Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Historie komplexních čísel a její didaktické zpracování s využitím genetické paralely

The History of Complex Numbers and Its Didactic Design Using Genetic Parallelism

Adam Kocián

Vedoucí práce: Mgr. David Janda, Ph.D.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2025

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Historie komplexních čísel a její didaktické zpracování s využitím genetické paralely potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Prohlašuji, že jsem při její tvorbě nepoužil nástrojů umělé inteligence jiným způsobem, než je uvedeno ve vyjádření, které je součástí textu práce. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha 2025

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu své bakalářské práce Mgr. Davidovi Jandovi, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost a cenné podněty, které výrazně přispěly k podobě této práce. Také chci poděkovat své rodině za podporu a klid během psaní této práce.

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá možnostmi zavedení komplexních čísel na střední škole prostřednictvím genetické paralely. První část práce je věnována historickému vývoji pojmu komplexní číslo od starověkého Řecka až po 19. století, přičemž jsou vybrány klíčové momenty a etapy s didaktickým potenciálem. Ve druhé části jsou tyto momenty využity jako inspirace pro návrh konkrétních výukových aktivit a úloh vhodných pro středoškolskou výuku. Cílem práce je ukázat, že historie matematiky může sloužit jako smysluplný nástroj při zavádění nových pojmů v hodinách matematiky.

KLÍČOVÁ SLOVA
komplexní čísla, genetická paralela, motivace, historie matematiky

ABSTRACT

This bachelor's thesis explores the possibilities of introducing complex numbers at the secondary school through the method of genetic parallelism. The first part of the thesis focuses on the historical development of the concept of complex numbers, from ancient Greece up to the 19th century, highlighting key moments and stages with didactic potential. In the second part, these historical milestones are used as an inspiration for designing specific teaching activities and exercises suitable for high school mathematics. Main goal of the thesis is to demonstrate that the history of mathematics can serve as a meaningful tool in the introduction of new concepts in mathematics education.

KEYWORDS

complex numbers, genetic parallelism, morivation, history of mathematics

Obsah

Úvod

Komplexní čísla jsou náročné a rozšiřující téma, které propojuje více různých oblastí matematiky a je bráno spíše jako vysokoškolské téma, a proto s ním mají žáci často potíže. Na středních školách se často proberou jen základy a studenti na vysokých školách mají problémy navázat vysokoškolským studiem této látky. Ve středoškolských učebnicích, se kterými jsem se setkal, je motivace k zavedení nového číselného oboru spíše povrchní a neodpovídá historickému vývoji tohoto pojmu. Mně samotnému tato látka na střední škole dělala problém, a proto jsem se rozhodl napsat tuto práci.

Cílem této práce je popsat historii komplexních čísel a použít ji jako motivaci k zavedení tohoto číselného oboru na středních školách. Žáci se nejen dozví více o historii samotné matematiky, ale také pochopí, proč jsou tato čísla důležitá. Tento přístup vychází z teorie genetické paralely, podle které by proces učení nových pojmů měl kopírovat historický vývoj dané látky.

První kapitola je věnována principu genetické paralely, která tvoří teoretický základ celé bakalářské práce. V kapitole je popsán původ této myšlenky v biologii a psychologii. Hlavní důraz v této práci je však kladen na uplatnění této teorie v didaktice matematiky, jak ji popsal Milan Hejný. Dále se kapitola zabývá výhodami a nevýhodami genetické paralely, a jak bychom tuto myšlenku mohli použít konkrétně pro komplexní čísla.

Ve druhé kapitole je popsán historický vývoj pojmu komplexní číslo, počínaje prvními náznaky nutnosti rozšíření číselného oboru při řešení algebraických rovnic. Zmiňována jsou díla indických a arabských matematiků, která měla vliv na evropskou matematiku, a dále přínosy významných evropských matematiků, mezi které patří například Fibonacci, Gerolamo Cardano, Albert Girard, Sir William Rowan Hamilton nebo Georg Friedrich Bernhard Riemann. Kapitola se zaměřuje na postupné formování teorie komplexních čísel a jejich přijetí v matematické komunitě.

Ve třetí kapitole se zaměřuji na využití historických milníků k zavedení komplexních čísel na střední škole. Pomocí devíti vybraných etap vývoje komplexního čísla identifikuji momenty, které lze ve výuce využít jako podněty k diskusi, úvahám a objevování.

Každé historické období je doplněno o návrh výukové aktivity, jejíž ambicí je nejen předávat žákovi hotové informace, ale přímo ho zapojit do jejich objevení a zavedení, což by mu mělo pomoci snadněji pochopit toto téma a zároveň lépe přijmout rozšíření reálného oboru čísel.

1 Genetická paralela

Genetická paralela je didaktická metoda, která vychází z předpokladu, že utváření pojmů v lidské mysli do určité míry historicky kopíruje vývoj těchto pojmů ve vědě. Poprvé se o této teorii zmínil v 19. století Ernest Haeckel. Ten rozšířil Darwinovu evoluční teorii o předpoklad, že vývoj jednotlivce (ontogeneze) do jisté míry kopíruje vývoj druhu (fylogeneze).

V oblasti psychologie se tomuto tématu věnoval švýcarský filozof a psycholog Jean Piaget, který kolem roku 1920 ve svých testech pozoroval, že děti stejného věku často dělají stejné chyby. Na základě svých poznatků a výzkumů později uspořádal kognitivní vývoj do čtyř etap. Tento přístup se stal základem jeho teorie genetické epistemologie, která se zabývá tím, jak se poznání utváří v průběhu individuálního vývoje. Jednou z jejích dílčích tezí je právě vztah mezi ontogenezí a fylogenezí, čímž se jeho práce přibližuje i idejím genetické paralely (Slaný, 2021).

V České republice se touto teorii zabývá Milan Hejný, který tento princip nazval metoda genetické paralely. Navázal na myšlenky Thomase Kuhna, který tvrdil, že vědu nemusíme brát jako hromadění poznatků, ale jako neustálé obohacování a propojování nových i starších poznatků. V jeho dílech se opakovaně objevuje citát z díla P. Erdnijeva: "Růst stromu matematických znalostí v hlavě jednoho člověka bude úspěšný jen tehdy, když v určité míře zopakujeme historii rozvoje této vědy." Tento přístup má blízko ke konstruktivistickému přístupu ke vzdělání, kde se klade velký důraz na takzvané prekoncepty. To jsou představy a znalosti, které si žáci přenášejí z dřívějška. Cílem výuky pak není jen předávání informací, ale umožnění žákům aktivní proces poznávaní a objevování, při kterém budují nové koncepty a souvislosti (Hejný, Novotná, Vondrová, 2004).

Metoda genetické paralely znamená, že vytvoříme materiály, podle kterých mohou učitelé učit látku v pořadí odpovídajícím jejímu historickému vývoji. Nejde přitom o to, abychom žákům pouze vykládali, jak se daný pojem vyvíjel v historii. Naopak, cílem je připravit výuku tak, aby si žáci sami prošli podobným procesem, jakým dříve prošli vědci a matematici při objevování nových myšlenek. Historie tedy slouží jako inspirace, nikoli jako hlavní obsah výuky.

I na tuto metodu existují jisté námitky. Jednou z nich je ta, že v historii se objevují omyly nebo slepé uličky, které by ve výuce měly být přeskočeny. Hejného odpověď na tuto námitku je, že i tyto chyby mohou být ve výuce užitečné a žákům může pomoci lépe pochopit danou látku. Historické omyly tedy nemusí ve výuce být přehlíženy a brány jako negativní, ale využity jako příklady k hlubšímu porozumění (Hejný, Kuřina, 2001). Konkrétním příkladem jsou záporná čísla, která byla matematiky uznána až v 17. století. Tím pádem by se na základní škole vůbec neměla zavádět (Hejný, 1984).

V této práci se zaměříme na to, jak bychom mohli tuto metodu využít při zavedení komplexních čísel na střední škole. Pojem komplexního čísla totiž nevznikl nahodile, ale vznikal postupně v průběhu několika století, přičemž k tomuto objevu přispívali i ti největší velikáni z matematické historie. Tato historie je plná zajímavých momentů, které ukazují, proč je nutné rozšířit dosavadní obor reálných čísel. My zkusíme vybrat ty nejzajímavější a nejdůležitější kroky a pomocí nich teorii genetické paralely uplatnit.

2 Historický vývoj komplexních čísel

V této kapitole budeme sledovat, jak se pojem komplexní číslo historicky vyvíjel od prvních zmínek o odmocninách ze záporných čísel přes první počítání s komplexními čísly, až po aplikace a současný pohled. Cílem nebude do detailů popsat celou historii komplexních čísel, ale vyzdvihnout klíčové momenty, které budeme moci využít jako oporu pro následný návrh na zavedení komplexních čísel ve výuce na středních školách. Aby byl výklad srozumitelný, budeme se i při popisu historického vývoje komplexních čísel držet dnešní symboliky. Je však třeba mít na paměti, že tehdejší matematici chápali tyto pojmy často odlišně, než jak jim rozumíme dnes.

2.1 První zmínky o odmocninách ze záporných čísel

Jako jeden z prvních historicky doložených případů, kdy se objevuje problém související s budoucím zavedením komplexních čísel, můžeme považovat zmínku z 1. století našeho letopočtu, kdy při výpočtech objemu komolého jehlanu narazil matematik Heron z Alexandrie na druhou odmocninu ze záporného čísla, což je blízké moderní představě komplexních čísel. Ten počítal se vzorcem, který znali už Egypťané, a vypadal takto:

$$V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2).$$

Proměnné a, b jsou délky podstav a h je výškou jehlanu. Heron se snažil spočítat výšku při znalostech stran. Označil si délku boční hrany jako c a vzorec modifikoval do tvaru:

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

Úspěšně vyřešil několik případů, ale u případu kdy $a = 28, b = 4$ a $c = 15$ nebyl schopen dojít k řešení. Když tyto hodnoty dosadíme do vzorce a upravíme, vyjde nám:

$$h = \sqrt{81 - 144}.$$

Vidíme, že výsledek je odmocnina ze záporného čísla. Nicméně, v jeho době, kdy hodnoty proměnných byly brány spíše jako míra délky či obsahu, která musí být nezáporná, toto řešení nemělo smysl a takovýto jehlan není možné sestrojit (Nahim, 2010).

Pro nás je ovšem tato zmínka jedním z prvních setkání s tím, kdy matematika narazila na tento konkrétní limit, kdy řešení nešlo geometricky znázornit. V souladu s genetickou paralelou bychom se nejdříve měli s takovými problémy potkat, snažit se je pochopit a hledat řešení, jak se s nimi vypořádat. Teprve z této zkušenosti budeme mít potřebu zavést něco nového.

S podobnými problémy se setkali také indičtí matematici a na jejich práci dále navázali matematici arabského světa. Mezi ně patří například Abdall´ah Muhammad ibn M´usa Al-Khwarizmi (780–850), který ve své práci shrnul typy kvadratických rovnic a způsob jejich řešení. Díky němu a mnoha dalším arabským matematikům, jejichž práce se dostala ke křesťanským učencům v Evropě, se tamní postoj k počítání se zápornými čísly, dosud odmítanými, začal měnit (Boyer & Merzbach, 2011).

Prvním Evropanem, který přispěl ke vzniku komplexních čísel, byl Leonardo da Pisa (1170-1250) známý dnes jako Fibonacci. Ve své knize Liber Abaci předává evropským učencům arabské metody počítání, včetně způsobů řešení kvadratických rovnic. A i když v jeho době ještě nikdo nepracoval s pojmem imaginárního čísla, je pravděpodobné, že při řešení některých rovnic mohl narazit na situace, které by vedly k odmocnině záporného čísla. Opět však dochází k situaci, kdy Fibonacci v případech, kdy by řešení zahrnovalo odmocniny záporných čísel, tento výsledek neinterpretoval dál (Boyer & Merzbach, 2011).

Popsané zkušenosti s výskytem odmocnin ze záporného čísla nám poskytují oporu pro využití genetické paralely a zavedení komplexních čísel ve výuce matematiky, které můžeme formulovat do první klíčové etapy:

Klíčová etapa I: Získávání zkušeností s odmocninou z reálného čísla při řešení konkrétních problémů.

2.2 Gerolamo Cardano a Rafael Bombelli

V roce 1545 publikoval italský matematik Gerolamo Cardano (1501–1576) svou knihu ***Ars magna***, ve které zveřejnil metodu algebraického řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně. V několika úlohách se však setkal s čísly, které dnes označujeme jako imaginární. V jedné z těchto úloh šlo o rozdělení čísla 10 na dvě části tak, aby jejich součin byl 40. V dnešní interpretaci bychom tento problém zapsali pomocí rovnice takto:

$$x(10-x)=40,$$

což po roznásobení a úpravě dá kvadratickou rovnici:

$$x^2-10x+40=0.$$

Cardano došel k výsledkům $5-\sqrt{-15}$ a $5+\sqrt{-15}$. Tento výraz označil jako quantitas sophistica (sofistické číslo), čímž naznačoval, že číslo $\sqrt{-15}$ nemá smysl. Nás ale hlavně bude zajímat tzv. casus irreducibilis případ, kdy má kubická rovnice tři reálné kořeny, avšak v mezivýpočtech se objeví odmocnina ze záporného čísla. Cardano použil vzorec, který dnes nazýváme Cardanův vzorec. Ten slouží k nalezení kořenů kubické rovnice ve tvaru:

$$x^3+px+q=0.$$

Řešení této rovnice se vyjádří pomocí vzorce:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Například při řešení rovnice $x^3=15x-4$. Dává výše uvedený vzorce výsledek:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

To znamená, že při použití Cardanova vzorce na některé kubické rovnice se objeví výrazy obsahující odmocninu ze záporného čísla. V této době byl takovýto výraz považován za nesmyslný. Přesto se ukázalo, že pokud s tímto výrazem budeme formálně pracovat dále, je možné dojít k reálnému výsledku, který si můžeme ověřit i graficky. Pokud totiž sestrojíme graf funkce $f(x)=x^3-15x+4$, zjistíme, že nám protne osu x ve třech bodech a to znamená, že musíme mít tři reálné kořeny i když Cardanův vzorec nás vede přes odmocninu ze záporného čísla (Bečvář, Fuchs 1999).

Klíčová etapa II: Nesoulad mezi reálným řešením a mezikroky v Cardanově vzorci.

Na jeho dílo navázal další italský matematik Rafael Bombelli (1530-1590), ten se ve svém díle ***L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica*** vydaném v roce 1572 dostal podstatně dále a jako první analyzoval odmocninu záporného čísla a došel k výsledku, že výsledné číslo nemůže být ani kladné ani záporné. Proto zavedl speciální označení: při sčítání psal più di meno (což odpovídá pozdějšímu symbolu i), při odčítání pak meno di meno (odpovídající $-i$). Ve své knize se nebál počítat s odmocninou ze záporného čísla, jako mnoho matematiků v té době, a místo toho se snažil vymyslet pravidla pro tato čísla, která by nejenže dávala vnitřní smysl, ale zároveň umožnila získat správné reálné výsledky i v problematických případech, jakým byl právě výše zmíněný casus irreducibilis. Nakonec došel k tomu, že formuloval osm základních pravidel pro počítání s komplexní jednotkou, která lze v moderní symbolice vyjádřit následovně:

$$(+1)(+i) = +i, (-1)(+i) = -i, (+1)(-i) = -i, (-1)(-i) = +i,$$

$$(+i)(+i) = -1, (+i)(-i) = +1, (-i)(+i) = +1, (-i)(-i) = -1.$$

Na základě těchto pravidel dokázal z Cardanova vzorce dostat skutečná reálná řešení, která dříve vypadala nedosažitelně, protože vyžadovala počítání s odmocninami záporných čísel. Bombelliho hlavní přínos spočívá v tom, že vytvořil první konzistentní pravidla pro počítání s odmocninami ze záporných čísel, která nedávala smysl jen teoreticky, ale umožnila i prakticky řešit rovnice, které se do té doby řešit nedaly. Tím otevřel cestu k přijetí komplexních čísel jako užitečného nástroje pro řešení rovnic. (Bečvář, 2007)

Klíčová etapa III: Zavedení pravidel pro počítání s odmocninami záporných čísel.

2.3 Komplexní čísla v 17. a 18. století

V 17. století se záporná a komplexní čísla začala více a více objevovat v matematických výpočtech, to ovšem neznamenalo, že byla uznávána na stejné úrovni jako čísla kladná. První, kdo přiznal, že kubické rovnice mají záporné a komplexní řešení byl Albert Girard (1595-1632), který v roce 1629 ve své knize ***L'Invention nouvelle en l'algèbre*** vyslovil domněnku, že každá rovnice n-tého stupně má právě n kořenů. Toto můžeme považovat za předchůdce základní věty algebry, i když ji nikdy nedokázal. Také byl jedním z prvních, kdo otevřeně přiznal, že rovnice vyšších stupňů mohou mít nejen záporná, ale také komplexní řešení (Bečvář, Fuchs, 1999). Girard komplexním číslům nepřinesl žádná nová pravidla nebo techniky, jeho práce však výrazně přispěla k tomu, aby komplexní čísla byla brána jako rovnocenná součást matematiky.

Klíčová etapa IV: Vyslovení domněnky, že každá rovnice n-tého stupně má n kořenů

Další milník nastal v roce 1637, kdy bylo poprvé použito slovo „imaginární“ k popisu záporného čísla pod odmocninou, a to konkrétně ve spise ***La Géométrie*** francouzského matematika a filozofa René Descartesa (1596-1650). Tento výraz zřejmě použil, protože podle něj tato čísla neměla význam. (Bárta, Kolář, 2013).

Dalším matematikem, kterého můžeme zmínit v kontextu komplexních čísel je anglický matematik a teolog John Wallis (1616–1703), který se intenzivně zabýval otázkami číselných interpretací. Dokladem toho je jeho kniha ***Treatise of Algebra, both Historical and Practical*** vydána v roce 1685. V ní se jako první pokusil naznačit geometrickou interpretaci imaginárních čísel. Přestože Wallisova interpretace komplexních čísel byla prvním pokusem o jejich geometrické znázornění, jeho myšlenky zůstaly v době svého vzniku bez širšího ohlasu (Boyer & Merzbach, 2011).

S komplexními čísly dále pracovalo více známých matematiků jako například Isaac Newton (1643–1727), Johann Bernoulli (1667–1748), Abraham de Moivre (1667–1754) a mnoho dalších. Jejich společným znakem byla nejistota pramenící z nejasně definované podstaty komplexních čísel. Důkaz můžeme nalézt například v dopise Gottfrieda Wilhelma Leibnitze (1646–1716), který napsal, že tato ”podivná čísla“ jsou divem analýzy, netvorem světa idejí a obojživelníkem mezi bytím a nebytím.

Na začátku 18. století se francouzský matematik Abraham de Moivre (1667–1754) zabýval vztahy mezi komplexními čísly a trigonometrií. Ve svém výzkumu formuloval slavnou Moiverovu větu, která říká, že pro libovolné reálné číslo x platí:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx\,.$$

Tento vztah odvodil pomocí binomické věty pro všechna přirozená n, zobecnění pro celá a reálná čísla přišlo až později. V té době ještě neexistovala ucelená představa komplexní roviny a tato věta byla používána spíše jako algebraický nástroj pro usnadnění výpočtů s komplexními čísly. Přesto tím ukázal, že mocniny komplexních čísel jsou úzce spjatá s goniometrickými funkcemi a to později pomohlo k jejich geometrickému chápání jako rotace a položilo základy pro pozdější zavedení goniometrického a exponenciálního tvaru (Bečvář, Fuchs 1999).

Klíčová etapa V: Moivreova věta a cesta ke geometrickému chápání násobení komplexních čísel.

Důkaz platnosti Moivreho věty pro všechna reálná čísla n dokázal až Leonhard Euler (1707-1783). Tento švýcarský matematik v roce 1777 poprvé použil písmeno i pro označení komplexní jednotky $\sqrt{-1}$. Euler komplexní čísla pravděpodobně chápal podstatně lépe než jeho předchůdci. Ve svém spise z roku 1748 s názvem ***Introductio in analysin infinitorum*** uvedl vztah, kterému dnes říkáme exponenciální tvar:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Symbol φ označuje úhel, který komplexní číslo svírá s kladnou poloosou reálné osy v Gaussově rovině. Také ve své práci vyjadřoval komplexní čísla v goniometrickém tvaru:

$$x + yi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

kde je x reálná část komplexního čísla, y jeho imaginární část a r označuje vzdálenost bodu od počátku, tedy absolutní hodnotu komplexního čísla. Díky těmto vyjádřením se bere jako fakt, že komplexní čísla bral jako body v rovině, nikdy to však výslovně neuvedl. Eulerova práce významně přispěla k rozvoji teorie funkcí s komplexní proměnnou. Pro nás je to velký historický milník, protože nyní máme zavedenou imaginární jednotku, tak jak ji známe. Také máme poprvé propojená komplexní čísla s goniometrií. To nám připraví půdu pro jejich geometrické chápání.

Klíčová etapa VI: Goniometrické a exponenciální vyjádření komplexních čísel.

Za prvního matematika, který dospěl ke geometrické interpretaci komplexních čísel tak jak se dnes používá, považujeme norského matematika a kartografa Caspara Wessela (1745–1818). Ten ve své práci ***Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg anvendt fornemmeling til plane og sphaeriske Polygoners Opløsning*** vydané v roce 1799 rozvíjel vektorový počet v rovině a geometrickou interpretaci komplexních čísel a jejich operací jako bodů nebo vektorů v rovině. Dále si uvědomil, že k tomu abychom komplexní čísla mohli reprezentovat geometricky je nutno přidat imaginární osu kolmou k ose reálné a reprezentoval komplexní čísla jako body v rovině. S těmito body pracoval podobně jako dnes pracujeme s vektory. Ve své práci rovněž dospěl k Moivreově větě a ke goniometrickému vyjádření komplexního čísla. Bohužel, jeho práce zůstala bez odezvy.

Hlavní příčinou zřejmě bylo, že jeho kniha byla otištěna v matematikově rodném jazyce, dánštině. Až po sto letech byla přeložena do francouzštiny a anglický překlad vyšel až v roce 1999 (Bečvář 2007). My naštěstí jeho práci známe, a proto můžeme komplexní čísla zakreslovat do něčeho, čemu dnes říkáme Gaussova rovina.

Klíčová etapa VII: Zavedení imaginární osy a geometrické znázornění komplexních čísel v rovině.

2.4 Komplexní čísla na začátku 19. století

Velký zlom přišel v roce 1799, kdy Carl Friedrich Gauss (1779–1855) publikoval první důkaz základní věty algebry. Váha komplexních čísel tak byla posílena, a to vedlo k tomu, že na začátku 19. století se komplexními čísly zabývalo hned několik matematiků. Mezi nimi byl i francouzský matematik a fyzik Lazare Nicolas Marquerite Carnot (1753–1823), který na počátku století publikoval knihu ***De la correlation des figures de géométrie a Géométrie de position***. V této prácí se zabýval problematikou záporných a komplexních čísel, a právě jemu se připisuje zavedení termínu komplexní číslo (Bečvář, Fuchs, 1999). Jeho práce inspirovala dalšího francouzského matematika Adriena-Quentina Buéeho (1748–1826). Ten rozlišoval mezi znaménkem čísla a znakem operace a formuloval myšlenku, že číslo má dvě složky velikost, kterou chápal aritmeticky, a směr, který vnímal geometricky. Přestože předchozí matematici s komplexními čísly již implicitně pracovali jako s objekty majícími směr a velikost, právě Buée tyto dvě složky poprvé jasně a explicitně oddělil a spojil je s geometrickým výkladem komplexních čísel. Symbol $\sqrt{-1}$ bral jako znak kolmosti a výraz $a + b\sqrt{-1}$ považoval za reprezentaci vektoru v rovině. Tyto myšlenky představil ve své práci ***Mémoire sur les quantités imaginaires*** vydané v roce 1806. Svým přístupem přispěl nejen k širšímu přijetí záporných čísel, ale také k rozvoji grafického znázornění komplexních čísel (Bečvář, Fuchs, 1999).

Dalším významným matematikem, který se zabýval geometrickou interpretací komplexních čísel, byl švýcarský matematik Jean Robert Argand (1768–1822). Ten vnímal násobení $\sqrt{-1}$ jako otočení o 90°. Svou práci publikoval roku 1806 ve své knize ***Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques***. Ta po svém přetištění v časopise ***Annales de mathématiques pures et appliquées*** v letech 1813–

1814 vyvolala rozsáhlou diskusi o povaze a interpretaci komplexních čísel (Bárta, Kolář, 2013).

Klíčová etapa VIII: Komplexní čísla jako vektory a jejich násobení jako rotace.

Ačkoli geometrickou interpretaci komplexních čísel poprvé formuloval již Caspar Wessel v roce 1799, jeho práce byla ve své době prakticky neznámá. Až Carl Friedrich Gauss dovršil geometrickou interpretaci komplexních čísel vydáním jeho práce ***Theoria residuorum biquadraticorum*** v roce 1831. Díky tomu se komplexním číslům dostalo všeobecného přijetí. Díky Gaussově přístupu komplexní čísla ztratila svou dřívější tajemnost a byla pevně začleněna do matematického aparátu Byla zavedena jejich základní aritmetika, vyjádřená algebraicky jako:

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i,$$

$$(x + yi) \cdot (x' + y'i) = (xx' + yy') + (xy' + yx')i.$$

Pro násobení v goniometrické tvaru platí vztah:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = rr'(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi\varphi')).$$

Kde r označuje modul, normu nebo také velikost komplexního čísla. Díky výraznému vlivu Gausse se postupně rozšířilo chápání komplexních čísel jako bodů v rovině, což vedlo k zavedení označení Gaussova rovina. Komplexní čísla tak ztratila svůj tajemný charakter a operace sčítání a násobení získaly jasnou geometrickou interpretaci (Koutný, 2016).

Na Gaussovu práci navázal irský matematik Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), ten v roce 1833 představil teorii chápání komplexních čísel jako uspořádanou dvojici reálných čísel, čímž poskytl algebraický základ pro jejich studium. Své výsledky publikoval roku 1835 ve své práci ***Theory of Algebraic Couples***, kde identifikoval komplexní číslo $x + yi$ s bodem v rovině se souřadnicemi (x, y). Tímto přístupem přepsal geometrickou definici do algebraické formy, kde množinu komplexních čísel vyjádřil jako $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sčítání a násobení komplexních čísel definoval následovně:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1).$$

Hamilton také formuloval vzorec

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2,$$

který nazval zákon modulů, kdy modul komplexního čísla $\alpha = (a_1, a_2)$ definoval jako

$$|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

což vedlo k obecnému pravidlu

$$|\alpha| \cdot |\beta| = |\alpha \cdot \beta|.$$

Tento vztah ukazuje, že modul součinu dvou komplexních čísel je roven součinu jejich modulů. Hamilton se proslavil hlavně objevem čtyřrozměrné reálné algebry kvaternionů, kterým věnoval zbytek svého života. Po Hamiltonově formulaci komplexních čísel jako uspořádaných dvojic reálných čísel se matematická komunita zaměřila na hlubší pochopení jejich vlastností a aplikací (Bečvář, Fuchs, 1999).

Dalším z matematiků, kteří přispěli k rozvoji komplexní analýzy, byl Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Ten roku 1847 definoval množinu komplexních čísel $\mathbb{C}$ jako množinu izomorfní faktorovému okruhu $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$, okruhu reálných polynomů jedné proměnné podle hlavního ideálu generovaného polynomem $x^2 + 1$. Symbolicky zapsáno

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1).$$

Tím pomohl k tomu, že komplexní čísla už byla v polovině 19. století dobře definovaná a přijímaná jako algebraické objekty, jejich hlubší geometrické vlastnosti však zůstávaly neprobádané (Bárta, Kolář, 2013). Právě v tomto odvětví sehrál klíčovou roli matematik Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Ten se věnoval hlavně komplexním funkcím, které oproti reálným funkcím, kde ke každé hodnotě vstupu odpovídá jediná hodnota výstupu, mají některé komplexní funkce více různých hodnot. Například funkce odmocniny nebo logaritmu v komplexním oboru vycházejí vícečetné hodnoty, což činilo jejich analýzu obtížnou. Riemann proto vymyslel a zavedl geometricky objekt, které nazýváme Riemannovy plochy. Díky tomuto objevu se podařilo správně vizualizovat a interpretovat tato vícečetná řešení. Tímto pomohl vytvořit jednotnou teorii komplexních funkcí a jeho práce se stala klíčovou pro rozvoj moderní komplexní analýzy a také pro pozdější rozvoj algebraické geometrie (Bečvář, Fuchs, 1999).

Klíčová etapa IX: Formalizace komplexního čísla jako algebraické struktury.

2.5 Komplexní čísla ve 20. století a současnosti

Ve 20. století došlo k dalšímu rozvoji komplexních čísel a jejich uplatnění nejen v matematice, ale také ve fyzice a dalších vědních oborech. Jednou z oblastí rozvoje komplexních čísel byla teorie funkcí komplexní proměnné. Tomuto oboru se věnovali například Henri Poincaré (1854–1912) nebo David Hilbert (1862–1943), kteří rozšířili a prohloubili teorii analytických funkcí a jejich aplikací. Jedním z Hilbertových objevů bylo zavedení Hilbertových a Banachových prostorů, které tvoří základ funkcionální analýzy. Tyto prostory zavedené nad komplexními čísly sehrály důležitou roly jak v matematice, tak fyzice, kde se používají v teorii diferenciálních rovnic nebo kvantové mechanice (Krbálek, nedatováno).

Komplexní čísla sehrála důležitou roli také ve fyzice, a to zejména v kvantové mechanice. Za zmínku stojí například Erwin Schrödinger (1887–1961), kterého lidé znají zejména kvůli jeho myšlenkovému experimentu s kočkou. Komplexní čísla však využil ve slavné vlnové rovnici, kde je využil k popisu pravděpodobnostních amplitud částic, což vedlo k zásadnímu průlomu v porozumění mikrosvětu (Gudder, 1988). Komplexní čísla se dále využívají například při popisu spinových systémů, kde se uplatňují komplexní matice a operátory, a později v kvantových počítačích, kde kvantové bity operují s komplexními amplitudami (Cejnar, 2013).

V dnešním světě nalezneme komplexní čísla například v počítačové grafice, kde se používají k modelování ve 3D. Dále je také můžeme najít v analýze signálů, a to zejména ve Fourierově transformaci, která je klíčová ve zpracování obrazu, zvuku a datových přenosů. Další aplikací komplexních čísel jsou střídavé elektrické obvody, které se popisují pomocí komplexních čísel, což umožňuje jednodušší analýzu elektrických sítí a návrhy moderních řídicích systémů (Sojka, 2010).

Komplexní čísla můžeme nalézt i v oblasti elektrotechniky, kde se uplatňují v analýze střídavých proudů. Zajímavostí je, že v tomto odvětví fyziky se komplexní jednotka i značí jako j. Hlavním důvodem je, že písmenem i už je zavedený elektrický proud, a aby nedocházelo k záměně fyzici se jednoduše rozhodli pro jiné písmenko. Tato komplexní jednotka j se pak používá při výpočtech impedance ideální cívky, ideálního kondenzátoru nebo při výpočtu komplexního výkonu v obvodu.

V této kapitole jsme se dozvěděli, jak jsou komplexní čísla součástí našeho každodenního života, i když si to často ani neuvědomujeme. Komplexní čísla umožňují popis jevů, které nelze jednoduše zachytit pomocí reálných čísel. Díky nim lze oblasti, o kterých jsme si říkali, nejen lépe pochopit, ale i efektivně analyzovat a navrhovat. Ukazuje se tak, že komplexní čísla nejsou jen abstraktním matematickým konstruktem, ale mají své pevné místo v praktickém světě kolem nás. Už tento samotný fakt by mohl být dostačující motivací k jejich zavedení a počítání s nimi.

2.6 Shrnutí

V teoretické části práce jsme sledovali vývoj nového matematického pojmu od prvních náznaků, až po současné aplikace. Viděli jsme, že se tento pojem vyvíjel postupně a trvalo několik století, než se dostal do té podoby, kterou známe dnes. Takovýmto postupným vývojem se můžeme inspirovat i ve výuce tohoto tématu. Vést žáky, aby na konkrétní problémy sami naráželi a hledali způsoby, jak je překonat. V tom nám pomohou následující etapy, které jsme v této části vyzdvihli jako ty klíčové:

I. Získávání zkušeností s odmocninou z komplexního čísla při řešení konkrétního problému
II. Nesoulad mezi reálným řešením a mezikroky v Cardanově vzorci
III. Zavedení pravidel pro počítání s odmocninami záporných čísel
IV. Vyslovení domněnky, že každá rovnice n-tého stupně má n kořenů
V. Moivreova věta a cesta ke geometrickému chápání násobení komplexních čísel
VI. Goniometrické a exponenciální vyjádření komplexních čísel
VII. Zavedení imaginární osy a geometrické znázornění komplexních čísel v rovině
VIII. Komplexní čísla jako vektory a jejich násobení jako rotace
IX. Formalizace komplexních čísel

Ty budou sloužit jako opora pro aktivity, pomocí kterých se budeme snažit zavést komplexní čísla na střední škole. To však neznamená, že se této struktury musíme vždy držet. Někdy se nám může stát, že s některým pojmem se setkáme dříve, než tomu tak bylo v historickém vývoji. U některých etap také bude potřeba zpomalit a dát žákům více času na procvičení a pochopení. Zejména u prvních etap, kdy se žáci seznamují s něčím úplně novým, a při přechodu ke geometrické interpretaci je potřeba dát žákům dostatek prostoru pro objevování a osvojování si nových pojmů a pravidel.

3 Genetická paralela ve výuce komplexních čísel

Žáci jsou už od prvního setkání s mocninami a odmocninami učeni, že nikdy nemohou odmocňovat záporné číslo. Argumentem předkládaným učitelem bývá, že v oboru reálných čísel nenajdeme žádné číslo, které po umocnění na sudou mocninu dá záporné číslo, a proto nemá smysl odmocninu ze záporného čísla v kontextu reálných čísel smysluplně zavést. Když se u kvadratických rovnic setkají s tímto výsledkem, neberou ho jako správný a berou, že rovnice v oboru reálných čísel nemá řešení.

Na střední škole se však můžeme dostat do okamžiku, kdy obor reálných čísel musíme rozšířit a zavést komplexní čísla. Aby toto zavedení nebylo jen náhlé rozšíření s nepříliš dobrou motivací, zkusíme v této kapitole zavést komplexní čísla pomocí metody genetické paralely. V tomto zavedení nám pomohou historické etapy, které jsme vyzdvihli v předchozí kapitole jako klíčové momenty formování tohoto pojmu. Tyto etapy nám poslouží jako opora návrh výukových aktivit, které žáky provedou podobným procesem objevování, jako si prošli matematici v minulosti. Cílem bude, aby komplexní čísla pochopili jako nástroj pro řešení problémů, které do té doby řešit nemohli, a nejen jako uměle vytvořený nástroj bez praktického použití.

Následující aktivity jsou nástroj, jak žákům komplexní čísla přiblížit a vysvětlit. Jsou konstruovány s myšlenkou, že komplexní čísla se probírají až ve 4. ročníku střední školy a tím pádem jsou už probrány všechny pojmy, které se k zavedení komplexních čísel v aktivitách objevují jako jsou vektor, kubická rovnice nebo goniometrické funkce. Ne všechny na sebe přímo navazují, ale měli by být do výuky zařazeny přímo za sebou.

3.1 Etapa I: Získávání zkušeností s odmocninou ze záporného čísla při řešení konkrétních problémů

V historii matematiky se opakovaně objevoval problém, při kterém matematici naráželi na odmocninu ze záporného čísla. Matematici však tento problém považovali za nesmyslný (často podloženým argumentem, že nesmyslnost výsledku odpovídala nesmyslné geometrické interpretaci), a proto je vhodné začít těmito jednotlivými příklady. První aktivitou, abychom se k takovému problému vůbec dostali bude řešení kvadratických rovnic.

3.1.1 Aktivita 1: Falešná řešení problémů

Cíl aktivity: Cílem této aktivity je ukázat, že žáci se mohou setkat se s pro ně nesmyslným řešením při řešení reálného problému. V této aktivitě se žáci nejdříve setkají s historickým příkladem matematika Herona, který se jako první k takovému problému dostal.

Pokyny pro učitele: Učitel začíná představením Heronova vzorce pro výpočet výšky komolého jehlanu:

$$h = \sqrt{c^2 - 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2},$$

kde a, b jsou délky základen a c délka boční hrany. Žákům vysvětlí, že toto je vzorec, se kterým pracoval matematik Heron z Alexandrie a nyní si výpočet výšky zkusí pro nějaké konkrétní jehlany. Na začátek je vhodné zadat hodnoty, pro které výška vyjde v reálných číslech:

Úloha 1: Vypočtěte výšku komolého hranolu pomocí Heronova vzorce pro výpočet výšky komolého jehlanu s hodnotami $a = 5, b = 3, c = 10.$

Po dosazení do vzorce dostáváme:

$$h = \sqrt{10^2 - 2\left(\frac{5-3}{2}\right)^2},$$

a po úpravě se dostaneme k výsledku $h = \sqrt{98}$.

Po vyřešení této varianty zadá čísla tak, aby výška vyšla jako odmocnina ze záporného čísla například přímo Heronuv problém:

Úloha 2: Vypočtěte výšku komolého hranolu pomocí Heronova vzorce s hodnotami $a = 28, b = 4, c = 15.$

V tomto případě výsledek vyjde $\sqrt{-63}$. Učitel vysvětlí, že takovéto výsledky nelze zkonstruovat, a proto byly považovány za nesmyslné. Dále by si měli uvědomit, že obor reálných čísel na řešení takových úloh stačit nebude.

3.1.2 Aktivita 2: Kvadratické rovnice bez řešení v reálných číslech

Cíl aktivity: V této aktivitě žáci uvidí, že k podobnému výsledku jako v předešlé aktivitě se mohou dostat i u rovnic, které už znají.

Pokyny pro učitele: Učitel zadá žákům k řešení několik kvadratických rovnic, kde některé vedou na stejný problém s odmocninou ze záporných čísel s následujícím zadáním:

Úloha 3: Nalezněte všechny reálné kořeny uvedených kvadratických rovnic. V případě, že rovnice nemá řešení, zdůvodněte proč.

1. $x^2 = 16$
2. $x^2 = -25$
3. $x^2 + 9 = 0$
4. $x^2 - 121 = 0$
5. $2x^2 + 50 = 0$
6. $x^2 = -x - 1$
7. $x^2 = 4x - 1$

Po vyřešení těchto příkladů žákům vyjdou výsledky: ± 4, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-3}$, ± 11, $\sqrt{-25}$, $\emptyset$ a $2 \pm \sqrt{3}$. Řešení rovnic 2, 3 a 5 je záporné číslo pod odmocninou a u rovnice 6 vyjde záporný diskriminant. Žáci uvidí, že k tomuto problému se mohou dostat už při řešení kvadratických rovnic, které dobře znají. Následně učitel zadá, aby se žáci pokusili tyto rovnice řešit graficky. I v tomto případě lze pozorovat, že se například u druhé úlohy přímka $y = -25$ neprotne s parabolou danou kvadratickou funkcí $y = x^2$.

3.2 Etapa II: Nesoulad mezi reálným řešením a mezikroky v Cardanově vzorci

V druhé etapě navážeme prací Gerolama Cardana. Cardano při řešení kubických rovnic narazil na problém. Při počítání kubické rovnice narazili na odmocniny záporných čísel. Tento případ dnes nazýváme casus irreducibilis. Právě tento nesoulad mezi vizuálním a algebraickým přístupem nám může posloužit jako dobrý motivační moment pro zavedení něčeho nového.

3.2.1 Aktivita 3: Grafické zjištění počtu kořenů kubické rovnice

Cíl aktivity: V této aktivitě si žáci zkusí graficky řešit kubickou rovnici. Na základě náčrtu grafu konkrétní rovnice budou hledat přibližné hodnoty jejích kořenů. Tato aktivita je důležitá v kontextu celého zavedení zejména proto, že na ní přímo navazuje algebraická aktivita se stejnou rovnicí. V této aktivitě se hodí, aby žáci měli přístup k programům jako je GeoGebra, protože pomocí nich mohou výsledky lépe odhadnout.

Pokyny pro učitele: Začneme náčrtkem kvadratické funkce $y = x^2$ na tabuli (žáci do sešitů) a připomenutím, že kvadratická rovnice má nejvýše dva reálné kořeny, což můžeme ukázat na obrázku, který jsme načrtli. Nyní zadáme úlohu:

Úloha 4: Řešte následující kvadratickou rovnici graficky.

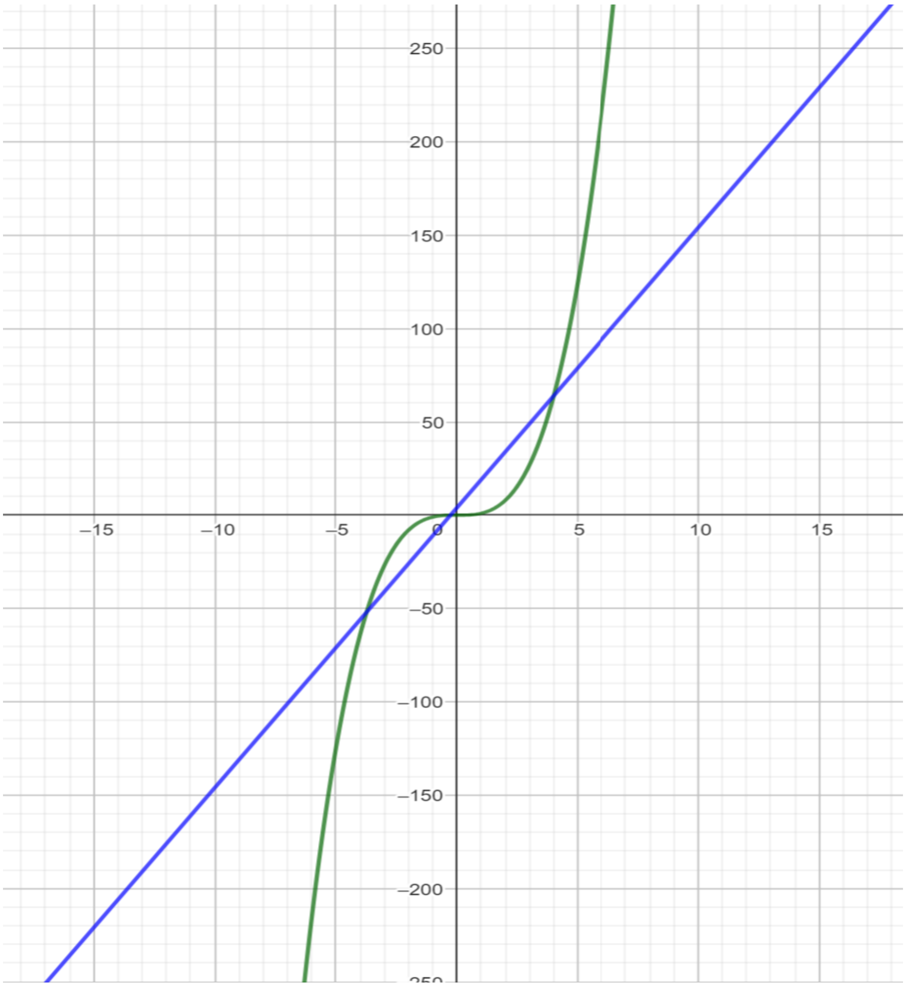
$$x^2 = 15x + 4.$$

Žáci tuto rovnici řeší graficky přidáním přímky $15x + 4 = 0$ do stávajícího náčrtku nebo nakreslením grafu funkce $f(x) = x^2 - 15x - 4$ a nalezením průsečíků s osou x. V náčrtku jsou vidět dvě reálná řešení. Navážeme dalším náčrtkem, ale pro kubickou rovnici:

Úloha 5: Řešte graficky kubickou rovnici, rozhodněte, kolik má řešení, a zkuste je odhadnout.

$$x^3 = 15x + 4.$$

V této aktivitě je potřeba, aby žáci už znali graf funkce $y = x^3$ a mohli si ji nakreslit. Po přidání přímky $15x + 4 = 0$ žáci dostanou obrázek podobný tomuto:



Obrázek 1: Grafické řešení kubické rovnice $x^3 = 15x + 4$

Na tomto náčrtku je vidět, že zadaná kubická rovnice má tři reálné kořeny, přestože zatím neví jaké, mohou zhruba odhadnou, že jeden kořen bude blízko nule, druhý v intervalu $(-4,-3)$ a poslední v intervalu $(3,5)$. Tato informace nám poslouží jako základ pro další aktivitu.

3.2.2 Aktivita 4: Cardanův vzorec a algebraický paradox

Tato aktivita přímo navazuje na předešlou aktivity, a proto by se měli stihnout v jedné hodině, nebo tuto aktivitu zařadit do následující hodiny. V této aktivitě se žáci seznámí s metodou řešení kubických rovnic, které říkáme Cardanův vzorec. Není to vzorec, který bývá součástí učiva, ale nám poslouží jako nástroj na přiblížení se k pochopení komplexních čísel, a také jako historické okénko, abychom ukázali, že k reálným výsledkům se dá dostat přes odmocninu ze záporného čísla.

Cíl aktivity: Žáci algebraicky zkusí vyřešit kubickou rovnici z minulé aktivity pomocí Cardanova vzorce. Zjistí, že i když ví, že rovnice má tři reálná řešení, tak historické algebraické řešení vede přes odmocninu ze záporného čísla.

Pokyny pro učitele: Učitel žákům představí vzorec, kterému říkáme Cardanův vzorec pro počítání, rovnic ve tvaru:

$$x^3 + px + q = 0.$$

Očekáváme, že si žáci si uvědomí, že to je stejný tvar kubické rovnice, kterou už znají z předešlé aktivity, kde zjistili, že rovnice $x^3 = 15x + 4$ má právě tři reálné kořeny. Nyní si zkusí tuto rovnici vyřešit algebraicky pomocí zmiňovaného vzorce. Vzorec můžeme napsat na tabuli nebo promítnout a vypadá takto:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Ukážeme, že v našem případě $p = -15$ a $q = -4$.

Úloha 6: Vyřeš rovnici $x^3 = 15x + 4$ pomocí Cardanova vzorce.

Necháme žáky dosadit do tohoto vzorce a upravit. Žáci by se měli dostat k výsledku $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. V tento moment nejsou schopni počítat dále kvůli odmocnině ze záporného čísla. Žáci však z minulé aktivity moc dobře vědí, že tato rovnice má tři reálné kořeny. Pro stoprocentní ujištění žáků o tomto faktu můžeme žákům povolit telefon a zkusit, aby našli řešení na internetu nebo aplikaci (například Photomath nebo WolframAlpha). Zde zjistí, že výsledkem jsou tři reálné kořeny a to $x_1 = 4,\ x_2 = -2 - \sqrt{3}$ a $x_3 = -2 + \sqrt{3}$. Tímto žáci uvidí, že i když se ve svých výpočtech zadrhnou u odmocniny ze záporného čísla, tak rovnice má tři reálné kořeny. To znamená, že se s touto odmocninou musí dát nějakým způsobem pracovat a dojít ke správnému výsledku.

3.3 Etapa III: Zavedení pravidel pro počítání s odmocninami záporných čísel

Po aktivitě s Cardanovým vzorcem žáci viděli, že se při řešení kubických rovnic mohou objevit odmocniny ze záporného čísla, a přesto rovnice má reálná řešení. Míříme zde k myšlence, zda by bylo možné pro počítání s takovými čísly formulovat pravidla, která by byla v souladu s pravidly pro počítání s běžnými reálnými čísly. První, kdo tato pravidla zavedl, byl Rafael Bombelli. Na základě jeho přístupu povedeme žáky k zavedení nové matematické jednotky a objevování nových pravidel pro tuto jednotku. Proto nyní provedeme dvě navazující aktivity: nejprve žáci objeví imaginární jednotku i, poté si sami odvodí základní pravidla pro práci s ní.

3.3.1 Aktivita 5: Zavedení imaginární jednotky pomocí odmocniny ze záporného čísla

Cíl aktivity: Žáci si pomocí jednoduchých úprav odmocnin záporných čísel uvědomí potřebu pro zavedení nové matematické jednotky, kterou později nazveme imaginární jednotkou i.

Pokyny pro učitele: Učitel se vrátí k výsledku z předchozí aktivity, který vyšel při výpočtu pomocí Cardanova vzorce:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Žáci už ví, že hlavním problémem tohoto výsledku je odmocnina ze záporného čísla: $\sqrt{-121}$. Žáky navedeme, aby si tuto odmocninu rozdělili jako:

$$\sqrt{-121} = \sqrt{-1 \cdot 121} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{121} = 11\sqrt{-1}.$$

Po této úpravě žáci vidí, že každou odmocninu ze záporného čísla lze zapsat jako odmocninu z mínus jedné vynásobenou odmocninou z daného čísla. Žáci se nyní nevyhnou tomu, že $\sqrt{-1}$ musí označit nějakým symbolem, aby s ní dále šlo pracovat. V tuto chvíli musí učitel zasáhnout, aby všichni tento symbol měli zavedený stejně. Učitel žákům řekne, že toto číslo se standartně značí i a platí tedy $i = \sqrt{-1}$. Žáci tak mohou nahradit odmocninu ze záporného čísla a dojít k zápisu $x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$. Dostat se dále přímo k reálným kořenům je náročné a v tuto chvíli i zbytečné, hlavní je, že žáci už ví, jak se vypořádat s odmocninou ze záporného čísla.

3.3.2 Aktivita 6: Objevování pravidel pro počítání s imaginární jednotkou

Poté co se žáci seznámili a přijali imaginární jednotku i. Je vhodné, aby zkoumali vlastnosti této nové jednotky. Nejdříve si zkusí chování čísel $i, -i, 1, -1$ při jejich vzájemném násobení a poté si zkusí, jak se chová imaginární jednotka i umocněna na větší exponenty, než je dva.

Cíl aktivity: Cílem této aktivity je, aby si žáci osvojili počítání s imaginární jednotkou.

Pokyny pro učitele: Zadáním v této aktivitě je tabulka, která vypadá následovně:

Úloha 7: Doplňte chybějící pole tabulky.

Tabulka 1: Zadání pro aktivitu 6

$\cdot$	i	$-i$	1	-1
i				
$-i$				
1				
-1				

Tuto tabulku učitel buď může promítnout, nebo nakreslit na tabuli. Žáci mají za úkol si tuto tabulku překreslit a doplnit. Navzájem si pak mohou své tabulky porovnat a zkusit sami opravit své rozdíly. Násobit 1 a -1 by žákům nemělo dělat problém. Očekáváme, že např. při násobení i mezi sebou si mohou $i \cdot i$ napsat jako $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$, a za předpokladu, že ví, že pokud násobím dvě druhé odmocniny stejného čísla vyjde dané číslo by se měli dostat k výsledku $i^2 = -1$. Stejným způsobem to mohou udělat i s $-i$ jen před odmocninou bude záporné znaménko tudíž budou násobit s výrazem $-\sqrt{-1}$. Samozřejmě musíme žákům ukázat správné řešení, aby měli všichni zavedená jednotná pravidla. Řešení můžeme promítnout, nebo v případě kreslení na tabuli doplníme tabulku následovně:

Tabulka 2: Řešení tabulky pro aktivitu 6

$\cdot$	i	$-i$	1	-1
i	-1	1	i	$-i$
$-i$	1	-1	$-i$	i
1	i	$-i$	1	-1
-1	$-i$	i	-1	1

Žáci tak ve svých sešitech budou mít jasný návod, jak se chová imaginární jednotka i.

Pokračováním této aktivity je zjistit, jak se chová mocnění imaginární jednotky. V tomto případě zadání vypadá následovně:

Úloha 8: Spočítejte hodnoty následujících mocnin imaginární jednotky.

$$i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, i^{15} i^{24}.$$

Žáci pracují nejdříve samostatně, poté mohou pracovat ve dvojicích. Pokud ani poté nepřijdou na správná řešení, učitel ukáže metodu rozkládání větších mocnin imaginární jednotky na mocninu, kterou znají a to je $i^2 = -1$. Ukázat to jde například na případu i^3. Tu mocninu můžeme rozdělit jako $i^3 = i^2 \cdot i$. Žáci ví, že $i^2 = -1$. Dále tedy dostáváme:

$$i^3 = -1 \cdot i = -i.$$

Pomocí této ukázky mohou žáci samostatně vypočítat zbylé mocniny imaginární jednotky. Pomocí těchto výpočtů zjistí, že se výsledky cyklicky opakují a dávají $i, -1, -i, 1$. Žáci se v této aktivitě naučí pracovat s novou imaginární jednotkou a osvojí si základní pravidla pro počítání.

3.4 Etapa IV: Vyslovení domněnky, že každá rovnice n-tého stupně má n kořenů

V této etapě se žáci poprvé setkají s rovnicemi, jejichž řešením jsou imaginární čísla. Na základě několika úloh objeví hypotézu, že počet kořenů rovnice odpovídá jejímu stupni.

Tuto domněnku poprvé formuloval matematik Albert Girard. Žáci nemusí znát přesnou formulaci nebo důkaz celé věty, ale postačí, když pochopí její hlavní smysl.

3.4.1 Aktivita 7: Rovnice s imaginárními kořeny

Do této doby žáci nebyli schopni řešit kvadratické a kubické rovnice s komplexními kořeny, až teď mají vše potřebné, aby kvadratické a vybrané kubické rovnice byli schopni vyřešit. V této aktivitě si zkusí několik takovýchto rovnic řešit, a pomocí předchozích objevů dojít k výsledku.

Cíl aktivity: Cílem této aktivity je, aby se žáci naučili řešit rovnice s komplexními kořeny.

Pokyny pro učitele: V této aktivitě učitel zadá několik rovnic, které nebudou mít řešení v reálných číslech. Zadaní těchto rovnic učitel rozdá na pracovním listě, kde se objeví jak rovnice s reálnými kořeny, tak i rovnice s komplexními kořeny. Pro naše potřeby vysvětlení a představy, jak by takové úlohy měly vypadat, zvolíme tyto tři rovnice:

Úloha 9: Řešte rovnice v oboru komplexních čísel a určete počet kořenů:

1. $x^2 + 9 = 0$
2. $x^2 = 4x - 13$
3. $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$

Tyto čtyři rovnice použijeme jako příklady, jak takovéto rovnice řešit, pokud sami nebudou vědět jak.

Řešení první rovnice lze ukázat takto:

$$x = \sqrt{-9}.$$

Odmocninu je možné rozložit na $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{9}$. S těmito výrazy se žáci už setkali, a proto mohou zapsat řešení následovně:

$$x = \pm 3i.$$

Žákům je potřeba zdůraznit, že stejně jako kvadratická rovnice $x^2 - 9 = 0$ má dva kořeny $x = \pm 3$ i rovnice s imaginárním řešením má dva. Podobně může ukázat i řešení druhé rovnice. U té nastane problém až u diskriminantu:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36.$$

To znamená, že rovnice nemá řešení v reálných číslech. Po dosazení do vzorce pro kvadratické rovnice dostaneme:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-36}}{2}.$$

$$x = 2 \pm 3i.$$

Kubickou rovnici $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$ řešíme vytknutím x před závorku, tím dostaneme rovnici:

$$x(x^2 - x - 6) = 0.$$

Lze hned vidět, že jedním z kořenů je nula. Zbylé kořeny získáme řešením rovnice $x^2 - x - 6 = 0$. Po vyřešení dostaneme další dva kořeny $x = -2$ a $x = 3$.

Nyní už se žáci seznámili s řešením rovnic, které dříve považovali za neřešitelné. Co ještě neví je kolik řešení a jestli vůbec nějaká rovnice má. V tom nám pomůže následující aktivita.

3.4.2 Aktivita 8: Kolik řešení může mít rovnice?

Žáci nyní vědí, že rovnice mohou mít reálná i komplexní řešení. Nabízí se otázka, kolik přesně má každá rovnice řešení, a není na to nějaké pravidlo. Výše jsme zmínili, že toto pravidlo poprvé zmínil Albert Gigard, a později dokázal Carl Friedrich Gauss. My se ovšem v rámci středoškolské výuky nebudeme snažit tuto větu přesně formulovat ani dokazovat. My se budeme snažit vytvořit prostředí, ve kterém si žáci tuto hypotézu sami postupně domyslí na základě konkrétních úloh a zkušeností.

Cíl aktivity: Cílem této aktivity je, aby žáci na základě vlastních výpočtů vyslovili myšlenku, že počet komplexních řešení libovolné rovnice odpovídá stupni této rovnice.

Pokyny pro učitel: Učitel žákům zadá několik rovnic různých stupňů. Postačí je napsat na tabuli, ale může je i promítnout. Samozřejmě čím více rovnic tím lépe, ale pro náš účel ukázky postačí těchto pět rovnic:

Úloha 10: Nalezněte počet řešení těchto rovnic.

1. $x^2 - 4 = 0$ (dvě reálná řešení)
2. $x^2 + 4 = 0$ (dvě komplexní řešení)
3. $x^2 - 4x + 4 = 0$ (dvojnásobné řešení)

4. $x^3 - x = 0$ (tři reálná řešení)
5. $x^4 - 1 = 0$ (dvě komplexní a dvě reálná řešení)

Žáci rovnice vyřeší a dostanou počet řešení uvedený v závorce u každé rovnice. Například u páté rovnice vyjdou řešení $x_{1,2} = \pm 1$ a $x_{3,4} = \pm i$ a to jsou čtyři řešení.

Ve třetí rovnici ukážeme případ, kdy se diskriminant rovná nule. Žákům po vyřešení rovnice pomocí diskriminantu vyjde $x = 2$. Pokud, ale ukážeme řešení, kde rovnici rozložíme na součin $(x-2)(x-2) = 0$ žáci uvidí, že tato rovnice má dva shodné kořeny $x = 2$.

Nakonec by učitel měl shrnout aktivitu tím, že souvislost mezi počtem řešení a stupněm rovnice opravdu existuje a nazývá se základní věta algebry. Důkaz ani přesné znění žáci znát nemusí. Očekáváme, že na této úrovni porozumění si žáci odnesou představu že každá rovnice stupně n má právě n komplexních kořenů.

3.5 Etapa VII: Zavedení komplexní roviny a geometrické znázornění

I když podle námi prozkoumaných zdrojů přichází z historického hlediska geometrická interpretace komplexního čísla o trochu později než etapy V a VI, jsme se rozhodli komplexní čísla vizualizovat už nyní. Hlavní důvod tohoto posunu je ten, že následující pojmy, jako je goniometrický nebo exponenciální tvar, i když historicky předcházely imaginární rovině tak, jak ji chápeme dnes, lépe dávají smysl, až když žáci mají představu o geometrické interpretaci komplexních čísel. Vyváží také často nedostatečné zkušenosti, které s goniometrickými funkcemi žáci mají.

3.5.1 Aktivita 9: Zavedení komplexní roviny

V předchozích aktivitách se žáci seznámili s imaginární jednotkou a naučili se základní pravidla pro výpočty. V této aktivitě zavedeme komplexní rovinu, které říkáme Gaussova rovina.

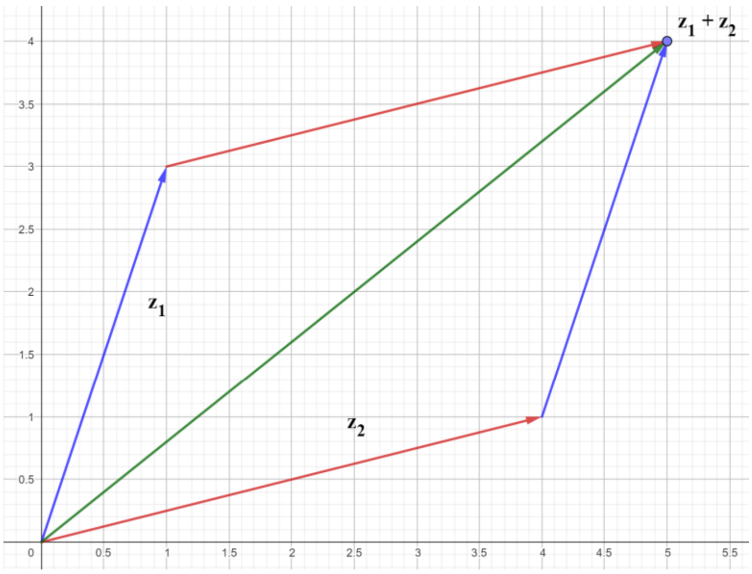
Cíl aktivity: V této aktivitě se budeme snažit představit žákům geometrickou interpretaci komplexního čísla. V předchozích aktivitách se už žáci setkali s výrazy jako $x = 2 + 3i$. Zatím tento výraz berou jen jako řešení rovnice. V této aktivitě ukážeme, že tento výraz si lze představit jako bod. Žákům to přiblíží dosud jen abstraktní pojem.

Pokyny pro učitele: Učitel začíná nakreslením číselné osy na tabuli a zadáním několika libovolných čísel na zakreslení. Následuje otázka, jak do této osy zakreslit číslo $z = 4 + 2i$. Žáci by mohli dospět k tomu, že jim reálná osa nestačí a je potřeba ji rozšířit. Poté učitel žákům představí a zavede Gaussovu rovinu tak, že k reálné horizontální ose přidá vertikální imaginární osu. Žáci pak mohou zakreslit komplexní číslo $z = 4 + 2i$ jako bod o souřadnicích (4;2). Nakonec učitel nechá žáky ať si vymyslí několik libovolných komplexních čísel a zakreslí je do svého sešitu, aby si sami vyzkoušeli a procvičili tuto novou geometrickou interpretaci.

3.5.2 Aktivita 10: Sčítání komplexních čísel v Gaussově rovině

Cíl aktivity: Žáci si osvojí sčítání komplexních čísel pomocí geometrického přístupu. Cílem je pochopit, že sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání vektorů.

Pokyny pro učitele: Žáci začnou nakreslením dvou komplexních čísel do svých sešitů $z_1 = 1 + 3i$ a $z_2 = 4 + i$. Učitel tato čísla nakreslí na tabuli. Otázkou je, jak zakreslit součet těchto čísel. Nápovědou pro žáky bude z bodů v komplexní rovině udělat vektory spojením těchto bodů s počátkem. Žáci by pak měli sami dojít k tomu, že sčítání komplexních čísel v Gaussově rovině se chová stejně jako sčítání vektorů. Řešení pak můžeme zakreslit pomocí rovnoběžníkové metody a naše konkrétní úloha bude vypadat následovně:



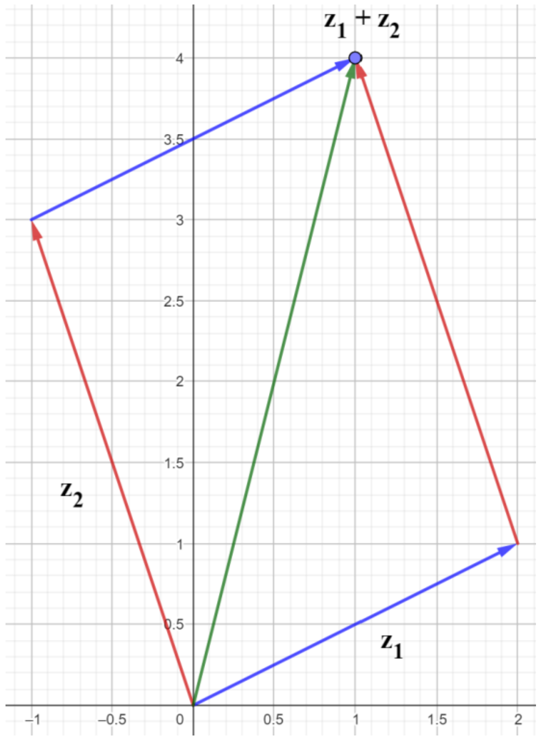
Obrázek 2: Grafické řešení úlohy $z_1 + z_2$

Po této ukázce můžeme nechat žáky, ať si zkusí do komplexní roviny zakreslit několik úloh sami spíše jen jako procvičení, protože sčítání vektorů už by mělo být probrané. Úlohy, které použijeme budou vypadat následovně:

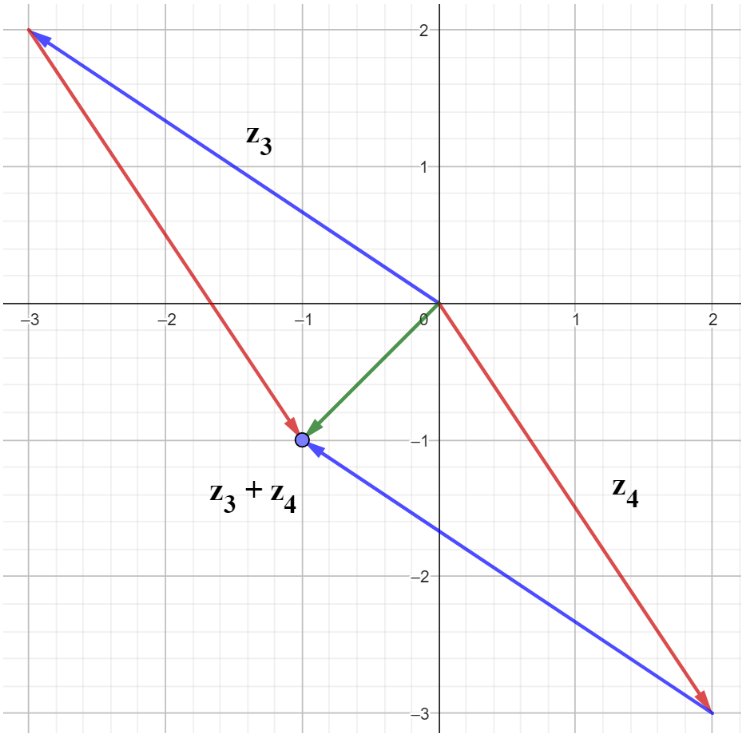
Úloha 11: Zakreslete následující komplexní čísla v Gaussově rovině a následně zakreslete součet těchto čísel.

1. $z_1 = 2 + i, z_2 = -1 + 3i$
2. $z_3 = -3 + 2i, z_4 = 2 - 3i$
3. $z_2 + z_3 + z_1$

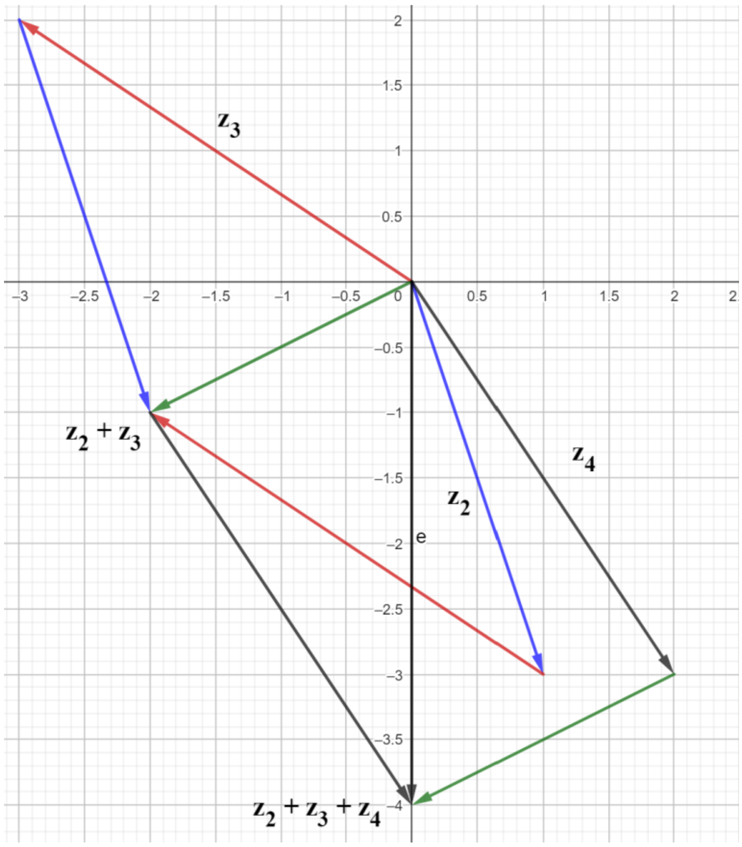
Řešení: viz obrázky 3-5.



Obrázek 3: Řešení úlohy 1.



Obrázek 4: Řešení úlohy 2.



Obrázek 5: Řešení úlohy 3.

3.6 Etapa VI: Goniometrické a exponenciální vyjádření komplexních čísel

Po zavedení geometrické interpretace komplexních čísel v Gaussově rovině si žák dokáže představit komplexní číslo v rovině. V této etapě si ukážeme nové způsoby, jak komplexní čísla vyjadřovat.

3.6.1 Aktivita 11: Zavedení goniometrického tvaru

Cíl aktivity: Žáci s pomocí učitele objeví možnost vyjadřovat komplexní čísla pomocí vzdálenosti od počátku a úhlu.

Pokyny pro učitele: Učitel začíná otázkou, jestli není možné komplexní číslo vyjádřit jinak než jen souřadnicemi v rovině. Společnou debatou by se měli dostat ke dvěma údajům, a to k velikostí vektoru, který danému číslu odpovídá a ke směru, který je daný nějakým úhlem. Jako první učitel vysvětlí argument komplexního čísla, který značíme φ a je to úhel, který vektor komplexního čísla svírá s kladnou částí reálné osy. Na to naváže vzdáleností komplexního čísla od počátku. Pomocí Pythagorovy věty mohou žáci tento údaj spočítat jako: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a nazývat ho absolutní hodnota, modul nebo velikost komplexního čísla. Nyní ukážeme, že pomocí goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku lze hodnoty x, y vyjádřit pomocí absolutní hodnoty a úhlu φ jako $x = |z| \cos \varphi$ a $y = |z| \sin \varphi$. Nyní díky těmto údajům učitel ukáže a definuje goniometrický tvar komplexního čísla jako:

$$z = |z|(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi).$$

3.6.2 Aktivita 12: Převádění komplexního čísla do goniometrického tvaru

Cíl aktivity: V této aktivitě si žáci procvičí převádění komplexních čísel do goniometrického tvaru.

Pokyny pro učitele: Učitel nejdříve připomene vzorce pro výpočty z předešlé aktivity jako je výpočet absolutní hodnoty a jak vypadá číslo v goniometrickém tvaru. Dále zadá několik úloh na procvičení. Pro naše potřeby zadaní vypadá následovně:

Úloha 12: Převeď na goniometrický tvar následující komplexní čísla.

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
3. $z_3 = 3 + 4i$

Začneme výpočtem absolutní hodnoty z s pomocí vzorce $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tak dostaneme absolutní hodnoty $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = 2$ a $z_3 = 5$. Další krok je zjistit úhel φ u něho víme, že platí $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$ a zároveň platí $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$. V první úloze nám tedy vychází $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a to žáci ví, že nastane pro $\varphi = \frac{\pi}{4}$, a pro $\varphi = \frac{7\pi}{4}$. Pro $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ máme také dva výsledky a to $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Obě rovnosti musí platit zároveň a tudíž $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Nyní už máme vše potřebné pro převod na goniometrický tvar $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Stejným postupem uděláme i zbylé dvě úlohy, které vyjdou $z_2 = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$ a $z_3 = 5\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$.

3.6.3 Aktivita 13: Násobení v goniometrickém tvaru

Cíl aktivity: Zavést a procvičit násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru.

Pokyny pro učitele: S pomocí goniometrického tvaru může učitel elegantně zavést násobení komplexních čísel. Násobení dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ takto:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Jinými slovy, při násobení komplexních čísel v tomto tvaru jednoduše násobíme jejich absolutní hodnoty a sčítáme jejich odchylky od reálné osy. Obdobně u dělení absolutní hodnoty dělíme a odchylky odčítáme. Tento vzorec si rovnou mohou procvičit na následující úloze.

Úloha 13: Urči součin následujících komplexních čísel.

1. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$
2. $z_3 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), z_4 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
3. $z_5 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), z_6 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Po dosazení do vzorce a úpravě dostaneme následující výsledky $z_1 \cdot z_2 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_3 \cdot z_4 = 12\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ a $z_5 \cdot z_6 = 20\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Po zavedení goniometrického tvaru, který umožnuje komplexní čísla vyjádřit elegantně pomocí absolutní hodnoty a argumentu (úhlu) je vhodné žákům ukázat ještě jeden tvar komplexního čísla, a to konkrétně exponenciální tvar. Ten vychází z Eulerova vztahu:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

který propojuje tři nesouvisející oblasti matematiky, exponenciální funkce, goniometrie a komplexní čísla. Pomocí tohoto vzorce je možné komplexní číslo v goniometrickém tvaru:

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Zjednodušit do tvaru:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Zavedením exponenciálního tvaru žáci uvidí další způsob vyjádření komplexních čísel, pomocí kterého lze zjednodušit násobení dvou komplexních čísel. Násobení dvou komplexních čísel v exponenciálním tvaru $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ a $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ má vzorec:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Je vidět, že podobně jako u násobení v goniometrickém tvaru jednoduše násobíme moduly a sčítáme argumenty.

3.7 Etapa V, VIII: Moivreova věta jako objev pravidel pro rotace v rovině

Jistě jste si všimli, že jsem vynechal jednu etapu, a to konkrétně etapu V. Hlavní důvod je ten, že i když historicky je starší než geometrická interpretace nebo goniometrický tvar, pro nás je důležitá až v moment, kdy jsme se s těmito pojmy už setkali a víme, jak s nimi pracovat. V této kapitole jsem se proto rozhodl spojit dvě etapy, a to konkrétně etapu V (Moivreova věta) a VIII (Komplexní číslo jako vektor a jejich násobení jako rotace). Pro tento krok jsem se rozhodl kvůli tomu, že tato témata jsou si hodně podobná, i když historicky na sebe přímo nenavazují.

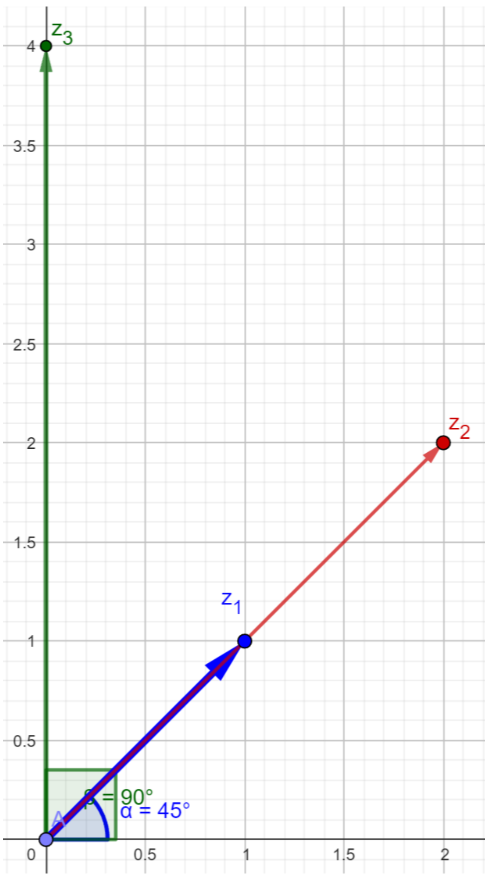
3.7.1 Aktivita 14: Násobení jako rotace složená se stejnolehlostí

Cíl aktivity: V této aktivitě žáci uvidí, že násobení komplexních čísel odpovídá geometrické rotaci vektorů v Gaussově rovině. Z předešlé etapy ví, jak čísla násobit v goniometrickém tvaru, ale v této aktivitě se žáci dozví, jak násobení vypadá geometricky.

Pokyny pro učitele: Učitel zadá dvě komplexní čísla, která mají žáci za úkol zakreslit do komplexní roviny a vypočítat jejich součin.

Úloha 14: Zakreslete komplexní čísla $z_1 = 1 + i$ a $z_2 = 2 + 2i$ do Gaussovy roviny a vypočítejte jejich součin, který také zakreslete do roviny.

Součin těchto čísel by pro žáky neměl být těžký a po násobení v goniometrickém tvaru a následném převedení zpět by jim mělo vzniknout číslo $z_3 = 4i$, které nyní zakreslí do Gaussovy roviny následovně:



Obrázek 4: Řešení úlohy 12

Čísla jsme zvolili s argumentem 45° schválně, aby žáci na první pohled viděli že se úhly sečetly a my tak dostali úhel 90°. Také si mohou všimnout toho, že absolutní hodnota výsledku je součinem původních absolutních hodnot. Odpovídá to zobrazení mezivýsledku $i\sqrt{2}$ ve stejnolehlosti se středem v 0 a koeficientem $\sqrt{2}$. Geometricky se tedy můžeme na násobení dvou komplexních čísel dívat jako na otočení složené se stejnolehlostí.

3.7.2 Aktivita 15: Moivreho věta

Cíl aktivity: Žáci zjistí, že umocňování komplexního čísla v Gaussově rovině odpovídá opakovanému otočení o stejný úhel a k umocnění jeho absolutní hodnoty. Tímto se pro naše potřeby seznámí s Moivreho větou.

Pokyny pro učitele: Žáci už ví, co se děje, když násobím komplexní čísla. Učitel však položí otázku, co se stane, když se komplexní číslo bude mocnit. Zkusit si to mohou na následující úloze:

Úloha 15: Vypočítejte druhou a třetí mocninu komplexního čísla $z = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ a zkuste odvodit obecné pravidlo pro mocnění komplexních čísel.

Opakovaným násobením by se žáci měli dostat k výsledkům $z^2 = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ a $z^3 = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Pomocí těchto výsledků by žáci mohli odvodit pravidlo, kterému říkáme Moivreho věta a vypadá následovně:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx\,.$$

Toto pravidlo platí i pro jakékoliv číslo i s jinou délkou, než je 1. To si žáci mohou ověřit na stejné úloze přidáním $r = 2$. Pravidlo se tak zobecní na:

$$(r(\cos x + i\sin x))^n = r^n(\cos nx + i\sin nx)\,.$$

3.8 Etapa IX: Formalizace komplexního čísla

Žáci už setkali a pracovali se zápisem jako například $z = 3 + 2i$, považovali ho však jen jako vektor nebo bod v rovině se souřadnicemi $[3, 2]$. Až nyní žákům definujeme komplexní číslo jako číslo, které lze zapsat ve tvaru $x + yi$, kde x a y jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka. Dále je vhodné zavést několik formálních úmluv, aby všichni žáci zapisovali komplexní čísla co nejjednodušeji a nejsrozumitelněji. Jednou z těchto úmluv je například, že když obě složky komplexního čísla jsou nulové nebudou psát $0 + 0i$, ale jen 0. Dalším pravidlem bude, že pokud se setkají s případem, kdy je jedna ze dvou složek komplexního čísla nulová, tak ji nebudou psát.

3.8.1 Aktivita 16: Sčítání komplexních čísel v algebraickém tvaru

Cíl aktivity: V této aktivitě žákům představíme dvě základní operace, a to sčítání a odčítání. Cílem bude, aby žáci byli schopni počítat s komplexními čísly i bez jejich geometrické interpretace. A ověří, zda platí komutativita, asociativita a distributivita.

Pokyny pro učitele: Učitel připomene, jak se dvě komplexní čísla sčítala geometricky a zadá žákům, aby tento vztah odvodili algebraicky.

Úloha 16: Algebraicky odvoďte pravidlo pro sčítání dvou komplexních čísel $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.

Žáci pracují samostatně nebo ve dvojicích a vzájemně si své výsledky porovnávají. Nakonec společně s učitelem definují algebraicky sčítání dvou libovolných komplexních čísel jako:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Ukázku na tabuli provede na těchto příkladech:

$$(2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i = 6 + 8i$$
$$(1 - 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (-2 + 4)i = 4 + 2i$$

Následuje úloha na ověření, zda platí komutativita, asociativita a distributivita.

Úloha 17: Ověřte, zda pro sčítání dvou komplexních čísel platí komutativita, asociativita a distributivita.

Žáci tuto úlohu řeší sami nebo ve dvojicích, a nakonec by se měli dostat k tomu, že tyto vlastností platí a ukázat je následovně:

Pro komutativitu platí:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$

Asociativitu ukázat takto:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),$$

A nakonec distributivitu (násobení reálným číslem r):

$$(z_1 + z_2)r = z_1 r + z_2 r,$$

$$r(z_2 + z_3) = r z_2 + r z_3.$$

3.8.2 Aktivita 17: Násobení komplexních čísel v algebraickém tvaru

V této aktivitě zavedeme součin dvou komplexních čísel algebraicky. Dále ověříme, zda platí komutativita, asociativita a distributivita.

Cíl aktivity: Žáci algebraicky odvodí vzorec pro násobení dvou komplexních čísel, a zjistí zda i pro násobení platí stejné vlastnosti jako pro sčítání.

Pokyny pro učitele: Učitel napíše na tabuli dvě komplexní čísla $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. Žáci mají za úkol čísla algebraicky roznásobit a přijít na pravidlo pro výpočet.

Úloha 18: Algebraicky odvoďte pravidlo pro součin dvou komplexních čísel ve tvarech $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.

Společnými silami by měli zavést součin dvou komplexních čísel z_1, z_2 jako:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i.$$

Po odvození tohoto vzorce žáci dostanou za úkol ověřit stejné vlastnosti jako u sčítání.

Úloha 19: Ověřte, zda pro násobení dvou komplexních čísel platí komutativita, asociativita a distributivita.

Opět by společnými silami měli tyto vlastnosti ověřit a dojít že platí:

Pro komutativitu:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

Pro asociativitu:

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

A nakonec distributivitu:

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3,$$

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

3.8.3 Aktivita 18: Komplexně sdružené číslo

Cíl aktivity: Žáci se seznámí s komplexně sdruženým číslem i algebraicky i geometricky a zjistí jaké má vlastnosti.

Pokyny pro učitele: V tomto případě žáci asi neodhadnou, co komplexně sdružené číslo je, a proto ho učitel musí rovnou představit a zavést. Vysvětlí žákům že, komplexně sdružené číslo má stejnou reálnou složku a opačnou imaginární složku a označuje se $\bar{z}$ tím pádem komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu $z = x + yi$ je $\bar{z} = x - yi$. Geometricky si ho můžeme představit jako zrcadlení původního čísla podle reálné osy v Gaussově rovině.

Dále si žáci zkusí najít komplexně sdružená čísla a zkusí co se stane, když komplexně sdružené číslo znovu komplexně sdružíme. Také zjistí, co se stane, když dvě komplexní čísla mezi sebou sečteme nebo vynásobíme pomocí následující úlohy:

Úloha 20: Vymyslete si jakékoliv komplexní číslo z a ověřte, že pro jeho komplexně sdružené číslo platí:

$z + \bar{z}$ je vždy reálné číslo

$z \cdot \bar{z}$ je vždy reálné číslo

$\bar{\bar{z}} = z$

Řešení například pro $z = 2 + 3i$:

$z + \bar{z} = (2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$ (reálné)

$z \cdot \bar{z} = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i2 = 4 + 9 = 13$ (reálné)

$z = 2 + 3i, \bar{z} = 2 - 3i, \bar{\bar{z}} = 2 + 3i$ (platí)

Pomocí komplexně sdruženého čísla je možné algebraicky definovat i absolutní hodnotu komplexního čísla:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pokud komplexní číslo vyjádříme v algebraickém tvaru $z = x + yi$ získáme:

$$|z| = \sqrt{(x + yi)(x - yi)} = \sqrt{x^2 - (yi)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tento vzorec žáci znají jako výpočet z geometrické interpretace komplexních čísel jako vzdálenost bodu z od počátku v Gaussově rovině, kde se nazývá modul komplexního čísla. Spojí se tak další geometrický pojem s jeho algebraickým vyjádřením.

3.8.4 Shrnutí:

Nyní jsme se dostali až na konec poslední historické etapy. Žákům jsme představili a zavedli pojem komplexní číslo prostřednictvím naší interpretace genetické paralely. Věříme, že tento způsob zavedení může pomoci žákům lépe pochopit nejen samotný pojem, ale také to, jak se matematika rozvíjí reakcí na nové problémy a potřeby.

Hlavními výhodami jsou dle mého objevování a zavedení nových pojmů jako odpověď na konkrétní problémy místo toho, aby se žáci rovnou seznámili s definicemi daných pojmů. Další výhodou je větší prostor na diskusi žáků mezi sebou a na společné řešení problémů, se kterými se setkají v průběhu výuky. Také si myslím, že velkým plusem je i seznámení žáků s významnými osobnostmi, které se v historii matematiky objevili. Naopak nevýhodou je časová náročnost této metody a její složitější příprava pro učitele. Další nevýhodou také může být, že ne každému žákovi tento způsob výuky bude vyhovovat, protože mu více vyhovuje, když definice a vzorce jsou před něj předloženy a on je nemusí odvozovat. Poslední nevýhoda, kterou zmíním je velký rozdíl se zavedením ve standartních středoškolských učebnicích. Ve kterých se s historickým vývojem skoro vůbec nepracuje.

Závěr

Tato bakalářská práce se zabývala historickým vývojem pojmu komplexní číslo a možnosti jeho zavedení ve výuce matematiky na střední škole pomocí genetické paralely. V první teoretické části jsem se věnoval tomu, jak se komplexní čísla formovala v průběhu dějin od prvních setkání s odmocninou ze záporného čísla ve starověkém Řecku, až po plnohodnotné přijetí a zavedení komplexních čísel jako plnohodnotné součásti matematiky. V každém z těchto momentů bylo patrné, že se nejednalo o náhlý objev, ale spíše postupné rozšiřování existujících pojmů, kdy se vyvíjel jak samotný jazyk matematiky, a tak rostla potřeba řešit nové problémy.

Z analýzy tohoto historického vývoje jsem vybral devět etap, které považuji za klíčové. Tyto etapy jsem následně použil jako způsob, jakým by se komplexní čísla mohla vyučovat na středních školách. Jednotlivé etapy se zaměřují například na první kontakt s odmocninou ze záporného čísla, formální výpočty bez jasného významu, objevování pravidel, zavedení imaginární jednotky, až po pochopení geometrické interpretace a formalizaci. Hlavním principem je snaha vést žáky tak, aby si nové pojmy osvojili aktivně a na základě vnitřní potřeby, podobně jako je přijímala samotná matematická komunita v historii.

Z didaktického hlediska považuji tento přístup za přínosný hlavně kvůli tomu, že vede žáky, aby sami objevovali a zaváděli nová pravidla, místo toho, aby si pouze opisovali definice a vzorce pro výpočty a vnímali komplexní čísla jen jako něco zcela abstraktního. Historický vývoj jsem bral spíše jako motivační prvek a oporu k uspořádání výuky. V práci jsem proto k jednotlivým etapám připojil úvahy o jejich možném využití ve výuce a navrhl konkrétní aktivity, které by s těmito fázemi mohly souviset.

Zvolený přístup je jen jedna z možných cest, jak komplexní čísla zavést. Cílem nebylo vymyslet hotový výukový plán, ale ukázat, že složitou látku jako jsou komplexní čísla lze žákům na středních školách přiblížit smysluplněji a srozumitelněji pomocí jejich historického vývoje. Do budoucna by bylo možné navržený koncept dále rozpracovat, případně prakticky ověřit ve školním prostředí a zhodnotit, jaký má dopad na pochopení a přijetí komplexních čísel u studentů. Zároveň by bylo zajímavé zkusit podobným způsobem přistoupit i k jiným matematickým tématům, u kterých hraje historický vývoj důležitou roli.

Seznam použitých informačních zdrojů

Bárta, Č., & Kolář, M. (2013). *Přehled historie komplexních čísel* (Práce do soutěže SVOČ DM, Univerzita Hradec Králové). Dostupné z https://trilian.ujep.cz/svoc/2013/k1/Barta_Kolar.pdf

Bečvář, J. (2007). *Z historie lineární algebry*. Matfyzpress.

Bečvář, J., & Fuchs, E. (1999). *Matematika v 16. a 17. století*. Prometheus.

Bourbaki, N. (1994). *Elements of the history of mathematics* (J. Meldrum, Trans.). Springer-Verlag.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics* (3rd ed.). Wiley.

Cejnar, P. (2013). A condensed course of quantum mechanics. Karolinum Press. Gudder, S. (1988). Quantum probability. Academic Press. ISBN 0-12-305340-4

Hejný, M. (1984). História učí učiť. Matematické obzory, 23, 3–11.

Hejný, M. (2014). *Vyučování orientované na budování schémat*. Univerzita Karlova.

Hejný, M., Novotná, J., & Vondrová, N. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Portál.

Koutný, F. (2011). *Leonhard Euler* [Výukový materiál]. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Dostupné z: https://www.yumpu.com/xx/document/view/21636779/leonhard-euler

Koutný, F. (2016). *Carl Friedrich Gauss* [Výukový materiál]. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně. Dostupné z: https://www.zas.cz/download/gauss.pdf

Krbálek, M. (nedatováno). *Matematická analýza III* [Výukový materiál]. České vysoké učení technické, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská.

Kvasz, L. (2016). *Princípy genetického konštruktivizmu.* Orbis Scholae, 10(2), 15-45.

Nahim, P. J. (2010). *An imaginary tale: The story of* $\sqrt{-1}$ (Rev. ed.) Princeton University Press.

Needham, T. (1997). *Visual complex analysis*. Clarendon Press.

Vyjádření k využití nástrojů umělé inteligence

Při zpracování této bakalářské práce jsem využil nástroj umělé inteligence ChatGPT od společnosti OpenAI. Tento nástroj mi sloužil jako podpora při překladu anglických materiálů, jazykových úpravách a generování obrázků. Dále jsem jej využil ke konzultacím ohledně logického uspořádání textu a formálních náležitostí bakalářské práce.

Veškerý obsah byl vytvořen na základě mého vlastního porozumění tématu a práce s odbornou literaturou. AI nástroje nebyly využity k automatickému generování celých částí. Všechny části práce jsem průběžně upravoval, ověřoval a zodpovídám za jejich odbornou i jazykovou správnost.

Práce nebyla vytvořena automaticky a nadále splňuje požadavky na původní autorský text.