Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ivana Meňhartová

Optimalizace financování vlastního bydlení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Šmíd, PhD.
Studijní program: Matematika, finanční matematika

2010

Rada by som poďakovala všetkým, ktorí mi pomohli pri získavaní informácií alebo ma akokoľvek podporili pri písaní tejto bakalárskej práce. Najmä ďakujem môjmu vedúcemu RNDr. Martinovi Šmídovi, PhD., ktorý so mnou prekonzultoval náplň práce a diskutoval o problémoch pri jej písaní. Moje poďakovanie patrí aj RNDr. Anotínovi Slavíkovi Ph.D. za pomoc s programom Mathematica a spolužiakovi Jiřímu Thomayerovi za pomoc s TEXom.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím s požičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 28.5.2010 Ivana Meňhartová

Obsah

Názov práce: Optimalizace financování vlastního bydlení
Autor: Ivana Meňhartová
Katedra (ústav): Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky
Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Martin Šmíd, PhD.
e-mail vedúceho: martin@klec.cz

Abstrakt: V predloženej práci študujeme jednotlivé varianty stavebného sporenia a hypoték ponúkané na českom trhu. Práca sa zameriava na podrobnú analýzu stavebného sporenia, na jeho rôznorodosť a rozdielnu výhodnosť pre účastníka. Vysvetľuje tiež možnosti a podmienky získania štátnej podpory stavebného sporenia. Ďalej študujeme podmienky získania úveru zo stavebného sporenia a tiež alternatívne možnosti financovania bývania. Preskúmame ponuku preklenovacích úverov a porovnáme vnútorné miery výnosnosti bežných úverov zo stavebného sporenia a preklenovacích úverov. V ďaľšej časti sa potom pozrieme na hypotéky ponúkané českými bankami a ich možnosti získania ako aj ich výhodnosť. Cieľom tejto práce je nájsť optimálny spôsob financovania vlastného bývania využitím kombinácie stavebného sporenia a hypotéky.

Kľúčové slová: Stavebné sporenie, Hypotéka, Preklenovací úver

Title: Optimization of housing financing
Author: Ivana Meňhartová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Martin Šmíd, PhD.
Supervisor's e-mail address: martin@klec.cz

Abstract: In the present thesis we study different kinds of saving opportunities and mortgages offered by the czech financial market. This thesis is focused on detailed analysis of savings specialised on financing housing. It studies the diversity of savings and the differences in merit of the client. It explains how and how much is it possible to obtain as a state grant. The thesis also analyses terms of getting standard loan and bridging loan combined with saving. It describes different possibilities to get financial sources too. We compare the internal rate of return of the loans and the bridging loans. Second part of the thesis deals with mortgages and it discusses conditions of getting one. The aim of this thesis is to calculate optimal way of financing housing in the Czech Republic.

Keywords: Saving, Mortgages , Bridging loan

Kapitola 1

Úvod

Táto práca sa zaoberá hypotékami a stavebnými sporeniami ponúkanými na českom finančnom trhu. Obsahuje informácie o týchto produktoch, o podmienkach ich získania a následného splácania. Na príkladoch vysvetľuje a porovnáva ich výhodnosť pre klienta. Základné informácie o úrokových mierach a zjednodušené podmienkych získania produktov sú zozbierané z internetových stránok niekoľkých českých bánk a sporiteľní. Podmienky sú potom upresnené na základe obchodných podmienok uvádzaných v zmluve stavebnej sporiteľne a tiež sa opierajú o legislatívu upravujúcu danú problematiku. Práca ďalej zostavuje a následne rieši úlohu na nájdenie optimálneho spôsobu financovania bývania využitím stavebného sporenia a hypotéky.

Druhá kapitola definuje a vysvetľuje základné pojmy používané v práci.

V tretej a štvrtej kapitole práca pojednáva o stavebnom sporení. Vysvetľuje, aké varianty stavebného sporenia ponúkajú sporiteľne a aké sú možnosti klienta pri získavaní úverov zo stavebného sporenia a preklenovacích úverov. Vysletľuje tiež pojem vnútornej miery výnosnosti a napočítava ju pre viaceré varianty sporenia.

Piata kapitola obsahuje stručné informácie o hypotékach, spôsob spočítania výšky pravidelnej mesačnej splátky hypotéky, minimálne a maximálne doby splácania hypotéky a poskytované úrokové sadzby.

V šiestej kapitole sú vyjadrené náklady na získanie finančných prostriedkov zo stavebného sporenia s využitím riadneho aj preklenovacieho úveru. Rovnice nákladov sú upravené subjektívnym diskontným faktorom aby zohľadňovali subjektívne preferencie klienta o okamžitej a odloženej spotreby.

Siedma a ôsma kapitola zostavujú a následne riešia optimalizačnú úlohu na základe informácií z predošlých kapitol, s využitím poznatkov z [2]. Optimalizačná úloha minimalizuje náklady na získanie potrebných finančných prostriedkov za podmienok určených bankami, sporiteľňami, zákonmi a tiež subjektívnymi požiadavkami klienta. Jej riešenie uvádzame pre niekoľko konkrétnych subjektívnych diskontných faktorov.

Kapitola 2

Základné pojmy a definície

Symbolom $\mathbb{R}$ budeme označovať reálne čísla. Ďalej písmenom i označíme úrokovú mieru a symbolom IRR vnútornú mieru výnosnosti.

V celej práci používame skratku S pre cieľovú čiastku stavebného sporenia.

Skratkou PO označíme parameter ohodnotenia, číslo definované stavebnou sporiteľňou spadajúce do podmienok stavebného sporenia. Parameter ohodnotenia sa stanoví v každom termíne ohodnotenia a spolu s ostatnými podmienkami rozhoduje o pridelení cieľovej čiastky účastníkovi stavebného sporenia (ďalej len „účastník").

1. PO sa rovná súčinu troch činiteľov:
   - podielu sumy všetkých zostatkov na účte (označíme SVZ) a S (cieľovej čiastky)
   - podielu zostatkov na účte v termíne ohodnotenia (označíme Z) a minimálneho zostatku na účte (označíme MZ), tento činiteľ má hodnotu minimálne 1 a maximálne 2.5
   - tzv. koeficientu ohodnotenia (závislého od varianty stavebného sporenia)

Vzorec pre výpočet parametra ohodnotenia (PO) [3]:

$$PO = (\frac{SVZ}{S} \cdot \frac{Z}{MZ} \cdot \text{koeficient ohodnotenia})$$

V celej práci budeme uvažovať zákonné úpravy týkajúce sa danej problematiky a to Zákon č. 96/1993 Sb., o stavebním spoření, v znení platnej novely z 1.4. 2004, a Zákon č. 586/1992 Sb., o daních z příjmů. Podľa zákona o dani z príjmov §4 odstavec 1 písmeno s) úroky z vkladov a tiež úroky z podpor nepodliehajú dani z príjmov. Zákon o stavebnom sporení upravuje základné podmienky sporenia a nároku na štátnu podporu. Štátna podpora je vyplácaná vo forme záloh, ktoré sú stavebnou sporiteľňou pripísané na účet účastníka. Poskytovaná záloha štátnej podpory tvorí 15% z čiastky nasporenej za daný kalendárny rok, maximálne však z čiastky 20 000Kč (teda maximálna výška štátnej podpory za kalendárny rok je 3 000Kč).

1. Nárok na vyplatenie zálohy štátnej podpory má účastník spĺňajúci nasledujúce podmienky:

    - účastník po dobu 6 rokov nevyužíval nasporenú čiastku, alebo
    - účastník v období do 6 rokov odo dňa uzavretia zmluvy uzavrel zmluvu o úvere zo stavebného sporenia a použije nasporenú čiastku, peňažne prostriedky z tohto úveru a tieto zálohy štátnej podpory na bytové potreby

Ak účastník podmienky nesplnil, stavebná sporiteľňa vráti štátu vyplatené zálohy.

Definícia 2.1. Cieľová čiastka je zmluvne dohodnutá čiastka, ktorú bude mať účastník pri splnení podmienok zmluvy k dispozícii. Rovná sa súčtu vkladov, štátnej podpory, prideleného úveru a úrokov z vkladov a štátnej podpory, po odčítaní dane z príjmov z týchto úrokov (ak zákon nestanovuje inak).[3]

Definícia 2.2. Nasporená čiastka sa rovná súčtu vkladov, úrokov z vkladov a úrokov z pripísaných záloh štátnej podpory, zníženému o daň z príjmov z týchto úrokov a o úhrady účtované stavebnou sporiteľňou (ak zákon nestanovuje inak). [3]

Definícia 2.3. Tarif zmluvy o stavebnom sporení je súhrn podmienok stavebného sporenia, ktoré ovplyvňujú jeho priebeh. Tarif je ponúkaný pri uzatváraní zmluvy, v rámci tarifu je ponúkaná varianta stavebného sporenia a úroková miera z prideleného úveru. [3]

Kapitola 3

Stavebné sporenie

V prvej kapitole sa budeme zaoberať stavebným sporením. Základ stavebného sporenie spočíva v pravidelnom ukladaní rovnakej čiastky, s cieľom nasporiť takzvanú cieľovú čiastku S, alebo splniť podmienky na získanie úveru zo stavebného sporenia. Rovnaká výška vkladov však v skutočnosti nie je podmienkou. Účastník môže zvýšiť či znížiť svoje mesačné vklady, prípadne robiť tzv. mimoriadne vklady bez sankcií zo strany sporiteľne. Stavebné sporenie je výhodnejšie ako sporenie peňažných prostriedkov na bežnom účte, pretože štát ponúka možnosť získania štátnej podpory. Základným predpokladom založenia stavebného sporenia je, že získané prostriedky budú využité na finacovanie bývania - kúpu, výstavbu, rekonštrukciu nehnuteľnosti. Jeho využitie na bytové účely však nie je nevyhnutnosťou. V prípade dodržania zákonom stanovených podmienok, t.j. minimálnej doby sporenia, je možné stavebné sporenie vypovedať a finančné prostriedky použiť bez ohľadu na pôvodný účel. Minimálny mesačný vklad stavebného sporenia je daný ako 5 promile z S(cieľovej čiastky) a vklady sú úročené 2% p.a.. Pre získanie úveru zo stavebného sporenia je nutné sporiť minimálne 24 mesiacov, nasporiť najmenej 40% S a dosiahnuť určitú hodnotu PO(parametra ohodnotenia).

Príklad 3.1. Chceme získať cieľovú čiastku výšky 200 000 Kč, ukladáme vo výške 1 000 Kč pravidelné mesačné vklady. Podľa kalkulačky stavebnej sporiteľne je výška vyplatených úrokov za obdobie 6 rokov (72 mesiacov) sporenia 4 654,09 Kč, výška vyplatenej štátnej podpory 11 497 Kč a výsledný stav účtu 86 151,09 Kč.

$$\underbrace{72 \cdot 1000 + 4654.09 + 11497}_{88151.09} = 86151.09 + P$$

Kde:
P– je súčet všetkých poplatkov

V tomto konkrétnom príklade klient zaplatí poplatky vo výške 2 000 Kč. V skutočnosti je ale poplatok 2 000, ako 1% z S, poplatok za uzavretie zmluvy, ktorý si sporiteľna odráta z vkladov účastníka (celková čiastka vložená klientom je len 70 000 Kč). Klient pritom platí ešte každoročne poplatok 300 Kč za vedenie účtu, o ktorý sporiteľna znižuje nasporenú čiastku.

3.1 Vnútorná miera výnosnosti

Definícia 3.2. Vnútorná miera výnosnosti (Internal rate of return, IRR) je miera zisku i, pri ktorej je súčasná hodnota daného systému peňažných tokov nulová, t.j. diskontované príjmy sa rovnajú diskontovaným výdajom. Vnútornú mieru výnosnosti získame ako riešenie rovnice

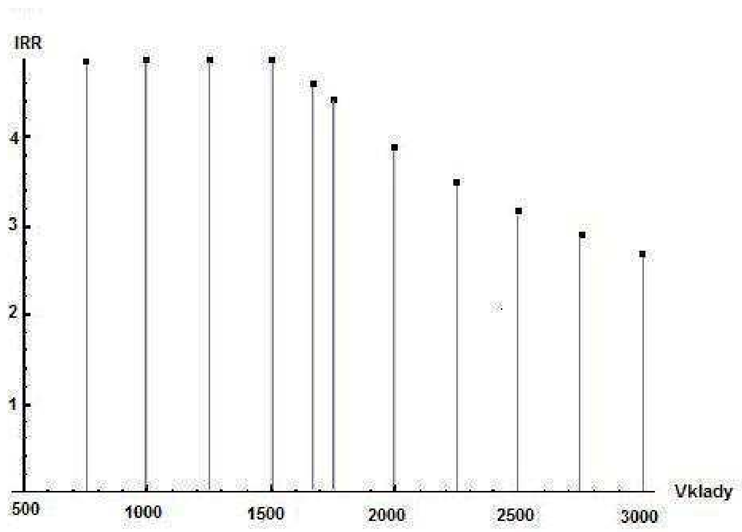
$$\sum_{t=O}^{N} \frac{C_t}{(1+i)^t} = 0 \tag{3.1}$$

Kde:
C_t- sú príslušné Cash Flows (peňažné toky)
$t-$ je čas. [1]

V našom prípade z Príkladu 2.1 berieme ako jednotlivé cash flows prvotný poplatok za založenie zmluvy, potom vklady účastníka a nakoniec čiastku, ktorú účastník dostane vyplatenú po šiestich rokoch. Túto čiastku tvoria vklady znížené o poplatky za vedenie účtu a zvýšené o úroky a štátnu podporu. Štátnu podporu nárokuje za klienta sporiteľňa u Ministerstva Financíí ČR zvyčajne niekedy v priebehu februára, ministerstvo do dvoch mesiacov pošle peniaze sporiteľniam a tie ich najneskôr do druhého dňa musia pripísať na účet klientom. To znamená, že štátna podpora je na účet pripísaná zvyčajne v apríli alebo máji, nie vždy v rovnaký dátum. Výsledné cash flows začínajú poplatkom za uzatvorenie zmluvy, v našom prípade sumou - 2 000 Kč, pokračujú pravidelnými mesačnými vkladmi -1 000Kč a končia sumou 86 151,09 Kč. Z tejto postupnosti cash flows dostávame IRR pre stavebné sporenie z Príkladu 2.1 vo výške 4,86749%.

Modifikovaním Príkladu 2.1 napočítame IRR postupne pre viaceré varianty sporenia. Na Obrázku 1 potom znázorníme IRR niekoľkých stavebných sporení s rozdielnymi výškami vkladov. Na osi x máme vklady pohybujúce sa vo výške od 500 do 3 000 Kč s „krokom“ 250 Kč a špeciálnu hodnotu 1670 Kč (jej výskyt vysvetlíme neskôr). Na osi y máme jednotlivé vnútorné miery výnosnosti. Pre vklady výšky 500 až 1500 Kč sa pohybujú okolo 4,86%, pre vyššie vklady klesajú, a pri vkladoch výšky 3 000 Kč miera výnosnosti dosahuje len 2,66%. Je to spôsobené tým, že pri tak vysokých vkladoch sú vysoké aj poplatky, počiatočný poplatok za založenie stavebného sporenia je 6 000 Kč ale štátna podpora nie je vyššia ako pri sporení 1 670 Kč mesačne. Práve 1 670 Kč je suma, ktorú nazývajú stavebné sporiteľne optimálnou výškou vkladu. Odôvodnenie je jednoduché. Štátna podpora je 15% z ročného vkladu avšak maximálne 15% z 20 000 Kč. Preto stavebné sporiteľne rozdelili 20 000 do 12 rovnako vysokých vkladov, zaokrúhlili vklady na 1 670 Kč, cieľovú čiastku nastavili tak, aby vklady boli 5 promile z S. Tým vzniklo stavebné sporenie s cieľovou čiastkou 334 000 Kč, pravidelným mesačným vkladom 1 670 Kč a vnútornou mierou výnosnosti 4,59%.

Pre lepšiu viditeľnosť jednotlivých mier výnosnosti aj na viac desatinných miest a pre možnosť porovnania pridávame údaje, ktoré boli podkladom grafu aj v tabuľke 1.



Obr. 3.1: IRR stavebného sporenia

Vklady(Kč)	IRR(%)
500	4.86713
750	4.86813
1000	4.86749
1250	4.86774
1500	4.85824
1670	4.59253
1750	4.39877
2000	3.88765
2250	3.48445
2500	3.15821
2750	2.88882
3000	2.66259

Podľa údajov v tabuľke vychádza, že vnútorná miera výnosnosti je najvyššia pri mesačných vkladoch výšky 750 Kč. A nie pri „optimálnom“ riešení stavebnej sporiteľne s mesačným vkladom 1 670 Kč.

3.2 Úver zo stavebného sporenia

Úver zo stavebného sporenia spočíva v tom, že aj keď klient ešte nenasporil celú cieľovú čiastku, získa od stavebnej sporiteľne finančné prostriedky vo výške S (dostane to, čo nasporil, plus úver vo výške S mínus nasporená čiastka)Na získanie úveru zo stavebného sporenia musí účastník splniť tri základné podmienky. Nasporiť určité percento S, sporiť minimálne 24 mesiacov a dosiahnuť požadovanú hodnotu PO (parametru ohodnotenia). Po splnení týchto podmienok získa účastník úver vo výške S mínus nasporená čiastka. Jednoduchou simuláciou stavebného sporenia sme zistili, že pri sporení tak, ako to majú stavebné sporiteľne nastavené (t.j. klient sporí mesačne čiastku, ktorá je určená ako x promile z cieľovej čiastky), získa klient nárok na úver zo stavebného sporenia práve po 6 rokoch, teda 72 mesiacoch. Od momentu získania úveru prejde sporenie do „úverovej časti“ a účastník začne so splácaním úveru. Doba splatnosti prideleného úveru a výška mesačných splátok prideleného úveru sa riadi tarifom, úrokovou sadzbou a variantou stavebného sporenia. V mesačných splátkach úveru sú zahrnuté splátky istiny úveru aj splátky úrokov z prideleného úveru. Úrokové sadzby úveru sa pohybujú od 3 do 5% v závislosti na variante sporenia.

Kapitola 4

Preklenovací úver

Preklenovací úver je variantou k riadnemu úveru zo stavebného sporenia, ak účastník nesplní niektorú z podmienok nutných pre poskytnutie riadneho úveru zo stavebného sporenia (napr. sporí menej než dva roky, nevložil na účet dostatočný percentuálny podiel cieľovej čiastky alebo nedosiahol potrebnú výšku parametra ohodnotenia), môže požiadať o preklenovací úver. Preklenovací úver slúži predovšetkým k rýchlemu získaniu finančných prostriedkov a k prekonaniu doby medzi uzavretím zmluvy a získaním nároku na riadny úver zo stavebného sporenia. Môže byť vhodnou alternatívou k hypotekárnemu úveru - býva pridelený pomerne rýchlo a môže byť čerpaný aj vo vysokých čiastkach. Na získanie preklenovacieho úveru však neexistuje žiadny právny nárok a na jeho obdržanie musí účastník splniť podmienky stanovené sporiteľňou. Základnou je nasporiť určité percento z S (nie nutne podmienka)a poskytnúť dostatočné zabezpečenie. Účastník tak získa úver vo výške S a zároveň pokračuje v sporení na sporiacom účte, aby neskôr dosiahol podmienky pre pridelenie riadneho úveru. V tomto období, v období do udelenia riadneho úveru, musí byť celý účet sporenia vinkulovaný v prospech sporiteľne. Účastník teda pokračuje v sporení a zároveň spláca úroky z preklenovacieho úveru, vo výške S, ktoré ale nezahŕňajú splátky istiny. Preklenovací úver je splatený až pridelením klasického úveru stavebného sporenia. V tej chvíli sa začína klasické splácanie úveru zo stavebného sporenia vo výške (S-nasporená čiastka).

Preklenovací úver môže byť čerpaný zálohovo, jednorázovo i postupne. V tejto práci budeme pre jednoduchosť predpokladať jednorázové čerpanie. Výhodou preklenovacích úverov je, že úroky z nich sa dajú odpočítať od daňového základu.

Preklenovací úver slúži na získanie finančných pristriedkov ak klient ešte nemá nárok na riadny úver zo stavebného sporenia. Preto budeme v nasledujúcich príkladoch predpokladať, že klient žiada o preklenovací úver okamžite po uzavretí sporenia, po dvanástich mesiacoch sporenia a po 24 mesiacoch sporenia(za predpokladu, že nemá nárok na riadny úver).

Príklad 4.1. Klient založil stavebné sporenie s S=1 000 000 Kč. Minimálny mesačný vklad činí 5 000 Kč. Klient zároveň okamžite podá žiadosť o preklenovací úver. Zaplatí úhradu za spracovanie zmluvy o úvere vo výške 1% výšky úveru, maximálne 10 000 Kč. Zároveň zaplatí 0,5% (max. 2 500 Kč) z výšky úveru ako úhradu za spracovanie záručných listín a ďalej platí 25 Kč mesačne za vedenie účtu preklenovacieho úveru. Chceme spočítať vnútornú mieru výnosnosti tohto úveru.

Riešenie:
So založením stavebného sporenia klient zaplatí poplatok za uzavretie zmluvy 10 000 Kč, za spracovanie zmluvy o úvere zaplatí 10 000 Kč, za spracovanie záručných listín 2 500 Kč. Predpokladajme, že získa preklenovací úver. Následne už len sporí pokiaľ nezíska nárok na riadny úver zo stavebného sporenia a tiež spláca úroky z preklenovacieho úveru. Kedže sa nespláca istina, len úroky, tie sa v čase nemenia, klient zaplatí ročne 6,6% S. Pre klienta to znamená, že sporí 5 000 Kč mesačne a zároveň spláca úroky vo výške 5 500 Kč mesačne. Toto platí po dobu 6 rokov(72 mesiacov- z kap. 2.2). Potom získa nárok na riadny úver zo stavebného sporenia a začne ho splácať. Preklenovací úver sa považuje týmto za splatený. Klient teda následne platí 0,75% z S ako splátku úveru až pokiaľ úver nesplatí, v našom prípade 95 mesiacov (zo simulácie z kap. 2.2). Posledný mesiac zaplatí už len upravenú splátku vo výške 4 635 Kč.
Cashflow pre tento príklad:

$$(-10\,000-10\,000-2\,500+1\,000\,000, -10\,500, -10\,500, ..., -7\,500, -7\,500, ..., -4\,635)$$

IRR pre tento príklad vyšla 6,6257%.

Príklad 4.2. Teraz zistíme IRR prípadu, kedy klient žiada o preklenovací úver až po 12 mesiacoch sporenia. Ostatné podmienky zostávajú oproti predošlému príkladu nezmenené.
Riešenie:
Tentokrát klient najskôr 12 mesiacov sporí čiastku 5 000 Kč a po 12 mesiacoch získa preklenovací úver vo výške S. Potom 5 rokov (60 mesiacov) spláca preklenovací úver a následne riadny úver zo stavebného sporenia. Posledná splátka zostáva rovnaká ako v predošlom prípade.
Cashflow pre tento prípad:

$$(-10\,000, \underbrace{-5\,000, ..., -5\,000}_{12}, -10\,000-2\,500+1\,000\,000,$$

$$\underbrace{-10\,500, ..., -10\,500}_{60}, \underbrace{-7\,500, ... -7\,500}_{94}, -4\,635)$$

IRR pre tento príklad je 6,6288%.

Príklad 4.3. Ten istý prípad, ale klient najskôr sporí 24 mesiacov.

Riešenie:
Cashflow začne opäť -10 000 za založenie zmluvy, potom 24 krát splátka -5 000, potom platby súvisejúce so získaním preklenovacieho úveru. Vidíme, že výška platieb v cashflow sa nemení, mení sa však ich poradie a počet jednotlivých „skupín“. Zadefinujeme cashflow ako funkciu času t (v mesiacoch) a výšky S, pre zjednodušenie počítania.

Cashflow:

$$CF(24, 1\,000\,000) = (-10\,000, \underbrace{-5\,000}_{24}, -10\,000 - 2\,500 + 1\,000\,000$$

$$\underbrace{-10\,500}_{48}, \underbrace{-7\,500}_{x}, -4\,635)$$

Potrebujeme zistiť, ako dlho bude účastník splácať riadny úver zo stavebného sporenia, t.j. ako dlho bude splácať (1 000 000-nasporená čiastka).

Všeobecne:

$$CF(t, S) = (-2 \cdot -0.005 \cdot S, \underbrace{-0.005 \cdot S}_{t},$$

$$-Min(0.01 \cdot S, 10\,000) - Min(0.005 \cdot S, 2\,500) + S,$$

$$\underbrace{-0.005 \cdot S + S \cdot 0.066}_{x-t}, \underbrace{0.075 \cdot S}_{y}, poslednasplatka)$$

Vo vzorci stále zostávajú dve premenné x a y. Pritom x je počet mesiacov, ktoré sa bude splácať preklenovací úver (72 -doba sporenia doteraz) a y je potom počet mesiacov, ktoré sa bude splácať riadny úver. y sa získa jednoduchou umorovacou tabuľkou (v Prílohe 1).

Simuláciou stavebného sporenia v programe Excel sme dostali zaujímavé výsledky. Vyšlo nám, že minimálna výška splátky stavebného sporenia je nastavená tak, aby účastník získal nárok na riadny úver zo stavebného sporenia vždy po šiestich rokoch, teda 72 mesiacoch (toto tvrdenie platí pre S výšky 25 000 Kč $\cdot$ j, pre j od 2 do 41 (v Prílohe 1)). Dĺžka splácania riadneho úveru potom vyšla od 86 mesiacov pri nižších S po 93 mesiacov pri S 1 000 000 Kč. Zároveň sme dostali výšky posledných splátok úveru, ktoré sú nižšie ako pravidelná splátka. Pre ilustráciu uvádzame tabuľku počítaných S a k nim príslúchajúcich dĺžok splácania a posledných splátok v Prílohe 1.

Kapitola 5

Hypotéka

Hypotéka je na rozdiel od stavebného sporenia spôsob, ako získať peniaze potrebné na financovanie bývania bez predošlého sporenia. Hypotékou je pri dostatočnom zabezpečení možné získať okamžite potrebné finančné prostriedky a tie potom splácať. Banky aj stavebné sporiteľne ponúkajú rôzne varianty hypoték na bývanie. Základom je hypotéka, ktorú je možné použiť na kúpu, výstavbu alebo rekonštrukciu domu či bytu, alebo na refinancovanie skôr poskytnutých úverov na bývanie. Výška hypotéky sa pohybuje od 200 000 Kč (zhora nie je obmedzená) a splácať je možné od 5 do 40 rokov. Zaujímavým druhom hypotéky je hypotéka s neúčelovou časťou, z ktorej môže žiadateľ 20% z celkovej výšky použiť na čokoľvek. Existuje ešte niekoľko ďalších variant, napríklad americká hypotéka, ktorá je neúčelovým úverom, jej výška je však zhora obmedzená. Úrokové sadzby hypoték sa pohybujú od 5,09% (akcia ČSOB) do 8,44% (hypotéka bez dokladovania príjmov, alebo americká hypotéka)

Výška splátky hypotéky sa vypočíta zo vzorca:

$$H = h \cdot \sum_{t=O}^{N} \frac{1}{(1+i)^t} \tag{5.1}$$

Kde:
$H-$ je výška hypotéky
$h-$ je pravidelná mesačná splátka hypotéky
$N-$ je počet rokov splácania hypotéky krát 12(čas splácania udávaný v mesiacoch)
$i-$ je mesačná úroková sadzba

Klient teda teraz získa hypotéku výšky H, a po dobu N mesiacov bude splácať splátkami výšky h. Je zrejmé, že

$$N.h > H$$

.
Prečo si teda ľudia berú hypotéky? Odpoveď je jednoduchá. Potrebujú peniaze okamžite. Preferencie ľudí skutočne závisia na tom, kedy budú peniaze potrebovať. Ak vedia, že peniaze im stačia o pár rokov, pravdepodobne si založia skôr stavebné sporenie. Ak potrebujú peniaze okamžite, vezmú si hypotéku.

Kapitola 6

Náklady na získanie finančných prostriedkov

V tejto kapitole si vyjadríme náklady, ktoré sú spojené so získaním finančných prostriedkov rôznymi spôsobmi. Zanedbáme poplatky spojené s vybavovaním stavebného sporenia a hypotéky, zameriame sa skôr na vyjadrenie toho, koľko účastník stavebného sporenia zaplatí splátkami úveru zo stavebného sporenia a ako závisí výška splátky hypotéky na dĺžke jej splácania.

6.1 Stavebné sporenie

V tejto časti sa zameriame na samotné stavebné sporenie s využitím preklenovacieho úveru. Vyjdeme z toho, že klient stavebnej sporiteľne už má nasporenú nejakú čiastku a žiada o preklenovací úver. „Náklady" klienta na získanie cieľovej čiastky sa dajú vyjadriť ako súčet čiastky, ktorú dosporí počas splácania preklenovacieho úveru, splátok preklenovacieho úveru a splátok riadneho úveru zo stavebného sporenia (až do splatenia). Aby klient získal sumu výšky S, v skutočnosti zaplatí viac ako je S. To, koľko zaplatí, vyjadruje nasledujúci vzorec:

$$\sum_{t=m}^{72} S \cdot q + \sum_{t=m}^{72} S \cdot 0.00534 + \sum_{t=73}^{M} 0.6 \cdot S \cdot p \tag{6.1}$$

Kde:
m– je doba sporenia pred získaním preklenovacieho úveru
q– je podiel cieľovej čiastky, ktorý určuje výšku vkladu na sporiaci účet
S– je cieľová čiastka sporenia
p– je podiel z výšky úveru, ktorý budeme mesačne splácať

V (6.1) je prvá suma tvorená vkladmi na sporiaci účet po dobu $(72 - m)$, čo je doba splácania preklenovacieho úveru (z poznatkov kapitoly o stavebnom sporení). Táto suma predstavuje fázu sporenia po získaní preklenovacieho úveru, kedy klient sporí, aby mal nárok na riadny úver zo stavebného sporenia. Druhá suma je tvorená pravidelnými splátkami preklenovacieho úveru, ktoré sú v skutočnosti tvorené len splátkami úrokov po dobu $(72-m)$ mesiacov. $0,00534$ je použitá úroková sadzba preklenovacieho úveru(mesačná, vypočítaná zo sadzby 6,6% p.a.).

Po čase $(72-m)$ prejde splácanie preklenovacieho úveru do fázy splácania riadneho úveru zo stavebného sporenia. Tretia suma predstavuje splátky tohto úveru výšky 0,6S. Tento sa spláca po dobu (M-73) (udávané v mesiacoch) splátkami výšky p% z výšky úveru. Percentuálny podiel p je závislý na variante stavebného sporenia (pohybuje sa od 0,5% do 0,9% pre varianty pomalá, štandardná a rýchla). 0,6% je pre štandardnú variantu. Budeme teda predpokladať, že p je aspoň 0,6%.
Aby klient dosiahol nárok na riadny úver zo stavebného sporenia, musí nasporiť aspoň 40% S. Vychádzali sme z toho, že klient už niečo nasporené má, keď získa preklenovací úver. Túto čiastku označíme R. Potom vieme, že v čase, kedy splácanie preklenovacieho úveru prejde do splácania riadneho úveru zo stavebného sporenia musí mať klient aspoň $0.4 \cdot S$. Musí platiť:

$$R + (72-m) \cdot S \cdot q = 0.4 \cdot S$$

V poslednej sume vzorca (6.1) musíme zabezpečiť, aby sa za obdobie $(M-73)$ úver skutočne splatil. Matematicky sa táto podmienka pre výšku splátky $0.6 \cdot S \cdot p$ vyjadrí nasledovne:

$$0.6 \cdot S = c \cdot \sum_{t=0}^{M-73} \frac{1}{(1+j)^t} = c \cdot \left(\frac{-(j+1)^{73-M} + j + 1}{j}\right)$$

Pravidelná mesačná splátka $0.6 \cdot S \cdot p$ sa rovná pravidelnej mesačnej splátke c. Vyjadrením c a dosadením do rovnosti pre splátky dostávame, že $p = \frac{j}{-(j+1)^{73-M}+j+1}$, kde j je úroková miera úveru zo stavebného sporenia.

Vyššie uvedenými dvoma podmienkami sme dostali jednoznačné vyjadrenia pre q a p vo vzorci 6.1.

Vklady sporenia v prvej sume sú dané v minimálnej výške 5 promile S, v skutočnosti sa ale cieľová čiastka dá na začiatok nastaviť ľubovoľne nízka a vklady tiež nízke a počas sporenia sa dá ľubovolne navyšovať (za určitý poplatok). Výška vkladov na účet sporenia sa teda dá počas sporenia meniť.
Splátky preklenovacieho úveru sú tiež závislé na cieľovej čiastke sporenia a teoreticky sa dajú s výškou S meniť.
Pri splácaní úveru zo stavebného sporenia (posledná suma v (6.1)) je minimálna výška splátky predpísaná variantou sporenia a cieľovou čiastkou, nie sú však zakázané mimoriadne splátky ani predčasné splatenie úveru.

Vzorec (6.1) sa dá ešte zjednodušiť. Pre názornosť sme v (6.1) uvádzali druhý a tretí člen ako sumy, v skutočnosti ale sčítance nezávisia na čase t, preto môžme sumy nahradiť súčinmi. Po úprave:

$$\sum_{t=m}^{72} S \cdot q + (72-m) \cdot S \cdot 0.00534 + (M-72) \cdot 0.6 \cdot S \cdot p \qquad (6.2)$$

6.2 Preferencia hypotéky pred stavebným sporením

V predošlých dvoch kapitolách sme si vyjadrili náklady na získanie finančných prostriedkov formou hypotéky a stavebného sporenia. Tiež sme si uviedli, že medzi ľuďmi existujú určité preferencie v závislosti na tom, ako rýchlo peniaze potrebujú. Upravíme preto vzorce predošlých kapitol tak, aby sme brali do úvahy preferenciu okamžitého získania peňažných prostriedkov. Matematicky sa táto preferencia neskorších platieb vyjadruje tým, že sa jednotlivé položky finančného toku diskontujú subjektívnym diskontným faktorom v, ktorý pridáme do vzorca (6.2) a s ktorým budeme ďalej pracovať ako s parametrom.
Dospejeme tak k upravenému vzorcu:

$$\sum_{t=m}^{72} S \cdot q \cdot v^{t-m} + S \cdot 0.00534 \cdot \sum_{t=m}^{72} v^{t-m} + 0.6 \cdot S \cdot p \cdot \sum_{t=73}^{M} v^t \tag{6.3}$$

Tento vzorec obsahuje geometrické postupnosti, ktoré sa dajú ešte sčítať a tým sa vzorec dá upraviť na tvar:

$$S \cdot q \cdot \frac{1 - v^{73-m}}{1 - v} + S \cdot 0.00534 \cdot \frac{1 - v^{73-m}}{1 - v} + 0.6 \cdot S \cdot p \cdot \frac{v(v^M - v^{72})}{v - 1} \tag{6.4}$$

Kapitola 7

Optimalizačná úloha

Cieľom tejto bakalárskej práce je nájsť optimálne riešenie financovania bývania, ktoré spočíva v minimalizácii nákladov na získanie potrebných finančných prostriedkov upravených preferenčným faktorom v za určitých podmienok optimalizácie.
Preferenčne upravené náklady predstavujúce súčasnú subjektívnu hodnotu finančného toku potrebné na získanie požadovanej finančnej čiastky vyjadríme využitím vzorcov 6.3 a 5.1 z predošlej kapitoly. Dostávame tak, že pre finančnú čiastku určenú súčtom S stavebného sporenia a celkovej výšky hypotéky H, vyjadrenú nasledujúcim vzorcom

$$S + H = S + h \cdot \sum_{t=0}^{N} \frac{1}{(1+i)^t} = S + h \cdot (\frac{-(i+1)^{-N} + i + 1}{i}) \tag{7.1}$$

vyjadríme súčasnú (subjektívnu) hodnotu celkového finančného toku takto:

$$S \cdot q \cdot \frac{1 - v^{73-m}}{1 - v} + S \cdot 0.00534 \cdot \frac{1 - v^{73-m}}{1 - v} + 0.6 \cdot S \cdot p \cdot \frac{v(v^M - v^{72})}{v - 1} + h \sum_{t=0}^{N} v^t \tag{7.2}$$

Upravením vzorca sčítaním ešte aj poslednej sumy a dosadením za p a q vyjadrenia zo štvrtej kapitoly dostávame:

$$\begin{aligned} S \cdot (\frac{0.4 \cdot S - R}{(72-m) \cdot S}) \cdot \frac{1 - v^{73-m}}{1 - v} + S \cdot 0.00534 \cdot \frac{1 - v^{73-m}}{1 - v} + \\ 0.6 \cdot S \cdot (\frac{1}{\frac{-(j+1)^{73-M} + j + 1}{j}}) \cdot \frac{v(v^M - v^{72})}{v - 1} + \\ + h \cdot \frac{v^{N+1} - 1}{v - 1} \end{aligned} \tag{7.3}$$

Naším cieľom je minimalizovať tento finančný tok za podmienok, ktoré si určíme (alebo ktoré sú určené obmedzeniami vyplývajúcimi z podmienok bánk a stavebných sporiteľní).

Prvou podmienkou, ktorá je stanovená priamo stavebnými sporiteľňami a bankami je obmedzenie na minimálny a maximálny čas splácania hypotéky N.

Hypotéku je možné splácať 5 až 40 rokov, čo nám dáva prvé dve nerovnice, ktoré využijeme ako podmienky optimalizácie:

$$N \leq 40 \cdot 12 \tag{7.4}$$

$$N \geq 5 \cdot 12 \tag{7.5}$$

Hoci obmedzenie pre maximálnu dĺžku stavebného sporenia stavebné sporiteľne presne neurčujú, budeme predpokladať, že účastník stavebného sporenia si môže dovoliť sporiť a následne splácať maximálne 40 rokov.

$$M \leq 40 \cdot 12 \tag{7.6}$$

Stavebné sporiteľne tiež stanovujú minimálnu hodnotu pomeru p, ktorý určuje výšku splátok úveru. Tento je aspoň 0.6%. Čo znamená:

$$p \geq 0.006 \tag{7.7}$$

Parameter p sme si vyjadrili v kapitole 4 pomocou M, preto sa v skutočnosti toto obmedzenie vzťahuje k M.
Ďalšou podmienkou je, aby klient v každom okamžiku splácal (všetky splátky spolu) maximálne nejakú určenú sumu. Toto obmedzenie vychádza z toho, že klient má obvykle obmedzený príjem relatívne stabilnej výšky, z ktorého je schopný len určitú časť dávať na sporenie alebo splácanie(zvyšok pochopiteľne potrebuje na výdaje spojené s bežným životom). V tomto prípade si určíme sumu, ktorú má „nad potrebný príjem“ ako 15 000 Kč. To znamená, že klient je schopný mesačne sporiť, prípadne neskôr splácať maximálne 15 000 Kč. Vzniknú nám ďalšie podmienky:

$$\frac{0.4 \cdot S - R}{(72 - m)} + S \cdot 0.00534 + h \leq 15\,000 \tag{7.8}$$

$$S \cdot 0.6 \cdot p + h \leq 15\,000 \tag{7.9}$$

Prvá nerovnosť vyjadruje, že v čase, kedy klient dosporuje, spláca úroky z preklenovacieho úveru a zároveň spláca hypotéku, je schopný „postrádať“ 15 000 Kč mesačne. V druhej nerovnosti je zachytená situácia, kedy klient spláca hypotéku a zároveň spláca riadny úver zo stavebného sporenia.
Potrebujeme ešte podmienku na celkovú čiastku požadovanú klientom. Predpokladajme, že klient potrebuje získať 1 000 000 Kč. Z toho dostávame podmienku:

$$S + h \cdot \frac{-(i+1)^{-N} + i + 1}{i} = 1000000 \tag{7.10}$$

Z predošlých poznatkov a predpokladov zostavíme optimalizačnú úlohu.

$$min_{M \in \mathbb{R}^+, N \in \mathbb{R}^+, S \in \mathbb{R}^+, h \in \mathbb{R}^+}$$

$$\frac{1}{v-1} \cdot ((\frac{0.4 \cdot S - R}{(72 - m)}) \cdot (v^{73-m} - 1) + S \cdot 0.00534 \cdot (v^{73-m} - 1) +$$

$$0.6 \cdot S \cdot (\frac{j}{-(j+1)^{73-M}+j+1}) \cdot v(v^M - v^{72})+$$
$$+h \cdot (v^{N+1} - 1))$$

kde:

$$N \leq 40 \cdot 12$$
$$N \geq 5 \cdot 12$$
$$M \leq 40 \cdot 12$$
$$\frac{j}{-(j+1)^{73-M}+j+1} \geq 0.006$$
$$S \cdot (\frac{0.4 \cdot S - R}{(72-m) \cdot S} + 0.00534) + h \leq 15\,000$$
$$S \cdot 0.6 \cdot (\frac{1}{\frac{-(j+1)^{73-M}+j+1}{j}}) + h \leq 15\,000$$
$$S + h \cdot \frac{-(i+1)^{-N}+i+1}{i} = 1000000$$

Je zrejmé, že nechceme ako výsledok záporné čísla pre žiadnu z premenných(nemôžeme predsa splácať hypotéku mínus dva mesiace) a požadujeme tiež celočíselné hodnoty, v zadaní je ale však aproximácia reálnymi číslami, kedže celočíselná úloha je zložitá na výpočet.

Kapitola 8

Riešenie optimalizačnej úlohy

Jednou z možností riešenia optimalizačnej úlohy je analytické riešenie. Toto riešenie spočíva v zostavení lagrangeovej funkcie, v jej zderivovaní pre zostavenie lokálnych podmienok optimality a následne vyriešenie sústavy rovníc (prípadne nerovníc) lokálnych podmienok optimality. [2] Keďže pri štyroch premenných M, N, S, h z lokálnych podmienok optimality vzniká zložitá sústava rovníc a nerovníc, najskôr zjednodušíme úlohu zafixovaním všetkých podmienok okrem podmienky udávajúcej pomer stavebného sporenia a hypotéky. Úloha sa teda mení na úlohu minimalizovať funkciu $f(S)$ za podmienky (7). Úlohu riešime vzhľadom k S, hypotéka je potom výšky $(1\,000\,000 - S)$ a teda splátky hypotéky h si vieme vyjadriť ako $\frac{1000000-S}{\frac{-(i+1)^{-N}+i+1}{i}}$

Úloha sa mení na:

$$\min_{S\geq 0}\, f(S)$$

$$\text{za podmienky } (S \in [0, 1000000])$$

$$S \cdot (\frac{0.4 \cdot S - R}{(72-m)\cdot S} + 0.00534) + h \leq 15\,000$$

$$S \cdot 0.6 \cdot (\frac{j}{-(j+1)^{73-M} + j + 1}) + h \leq 15\,000$$

Obmedzenie (4) vynecháme a vezmeme M také, ktoré ho spĺňa. Po úprave funkcie f dosadením za h dospejeme k tomu, že hľadáme minimum funkcie

$$\frac{0.4 \cdot S - R}{(72-m)} \cdot \frac{1 - v^{73-m}}{1-v} +$$

$$S \cdot 0.00534 \cdot \frac{1 - v^{73-m}}{1-v} + 0.6 \cdot S \cdot (\frac{j}{-(j+1)^{73-M} + j + 1}) \cdot \frac{v(v^M - v^{72})}{v-1}$$

$$+ \frac{(1000000 - S)\cdot i}{-(i+1)^{-N} + i + 1} \cdot \frac{v^{N+1} - 1}{v-1}$$

pre S z intervalu $[0, 1000000]$.

Z tejto úpravy funkcie vidieť, že funkcie f je lineárna. Minimum je potom na celom intervale pre S (ak je funkcia konštantná) alebo v niektorom z krajných bodov intervalu pre S.

Zostáva nám odfixovať premenné N a M. Máme optimalizačnú úlohu minimalizovať účelovú funkciu upravenú tak ako vyššie, t.j.

$$f(S,M,N)=\frac{0.4\cdot S-R}{(72-m)}\cdot\frac{1-v^{73-m}}{1-v}+$$

$$S\cdot 0.00534\cdot\frac{1-v^{73-m}}{1-v}+0.6\cdot S\cdot\left(\frac{j}{-(j+1)^{73-M}+j+1}\right)\cdot\frac{v(v^M-v^{72})}{v-1}$$
$$+\frac{(1000000-S)\cdot i}{-(i+1)^{-N}+i+1}\cdot\frac{v^{N+1}-1}{v-1}$$

za podmienok $S\in[0,1000000]$, $N\in[60,480]$ a $M\in[0,480]$
Pozn.: Úroková miera j je sadzba riadneho úveru zo stavebného sporenia, i je úroková sadzba hypotéky.

Úlohu sme upravili do tvaru:

$$\min_{S\in\mathbb{R}^+,N\in\mathbb{R}^+,M\in\mathbb{R}^+}$$

$$\frac{0.4\cdot S-R}{(72-m)}\cdot\frac{1-v^{73-m}}{1-v}+S\cdot 0.00534\cdot\frac{1-v^{73-m}}{1-v}$$

$$+0.6\cdot S\cdot\left(\frac{j}{-(j+1)^{73-M}+j+1}\right)\cdot\frac{v(v^M-v^{72})}{v-1}+\frac{(1000000-S)\cdot i}{-(i+1)^{-N}+i+1}\cdot\frac{v^{N+1}-1}{v-1}$$

za podmienok:

$$(1)\quad N\le 480$$
$$(2)\quad N\ge 60$$
$$(3)\quad M\le 480$$
$$(4)\quad \frac{j}{-(j+1)^{73-M}+j+1}\ge 0.006$$

$$(5)\quad S\left(\frac{0,4}{72-m}+0,00534-\frac{i}{1+i-(1+i)^{-N}}\right)\le 15\,000-\frac{R}{72-m}+\frac{1\,000\,000i}{1+i-(1+i)^{-N}}$$

$$(6)\quad S(0,6(1+i-(1+i)^{-N})j-(-(j+1)^{73-M}+j+1)i)\le$$
$$15\,000(1+i-(1+i)^{-N})(-(j+1)^{73-M}+j+1)-1\,000\,000i(-(j+1)^{73-M}+j+1)$$

Pre zjednodušenie zápisu označíme konštanty, ktoré sa vyskytujú v účelovej funkcii, prípadne v obmedzeniach

$$\alpha = \frac{1 - v^{73-m}}{1 - v}$$

a označíme si časť zátvorky na pravej strane obmedzenia 5.

$$\beta = (\frac{0,4}{72 - m} + 0,00534)$$

Úlohu sme upravili do tvaru:

$$\min_{S \in \mathbb{R}^+, N \in \mathbb{R}^+, M \in \mathbb{R}^+}$$

$$\frac{0.4 \cdot S - R}{(72 - m)} \cdot \alpha + S \cdot 0.00534 \cdot \alpha$$

$$+0.6 \cdot S \cdot (\frac{j}{-(j+1)^{73-M} + j + 1}) \cdot \frac{v(v^M - v^{72})}{v - 1} + \frac{(1000000 - S) \cdot i}{-(i+1)^{-N} + i + 1} \cdot \frac{v^{N+1} - 1}{v - 1}$$

za podmienok:

$$(1) \quad N \leq 480$$

$$(2) \quad N \geq 60$$

$$(3) \quad M \leq 480$$

$$(4) \qquad \frac{j}{-(j+1)^{73-M} + j + 1} \geq 0.006$$

$$(5) \quad S(\beta - -\frac{i}{1 + i - (1+i)^{-N}}) \leq 15\,000 - \frac{R}{72 - m} + \frac{1\,000\,000 i}{1 + i - (1+i)^{-N}}$$

$$(6) \quad S(0,6(1 + i - (1+i)^{-N})j - (-(j+1)^{73-M} + j + 1)i) \leq$$
$$15\,000(1 + i - (1+i)^{-N})(-(j+1)^{73-M} + j + 1) - 1\,000\,000 i(-(j+1)^{73-M} + j + 1)$$

Vyšetríme množinu prípustných riešení. Je zrejmé, že obmedzenia 1 až 4 dávajú konvexné množiny prípustných riešení (obmedzenie 4 dáva pre j, ktoré použijeme pri výpočtoch $73 \leq M \leq 462$), a teda ich prienik je tiež konvexná množina. Pre obmedzenia 5 a 6 je rozhodnutie o konvexite zložitejšie. Upravíme obmedzenia do tvaru $g(n) \geq 0$ a overíme, či je funkcia g udávajúca obmedzenie konkávna. V obmedzení 5 je zátvorka s β na ľavej strane nerovnosti závislá na N a nadobúda aj kladné aj záporné hodnoty. Pre zjednodušenie budeme uvažovať N také, pre ktoré je $\beta - \frac{i}{1+i-(1+i)^{-N}}$ záporné (pre $N = 100$ je to platí). Dostávame:

$$0 \leq S - \frac{15\,000 - \frac{R}{72-m} + \frac{1\,000\,000 i}{1+i-(1+i)^{-N}}}{(\beta - \frac{i}{1+i-(1+i)^{-N}})}$$

Po upravení druhej derivácie obmedzenia 5 dostávame, že funkcia g nie je konvexná v okolí určitých hodnôt premenných m, i, R, N ($i = 0,00327, m = 24, R = 3000m$ a $N = 100$). Druhá derivácia obmedzenia 5 je príliš dlhá a komplikovaná, preto ju v texte neuvádzame. Je však možné nájsť ju v Prílohe 2.

Zhrnutie poznatkov o optimalizačnej úlohe:
1. účelová funkcia je lineárna v premennej S
2. množina riešení nie je konvexná

Pri riešení úlohy využijeme vlastnosť linearity. Linearita v premennej S znamená, že minimum účelovej funkcie vzhľadom k S bude pre $S = 0$ alebo $S = 1\,000\,000$. Úlohu teda budeme riešiť nasledovne. Vyrobíme z účelovej funkcie funkciu niekoľkých premenných (i, j, m), ktorých hodnoty budeme dosádzať a spočítame hodnotu účelovej funkcie pre všetky M a N spĺňajúce obmedzenia danej úlohy a pre S z intervalu $(0, 1\,000\,000)$. Z hodnôt spočítaných pre konkrétne premenné bude optimálne riešenie minimum z hodnôt napočítaných funkciou. Pre zjednodušnie počítania nebude funkcia funkciou R. R je čiastka, ktorú má klient na začiatku nasporenú a preto budeme predpokladať, že táto čiastka závisí na čase m, ktorý už klient sporí. Závislosť budeme predpokladať lineárnu, konkrétne počítame, že klient sporil každý mesiac po dobu m čiastku 3 000 Kč. Potom $R = 3000 \cdot m$.

Konkrétne hodnoty, ktoré dosadíme do výslednej funkcie:

- za premennú i, čo je (mesačná) úroková sadzba úveru zo stavebného sporenia dosadíme hodnotu $i = 0,327\%$ (aktuálne sa úrokové sadzby pohybujú od 3 do 5%, použili sme ročnú sadzbu 4%)

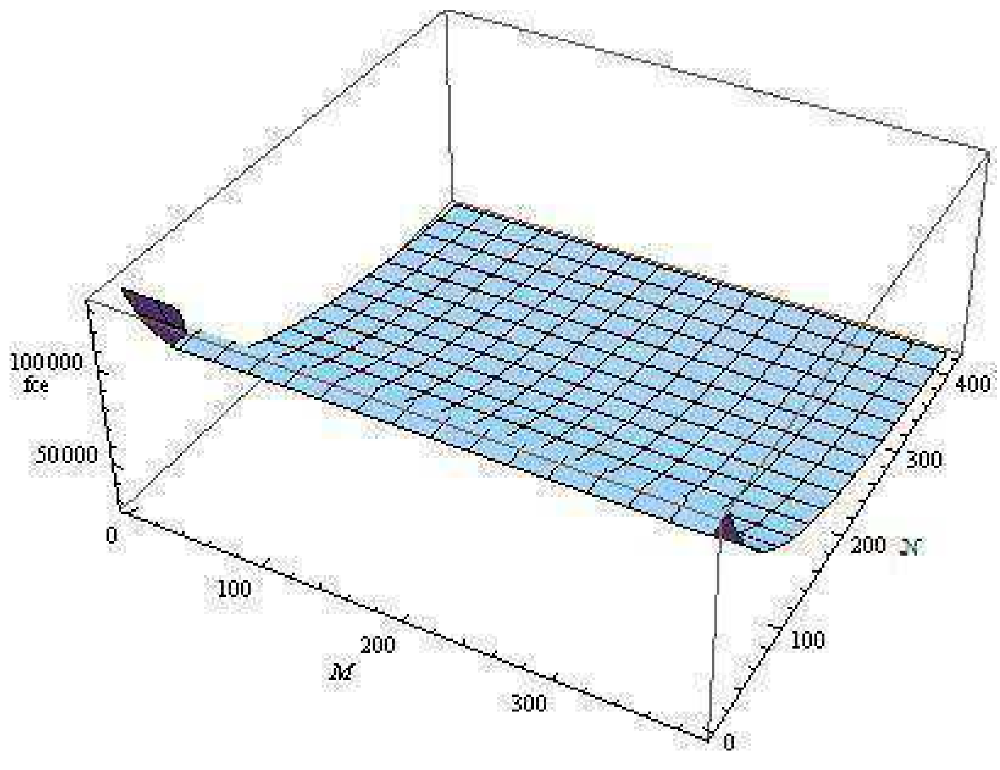
- za premennú j, čo je (mesačná) úroková sadzba hypotéky dosadíme hodnotu $j = 0,525\%$ (úrokové miery hypoték sa pohybujú v rozmedzí od 5,19 po 8,64% v závislosti na variante hypotéky. Použili sme hodnotu ročnej úrokovej sadzby 6,49% pretože sa opakuje pri viacerých variantách)

- za premennú m dosadíme $m = 24$, táto hodnota je subjektívna, odráža skúsenosť, že ľudia začnú premýšlať o vlastnom bývaní, založia si stavebné sporenie, začnú sa zaoberať zisťovaním a vybavovaním potrebných vecí a do dvoch rokov už majú jasnú predstavu o ich realizácii, prípadne vybavené povolenia a zostavené plány

- za premennú v, čo je subjektívny diskontný faktor vyjadrujúci preferenciu odloženého či okamžitého získania finančných prostriedkov budeme dosádzať niekoľko hodnôt z intervalu $(0, 1)$ a pozrieme sa, ako sa optimálne riešenia líšia

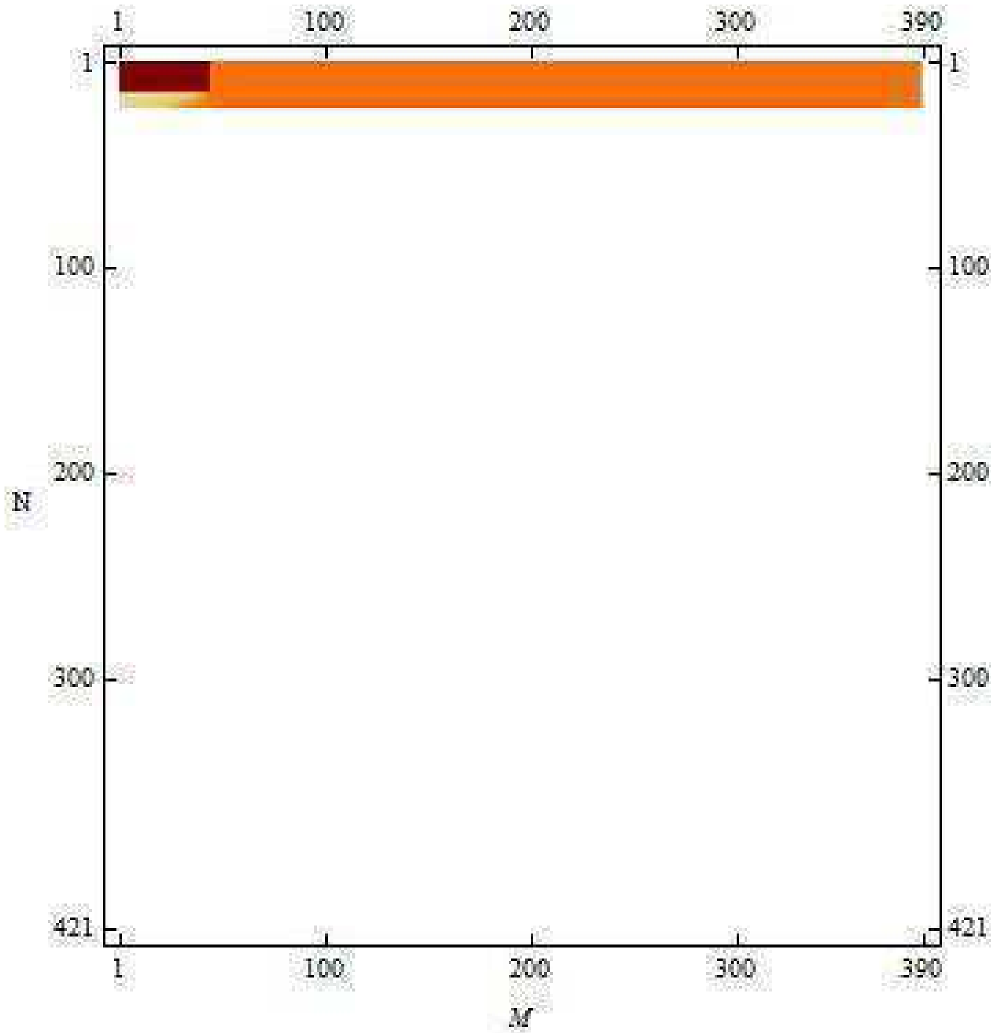
8.1 Výsledky

Na začiatok sme použili diskontný faktor $v = 0,9$. Výsledkom minimalizačnej funkcie sú dve matice s 390 stĺpcami(počet stĺpcov je počtom možností hodnôt, ktoré nadobúda M) a 421 riadkami (počet riadkov je počet možností pre N). Prvá matica, ktorú sme dostali je matica minimálnych hodnôt účelovej funkcie (Obr. 3). Druhá matica je matica hodnôt S, pre ktoré sa nadobúda minimálna hodnota z prvej matice. Kedže tieto matice sú veľkých rozmerov, použili sme na ich znázornenie grafy. Na obrázku 1 vidieť ako vychádzajú hodnoty účelovej funkcie. Ako vidieť z obrázku, s rastúcim N klesajú hodnoty funkcie. Globálne minimum funkcie je potom pre maximálnu možnú hodnotu N a všetky hodnoty M.



Obr. 8.1: Hodnoty účelovej funkcie pre v=0,9

Už vieme, pre ktoré kombinácie M a N nadobúda funkcia minimum. Ešte nás zaujíma, aká je hodnota S, pre ktorú toto minimum vychádza. Na obrázkoch 2 a 3 máme graficky znázornenú maticu hodnôt S prislúchajúcu obrázku 1 a teda diskontnému faktoru $v = 0,9$. Obmedzenia 5 a 6 minimalizačnej úlohy nám zmenšujú interval pre S (pôvodne $(0, 1\,000\,000)$) a preto aj napriek linearite funkcie vychádzajú ako riešenie aj hodnoty pre S rôzne od krajných bodov intervalu.

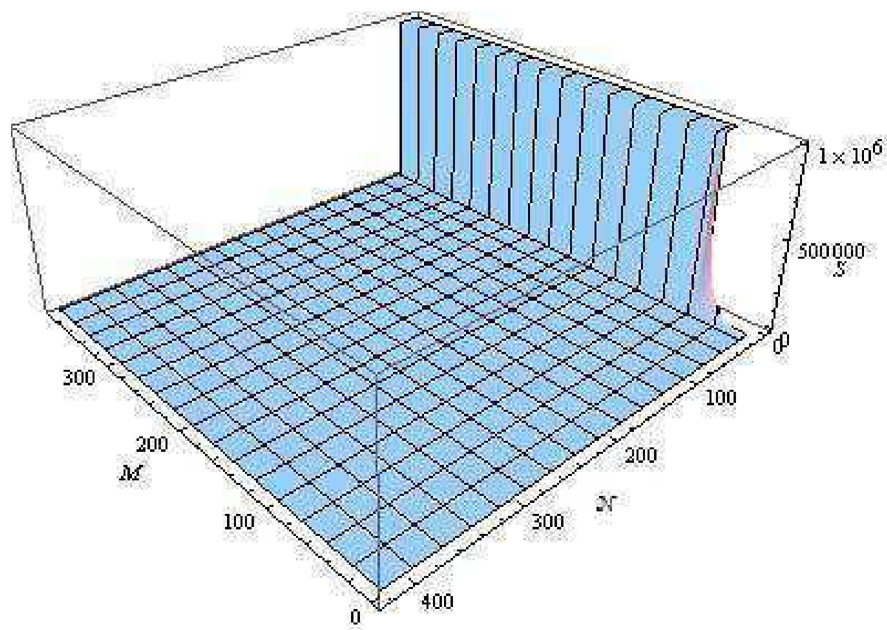


Obr. 8.2: Matica riešení pre v=0,9

Obrázok 2 je graficky znázornená matica hodnôt S. Táto matica obsahuje len 4 rôzne hodnoty (1 000 000, 0, nekonečno a „iné číslo“) a tieto sú znázornené rôznymi farbami. Tmavá časť obrázku vyznačuje miesta, kde je hodnota nekonečno (je to prvých 15 riadkov matice po stĺpec 44, teda pre hodnoty $N = 60$ až $N = 74$ a $M = 73$ až $M = 116$). Tam neexistuje S spĺňajúce podmienky optimality. Bledší pruh pod tým označuje číselné hodnoty (8 riadkov) od 284,65 vľavo hore ($N = 75$ a $M = 73$) rastúce s rastúcim M aj s rastúcim N až po hodnotu 847 843,37 vpravo dole ($N = 82$ a $M = 116$). Oranžová časť, ktorou pokračuje prvých 23 riadkov matice pre M väčšie ako 116 je $S = 1\,000\,000$. Biela časť potom vyznačuje hodnoty $S = 0$. V tejto časti je teda výhodnejšie vziať si hypotéku v plnej výške 1 000 000 Kč na rôzne doby splatnosti.

Pozn.: Bod $(0, 0)$ na grafe je v skutočnosti bod $(60, 73)$ pretože až tam začínajú naše intervaly pre M a N.

Na interpretáciu si vyberieme jednu z hodnôt. Napríklad hodnotu 422 571,09 v matici na pozícii $(16, 43)$. Táto hodnota znamená, že pre $N = 82$ a $M = 116$ je optimálne riešenie založiť stavebné sporenie v cieľovou čiastkou 422 571,09 na dobu 116 mesiacov a vziať si hypotéku vo výške 577 428,91 na 82 mesiacov. Pre stavebné sporenie to znamená, že klient najskôr 24 mesiacov sporí 3 000 Kč (predpokladaná hodnota R ktorú má na začiatku- toto sme si určili), potom požiada o preklenovací úver zo stavebného sporenia a ten následne spláca. Teda nasledujúcich 48 mesiacov spláca 2 021,43 Kč (dosporovanie) a zároveň spláca úroky z preklenovacieho úveru vo výške 2 256,53 Kč. Po 72 mesiacoch potom získa nárok na riadny úver zo staveného sporenia a následne spláca tento po dobu zvyšných 44 mesiacov splátkami výšky 6 434,75 Kč. Počas prvých 82 mesiacov bude ešte klient zároveň splácať 7 929,1 Kč ako pravidelnú mesačnú splátku hypotéky. Takto sa minimalizujú jeho náklady na získanie potrebných finančných prostriedkov a zároveň sú splnené podmienky na minimálne a maximálne dĺžky splácania a tiež podmienka, že v danom čase je schopný splácať maximálne 15 000 Kč mesačne. Prvých 24 mesiacov totiž sporí 3 000 Kč mesačne a spláca 7 929,1 Kč (spolu 10 929,1 Kč), ďalších 48 mesiacov sporí 2 021.43 Kč a spláca $2\,021.43 + 7\,929,1$ Kč teda spolu presne 12 207,06 Kč. Potom ešte 10 mesiacov pláca úver zo stavebného sporenia (6 434,75 Kč) a zároveň hypotéku (7 929,1 Kč)(spolu 14 363,85 Kč). A posledných 34 mesiacov už len spláca úver zo stavebného sporenia splátkami výšky 6 434,75 Kč.

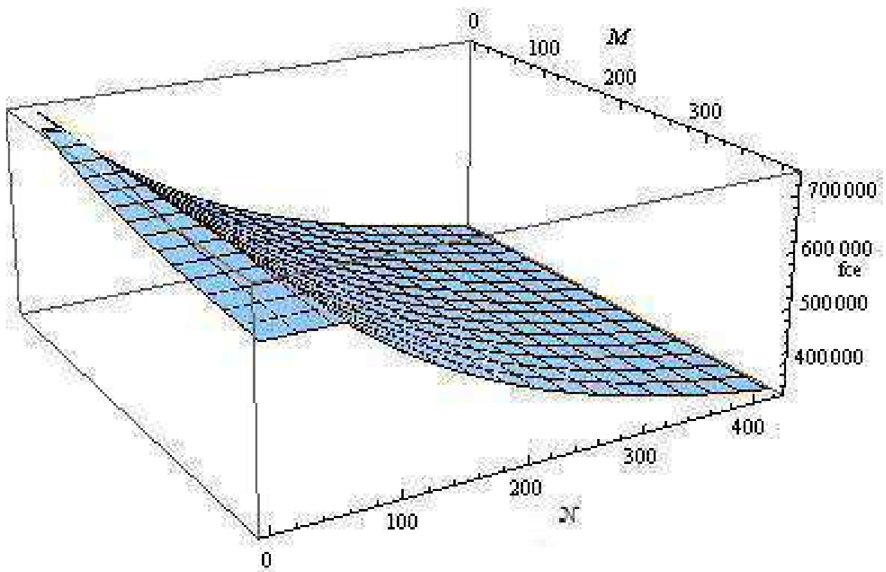


Obr. 8.3: Optimálne riešenie pre v=0,9

Obrázok 3 je 3D zobrazením matice hodnôt S. Vidíme, že S nadobúda hodnotu 0 na väčšine kombinácií M a N a potom prechádza do hodnoty 1 000 000. V pravej časti grafu vidieť úsek kde S nadobúda hodnotu nekonečno aj kde má iné číselné hodnoty (fialová časť). Z obrázku 1 vieme, že účelová funkcia nadobúda globálne minimum v bodoch $(480, 73)$ až $(480, 462)$ a týmto minimom je hodnota 26 238,3. Týmto hodnotám, v ktorých funkcia nadobúda svoje minimum prislúcha v druhej matici (obrázky 2 a 3)hodnota $S = 0$. To znamená, že pre diskontný faktor $v = 0,9$ je optimálne riešenie vziať si hypotéku v plnej výške požadovanej čiastky, teda 1 000 000 Kč na maximálnu možnú dobu splácania, teda 40 rokov (480 mesiacov). Mesačná výška splátky takejto hypotéky je 4 115.24 Kč.

Podobne spočítame výsledky pre rôzne diskontné faktory. Vyskúšame diskontné faktory ešte bližšie ku krajným hodnotám intervalu $(0, 1)$, konkrétne bližšie k číslu 1.

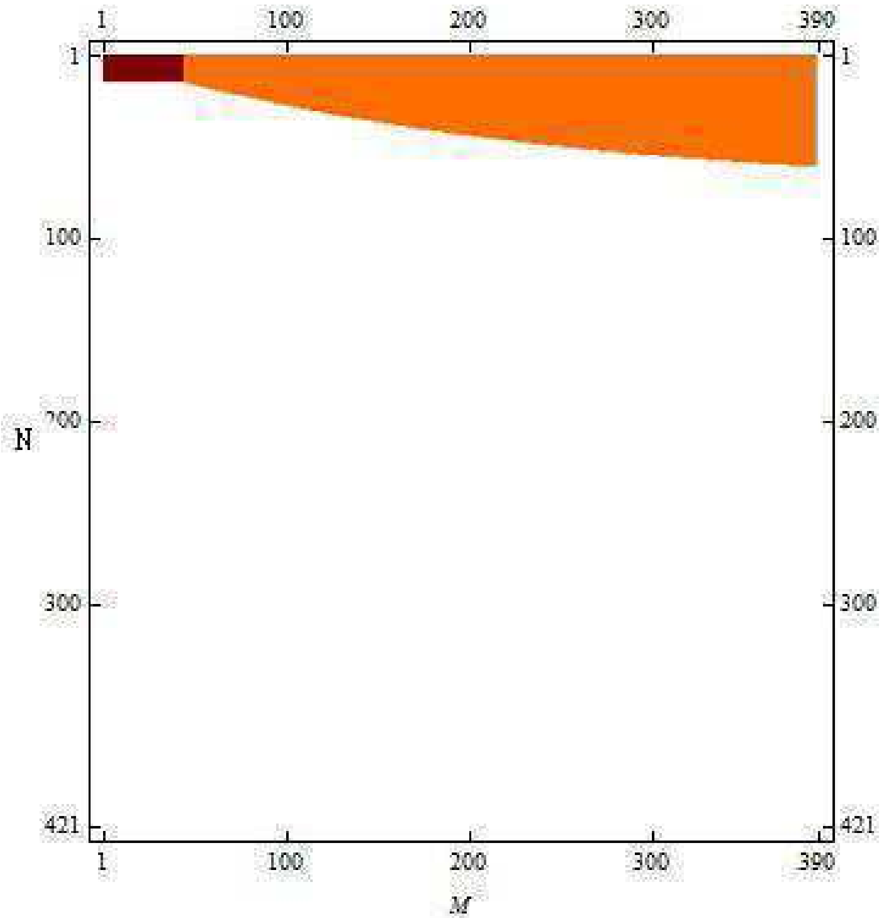
Uvažujme diskontný faktor $v = 0,99$. Z obrázku 4 vidieť, že účelová funkcia klesá s rastúcim N a svoje minimum nadobúda pre $N = 480$ a pre všetky možné hodnoty M.



Obr. 8.4: Hodnoty účelovej funkcie pre v=0,99

Tejto účelovej funkcii odpovedá matica hodnôt S zobrazená na obrázku 5. Táto matica má na prvých 15 riadkoch a prvých 45 stĺpcoch hodnotu nekonečno (teda pre tieto dĺžky splatnosti hypotéky a stavebného sporenia neexistuje S

spĺňajúce zadané podmienky). Na obrázku 5 je hodnota nekonečno tmavou farbou. Oranžová farba vyznačuje časť matice, kde sú hodnoty $S = 1\,000\,000$ a biela časť hodnoty 0. Pre diskotný faktor $v = 0,99$ je teda optimálne riešenie vziať si hypotéku výšky 1 000 000 Kč alebo založiť si stavebné sporenie výšky 1 000 000 Kč v závislosti na M a N.

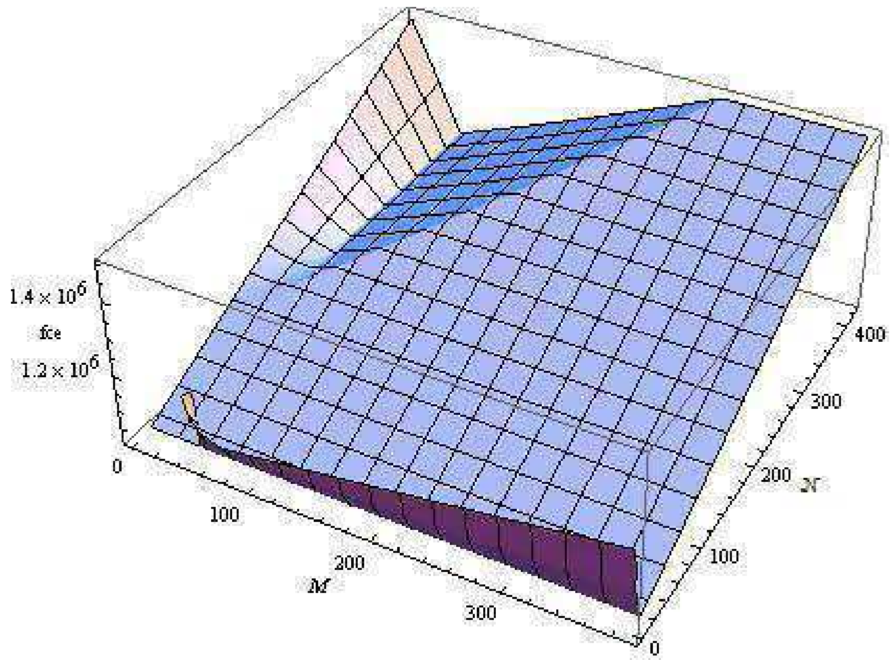


Obr. 8.5: Matica riešení pre v=0,99

Minimu účelovej funkcie odpovedá hodnota S z posledného riadku matice, teda $S = 0$. To znamená, že pre diskontný faktor $v = 0,99$ je opäť optimálne riešenie vziať si hypotéku v plnej výške požadovanej čiastky, teda 1 000 000 Kč na maximálnu možnú dobu splácania, teda 40 rokov (480 mesiacov). Mesačná výška splátky takejto hypotéky je 4 115.24 Kč.

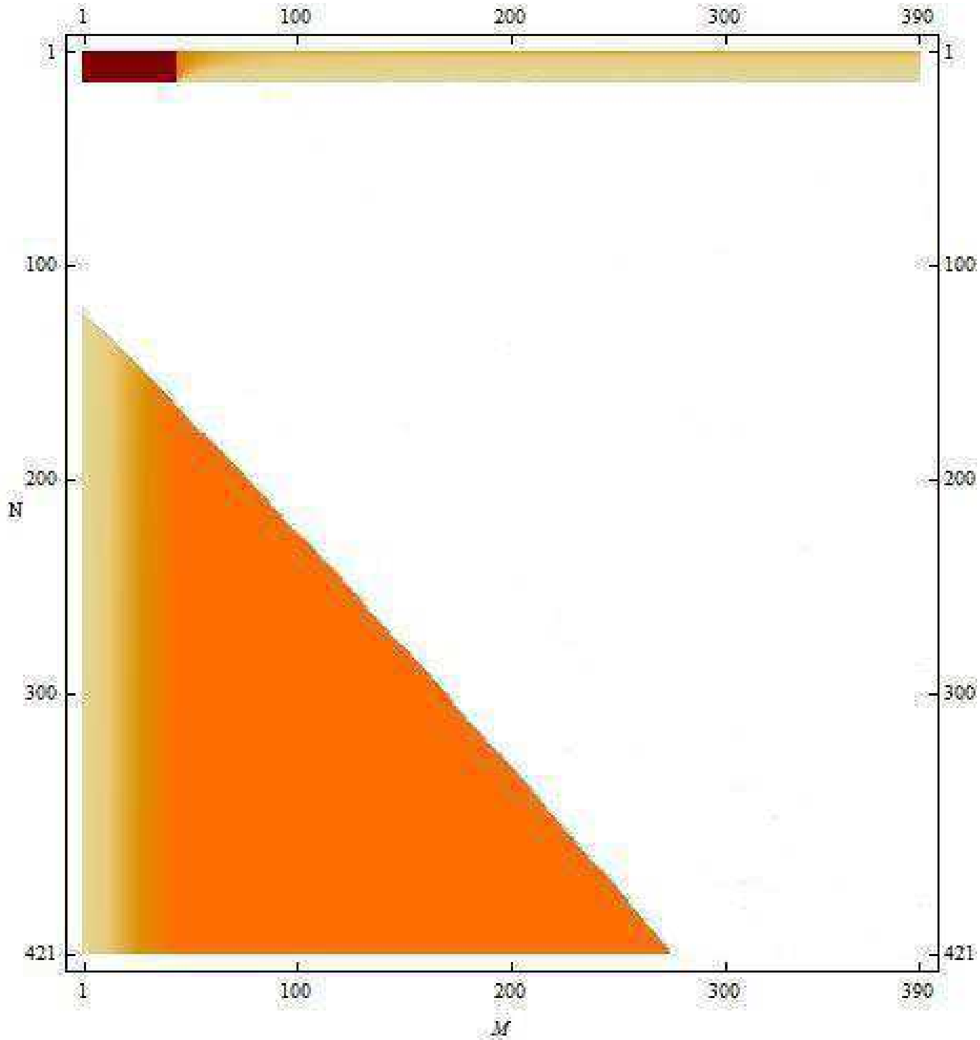
V ďalších výpočtoch uvažujeme $v = 0,999$. Na obrázku 6 máme hodnoty účelovej funkcie pre rôzne kombinácie M a N. Ako vidieť, funkcia klesá s klesajúcim N (až do bodu minima odkiaľ opäť stúpa a to hneď do bodu ∞) (fialová časť obrázku). Minimum nadobúda táto funkcia v bode (15,121), teda pre $N = 74$ a $M = 193$. Týmto minimom je hodnota 1 013 420.

Obrázok 7 ukazuje rozloženie hodnôt v matici tak, ako to bolo u obrázku 1. Biela časť zobrazuje časť matice s nulami, hnedá časť hodnoty ∞ a zvýšná farebná časť rôzne číselné hodnoty. Oranžový pruh hore sú číselné hodnoty tak, že maximálna je vľavo hore a postupne klesá ako po riadkoch tak aj po stĺpcoch. To znamená, že na riadkoch 1 až 15 sú v matici po stĺpec 44 hodnoty nekonečno



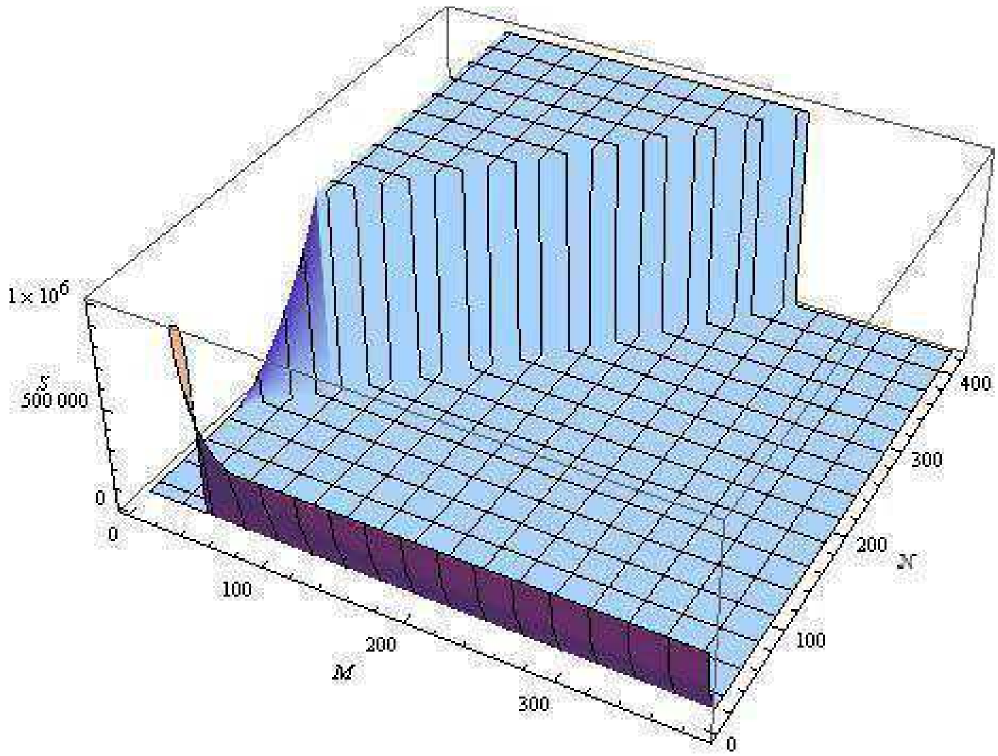
Obr. 8.6: Hodnoty účelovej funkcie v=0,999

(tu neexistuje S spĺňajúce podmienky optimality), v stĺpci 45 je na riadku 1 hodnota 976 545,05. Táto hodnota ku koncu riadku klesá. Posledná hodnota v prvom riadku je 354 215,35. Rovnako klesajú aj hodnoty po stĺpcoch (v prvých 15tich riadkoch matice). To znamená, že v 45 stĺpci je na riadku 1 už spomínaná honota 976 545,05, ktorá po riadkoch klesá, a v tom istom stĺpci je na riadku 15 hodnota 718 173,84. Farebný trojuholník dole začína od riadku 123. V jeho ľavom hornom vrchole je najmenšia hodnota 13 080,39 ktorá postupne smerom dole rastie. V ľavom dolnom rohu trojuholníka je už hodnota 18 266,75. Tieto hodnoty tiež rastú smerom doprava až k hodnote 1 000 000. Celá jednofarebná oranžová časť tohto trojuholníka sú hodnoty 1 000 000.



Obr. 8.7: Matica riešení pre v=0,999

Ako sme už spomenuli vyššie, pre diskontný faktor $v = 0,999$ nadobúda účelová funkcia minimum v bode (15,121), teda hodnota S pre toto minimum sa nachádza v oranžovom hornom pruhu obrázku 5 a je to $S = 924,43$. Optimálnym riešením pre diskontný faktor $v = 0,999$ je teda vziať si hypotéku vo výške 999 075,57 Kč na dobu 74 mesiacov, a zároveň si založiť stavebné sporenie s cieľovou čiastkou 924,43 Kč na dobu 193 mesiacov. Toto riešenie je v praxi nepoužiteľné, kedže vychádza, že klient bude mesačne spácať 14 993,8 Kč na hypotéke a zároveň na stavebnom sporení sporiť či splácať mesačne v priemere asi 5 Kč. (Neaplikovateľné je už zakladať stavebné sporenie na 924 Kč) Takéto „nerozumné“ riešenie spôsobuje obmedzenie 6 optimalizačnej úlohy. Toto obmedzenie dáva pre hodnoty $i = 0.00327, j = 0.00525, R = 72000, m = 24, N = 74, M = 193, S = 0$ hodnotu 15 00,7 (my požadujeme hodnotu menšiu ako 15 000). Táto hodnota pre rastúce S veľmi pomaly klesá a až pri $S = 924,43$ klesne na rovných 15 000.



Obr. 8.8: Optimálne riešenie pre v=0,999

Obrázok 8 je opäť len prekreslením obrázku 6. Tu opäť vidieť, pre ktoré M a N nadobúda S hodnoty 0, pre ktoré nekonečno a pre ktoré nejaké iné číselné hodnoty.

Kapitola 9

Záver

V práci sme zostavili optimalizačnú úlohu, ktorá kombinuje stavebné sporenie a hypotéku a minimalizuje náklady potrebné na získanie finančných prostriedkov vo výške 1 000 000 Kč a zároveň berie do úvahy odlišné preferencie klientov o odloženej a okamžitej spotrebe. Podmienky určujúce prípustné riešenia vychádzali z podmienok stanovených zákonom, stavebnými sporiteľňami a bankami. V poslednej kapitole sme napočítali optimálne riešenie pre tri rôzne subjektívne diskontné faktory. Pre ďalšie výsledky stačí zmeniť niektorý z parametrov v priloženom programe (Príloha 3). Medzi napočítanými výsledkami sú aj výsledky, ktoré síce spĺňajú všetky zadané podmienky, v praxi sú však neaplikovateľné (optimálne riešenie pre subjektívny diskontný faktor $v = 0,999$). Takéto riešenia je možné eliminovať pridaním ďalších podmienok, napríklad podmienky, že stavebné sporenie môže byť vo výške 0, a potom v minimálnej výške napr. 100 000 Kč alebo pridaním podmienky na minimálnu mesačnú splátku stavebného sporenia či hypotéky. Ďalším vylepšením úlohy by mohlo byť pridanie ešte jedného stavebného sporenia či inej formy získania finančných prostriedkov- úveru. Úloha, ktorá by takto vznikla by však mohla strácať význam z praktického hľadiska a tiež by každá ďalšia premenná a podmienka pravdepodobne predĺžila čas trvania výpočtu (počítané v programe Mathematica 7).

Dodatok A

Prílohy

Príloha 1

S	j	x (cas naroku na uver)	y (dlzka splacania uveru)	posledna splatka
50000	2	72	86	275,0
60000	3	72	86	330
75000	4	72	86	412
100000	5	72	86	550
125000	6	72	86	687
150000	7	72	86	824
175000	8	72	86	962
200000	9	72	86	1099
225000	10	72	86	1236
250000	11	72	86	1374
275000	12	72	86	1511
300000	13	72	86	1648
325000	14	72	86	1786
350000	15	72	87	628
375000	16	72	87	2562
400000	17	72	88	1515
425000	18	72	89	96
450000	19	72	89	1670
475000	20	72	89	3245
500000	21	72	90	1089
525000	22	72	90	2482
550000	23	72	90	3876
575000	24	72	91	979
600000	25	72	91	2190
625000	26	72	91	3402
650000	27	72	91	4614
675000	28	72	92	787
700000	29	72	92	1816
725000	30	72	92	2846
750000	31	72	92	3875
775000	32	72	92	4904
800000	33	72	92	5934
825000	34	72	93	804
850000	35	72	93	1650
875000	36	72	93	2496
900000	37	72	93	3343
925000	38	72	93	4189
950000	39	72	93	5035
975000	40	72	93	5881
1000000	41	72	93	6727

Príloha 2

$$g = S - \frac{15\,000 - \frac{R}{72-m} + \frac{1\,000\,000\, i}{1+i-(1+i)^{-n}}}{\beta - \left(\frac{i}{1+i-(1+i)^{-n}}\right)};$$

```
D[D[g, n], n] =
```

$$-\frac{2\, i^2\, (1+i)^{-2n} \left(15\,000 + \frac{1\,000\,000\, i}{1+i-(1+i)^{-n}} - \frac{R}{72-m}\right) \mathrm{Log}[1+i]^2}{(1+i-(1+i)^{-n})^4 \left(-\frac{i}{1+i-(1+i)^{-n}} + \beta\right)^3}$$

$$-\frac{2\,000\,000\, i^2\, (1+i)^{-2n}\, \mathrm{Log}[1+i]^2}{(1+i-(1+i)^{-n})^4 \left(-\frac{i}{1+i-(1+i)^{-n}} + \beta\right)^2} - \frac{2\, i\, (1+i)^{-2n} \left(15\,000 + \frac{1\,000\,000\, i}{1+i-(1+i)^{-n}} - \frac{R}{72-m}\right) \mathrm{Log}[1+i]^2}{(1+i-(1+i)^{-n})^3 \left(-\frac{i}{1+i-(1+i)^{-n}} + \beta\right)^2}$$

$$-\frac{i\, (1+i)^{-n} \left(15\,000 + \frac{1\,000\,000\, i}{1+i-(1+i)^{-n}} - \frac{R}{72-m}\right) \mathrm{Log}[1+i]^2}{(1+i-(1+i)^{-n})^2 \left(-\frac{i}{1+i-(1+i)^{-n}} + \beta\right)^2}$$

$$-\frac{2\,000\,000\, i\, (1+i)^{-2n}\, \mathrm{Log}[1+i]^2}{(1+i-(1+i)^{-n})^3 \left(-\frac{i}{1+i-(1+i)^{-n}} + \beta\right)} - \frac{1\,000\,000\, i\, (1+i)^{-n}\, \mathrm{Log}[1+i]^2}{(1+i-(1+i)^{-n})^2 \left(-\frac{i}{1+i-(1+i)^{-n}} + \beta\right)}$$

Príloha 3

```
Clear[m, n, i, v, f, S, R, x, g, h, min]
m = 24;
i = 0.00327;
j = 0.00525;
R = 3000 m;
v = 0.9;
```

Zavedieme dalsie premenne aby sa lahsie menilo zadanie ulohy

```
CC = 1 000 000;
r = 0.00534;
mez = 15 000;
```

$$f[S\_, m\_, R\_, v\_, n\_, M\_, i\_, j\_, r\_, CC\_] := \frac{0.4\,S - R}{72 - m}\,\frac{1 - v^{73-m}}{1 - v} + S * r * \frac{1 - v^{73-m}}{1 - v} + 0.6\,S\,\frac{j}{-(j+1)^{73-M} + j + 1}\,\frac{v\left(v^{M} - v^{72}\right)}{v - 1} + \frac{i\,(CC - S)}{-(i+1)^{-n} + i + 1}\,\frac{v^{n+1} - 1}{v - 1};$$

$$g[S\_, m\_, R\_, v\_, n\_, M\_, i\_, j\_, r\_, CC\_] := \left(\frac{0.4\,S - R}{(72 - m)} + S * r\right) + \frac{(CC - S)\,i}{-(i+1)^{-n} + i + 1};$$

$$x[S\_, m\_, R\_, v\_, n\_, M\_, i\_, j\_, r\_, CC\_] := S\,0.6\left(\frac{j}{-(j+1)^{73-M} + j + 1}\right) + \frac{(CC - S)\,i}{-(i+1)^{-n} + i + 1};$$

```
min[M_, n_] :=
 NMinimize [{f[S, m, R, v, n, M, i, j, r, CC], g[S, m, R, v, n, M, i, j, r, CC] ≤ mez &&
    x[S, m, R, v, n, M, i, j, r, CC] ≤ mez && 0 ≤ S ≤ CC && 73 ≤ M ≤ 462 && 60 ≤ n ≤ 480}, S]
```

```
out = Table[min[M, n], {n, 60, 480} , {M, 73, 462}];
w = Table[Map[out⟦i, #, 1⟧ &, Range[Length[out⟦i⟧]]], {i, 1, Length[out]}];
z = Table[Map[out⟦i, #, 2, 1, 2⟧ &, Range[Length[out⟦i⟧]]], {i, 1, Length[out]}];
```

```
z // MatrixForm;
```

```
mat = Chop[z, 10^(-6)];
ListPlot3D[w, AxesLabel → {"M", "n", "fce"}]
ListPlot3D[mat, AxesLabel → {"M", "n", "S"}]
MatrixPlot[mat, FrameLabel → {"n", "M"}]
Position[w, Min[w]]
Min[w]
```

Literatúra

[1] Cipra, T. (2005): *Praktický průvodce finanční a poistnou matematikou*, SNTL, Praha a ALFA, Bratislava.

[2] Lachout, P. (2008): *Matematické programování*, pracovný text k prednáške „EKN011 Optimalizace I“, http://www.karlin.mff.cuni.cz/ lachout/Vyuka/Optima1/081026-Opt-text.pdf

[3] Modrá pyramida stavební spořitelna, a.s. : *Všeobecné obchodní podmínky stavebního spoření*, VOP schváleny Rozhodnutím Ministerstva financí ze dne 6.2.2006, č.j. 905/19621/2006