Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Zuzana Sviteková

Anuity s náhodnými úrokovými mírami

Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce:
prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Študijný program:
Matematika
Finančná a poistná matematika

2009

Na tomto mieste by som rada poďakovala prof. RNDr. Tomášovi Ciprovi, DrSc. za jeho trpezlivosť, cenné rady a pomoc pri vedení mojej práce.

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím s požičiavaním práce.

V Prahe dňa 30. marca 2009 Zuzana Sviteková

Obsah

Názov práce: Anuity s náhodnými úrokovými mierami
Autor: Zuzana Sviteková
Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky
Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.
e-mail vedúceho: Tomas.Cipra@mff.cuni.cz

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá budúcou hodnotou anuít s ročnými platbami s náhodnými úrokovými mierami. Zameriava sa na bežné anuity s platbami meniacimi sa podľa aritmetickej a geometrickej postupnosti. V práci sú odvodené vzorce pre priemer a rozptyl budúcich hodnôt anuít. Na začiatku (kapitola 2) sú uvedené vzťahy pre budúcu hodnotu anuít s pevnými úrokovými mierami. Hlavnou časťou práce je kapitola 3, v ktorej sú dokázané vzorce platné pre priemer a rozptyl budúcej hodnoty anuít s náhodnými úrokovými mierami. Práca vychádza z článkov [**4**] a [**1**], pričom je zameraná hlavne na článok [**1**], v ktorom sú už opravené chyby z článku [**4**]. Na záver (kapitola 4) sú uvedené špeciálne prípady anuít s numerickým a grafickým riešením.
Kľúčové slová: anuita, náhodná úroková miera, budúca hodnota.

Title: Annuities under random rates of interest
Author: Zuzana Sviteková
Department: Faculty of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.
Supervisor's e-mail address: Tomas.Cipra@mff.cuni.cz

Abstract: The thesis describes accumulated values of annuities with yearly payments under independent random interest rates. The thesis focuses on general annuities with payments varying in arithmetic and geometric progressions which are important varying annuities. Mean and variance formulae of the final values of the annuities are derived in the thesis. In the beginning (chapter 2) the formulae of the final values of the annuities under fixed rates of interest are shown. Chapter 3 is the main part of the thesis. The mean and variance formulae of the final values of the annuities under random rates of interest are proofed here. The thesis is based on the article [**4**] and [**1**]. It is especially focused on the article [**1**] which corrects main outcome of the article [**4**]. In the end (chapter 4) special cases of the annuites with numerical and graphical solutions are shown.
Keywords: annuity, random interest rate, accumulated value.

KAPITOLA 1

Úvod

Anuita je definovaná ako postupnosť platieb počas určitej doby. Táto práca sa zameriava na anuity s platbami meniacimi sa podľa aritmetickej a geometrickej postupnosti. Väčšinou sa pre jednoduchosť predpokladá, že úrokové miery sú pevne dané a rovnaké počas všetkých rokov. Aj napriek tomu, že úrokové miery, ktoré sa použijú počas nasledujúcich rokov nie sú teraz známe ani konštanté. Preto je vhodné uvažovať úrokové miery meniace sa náhodným spôsobom v čase. Táto práca je preto zameraná na anuity s náhodnými úrokovými mierami.

Predpokladáme, že ročné úrokové miery sú navzájom nezávislé náhodné veličiny s normálnym rozdelením. Použijeme tento predpoklad na výpočet rekurzívnych predpisov, základných charakteristík, ktorými sú priemer a rozptyl budúcich hodnôt anuít s platbami meniacimi sa podľa aritmetickej a geometrickej postupnosti.

Práca čerpá hlavne z článkov [**4**] a [**1**], pričom je zameraná hlavne na článok [**1**]. Cieľom práce je zhrnutie poznatkov z oboch článkov, doplnenie chýbajúcich dôkazov a skontrolovanie správnosti výsledkov uvedených v týchto dvoch článkoch. Práca vychádza predovšetkým z článku [**1**], pretože sú v ňom už opravené chyby z článku [**4**]. Všetky výsledky v práci sú dôkladne dokázané.

V kapitole 2 zavedieme základné princípy platné v teórii anuít. Uvedieme vzťahy platné pre ročnú diskontnú mieru, ročný diskontný faktor. Za predpokladu pevných úrokových mier sa zaoberáme budúcimi hodnotami konštantných, štandardne rastúcich, rastúcich anuít s platbami výšky $1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ k^2$ a štandardne klesajúcich anuít. Na konci kapitoly 2 riešime prípad anuít meniacich sa v aritmetickej a geometrickej postupnosti.

Hlavnou časťou práce je kapitola 3, v ktorej študujeme budúce hodnoty anuít s náhodnými úrokovými mierami. Uvažujeme úrokové miery ako náhodné veličiny s normálnym rozdelením. Použitím rekurzívnych vzťahov vypočítame prvý a druhý moment, ako aj rozptyl budúcich hodnôt anuít. To riešime najskôr pre anuity meniace sa podľa aritmetickej postupnosti, nakoniec pre anuity meniace sa podľa geometrickej postupnosti.

Článok [**1**] opravuje chyby z článku [**4**]. Pre názornosť sú v kapitole 4 graficky zobrazené konkrétne výsledky, v ktorých je poukázané na tieto chyby. Sú tu uvedené špeciálne prípady anuít s numerickým a grafickým riešením.

KAPITOLA 2

Anuity s pevnými úrokovými mierami

2.1. Úroková miera, diskontná miera, diskontný faktor

Najskôr si pripomeňme základné značenie používané v teórií anuít. Predpokladáme, že ročná úroková miera j je pevná počas doby n rokov.

Ročná diskontná miera d je daná vzorcom

$$(1+j)d = j. \tag{1}$$

Ročný diskontný faktor v je daný vzorcom

$$(1+j)v = 1. \tag{2}$$

Z toho dostávame nasledujúce vzťahy

$$d = jv, \tag{3}$$

$$v + d = 1. \tag{4}$$

2.2. Budúca hodnota konštantnej anuity

Budúca hodnota anuity je čiastka nakumulovaná anuitnými platbami k referenčnému dátumu, ktorý leží v čase za všetkými platbami systému.

Predpokladáme, že $k \leq n$, ak nie je určené inak.

Budúca hodnota predlehotnej anuity s k *ročnými platbami výšky* 1 po k rokoch je označená $\ddot{s}_{\overline{k|}j}$ a daná predpisom

$$\ddot{s}_{\overline{k|}j} = (1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j). \tag{5}$$

Odkiaľ ľahko odvodíme matematickými úpravami

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{k|}j} &= (1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j) \\
&= (1+j)\left[(1+j)^{k-1} + (1+j)^{k-2} + \ldots + 1\right] \\
&= (1+j)\frac{(1+j)^k - 1}{1+j-1} \\
&= (1+j)\frac{(1+j)^k - 1}{j} \\
&= \frac{(1+j)^k - 1}{d}.
\end{aligned}$$

Teda

$$\ddot{s}_{\overline{k|}j} = \frac{(1+j)^k - 1}{d} \tag{6}$$

Zo vzťahu (5) odvodíme rekurzívny vzorec pre $\ddot{s}_{\overline{k}|j}$

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{k}|j} &= (1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j)\\ &= (1+j)\big[(1+j)^{k-1} + (1+j)^{k-2} + \ldots + 1\big]\\ &= (1+j)(\ddot{s}_{\overline{k-1}|j} + 1).\end{aligned}$$

Teda

$$\ddot{s}_{\overline{k}|j} = (1+j)(1+\ddot{s}_{\overline{k-1}|j}). \tag{7}$$

Pre polehotnú anuitu s budúcou hodnotou $s_{\overline{k}|j}$ zrejme platí

$$s_{\overline{k}|j} = v\ddot{s}_{\overline{k}|j}.$$

2.3. Budúca hodnota štandardne rastúcej anuity

Budúca hodnota štandardne rastúcej anuity s k ročnými platbami výšky $1, 2, \ldots, k$ v tomto poradí po k rokoch je označená $(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}$ a daná predpisom

$$(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + k(1+j). \tag{8}$$

Odkiaľ odvodíme

$$\begin{aligned}(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} &= (1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + (k-1)(1+j)^2 + k(1+j)\\ &= (1+j)\big[(1+j)^{k-1} + 2(1+j)^{k-2} + \ldots + (k-1)(1+j) + k\big]\\ &= (1+j)\left[\frac{(1+j)^k-1}{1+j-1} + \frac{(1+j)^{k-1}-1}{1+j-1} + \ldots + \frac{(1+j)^2-1}{1+j-1} + \frac{(1+j)^1-1}{1+j-1}\right]\\ &= \frac{(1+j)}{j}\big[(1+j)^k - 1 + (1+j)^{k-1} - 1 + \ldots + (1+j)^2 - 1 + (1+j) - 1\big]\\ &= \frac{1}{d}\big[(1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j) - k\big]\\ &= \frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d}.\end{aligned}$$

Teda

$$(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = \frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d}. \tag{9}$$

Zo vzťahu (8) odvodíme rekurzívny vzorec pre $(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}$

$$\begin{aligned}(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} &= (1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + (k-1)(1+j)^2 + k(1+j)\\ &= (1+j)\big[(1+j)^{k-1} + 2(1+j)^{k-2} + \ldots + (k-1)(1+j) + k\big]\\ &= (1+j)\big((I\ddot{s})_{\overline{k-1}|j} + k\big).\end{aligned}$$

Teda

$$(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (1+j)\big((I\ddot{s})_{\overline{k-1}|j} + k\big). \tag{10}$$

2.4. Budúca hodnota rastúcej anuity s ročnými platbami $1^2, 2^2, \ldots, k^2$

Budúca hodnota rastúcej anuity s k ročnými platbami $1^2, 2^2, \ldots, k^2$ v tomto poradí po k rokoch je označená $(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j}$ a daná predpisom

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (1+j)^k + 2^2(1+j)^{k-1} + \ldots + k^2(1+j). \tag{11}$$

Veta 1 Platí

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} = \frac{2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - \ddot{s}_{\overline{k}|j} - k^2}{d}. \tag{12}$$

Dôkaz. Podľa vzťahu (4), (2) a (11) máme

$$d(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} - v(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j}$$

$$= \big[(1+j)^k + 2^2(1+j)^{k-1} + \ldots + k^2(1+j)\big] - \frac{1}{1+j}\big[(1+j)^k + \ldots + k^2(1+j)\big]$$

$$= \big[(1+j)^k + 2^2(1+j)^{k-1} + \ldots + k^2(1+j)\big] - \big[(1+j)^{k-1} + \ldots + k^2\big]$$

$$= (1+j)^k + (2^2-1^2)(1+j)^{k-1} + \ldots + (k^2-(k-1)^2)(1+j) - k^2$$

$$= (1+j)^k + (2^2-1^2)(1+j)^{k-1} + (3^2-2^2)(1+j)^{k-1} + \ldots + (2k-1)(1+j) - k^2$$

$$= (2\cdot1-1)(1+j)^k + (2\cdot2-1)(1+j)^{k-1} + (2\cdot3-1)(1+j)^{k-1} + \ldots + (2k-1)(1+j) - k^2$$

$$= 2\big[(1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + k(1+j)\big] - \big[(1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j)\big] - k^2$$

$$= 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - \ddot{s}_{\overline{k}|j} - k^2$$

Teda

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} = \frac{2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - \ddot{s}_{\overline{k}|j} - k^2}{d}$$

■

Zo vzťahu (11) odvodíme rekurzívny vzorec pre $(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j}$

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (1+j)^k + 2^2(1+j)^{k-1} + \ldots + (k-1)^2(1+j)^2 + k^2(1+j)$$
$$= (1+j)\big[(1+j)^{k-1} + 2^2(1+j)^{k-2} + \ldots + (k-1)^2(1+j) + k^2\big]$$
$$= (1+j)\big((I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|j} + k^2\big).$$

Teda

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (1+j)\big((I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|j} + k^2\big). \tag{13}$$

Nasledujúci dôsledok vyjadruje vzťah medzi $(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j}$ a $\ddot{s}_{\overline{k}|j}$.

Dôsledok 1 Platí

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} = \frac{(1+v)(\ddot{s}_{\overline{k}|j} + k^2) - 2k - 2k^2}{d^2} \tag{14}$$

Dôkaz. Do vzorca (12) dosadíme vzorec (9) a dostávame

$$\begin{aligned}
(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} &= \frac{2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - \ddot{s}_{\overline{k}|j} - k^2}{d} \\
&= \frac{2\frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d} - \ddot{s}_{\overline{k}|j} - k^2}{d} \\
&= \frac{2\ddot{s}_{\overline{k}|j} - 2k - d\ddot{s}_{\overline{k}|j} - dk^2}{d^2} \\
&= \frac{(2-d)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - 2k - dk^2 + (2-2)k^2}{d^2} \\
&= \frac{(1+v)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - 2k - 2k^2 + (2-d)k^2}{d^2} \\
&= \frac{(1+v)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - 2k - 2k^2 + (1+v)k^2}{d^2} \\
&= \frac{(1+v)(\ddot{s}_{\overline{k}|j} + k^2) - 2k - 2k^2}{d^2}.
\end{aligned}$$

■

Odvodíme ešte dve rovnice, ktoré budeme neskôr používať:

$$(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + k(1+j)$$

$$= \big[(1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j)\big] + \big[(1+j)^{k-1} + 2(1+j)^{k-2} + \ldots + (k-1)(1+j)\big]$$

$$= (I\ddot{s})_{\overline{k-1}|j} + \ddot{s}_{\overline{k}|j}.$$

Teda platí

$$(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|j} = (I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - \ddot{s}_{\overline{k}|j}. \tag{15}$$

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|j} = (1+j)^{k-1} + 2^2(1+j)^{k-2} + \ldots + (k-1)^2(1+j)$$

$$= (2^2 - 2\cdot 2 + 1)(1+j)^{k-1} + (3^2 - 2\cdot 3 + 1)(1+j)^{k-2} + \ldots + (k^2 - 2\cdot k + 1)(1+j)$$

$$= \big[2^2(1+j)^{k-1} + 3^2(1+j)^{k-2} + \ldots + k^2(1+j)\big] - 2\big[2(1+j)^{k-1} + 3(1+j)^{k-2} + \ldots + k(1+j)\big]$$

$$+\big[(1+j)^{k-1} + (1+j)^{k-2} + \ldots + (1+j)\big]$$

$$= \big[(1+j)^k + 2^2(1+j)^{k-1} + \ldots + k^2(1+j)\big] - 2\big[(1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + k(1+j)\big]$$

$$+\big[(1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j)\big]$$

$$= (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} - 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} + \ddot{s}_{\overline{k}|j}.$$

Teda platí

$$(I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|j} = (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j} - 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} + \ddot{s}_{\overline{k}|j}. \tag{16}$$

2.5. Budúca hodnota štandardne klesajúcej anuity

Budúca hodnota štandardne klesajúcej anuity s platbami výšky $n, n-1, \ldots, n-k+1$ v tomto poradí po k rokoch je označená $(D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j}$ a daná predpisom

$$(D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j} = n(1+j)^k + (n-1)(1+j)^{k-1} + \ldots + (n-k+1)(1+j). \tag{17}$$

Zo vzťahu (17) odvodíme rekurzívny vzorec pre $(D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j}$

$$(D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j} = n(1+j)^k + (n-1)(1+j)^{k-1} + \ldots + (n-k+1)(1+j)$$
$$= (1+j)\big[n(1+j)^{k-1} + (n-1)(1+j)^{k-2} + \ldots + (n-k+2)(1+j) + (n-k+1)\big]$$
$$= (1+j)\big((D\ddot{s})_{\overline{n,k-1}|j} + (n-k+1)\big).$$

Teda

$$(D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j} = (1+j)\big((D\ddot{s})_{\overline{n,k-1}|j} + (n-k+1)\big). \tag{18}$$

Odvodíme si vzťah medzi $(D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j}$ a $(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}$.

$$(D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j} = n(1+j)^k + (n-1)(1+j)^{k-1} + \ldots + (n-k+1)(1+j)$$
$$= (n+1-1)(1+j)^k + (n+1-2)(1+j)^{k-1} + \ldots + (n+1-k)(1+j)$$
$$= (n+1)\big[(1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j)\big] - \big[(1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + k(1+j)\big]$$
$$= (n+1)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - (I\ddot{s})_{\overline{k}|j}.$$

Teda

$$(D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j} = (n+1)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - (I\ddot{s})_{\overline{k}|j}. \tag{19}$$

Vidíme, že súčet budúcej hodnoty štandardne rastúcej anuity a jej zodpovedajúcej štandardne klesajúcej anuity je budúca hodnota konštantnej anuity.

2.6. Budúca hodnota anuity s platbami v aritmetickej postupnosti

Budúca hodnota anuity s platbami v aritmetickej postupnosti po k rokoch je označená $(\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}$. Prvá platba je p. Postupne rastie o q za obdobie, teda vytvára postupnosť $\{p,\ p+q,\ p+2q,\ p+3q,\ \ldots,\ p+(k-1)q\}$. Hodnota p musí byť kladná, ale q môže byť aj záporné, pokiaľ $p+(k-1)q > 0$, aby sme sa vyhli záporným platbám.

Platí

$$(\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = p(1+j)^k + (p+q)(1+j)^{k-1} + \ldots + [p+(k-1)q](1+j). \tag{20}$$

Jednoduchým výpočtom vyjadríme zo vzorca (20) vzťah voči $\ddot{s}_{\overline{k}|j}$ a $(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}$.

$$(\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = p(1+j)^k + (p+q)(1+j)^{k-1} + \ldots + \big[p+(k-1)q\big](1+j)$$
$$= (p-q+q)(1+j)^k + (p-q+2q)(1+j)^{k-1} + \ldots + (p-q+kq)(1+j)$$
$$= (p-q)\big[(1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j)\big] + q\big[(1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + k(1+j)\big]$$
$$= (p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + q(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}.$$

Teda

$$(\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = (p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + q(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}. \tag{21}$$

Špeciálne prípady:

- *Budúca hodnota anuity s k ročnými platbami výšky* 1, tj.
  $p = 1, \qquad q = 0$:
  $$(\ddot{s}_a)^{(1,0)}_{\overline{k}|j} = (1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j) = \ddot{s}_{\overline{k}|j}.$$
- *Budúca hodnota štandardne rastúcej anuity s k ročnými platbami výšky* $1, 2, \ldots, k$, tj.
  $p = 1, \qquad q = 1$:
  $$(\ddot{s}_a)^{(1,1)}_{\overline{k}|j} = (1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \ldots + k(1+j) = (I\ddot{s})_{\overline{k}|j}.$$
- *Budúca hodnota klesajúcej anuity s platbami výšky* $n, n-1, \ldots, n-k+1$, tj.
  $p = n, \qquad q = -1$:

$$(\ddot{s}_a)^{(n,-1)}_{\overline{k}|j} = n(1+j)^k + (n-1)(1+j)^{k-1} + \ldots + (n-k+1)(1+j) = (D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j}.$$

2.7. Budúca hodnota anuity s platbami v geometrickej postupnosti

Budúca hodnota anuity s platbami v geometrickej postupnosti po k rokoch je označená $(\ddot{s}_q)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}$. Prvá platba je p, postupne sa platby zvyšujú v geometrickej postupnosti s koeficientom q ($q \neq 1+j$) za 1 obdobie. Teda ide o postupnosť $\{p,\ pq,\ pq^2,\ pq^3,\ \ldots,\ pq^{k-1}\}$. Hodnoty $p, q > 0$, aby sme sa vyhli záporným platbám.

Platí

$$(\ddot{s}_q)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = p(1+j)^k + (pq)(1+j)^{k-1} + (pq^2)(1+j)^{k-2} + \ldots + (pq^{k-1})(1+j). \quad (22)$$

Jednoduchým výpočtom vyjadríme zo vzorca (22) ďalší vzorec.

$$\begin{aligned}(\ddot{s}_q)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} &= p(1+j)^k + (pq)(1+j)^{k-1} + (pq^2)(1+j)^{k-2} + \ldots + (pq^{k-1})(1+j)\\ &= p(1+j)\big[(1+j)^{k-1} + q(1+j)^{k-2} + q^2(1+j)^{k-3} + \ldots + q^{k-1}\big]\\ &= p(1+j)\frac{(1+j)^k - q^k}{1+j-q}.\end{aligned}$$

Teda

$$(\ddot{s}_q)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = p(1+j)\frac{(1+j)^k - q^k}{1+j-q}, \quad (23)$$

kde $q \neq 1+j$.

(Pre $q = 1+j$ by sme zrejme dostali $(\ddot{s}_q)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = kpq^k$.)

Špeciálne prípady:

- *Budúca hodnota anuity s k ročnými platbami výšky* 1, tj.
  $p = 1, \qquad q = 1$:
  $$(\ddot{s}_q)^{(1,1)}_{\overline{k}|j} = (1+j)^k + (1+j)^{k-1} + \ldots + (1+j) = \ddot{s}_{\overline{k}|j}. \quad (24)$$

○ *Budúca hodnota anuity s platbami* $1,\ 1+u, (1+u)^2,\ \ldots,\ (1+u)^{k-1}$, tj. $p = 1, \qquad q = 1+u$:

$$\begin{aligned}(\ddot{s}_q)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|j} &= (1+j)^k + (1+u)(1+j)^{k-1} + \ldots + (1+u)^{k-1}(1+j) \\ &= (1+j)^k\left[1 + \frac{1+u}{1+j} + \ldots + \left(\frac{1+u}{1+j}\right)^{k-1}\right] \\ &= (1+j)^k\left[1 + (1+t) + \ldots + (1+t)^{k-1}\right] \\ &= (1+j)^k \frac{1}{1+t}\left[(1+t) + (1+t)^2 \ldots + (1+t)^k\right] \\ &= \frac{(1+j)^k}{1+t}\ddot{s}_{\overline{k}|t}, \end{aligned} \tag{25}$$

kde t je riešenie rovnice $1+u = (1+j)(1+t)$.

KAPITOLA 3

Anuity s náhodnými úrokovými mierami

3.1. Úvod

Predpokladáme, že *ročná úroková sadzba v k-tom roku* je náhodná veličina i_k. Predpokladáme, že pre každé k je $E(i_k) = j > 0$ a $Var(i_k) = s^2$. Predpokladáme, že náhodné veličiny $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n$ sú nezávislé.

Píšeme

$$E(1 + i_k) = 1 + j = \mu \tag{26}$$

a

$$E\big[(1 + i_k)^2\big] = E(1 + 2i_k + i_k^2) = 1 + E(2i_k) + E(i_k^2)$$

$$= 1 + 2j + [E(i_k)]^2 + Var(i_k) = 1 + 2j + j^2 + s^2$$

$$= (1 + j)^2 + s^2 = 1 + f = m,$$

kde $f = 2j + j^2 + s^2$.

Teda

$$E\big[(1 + i_k)^2\big] = (1 + j)^2 + s^2 = 1 + f = m, \tag{27}$$

kde

$$f = 2j + j^2 + s^2. \tag{28}$$

Je zrejmé

$$Var(1 + i_k) = m - \mu^2. \tag{29}$$

Definujeme r ako riešenie rovnice

$$1 + r = \frac{1 + f}{1 + j}. \tag{30}$$

Teda

$$r = \frac{f - j}{1 + j}. \tag{31}$$

Použitím vzťahu (28) máme

$$r = j + \frac{s^2}{1 + j}. \tag{32}$$

3.2. Budúca hodnota anuity s platbami $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k$

Budúca hodnota anuity s k-ročnými platbami $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k$ v tomto poradí po k rokoch je náhodná veličina C_k daná predpisom

$$C_k = (1+i_k)(1+i_{k-1})\ldots(1+i_1)c_1$$

$$+(1+i_k)(1+i_{k-1})\ldots(1+i_2)c_2+\ldots+(1+i_k)c_k,$$

$$\text{kde } k = 1,\ \ldots,\ n. \tag{33}$$

Zo vzorca (33) odvodíme rekurentný vzorec

$$C_k = \big[(1+i_k)(1+i_{k-1})\ldots(1+i_1)c_1\big]+\big[(1+i_k)(1+i_{k-1})\ldots(1+i_2)c_2\big]+\ldots+(1+i_k)c_k$$

$$= (1+i_k)\Big[\big[(1+i_{k-1})\ldots(1+i_1)c_1\big]+\big[(1+i_{k-1})\ldots(1+i_2)c_2\big]+\ldots+\big[(1+i_{k-1})c_{k-1}\big]+c_k\Big]$$

$$= (1+i_k)(C_{k-1}+c_k),\ \text{kde } k = 2,\ \ldots,\ n.$$

Teda

$$C_k = (1+i_k)(C_{k-1}+c_k),\ \text{kde } k = 2,\ \ldots,\ n. \tag{34}$$

Predpokladáme, že $c_1 = 1$, a píšeme

$$E(C_k) = \mu_k, \tag{35}$$

$$E(C_k^2) = m_k. \tag{36}$$

Z toho vyplýva

$$\mu_1 = E(C_1) = E[(1+i_1)c_1] = E(1+i_1) = 1+j = \mu,$$

$$m_1 = E(C_1^2) = E[(1+i_1)^2c_1^2] = E[(1+i_1)^2] = (1+j)^2+s^2 = 1+f = m.$$

Teda

$$\mu_1 = \mu, \tag{37}$$

$$m_1 = m. \tag{38}$$

Zo vzorcov (35) a (36) vyplýva

$$Var(C_k) = E(C_k^2) - [E(C_k)]^2 = m_k - \mu_k^2.$$

Teda

$$Var(C_k) = m_k - \mu_k^2. \tag{39}$$

Príklad 3.1

Uvažujme $c_1 = 1, c_2 = c_3 = \ldots = c_k = 0$. Teda ide o *prípad jednorázovej investície na začiatku prvého roku.* V tomto prípade máme

$$C_k = (1 + i_k)(1 + i_{k-1}) \ldots (1 + i_1) = (1 + i_k)C_{k-1}, k = 2, \ldots, n. \tag{40}$$

Použitím vzorcov (26) a (35) dostávame

$$\mu_k = E(C_k) = E\big[C_{k-1}(1 + i_k)\big] = E(C_{k-1})E(1 + i_k) = \mu_{k-1}E(1 + i_k) = \mu_{k-1}\mu$$

Odtiaľ

$$\mu_k = \mu_{k-2}\mu^2 = \ldots = \mu^k,$$

teda

$$\mu_k = \mu^k. \tag{41}$$

Použitím vzorcov (27) a (36) dostávame

$$m_k = E(C_k^2) = E[C_{k-1}^2(1 + i_k)^2] = E(C_{k-1}^2)E[(1 + i_k)^2] = m_{k-1}m,$$

teda

$$m_k = m^k. \tag{42}$$

Použitím vzorcov (39), (26) a (27) dostávame

$$Var(C_k) = E(C_k^2) - [E(C_k)]^2 = m_k - \mu_k^2 = m^k - \mu^{2k},$$

a ďalej

$$Var(C_k) = m^k - \mu^{2k} = \big[(1 + j)^2 + s^2\big]^k - (1 + j)^{2k}. \tag{43}$$

Špeciálne, po k rokoch máme

$$E(C_n) = (1 + j)^n, \tag{44}$$

a ďalej

$$Var(C_n) = m^n - \mu^{2n} = \big[(1 + j)^2 + s^2\big]^n - (1 + j)^{2n}. \tag{45}$$

Príklad 3.2

Uvažujme $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$. C_k je teda *budúca hodnota anuity s platbami výšky* 1.

Zo vzorca (34) dostávame

$$C_k = (1 + i_k)(C_{k-1} + c_k) = (1 + i_k)(1 + C_{k-1}), \text{ kde } k = 2, \ \ldots, \ n. \tag{46}$$

Použitím vzorcov (26) a (35) dostávame

$$\begin{aligned}\mu_k = E(C_k) = E[(1 + i_k)(1 + C_{k-1})] &= E(1 + i_k)E(1 + C_{k-1}) \\ = \mu\big[E(1) + E(C_{k-1})\big] &= \mu(1 + \mu_{k-1}).\end{aligned}$$

Teda

$$\mu_k = \mu(1 + \mu_{k-1}). \tag{47}$$

Použitím vzorcov (27), (35) a (36) dostávame

$$\begin{aligned}m_k = E(C_k^2) &= E[(1 + i_k)^2(1 + C_{k-1}^2)] = E[(1 + i_k)^2]E[(1 + C_{k-1})^2] \\ = E[(1 + i_k)^2]E(1 + 2C_{k-1} + C_{k-1}^2) &= m\big[E(1) + 2E(C_{k-1}) + E(C_{k-1}^2)\big] \\ &= m(1 + 2\mu_{k-1} + m_{k-1}).\end{aligned}$$

Teda

$$m_k = m(1 + 2\mu_{k-1} + m_{k-1}). \tag{48}$$

3.3. Budúca hodnota anuity s platbami v aritmetickej postupnosti

Výška platby v k-tom roku je daná vzťahom

$$c_k = p + (k-1)q, \text{ kde } k = 1\ ,2,\ \dots,\ n. \tag{49}$$

Budúca hodnota anuity s k-ročnými platbami v aritmetickej postupnosti po k rokoch je označená C_k a daná predpisom podľa vzorca (33)

$$C_k = (1+i_k)(1+i_{k-1})\dots(1+i_1)p$$

$$+(1+i_k)(1+i_{k-1})\dots(1+i_2)(p+q) + \dots + (1+i_k)[p+(k-1)q],$$

$$\text{kde } k = 1\ ,2,\ \dots,\ n. \tag{50}$$

Dosadením (49) do vzorca (34) dostávame rekurentný vzorec

$$C_k = (1+i_k)(C_{k-1} + [p+(k-1)q]), \quad \text{kde } k = 2,\ \dots,\ n. \tag{51}$$

Lemma 3.1 Nech C_k označuje konečnú hodnotu anuity s platbami v aritmetickej postupnosti, tj. $p,\ p+q,\ p+2q,\ \dots,\ p+(k-1)q$. Nech ročná úroková miera behom k-tého roku je náhodná veličina i_k taká, že $E(1+i_k) = 1+j$ a $Var(1+i_k) = s^2$ a $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_k$ sú nezávislé náhodné veličiny. Potom

$$\mu_k = E(C_k) = (\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}. \tag{52}$$

Podobne, pre druhý moment $E(C_k^2)$ máme rekurentný vzorec

$$m_k = E(C_k^2) = m\Big[m_{k-1} + 2\big[p+(k-1)q\big]\mu_{k-1} + \big[p+(k-1)q\big]^2\Big], \tag{53}$$
$$\text{kde } k = 2,\ \dots,\ n.$$

Dôkaz. Na dôkaz vzorca (52) použijeme vzorce (35), (51) a nezávislosť úrokových mier:

$$\begin{aligned}
\mu_k = E(C_k) &= E\Big[\Big(1+i_k\Big)\Big(C_{k-1} + \big[p+(k-1)q\big]\Big)\Big] \\
&= E(1+i_k)E\Big(C_{k-1} + \big[p+(k-1)q\big]\Big) \\
&= (1+j)\Big(E[C_{k-1}] + \big[p+(k-1)q\big]\Big) \\
&= (1+j)\Big[E(1+i_{k-1})\Big(E[C_{k-2}] + \big[p+(k-2)q\big]\Big) + \big[p+(k-1)q\big]\Big] \\
&= (1+j)\Big[(1+j)\Big(E[C_{k-2}] + \big[p+(k-2)q\big]\Big) + \big[p+(k-1)q\big]\Big] = \dots \\
&= (1+j)^k p + (1+j)^{k-1}(p+q) + \dots + (1+j)\big[p+(k-1)q\big] = (\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}.
\end{aligned}$$

Na dôkaz vzorca (53) použijeme vzorce (34), (27), (35) a (36):

$$m_k = E(C_k^2) = E\Big(\big[1+i_k\big]^2\big[C_{k-1} + \big[p+(k-1)q\big]\big]^2\Big)$$

$$= E(1+i_k)^2 E\Big(C_{k-1} + \big[p+(k-1)q\big]\Big)^2$$
$$= mE\Big(C_{k-1} + \big[p+(k-1)q\big]\Big)^2$$
$$= m\Big(E(C_{k-1})^2 + E\Big(2\big[p+(k-1)q\big]\Big)E(C_{k-1}) + E\big[p+(k-1)q\big]^2\Big)$$
$$= m\Big(m_{k-1} + 2\big[p+(k-1)q\big]\mu_{k-1} + \big[p+(k-1)q\big]^2\Big),$$
$$\text{kde } k = 2, \ \ldots, \ n.$$

■

Lemma 3.2 Za predpokladov lemmy 3.1 máme
$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k}, \tag{54}$$
$$\text{kde } M_{1k} = p^2 m^k + (p+q)^2 m^{k-1} + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]^2 m, \tag{55}$$
$$M_{2k} = (p+q)m^{k-1}\mu_1 + (p+2q)m^{k-2}\mu_2 + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]m\mu_{k-1}. \tag{56}$$

Dôkaz. V dôkaze budeme postupovať indukciou.
Použijeme vzorec (53) pre $k = 1$:
$$m_1 = p^2 m.$$
Máme indukčný predpoklad pre k:
$$m_k = p^2 m^k + (p+q)^2 m^{k-1} + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]^2 m$$
$$+2\big((p+q)m^{k-1}\mu_1 + (p+2q)m^{k-2}\mu_2 + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]m\mu_{k-1}\big).$$
Pri indukcii použijeme vzorec (53):
$$m_{k+1} = m\Big[m_k + 2\big(p+kq\big)\mu_k + \big(p+kq\big)^2\Big]$$
$$= m\Big[p^2 m^k + (p+q)^2 m^{k-1} + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]^2 m$$
$$+2\big((p+q)m^{k-1}\mu_1 + (p+2q)m^{k-2}\mu_2 + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]m\mu_{k-1}\big)$$
$$+2\big(p+kq\big)\mu_k + \big(p+kq\big)^2\Big]$$
$$= (p^2 m^{k+1} + (p+q)^2 m^k + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]^2 m^2 + (p+kq)^2 m$$
$$+2\big((p+q)m^k\mu_1 + (p+2q)m^{k-1}\mu_2 + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]m^2\mu_{k-1} + (p+kq)m\mu_k\big).$$

■

Lemma 3.3 Platí
$$M_{1k} = (p-q)^2 \ddot{s}_{\overline{k}|f} + 2p(p-q)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} + q^2(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}. \tag{57}$$

Dôkaz. Použijeme vzorec (55) a potom vzorec (27):

$$M_{1k} = p^2 m^k + (p+q)^2 m^{k-1} + \ldots + \big[p+(k-1)q\big]^2 m$$

$$= p^2 m^k + (p^2 + 2pq + q^2)m^{k-1} + (p^2 + 4pq + 4q^2)m^{k-2}$$

$$+\ldots+\big[p^2+2(k-1)pq+(k-1)^2q^2\big]m$$

$$\begin{gathered}
=p^2[m^k+m^{k-1}+m^{k-2}+\ldots+m]\\
+2pq\big[1m^{k-1}+2m^{k-2}+3m^{k-3}+\ldots+(k-1)m\big]\\
+q^2\big[1^2m^{k-1}+2^2m^{k-2}+\ldots+(k-1)^2m\big]
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
=p^2\big[(1+f)^k+(1+f)^{k-1}+(1+f)^{k-2}+\ldots+(1+f)\big]\\
+2pq\big[1(1+f)^{k-1}+2(1+f)^{k-2}+3(1+f)^{k-3}+\ldots+(k-1)(1+f)\big]\\
+q^2\big[1^2(1+f)^{k-1}+2^2(1+f)^{k-2}+\ldots+(k-1)^2(1+f)\big]
\end{gathered}$$

$$=p^2\ddot{s}_{\overline{k}|f}+2pq(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|f}+q^2(I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|f}.$$

Teda

$$M_{1k}=p^2\ddot{s}_{\overline{k}|f}+2pq(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|f}+q^2(I^2\ddot{s})_{\overline{k-1}|f}. \tag{58}$$

Odtiaľ dostávame použitím vzorca (15) a vzorca (16)

$$\begin{aligned}
M_{1k}&=p^2\ddot{s}_{\overline{k}|f}+2pq\big[(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}-\ddot{s}_{\overline{k}|f}\big]+q^2\big[(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}-2(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}+\ddot{s}_{\overline{k}|f}\big]\\
&=(p^2-2pq+q^2)\ddot{s}_{\overline{k}|f}+(2pq-2q^2)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}+q^2(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\\
&=(p-q)^2\ddot{s}_{\overline{k}|f}+2p(p-q)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}+q^2(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}.
\end{aligned}$$

■

Lemma 3.4 Za predpokladov lemmy 3.1 máme

$$\begin{aligned}
M_{2k}\; = \;\frac{1}{d^2}\Big[&(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\\
&-(p-q)\big[d(p-q)+qv\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f}-q\big[2d(p-q)+qv\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f}-q^2d(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big].
\end{aligned} \tag{59}$$

Dôkaz. Použijeme postupne vzorce (56), (27), (52) a (21):

$$\begin{aligned}
M_{2k}&=(p+q)m^{k-1}\mu_1+(p+2q)m^{k-2}\mu_2+\ldots+\big[p+(k-1)q\big]m\mu_{k-1}\\
&=(p+q)(1+f)^{k-1}\mu_1+(p+2q)(1+f)^{k-2}\mu_2+\ldots+\big[p+(k-1)q\big](1+f)\mu_{k-1}\\
&=(p+q)(1+f)^{k-1}(\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{1}|j}+(p+2q)(1+f)^{k-2}(\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{2}|j}+\ldots+\big[p+(k-1)q\big](1+f)(\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k-1}|j}\\
&=(p+q)(1+f)^{k-1}\big[(p-q)\ddot{s}_{\overline{1}|j}+q(I\ddot{s})_{\overline{1}|j}\big]+(p+2q)(1+f)^{k-2}\big[(p-q)\ddot{s}_{\overline{2}|j}+q(I\ddot{s})_{\overline{2}|j}\big]+\ldots\\
&\quad\ldots+\big[p+(k-1)q\big](1+f)\big[(p-q)\ddot{s}_{\overline{k-1}|j}+q(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|j}\big].
\end{aligned}$$

Ďalej použijeme vzorce (6), (9) a znova (6):

$$M_{2k} = (p+q)(1+f)^{k-1}\left[(p-q)\frac{(1+j)-1}{d} + q\frac{\ddot{s}_{\overline{1}|j}-1}{d}\right]$$

$$+(p+2q)(1+f)^{k-2}\left[(p-q)\frac{(1+j)^2-1}{d} + q\frac{\ddot{s}_{\overline{2}|j}-2}{d}\right] + \dots$$

$$\dots + \big[p+(k-1)q\big](1+f)\left[(p-q)\frac{(1+j)^{k-1}-1}{d} + q\frac{\ddot{s}_{\overline{k-1}|j}-(k-1)}{d}\right]$$

$$= (p+q)(1+f)^{k-1}\left[(p-q)\frac{(1+j)-1}{d} + q\frac{\frac{(1+j)-1}{d}-1}{d}\right]$$

$$+(p+2q)(1+f)^{k-2}\left[(p-q)\frac{(1+j)^2-1}{d} + q\frac{\frac{(1+j)^2-1}{d}-2}{d}\right] + \dots$$

$$\dots + \big[p+(k-1)q\big](1+f)\left[(p-q)\frac{(1+j)^{k-1}-1}{d} + q\frac{\frac{(1+j)^{k-1}-1}{d}-(k-1)}{d}\right]$$

$$= (p+q)(1+f)^{k-1}\left[\frac{(p-q)(1+j)d-(p-q)d+q(1+j)-q-dq}{d^2}\right]$$

$$+(p+2q)(1+f)^{k-2}\left[\frac{(p-q)(1+j)^2d-(p-q)d+q(1+j)^2-q-2dq}{d^2}\right] + \dots$$

$$\dots + \big[p+(k-1)q\big](1+f)\left[\frac{(p-q)(1+j)^{k-1}d-(p-q)d+q(1+j)^{k-1}-q-(k-1)dq}{d^2}\right]$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\Bigg[\Big[(p+q)(1+f)^{k-1}(1+j) + (p+2q)(1+f)^{k-2}(1+j)^2 + \dots$$

$$\dots + \big[p+(k-1)q\big](1+f)(1+j)^{k-1}\Big]$$

$$-\Big[(p+q)(1+f)^{k-1} + (p+2q)(1+f)^{k-2} + \dots + \big[p+(k-1)q\big](1+f)\Big]\Bigg]$$

$$-\frac{q}{d}\Big[(p+q)(1+f)^{k-1} + 2(p+2q)(1+f)^{k-2} + \dots + (k-1)\big[p+(k-1)q\big](1+f)\Big].$$

Použijeme vzorec (30):

$$M_{2k} = \frac{d(p-q)+q}{d^2}\Bigg[\Big[(p+q)(1+r)^{k-1}(1+j)^k + (p+2q)(1+r)^{k-2}(1+j)^k + \dots$$

$$\dots + \big[p+(k-1)q\big](1+r)(1+j)^k\Big]$$

$$-\Big[(p+q)(1+f)^{k-1} + (p+2q)(1+f)^{k-2} + \dots + \big[p+(k-1)q\big](1+f)\Big]\Bigg]$$

$$-\frac{q}{d}\left[(p+q)(1+f)^{k-1}+2(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+(k-1)\big[p+(k-1)q\big](1+f)\right]$$

$$=\frac{d(p-q)+q}{d^2}\Big[\big[(p-q+q-p)(1+f)^k+(p-q+2q)(1+r)^{k-1}(1+j)^k$$

$$+(p-q+3q)(1+r)^{k-2}(1+j)^k+\ldots+(p-q+kq)(1+r)(1+j)^k\big]$$

$$-\big[(p+q)(1+f)^{k-1}+(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+[p+(k-1)q](1+f)\big]\Big]$$

$$-\frac{q}{d}\left[(p+q)(1+f)^{k-1}+2(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+(k-1)[p+(k-1)q](1+f)\right]$$

$$=\frac{d(p-q)+q}{d^2}\Big[\big[(p-q)(1+r)^k(1+j)^k+(p-q)(1+r)^{k-1}(1+j)^k$$

$$+(p-q)(1+r)^{k-2}(1+j)^k+\ldots+(p-q)(1+r)(1+j)^k$$

$$+q(1+r)^k(1+j)^k+q(1+r)^{k-1}(1+j)^k+\ldots+q(1+r)(1+j)^k-p(1+f)^k\big]$$

$$-\big[(p+q)(1+f)^{k-1}+(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+[p+(k-1)q](1+f)\big]\Big]$$

$$-\frac{q}{d}\left[(p+q)(1+f)^{k-1}+2(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+(k-1)[p+(k-1)q](1+f)\right]$$

$$=\frac{d(p-q)+q}{d^2}\Big[\big[(p-q)(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+q(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}-p(1+f)^k\big]$$

$$-\big[(p+q)(1+f)^{k-1}+(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+[p+(k-1)q](1+f)\big]\Big]$$

$$-\frac{q}{d}\left[(p+q)(1+f)^{k-1}+2(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+(k-1)[p+(k-1)q](1+f)\right]$$

$$=\frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+q(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-p\frac{d(p-q)+q}{d^2}(1+f)^k$$

$$-\frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p+q)(1+f)^{k-1}+(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+[p+(k-1)q](1+f)\right]$$

$$-\frac{qd}{d^2}\left[(p+q)(1+f)^{k-1}+2(p+2q)(1+f)^{k-2}+\ldots+(k-1)[p+(k-1)q](1+f)\right]$$

$$=\frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+q(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-p\frac{d(p-q)+q}{d^2}(1+f)^k$$

$$-(p+q)\left[\frac{d(p-q)+q}{d^2}+\frac{qd}{d^2}\right](1+f)^{k-1}-(p+2q)\left[\frac{d(p-q)+q}{d^2}+\frac{2qd}{d^2}\right](1+f)^{k-2}-\ldots$$

$$\ldots - [p+(k-1)q]\left[\frac{d(p-q)+q}{d^2}+\frac{(k-1)qd}{d^2}\right](1+f)$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+q(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q+q)[d(p-q)]+pq\right](1+f)^k$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[pd(p-q)+pq+qd(p-q)+q^2+pqd+q^2d\right](1+f)^{k-1}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{1}{d^2}\left[pd(p-q)+pq+(k-1)qd(p-q)+(k-1)q^2+(k-1)pqd+(k-1)^2q^2d\right](1+f)$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+q(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)(d(p-q))+qd(p-q)+pq\right](1+f)^k$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[pd(p-q)+pq+(2-1)qd(p-q)+(2-1)q^2+(2-1)pqd\right.$$

$$\left.+(2^2-4+1)q^2d\right](1+f)^{2-1}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{1}{d^2}\left[pd(p-q)+pq+(k-1)qd(p-q)+(k-1)q^2+(k-1)pqd+(k^2-2k+1)q^2d\right](1+f)$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+q(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv]-qv(p-q)+qd(p-q)+pq\right](1+f)^k$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[pd(p-q)+pq-qd(p-q)-pqd-q^2+q^2d\right.$$

$$\left.+2qd(p-q)+2pqd+2q^2-4q^2d+2^2q^2d\right](1+f)^{k-1}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{1}{d^2}\left[pd(p-q)+pq-qd(p-q)-pqd-q^2+q^2d\right.$$

$$\left.+kqd(p-q)+kpqd+kq^2-2kq^2d+k^2q^2d\right](1+f).$$

Použijeme vzorec (4):

$$M_{2k} = \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+q(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)(d(p-q)+qv)-q(1-d)(p-q)+qd(p-q)+pq\right](1+f)^k$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)d(p-q)+pq(1-d)-q^2(1-d)\right.$$

$$\left.+2q(d(p-q)+pd+q-2qd)+2^2q^2d\right](1+f)^{k-1}-\ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{d^2}\left[(p-q)d(p-q)+pq(1-d)-q^2(1-d)+kq[d(p-q)+pd+q-2qd]+k^2q^2d\right](1+f)$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q(1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + q[2d(p-q)] - q(p-q) + pq\right](1+f)^k$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + 2q[2d(p-q)+q(1-d)] + 2^2q^2d\right](1+f)^{k-1} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + kq[2d(p-q)+q(1-d)] + k^2q^2d\right](1+f)$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q(1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + q[2d(p-q)] + q^2 - q^2d + q^2d\right](1+f)^k$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + 2q[2d(p-q)+qv] + 2^2q^2d\right](1+f)^{k-1} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + kq[2d(p-q)+qv] + k^2q^2d\right](1+f)$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q(1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + q[2d(p-q)] + q^2v + q^2d\right](1+f)^k$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + 2q[2d(p-q)+qv] + 2^2q^2d\right](1+f)^{k-1} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + kq[2d(p-q)+qv] + k^2q^2d\right](1+f)$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q(1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + q[2d(p-q)+qv] + q^2d\right](1+f)^k$$

$$-\frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + 2q[2d(p-q)+qv] + 2^2q^2d\right](1+f)^{k-1} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{1}{d^2}\left[(p-q)[d(p-q)+qv] + kq[2d(p-q)+qv] + k^2q^2d\right](1+f)$$

$$= \frac{d(p-q)+q}{d^2}\left[(p-q)(1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q(1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\right]$$

$$-\frac{(p-q)[d(p-q)+qv]}{d^2}\left[(1+f)^k + (1+f)^{k-1} + \ldots + (1+f)\right]$$

$$-\frac{q[2d(p-q)+qv]}{d^2}\left[(1+f)^k + 2(1+f)^{k-1} + \ldots + k(1+f)\right]$$

$$-\frac{q^2 d}{d^2}\Big[(1+f)^k + 2^2(1+f)^{k-1} + \ldots + k^2(1+f)\Big].$$

Použijeme vzorce (5), (8) a (11):

$$M_{2k} = \frac{d(p-q)+q}{d^2}\Big[(p-q)(1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q(1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Big]$$

$$-\frac{(p-q)[d(p-q)+qv]}{d^2}\ddot{s}_{\overline{k}|f}$$

$$-\frac{q[2d(p-q)+qv]}{d^2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}$$

$$-\frac{q^2 d}{d^2}(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}$$

$$-(p-q)\big[d(p-q)+qv\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f} - q\big[2d(p-q)+qv\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - q^2 d (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big].$$

■

Lemma 3.5 Za predpokladov lemmy 3.1 máme

$$\begin{aligned} m_k \;=\; & \frac{1}{d^2}\big[(q-p)\big[d(p-q)(1+v)+2qv\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f} - 2q\big[d(p-q)(1+v)+qv\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f} \\ & -dq^2(1+v)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} + 2(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} \\ & +2q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\big]. \end{aligned} \tag{60}$$

Dôkaz. Použijeme vzorce (54), (59) a (57):

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k} = (p-q)^2 \ddot{s}_{\overline{k}|f} + 2p(p-q)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} + q^2 (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}$$

$$+\frac{2}{d^2}\Big[(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}$$

$$-(p-q)\big[d(p-q)+qv\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f} - q\big[2d(p-q)+qv\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - q^2 d (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big]$$

$$= \ddot{s}_{\overline{k}|f}\Big[(p-q)^2 - \frac{2}{d^2}(p-q)\big[d(p-q)+qv\big]\Big]$$

$$+(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big[2q(p-q) - \frac{2q}{d^2}\big[2d(p-q)+qv\big]\Big]$$

$$+(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big[q^2 - \frac{2}{d^2}q^2 d\Big]$$

$$+\frac{2}{d^2}\Big[(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Big]$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[\ddot{s}_{\overline{k}|f}\Big(d^2(p-q)^2 - 2(p-q)\big[d(p-q)+qv\big]\Big)$$

$$+(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big(2d^2 q(p-q) - 2q\big[2d(p-q)+qv\big]\Big)$$

$$+(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big(q^2d^2-2q^2d\Big)$$

$$+2(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+2q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Bigg]$$

$$=\frac{1}{d^2}\Bigg[\ddot{s}_{\overline{k}|f}\Big((p-q)\big[d(p-q)(d-2)-2qv\big]\Big)$$

$$+(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big(2q\big[d(p-q)(d-2)-qv\big]\Big)$$

$$+(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\big[(-1)q^2d(2-d)\big]$$

$$+2(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+2q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Bigg].$$

Použijeme vzorec (4):

$$m_k=\frac{1}{d^2}\Bigg[\ddot{s}_{\overline{k}|f}\Big((q-p)\big[d(p-q)(1+v)+2qv\big]\Big)$$

$$+(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big(-2q\big[d(p-q)(1+v)+qv\big]\Big)$$

$$+(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\big[-dq^2(1+v)\big]$$

$$+2(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+2q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Bigg]$$

$$=\frac{1}{d^2}\Bigg[\Big((q-p)\big[d(p-q)(1+v)+2qv\big]\Big)\ddot{s}_{\overline{k}|f}$$

$$-2q\big[d(p-q)(1+v)+qv\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f}$$

$$-dq^2(1+v)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}$$

$$+2(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}+2q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Bigg].$$

$\blacksquare$

Lemma 3.5 nám dáva vzorec pre $E(C_k^2)$. Aby sme vypočítali $Var(C_k)$, potrebujeme vyjadrenie $\big[E(C_k)\big]^2$.

Lemma 3.6 Za predpokladov lemmy 3.1 máme

$$\mu_k^2 = \frac{p-q}{d}\left[p-q+\frac{2q}{d}\right](\ddot{s}_{\overline{2k}|j}-2\ddot{s}_{\overline{k}|j})-\frac{2q(p-q)k}{d}\ddot{s}_{\overline{k}|j}$$
$$+\left[\frac{q}{d}\right]^2\big[(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j}-2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}-k^2\big]. \qquad (61)$$

Dôkaz. Odvodíme najskôr dva pomocné vzorce, ktoré použijeme na konci dôkazu. Použijeme vzorec (6) a dostávame

$$(\ddot{s}_{\overline{k}|j})^2=\left[\frac{(1+j)^k-1}{d}\right]^2=\frac{(1+j)^{2k}-2(1+j)^k+1}{d^2}$$

$$= \frac{\frac{(1+j)^{2k}-1}{d} - 2\frac{(1+j)^k-1}{d}}{d} = \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}.$$

Teda

$$(\ddot{s}_{\overline{k}|j})^2 = \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}. \tag{62}$$

Použijeme vzorec (9) a (62) a dostávame

$$(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|j} = \left[\frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d}\right]^2 = \frac{\ddot{s}^2_{\overline{k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}k + k^2}{d^2} = \frac{\frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}k + k^2}{d^2}$$

$$= \frac{\frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2k}{d} - 2\frac{(1+kd)\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d} + k^2 + \frac{2k}{d}}{d^2}$$

$$= \frac{(I\ddot{s})^2_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)\frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d} - \frac{(1+kd)2k}{d} + k^2 + \frac{2k}{d}}{d^2}$$

$$= \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2}{d^2}.$$

Teda

$$(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|j} = \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2}{d^2}. \tag{63}$$

Použijeme vzorce (52), (21), (9) a na konci dôkazu vzorce (62) a (63):

$$\mu_k = E(C_k) = (\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = (p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + q(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}. \tag{64}$$

Teda

$$\mu_k^2 = \left[(p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + q(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}\right]^2$$

$$= (p-q)^2(\ddot{s}_{\overline{k}|j})^2 + 2q(p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j}(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} + q^2(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|j}$$

$$= (p-q)^2(\ddot{s}_{\overline{k}|j})^2 + 2q(p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j}\frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d} + q^2(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|j}$$

$$= (p-q)\left[(p-q) + \frac{2q}{d}\right]\ddot{s}^2_{\overline{k}|j} - \frac{2q(p-q)k}{d}\ddot{s}_{\overline{k}|j} + q^2(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|j}$$

$$+ \left[\frac{q}{d}\right]^2\left[(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2\right].$$

■

Veta 3.1 Za predpokladov lemmy 3.1 máme

$$E(C_k) = (\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}, \tag{65}$$

$$Var(C_k) = m_k - \mu_k^2, \tag{66}$$

kde m_k je dané lemmou 3.5 a μ_k^2 je dané lemmou 3.6.

Veta 3.2 Ak C_k označuje *budúcu hodnotu anuity s k ročnými platbami výšky* 1 a ak ročná úroková miera behom k-tého roku je náhodná veličina i_k taká, že

$E(1+i_k) = 1+j$ a $Var(1+i_k) = s^2$ a $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sú nezávislé náhodné veličiny, potom

$$E(C_k) = \ddot{s}_{\overline{k}|j}, \tag{67}$$

$$Var(C_k) = \frac{2(1+j)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r} - (2+j)\ddot{s}_{\overline{k}|f} - (1+j)\ddot{s}_{\overline{2k}|j} + 2(1+j)\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{j}, \tag{68}$$

kde f je dané vzťahom (28) a r je dané vzťahom (32).

Dôkaz. Vychádzame z vety 3.1. Uvažujme situáciu, keď $p = 1$ a $q = 0$. Vieme už, že ide o budúcu hodnotu anuity s k ročnými platbami výšky 1. Použijeme vzorec (21) a dokážeme vzťah (67) pre strednú hodnotu:

$$E(C_k) = (\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = (p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + q(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = \ddot{s}_{\overline{k}|j}.$$

Dokážeme vzťah (68) pre $Var(C_k)$:

$$Var(C_k) = \frac{1}{d^2}\Big[(q-p)\big[d(p-q)(1+v)+2qv\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f}$$

$$-2q\big[d(p-q)(1+v)+qv\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - dq^2(1+v)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} + 2(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}$$

$$+2q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Big] - \frac{p-q}{d}\left[p-q+\frac{2q}{d}\right](\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j})$$

$$+\frac{2q(p-q)k}{d}\ddot{s}_{\overline{k}|j} - \left[\frac{q}{d}\right]^2\Big[(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2\Big]$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[(-1)d(1+v)\ddot{s}_{\overline{k}|f} + 2d(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}\Big] - \frac{1}{d}(\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j})$$

$$= \frac{-(1+v)\ddot{s}_{\overline{k}|f} + 2(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r} - \ddot{s}_{\overline{2k}|j} + 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}$$

$$= \frac{1+j}{j}\left[2(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r} - \frac{1+j+1}{1+j}\ddot{s}_{\overline{k}|f} - \ddot{s}_{\overline{2k}|j} + 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}\right]$$

$$= \frac{2(1+j)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r} - (2+j)\ddot{s}_{\overline{k}|f} - (1+j)\ddot{s}_{\overline{2k}|j} + 2(1+j)\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{j}.$$

■

Ďalší dôležitý prípad je kombinácia $p = 1$ a $q = 1$, teda *štandardne rastúca anuita s k ročnými platbami výšky $1, 2, \ldots, k$ v tomto poradí.* V tomto prípade podľa vzorca (51) máme:

$$C_k = (1+i_k)(C_{k-1}+k). \tag{69}$$

Použitím vzorcov (69), (35), (26), (36) a (27) ľahko odvodíme rekurentné vzorce pre μ_k a m_k:

$$\mu_k = E(C_k) = E\big[(1+i_k)(C_{k-1}+k)\big] = E(1+i_k)E(C_{k-1}+k)$$

$$= \mu\big[E(C_{k-1})+k\big] = \mu\big[E(C_{k-1})+k\big] = \mu(\mu_{k-1}+k), \tag{70}$$

kde $k = 2, \ \dots, \ n.$

$$
\begin{aligned}
m_k = E(C_k^2) &= E\big[(1+i_k)^2(C_{k-1}+k)^2\big] = E(1+i_k)^2 E(C_{k-1}+k)^2 \\
&= m\big[E(C_{k-1})^2 + 2kE(C_{k-1}) + k^2\big] = m(m_{k-1} + 2k\mu_{k-1} + k^2), \qquad (71)
\end{aligned}
$$

kde $k = 2, \ \dots, \ n.$

Veta 3.3 Nech C_k označuje budúcu hodnotu štandardne rastúcej anuity s k ročnými platbami výšky $1, 2, \dots, k$ v tomto poradí po k rokoch. Nech ročná úroková miera behom k-tého roku je náhodná veličina i_k taká, že $E(1+i_k) = 1+j$ a $Var(1+i_k) = s^2$ a $i_1, \ i_2, \ \dots, \ i_n$ sú nezávislé náhodné veličiny. Potom

$$
\mu_k = E(C_k) = (I\ddot{s})_{\overline{k}|j}, \qquad (72)
$$

kde $k = 1, \ \dots, \ n.$

Špeciálne

$$
\mu_n = E(C_n) = (I\ddot{s})_{\overline{n}|j}. \qquad (73)
$$

Dôkaz. Vieme, že $p = 1$ a $q = 1$. Použijeme vzorce (65) a (21):

$$
E(C_k) = (\ddot{s}_a)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = (p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + q(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (1-1)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + 1(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (I\ddot{s})_{\overline{k}|j}.
$$

■

Veta 3.4 Za predpokladov vety 3.3 máme

$$
M_{1k} = (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|j}. \qquad (74)
$$

Dôkaz. Použijeme vzorec (57):

$$
\begin{aligned}
M_{1k} &= (p-q)^2\ddot{s}_{\overline{k}|f} + 2p(p-q)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} + q^2(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}. \\
&= (1-1)^2\ddot{s}_{\overline{k}|f} + 2(1-1)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} + 1^2(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} = (I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}.
\end{aligned}
$$

■

Veta 3.5 Za predpokladov vety 3.3 máme

$$
M_{2k} = \frac{(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - (1+j)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - j(1+j)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}, \qquad (75)
$$

kde f je dané vzťahom (28) a r je dané vzťahom (32).

Dôkaz. Použijeme vzorce (59), (1), (2) a $p = 1$, $q = 1$:

$$
\begin{aligned}
M_{2k} = \frac{1}{d^2}\Big[&(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r} + q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} \\
&-(p-q)\big[d(p-q)+qv\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f} - q\big[2d(p-q)+qv\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - q^2d(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[(1-1)\big[d(1-1)+1\big](1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|r} + \big[d(1-1)+1\big](1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r}$$

$$-(1-1)\big[d(1-1)+v\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f} - \big[2d(1-1)+v\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - 1^2 d(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big]$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[(1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - v(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - d(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big]$$

$$= \frac{(1+j)^2}{j^2}\Big[(1+j)^k (I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - \frac{1}{1+j}(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - \frac{j}{1+j}(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big]$$

$$= \frac{(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - (1+j)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - j(1+j)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}.$$

$\blacksquare$

Veta 3.6 Za predpokladov vety 3.3 máme

$$m_k = \frac{2(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - 2(1+j)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - j(2+j)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}, \tag{76}$$

kde f je dané vzťahom (28) a r je dané vzťahom (32).

Dôkaz. Použijeme vzorce (60), (1), (2) a $p = 1$, $q = 1$:

$$m_k = \frac{1}{d^2}\Big[(q-p)\big[d(p-q)(1+v)+2qv\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f} - 2q\big[d(p-q)(1+v)+qv\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f}$$

$$-dq^2(1+v)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} + 2(p-q)\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r} + 2q\big[d(p-q)+q\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Big]$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[(1-1)\big[d(1-1)(1+v)+2v\big]\ddot{s}_{\overline{k}|f} - 2\big[d(1-1)(1+v)+v\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f}$$

$$-d(1+v)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} + 2(1-1)\big[d(1-1)+1\big](1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r} + 2\big[d(1-1)+1\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Big]$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[-2v(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - d(1+v)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f} + 2(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}\Big]$$

$$= \frac{1}{d^2}\Big[2(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - 2v(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - d(1+v)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big]$$

$$= \frac{(1+j)^2}{j^2}\Big[2(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - \frac{2}{1+j}(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - \frac{j}{1+j}\Big[1+\frac{1}{1+j}\Big](I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big]$$

$$= \frac{1}{j^2}\Big[2(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - \frac{2}{1+j}(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - j(1+j)\frac{2+j}{1+j}(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}\Big]$$

$$= \frac{2(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - 2(1+j)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - j(2+j)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}.$$

$\blacksquare$

Lemma 3.7 Platí

$$(\ddot{s}_{\overline{k}|j})^2 = \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}, \tag{77}$$

$$(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|j} = \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2}{d^2}. \tag{78}$$

Dôkaz. Na dôkaz vzorca (77) použijeme vzorec (6):

$$(\ddot{s}_{\overline{k}|j})^2 = \left[\frac{(1+j)^k - 1}{d}\right]^2 = \frac{(1+j)^{2k} - 2(1+j)^k + 1}{d^2}$$

$$= \frac{(1+j)^{2k} - 1 - 2[(1+j)^k - 1]}{d^2} = \frac{\frac{(1+j)^{2k}-1}{d} - 2\frac{(1+j)^k-1}{d}}{d}$$

$$= \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}.$$

Na dôkaz vzorca (78) použijeme vzorce (77) a (8):

$$(I\ddot{s})^2_{\overline{k}|j} = \left[\frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d}\right]^2 = \frac{\ddot{s}^2_{\overline{k}|j} - 2k\ddot{s}_{\overline{k}|j} + k^2}{d^2} = \frac{\frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d} - 2k\ddot{s}_{\overline{k}|j} + k^2}{d^2}$$

$$= \frac{\frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2k}{d} - 2\frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d} - 2k\ddot{s}_{\overline{k}|j} + k^2}{d^2} = \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - 2k(\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k) - k^2}{d^2}$$

$$= \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - 2k\big[(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}d + k - k\big] - k^2}{d^2} = \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2}{d^2}.$$

■

Veta 3.7 Za predpokladov vety 3.3 máme

$$Var(C_k) = \frac{2(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - 2(1+j)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - j(2+j)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}$$
$$- \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2}{d^2}, \tag{79}$$

kde f je dané vzťahom (28), r je dané vzťahom (32) a d je dané vzťahom (1).

Dôkaz. Použijeme vzorce (35), (36), (72), (76) a (78):

$$Var(C_k) = E(C_k^2) - \big[E(C_k)\big]^2 = m_k - \mu_k^2 = m_k - (I\ddot{s})^2_{\overline{k}|j}$$

$$= \frac{2(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - 2(1+j)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - j(2+j)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}$$

$$-\frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2}{d^2}.$$

■

Ďalší dôležitý prípad je kombinácia $p = n$ a $q = -1$, teda *klesajúca anuita s k ročnými platbami výšky $n, n-1, \ldots, n-k+1$ v tomto poradí.*

Máme

$$c_k = n - k + 1,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{80}$$

V tomto prípade podľa vzorca (51) platí

$$C_k = (1 + i_k)(C_{k-1} + n - k + 1). \tag{81}$$

Použitím vzorcov (81), (35), (26), (36) a (27) ľahko odvodíme rekurentné vzorce pre μ_k a m_k:

$$\begin{aligned}
\mu_k = E(C_k) &= E\big[(1+i_k)(C_{k-1} + n - k + 1)\big] \\
&= E(1+i_k)E(C_{k-1} + n - k + 1) \\
&= \mu\big[E(C_{k-1}) + n - k + 1\big] \\
&= \mu\big[E(C_{k-1}) + n - k + 1\big] \\
&= \mu(\mu_{k-1} + n - k + 1).
\end{aligned}$$

Teda

$$\mu_k = \mu(\mu_{k-1} + n - k + 1). \tag{82}$$

Analogicky

$$\begin{aligned}
m_k = E(C_k^2) &= E\big[(1+i_k)^2(C_{k-1} + n - k + 1)^2\big] \\
&= E(1+i_k)^2 E(C_{k-1} + n - k + 1)^2 \\
&= m\big[E(C_{k-1})^2 + 2(n-k+1)E(C_{k-1}) + (n-k+1)^2\big] \\
&= m[m_{k-1} + 2(n-k+1)\mu_{k-1} + (n-k+1)^2].
\end{aligned}$$

Teda

$$m_k = m(m_{k-1} + 2(n-k+1)\mu_{k-1} + (n-k+1)^2). \tag{83}$$

Všimneme si

$$\mu_1 = n\mu = n(1+j), \tag{84}$$

$$m_1 = n^2 m = n^2(1+f). \tag{85}$$

Použitím vzorcov (26), (27), (28), (84) a (85) odvodíme vzťah pre $Var(C_1)$:

$$\begin{aligned}
Var(C_1) = m_1 - \mu_1^2 &= n^2(1+f) - n^2(1+j)^2 = n^2(1 + f - 1 - 2j - j^2) \\
&= n^2(f - 2j - j^2) = n^2 s^2.
\end{aligned}$$

Teda

$$Var(C_1) = n^2 s^2. \tag{86}$$

Veta 3.8 Nech C_k označuje budúcu hodnotu klesajúcej anuity s k ročnými platbami výšky $n, n-1, \ldots, n-k+1$ v tomto poradí po k rokoch. Nech ročná úroková miera behom k-tého roku je náhodná veličina i_k taká, že $E(1+i_k) = 1+j$ a $Var(1+i_k) = s^2$ a $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n$ sú nezávislé náhodné veličiny. Potom

$$\mu_k = E(C_k) = (n+1)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - (I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j}, \tag{87}$$

kde $k = 1,\ \ldots,\ n$.

Ekvivalentne platí

$$\mu_k = \left[n - \frac{1}{j}\right]\ddot{s}_{\overline{k}|j} + \frac{k}{d}, \tag{88}$$

kde $k = 1,\ \ldots,\ n$ a d je dané vzťahom (1).

Dôkaz. Na dôkaz vzorca (87) použijeme vzorce (65) a (21):

$$\mu_k = E(C_k) = (\ddot{s}_{(a)})^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = (p-q)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + q(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (n+1)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - (I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (D\ddot{s})_{\overline{n,k}|j}.$$

Použitím vzorcov (87) a (8) odvodíme vzorec (88):

$$\mu_k = (n+1)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - (I\ddot{s})_{\overline{k}|j} = (n+1)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - \frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k}{d} = \left[n + 1 - \frac{1}{d}\right]\ddot{s}_{\overline{k}|j} + \frac{k}{d}$$

$$= \left[n + 1 - \frac{1+j}{j}\right]\ddot{s}_{\overline{k}|j} + \frac{k}{d} = \left[n + \frac{j-1-j}{j}\right]\ddot{s}_{\overline{k}|j} + \frac{k}{d} = \left[n - \frac{1}{j}\right]\ddot{s}_{\overline{k}|j} + \frac{k}{d}.$$

■

Lemma 3.8 Za predpokladov vety 3.8 máme

$$Var(C_k) = \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 (m^{k-1}\mu_1^2 + m^{k-2}\mu_2^2 + \ldots + \mu_k^2). \tag{89}$$

Dôkaz 3.8. Použijeme postupne vzorce (83), (82), (26), (27) a (28):

$$Var(C_k) = m_k - \mu_k^2 = m\big[m_{k-1} + 2(n-k+1)\mu_{k-1} + (n-k+1)^2\big] - \mu_k^2$$

$$= m\big[m_{k-1} - \mu_{k-1}^2 + \mu_{k-1}^2 + 2(n-k+1)\mu_{k-1} + (n-k+1)^2\big] - \mu_k^2$$

$$= m(m_{k-1} - \mu_{k-1}^2) + m\big[\mu_{k-1} + (n-k+1)\big]^2 - \mu_k^2$$

$$= mVar(C_{k-1}) + m\left[\frac{\mu_k}{\mu}\right]^2 - \mu_k^2$$

$$= mVar(C_{k-1}) + \frac{1+f}{(1+j)^2}\mu_k^2 - \mu_k^2$$

$$= mVar(C_{k-1}) + \frac{1+f-(1+j)^2}{(1+j)^2}\mu_k^2$$

$$= mVar(C_{k-1}) + \frac{f-2j-j^2}{(1+j)^2}\mu_k^2$$

$$= mVar(C_{k-1}) + \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 \mu_k^2,$$

pričom stanovíme $C_0 = 0$.

Platí

$$Var(C_k) = mVar(C_{k-1}) + \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 \mu_k^2$$

$$= m\left(mVar(C_{k-2}) + \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 \mu_{k-1}^2\right) + \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 \mu_k^2 = \dots$$

$$\dots = \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 (m^{k-1}\mu_1^2 + m^{k-2}\mu_2^2 + \dots + \mu_k^2).$$

■

Veta 3.9 Za predpokladov vety 3.8 máme

$$\begin{aligned} Var(C_k) \;\; = \;\; & \frac{l}{d^2}\Bigg[\frac{\left[n-\frac{1}{j}\right]^2(1+j)^{2k}\ddot{s}_{\overline{k}|l}}{1+l} - \frac{2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}}{1+r} + \frac{\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{1+f} \\ & + \frac{2\left[n-\frac{1}{j}\right](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}}{1+r} - \frac{2\left[n-\frac{1}{j}\right](I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f} + \frac{(I\ddot{s}^2)_{\overline{k}|f}}{1+f}\Bigg], \end{aligned} \tag{90}$$

kde $l = \left[\frac{s}{1+j}\right]^2$, f je dané vzťahom (28) a r je dané vzťahom (32).

Dôkaz. Použijeme postupne vzorce (89), (27), (88) a (62):

$$Var(C_k) = \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 (m^{k-1}\mu_1^2 + m^{k-2}\mu_2^2 + \dots + \mu_k^2)$$

$$= \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 \left[(1+f)^{k-1}\mu_1^2 + (1+f)^{k-2}\mu_2^2 + \dots + \mu_k^2\right]$$

$$= \left[\frac{s}{1+j}\right]^2 \left[(1+f)^{k-1}\left(\left[n-\frac{1}{j}\right]\ddot{s}_{\overline{1}|j} + \frac{1}{d}\right)^2 + \dots + \left(\left[n-\frac{1}{j}\right]\ddot{s}_{\overline{k}|j} + \frac{k}{d}\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned} = & \left[\frac{s}{1+j}\right]^2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[(1+f)^{k-1}\ddot{s}^2_{\overline{1}|j} + (1+f)^{k-2}\ddot{s}^2_{\overline{2}|j} + \dots + \ddot{s}^2_{\overline{k}|j}\right] \\ & +2\left[\frac{s}{1+j}\right]^2\left[n-\frac{1}{j}\right]\frac{(1+f)^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|j} + 2(1+f)^{k-2}\ddot{s}_{\overline{2}|j} + \dots + k\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d} \\ & + \left[\frac{s}{1+j}\right]^2\frac{(1+f)^{k-1} + 2^2(1+f)^{k-2} + \dots + k^2}{d^2} \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{s}{1+j}\right]^2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[\frac{\ddot{s}_{\overline{2}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{1}|j}}{d}(1+f)^{k-1} + \dots + \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}\right]$$

$$+2\left[\frac{s}{1+j}\right]^2\left[n-\frac{1}{j}\right]\frac{(1+f)^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|j}+2(1+f)^{k-2}\ddot{s}_{\overline{2}|j}+\ldots+k\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}$$

$$+\left[\frac{s}{1+j}\right]^2\frac{(1+f)^{k-1}+2^2(1+f)^{k-2}+\ldots+k^2}{d^2}$$

$$=\left[\frac{s}{1+j}\right]^2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\frac{\left[(1+f)^{k-1}\ddot{s}_{\overline{2}|j}+\ldots+\ddot{s}_{\overline{2k}|j}\right]-2\left[(1+f)^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|j}+\ldots+\ddot{s}_{\overline{k}|j}\right]}{d}$$

$$+2\left[\frac{s}{1+j}\right]^2\left[n-\frac{1}{j}\right]\frac{(1+f)^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|j}+2(1+f)^{k-2}\ddot{s}_{\overline{2}|j}+\ldots+k\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}$$

$$+\left[\frac{s}{1+j}\right]^2\frac{(1+f)^{k-1}+2^2(1+f)^{k-2}+\ldots+k^2}{d^2}.$$

Stanovíme

$$(1+f)=(1+j)^2(1+l). \tag{91}$$

Dostávame

$$l=\left[\frac{s}{1+j}\right]^2. \tag{92}$$

Ďalej použijeme postupne vzorce (92), (6), (11) a (30).

$$Var(C_k)=\frac{l}{d^2}\Bigg(d\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[(1+f)^{k-1}\ddot{s}_{\overline{2}|j}+\ldots+\ddot{s}_{\overline{2k}|j}\right]$$

$$-2d\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[(1+f)^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|j}+\ldots+\ddot{s}_{\overline{k}|j}\right]$$

$$+2d\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[(1+f)^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|j}+\ldots+k\ddot{s}_{\overline{k}|j}\right]$$

$$+\left[(1+f)^{k-1}+2^2(1+f)^{k-2}+\ldots+k^2\right]\Bigg)$$

$$=\frac{l}{d^2}\Bigg(d\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[(1+f)^{k-1}\frac{(1+j)^2-1}{d}+\ldots+\frac{(1+j)^{2k}-1}{d}\right]$$

$$-2d\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[(1+f)^{k-1}\frac{1+j-1}{d}+\ldots+\frac{(1+j)^k-1}{d}\right]$$

$$+2d\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[(1+f)^{k-1}\frac{1+j-1}{d}+\ldots+k\frac{(1+j)^k-1}{d}\right]$$

$$+\left[\frac{(1+f)^k+2^2(1+f)^{k-2}+\ldots+k^2(1+f)}{1+f}\right]\Bigg)$$

$$=\frac{l}{d^2}\Bigg(\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[(1+f)^{k-1}\big((1+j)^2-1\big)+\ldots+\left[(1+j)^{2k}-1\right]\right]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[(1+f)^{k-1}\big(1+j-1\big)+\ldots+\left[(1+j)^k-1\right]\right]$$

$$+2\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[(1+f)^{k-1}(1+j-1)+\ldots+k((1+j)^k-1)\right]+\left[\frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f}\right]\Bigg)$$

$$=\frac{l}{d^2}\Bigg(\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\big[(1+f)^{k-1}(1+j)^2+\ldots+(1+j)^{2k}\big]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\big[(1+f)^{k-1}(1+j)+\ldots+(1+j)^k\big]+[n-\frac{1}{j}\Big]^2\big[(1+f)^{k-1}+\ldots+1\big]$$

$$+2\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[(1+f)^{k-1}(1+j)+\ldots+k(1+j)^k\right]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[(1+f)^{k-1}+\ldots+k\right]+\left[\frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f}\right]\Bigg)$$

$$=\frac{l}{d^2}\Bigg(\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\big[(1+f)^{k-1}(1+j)^2+\ldots+(1+j)^{2k}\big]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\big[(1+f)^{k-1}(1+j)+\ldots+(1+j)^k\big]+\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\big[(1+f)^{k-1}+\ldots+1\big]$$

$$+2\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[(1+j)^k(1+r)^{k-1}+\ldots+k(1+j)^k\right]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[\frac{(1+f)^k+\ldots+k(1+f)}{1+f}\right]+\left[\frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f}\right]\Bigg).$$

Ďalej použijeme postupne vzorce (91), (30) a niekoľkokrát vzorce (8) a (5):

$$Var(C_k)=\frac{l}{d^2}\Bigg(\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\big[(1+l)^{k-1}(1+j)^{2k}+\ldots+(1+j)^{2k}\big]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\big[(1+r)^{k-1}(1+j)^k+\ldots+(1+j)^k\big]+\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[\frac{(1+f)^k+\ldots+(1+f)}{1+f}\right]$$

$$+2\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[(1+j)^k(1+r)^{k-1}+\ldots+k(1+j)^k\right]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[\frac{(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f}\right]+\left[\frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f}\right]\Bigg)$$

$$=\frac{l}{d^2}\Bigg(\left[n-\frac{1}{j}\right]^2(1+j)^{2k}\left[\frac{(1+l)^k+\ldots+(1+l)}{1+l}\right]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]^2(1+j)^k\left[\frac{(1+r)^k+\ldots+(1+r)}{1+r}\right]+\left[n-\frac{1}{j}\right]^2\left[\frac{\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{1+f}\right]$$

$$+2\left[n-\frac{1}{j}\right](1+j)^k\left[\frac{(1+r)^k+\ldots+k(1+r)}{1+r}\right]$$

$$-2\left[n-\frac{1}{j}\right]\left[\frac{(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f}\right]+\left[\frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f}\right]\Bigg)$$

$$= \frac{l}{d^2}\Bigg[\frac{\big[n-\frac{1}{j}\big]^2(1+j)^{2k}\ddot{s}_{\overline{k}|l}}{1+l} - \frac{2\big[n-\frac{1}{j}\big]^2(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|r}}{1+r} + \frac{\big[n-\frac{1}{j}\big]^2\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{1+f}$$
$$+\frac{2\big[n-\frac{1}{j}\big](1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}}{1+r} - \frac{2\big[n-\frac{1}{j}\big](I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{1+f} + \frac{(I\ddot{s}^2)_{\overline{k}|f}}{1+f}\Bigg].$$

■

3.4. Budúca hodnota anuity s platbami v geometrickej postupnosti

Výška platby v k-tom roku je daná vzťahom

$$c_k = pq^{k-1}, \text{ kde } k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{93}$$
$$p, q > 0,\ q \neq 1+j,\ q^2 \neq 1+f,\ q^2 \neq 1+r.$$

Budúca hodnota anuity s k-ročnými platbami v geometrickej postupnosti po k rokoch je označená C_k. Dosadením vzorca (93) do vzorca (34) dostávame rekurentný vzťah pre C_k:

$$C_k = (1+i_k)(C_{k-1} + pq^{k-1}), \quad \text{kde } k = 2,\ \ldots,\ n. \tag{94}$$

Odtiaľ odvodíme rekurentný vzťah pre μ_k. Použijeme pritom vzorce (26) a (35):

$$\mu_k = E(C_k) = E\big[(1+i_k)(C_{k-1}+pq^{k-1})\big] = E(1+i_k)E(C_{k-1}+pq^{k-1})$$
$$= (1+j)\big[E(C_{k-1}) + E(pq^{k-1})\big] = (1+j)(\mu_{k-1}+pq^{k-1}) = \mu(\mu_{k-1}+pq^{k-1}).$$

Teda

$$\mu_k = \mu(\mu_{k-1} + pq^{k-1}). \tag{95}$$

Použitím vzorcov (27), (36) a (94) odvodíme rekurentný vzťah pre m_k:

$$\begin{aligned} m_k = E(C_k^2) &= E\big[(1+i_k)(C_{k-1}+pq^{k-1})\big]^2 \\ &= E(1+i_k)^2 E(C_{k-1}+pq^{k-1})^2 \\ &= m\big[E(C_{k-1})^2 + 2E(C_{k-1})E(pq^{k-1}) + E(pq^{k-1})^2\big] \\ &= m(m_{k-1} + 2\mu_{k-1}pq^{k-1} + p^2q^{2(k-1)}). \end{aligned}$$

Teda

$$m_k = m(m_{k-1} + 2\mu_{k-1}pq^{k-1} + p^2q^{2(k-1)}). \tag{96}$$

Poznamenajme

$$\mu_1 = p\mu, \tag{97}$$

$$m_1 = p^2 m. \tag{98}$$

Nasledujúca lemma je analógiou lemmy 3.1.

Lemma 3.9 Nech C_k označuje konečnú hodnotu anuity s platbami v geometrickej postupnosti, t.j. $p,\ pq,\ pq^2,\ \ldots,\ pq^{k-1}$. Nech ročná úroková miera behom k-tého roku je náhodná veličina i_k taká, že $E(1+i_k)=1+j$ a $Var(1+i_k)=s^2$ a $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_k$ sú náhodné nezávislé veličiny. Potom

$$\mu_k = E(C_k) = (\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}. \tag{99}$$

Dôkaz. Použijeme vzorce (26), (35) a (94):

$$\begin{aligned}
\mu_k = E(C_k) &= E\Big[(1+i_k)(C_{k-1}+pq^{k-1})\Big]\\
&= E(1+i_k)E(C_{k-1}+pq^{k-1})\\
&= (1+j)\big[E(C_{k-1})+pq^{k-1}\big]\\
&= (1+j)\Big[E(1+i_{k-1})E(C_{k-2}+pq^{k-2})+pq^{k-1}\Big]\\
&= (1+j)\big[(1+j)E(C_{k-2})+(1+j)pq^{k-2}+pq^{k-1}\big] = \ldots\\
\ldots &= (1+j)^k p + (1+j)^{k-1}pq + \ldots + (1+j)pq^{k-2} + pq^{k-1} = (\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}.
\end{aligned}$$

■

Lemma 3.10 Za predpokladov lemmy 3.9 máme

$$\begin{aligned}
m_k &= p^2m^k + p^2q^2m^{k-1} + \ldots + p^2q^{2(k-1)}m\\
&\quad +2[pqm^{k-1}\mu_1 + pq^2m^{k-2}\mu_2 + \ldots + pq^{k-1}m\mu_{k-1}].
\end{aligned} \tag{100}$$

Dôkaz. Budeme postupovať indukciou. Pre $k=1$ použijeme (98):

$$m_1 = p^2m$$

Nech pre k platí indukčný predpoklad

$$\begin{aligned}
m_k = p^2m^k + p^2q^2m^{k-1} + \ldots + p^2q^{2(k-1)}m\\
+2[pqm^{k-1}\mu_1 + pq^2m^{k-2}\mu_2 + \ldots + pq^{k-1}m\mu_{k-1}].
\end{aligned}$$

Použitím vzorca (96) pre $k+1$ máme

$$\begin{aligned}
m_{k+1} &= m(m_k + 2\mu_k pq^k + p^2q^{2k})\\
&= m(p^2m^k + p^2q^2m^{k-1} + \ldots + p^2q^{2(k-1)}m\\
&\quad +2[pqm^{k-1}\mu_1 + pq^2m^{k-2}\mu_2 + \ldots + pq^{k-1}m\mu_{k-1}] + 2\mu_k pq^k + p^2q^{2k}\\
&= p^2m^{k+1} + p^2q^2m^k + \ldots + p^2q^{2(k-1)}m^2 + p^2q^{2k}\\
&\quad +2[pqm^{k-1}\mu_1 + pq^2m^{k-2}\mu_2 + \ldots + pq^{k-1}m\mu_{k-1} + \mu_k pq^k].
\end{aligned}$$

Vidíme, že vzorec platí aj pre $k+1$. Tým sme dokázali lemmu 3.9.

■

Majme

$$M_{1k} = p^2m^k + p^2q^2m^{k-1} + \ldots + p^2q^{2(k-1)}m, \tag{101}$$

$$M_{2k} = pqm^{k-1}\mu_1 + pq^2m^{k-2}\mu_2 + \ldots + pq^{k-1}m\mu_{k-1}, \tag{102}$$

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k}. \tag{103}$$

Lemma 3.11 Platí

$$M_{1k} = p^2(1+f)\frac{(1+f)^k - q^{2k}}{1+f-q^2} = (\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}. \tag{104}$$

Dôkaz. Použijeme vzorce (101), (23) a (27):

$$M_{1k} = p^2m^k + p^2q^2m^{k-1} + \ldots + p^2q^{2(k-1)}m$$

$$= p^2(1+f)^k + p^2q^2(1+f)^{k-1} + \ldots + p^2q^{2(k-1)}(1+f)$$

$$= p^2(1+f)\left[(1+f)^{k-1} + q^2(1+f)^{k-2} + \ldots + q^{2(k-1)}\right]$$

$$= p^2(1+f)\frac{(1+f)^k - q^{2k}}{1+f-q^2} = (\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|j}.$$

■

Lemma 3.12 Platí

$$M_{2k} = \frac{p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|r} - (1+j)(\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+j-q}. \tag{105}$$

Dôkaz. Použijeme postupne vzorce (102), (27), (99), (23), (30) a (22):

$$M_{1k} = pqm^{k-1}\mu_1 + pq^2m^{k-2}\mu_2 + \ldots + pq^{k-1}m\mu_{k-1}$$

$$= pq(1+f)^{k-1}\mu_1 + pq^2(1+f)^{k-2}\mu_2 + \ldots + pq^{k-1}(1+f)\mu_{k-1}$$

$$= pq(1+f)^{k-1}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{1}|j} + pq^2(1+f)^{k-2}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{2}|j} + \ldots + pq^{k-1}(1+f)(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k-1}|j}$$

$$= pq(1+f)^{k-1}\left[p(1+j)\frac{(1+j)-q}{1+j-q}\right] + pq^2(1+f)^{k-2}\left[p(1+j)\frac{(1+j)^2-q^2}{1+j-q}\right] + \ldots$$

$$\ldots + pq^{k-1}(1+f)\left[p(1+j)\frac{(1+j)^{(k-1)}-q^{k-1}}{1+j-q}\right]$$

$$= \frac{p^2(1+j)}{1+j-q}\Bigg[\Big(q(1+f)^{k-1}(1+j) + q^2(1+f)^{k-2}(1+j)^2 + \ldots$$

$$\ldots + q^{k-1}(1+f)(1+j)^{k-1} + (1+f)^k - (1+f)^k\Big)$$

$$-\Big(q^2(1+f)^{k-1} + q^4(1+f)^{k-2} + \ldots + q^{2(k-1)}(1+f) + (1+f)^k - (1+f)^k\Big)\Big]$$

$$= \frac{p^2(1+j)}{1+j-q}\Big[\Big(q(1+r)^{k-1}(1+j)^k + q^2(1+r)^{k-2}(1+j)^k + \ldots$$

$$\ldots + q^{k-1}(1+r)(1+j)^k + (1+r)^k(1+j)^k - (1+f)^k\Big)$$

$$-\Big((1+f)^k + q^2(1+f)^{k-1} + q^4(1+f)^{k-2} + \ldots + q^{2(k-1)}(1+f) - (1+f)^k\Big)\Big]$$

$$= \frac{p^2(1+j)}{1+j-q}\Big[(1+j)^k(1+r)\Big(q(1+r)^{k-2} + q^2(1+r)^{k-3} + \ldots$$

$$\ldots + q^{k-1} + (1+r)^{k-1}\Big) - (1+f)^k$$

$$-\Big((1+f)^k + q^2(1+f)^{k-1} + q^4(1+f)^{k-2} + \ldots + q^{2(k-1)}(1+f) - (1+f)^k\Big)\Big]$$

$$= \frac{p^2(1+j)}{1+j-q}\Big[(1+j)^k(1+r)\Big((1+r)^{k-1} + q(1+r)^{k-2} + q^2(1+r)^{k-3} + \ldots + q^{k-1}\Big)\Big]$$

$$-\frac{1+j}{1+j-q}\Big[p^2(1+f)^k + p^2q^2(1+f)^{k-1} + p^2q^4(1+f)^{k-2} + \ldots + p^2q^{2(k-1)}(1+f)\Big]$$

$$= \frac{p(1+j)}{1+j-q}\Big[p(1+j)^k(1+r)\frac{(1+r)^k - q^k}{1+r-q}\Big] - \frac{1+j}{1+j-q}(\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}$$

$$= \frac{p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|r} - (1+j)(\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+j-q}.$$

■

Lemma 3.13 Platí

$$m_k = \frac{2p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|r} - (q+1+j)(\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+j-q}. \tag{106}$$

Dôkaz. Použijeme vzorce (103), (104) a (105):

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k} = (\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f} + 2\left[\frac{p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|r} - (1+j)(\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+j-q}\right]$$

$$= \frac{2p(1+j)^{k+1}}{1+j-q}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|r} + \frac{1+j-q-2j-2}{1+j-q}(\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}$$

$$= \frac{2p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|r} - (q+1+j)(\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+j-q}.$$

■

Lemma 3.14 Platí

$$\mu_k^2 = \frac{p(1+j)}{1+j-q}\left[(\ddot{s}_g)_{\overline{2k}|j}^{(p,q)} - 2q^k(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|j}^{(p,q)}\right]. \tag{107}$$

Dôkaz. Použijeme vzorce (99) a (23):

$$\mu_k^2 = \left[(\ddot{s}_g)_{\overline{2k}|j}^{(p,q)}\right]^2 = \left[p(1+j)\frac{(1+j)^k - q^k}{1+j-q}\right]^2$$
$$= p^2(1+j)^2\frac{(1+j)^{2k} - 2(1+j)^k q^k + q^{2k}}{(1+j-q)^2}$$
$$= \frac{p^2(1+j)^2}{1+j-q}\left[\frac{(1+j)^{2k} - q^{2k}}{1+j-q} - \frac{2q^k\big((1+j)^k - q^k\big)}{1+j-q}\right]$$
$$= \frac{p(1+j)}{1+j-q}\left[p(1+j)\frac{(1+j)^{2k} - q^{2k}}{1+j-q} - 2q^k p(1+j)\frac{(1+j)^k - q^k}{1+j-q}\right]$$
$$= \frac{p(1+j)}{1+j-q}\left[(\ddot{s}_g)_{\overline{2k}|j}^{(p,q)} - 2q^k(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|j}^{(p,q)}\right].$$

■

Veta 3.10 Za predpokladov lemmy 3.8 máme

$$\begin{aligned} Var(C_k) \quad = \quad & \frac{2p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|r}^{(p,q)} - (1+j+q)(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|f}^{(p^2,q^2)}}{1+j-q} \\ & - \frac{p(1+j)\big((\ddot{s}_g)_{\overline{2k}|j}^{(p,q)} - 2q^k(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|j}^{(p,q)}\big)}{1+j-q}, \end{aligned} \tag{108}$$

kde f je dané vzťahom (28) a r je dané vzťahom (32).

Dôkaz. Použijeme vzorce (106) a (107):

$$Var(C_k) = m_k - \mu_k^2$$
$$= \frac{2p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|r}^{(p,q)} - (1+j+q)(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|f}^{(p^2,q^2)}}{1+j-q}$$
$$- \frac{p(1+j)\big((\ddot{s}_g)_{\overline{2k}|j}^{(p,q)} - 2q^k(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|j}^{(p,q)}\big)}{1+j-q}.$$

■

Dôležitý prípad nastáva pre kombináciu $p = 1$ a $q = 1$, teda *anuitu s k ročnými platbami výšky* 1. Použijeme vzorec (24):

$$Var(C_k) = \frac{2p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|r}^{(p,q)} - (1+j+q)(\ddot{s}_g)_{\overline{k}|f}^{(p^2,q^2)}}{1+j-q}$$

$$
-\frac{p(1+j)\big((\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{2k}|j} - 2q^k(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}\big)}{1+j-q}
$$

$$
= \frac{2(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(1,1)}_{\overline{k}|r} - (1+j+1)(\ddot{s}_g)^{(1,1)}_{\overline{k}|f}}{1+j-1}
$$

$$
-\frac{(1+j)\big((\ddot{s}_g)^{(1,1)}_{\overline{2k}|j} - 2(\ddot{s}_g)^{(1,1)}_{\overline{k}|j}\big)}{1+j-1}
$$

$$
= \frac{2(1+j)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r} - (2+j)\ddot{s}_{\overline{k}|f} - (1+j)\ddot{s}_{\overline{2k}|j} + 2(1+j)\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{j}.
$$

Iný dôležitý prípad nastáva pre kombináciu $p = 1$ a $q = 1 + u$, kde u $(u \neq j)$ označuje pevnú mieru rastu platieb. Definuje to anuitu s platbami $1,\ 1+u, (1+u)^2,\ \ldots,\ (1+u)^{k-1}$ v tomto poradí. Nech

$$
1 + u = (1+j)(1+t). \tag{109}
$$

Potom platí

$$
C_k = (1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_k) + (1+u)(1+i_2)\ldots(1+i_k) + \ldots + (1+u)^{k-1}(1+i_k). \tag{110}
$$

Zo vzorca (94) vyplýva rekurentný vzťah pre C_k:

$$
C_k = (1+i_k)(C_{k-1} + (1+u)^{k-1}). \tag{111}
$$

Zo vzorca (95) vyplýva rekurentný vzťah pre μ_k:

$$
\mu_k = \mu(\mu_{k-1} + (1+u)^{k-1}). \tag{112}
$$

Zo vzorca (96) vyplýva rekurentný vzťah pre m_k:

$$
m_k = m(m_{k-1} + 2\mu_{k-1}(1+u)^{k-1} + (1+u)^{2(k-1)}). \tag{113}
$$

Špeciálne zo vzorcov (97) a (98) vyplývajú nasledujúce dva vzťahy:

$$
\mu_1 = \mu = 1 + j. \tag{114}
$$

$$
m_1 = m = 1 + f. \tag{115}
$$

Veta 3.11 Nech C_k označuje budúcu hodnotu anuity s k ročnými platbami výšky $1, 1+u, \ldots, (1+u)^{k-1}$ v tomto poradí po k rokoch. Nech ročná úroková miera behom k-tého roku je náhodná veličina i_k taká, že $E(1+i_k) = 1+j$ a $Var(1+i_k) = s^2$ a $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_n$ sú nezávislé náhodné veličiny. Potom

$$
E(C_k) = (\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|j} = \frac{(1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|t}}{1+t}, \tag{116}
$$

kde f je dané vzťahom (28) a r je dané vzťahom (32).

Dôkaz. Použijeme postupne vzorce (99), (23), (109) a (5).

$$
\mu_k = E(C_k) = (\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|j} = (\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|j}
$$

$$
= 1(1+j)\frac{(1+j)^k - (1+u)^k}{(1+j) - (1+u)}
$$

$$= (1+j)\frac{(1+j)^k - (1+j)^k(1+t)^k}{(1+j)-(1+j)(1+t)}$$

$$= (1+j)^k \frac{1-(1+t)^k}{1-(1+t)}$$

$$= \frac{(1+j)^k}{1+t}\left[(1+t)\frac{(1+t)^k-1}{(1+t)-1}\right]$$

$$= \frac{(1+j)^k}{1+t}\left[(1+t)^k + (1+t)^{k-1} + \ldots + (1+t)\right]$$

$$= \frac{(1+j)^k \ddot{s}_{\overline{k}|t}}{1+t}.$$

■

Veta 3.12 Za predpokladov vety 3.11 platí

$$\begin{aligned} Var(C_k) &= \frac{(1+u)^{2k}(2+t)\ddot{s}_{\overline{k}|h} - 2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t} \\ &\quad - \frac{(1+j)^{2k}(\ddot{s}_{\overline{2k}|t} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|t})}{t(1+t)}, \end{aligned} \tag{117}$$

kde t je dané vzťahom (109),

$$h \text{ je riešenie rovnice } 1+f = (1+u)^2(1+h), \tag{118}$$

$$w \text{ je riešenie rovnice } 1+f = (1+j)^2(1+t)(1+w). \tag{119}$$

Dôkaz. Použijeme postupne vzorce (108), $p = 1$, $q = 1+u$, (25), (21), (30), (109) a (119):

$$\begin{aligned} Var(C_k) &= \frac{2p(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|r} - (1+j+q)(\ddot{s}_g)^{(p^2,q^2)}_{\overline{k}|f}}{1+j-q} \\ &\quad - \frac{p(1+j)\left[(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{2k}|j} - 2q^k(\ddot{s}_g)^{(p,q)}_{\overline{k}|j}\right]}{1+j-q} \\ &= \frac{2(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|r} - (1+j+1+u)(\ddot{s}_g)^{(1,(1+u)^2)}_{\overline{k}|f}}{1+j-(1+u)} \\ &\quad - \frac{(1+j)\left[(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{2k}|j} - 2(1+u)^k(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|j}\right]}{1+j-(1+u)} \\ &= \frac{1}{(1+j)-(1+j)(1+t)}\left[2(1+j)^{k+1}(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{k}|r}\right. \end{aligned}$$

$$\left. - \left[1+j+(1+j)(1+t)\right](\ddot{s}_g)^{(1,(1+u)^2)}_{\overline{k}|f} - (1+j)(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{2k}|j} + \frac{2(1+u)^k(1+j)^{k+1}}{1+t}\ddot{s}_{\overline{k}|t}\right]$$

$$= \frac{1}{(1+j)(-t)}\Bigg[2(1+j)^{k+1}\Big[(1+r)^k+(1+u)(1+r)^{k-1}+\ldots+(1+u)^{k-1}(1+r)\Big]$$

$$-\Big[1+j+(1+j)(1+t)\Big](\ddot{s}_g)^{(1,(1+u)^2)}_{\overline{k}|f}-(1+j)(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{2k}|j}+\frac{2(1+u)^k(1+j)^{k+1}}{1+t}\ddot{s}_{\overline{k}|t}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{(1+j)(-t)}\Bigg[2(1+j)^{k+1}(1+u)^k\left(\left[\frac{1+r}{1+u}\right]^k+\left[\frac{1+r}{1+u}\right]^{k-1}+\ldots+\left[\frac{1+r}{1+u}\right]\right)$$

$$-\Big[1+j+(1+j)(1+t)\Big](\ddot{s}_g)^{(1,(1+u)^2)}_{\overline{k}|f}-(1+j)(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{2k}|j}+\frac{2(1+u)^k(1+j)^{k+1}}{1+t}\ddot{s}_{\overline{k}|t}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{(1+j)(-t)}\Bigg[2(1+j)^{k+1}(1+j)^k(1+t)^k\Big[(1+w)^k+(1+w)^{k-1}+\ldots+(1+w)\Big]$$

$$-\Big[1+j+(1+j)(1+t)\Big](\ddot{s}_g)^{(1,(1+u)^2)}_{\overline{k}|f}-(1+j)(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{2k}|j}+\frac{2(1+u)^k(1+j)^{k+1}}{1+t}\ddot{s}_{\overline{k}|t}\Bigg].$$

Ďalej použijeme postupne vzorce (5), (25), (22), (118), (109) a niekoľkokrát vzorec (5):

$$Var(C_k) = \frac{1}{t}\Bigg[(2+t)(\ddot{s}_g)^{(1,(1+u)^2)}_{\overline{k}|f}-2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}$$

$$+(\ddot{s}_g)^{(1,1+u)}_{\overline{2k}|j}-\frac{2(1+u)^k(1+j)^k}{1+t}\ddot{s}_{\overline{k}|t}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{t}\Bigg[(2+t)(\ddot{s}_g)^{(1,(1+u)^2)}_{\overline{k}|f}-2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}$$

$$+\frac{(1+j)^{2k}}{1+t}\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-\frac{2(1+u)^k(1+j)^k}{1+t}\ddot{s}_{\overline{k}|t}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{t}\Bigg[(2+t)\Big[(1+f)^k+(1+u)^2(1+f)^{k-1}+\ldots+(1+u)^{2(k-1)}(1+f)\Big]$$

$$-2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}+\frac{(1+j)^{2k}}{1+t}\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-\frac{2(1+u)^k(1+j)^k}{1+t}\ddot{s}_{\overline{k}|t}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{t}\Bigg[(2+t)(1+u)^{2k}\left(\left[\frac{1+f}{(1+u)^2}\right]^k+\left[\frac{1+f}{(1+u)^2}\right]^{k-1}+\ldots+\left[\frac{1+f}{(1+u)^2}\right]\right)\Bigg]$$

$$-\frac{2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t}+\frac{(1+j)^{2k}\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-2(1+u)^k(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|t}}{t(1+t)}$$

$$= \frac{1}{t}\Bigg[(2+t)(1+u)^{2k}\Big[(1+h)^k+(1+h)^{k-1}+\ldots+(1+h)\Big]\Bigg]$$

$$
-\frac{2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t}+\frac{(1+j)^{2k}\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-2(1+t)^k(1+j)^k(1+j)^k\ddot{s}_{\overline{k}|t}}{t(1+t)}
$$

$$
=\frac{(1+u)^{2k}(2+t)\ddot{s}_{\overline{k}|h}-2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t}
$$

$$
+\frac{(1+j)^{2k}\left[\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-2(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|t}\right]}{t(1+t)}
$$

$$
=\frac{(1+u)^{2k}(2+t)\ddot{s}_{\overline{k}|h}-2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t}
$$

$$
+\frac{(1+j)^{2k}\left[\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-2(1+t)^k\left[(1+t)^k+(1+t)^{k-1}+\ldots+(1+t)\right]\right]}{t(1+t)}
$$

$$
=\frac{(1+u)^{2k}(2+t)\ddot{s}_{\overline{k}|h}-2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t}
$$

$$
+\frac{(1+j)^{2k}\left[\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-2\left[(1+t)^{2k}+\ldots+(1+t)-(1+t)^k-\ldots-(1+t)\right]\right]}{t(1+t)}
$$

$$
=\frac{(1+u)^{2k}(2+t)\ddot{s}_{\overline{k}|h}-2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t}
$$

$$
+\frac{(1+j)^{2k}\left[\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-2(\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-\ddot{s}_{\overline{k}|t})\right]}{t(1+t)}
$$

$$
=\frac{(1+u)^{2k}(2+t)\ddot{s}_{\overline{k}|h}-2(1+j)^{2k}(1+t)^k\ddot{s}_{\overline{k}|w}}{t}
$$

$$
-\frac{(1+j)^{2k}(\ddot{s}_{\overline{2k}|t}-2\ddot{s}_{\overline{k}|t})}{t(1+t)}.
$$

■

KAPITOLA 4

Záver

V práci sme sa zaoberali anuitami s úrokovými mierami, ktoré sú navzájom nezávislé náhodné veličiny s normálnym rozdelením. Zamerali sme sa na anuity s platbami v aritmetickej a geometrickej postupnosti. Vypočítali sme rekurzívne predpisy, priemer a rozptyl budúcich hodnôt anuít s platbami v aritmetickej a geometrickej postupnosti.

Najskôr sme sa zaoberali anuitami s pevnými úrokovými mierami a odvodili sme výsledky pre základné typy anuít. Hlavnou časťou práce boli anuity s náhodnými úrokovými mierami. Vypočítali sme prvý a druhý moment, ako aj rozptyl budúcich hodnôt anuít. Nakoniec sme znázornili špeciálne prípady anuít pomocou tabuliek a grafov.

Práca čerpá hlavne z článkov [**4**] a [**1**]. Výsledky v týchto dvoch článkoch sa v niekoľkých prípadoch nezhodujú. V článku [**1**] autori tvrdia, že ich výsledky sú správne. Cieľom tejto práce bolo overiť správnosť vzorcov v článku [**1**], čo sa aj podarilo. V práci sú uvedené podrobné dôkazy všetkých vzorcov z článku [**1**]. Porovnaním s výsledkami v článku [**4**] je zrejmé, že niektoré výsledky v článku [**4**] sú nesprávne. Jedná sa konkrétne o Theorem 4.3, Theorem 4.5 a Theorem 4.6 z článku [**4**]. Tieto rozdiely sú znázornené na konci práce (kapitola 4) pomocou špeciálnych prípadov anuít.

Hlavným prínosom práce je overenie správnosti výsledkov v článku [**1**] a ich podrobné dôkazy. Niektoré výsledky boli aplikované numericky pomocou pripojených grafov.

Literatúra

[1] Burnecki, K., Marciniuk, A., Weron, A (2004): *On annuities under random rates of interest with payments varying in arithmetic and geometric progression*, Probability and Mathematical Statistics 24, 1-15.

[2] Cipra, T. (2005): *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, Ekopress, Praha.

[3] Gerber, H.U. (1990): *Life Insurance Mathematics*, Springer, Berlin.

[4] Zaks, A. (2001): *Annuities under random rates of interest*, Insurance Math, Econom 28, 1-11.

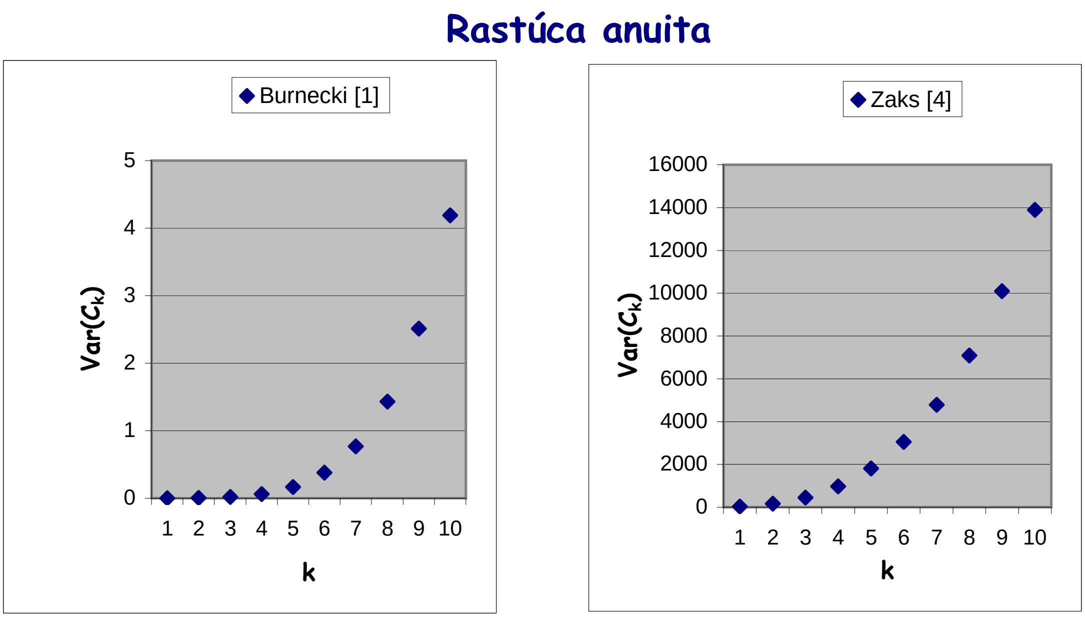
KAPITOLA 4

Niektoré numerické výsledky

4.1. Porovnanie výsledkov

V práci sme overili podrobnými dôkazmi správnosť výsledkov z článku [**1**]. Uvedieme porovnanie výsledkov s výsledkami z článku [**4**]. Jedná sa o výsledky $Var(C_k)$ pre štandardne rastúcu, štandardne klesajúcu a geometricky rastúcu anuitu. Pre názornosť tieto výsledky graficky porovnáme pre špeciálne prípady anuít. Uvažujme, že náhodné veličiny i_k majú normálne rozdelenie s parametrami $\mu = 0.035$ a $\sigma = 0.02$. Z toho vyplýva, že $j = 0,035$ a $s^2 = 0.0004$. Stanovíme $n = 10$. Znázorníme $Var(C_k)$ ako funkcie k pre tieto tri typy anuít. Na ľavej strane vždy uvedieme grafy zobrazujúce výsledky v práci opierajúce zhodné s výsledkami z článku [**1**], na pravej strane grafy zobrazujú výsledky z článku [**4**].

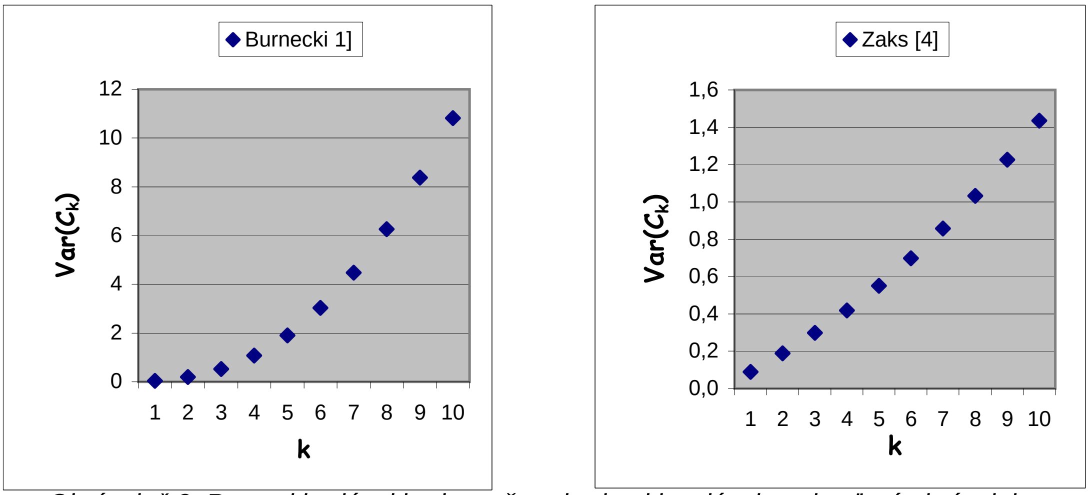
Obrázok č.1 znázorňuje rozptyl budúcej hodnoty štandardne rastúcej anuity. Na obrázku vľavo je výsledok vypočítaný podľa Vety 3.7. Na obrázku vpravo je výsledok vypočítaný podľa článku [**4**], Theorem 4.3. Zjavne sú výsledky vpravo približne 1000-násobne vyššie ako výsledky vľavo.



Obrázok č.1. Rozptyl budúcej hodnoty štandardne rastúcej anuity, ľavý obrázok je založený na Vete 3.7, pravý na Theoreme 4.3 zo Zaks [4].

Obrázok č.2 znázorňuje rozptyl budúcej hodnoty štandardne klesajúcej anuity. Na obrázku vľavo je výsledok vypočítaný podľa Vety 3.9. Na obrázku vpravo je výsledok vypočítaný podľa článku [**4**], Theorem 4.5. Je zrejmý rozdiel medzi týmito dvoma grafmi.

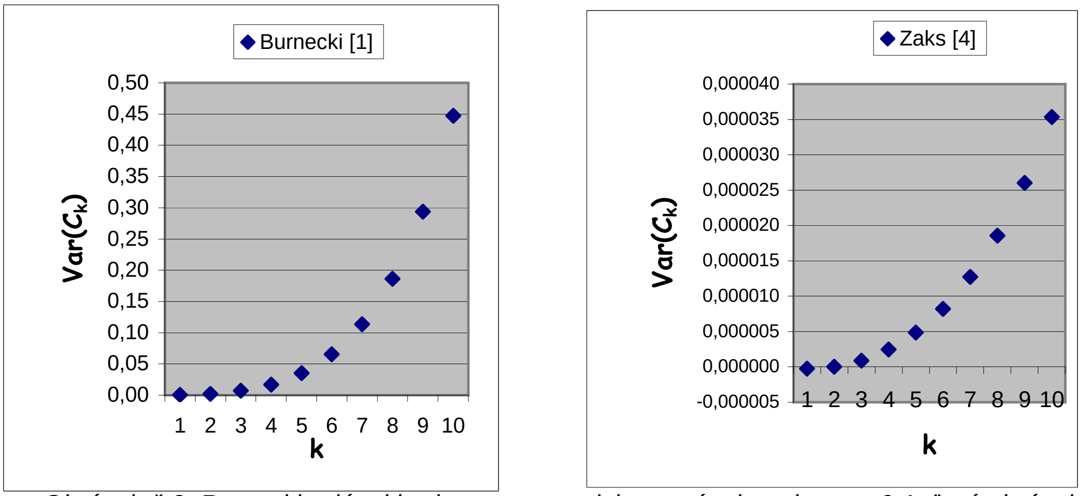
Štandardne klesajúca anuita



Obrázok č.2. Rozptyl budúcej hodnoty štandardne klesajúcej anuity, ľavý obrázok je založený na Vete 3.9, pravý na Theoreme 4.5 zo Zaks [4].

Obrázok č.3 znázorňuje rozptyl budúcej hodnoty geometricky rastúcej anuity. Uvažujeme $u = 0.1$. Na obrázku vľavo je výsledok vypočítaný podľa Vety 3.12. Na obrázku vpravo je výsledok vypočítaný podľa článku [**4**], Theorem 4.6. Je zrejmý rozdiel medzi týmito dvoma grafmi.

Geometricky rastúca anuita

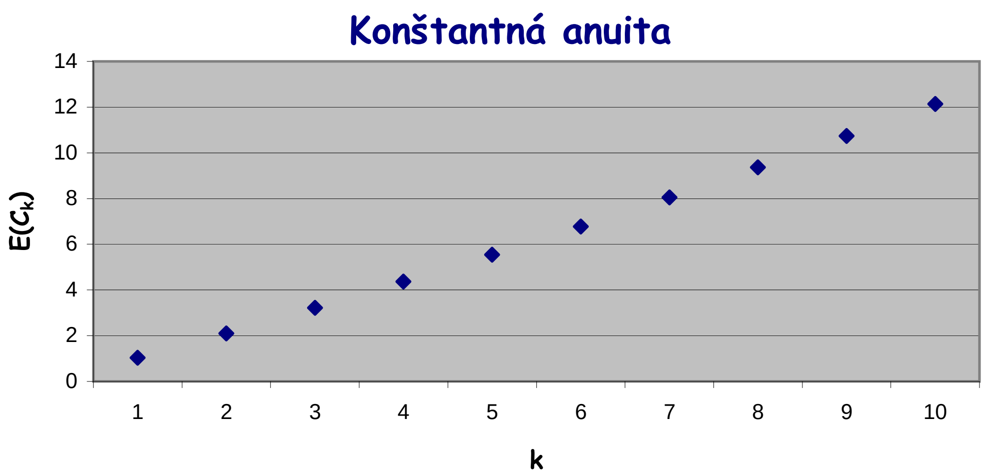


Obrázok č.3. Rozptyl budúcej hodnoty geometricky rastúcej anuity, u = 0.1, ľavý obrázok je založený na Vete 3.12, pravý na Theoreme 4.6 zo Zaks [4].

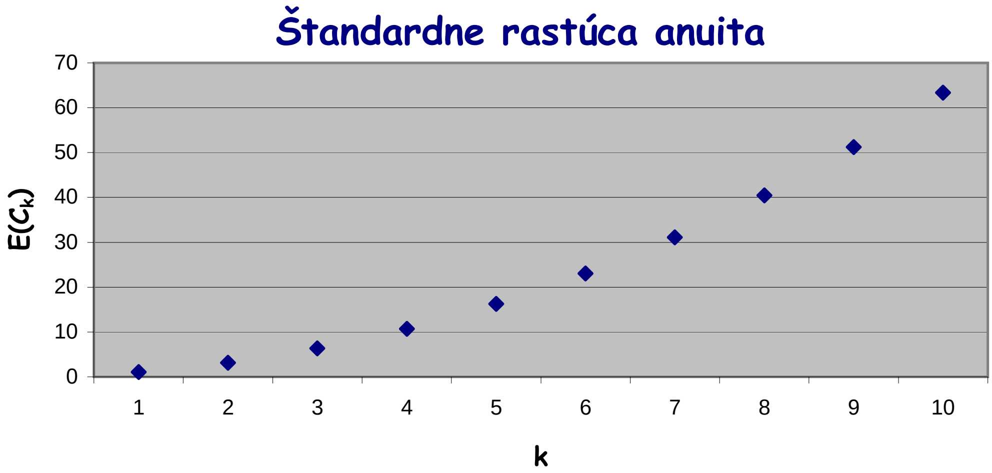
Budúca hodnota

k	Konštantná anuita	Štandardne rastúca anuita	Štandardne klesajúca anuita	Geometricky rastúca anuita	Geometricky klesajúca anuita
k	$E(C_k)$	$E(C_k)$	$E(C_k)$	$E(C_k)$	$E(C_k)$
1	1,03500	1,03500	10,35000	1,03500	1,03500
2	2,10623	3,14122	20,02725	2,20973	2,00273
3	3,21494	6,35617	29,00820	3,53942	2,91117
4	4,35176	10,71863	37,26849	5,04088	3,76758
5	5,53372	16,26879	44,78289	6,73265	4,57851
6	6,75586	23,04819	51,52529	8,63517	5,34991
7	8,01956	31,09988	57,46867	10,77097	6,08720
8	9,32623	40,46838	62,58508	13,16488	6,79529
9	10,67732	51,19977	66,84556	15,84426	7,47866
10	12,14199	63,34176	70,22015	18,83929	8,14139

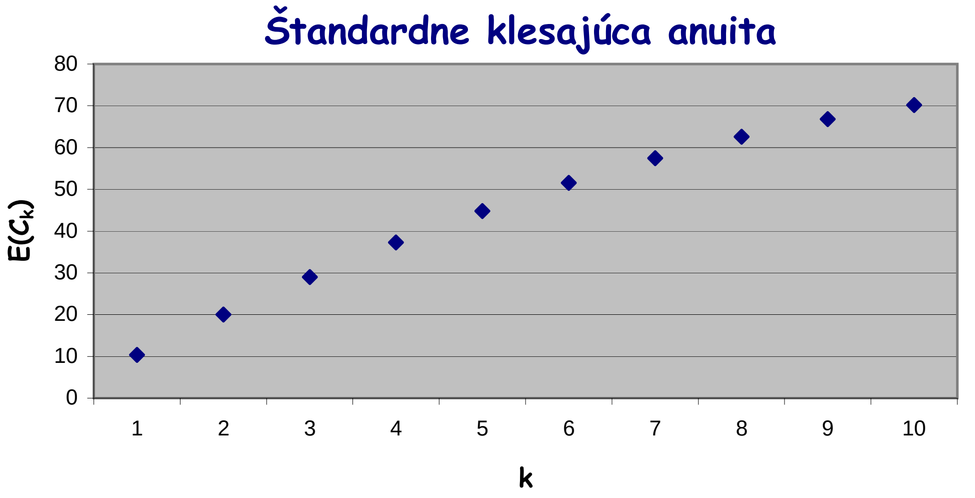
Tabuľka č.1. Budúca hodnota 5 rôznych typov anuít.



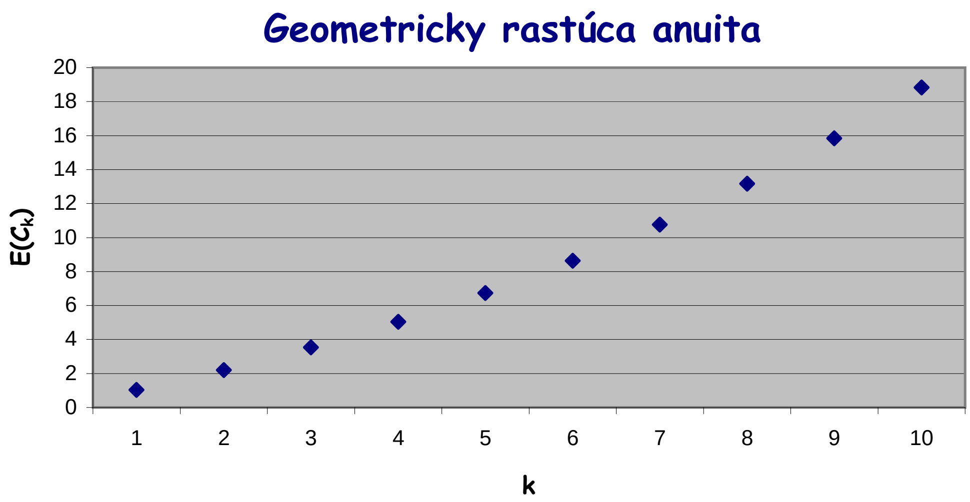
Obrázok č. 4. Budúca hodnota konštantnej anuity vypočítaná podľa Vety 3.2.



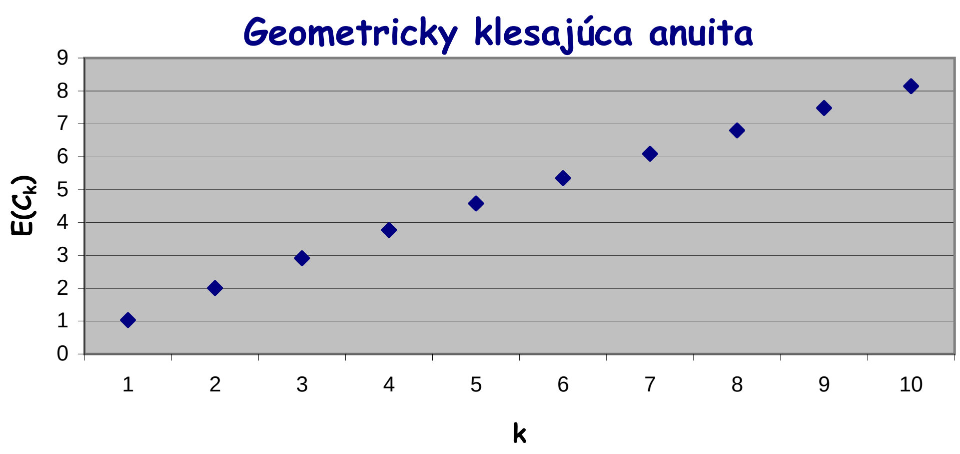
Obrázok č. 5. Budúca hodnota štandardne rastúcej anuity vypočítaná podľa Vety 3.3.



Obrázok č. 6. Budúca hodnota štandardne klesajúcej anuity vypočítaná podľa Vety 3.8.



Obrázok č. 7. Budúca hodnota geometricky rastúcej anuity vypočítaná podľa Vety 3.11. Uvažujeme u=0.1.

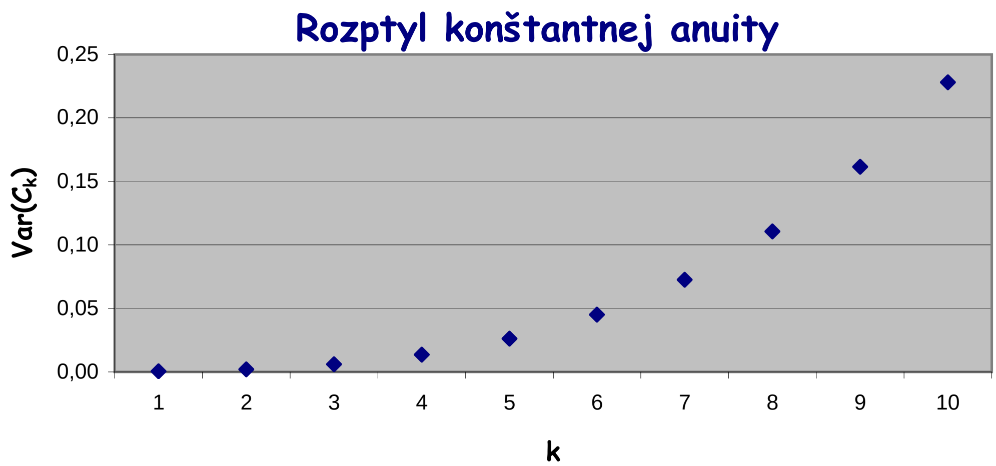


Obrázok č. 8. Budúca hodnota štandardne klesajúcej anuity vypočítaná podľa Vety 3.11. Uvažujeme u=-0.1.

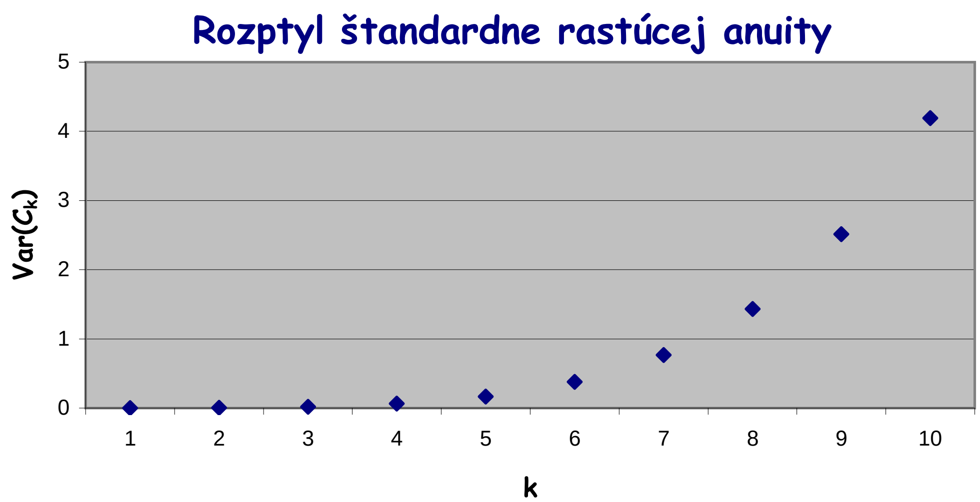
Rozptyl budúcej hodnoty

	Konštantná anuita	Štandardne rastúca anuita	Štandardne klesajúca anuita	Geometricky rastúca anuita	Geometricky klesajúca anuita
k	Var(C_k)	Var(C_k)	Var(C_k)	Var(C_k)	Var(C_k)
1	0,00040	0,00040	0,04000	0,00040	0,00040
2	0,00209	0,00411	0,19263	0,00225	0,00193
3	0,00609	0,01949	0,52064	0,00709	0,00523
4	0,01364	0,06379	1,07657	0,01709	0,01090
5	0,02612	0,16719	1,90254	0,03524	0,01951
6	0,04515	0,37752	3,03015	0,06560	0,03160
7	0,07259	0,76572	4,48041	0,11362	0,04770
8	0,11056	1,43209	6,26390	0,18648	0,06836
9	0,16148	2,51351	8,38104	0,29357	0,09414
10	0,22810	4,19170	10,82254	0,44713	0,12563

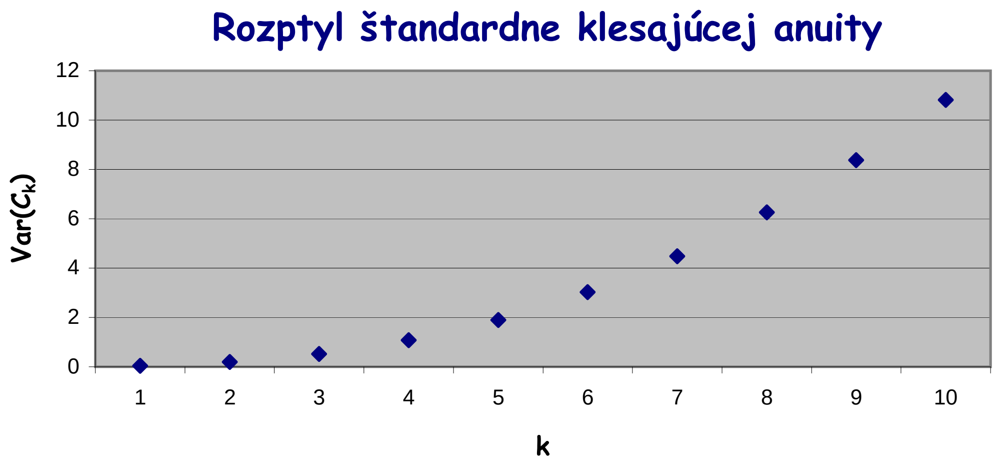
Tabuľka č.2. Rozptyl budúcej hodnoty 5 rôznych typov anuít.



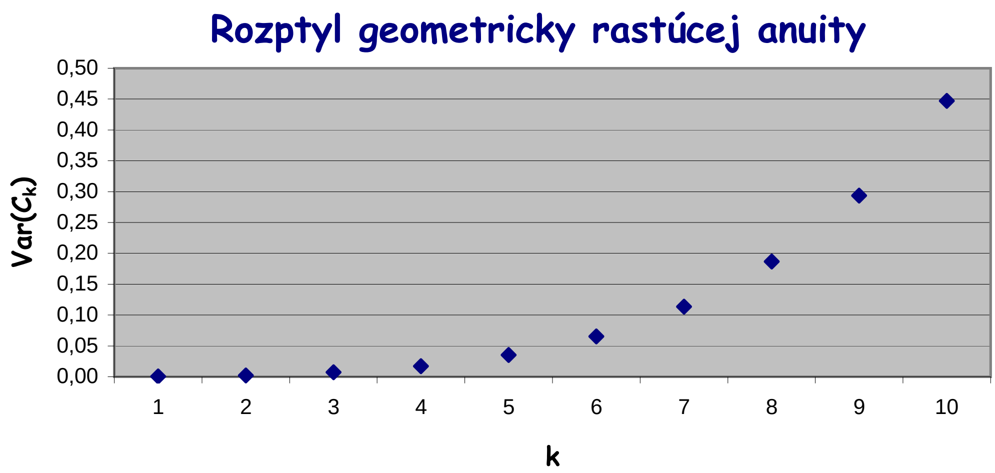
Obrázok č. 9. Rozptyl budúcej hodnoty konštantnej anuity vypočítaný podľa Vety 3.2.



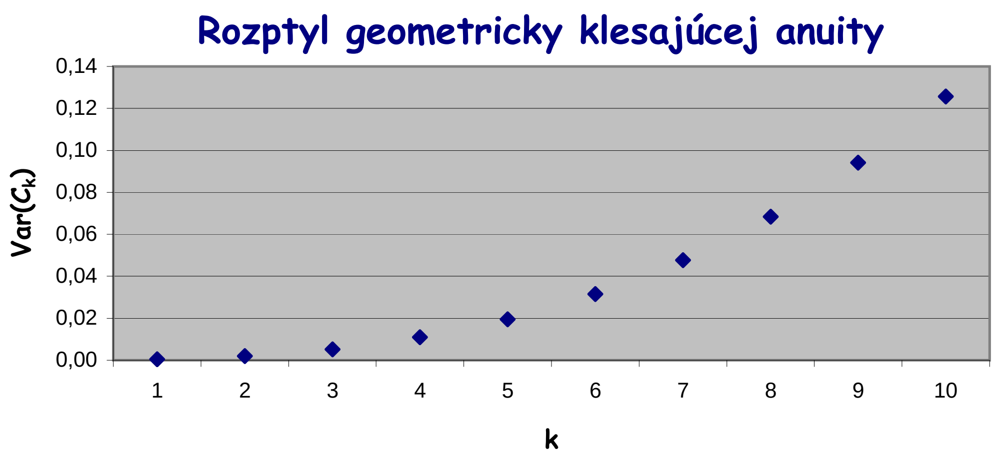
Obrázok č. 10. Rozptyl budúcej hodnoty štandardne rastúcej anuity vypočítaný podľa Vety 3.7.



Obrázok č. 11. Rozptyl budúcej hodnoty štandardne klesajúcej anuity vypočítaný podľa Vety 3.9.



Obrázok č. 12. Rozptyl budúcej hodnoty geometricky rastúcej anuity vypočítaný podľa Vety 3.12. Uvažujeme u=0.1.



Obrázok č.13. Rozptyl budúcej hodnoty štandardne klesajúcej anuity vypočítaný podľa Vety 3.12. Uvažujeme u=-0.1.

Značenie

c_k	ročná platba v *k*-tom roku
C_k	budúca hodnota anuity s *k* ročnými platbami c_1, c_2, ..., c_k v tomto poradí po *k* rokoch je náhodná veličina s ročnými úrokovými mierami i_1,, i_2, ..., i_k v tomto poradí: viz (33)
d	ročná diskontná miera: viz (1)
$(Ds)_{n,k\mid j}$	budúca hodnota štandardne klesajúcej anuity s platbami výšky *n*, *n*-1, ..., *n*-*k*+1 v tomto poradí po *k* rokoch s ročnou úrokovou mierou *j*: viz (17)
f	viz (28)
h	viz (118)
i_k	ročná úroková sadzba v *k*-tom roku
$(Is)_{k\mid j}$	budúca hodnota štandardne rastúcej anuity s *k* ročnými platbami výšky 1, 2, ..., *k* v tomto poradí po *k* rokoch s ročnou úrokovou mierou *j*: viz(8)
$(I^2s)_{k\mid j}$	budúca hodnota rastúcej anuity s *k* ročnými platbami 1^2, 2^2, ..., k^2 v tomto poradí po *k* rokoch s ročnou úrokovou mierou *j*: viz (11)
j	ročná úroková miera
m	viz (27)
m_k	druhý moment náhodnej veličiny C_k: viz (36)
M_{1k}	viz (55)
M_{2k}	viz (56)
μ	viz (26)
μ_k	prvý moment náhodnej veličiny C_k: viz (35)
r	viz (32)
s^2	rozptyl náhodnej veličiny i_k
$s_{k\mid j}$	budúca hodnota polehotnej anuity s *k* ročnými platbami výšky 1 s ročnou úrokovou mierou *j*
$s_{k\mid j}$	budúca hodnota predlehotnej anuity s *k* ročnými platbami výšky 1 s ročnou úrokovou mierou *j*: viz (5)
$(s_a)_{k\mid j}{}^{(p,q)}$	budúca hodnota anuity s platbami v aritmetickej postupnosti po *k* rokoch s ročnou úrokovou mierou *j*: viz (20)
$(s_q)_{k\mid j}{}^{(p,q)}$	budúca hodnota anuity s platbami v geometrickej postupnosti po *k* rokoch s ročnou úrokovou mierou *j*: viz (22)
t	viz (109)
v	ročný diskontný faktor: viz (2)
w	viz (119)