6) a pre také ϕ_{21} a ϕ_{22} , ktoré maximalizujú

$$\phi_{21} \sum_{t=2}^n y_{t-1,1} + \phi_{22} \sum_{t=2}^n y_{t-1,2} \quad (4.9)$$

pod podmienkou (4.7). Definujme

$$y_{n1}^0 = n^{-1} \sum_{t=1}^n y_{t1}, \quad y_{n2}^0 = n^{-1} \sum_{t=1}^n y_{t2}. \quad (4.10)$$

Pre veľké n možno očakávať, že maximalizácia (4.8) a (4.9) bude takmer ekvivalentná maximalizácii $y_{n1}^0 \phi_{11} + y_{n2}^0 \phi_{12}$ a $y_{n1}^0 \phi_{21} + y_{n2}^0 \phi_{22}$.

Tvrdenie 7: Nech ϕ_{i1}^+ , ϕ_{i2}^+ je riešenie úlohy lineárneho programovania

$$\begin{aligned} & \max \phi_{11}^+ y_{n1}^0 + \phi_{12}^+ y_{n2}^0, \text{ za podmienky (4.6),} \\ & \max \phi_{21}^+ y_{n1}^0 + \phi_{22}^+ y_{n2}^0, \text{ za podmienky (4.7)} \end{aligned}$$

Potom pre všetky $i, j = 1, 2$ a $n \rightarrow \infty$ platí, $\phi_{ij}^+ \rightarrow \phi_{ij}$ skoro určite.

Dôkaz je podobný ako v jednorozmernom prípade tvrdenia 4. Podrobne je rozpisovaný v [4]. Rovnako ako v jednorozmernom prípade potvrdili simulácie možnosť použitia uvedeného spôsobu odhadovania aj pre biely šum s iným rozdelením.

4.2 Nezáporný proces VAR(2)

V článku [13] je navrhnutý vierohodnostný prístup pre nájdenie odhadov parametrov v nezápornom AR(2). Majme teraz proces $y_t = (y_{t1}, y_{t2}, \dots, y_{tm})'$ daný ako

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \epsilon_t \quad (4.11)$$

kde $\Phi_1 = (\phi_{ij})$ a $\Phi_2 = (\varphi_{ij})$ sú matice $m \times m$.

Nadalej budeme pokračovať s prípadom $m = 2$. Ak majú nezávislé zložky bieleho šumu ϵ_t exponenciálne rozdelenie s parametrami λ_1, λ_2 , podmienená vierohodnostná funkcia y_3, \dots, y_n pri daných y_1, y_2 je

$$\begin{aligned} & \lambda_1^{-n+2} \exp \left(\frac{-1}{\lambda_1} \sum_{t=3}^n (y_{t1} - \phi_{11} y_{t-1,1} - \phi_{12} y_{t-1,2} - \varphi_{11} y_{t-2,1} - \varphi_{12} y_{t-2,2}) \right) \times \\ & \times \lambda_2^{-n+2} \exp \left(\frac{-1}{\lambda_2} \sum_{t=3}^n (y_{t2} - \phi_{21} y_{t-1,1} - \phi_{22} y_{t-1,2} - \varphi_{21} y_{t-2,1} - \varphi_{22} y_{t-2,2}) \right). \end{aligned}$$

Maximalizáciou tejto funkcie pod podmienkami

$$\begin{aligned} y_{t1} - \phi_{11} y_{t-1,1} - \phi_{12} y_{t-1,2} - \varphi_{11} y_{t-2,1} - \varphi_{12} y_{t-2,2} & \geq 0, \quad t = 3, \dots, n \\ y_{t2} - \phi_{21} y_{t-1,1} - \phi_{22} y_{t-1,2} - \varphi_{21} y_{t-2,1} - \varphi_{22} y_{t-2,2} & \geq 0, \quad t = 3, \dots, n \\ \phi_{ij} & \geq 0, \quad \varphi_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

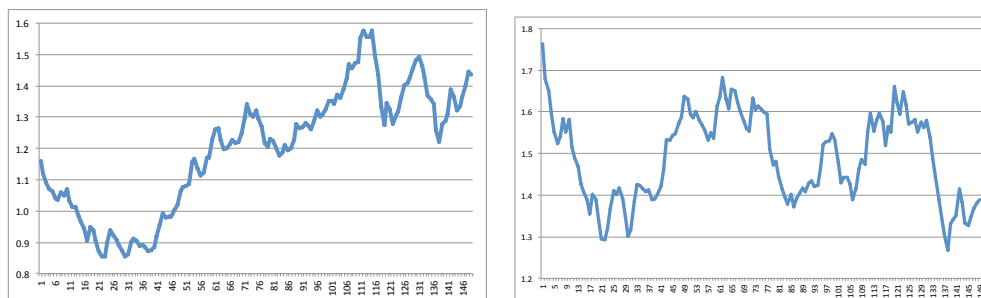
dostávame odhady parametrov ϕ_{ij} , φ_{ij} , $i, j = 1, 2$. Podobne ako v prípade VAR(1) môžeme vyriešiť problém lineárneho programovania maximalizáciou

$$\begin{aligned}(\phi_{11} + \varphi_{11})y_{n,1}^0 + (\phi_{12} + \varphi_{12})y_{n,2}^0, \\ (\phi_{21} + \varphi_{21})y_{n,1}^0 + (\phi_{22} + \varphi_{22})y_{n,2}^0,\end{aligned}\tag{4.13}$$

za podmienok (4.12), kde $y_{n,1}^0$ a $y_{n,2}^0$ sú dané predpisom (4.10). Pri dostatočne veľkom n dostaneme takmer totožný výsledok ako pri maximalizácií pôvodnej funkcie.

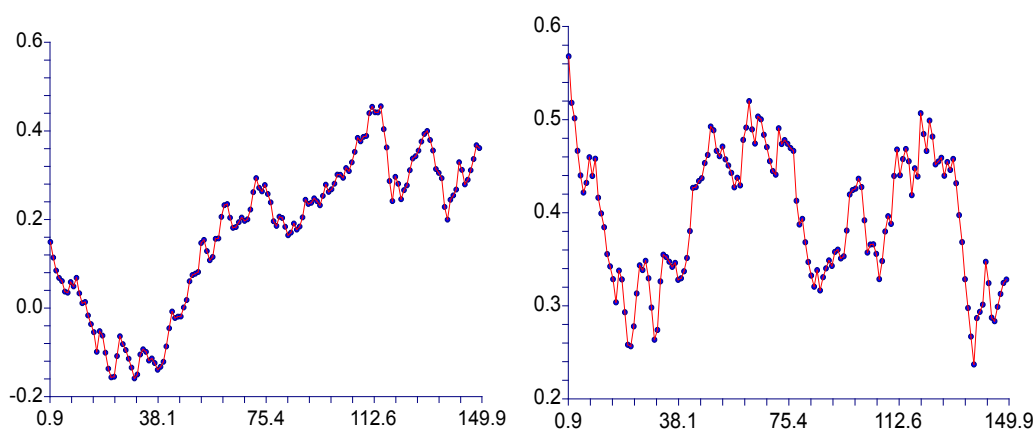
5. Praktická časť

V tejto časti budeme modelovať dve časové rady získané z [7]. Jedná sa o mesačné priemery kurzov mien USD/EUR a CAD/EUR za obdobie od prijatia Eura prvými členskými štátmi EÚ (Január 1999) až do mája 2011 tj. s dĺžkou 149 pozorovaní. Pôvodné rady môžeme vidieť na obrázku 5.1. Priemer rady USD/EUR



Obrázek 5.1: Grafy pôvodných dát EUR/USD vľavo a EUR/CAD vpravo

je 1.1959, priemer rady CAD/EUR je 1.4905. Dáta sme upravili logaritmickou transformáciou, čím sme znížili rozptyl, v našom prípade sa však po transformácii nezachovala nezápornosť rady. Priemery po transformácii sú 0.1650 pre USD/EUR a 0.3967 pre CAD/EUR. Transformované rady sú zobrazené na obrázku 5.2. Po transformácii sme ešte od rád odčítali priemer, čím sme dosiahli nulovú strednú hodnotu.



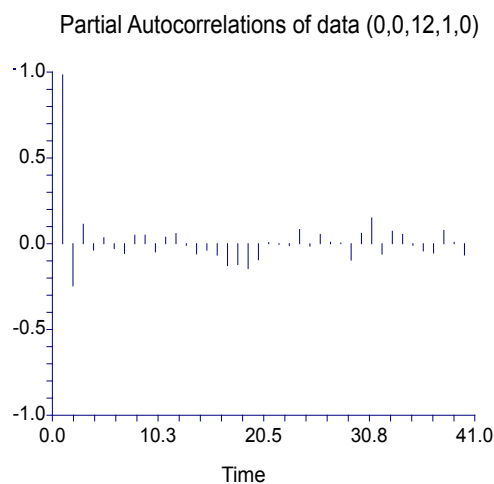
Obrázek 5.2: Transformované dáta EUR/USD a EUR/CAD

5.1 Jednorozmerné procesy

Jednorozmerné modely sme analyzovali v softvéri NCSS. Pre analýzu kvality predpovedí sme dáta skrátili o 20 pozorovaní tj. po september 2009 a následne konštruovali predpovede do mája 2011. Porovnanie predpovedí jednotlivých modelov so skutočným priebehom nám ukáže kvalitu predpovedania u každej metódy.

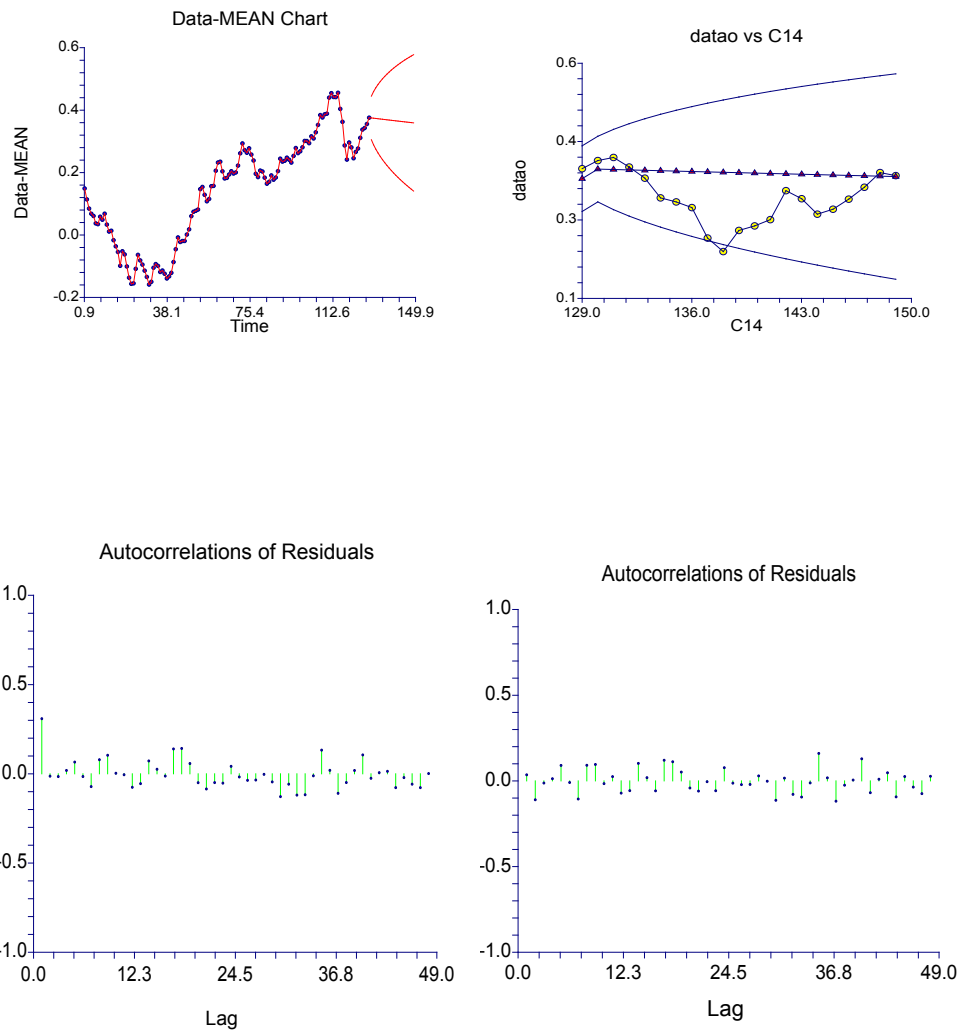
5.1.1 USD/EUR

Pre analýzu dát sme pozorovali autokorelácie a parciálne autokorelácie rady USD/EUR. Hranica významnosti pre ACF a PACF pre $n = 149$ vyšla 0.16385 (podľa 1.20), prekročili ju prvé dve hodnoty PACF, ktorá je teda useknutá v bode 2, takže najvhodnejší sa javí model AR(2). Vyskúšame najprv model AR(1).



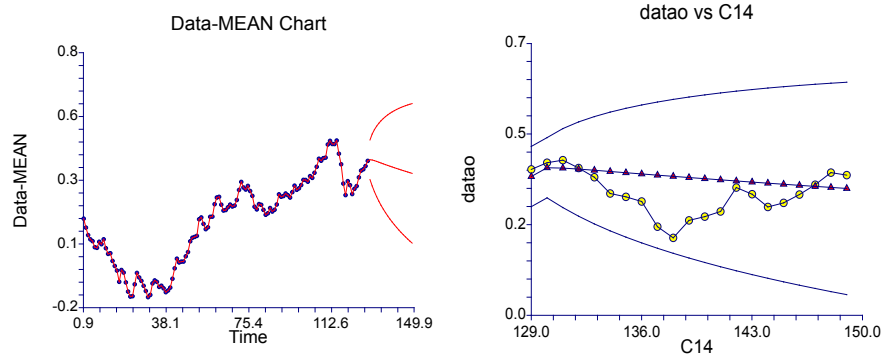
Obrázek 5.3: PACF rady EUR/USD

Odhad φ podľa NCSS metódou maximálnej vierohodnosti je 0.9853, podmienka stacionarity je teda tesne splnená. P-hodnota testu nulovosti parametru φ vyšla nulová, MSE=6.36226E-04. AIC (viď 1.23) nám dáva hodnotu -14.69. Na obrázku 5.4 vidíme vyrovnanú radu s predpoveďami a detail 95 percentného konfidenčného pásu predpovedí s porovnaním oproti skutočnému vývoju. Zdá sa, že model predpovedal budúcnosť relatívne úspešne s jediným pozorovaním mimo konfidenčného intervalu. Bodové predpovede sú menej presné, rady sa pridržajú len prvých 5 predpovedaných hodnôt. Vidíme významnú prvú ACF (na obrázku 5.4) aj PACF reziduí, čo nám znova naznačuje vhodnosť iného modelu než AR(1).



Obrázek 5.4: Predpovede vs. realita AR(1), autokorelácie reziduú AR(1),AR(2)

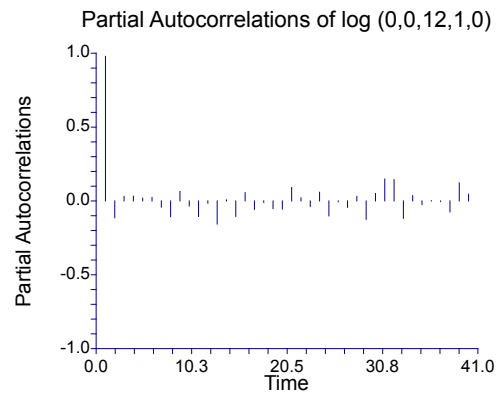
Pre model AR(2) máme odhady φ_1 a φ_2 podľa NCSS 1.3103 a -0.3198, ktoré takmer nespĺňajú podmienky stacionarity (1.17). P-hodnoty testu nulovosti φ_1 a φ_2 máme 0 a 0.00012, MSE=5.76713E-04, AIC= -14.87. Na obrázku 5.5 máme opäť vyrovnanú radu s predikciami a detail predpovedí oproti reálnej rade. V tomto prípade sú reziduá nekorelované (obrázok 5.4), čo nám spolu s nižším MSE a AIC potvrdzuje väčšiu vhodnosť modelu AR(2) pre naše dáta. Model mal presnejšie predpovede oproti modelu AR(1).



Obrázek 5.5: Konfidenčné intervaly predpovedí a reálny priebeh AR(2)

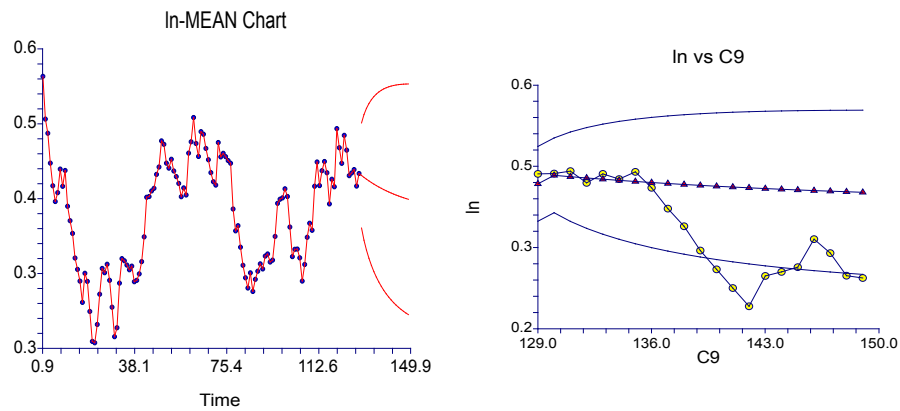
5.1.2 CAD/EUR

V tomto prípade je zrejme vhodný proces AR(1), pretože PACF je useknutá v bode 1 a hranicu významnosti (0.1638) prekračuje len prvá hodnota tabuľky PACF-vid' obrázok.



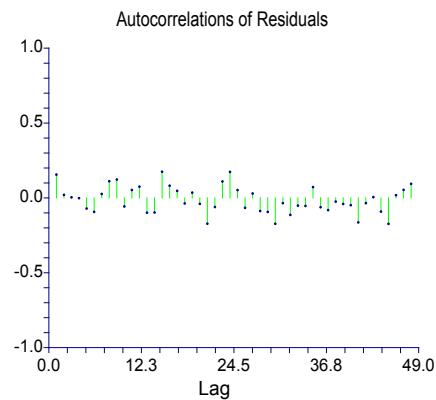
Obrázek 5.6: PACF rady EUR/CAD

Odhad parametru φ_1 je 0.9508578, čo znamená, že model spĺňa podmienku stationarity, p-hodnota testu nulovosti je nulová, MSE=5.15731E-04, AIC=-15,11. Detail predpovedí s pôvodnou radou je na obrázku 5.7.



Obrázek 5.7: Konfidenčné intervaly predpovedí a reálny priebeh AR(1)

Reziduá sú nekorelované (viď obrázok 5.8). Bodový odhad je relatívne presný len pre prvých 8 predpovedí, kde prilieha k reálnym dátam, ďalej sa ale predpovede od reality odchyľujú a od času 139 je dokonca väčšina dát mimo konfidenčného intervalu.

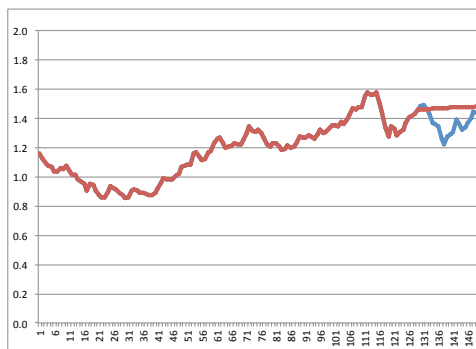


Obrázek 5.8: Autokorelácie reziduí AR(1)

5.2 Nezáporné jednorozmerné procesy

V tomto prípade sme kôli nezápornosti pracovali s pôvodnými radami neupravenými logaritmickou transformáciou. Odhad parametru pre model AR(1) podľa (2.2) vyšiel $\varphi_{USD}^* = 0.9271$ a $\varphi_{CAD}^* = 0.9479$, takže stacionarita je v tomto prípade pre oba splnená. Pretože odhady, grafy a výsledky sú veľmi podobné odhadom metódou maximálnej vierohodnosti z NCSS, ďalej sme ich neanalyzovali.

Pre AR(2) model rady USD sme odhady dostali metódami (2.9), (2.11) a (2.12). Číselne $\varphi_1^* = 0.927$ a $\varphi_2^* = 0.026$. Rovnako ako pri použití klasickej Boxovej-Jenkinsovej metodológie implementovanej v NCSS máme pre obe rady tesne stacionárny model. Na skrátených radách sme vyskúšali, ako bol schopný proces predpovedať budúcnosť (viď obrázok 5.9). Bodové predpovede dopadli dostatočne, ale model s parametrami odhadnutými klasickými metódami opticky vystihol trend dát presnejšie.



Obrázok 5.9: Pôvodné dáta a predpovede modelu AR(2)

5.3 Mnohorozmerné procesy

Mnohorozmerné procesy sme spracovali v Time Series Pack rozšírení pre softvér Mathematica. V našom prípade sa jednalo o dvojrozmerný proces, ktorého vektory boli forexové dáta EUR/USD a EUR/CAD z obrázku 5.1. Testovali sme modely VAR(1) a VAR(2), pre ktoré sme odhadovali matice parametrov Φ a Σ .

Kovariančné matice Γ_k $k = 0, \dots, 3$ (viď 3.7) vyšli

$$\hat{\Gamma}_0 = \begin{pmatrix} 0.027 & 0.003 \\ 0.003 & 0.005 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0.027 & 0.003 \\ 0.003 & 0.005 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_2 = \begin{pmatrix} 0.026 & 0.003 \\ 0.003 & 0.004 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} 0.025 & 0.003 \\ 0.003 & 0.004 \end{pmatrix},$$

a korelačné matice ρ_k $k = 0, \dots, 3$ (viď 3.8) vyšli

$$\hat{\rho}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0.283 \\ 0.283 & 1 \end{pmatrix}, \hat{\rho}_1 = \begin{pmatrix} 0.982 & 0.270 \\ 0.272 & 0.917 \end{pmatrix}, \hat{\rho}_2 = \begin{pmatrix} 0.955 & 0.254 \\ 0.253 & 0.829 \end{pmatrix}, \hat{\rho}_3 = \begin{pmatrix} 0.93 & 0.243 \\ 0.235 & 0.738 \end{pmatrix}.$$

Pre naše dáta bol Hannan-Rissanenovým optimalizačným algoritmom odporučený model AR(1) ([11] strana 95). Podľa klasických výpočtov Yule-Walkerovými rovnicami vyšlo

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 0.984 & -0.02 \\ 0.006 & 0.913 \end{pmatrix}, \hat{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} 9.853E-4 & 2.67E-4 \\ 2.67E-4 & 7.86E-4 \end{pmatrix}.$$

Vlastné čísla matice $\hat{\Phi}_1$ sú (0.982, 0.915), podmienka stacionarity je teda splnená (viď kapitola 3.2). Pretože $\hat{\Sigma}_1$ je všade v ráde 10^{-4} , je aj AIC(1) nízke, čo značí dobrú kvalitu modelu. Vyskúšali sme aplikovať vstavanú funkciu Yule-Walkerových rovníc aj na rád dva. Odhady sú

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 1.241 & -0.047 \\ 0.099 & 0.954 \end{pmatrix}, \hat{\Phi}_2 = \begin{pmatrix} -0.261 & 0.026 \\ -0.095 & 0.046 \end{pmatrix}, \hat{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} 9.21E-4 & 2.41E-4 \\ 2.41E-4 & 7.73E-4 \end{pmatrix}.$$

Podmienka stacionarity podľa (3.14) je opäť splnená, korene polynómu $|I - \Phi_1 z - \Phi_2 z^2|$ sú (1.029, 1.111, 3.867, 15.553), tj. všetky mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine. $\hat{\Sigma}_2$ má spolu s AIC(2) (podľa 3.27) hodnoty ešte o málo nižšie než $\hat{\Sigma}_1$ a AIC(1), čo znamená väčšiu vhodnosť modelu VAR(2), ktorý využíva viac informácií o dátach (ide viac do minulosti). Keď si ale všimneme odhady parametrov, pozorujeme v modeli VAR(1) takmer nulové mimodiagonálne prvky v $\hat{\Phi}_1$. To vzhľadom k (3.20) znamená, že hodnota každého z menových kurzov závisí len na jeho vlastnej minulosti, nie na minulosti druhého menového kurzu. Stačí teda použiť k modelovaniu dva jednorozmerné AR(1) procesy.

V modeli VAR(2) sa $\hat{\Phi}_1$ správa rovnako ako vo VAR(1) a $\hat{\Phi}_2$ má výrazne odlišný od nuly len prvok na mieste (1,1), to znamená vzhľadom k 3.26, že pre kurz EUR/CAD sa model redukuje na AR(1) a pre kurz EUR/USD dostávame AR(2), čo potvrdzuje výsledky z kapitoly 5.1.

5.4 Nezáporné mnohorozmerné procesy

Podielovou metódou podľa tvrdenia 6 sme vypočítali odhady parametrov modelu VAR(1)

$$\Phi_1^* = \begin{pmatrix} 0.927 & 0.776 \\ 0.763 & 0.948 \end{pmatrix}.$$

Vlastné čísla matice (1.707, 0.776) neležia v jednotkovom kruhu komplexnej roviny, takže podmienky stacionarity nie sú splnené. Tento jav je pravdepodobne spôsobený už spomínanou pomalou konvergenciou a rozsah dát nie je dostatočný. Preto bol pre odhad modelov VAR(1), VAR(2) použitý vierohodnostný prístup pre nezáporné dvojrozmerné časové rady.

V prípade VAR(1) vyšiel po aplikácii tvrdenia 7 v programe Mathematica odhad

$$\Phi_1^+ = \begin{pmatrix} 0.851 & 0.091 \\ 0 & 0.948 \end{pmatrix}.$$

Podmienka stacionarity je splnená, vlastné čísla sú (0.948, 0.851). Podobne ako v kapitole 5.3 sú výrazne nenulové len diagonálne prvky.

V modeli VAR(2) sme dostali použitím (4.13) a (4.12) odhady Φ_1^+ rovnaké ako v modeli VAR(1) a

$$\Phi_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To znamená, že aplikácia lineárneho programovania identifikovala model VAR(1).

Záver

Na záver by sme chceli zhrnúť výsledky našej práce. Podrobne sme sa venovali autoregresným procesom prvého a druhého rádu, jednorozmerným a dvojrozmerným, ktoré sme po definovaní, tvrdeniach a dôkazoch v teoretickej časti aplikovali na naše forexové dáta v praktickej časti. Následne sme analyzovali kvalitu modelov a porovnávali klasické metódy s netradičnými odhadmi pomocou podielových kritérií a lineárneho programovania.

Na finančné dáta EUR/USD sa najviac osvedčil model AR(2), ktorý vykazoval najnižšie hodnoty MSE a AIC a vyzeral opticky vhodnejšie ako model AR(1) (aj na dĺžku 20 predpovedí konfidenčný interval odhadov pokryl reálny vývoj), avšak rozdiel nebol veľký.

Na dáta EUR/CAD sa naopak najviac hodil model AR(1).

Po testovaní viacrozmerných modelov v Time Series Packu softwaru Mathematica pomocou vstavaných funkcií sa ukázal kvalitnejší model VAR(2), ktorý pracuje s dátami ďalej do minlosti.

Vzhľadom k hodnotám prvkov odhadnutých matíc sa modely VAR(1), VAR(2) redukovali na jednorozmerné autoregresie, navyše pre každú radu zvlášť. Pre naše dáta je teda postačujúci jednorozmerný prístup. Konštrukcia odhadov pomocou lineárneho programovania v nezáporných radách viedla na model VAR(1) zložený z dvoch separátnych AR(1).

Zoznam použitej literatúry

- [1] ANDĚL, Jiří. *Základy matematické statistiky*. Matfyzpress, 2007, Praha.
- [2] ANDĚL, Jiří. *AR(1) processes with exponential white noise*. Communications in Statistics-Theory Methods 17 (5), 1988
- [3] ANDĚL, Jiří. *Non-negative autoregressive processes*. Journal of Time series Analysis, 10, 1989, 1-11.
- [4] ANDĚL, Jiří. *Nonnegative multivariate AR(1) processes*. Kybernetika, 28 , 1992, No 3., 213-226.
- [5] BELL, C.B., SMITH, E.P. *Inference for non-negative autoregressive schemes*. Communications in Statistics - Theory and Methods, 15 , 1986, 2267-2293.
- [6] CIPRA, Tomáš. *Finanční ekonometrie*. Ekopress, 2008, Praha.
- [7] ECB, Európska centrálna banka. *Statistical Data Warehouse*. <http://sdw.ecb.europa.eu/browse.do?node=2018794>.
- [8] ŠTĚPÁN, Josef. *Teorie pravděpodobnosti-matematické základy*. Akademia, 1987, Praha.
- [9] WEI, William W.S. *Time Series Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990, USA.
- [10] WOLFRAM, Mathematica. *Time Series Pack*. <http://www.wolfram.com/products/applications/timeseries/>.
- [11] WOLFRAM, Mathematica. *Time Series Pack. Reference and User's Guide*. Mathematica Applications Library. Wolfram Research, Champaign, 1995.
- [12] ZICHOVÁ, Jitka. *Some applications of time series models to financial data*. Acta Universitatis Carolinae, Mathematica and Physica, 2(51), 2010, 83-91.
- [13] ZICHOVÁ, Jitka. *An application of time series analysis in finance*. Proceedings of the 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, J.Selye University, Komárno, 2010.