

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Emma Kovalčíková

Aktuárské modely s panelovými daty

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Studijní program: Finanční a pojistná matematika

Praha 2025

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Na tomto mieste by som rada poďakovala vedúcemu mojej diplomovej práce, prof. RNDr. Tomášovi Ciprovi, DrSc., za odborné rady a usmernenie pri písaní, pripomienky a za čas, ktorý mi venoval na konzultáciách.

Název práce: Aktuárské modely s panelovými daty

Autor: Bc. Emma Kovalčíková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V diplomovej práci sa venujeme aditívnym kredibilitným modelom a ich formulácii v tvare špeciálnych prípadov modelu jednosmernej chybovej zložky s náhodnými efektmi panelových dát. Text práce členíme na teoretickú a praktickú časť, ktorú tvorí praktická ukážka odvodennej teórie na dvoch príkladoch. V teoretickej časti popíšeme modely panelových dát, odhadovú časť týchto modelov, základné princípy kredibility a aditívne kredibilitné modely. Následne ukážeme prepojenie modelovania panelových dát a kredibilitných modelov. Ukážeme, že štandardné kredibilitné modely je možné formulovať ako špeciálne prípady univerzálnejších modelov panelových dát. Odvodíme odhady panelových verzií kredibilitných modelov. V závere teoretickej časti popíšeme odhad metódou reziduálnej maximálnej vierohodnosti, ktorú následne použijeme v praktickej časti. V praktickej časti pracujeme s dvomi dátovými súbormi, na odhad modelov použijeme prístupy uvažované v teoretickej časti a porovnáваме výsledky.

Klíčová slova: aditívne kredibilitné modely, panelové dáta, kredibilitný faktor, kredibilitný odhad, štrukturálne parametre

Title: Actuarial panel data models

Author: Bc. Emma Kovalčíková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this diploma thesis, we study additive credibility models and their formulation as special cases of the one-way error component model with random effects of panel data. We divide the text of the thesis into a theoretical and a practical part, which consists of a practical demonstration of the derived theory on two examples. In the theoretical part, we describe panel data models, the estimation part of these models, basic principles of credibility, and additive credibility models. We then show the link between panel data modeling and credibility models. We show that standard credibility models can be formulated as special cases of more general-purpose panel data models. We derive estimates of panel versions of the credibility models. We conclude the theoretical section by describing the estimation by the residual maximum likelihood method, which we then use in the practical section. In the practical part, we work with two datasets, using the approaches considered in the theoretical part to estimate the models, and compare the results.

Keywords: additive credibility models, panel data, credibility factor, credibility estimate, structural parameters

Obsah

Zoznam použitých skratiek	7
Úvod	8
1 Modelovanie panelových dát	9
1.1 Panelové dáta a modely	9
1.1.1 Modely s pevnými efektmi	9
1.1.2 Modely s náhodnými efektmi	11
1.2 Odhady modelu panelových dát	13
1.2.1 Modely s pevnými efektmi	13
1.2.2 Modely s náhodnými efektmi	16
2 Aplikácia panelových dát v neživotnom poistení	18
2.1 Kredibilitné modely v poisťovníctve	18
2.1.1 Jednoduchý Bühlmannov kredibilitný model	22
2.1.2 Heteroskedastický model Bühlmann-Straub	23
2.1.3 Regresný Hachemeisterov model	25
2.2 Kredibilitné panelové modely v poisťovníctve	29
2.2.1 Panelová verzia Jednoduchého Bühlmannovho kredibilitného modelu	29
2.2.2 Panelová verzia Heteroskedastického modelu Bühlmann-Straub	32
2.2.3 Panelová verzia Regresného Hachemeistrovho modelu	35
2.3 Odhady štrukturálnych parametrov	38
3 Numerická štúdia	41
3.1 Dáta Hachemeister	41
3.1.1 Odhad kredibilitného Hachemeistrovho modelu	42
3.1.2 Odhad modelu panelových dát	45
3.2 Worker's compensation data	51
3.2.1 Odhad kredibilitného modelu	52
3.2.2 Odhad modelu panelových dát	54
Záver	57
Literatúra	58

Zoznam obrázkov	60
Zoznam tabuliek	61
A Prílohy	62
A.1 Prvá príloha	62
A.2 Druhá príloha	62
A.3 Tretia príloha	62
A.4 Štvrtá príloha	62

Zoznam použitých skratiek

V práci budeme používať nasledujúce značenie a skratky:

- \otimes ... Kroneckerov súčin
- $\mathbf{1}_T$... jednotkový vektor dĺžky T
- \mathbb{J}_T ... matica jednotiek rozmerov $T \times T$
- \mathbb{I}_T ... jednotková matica rozmerov $T \times T$
- $\text{adj } \mathbb{X}$... adjungovaná matica k matici \mathbb{X}
- $\det \mathbb{X}$... determinant matice \mathbb{X}
- $\text{Tr } \mathbb{X}$... stopa matice \mathbb{X}
- $E(\mathbf{x})$... stredná hodnota náhodného vektora \mathbf{x}
- $\text{var}(\mathbf{x})$... rozptyl náhodného vektora \mathbf{x}

Úvod

Cielom práce je ukázať možnosť využitia modelov panelových dát v oblasti kredibility v matematike neživotného poistenia prostredníctvom aditívnych kredibilitných modelov, ktoré je možné prezentovať ako špeciálne prípady modelov panelových dát, a následne aplikovať získané poznatky na reálne dáta. Text práce je členený do troch kapitol. Prvá a druhá kapitola sú teoretické, v tretej popisujeme praktickú aplikáciu.

Prvá kapitola je venovaná modelom panelových dát, predstavuje všeobecný prístup k modelovaniu. Popíšeme základné typy modelov podľa tvaru chybovej zložky a podstaty špecifických efektov jednotlivých objektov a času, odvodíme odhady parametrov modelov a dokážeme ich vlastnosti.

V druhej, pre prácu najvýznamnejšej kapitole, popíšeme základné princípy kredibility, predstavíme aditívne kredibilitné modely a odvodíme tvary kredibilitných faktorov a kredibilitných odhadov. Následne ukážeme, ako vyjadriť kredibilitné modely v tvare špeciálnych prípadov modelov panelových dát. Citovanú literatúru doplníme o dôkazy odvodení kredibilitných faktorov, kredibilitných odhadov a odhadov parametrov modelov. Záver druhej kapitoly je venovaný odhadom štrukturálnych parametrov vystupujúcich v kredibilitných odhadoch pomocou metódy reziduálnej maximálnej vierohodnosti.

V tretej kapitole ukážeme praktickú aplikáciu teórie zavedenej v prvej a druhej kapitole na reálne dáta s cieľom porovnať jednotlivé prístupy a možnosti nastavení odhadu modelu. Budeme pracovať s dvomi dátovými súbormi vyžadujúcimi odlišný prístup. V oboch prípadoch model odhadneme ako kredibilitný model a následne ako model panelových dát, porovnáme výsledky a časovú náročnosť jednotlivých metód.

1 Modelovanie panelových dát

Táto kapitola predstavuje všeobecný prístup k modelovaniu panelových dát. Panelové dáta predstavujú dátovú štruktúru skladajúcu sa z časových radov pre každý pozorovaný prierezový objekt.

V prvej kapitole tejto práce popíšeme regresný model pre panelové dáta podľa knihy Baltagi [1] a podľa článku Frees et al. [2]. Predstavíme jednotlivé modely, odvodíme odhady parametrov a ich vlastnosti.

1.1 Panelové dáta a modely

Pozorujeme N objektov $i = 1, \dots, N$ v časoch $t = 1, \dots, T$. Uvažujeme vektor K parametrov $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_K)^T$ a chybovú zložku u_{it} . Model je po prvkoch tvaru

$$y_{it} = \alpha + \mathbf{x}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.1)$$

Vzhľadom na chybovú zložku rozlišujeme modely panelových dát na modely jednosmernej chybovej zložky a na modely dvojsmernej chybovej zložky. Oba prípady ďalej delíme na modely s pevnými efektmi a na modely s náhodnými efektmi.

Uvažujme maticu

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{X}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{1T}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{NT}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11_1} & \cdots & X_{11_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1T_1} & \cdots & X_{1T_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{N1_1} & \cdots & X_{N1_K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{NT_1} & \cdots & X_{NT_K} \end{bmatrix}$$

rozmerov $NT \times K$. Matica \mathbb{X} obsahuje náhodný výber N nezávislých rovnako rozdelených matíc, prislúchajúcich jednotlivým objektom. Každá z týchto N matíc obsahuje v stĺpcoch K časových radov dĺžky T . Ďalej vektor

$$\mathbf{y} = (y_{11}, \dots, y_{1T}, \dots, y_{NT})^\top$$

rozmerov $NT \times 1$, vektor \mathbf{u} rovnako rozmerov $NT \times 1$ a vektor $\mathbf{1}_{NT}$ jednotiek dĺžky NT . Model 1.1 je vektorovo tvaru

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{1}_{NT} + \mathbb{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}. \quad (1.2)$$

1.1.1 Modely s pevnými efektmi

Modely s pevnými efektmi sú jednou z uvažovaných možností modelov panelových dát vzhľadom k tvaru chybovej zložky u_{it} .

Model jednosmernej chybovej zložky s pevnými efektmi

V tomto modeli uvažujeme chybovú zložku tvaru

$$u_{it} = \mu_i + \nu_{it} \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.3)$$

kde μ_i je nepozorovateľný špecifický efekt objektu, ν_{it} značí zbytkový šum.

Chybovú zložku možno vektorovo vyjadriť $\mathbf{u} = \mathbb{Z}_\mu \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}$, kde $\mathbb{Z}_\mu = \mathbb{I}_N \otimes \mathbf{1}_T$ je matica rozmerov $NT \times N$ s jednotkovými vektormi dĺžky T na diagonále. Je to matica individuálnych premenných, ktoré možno zahrnúť do regresie pre odhad μ_i špecifického efektu objektu.

Dosadením do 1.2 dostávame model

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{1}_{NT} + \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbb{Z}_\mu \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}. \quad (1.4)$$

Parametre μ_i vyjadrujúce špecifický efekt objektu uvažujeme pevné pre všetky i , zložky zbytkového šumu ν_{it} uvažujeme ako nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ_ν^2 , značíme $\nu_{it} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} (0, \sigma_\nu^2)$. Pozorovania X_{it} uvažujeme nezávislé na ν_{it} pre všetky i, t .

Poznámka. Uvažujme model tvaru $\mathbf{y} = \mathbb{Z}_\mu \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}$. Pomocou metódy najmenších štvorcov získavame odhad vektora špecifických efektov $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\mathbb{Z}_\mu^\top \mathbb{Z}_\mu)^{-1} \mathbb{Z}_\mu^\top \mathbf{y}$. Označme projekčnú maticu $\mathbb{P} = \mathbb{Z}_\mu (\mathbb{Z}_\mu^\top \mathbb{Z}_\mu)^{-1} \mathbb{Z}_\mu^\top$. Predikované hodnoty takéhoto modelu sú potom $\mathbb{P}\mathbf{y} = \mathbb{Z}_\mu (\mathbb{Z}_\mu^\top \mathbb{Z}_\mu)^{-1} \mathbb{Z}_\mu^\top \mathbf{y}$.

Uvedomme si, že projekčná matica \mathbb{P} priemeruje pozorovanie cez čas. Matica $\mathbb{Q} = \mathbb{I}_{NT} - \mathbb{P}$ je maticou reziduí. Vlastnosti matíc \mathbb{P} , \mathbb{Q} , ktoré budeme v tejto kapitole používať, uvádzame v nasledujúcom tvrdení bez dôkazu.

Tvrdenie 1. *Platí:*

1. Matice \mathbb{P} a \mathbb{Q} sú symetrické a idempotentné.
2. Matice \mathbb{P} a \mathbb{Q} sú ortogonálne.
3. Platí $\mathbb{P} + \mathbb{Q} = \mathbb{I}_{NT}$.

Model dvojsmernej chybovej zložky s pevnými efektmi

Narozdiel od modelu jednosmernej chybovej zložky budeme navyše uvažovať špecifický efekt času. V tomto modeli uvažujeme chybovú zložku tvaru

$$u_{it} = \mu_i + \lambda_t + \nu_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T,$$

kde μ_i je nepozorovateľný špecifický efekt objektu, λ_t je nepozorovateľný špecifický efekt času, ν_{it} značí zbytkový šum. Vektorovo možno model vyjadriť nasledovne:

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{1}_{NT} + \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbb{Z}_\mu \boldsymbol{\mu} + \mathbb{Z}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\nu}. \quad (1.5)$$

Matica $\mathbb{Z}_\lambda = \mathbf{1}_N \otimes \mathbb{I}_T$ je matica rozmerov $NT \times T$ s jednotkovými vektormi dĺžky N na diagonále, je to matica individuálnych časových premenných, ktoré možno zahrnúť do regresie pre odhad λ_t špecifického efektu času.

Parametre μ_i vyjadrujúce špecifický efekt objektu a parametre λ_t vyjadrujúce špecifický efekt času uvažujeme pevné pre všetky i, t . Zložky zbytkového šumu ν_{it} uvažujeme ako nezávislé rovnako rozdelené náhodné veličiny s nulovou strednou hodnotou a rozptylom σ_ν^2 . Pozorovania X_{it} uvažujeme nezávislé na ν_{it} pre všetky i, t .

1.1.2 Modely s náhodnými efektmi

V tejto sekcii práce budeme pre potreby ďalšej kapitoly uvažovať model s náhodnými efektmi tak, ako je uvažovaný v článku Frees et al. [2]. Modely s náhodnými efektmi predstavujú možnosť zabrániť veľkej strate stupňov volnosti plynúcej z veľkého množstva pevných parametrov. Špecifické efekty jednotlivých objektov a jednotlivých časov budeme uvažovať ako náhodné.

Model jednosmernej chybovej zložky s náhodnými efektmi

Po prvkoch máme model

$$y_{it} = \alpha + \mathbf{x}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_{it}^\top \boldsymbol{\mu}_i + \nu_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.6)$$

kde narozdiel od knihy Baltagi [1] uvažujeme vektor špecifického efektu objektu $\boldsymbol{\mu}_i$ dĺžky J a maticu ďalších J vysvetľujúcich premenných \mathbb{Z}_i rozmerov $T \times J$, ktorá v riadkoch obsahuje vektory \mathbf{z}_{it}^\top pre $t = 1, \dots, T$. Model 1.6 je vektorovo tvaru

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{1}_{NT} + \mathbb{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbb{Z} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}.$$

Matica \mathbb{Z} je blokovo diagonálna s maticami \mathbb{Z}_i na diagonále.

Predpokladáme, že odozvy medzi jednotlivými objektami sú nezávislé, rovnako ako v knihe [1]. Zároveň predpokladáme, že pre chybové zložky platí $\mathbf{E}(\boldsymbol{\nu}_i) = \mathbf{0}$ a $\text{var}(\boldsymbol{\nu}_i) = \mathbb{R}_i$ je pozitívne definitná matica.

Poznámka. Voľbou všeobecnej kovariančnej matice vektora chybových zložiek pripúšťame korelovanosť jednotlivých prvkov.

Ďalej nech špecifické efekty objektov $\boldsymbol{\mu}_i$ sú nezávislé a rovnako rozdelené s nulovou strednou hodnotou a kovariančnou maticou \mathbb{D} rozmerov $J \times J$, pozitívne definitnou. Pre vektor $\boldsymbol{\mu}$ potom platí

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}, \quad \text{var}(\boldsymbol{\mu}) = \begin{bmatrix} \mathbb{D} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbb{D} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbb{D} \end{bmatrix}$$

a nech sú špecifické efekty nekorelované s chybovými zložkami.

Model dvojsmernej chybovej zložky s náhodnými efektmi

Rovnako ako v prípade s pevnými efektmi, uvažujeme navyše špecifický efekt času. Po prvkoch máme model

$$y_{it} = \alpha + \mathbf{x}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}_{it}^\top \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{v}_{it}^\top \boldsymbol{\lambda}_t + \nu_{it} \quad i = 1, \dots, N, t = 1, \dots, T, \quad (1.7)$$

kde $\boldsymbol{\mu}_i$ je vektor špecifického efektu objektu a $\boldsymbol{\lambda}_t$ je vektor špecifického efektu času. Ďalej uvažujeme maticu \mathbb{L} vysvetľujúcich premenných \mathbb{V}_i rozmerov $T \times L$, ktorá v riadkoch obsahuje vektory \mathbf{v}_{it}^\top pre $t = 1, \dots, T$. Model 1.7 je vektorovo tvaru

$$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{1}_{NT} + \mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbb{Z}\boldsymbol{\mu} + \mathbb{V}\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\nu}.$$

Matica \mathbb{V} je blokovo diagonálna matica rozmerov $NT \times NL$ skladajúca sa z matíc \mathbb{V}_i pre $i = 1, \dots, N$.

Predpokladáme, že platia všetky predpoklady, ktoré sme uvažovali pre model jednosmernej chyby. Navyše nech špecifické efekty časov $\boldsymbol{\lambda}_t$ sú nezávislé a rovnako rozdelené s nulovou strednou hodnotou a kovariančnou maticou \mathbb{E} rozmerov $L \times L$, pozitívne definitnou. Pre vektor $\boldsymbol{\lambda}$ potom platí, analogicky ako pre vektor $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbb{E}(\boldsymbol{\lambda}) = 0$, $\text{var}(\boldsymbol{\lambda})$ je blokovo diagonálna matica s maticami \mathbb{E} na diagonále. Nech ďalej sú špecifické efekty objektov, špecifické objekty časov a chybové zložky navzájom nekorelované.

1.2 Odhady modelu panelových dát

1.2.1 Modely s pevnými efektmi

Model jednosmernej chybovej zložky s pevnými efektmi

Uvažujme model tvaru 1.4. Model možno vyjadriť nasledovne:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{1}_{NT} \quad \mathbb{X} \quad \mathbb{Z}_\mu] \begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\nu} = \mathbb{W}\boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\nu}$$

Matica \mathbb{W} je rozmerov $NT \times (K + 1 + N)$. Cieľom tejto sekcie je získať odhad vektora $\boldsymbol{\beta}^*$. Pri použití metódy najmenších štvorcov by sme invertovali štvorcovú maticu $\mathbb{W}^\top \mathbb{W}$ rozmerov $(K + 1 + N)$.

Poznámka. Uvedomíme si, že v modeli 1.4 dochádza k perfektnej multikolinearite plynúcej z matice \mathbb{Z}_μ , ktorej stĺpce sú lineárne závislé. Tomuto problému sa vyhneme transformáciou uvedenou nižšie, pomocou ktorej individuálne efekty jednotlivcov úplne eliminujeme. Možnosťou je taktiež zaviesť podmienku pre individuálne efekty, ktorú uvádzame v ďalšom texte.

Podľa vzoru knihy [1], kde \mathbb{P} je príslušná projekčná matica, viď 1.1.1, použijeme transformáciu pomocou matice $\mathbb{Q} = \mathbb{I}_{NT} - \mathbb{P}$. Model 1.4 zľava prenásobíme maticou \mathbb{Q} . Uvedomíme si, že platí

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\mathbb{Z}_\mu &= (\mathbb{I}_{NT} - \mathbb{Z}_\mu(\mathbb{Z}_\mu^\top \mathbb{Z}_\mu)^{-1} \mathbb{Z}_\mu^\top) \mathbb{Z}_\mu = \mathbb{Z}_\mu - \mathbb{Z}_\mu = \mathbf{0} \\ \mathbb{Q}\mathbf{1}_{NT} &= (\mathbb{I}_{NT} - \mathbb{Z}_\mu(\mathbb{Z}_\mu^\top \mathbb{Z}_\mu)^{-1} \mathbb{Z}_\mu^\top) \mathbf{1}_{NT} = \mathbf{1}_{NT} - \mathbf{1}_{NT} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Uvažovaný model je tvaru

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbb{Q}\mathbf{y} = \mathbb{Q}\mathbb{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbb{Q}\boldsymbol{\nu} = \tilde{\mathbb{X}}\boldsymbol{\beta} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}. \quad (1.8)$$

Takto transformovaný model splňa predpoklady klasického lineárneho modelu. Metódou obyčajných najmenších štvorcov získame odhad vektora $\boldsymbol{\beta}$. V porovnaní s modelom 1.4 je potrebné invertovať maticu $\tilde{\mathbb{X}}^\top \tilde{\mathbb{X}}$ rozmerov $K \times K$.

Označme

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\tilde{\mathbb{X}}^\top \tilde{\mathbb{X}})^{-1} \tilde{\mathbb{X}}^\top \tilde{\mathbf{y}} = (\mathbb{X}^\top \mathbb{Q}^\top \mathbb{Q} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{Q}^\top \mathbb{Q} \mathbf{y} = (\mathbb{X}^\top \mathbb{Q} \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbb{Q} \mathbf{y}$$

odhad vektora $\boldsymbol{\beta}$ získaný metódou obyčajných najmenších štvorcov. Vo vyjadrení sme použili vlastnosť symetrie a idempotencie matice \mathbb{Q} .

Pomocou vyššie uvedenej transformácie sme získali odhad vektora $\boldsymbol{\beta}$, ale nezískali sme odhad vektora individuálnych efektov jednotlivcov $\boldsymbol{\mu}$ a odhad interceptu α . Vráťme sa k modelu tvaru 1.4, po prvkoch je model tvaru

$$y_{it} = \alpha + \mu_i + \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + \nu_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T. \quad (1.9)$$

Poznámka. Individuálne efekty jednotlivcov uvažujeme ako odchýlky od spoločného interceptu α . Nech platí $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i = 0$, to znamená, že výberový priemer týchto odchýlok je rovný 0.

Model 1.9 vysčítame cez všetky indexy i a všetky indexy t , označme

$$\bar{\mathbf{X}}_{..} = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \mathbf{X}_{it},$$

do modelu dosadíme $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ a máme odhad interceptu α vyjadrený ako

$$\tilde{\alpha} = \bar{y}_{..} - \bar{\mathbf{X}}_{..}^{\top} \tilde{\boldsymbol{\beta}}$$

Model 1.9 vysčítame cez všetky indexy t , do modelu dosadíme už získané odhady $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ a pre $i = 1, \dots, N$ máme odhad individuálneho efektu jednotlivca vyjadreného ako

$$\tilde{\mu}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{\mathbf{X}}_{i.}^{\top} \tilde{\boldsymbol{\beta}} - \tilde{\alpha}.$$

Poznámka. V knihe Baltagi [1] sa uvádza, že bez podmienky $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i = 0$ nie je možné získať odhady α a $\boldsymbol{\mu}$ samostatne. Uvažujme vektor $(\alpha + \mu_1, \dots, \alpha + \mu_N)^{\top}$, s výberovým priemerom rovným α . Rozdielom tohto vektora a jeho výberového priemeru je práve vektor individuálnych efektov jednotlivcov $(\mu_1, \dots, \mu_N)^{\top}$.

Tvrdenie 2. *Odhad $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ je nestranným a konzistentným odhadom vektora parametrov $\boldsymbol{\beta}$ pre $N \rightarrow \infty$ a T pevné, pre $T \rightarrow \infty$ a N pevné.*

Dôkaz. 1. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathbf{E}((\tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{E}[\mathbf{E}((\tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{y}} | \tilde{\mathbf{X}})] \\ &= \mathbf{E}[(\tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{y}} | \tilde{\mathbf{X}})] = \mathbf{E}[(\tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \boldsymbol{\beta}] = \boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

2. Pripomeňme, že dátová matica obsahuje N nezávislých rovnako rozdelených matíc. Matica \mathbb{Q} , ktorou sme model transformovali, je deterministická, pre násobenie dátovej matice zľava maticou \mathbb{Q} nezmení pravdepodobnostné rozdelenie a nezávislosť jej podmatic. Konzistenciu odhadu dokážeme pre $N \rightarrow \infty$ a T pevné. Píšme

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} &= (\tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} (\tilde{\mathbf{X}} \boldsymbol{\beta} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}) - \boldsymbol{\beta} = (\tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}} \\ &= \left(\frac{1}{N} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\mathbf{X}} \right)^{-1} \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}} \end{aligned}$$

Zároveň platí

$$\frac{1}{N} \tilde{\mathbf{X}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{X}}_i^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}}_i,$$

kde $\tilde{\mathbf{X}}_i$ značí i -tú maticu v dátovej matici $\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_i$ značí i -tý podvektor vektora $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$.

Platí, že $\tilde{\mathbf{X}}_i^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}}_i$ sú nezávislé rovnako rozdelené pre $i = 1, \dots, N$ a uvažujeme $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{X}}_i^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}}_i) < \infty$. Sú splnené predpoklady slabého zákona veľkých čísel, Wooldridge [3, Theorem 3.1]. Pre $N \rightarrow \infty$ platí

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{X}}_i^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}}_i \xrightarrow{P} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{X}}_i^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}}_i) = \mathbf{E}[\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{X}}_i^{\top} \tilde{\boldsymbol{\nu}}_i | \tilde{\mathbf{X}}_i^{\top})] = \mathbf{E}[\tilde{\mathbf{X}}_i^{\top} \mathbf{E}(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_i | \tilde{\mathbf{X}}_i^{\top})] = \mathbf{0}.$$

Predpokladajme

$$\frac{1}{N} \tilde{\mathbb{X}}^\top \tilde{\mathbb{X}} \xrightarrow{P} \mathbb{M} = \mathbb{E}(\tilde{\mathbb{X}}_i \tilde{\mathbb{X}}_i^\top),$$

kde \mathbb{M} je pozitívne definitná matica. Potom z vety o spojitej transformácii, Vaart [4, Theorem 2.3], platí

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} \xrightarrow{P} \mathbb{M}^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

tzn. $\tilde{\boldsymbol{\beta}} \xrightarrow{P} \boldsymbol{\beta}$ pre $N \rightarrow \infty$ a $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ je konzistentným odhadom.

□

Poznámka. Odhad vektora interceptov objektov $\alpha + \mu_i$ pre $i = 1, \dots, N$ nie je konzistentným odhadom pre $N \rightarrow \infty$. Pre N pevné a $T \rightarrow \infty$ je tento odhad konzistentný, Baltagi [1].

Model dvojsmernej chybovej zložky s pevnými efektmi

Rovnako ako v časti 1.2.1, aj v modeli 1.5 dochádza k multikolinearite. Teraz multikolinearita plynie nie len z matice \mathbb{Z}_μ ale aj z matice \mathbb{Z}_λ . Model 1.5 transformujeme pre násobením zľava maticou

$$\mathbb{Q}_1 = \left(\mathbb{I}_N - \frac{1}{N} \mathbb{J}_N \right) \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T} \mathbb{J}_T \right),$$

kde \mathbb{J}_N značí maticu jednotiek rozmerov $N \times N$. Matica \mathbb{Q}_1 je zvolená tak, aby eliminovala individuálny efekt objektu a individuálny efekt času. Analogicky ako matica \mathbb{Q} v tvrdení 1 je \mathbb{Q}_1 symetrická a idempotentná. Z vlastností Kroneckerovho súčinu platí

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_1 \mathbf{1}_{NT} &= \left[\left(\mathbb{I}_N - \frac{1}{N} \mathbb{J}_N \right) \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T} \mathbb{J}_T \right) \right] [\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_T] \\ &= \left(\mathbf{1}_N - \frac{1}{N} N \mathbf{1}_N \right) \otimes \left(\mathbf{1}_T - \frac{1}{T} T \mathbf{1}_T \right) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Poznámka. Uvedomme si, že $\left(\mathbb{I}_N - \frac{1}{N} \mathbb{J}_N \right)$ je projekcia do priestoru ortogonálneho k priestoru generovanému vektorom jednotiek v \mathbb{R}^N .

Ďalej platí

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_1 \mathbb{Z}_\mu &= \left[\left(\mathbb{I}_N - \frac{1}{N} \mathbb{J}_N \right) \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T} \mathbb{J}_T \right) \right] [\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{1}_T] \\ &= \left(\mathbb{I}_N - \frac{1}{N} \mathbb{J}_N \right) \mathbb{I}_N \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T} \mathbb{J}_T \right) \mathbf{1}_T = \left(\mathbb{I}_N - \frac{1}{N} \mathbb{J}_N \right) [\mathbb{I}_N \otimes \mathbf{0}] \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_1 \mathbb{Z}_\lambda &= \left[\left(\mathbb{I}_N - \frac{1}{N} \mathbb{J}_N \right) \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T} \mathbb{J}_T \right) \right] [\mathbf{1}_N \otimes \mathbb{I}_T] \\ &= \left(\mathbb{I}_N - \frac{1}{N} \mathbb{J}_N \right) \mathbf{1}_N \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T} \mathbb{J}_T \right) \mathbb{I}_T = \mathbf{0} \otimes \left(\mathbb{I}_T - \frac{1}{T} \mathbb{J}_T \right) \mathbb{I}_T \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Transformovaný model je tvaru

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{y} = \mathbf{Q}_1 \mathbb{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\nu} = \tilde{\mathbb{X}} \boldsymbol{\beta} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}. \quad (1.10)$$

Označme

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1 = (\tilde{\mathbb{X}}^\top \tilde{\mathbb{X}})^{-1} \tilde{\mathbb{X}}^\top \tilde{\mathbf{y}} = (\mathbb{X}^\top \mathbf{Q}_1^\top \mathbf{Q}_1 \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbf{Q}_1^\top \mathbf{Q}_1 \mathbf{y} = (\mathbb{X}^\top \mathbf{Q}_1 \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}$$

odhad vektora $\boldsymbol{\beta}$ získaný metódou najmenších štvorcov z modelu 1.10. Vo vyjadrení sme použili vlastnosť symetrie a idempotencie matice \mathbf{Q}_1 .

Nech $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i = 0$ a $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \lambda_t = 0$. Uvažujme model 1.5 vyjadrený po prvkoch

$$y_{it} = \alpha + \mu_i + \lambda_t + \mathbf{X}_{it}^\top \boldsymbol{\beta} + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T.$$

Vysčítaním cez všetky indexy i a všetky indexy t a dosadíme odhad $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ a dosadením získame odhad interceptu

$$\tilde{\alpha} = \bar{y}_{..} - \bar{\mathbb{X}}_{..}^\top \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1.$$

Vysčítaním cez všetky indexy i získame odhad

$$\tilde{\lambda}_t = \bar{y}_{.t} - \tilde{\alpha} - \bar{\mathbf{X}}_{.t}^\top \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,$$

cez všetky indexy t získame odhad

$$\tilde{\mu}_i = \bar{y}_{i.} - \tilde{\alpha} - \bar{\mathbf{X}}_{i.}^\top \tilde{\boldsymbol{\beta}}_1.$$

Tvrdenie 3. *Odhad $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1$ je nestranným a konzistentným odhadom vektora parametrov $\boldsymbol{\beta}_1$ pre $N \rightarrow \infty$ a T pevné alebo pre $T \rightarrow \infty$ a N pevné.*

Dôkaz. Dôkaz je analogický dôkazu tvrdenia 2. □

1.2.2 Modely s náhodnými efektmi

Špecifické efekty jednotlivých objektov a jednotlivých časov uvažujeme náhodné.

Model jednosmernej chybovej zložky s náhodnými efektmi

Pre jednotlivé odozvy platí

$$\text{var}(\mathbf{y}_i) = \text{var}(\alpha \mathbf{1}_T + \mathbb{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i) = \text{var}(\mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i) + \text{var}(\boldsymbol{\nu}_i) = \mathbb{Z}_i \mathbb{D} \mathbb{Z}_i^\top + \mathbb{R}_i.$$

Označme $\text{var}(\mathbf{y}_i) = \Omega_i$ a uvažujme Ω_i invertibilné pre všetky indexy i . Kovariančná matica vektora odoziev Ω je blokovo diagonálna s prvkami Ω_i na diagonále, pre Ω_i invertibilné pre všetky indexy i je invertibilná.

Označme $\mathbb{X}^+ = [\mathbf{1}_{NT} \ \mathbb{X}]$, $\boldsymbol{\beta}^+ = [\alpha \ \boldsymbol{\beta}]^\top$.

V predpokladoch modelu sme pripustili korelovanosť jednotlivých prvkov vektora chybových zložiek. K získaniu odhadu vektora parametrov β^+ použijeme metódu zobecnených najmenších štvorcov. Tento odhad je tvaru

$$\widehat{\beta}^+ = (\mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+) \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbf{y}$$

Analogicky k tvrdeniu 2 formulujeme a dokážeme vlastnosti odhadu $\widehat{\beta}^+$.

Tvrdenie 4. *Odhad $\widehat{\beta}^+$ je nestranným a konzistentným odhadom vektora parametrov β^+ pre $N \rightarrow \infty$ a T pevné, pre $T \rightarrow \infty$ a N pevné.*

Dôkaz. 1. Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\widehat{\beta}^+) &= \mathbb{E}((\mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+) \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbf{y}) = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left((\mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+) \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbf{y} \mid \mathbb{X}^+ \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+) \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+ \beta^+ \right] = \beta^+. \end{aligned}$$

2. Konzistenciu odhadu ukážeme pre $N \rightarrow \infty$ a T pevné.

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}^+ - \beta^+ &= (\mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+) \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbf{y} - \beta^+ = (\mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+) \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} (\mathbb{Z} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}) \\ &= \left(\frac{1}{N} \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+ \right) \frac{1}{N} \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} (\mathbb{Z} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}). \end{aligned}$$

Zároveň platí

$$\frac{1}{N} \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} (\mathbb{Z} \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{X}_i^{+\top} \Omega_i^{-1} (\mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i),$$

kde $\mathbb{X}_i^{+\top} \Omega_i^{-1} (\mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i)$ sú nezávislé rovnako rozdelené pre $i = 1, \dots, N$ a uvažujeme $\mathbb{E}(\mathbb{X}_i^{+\top} \Omega_i^{-1} (\mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i)) < \infty$. Sú splnené predpoklady slabého zákona veľkých čísel, Wooldridge [3]. Pre $N \rightarrow \infty$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{X}_i^{+\top} \Omega_i^{-1} (\mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i) &\xrightarrow{P} \mathbb{E}(\mathbb{X}_i^{+\top} \Omega_i^{-1} (\mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i)) \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbb{X}_i^{+\top} \Omega_i^{-1} (\mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i) \mid \mathbb{X}_i^{+\top}) \right] = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Predpokladajme

$$\frac{1}{N} \mathbb{X}^{+\top} \Omega^{-1} \mathbb{X}^+ \xrightarrow{P} \mathbb{E}(\mathbb{X}_i^{+\top} \Omega_i^{-1} \mathbb{X}_i^+) = \mathbb{M},$$

kde \mathbb{M} je pozitívne definitná matica. Potom z vety o spojitej transformácii, Vaart [4], platí

$$\widehat{\beta}^+ - \beta^+ \xrightarrow{P} \mathbb{M}^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

Špecifické efekty $\boldsymbol{\mu}_i$ pre každý objekt $i = 1, \dots, N$ sú uvažované náhodné, $\boldsymbol{\mu}_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} (\mathbf{0}, \mathbb{D})$. Namiesto odhadu hľadáme predikciu realizácie tohto náhodného vektora. Podľa článku Frees et al. [2] hľadáme najlepší lineárny nestranný prediktor $\boldsymbol{\mu}_i$, ktorý je tvaru

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i = \mathbb{D} \mathbb{Z}_i^\top \Omega_i^{-1} (\mathbf{y}_i - \mathbb{X}_i^+ \widehat{\beta}^+).$$

2 Aplikácia panelových dát v neživotnom poistení

V tejto kapitole popíšeme základné kredibilitné modely podľa knihy Bühlmann a Gisler [5]. Cieľom tejto kapitoly je tiež ukázať, ako môžu byť kredibilitné modely formulované ako špeciálne prípady modelov panelových dát.

2.1 Kredibilitné modely v poisťovníctve

Kredibilitné modely považujeme za dôležitý nástroj v matematike neživotného poistenia, ktorý umožňuje spojiť individuálne informácie o jednotlivcovi s agregovanými dátami celej skupiny.

Pozorujeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_T v časoch $1, \dots, T$. Uvažujme, že tieto náhodné veličiny sú úhrny škôd na jednej poistnej zmluve. Ich rozdelenie F_θ závisí na parametri θ , ktorý je realizáciou náhodnej veličiny Θ s rozdelením U . Cieľom je získať odhad vektora

$$\boldsymbol{\mu}(\Theta) = \mathbf{E} \left[(X_1, \dots, X_T)^\top \mid \Theta \right] = (\mu_1(\Theta), \dots, \mu_T(\Theta))^\top.$$

Poznámka. Úhrny škôd X_1, \dots, X_T pochádzajú z jedného rizika. Každé riziko je charakterizované individuálnym rizikovým profilom θ , realizáciou náhodnej veličiny Θ .

Na základe pozorovaní z minulých období, X_1, \dots, X_T , chceme určiť poistné pre riziko s rizikovým profilom θ pre budúce obdobie. Podľa knihy Bühlmann a Gisler [5] definujeme korektné individuálne poistné.

Definícia 1. *Pre riziko s rizikovým profilom θ definujeme korektné individuálne poistné (correct individual premium, fair risk premium) ako*

$$\mu(\theta) = \mathbf{E}[X_{T+1} \mid \theta].$$

Jednotlivé riziká neuvažujeme samostatne, ale ako súčasť skupiny skladajúcej sa z rizík, ktoré sú si v istom zmysle podobné. Takúto skupinu nazveme kolektív. V kolektíve je každé riziko charakterizované realizáciou náhodnej veličiny Θ , individuálnym rizikovým profilom θ_i . Ďalej definujeme kolektívne poistné.

Definícia 2. *Kolektívne poistné (collective premium) definujeme ako*

$$\mu_0 = \int_{\Theta} \mu(\theta) dU(\theta).$$

Poznámka. Kolektívne poistné je priemerný očakávaný úhrn škôd cez všetky riziká v kolektíve. Platí $\mu_0 = \mathbf{E}[\boldsymbol{\mu}(\Theta)]$.

Hľadáme najlepší odhad korektného individuálneho poistného $\mu(\theta)$ na základe vektora pozorovaní za minulé obdobia \boldsymbol{x} v zmysle strednej kvadratickej chyby.

Definícia 3. *Bayesovský odhad korektného individuálneho poistného definujeme ako*

$$\widehat{\mu(\Theta)} = E[\mu(\Theta) | \mathbf{x}].$$

Poznámka. Je možné ukázať, že Bayesovský odhad $\widehat{\mu(\Theta)}$ je najlepší odhad založený na vektore pozorovaní v zmysle kvadratickej chyby, Bühlmann a Gisler [5, Theorem 2.5].

Odvodíme strednú kvadratickú chybu Bayesovského odhadu a porovnáme ho so strednou kvadratickou chybou kolektívneho poistného. Platí

$$\begin{aligned} E \left[(\widehat{\mu(\Theta)} - \mu(\Theta))^2 \right] &= E \left[E \left[(\mu(\Theta) - E[\mu(\Theta) | \mathbf{x}])^2 | \mathbf{x} \right] \right] = E [\text{var} [\mu(\Theta) | \mathbf{x}]] , \\ E \left[(\mu_0 - \mu(\Theta))^2 \right] &= E \left[(\mu(\Theta) - E[\mu(\Theta)])^2 \right] = \text{var} [\mu(\Theta)] \\ &= E [\text{var} [\mu(\Theta) | \mathbf{x}]] + \text{var} [E[\mu(\Theta) | \mathbf{x}]] , \end{aligned}$$

kde prvý člen je rovný strednej kvadratickej chybe Bayesovského odhadu a druhý člen je vždy nezáporný. Kvadratická chyba Bayesovského odhadu je menšia než kvadratická chyba kolektívneho poistného.

Bayesovský odhad je teoreticky optimálny, ale vzhľadom na definíciu je nepraktický. Jeho výpočet vyžaduje znalosť podmieneného rozdelenia. Z tohto dôvodu sa obmedzíme na triedu odhadov lineárnych v pozorovaniach.

Postupne si predstavíme niektoré kredibilitné modely podľa knihy Bühlmann a Gisler [5]. Začneme jednoduchým kredibilitným modelom a jeho predpokladmi.

Definícia 4. *Jednoduchý kredibilitný model je model spĺňajúci nasledujúce predpoklady:*

1. *náhodné veličiny X_t pre $t = 1, \dots, T$ sú za podmienky $\Theta = \theta$ nezávislé a rovnako rozdelené s distribučnou funkciou F_θ a momentmi*

$$\begin{aligned} \mu(\theta) &= E[X_t | \Theta = \theta] \\ \sigma^2(\theta) &= \text{var}[X_t | \Theta = \theta], \end{aligned}$$

2. *Θ je náhodná veličina s rozdelením $U(\theta)$.*

Hľadáme odhad lineárny v pozorovaniach $\mathbf{x} = (X_1, \dots, X_T)^\top$. Formálne, hľadáme najlepší odhad v triede všetkých lineárnych funkcií odhadov $\mu(\Theta) = E[X_{T+1} | \Theta]$ v zmysle strednej kvadratickej chyby. Hľadáme koeficienty a_0, \dots, a_T splňujúce

$$\min_{a_0, \dots, a_T \in \mathbb{R}} E \left[\left(\mu(\Theta) - a_0 - \sum_{t=1}^T a_t X_t \right)^2 \right].$$

Pripomeňme, že náhodné veličiny X_1, \dots, X_T sú za podmienky $\Theta = \theta$ rovnako rozdelené. Zároveň odhad $\mu(\Theta)$ je jednoznačne definovaný. Musí potom platiť $a_1 = \dots = a_T = b$. Platí

$$\widehat{\mu(\Theta)} = a_0 + b \sum_{t=1}^T X_t = a_0 + bT \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t = a_0 + b\bar{X}.$$

Riešime úlohu

$$\min_{a_0, b \in \mathbb{R}} \mathbf{E} \left[\left(\mu(\Theta) - a_0 - b\bar{X} \right)^2 \right].$$

Parciálne derivácie podľa a_0 , b položíme rovné 0.

$$\frac{\partial \mathbf{E} \left[\left(\mu(\Theta) - a_0 - b\bar{X} \right)^2 \right]}{\partial a_0} = -2 \mathbf{E} \left[\left(\mu(\Theta) - a_0 - b\bar{X} \right) \right] = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E} \left[\left(\mu(\Theta) - a_0 - b\bar{X} \right)^2 \right]}{\partial b} = -2 \mathbf{E} \left[\left(\mu(\Theta) - a_0 - b\bar{X} \right) \bar{X} \right] = 0 \quad (2.2)$$

Úpravou (2.1) získame

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\mu(\Theta)] - a_0 - b \mathbf{E} [\bar{X}] &= \mathbf{E} [\mu(\Theta)] - a_0 - b \left(\mathbf{E} \left[\frac{1}{T} T \mathbf{E} [X_t | \Theta] \right] \right) \\ &= \mathbf{E} [\mu(\Theta)] - a_0 - b \mathbf{E} [\mu(\Theta)] = 0 \iff a_0 = (1 - b) \mathbf{E} [\mu(\Theta)]. \end{aligned}$$

Úpravou (2.2) získame

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\mu(\Theta)\bar{X}] - b_0 \mathbf{E} [\bar{X}] - b \mathbf{E} [\bar{X}\bar{X}] &= \text{cov} [\mu(\Theta), \bar{X}] - b \text{var} [\bar{X}] \\ &= \text{var} [\mu(\Theta)] - b \left(\frac{1}{T} \mathbf{E} [\sigma^2(\Theta)] + \text{var} [\mu(\Theta)] \right) = 0, \end{aligned}$$

odtiaľ

$$b = \frac{\text{cov} [\mu(\Theta), \bar{X}]}{\text{var} [\bar{X}]} = \frac{\text{var} [\mu(\Theta)]}{\frac{1}{T} \mathbf{E} [\sigma^2(\Theta)] + \text{var} [\mu(\Theta)]} = \frac{T}{T + \frac{\mathbf{E}[\sigma^2(\Theta)]}{\text{var}[\mu(\Theta)]}}.$$

Odvodili sme kredibilitný odhad za predpokladov jednoduchého kredibilitného modelu. Je tvaru

$$\widehat{\mu(\Theta)} = (1 - b) \mathbf{E} [\mu(\Theta)] + b\bar{X}, \quad (2.3)$$

b nazveme kredibilitným faktorom.

Poznámka. Odvođený kredibilitný odhad 2.3 je váženým priemerom kolektívneho poistného μ_0 a výberového priemeru minulých dát \bar{X} .

Tvrdenie 5. Pre kredibilitný odhad za predpokladov jednoduchého kredibilitného modelu 4 platí

$$\mathbf{E} \left[\left(\mu(\Theta) - \widehat{\mu(\Theta)} \right)^2 \right] = b \frac{\mathbf{E}[\sigma^2(\Theta)]}{T} = (1 - b) \text{var} [\mu(\Theta)].$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme priamym odvodením. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\left(\mu(\Theta) - \widehat{\mu(\Theta)} \right)^2 \right] &= \mathbf{E} \left[\left(\mu(\Theta) - (1 - b) \mathbf{E} [\mu(\Theta)] - b\bar{X} \right)^2 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\left(b(\mu(\Theta) - \bar{X}) + (1 - b)(\mu(\Theta) - \mu_0) \right)^2 \right] \\ &= \mathbf{E} \left[b^2(\mu(\Theta) - \bar{X})^2 + 2b(1 - b)(\mu(\Theta) - \bar{X})(\mu(\Theta) - \mu_0) \right. \\ &\quad \left. + (1 - b)^2(\mu(\Theta) - \mu_0)^2 \right] \end{aligned}$$

Pomocou vlastností podmienenej pravdepodobnosti a nezávislosti pozorovaní dostávame

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \bar{X})(\mu(\Theta) - \mu_0)] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \bar{X})(\mu(\Theta) - \mu_0) | \Theta]] \\
&= \mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \mu_0) \mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \bar{X}) | \Theta]] \\
&= \mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \mu_0) (\mathbb{E} [\mu(\Theta)] - \mathbb{E} [\bar{X} | \Theta])] \\
&= \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta) - \mu_0) \left(\mathbb{E} [\mu(\Theta)] - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E} [X_{it} | \Theta] \right) \right] \\
&= \mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \mu_0) (\mathbb{E} [\mu(\Theta)] - \mathbb{E} [\mu(\Theta)])] = 0, \\
\mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \bar{X})^2] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \bar{X})^2 | \Theta]] = \mathbb{E} [\text{var} [\bar{X} | \Theta]] \\
&= \mathbb{E} \left[\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \text{var} [X_i | \Theta] \right] = \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{T}.
\end{aligned}$$

Nakoniec dostávame

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta) - \widehat{\mu(\Theta)} \right)^2 \right] &= b^2 \mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \bar{X})^2] + (1 - b) \mathbb{E} [(\mu(\Theta) - \mu_0)^2] \\
&= b^2 \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{T} + (1 - b) \text{var} [\mu(\Theta)] \\
&= \frac{T^2}{\left(T + \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]} \right)^2} \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{T} + \frac{\left(\frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]} \right)^2}{\left(T + \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]} \right)^2} \text{var} [\mu(\Theta)] \\
&= \frac{T \mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)] + \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]}}{\left(T + \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]} \right)^2} \\
&= \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{T + \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]}}.
\end{aligned}$$

Rozšírením dostaneme

$$\frac{T}{T + \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]}} \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{T} = b \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{T},$$

alebo

$$\frac{\frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]}}{T + \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)]}{\text{var} [\mu(\Theta)]}} \text{var} [\mu(\Theta)] = (1 - b) \text{var} [\mu(\Theta)].$$

□

Poznámka. Kredibilitným odhadom $\widehat{\mu(\Theta)}$, ktorý je lineárnou kombináciou kolektívneho poistného μ_0 a výberového priemeru \bar{X} , sme strednú kvadratickú chybu kolektívneho poistného $\text{var} [\mu(\Theta)]$ ponížili pomocou $(1 - b)$ a strednú kvadratickú chybu výberového priemeru $\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta)] / T$ pomocou b . Našli sme odhad, ktorého stredná kvadratická chyba je síce väčšia ako stredná kvadratická chyba Bayesovského odhadu, ale je menšia ako stredná kvadratická chyba kolektívneho poistného.

2.1.1 Jednoduchý Bühlmannov kredibilitný model

Uvažujeme triedy podobných rizík, indexovaných $i = 1, \dots, N$. Pre jednotlivé zložky i -tej triedy, objekty, pozorujeme úhrny škôd v časoch $t = 1, \dots, T$, teda vektory $\mathbf{x}_i = (X_{i1}, \dots, X_{iT})^\top$. Nech platia predpoklady jednoduchého kredibilitného modelu uvedené v tvrdení 4. Navyiac uvažujeme predpoklady uvedené v nasledujúcom tvrdení.

Definícia 5. *Jednoduchý Bühlmannov kredibilitný model je model spĺňajúci predpoklady jednoduchého kredibilitného modelu uvedené v definícii 4 a nasledujúce predpoklady:*

B1: náhodné veličiny X_{it} pre $t = 1, \dots, T$ sú za podmienky $\Theta_i = \theta$ nezávislé a rovnako rozdelené s distribučnou funkciou F_θ a momentmi

$$\begin{aligned}\mu(\theta) &= E[X_{it} \mid \Theta_i = \theta] \\ \sigma^2(\theta) &= \text{var}[X_{it} \mid \Theta_i = \theta],\end{aligned}$$

B2: dvojice $(\Theta_1, \mathbf{x}_1), \dots, (\Theta_N, \mathbf{x}_N)$ sú nezávislé a rovnako rozdelené.

Poznámka. Náhodné veličiny $\Theta_1, \dots, \Theta_N$ sú nezávislé a rovnako rozdelené s rozdelením U , a priori sú si rovné.

Cieľom je nájsť kredibilitné odhady $\widehat{\mu(\Theta_i)}$ pre $i = 1, \dots, N$. Kredibilitný odhad je definovaný ako najlepší odhad, ktorý je lineárny vo všetkých pozorovaniach portfólia. Hľadaný odhad je tvaru

$$a + \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^T b_{kt} X_{kt} = a + \sum_{k=1}^N b_k T \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{kt} = a + \sum_{k=1}^N b_k \bar{X}_k$$

Hľadáme koeficienty splňujúce

$$\min_{a^{(i)}, b_k^{(i)} \in \mathbf{R}} E \left[\left(\mu(\Theta_i) - a^{(i)} - \sum_{k=1}^N b_k^{(i)} \bar{X}_k \right)^2 \right].$$

Parciálne derivácie podľa $a^{(i)}$, $b_k^{(i)}$ položíme rovné 0.

$$\frac{\partial E \left[\left(\mu(\Theta_i) - a^{(i)} - \sum_{k=1}^N b_k^{(i)} \bar{X}_k \right)^2 \right]}{\partial a^{(i)}} = E \left[\left(\mu(\Theta_i) - a^{(i)} - \sum_{k=1}^N b_k^{(i)} \bar{X}_k \right) \right] = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial E \left[\left(\mu(\Theta_i) - a^{(i)} - \sum_{k=1}^N b_k^{(i)} \bar{X}_k \right)^2 \right]}{\partial b_k^{(i)}} = E \left[\left(\mu(\Theta_i) - a^{(i)} - \sum_{k=1}^N b_k^{(i)} \bar{X}_k \right) \bar{X}_k \right] = 0 \quad (2.5)$$

Úpravou 2.5 získame

$$E \left[\mu(\Theta_i) \bar{X}_k \right] - a^{(i)} E \left[\bar{X}_k \right] - b_k^{(i)} E \left[\bar{X}_k^2 \right] = \text{cov} \left[\mu(\Theta_i), \bar{X}_k \right] - b_k^{(i)} \text{var} \left[\bar{X}_k \right] = 0.$$

Z predpokladov modelu uvedených v tvrdení 5 máme pre $i \neq k$

$$\text{cov} \left[\mu(\Theta_i), \bar{X}_k \right] = 0,$$

odtiaľ $b_k^{(i)} = 0$. Pre $i = k$ máme

$$b_i^{(i)} = \frac{\text{var} [\mu(\Theta_i)]}{\text{var} [\bar{X}_i]} = \frac{\text{var} [\mu(\Theta_i)]}{\frac{1}{T} \text{E} [\sigma^2(\Theta_i)] + \text{var} [\mu(\Theta_i)]}.$$

Úpravou 2.4 s využitím $b_k^{(i)} = 0$ pre $i \neq k$ získame

$$\begin{aligned} \text{E} [\mu(\Theta_i)] - b_i^{(i)} \text{E} [\bar{X}_i] - a^{(i)} &= \text{E} [\mu(\Theta_i)] - b_i^{(i)} \text{E} \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{it} \right] - a^{(i)} \\ &= \text{E} [\mu(\Theta_i)] - b_i^{(i)} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{E} [\text{E} [X_{it} | \Theta_i]] - a^{(i)} \\ &= \text{E} [\mu(\Theta_i)] - b_i^{(i)} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \text{E} [\mu(\Theta_i)] - a^{(i)} \\ &= (1 - b_i^{(i)}) \text{E} [\mu(\Theta_i)] - a^{(i)} = 0 \end{aligned}$$

a odtiaľ máme $a^{(i)} = (1 - b_i^{(i)}) \text{E} [\mu(\Theta_i)]$.

Odvodili sme kredibilitný odhad za predpokladov jednoduchého Bühlmannovho kredibilitného modelu. Je tvaru

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = (1 - b_i^{(i)})\mu_0 + b_i^{(i)}\bar{X}_i, \quad (2.6)$$

$b_i^{(i)}$ nazveme kredibilitným faktorom.

Tvrdenie 6. *Pre kredibilitný odhad za predpokladov jednoduchého Bühlmannovho kredibilitného modelu platí*

$$\text{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu(\Theta_i)} \right)^2 \right] = b_i^{(i)} \frac{\text{E} [\sigma^2(\Theta_i)]}{T}$$

Dôkaz. Dôkaz je analogický dôkazu tvrdenia 5. □

2.1.2 Heteroskedastický model Bühlmann-Straub

Rovnako ako v podkapitole 2.2.1, uvažujeme triedy podobných rizík, rizikové skupiny indexované $i = 1, \dots, N$ a pre jednotlivé zložky tried pozorujeme úhrny škôd v časoch $t = 1, \dots, T$. Pre i -tú rizikovú skupinu máme k dispozícii celkovú výšku poistných škôd v roku t , značíme S_{it} , a celkový počet rokov v roku t , značíme V_{it} . Ďalej označme $X_{it} = \frac{S_{it}}{V_{it}}$ priemerné náklady na poistnú udalosť v roku t (*claims ratio*). Pre každé riziko i chceme odhadnúť príslušné individuálne *claims ratio* $\mu(\Theta_i) = \text{E} [X_{it} | \Theta_i]$.

Poznámka. Symbolom V_{it} značíme celkový počet rokov v roku t . Rozumieme tým počet rokov, počas ktorých boli poistenci vystavení danému riziku, koľko rokov boli poistné zmluvy platné. Podľa monografie [5] je možné V_{it} vnímať ako miery objemu, váhy. Autori navrhujú neobmedzovať sa len na mieru objemu a pre širšiu interpretáciu používať w_{it} .

Uvažujeme predpoklady uvedené v nasledujúcej definícii.

Definícia 6. *Model Bühlmann-Straub je model spĺňajúci nasledujúce predpoklady:*

BS1: náhodné veličiny X_{it} pre $t = 1, \dots, T$ sú pri danom Θ_i nezávislé s momentmi

$$\begin{aligned} E[X_{it} | \Theta_i] &= \mu(\Theta_i) \\ \text{var}[X_{it} | \Theta_i] &= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{it}}, \end{aligned}$$

BS2: dvojice $(\Theta_1, \mathbf{x}_1), \dots, (\Theta_N, \mathbf{x}_N)$ sú nezávislé a $\Theta_1, \dots, \Theta_N$ sú nezávislé a rovnako rozdelené.

Hľadáme kredibilitný odhad založený na dátach všetkých rizík. Pripomeňme, že chceme odhadnúť príslušné individuálne priemerné náklady na poistnú udalosť v roku t (*claims ratio*) $\mu(\Theta_i) = E[X_{it} | \Theta_i]$. Vzhľadom na nezávislosť odhad $\mu(\Theta_i)$ závisí len na pozorovaniach i -tej rizikovej skupiny

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = a_{i0} + \sum_{t=1}^T a_{it} X_{it}. \quad (2.7)$$

Poznámka. Z predpokladu BS2 v tvrdení 6 máme pre $k \neq i$ a $\forall t$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mu(\Theta_i), X_{kt}] &= \text{cov}[E[X_{it} | \Theta_i], X_{kt}] = E[E[X_{it} | \Theta_i] X_{kt}] \\ &\quad - E[E[X_{it} | \Theta_i]] E[X_{kt}] = 0. \end{aligned}$$

Spolu s 2.7 sú splnené normálne rovnice z knihy Bühlmann a Gisler [5, Corollary 3.17] a $\widehat{\mu(\Theta_i)}$ je kredibilitným odhadom založeným na všetkých dátach.

Uvažujme, podobne ako v predchádzajúcich modeloch

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = a_i + b_i X_i, \quad (2.8)$$

kde v tomto prípade $X_i = \frac{\sum_{t=1}^T w_{it} X_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it}}$. Riešime minimalizačnú úlohu

$$\min_{a_i, b_i \in \mathbb{R}} E[(\mu(\Theta) - a_i - b_i X_i)^2].$$

Analogicky ako v predchádzajúcich modeloch, položíme parciálne derivácie podľa a_i, b_i rovno 0 a získame kredibilitný odhad tvaru

$$\widehat{\mu(\Theta_i)} = b_i X_i + (1 - b_i) \mu_0, \quad (2.9)$$

kde pre kredibilitný faktor platí

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\text{cov}[\mu(\Theta_i), X_i]}{\text{var}[X_i]} = \frac{E[\text{cov}[\mu(\Theta_i), X_i | \Theta_i]] + \text{cov}[\mu(\Theta_i), E[X_i | \Theta_i]]}{E[\text{var}[X_i | \Theta_i]] + \text{var}[E[X_i | \Theta_i]]} \\ &= \frac{\text{var}[\mu(\Theta_i)]}{\sum_{t=1}^T \frac{1}{w_{it}} E[\sigma^2(\Theta_i)] + \text{var}[\mu(\Theta_i)]} = \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{E[\sigma^2(\Theta_i)]}{\text{var}[\mu(\Theta_i)]}}. \end{aligned}$$

Tvrdenie 7. Pre kredibilitný odhad za predpokladov Heteroskedastického modelu Bühlmann-Straub platí

$$\mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu}(\Theta_i) \right)^2 \right] = b_i \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)]}{\sum_{t=1}^T w_{it}} = (1 - b_i) \text{var}[\mu(\Theta_i)] .$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme priamym odvodením podobne ako v dôkaze tvrdenia 5. Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu}(\Theta_i) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - b_i X_i + (1 - b_i) \mu_0 + b_i \mu(\Theta_i) - b_i \mu(\Theta_i) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(b_i (\mu(\Theta_i) - X_i) + (1 - b_i) (\mu(\Theta_i) - \mu_0) \right)^2 \right] \\ &= b_i^2 \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - X_i)^2 \right] + (1 - b_i)^2 \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - \mu_0)^2 \right] \\ &\quad + 2b_i(1 - b_i) \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - X_i) (\mu(\Theta_i) - \mu_0) \right] \\ &= b_i^2 \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\sum_{t=1}^T w_{it}} + (1 - b_i)^2 \text{var}(\mu(\Theta_i)) . \end{aligned}$$

Použili sme vzťahy získané pomocou vlastností podmienenej pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - X_i) (\mu(\Theta_i) - \mu_0) \right] &= 0 , \\ \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - X_i)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - X_i)^2 \mid \Theta_i \right] \right] = \mathbb{E} [X_i \mid \Theta_i] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T \frac{w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it}} \text{var} [X_{it} \mid \Theta_i] \right] = \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\sum_{t=1}^T w_{it}} . \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\mu(\Theta_i) - \widehat{\mu}(\Theta_i) \right)^2 \right] &= b_i^2 \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - X_i)^2 \right] + (1 - b_i)^2 \mathbb{E} \left[(\mu(\Theta_i) - \mu_0)^2 \right] \\ &= b_i^2 \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{\sum_{t=1}^T w_{it}} + (1 - b_i)^2 \text{var}(\mu(\Theta_i)) \\ &= \frac{\left(\sum_{t=1}^T w_{it} \right)^2 \mathbb{E} [\sigma^2(\Theta_i)]}{\left(\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)]}{\text{var}[\mu(\Theta_i)]} \right)^2 \sum_{t=1}^T w_{it}} \\ &\quad + \frac{\left(\frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)]}{\text{var}[\mu(\Theta_i)]} \right)^2}{\left(\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)]}{\text{var}[\mu(\Theta_i)]} \right)^2} \text{var}(\mu(\Theta_i)) \\ &= \frac{\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta_i)]}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta_i)]}{\text{var}[\mu(\Theta_i)]}} , \end{aligned}$$

odkiaľ rozšírením pomocou $\sum_{t=1}^T w_{it}$ a $\mathbb{E} [\sigma^2(\Theta_i)] / \text{var} [\mu(\Theta_i)]$ získavame požadované vyjadrenia. \square

2.1.3 Regresný Hachemeisterov model

Uvažujme portfólio N rizík. Pre každé riziko v portfóliu, $i = 1, \dots, N$, máme vektor úhrnov škôd $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{iT})^\top$ a vektor príslušných známych váh $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, \dots, w_{iT})^\top$.

Rovnako ako v predchádzajúcich modeloch 2.2.1 a 2.1.2, je riziko i charakterizované individuálnym rizikovým profilom θ_i , ktorý je realizáciou náhodnej veličiny Θ_i . V tejto podkapitole uvažujme, že parametre modelu β nie sú pevné, ale sú to náhodné veličiny s rozdelením závislým na štruktúre kolektívu, značíme $\beta(\Theta_i)$. Nech pre všetky i vektor \mathbf{X}_i podmienene na Θ_i spĺňa rovnicu regresného modelu

$$\mathbf{X}_i|\Theta_i = \mathbb{Y}_i\beta(\Theta_i) + \varepsilon_i.$$

Regresný Hachemeisterov model popíšeme podľa monografie Bühlmann a Gisler [5] s využitím poznatkov o modeloch mnohorozmernej kredibility, ktorým sa v tejto práci nevenujeme.

Definícia 7. *Regresný Hachemeisterov model je model spĺňajúci pre každé $i = 1, \dots, N$:*

H1: podmienene na Θ_i sú X_{it} pre $t = 1, \dots, T$ nezávislé a platí

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] &= \mathbb{Y}_i\beta(\Theta_i) \\ \text{cov}[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i^\top|\Theta_i] &= \Sigma_i(\Theta_i) \end{aligned}$$

H2: dvojice $(\Theta_1, \mathbf{X}_1), \dots, (\Theta_N, \mathbf{X}_N)$ sú nezávislé a $\Theta_1, \dots, \Theta_N$ sú nezávislé a rovnako rozdelené.

V predpokladoch modelu uvažujeme dátovú maticu \mathbb{Y}_i rozmerov $N \times p$ hodnosti p a vektor parametrov $\beta(\Theta_i)$ dĺžky p s lineárne nezávislými prvkami. Predpoklady modelu sú zhodné s predpokladmi modelu mnohorozmernej kredibility v monografii Bühlmann a Gisler [5, str. 188].

Poznámka. Hľadáme kredibilitný odhad $\beta(\Theta_i)$, ktorý je závislý na \mathbf{X}_i , pomocou tzv. dátovej kompresie, Bühlmann a Gisler [5, str. 189]. Optimálna dátová kompresia je ortogonálna projekcia $\beta(\Theta_i)$ na podpriestor odhadov, ktoré sú lineárne v komponentoch \mathbf{X}_i a ktorých očakávaná hodnota za podmienky Θ_i je rovná $\beta(\Theta_i)$. Označme takúto ortogonálnu projekciu \mathbf{B}_i .

Tvar \mathbf{B}_i za predpokladov Regresného Hachemeistrovho modelu uvedieme vo vete prevzatej z Bühlmann a Gisler [5, str. 206], kde autori uvádzajú aj dôkaz. Označme $\mathbb{S}_i = E(\text{cov}[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i^\top|\Theta_i]) = E[\Sigma_i(\Theta_i)]$.

Veta 8. *Za predpokladov Regresného Hachemeistrovho modelu platí:*

1. *Najlepší lineárny a individuálne nestranný odhad $\beta(\Theta_i)$ je*

$$\mathbf{B}_i = (\mathbb{Y}_i^\top \mathbb{S}_i^{-1} \mathbb{Y}_i)^{-1} \mathbb{Y}_i^\top \mathbb{S}_i^{-1} \mathbf{X}_i.$$

2. *Matica strednej kvadratickej chyby \mathbf{B}_i je*

$$E[(\mathbf{B}_i - \beta(\Theta_i))(\mathbf{B}_i - \beta(\Theta_i))^\top] = (\mathbb{Y}_i^\top \mathbb{S}_i^{-1} \mathbb{Y}_i)^{-1}.$$

Poznámka. Individuálnou nestrannosťou odhadu rozumieme

$$E[\mathbf{B}_i|\Theta_i] = \beta(\Theta_i).$$

Pre prvky $\beta_k(\Theta_i)$ $k = 1, \dots, p$ vektora $\beta(\Theta_i)$ hľadáme kredibilitný odhad

$$\widehat{\beta_k(\Theta_i)} = a_{k0} + \sum_{j=1}^p a_{kj} B_{ij}. \quad (2.10)$$

založený na optimálnej dátovej kompresii $\mathbf{B}_i = (B_{i1}, \dots, B_{ip})^\top$, ktorý musí spĺňať normálne rovnice, viz Bühlmann a Gisler(5, str. 72)

$$\beta_k = \mathbb{E}(\beta_k(\Theta_i)) = a_{k0} + \sum_{j=1}^p a_{kj} \beta_j \quad (2.11)$$

$$\text{cov}(\beta_k(\Theta_i), B_{im}) = \sum_{j=1}^p a_{kj} \text{cov}(B_{ij} B_{im}), \quad m = 1 \dots, p. \quad (2.12)$$

Vektorovo možno 2.10 vyjadriť ako

$$\widehat{\beta(\Theta_i)} = \mathbf{a}_i + \mathbb{A}_i \mathbf{B}_i$$

a normálne rovnice

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbf{a}_i + \mathbb{A}_i \beta \\ \text{cov}(\beta(\Theta_i), \mathbf{B}_i^\top) &= \mathbb{A}_i \text{cov}(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i^\top). \end{aligned}$$

Platí

$$\begin{aligned} \text{cov}(\beta(\Theta_i), \mathbf{B}_i^\top) &= \mathbb{E}(\text{cov}[\beta(\Theta_i), \mathbf{B}_i^\top | \Theta_i]) + \text{cov}(\beta(\Theta_i), \mathbb{E}[\mathbf{B}_i^\top | \Theta_i]) \\ &= \text{cov}(\beta(\Theta_i), \beta(\Theta_i)^\top) = \mathbb{K}, \\ \text{cov}(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i^\top) &= \mathbb{E}(\text{cov}[\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i^\top | \Theta_i]) + \text{cov}(\mathbb{E}[\mathbf{B}_i | \Theta_i], \mathbb{E}[\mathbf{B}_i^\top | \Theta_i]) \\ &= (\mathbb{Y}_i^\top \mathbb{S}_i^{-1} \mathbb{Y}_i)^{-1} + \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Z normálových rovníc 2.12 dostávame

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i &= \mathbb{K} \left((\mathbb{Y}_i^\top \mathbb{S}_i^{-1} \mathbb{Y}_i)^{-1} + \mathbb{K} \right)^{-1}, \\ \mathbf{a}_i &= \mathbb{I}_p - \mathbb{A}_i. \end{aligned}$$

Kredibilitný odhad $\beta(\Theta_i)$ uvádzame v nasledujúcej vete rovnako prevzatej z monografie Bühlmann a Gisler(5, str. 207). Vyššie sme odvodili tvar kredibilitného odhadu pomocou odvodenia mnohorozmerného kredibilitného odhadu z uvedenej monografie.

Veta 9. *Za predpokladov Hachemeistrovho regresného modelu uvedených v definícii 7 kredibilitný odhad $\beta(\Theta_i)$ spĺňa*

$$\widehat{\beta(\Theta_i)} = \mathbb{A}_i \mathbf{B}_i + (\mathbb{I}_p - \mathbb{A}_i) \beta,$$

kde $\mathbb{A}_i = \mathbb{K} \left(\mathbb{K} + (\mathbb{Y}_i^\top \mathbb{S}_i^{-1} \mathbb{Y}_i)^{-1} \right)^{-1}$ je matica kredibilitných faktorov. Pre maticu strednej kvadratickej chyby platí

$$\mathbb{E} \left[(\widehat{\beta(\Theta_i)} - \beta(\Theta_i)) (\widehat{\beta(\Theta_i)} - \beta(\Theta_i))^\top \right] = (\mathbb{I}_p - \mathbb{A}_i) \mathbb{K}.$$

Vo vete vyššie uvádzame tvar kredibilitného odhadu $\beta(\Theta_i)$. Kredibilitný odhad úhrnu škôd pre budúce obdobie je potom

$$\widehat{E}[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \mathbb{Y}_i \widehat{\beta}(\Theta_i).$$

Uvedieme špeciálny prípad regresného Hachemeistrovho modelu, ktorý bude pre nás dôležitý v nasledujúcej kapitole.

Poznámka. Uvažujme

$$\mathbb{Y}_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix}, \quad \beta(\Theta_i) = \begin{pmatrix} \beta_0(\Theta_i) \\ \beta_1(\Theta_i) \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}_i = \sigma^2 \text{diag} \left(\frac{1}{w_{i1}}, \dots, \frac{1}{w_{iT}} \right).$$

Získali sme model s lineárnym trendom. Po prvkoch máme

$$E[X_{it}|\Theta_i] = \beta_0(\Theta_i) + t\beta_1(\Theta_i).$$

Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= (\mathbb{Y}_i^\top \mathbb{S}_i^{-1} \mathbb{Y}_i)^{-1} \mathbb{Y}_i^\top \mathbb{S}_i^{-1} \mathbf{X}_i \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} & \sum_{t=1}^T t w_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} & \sum_{t=1}^T t^2 w_{it} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} & \sum_{t=1}^T t w_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} & \sum_{t=1}^T t^2 w_{it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i1} \\ \vdots \\ X_{iT} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} & \sum_{t=1}^T t w_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} & \sum_{t=1}^T t^2 w_{it} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} X_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} X_{it} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{K} = \text{cov}(\beta(\Theta_i), \beta(\Theta_i)^\top) = \begin{pmatrix} \text{var}(\beta_0(\Theta_i)) & \text{cov}(\beta_0(\Theta_i), \beta_1(\Theta_i)) \\ \text{cov}(\beta_0(\Theta_i), \beta_1(\Theta_i)) & \text{var}(\beta_1(\Theta_i)) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

2.2 Kredibilitné panelové modely v poisťovníctve

V tejto podkapitole sa vrátíme k modelom panelových dát. Ukážeme, že kredibilitné modely uvedené v predchádzajúcej podkapitole sú špeciálne prípady modelov panelových dát. Získame tým univerzálnejší spôsob, ako modelovať budúci úhrn škôd.

2.2.1 Panelová verzia Jednoduchého Bühlmannovho kredibilitného modelu

Uvažujme jednoduchý Bühlmannov kredibilitný model. Náhodná veličina X_{it} predstavuje úhrn škôd v i -tej rizikovej triede v čase t . Rozdelenie náhodnej veličiny X_{it} závisí na realizácii náhodnej veličiny Θ_i . Náhodná veličina Θ_i predstavuje individuálny rizikový profil i -tej rizikovej triedy. Ukážeme prepojenie s niektorým z modelov panelových dát. Vzhľadom na povahu rizikového profilu Θ_i sa prikloníme k modelu jednosmernej chybovej zložky s náhodnými efektmi 1.6. Úhrn škôd vyjadríme ako

$$X_{it} = \Theta_i + \varepsilon_{it}, \quad (2.14)$$

kde ε_{it} predstavuje chybu. Všimnime si analógiu rizikového profilu i -tej triedy Θ_i so špecifickým efektom objektu μ_i , rizikovú triedu vnímajme ako objekt vystupujúci v modeli panelových dát a uvažujme, že odozva y_{it} v modeli 1.6 predstavuje úhrn škôd.

Porovnajme vyjadrenie 2.14 s modelom 1.6. Voľbou $\mathbf{x}_{it} = \mathbf{z}_{it} = 1$ pre všetky i a t v modeli 1.6 získame

$$y_{it} = \alpha + \beta + \mu_i + \nu_{it}. \quad (2.15)$$

Naším cieľom je získať odhad očakávaného úhrnu škôd pre budúce obdobie podmienene na rizikovom profile, v tomto prípade na špecifickom efekte rizikovej triedy

$$\mathbb{E}[y_{i,T+1} | \mu_i] = \mathbb{E}[\alpha + \beta + \mu_i + \nu_{it} | \mu_i] = \alpha + \beta + \mu_i.$$

Podľa článku Frees et al. [2] hľadáme najlepší lineárny nestranný prediktor úhrnu škôd. Hľadáme odhad μ_i lineárny v minulých pozorovaniach s najmenšou strednou kvadratickou chybou. Pracujeme s modelom 2.15. Pripomeňme predpoklady modelu uvažované v teórii panelových dát.

Poznámka. Uvažujme, že špecifické efekty μ_i sú nezávislé a rovnako rozdelené, navyiac

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mu_i) &= 0 & \text{var}(\mu_i) &= \sigma_\mu^2 & \text{pre } i &= 1, \dots, N, \\ \mathbb{E}(\nu_{it}) &= 0 & \text{var}(\nu_{it}) &= \sigma_\nu^2 & \text{pre } i &= 1, \dots, N, t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

ν_{it} sú nekorelované cez t a nezávislé na μ_i .

Tvrdenie 10. Uvažujme model tvaru 2.15 a predpoklady uvedené v definícii 5. Kredibilitný faktor je potom tvaru

$$b = \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}}$$

a najlepši lineárny nestranný odhad úhrnu škôd pre budúce obdobie je tvaru

$$\widehat{E[y_{i,T+1}|\mu_i]} = \left(1 - \frac{T}{T + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_\mu^2}}\right) (\alpha + \beta) + \frac{T}{T + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_i.$$

Dôkaz. Hľadaný odhad musí byť tvaru

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_i &= a + b\bar{y}_i = a + b\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{it} = a + b(\alpha + \beta + \mu_i + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \nu_{it}) \\ &= a + b(\alpha + \beta + \mu_i + \bar{\nu}_i). \end{aligned}$$

Riešime minimalizačnú úlohu

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \mathbf{E} [(\mu_i - \widehat{\mu}_i)^2],$$

za podmienky $\mathbf{E}[\widehat{\mu}_i] = \mathbf{E}[\mu_i] = 0$. Podmienku je možné upraviť na tvar

$\mathbf{E}[\widehat{\mu}_i] = a + b\mathbf{E}[\bar{y}_i] = a + b(\alpha + \beta) = 0$ a odtiaľ $a = -b(\alpha + \beta)$. Získali sme upravenú úlohu tvaru

$$\min_{b \in \mathbb{R}} \mathbf{E} [(\mu_i - b(\bar{y}_i - \alpha - \beta))^2] \quad (2.16)$$

s riešením

$$\begin{aligned} b &= \frac{\text{cov}[\mu_i, \bar{y}_i - \alpha - \beta]}{\text{var}[\bar{y}_i - \alpha - \beta]} = \frac{\text{cov}[\mu_i, \mu_i + \bar{\nu}_i]}{\text{var}[\mu_i + \bar{\nu}_i]} = \frac{\text{var}[\mu_i] + \text{cov}[\mu_i, \bar{\nu}_i]}{\text{var}[\mu_i] + \text{var}[\bar{\nu}_i]} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \frac{1}{T}\sigma_\nu^2} \\ &= \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}}. \end{aligned}$$

V úprave vyššie sme využili nezávislosť chýb ν_{it} na μ_i . Našli sme najlepši lineárny nestranný prediktor a je tvaru

$$\widehat{\mu}_i = \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} (\bar{y}_i - \alpha - \beta). \quad (2.17)$$

Očakávaný úhrn škôd za podmienky μ_i pre budúce obdobie je potom

$$\begin{aligned} \widehat{E[y_{i,T+1}|\mu_i]} &= \alpha + \beta + \widehat{\mu}_i = \alpha + \beta + \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} (\bar{y}_i - \alpha - \beta) \\ &= \left(1 - \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}}\right) (\alpha + \beta) + \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_i. \end{aligned}$$

□

Porovnajme toto vyjadrenie s kredibilitným odhadom za predpokladov jednoduchého Bühlmannovho kredibilitného modelu 2.6. Riešenie úlohy b predstavuje kredibilitný faktor. Opäť sme získali vážený priemer výberového priemeru minulých dát rizikovej triedy, v tomto prípade \bar{y}_i a celkového priemeru, v tomto prípade $\alpha + \beta$, v prípade modelu 2.6 kolektívneho poistného μ_0 .

Ukážeme si, ako v prípade modelu 2.15 vyzerá odhad parametru $\alpha + \beta$. Pre všetky i máme

$$\mathbf{y}_i = (\alpha + \beta)\mathbf{1}_T + \mu_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{\nu}_i$$

a platí

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{y}_i) &= \text{var}[(\alpha + \beta)\mathbf{1}_T + \mu_i\mathbf{1}_T + \boldsymbol{\nu}_i] = \text{var}(\mu_i\mathbf{1}_T) + \text{var}(\boldsymbol{\nu}_i) = \sigma_\mu^2\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^\top + \sigma_\nu^2\mathbb{I}_T \\ &= \Omega_i. \end{aligned}$$

Kovariančná matica vektora \mathbf{y} je blokovo diagonálna s maticami Ω_i na diagonále a je tvaru

$$\Omega = \mathbb{I}_N \otimes (\sigma_\mu^2\mathbf{1}_T\mathbf{1}_T^\top + \sigma_\nu^2\mathbb{I}_T).$$

Uvažujme značenie zavedené v časti 1.6. Odhad parametrov modelu $\alpha + \beta$ je tvaru

$$\widehat{\alpha + \beta} = (\mathbf{1}_{NT}^\top \Omega^{-1} \mathbf{1}_{NT})^{-1} \mathbf{1}_{NT}^\top \Omega^{-1} \mathbf{y}, \quad (2.18)$$

kde inverz diagonálnych prvkov kovariančnej matice vektora odoziev \mathbf{y} bol vypočítaný pomocou vzorca Sherman-Morrison uvedeným v článku Bartlett [6]. Pre všetky $i = 1, \dots, N$ platí

$$\Omega_i^{-1} = \frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{I}_T - \frac{\frac{\sigma_\mu^2}{(\sigma_\nu^2)^2}}{1 + \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2} T} \mathbb{J}_T = \frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{I}_T - \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2)} \mathbb{J}_T$$

a inverz kovariančnej matice vektora odoziev je potom tvaru

$$\Omega^{-1} = \mathbb{I}_N \otimes \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{I}_T - \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2)} \mathbb{J}_T \right).$$

Vyjadrenie 2.18 postupne upravíme. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{NT}^\top \Omega^{-1} \mathbf{1}_{NT} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_T^\top \Omega_i^{-1} \mathbf{1}_T = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbf{1}_T^\top \mathbb{I}_T \mathbf{1}_T - \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2)} \mathbf{1}_T^\top \mathbb{J}_T \mathbf{1}_T \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{T}{\sigma_\nu^2} - \frac{\sigma_\mu^2 T^2}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2)} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{T}{\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{NT}^\top \Omega^{-1} \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_T^\top \Omega_i^{-1} \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbf{1}_T^\top \mathbb{I}_T - \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2)} \mathbf{1}_T^\top \mathbb{J}_T \right) \mathbf{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2} \mathbf{1}_T^\top \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2} \sum_{t=1}^T y_{it} = \sum_{i=1}^N \frac{T}{\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2} \bar{y}_i \end{aligned}$$

a odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha + \beta} &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{T}{\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{T}{\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2} \bar{y}_i = \left(\sum_{i=1}^N \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \frac{1}{\sigma_\mu^2} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \frac{1}{\sigma_\mu^2} \bar{y}_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_i. \end{aligned}$$

Všimnime si, že v upravenom vyjadrení odhadu vystupuje práve kredibilitný násobiteľ

$$\frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}},$$

ktorý bol odvodený pri hľadaní očakávaného úhrnu škôd pre budúce obdobie.

2.2.2 Panelová verzia Heteroskedastického modelu Bühlmann-Straub

Uvažujme heteroskedastický model Bühlmann-Straub. Rovnako ako v časti 2.2.1 uvažujeme vyjadrenie úhrnu škôd 2.14. Ďalej uvažujme, že odozva v modeli 1.6 predstavuje úhrn škôd. Opäť volíme $\mathbf{x}_{it} = \mathbf{z}_{it} = 1$ pre všetky i a všetky t . Dostaneme vyjadrenie 2.15.

Poznámka. Uvažujme, že špecifické efekty μ_i sú nezávislé, rovnako rozdelené a nezávislé na ν_{it} , navyiac

$$\begin{aligned} E(\mu_i) &= 0 & \text{var}(\mu_i) &= \sigma_\mu^2 & \text{pre } i &= 1, \dots, N, \\ E(\nu_{it}) &= 0 & \text{var}(\nu_{it}) &= \frac{\sigma_\nu^2}{w_{it}} & \text{pre } i &= 1, \dots, N, t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

ν_{it} sú nekorelované cez t . Kovariančná matica vektora $\boldsymbol{\nu}_i$ je diagonálna s prvkami $\frac{\sigma_\nu^2}{w_{it}}$.

Potom máme

$$\text{var}[y_{it}|\mu_i] = \text{var}[\alpha + \beta + \mu_i + \nu_{it}|\mu_i] = \text{var}(\nu_{it}) = \frac{\sigma_\nu^2}{w_{it}}.$$

Rovnako ako v podkapitole 2.1.2 budeme namiesto výberového priemeru uvažovať vážený priemer pozorovaní $\bar{y}_{i,w} = \frac{\sum_{t=1}^T w_{it} y_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it}}$. Naším cieľom je získať odhad očakávaného úhrnu škôd pre budúce obdobie podmienene na rizikovom profile, v tomto prípade na špecifickom efekte rizikovej triedy

$$E[y_{i,T+1}|\mu_i] = E[\alpha + \beta + \mu_i + \nu_{it}|\mu_i] = \alpha + \beta + \mu_i.$$

Tvrdenie 11. Uvažujme model tvaru 2.15 a predpoklady uvedené v poznámke 2.2.2. Kredibilitný faktor je potom tvaru

$$b_i = \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}}$$

a najlepší lineárny nestranný odhad úhrnu škôd pre budúce obdobie je tvaru

$$\widehat{E}[y_{i,T+1}|\mu_i] = \left(1 - \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}}\right) (\alpha + \beta) + \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_{i,w}.$$

Dôkaz. Hľadáme odhad tvaru

$$\widehat{\mu}_i = a_i + b_i \bar{y}_{i,w} = a_i + b_i \left(\alpha + \beta + \mu_i + \frac{\sum_{t=1}^T w_{it} \nu_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it}} \right).$$

a riešime minimalizačnú úlohu 2.16. Postupujeme rovnako ako v podkapitole 2.15. Riešením je

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{\text{cov} [\mu_i, \bar{y}_{i,w} - \alpha - \beta]}{\text{var} [\bar{y}_{i,w} - \alpha - \beta]} = \frac{\text{var} [\mu_i]}{\text{var} \left[\mu_i + \frac{\sum_{t=1}^T w_{it} \nu_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it}} \right]} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \frac{\sigma_\nu^2}{\sum_{t=1}^T w_{it}}} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}}. \end{aligned}$$

Našli sme najlepší nestranný lineárny odhad tvaru

$$\hat{\mu}_i = \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} (\bar{y}_{i,w} - \alpha - \beta),$$

očakávaný úhrn škôd za podmienky μ_i pre budúce obdobie je potom

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E} [y_{i,T+1} | \mu_i]} &= \alpha + \beta + \hat{\mu}_i = \alpha + \beta + \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} (\bar{y}_{i,w} - \alpha - \beta) \\ &= \left(1 - \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \right) (\alpha + \beta) + \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_{i,w}. \end{aligned}$$

□

Riešenie minimalizačnej úlohy 2.16 opäť predstavuje kredibilitný faktor. Získali sme vážený priemer váženého priemeru minulých dát v danej rizikovej triede a celkového priemeru.

Ukážeme, ako v prípade tohto modelu vyzerá odhad parametra $\alpha + \beta$. Pre všetky i máme

$$\mathbf{y}_i = (\alpha + \beta) \mathbf{1}_T + \mu_i \mathbf{1}_T + \boldsymbol{\nu}_i$$

a platí

$$\text{var}(\mathbf{y}_i) = \text{var}(\mu_i \mathbf{1}_T) + \text{var}(\boldsymbol{\nu}_i) = \sigma_\mu^2 \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^\top + \sigma_\nu^2 \text{diag} \left(\frac{1}{w_{i1}}, \dots, \frac{1}{w_{iT}} \right) = \Omega_i.$$

Kovariančná matica vektora \mathbf{y} je blokovo diagonálna s maticami Ω_i na diagonále a je tvaru

$$\Omega = \mathbb{I}_N \otimes \left[\sigma_\mu^2 \mathbb{I}_T + \sigma_\nu^2 \text{diag} \left(\frac{1}{w_{i1}}, \dots, \frac{1}{w_{iT}} \right) \right].$$

Odhad parametrov modelu $\alpha + \beta$ je tvaru

$$\widehat{\alpha + \beta} = (\mathbf{1}_{NT}^\top \Omega^{-1} \mathbf{1}_{NT})^{-1} \mathbf{1}_{NT}^\top \Omega^{-1} \mathbf{y}. \quad (2.19)$$

Inverz diagonálnych prvkov kovariančnej matice vektora odoziev \mathbf{y} bol vypočítaný pomocou Sherman-Morrisonovho vzorca uvedeného v článku [6]. Označme $\text{diag} (w_{i1}, \dots, w_{iT}) = I_D$. Pre všetky $i = 1, \dots, N$ platí

$$\Omega_i^{-1} = \frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D - \frac{\frac{\sigma_\mu^2}{(\sigma_\nu^2)^2} I_D \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^\top I_D}{1 + \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2} \sum_{t=1}^T w_{it}} = \frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D - \frac{\sigma_\mu^2 I_D \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^\top I_D}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it})}$$

a kovariančná matica vektora odozviev je potom tvaru

$$\Omega^{-1} = \mathbb{I}_N \otimes \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D - \frac{\frac{\sigma_\mu^2}{(\sigma_\nu^2)^2} I_D \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^\top I_D}{1 + \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2} \sum_{t=1}^T w_{it}} \right).$$

Vyjadrenie 2.19 postupne upravíme. Platí

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{NT}^\top \Omega^{-1} \mathbf{1}_{NT} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_T^\top \Omega_i^{-1} \mathbf{1}_T = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbf{1}_T^\top I_D \mathbf{1}_T - \frac{\sigma_\mu^2 \mathbf{1}_T^\top I_D \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^\top I_D \mathbf{1}_T}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it})} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sigma_\nu^2} - \frac{\sigma_\mu^2 (\sum_{t=1}^T w_{it})^2}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it})} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{NT}^\top \Omega^{-1} \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_T^\top \Omega_i^{-1} \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbf{1}_T^\top I_D - \frac{\sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it} \mathbf{1}_T^\top I_D}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it})} \right) \mathbf{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{1}_T^\top I_D}{\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it}} \right) \mathbf{y}_i \end{aligned}$$

a odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha + \beta} &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it}} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{1}_T^\top I_D}{\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it}} \right) \mathbf{y}_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it} y_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_{i,w}. \end{aligned}$$

2.2.3 Panelová verzia Regresného Hachemeistrovho modelu

Uvažujme Regresný Hachemeistrov model. V modeli 1.6 zvolíme $(1, \mathbf{x}_{it}^\top) = \mathbf{z}_{it}^\top = (1, t)$ pre všetky i a všetky t , čím získame model s lineárnym trendom. Upravený model je tvaru

$$y_{it} = (1, \mathbf{x}_{it}^\top) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \mathbf{z}_{it}^\top \boldsymbol{\mu}_i + \nu_{it} = \alpha + \beta t + \mu_{i0} + \mu_{i1}t + \nu_{it}. \quad (2.20)$$

Uvedomíme si, že $\alpha + \beta t$ predstavuje trend spoločný pre všetky rizikové triedy, $\mu_{i1}t$ špecifický trendový efekt i -tej rizikovej triedy.

Poznámka. Ďalej uvažujeme, že špecifické efekty $\boldsymbol{\mu}_i$ sú nezávislé, rovnako rozdelené a nezávislé na ν_{it} cez t , naviac

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\boldsymbol{\mu}_i) &= \mathbf{0} & \text{var}(\boldsymbol{\mu}_i) &= \mathbb{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} & \text{pre } i &= 1, \dots, N, \\ \mathbf{E}(\boldsymbol{\nu}_i) &= \mathbf{0} & \text{var}(\boldsymbol{\nu}_i) &= \sigma_\nu^2 \text{diag} \left(\frac{1}{w_{i1}}, \dots, \frac{1}{w_{iT}} \right) & \text{pre } i &= 1, \dots, N, \end{aligned}$$

ν_{it} sú nekorelované cez t .

Naším cieľom je získať odhad očakávaného úhrnu škôd pre budúce obdobie podmienené na rizikovom profile, ktorý je v tomto prípade reprezentovaný špecifickým efektom rizikovej triedy

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[y_{i,T+1} | \boldsymbol{\mu}_i] &= \mathbf{E}[\alpha + \beta(T+1) + \mu_{i0} + \mu_{i1}(T+1) + \nu_{i,T+1} | \boldsymbol{\mu}_i] \\ &= \alpha + \beta(T+1) + \mu_{i0} + \mu_{i1}(T+1). \end{aligned}$$

Podľa článku Frees a kol. [2] hľadáme najlepší lineárny nestranný prediktor úhrnu škôd. Hľadáme odhad vektora špecifických efektov danej rizikovej triedy $\boldsymbol{\mu}_i$ lineárny v minulých pozorovaniach s najmenšou strednou kvadratickou chybou. Riešime úlohu

$$\min \mathbf{E} \left[(\boldsymbol{\mu}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_i) (\boldsymbol{\mu}_i - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_i)^\top \right]. \quad (2.21)$$

V modeloch 2.2.1 a 2.1.2 sme uvažovali priemer pozorovaní a vážený priemer pozorovaní. Zvolíme dátovú kompresiu analogicky ako v 2.1.3

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} & \sum_{t=1}^T t w_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} & \sum_{t=1}^T t^2 w_{it} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} y_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} y_{it} \end{pmatrix} = \mathbb{W}_i^{-1} \bar{\mathbf{y}}_i. \quad (2.22)$$

Tvrdenie 12. Uvažujme model tvaru 2.20 a predpoklady uvedené v poznámke 2.2.3. Kredibilitný faktor je potom

$$\mathbb{B}_i = \frac{\det(\mathbb{D}\mathbb{W}_i) \mathbb{I}_2 + \sigma_\nu^2 \mathbb{D}\mathbb{W}_i}{\det(\mathbb{D}\mathbb{W}_i) + \sigma_\nu^4 + \sigma_\nu^2 \text{Tr}(\mathbb{D}\mathbb{W}_i)}$$

a najlepší lineárny nestranný odhad úhrnu škôd pre budúce obdobie je tvaru

$$\widehat{\mathbf{E}}[y_{i,T+1} | \boldsymbol{\mu}_i] = (1, T+1) (\mathbb{I}_2 - \mathbb{B}_i) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (1, T+1) \mathbb{B}_i \bar{\mathbf{y}}_i.$$

Dôkaz. Hľadaný odhad má byť požadovaného tvaru $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i = \mathbf{a}_i + \mathbb{B}_i \bar{\mathbf{y}}_i$ a chceme, aby platilo

$$\mathbb{E}[\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i] = \mathbf{a}_i + \mathbb{B}_i \mathbb{W}_i^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \sum_{t=1}^T w_{it} + \beta \sum_{t=1}^T t w_{it} \\ \alpha \sum_{t=1}^T t w_{it} + \beta \sum_{t=1}^T t^2 w_{it} \end{pmatrix} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\mu}_i] = \mathbf{0}.$$

Získavame

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\mu}}_i &= \mathbb{B}_i \mathbb{W}_i^{-1} \begin{pmatrix} \mu_{i0} \sum_{t=1}^T w_{it} - \mu_{i1} \sum_{t=1}^T t w_{it} + \sum_{t=1}^T w_{it} \nu_{it} \\ \mu_{i0} \sum_{t=1}^T t w_{it} - \mu_{i1} \sum_{t=1}^T t^2 w_{it} + \sum_{t=1}^T t w_{it} \nu_{it} \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{B}_i \mathbb{W}_i^{-1} \left(\mathbb{W}_i \boldsymbol{\mu}_i + \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} \nu_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} \nu_{it} \end{pmatrix} \right) = \mathbb{B}_i \mathbb{W}_i^{-1} \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Riešime upravenú úlohu

$$\min_{\mathbf{b}_i} \mathbb{E} \left[\left(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbb{B}_i \mathbb{W}_i^{-1} \mathbf{r} \right) \left(\boldsymbol{\mu}_i - \mathbb{B}_i \mathbb{W}_i^{-1} \mathbf{r} \right)^\top \right]$$

s riešením

$$\mathbb{B}_i = \text{cov} \left(\boldsymbol{\mu}_i, \mathbb{W}_i^{-1} \mathbf{r} \right) \text{var} \left(\mathbb{W}_i^{-1} \mathbf{r} \right)^{-1}.$$

Využitím predpokladov o nekorelovanosti ν_{it} cez t , $\mathbb{E}(\nu_{it}) = 0$ a nezávislosti $\boldsymbol{\mu}_i$ na ν_{it} dostaneme

$$\begin{aligned} \text{var} \left(\mathbb{W}_i^{-1} \mathbf{r} \right) &= \mathbb{W}_i^{-1} \text{var}(\mathbf{r}) \mathbb{W}_i^{-1} = \mathbb{W}_i^{-1} \left(\text{var}(\mathbb{W}_i \boldsymbol{\mu}_i) + \text{var} \left(\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} y_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} y_{it} \end{pmatrix} \right) \right) \mathbb{W}_i^{-1} \\ &= \mathbb{D} + \sigma_\nu^2 \mathbb{W}_i^{-1}, \end{aligned}$$

podobným postupom získame $\text{cov}(\boldsymbol{\mu}_i, \mathbb{W}_i^{-1} \mathbf{r}) = \mathbb{D}$. Riešenie minimalizačného problému je potom tvaru $\mathbb{B}_i = \mathbb{D} \left(\mathbb{D} + \sigma_\nu^2 \mathbb{W}_i^{-1} \right)^{-1}$. Toto vyjadrenie postupne upravíme. Platí

$$\left(\mathbb{D} + \sigma_\nu^2 \mathbb{W}_i^{-1} \right)^{-1} = \frac{1}{\det \left(\mathbb{D} + \sigma_\nu^2 \mathbb{W}_i^{-1} \right)} \text{adj} \left(\mathbb{D} + \sigma_\nu^2 \mathbb{W}_i^{-1} \right),$$

kde

$$\begin{aligned} \text{adj} \left(\mathbb{D} + \sigma_\nu^2 \mathbb{W}_i^{-1} \right) &= \begin{pmatrix} d_{22} + \frac{\sigma_\nu^2}{\det \mathbb{W}_i} \sum_{t=1}^T w_{it} & -d_{12} + \frac{\sigma_\nu^2}{\det \mathbb{W}_i} \sum_{t=1}^T t w_{it} \\ -d_{12} + \frac{\sigma_\nu^2}{\det \mathbb{W}_i} \sum_{t=1}^T t w_{it} & d_{11} + \frac{\sigma_\nu^2}{\det \mathbb{W}_i} \sum_{t=1}^T t^2 w_{it} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{22} & -d_{12} \\ -d_{12} & d_{11} \end{pmatrix} + \frac{\sigma_\nu^2}{\det \mathbb{W}_i} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} & \sum_{t=1}^T t w_{it} \\ \sum_{t=1}^T t w_{it} & \sum_{t=1}^T t^2 w_{it} \end{pmatrix} \\ &= \text{adj } D + \frac{\sigma_\nu^2}{\det \mathbb{W}_i} \mathbb{W}_i = \det(D) D^{-1} + \frac{\sigma_\nu^2}{\det \mathbb{W}_i} \mathbb{W}_i, \end{aligned}$$

$$\det \left(\mathbb{D} + \sigma_\nu^2 \mathbb{W}_i^{-1} \right) = \frac{\det(D \mathbb{W}_i) + \sigma_\nu^4 + \sigma_\nu^2 \text{Tr}(D \mathbb{W}_i)}{\det \mathbb{W}_i}.$$

Riešenie problému je potom

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_i &= \left(\det(D) \mathbb{I}_2 + \frac{\sigma_\nu^2}{\det \mathbb{W}_i} D \mathbb{W}_i \right) \frac{\det \mathbb{W}_i}{\det(D \mathbb{W}_i) + \sigma_\nu^4 + \sigma_\nu^2 \text{Tr}(D \mathbb{W}_i)} \\ &= \frac{\det(D \mathbb{W}_i) \mathbb{I}_2 + \sigma_\nu^2 D \mathbb{W}_i}{\det(D \mathbb{W}_i) + \sigma_\nu^4 + \sigma_\nu^2 \text{Tr}(D \mathbb{W}_i)}. \end{aligned}$$

Našli sme najlepší nestranný lineárny odhad vektora $\boldsymbol{\mu}_i$ a je tvaru

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}}_i = \mathbb{B}_i \mathbb{W}^{-1} \mathbf{r} = \frac{\det(\mathbb{D}\mathbb{W}_i) \mathbb{I}_2 + \sigma_\nu^2 \mathbb{D}\mathbb{W}_i}{\det(\mathbb{D}\mathbb{W}_i) + \sigma_\nu^4 + \sigma_\nu^2 \text{Tr}(\mathbb{D}\mathbb{W}_i)} \mathbb{W}^{-1} \left(\bar{\mathbf{y}}_i - \mathbb{W}_i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right),$$

očakávaný úhrn škôd za podmienky $\boldsymbol{\mu}_i$ pre budúce obdobie je potom

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{E}[y_{i,T+1} | \boldsymbol{\mu}_i]} &= (1, T+1) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (1, T+1) \left(\mathbb{B}_i \mathbb{W}^{-1} \bar{\mathbf{y}}_i - \mathbb{B}_i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right) \\ &= (1, T+1) (\mathbb{I}_2 - \mathbb{B}_i) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (1, T+1) \mathbb{B}_i \bar{\mathbf{y}}_i. \end{aligned}$$

Získali sme vážený priemer celkového priemeru a $\bar{\mathbf{y}}_i$ s kredibilitným faktorom \mathbb{B}_i , ktorý je riešením minimalizačnej úlohy 2.21 pre voľbu 2.22. \square

Ukážeme si, ako v prípade tohto modelu vyzerá odhad vektora parametrov $(\alpha, \beta)^\top$. S voľbou $(1, \mathbf{x}_{it}^\top) = \mathbf{z}_{it}^\top = (1, t)$ pre všetky i máme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}_{i1}^\top \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{x}_{iT}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{i1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{iT}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{i0} \\ \mu_{i1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu}_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{i0} \\ \mu_{i1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu}_i \\ &= \mathbb{T}_i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \mathbb{T}_i \begin{pmatrix} \mu_{i0} \\ \mu_{i1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\nu}_i \end{aligned}$$

a platí

$$\text{var}(\mathbf{y}_i) = \text{var} \left[\mathbb{T}_i \begin{pmatrix} \mu_{i0} \\ \mu_{i1} \end{pmatrix} \right] + \text{var}(\boldsymbol{\nu}_i) = \mathbb{T}_i \mathbb{D} \mathbb{T}_i^\top + \sigma_\nu^2 \text{diag} \left(\frac{1}{w_{i1}}, \dots, \frac{1}{w_{iT}} \right) = \Omega_i.$$

Kovariančná matica vektora \mathbf{y} je blokovo diagonálna s maticami Ω_i na diagonále a je tvaru $\Omega = \mathbb{I}_N \otimes \Omega_i$. Odhad metódou zobecnených najmenších štvorcov vektora parametrov $(\alpha, \beta)^\top$ je tvaru

$$\widehat{(\alpha, \beta)^\top} = (\mathbb{T}^\top \Omega^{-1} \mathbb{T})^{-1} \mathbb{T}^\top \Omega^{-1} \mathbf{y}. \quad (2.23)$$

Inverz diagonálnych prvkov matice Ω vypočítame pomocou Woodburyho maticovej identity, [7]. Pripomeňme značenie $\text{diag}(w_{i1}, \dots, w_{iT}) = I_D$. Pre všetky $i = 1, \dots, N$ platí

$$\begin{aligned} \Omega_i^{-1} &= \frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D - \frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D \mathbb{T}_i \left(\mathbb{D}^{-1} + \mathbb{T}_i^\top \frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D \mathbb{T}_i \right)^{-1} \mathbb{T}_i^\top \frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D \\ &= \frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D - \frac{1}{\sigma_\nu^4} I_D \mathbb{T}_i \left(\mathbb{D}^{-1} + \frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{W}_i \right)^{-1} \mathbb{T}_i^\top I_D \end{aligned}$$

a inverz kovariančnej matice vektora odoziev je potom

$$\Omega^{-1} = \mathbb{I}_N \otimes \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D - \frac{1}{\sigma_\nu^4} I_D \mathbb{T}_i \left(\mathbb{D}^{-1} + \frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{W}_i \right)^{-1} \mathbb{T}_i^\top I_D \right).$$

Vyjadrenie 2.23 postupne upravíme. Platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}^\top \Omega^{-1} \mathbb{T} &= \sum_{i=1}^N \mathbb{T}_i^\top \Omega_i^{-1} \mathbb{T}_i \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{T}_i^\top I_D \mathbb{T}_i - \frac{1}{\sigma_\nu^4} \mathbb{T}_i^\top I_D \mathbb{T}_i \left(\mathbb{D}^{-1} + \frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{W}_i \right)^{-1} \mathbb{T}_i^\top I_D \mathbb{T}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{W}_i - \frac{1}{\sigma_\nu^4} \mathbb{W}_i \left(\mathbb{D}^{-1} + \frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{W}_i \right)^{-1} \mathbb{W}_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\det(\mathbb{D}\mathbb{W}_i) \mathbb{I}_2 + \sigma_\nu^2 \mathbb{D}\mathbb{W}_i}{\det(\mathbb{D}\mathbb{W}_i) + \sigma_\nu^4 + \sigma^2 \text{Tr}(\mathbb{D}\mathbb{W}_i)} = \sum_{i=1}^N \mathbb{B}_i, \\
\mathbb{T}^\top \Omega^{-1} \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^N \mathbb{T}_i^\top \Omega_i^{-1} \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{T}_i^\top I_D - \frac{1}{\sigma_\nu^4} \mathbb{W}_i \left(\mathbb{D}^{-1} + \frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{W}_i \right)^{-1} \mathbb{T}_i^\top I_D \right) \mathbf{y}_i \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{B}_i \bar{\mathbf{y}}_i
\end{aligned}$$

a odtiaľ dostávame

$$\widehat{(\alpha, \beta)^\top} = \left(\sum_{i=1}^N \mathbb{B}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbb{B}_i \bar{\mathbf{y}}_i.$$

2.3 Odhady štrukturálnych parametrov

Kredibilitné odhady úhrnov škôd obsahujú vo vyjadreniach rozptyly špecifických efektov a chybových zložiek, takzvané štrukturálne parametre. Hodnoty týchto parametrov nepoznáme, je potrebné získať ich odhady. Ukážeme si metódu reziduálnej maximálnej vierohodnosti (*restricted maximum likelihood* alebo *residual maximum likelihood*), ktorá bola v tomto kontexte použitá v článku Frees a kol. [2]. Túto metódu následne použijeme v kapitole 3.

Uvažujme model jednosmernej chybovej zložky s náhodnými efektmi 1.1.2 a združenú normalitu špecifických efektov a chybových zložiek pre každý objekt. Pre každé $i = 1, \dots, N$ platí

$$\begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \vdots \\ \mu_{iT} \\ \nu_{i1} \\ \vdots \\ \nu_{iT} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma), \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{R}_i \end{pmatrix}.$$

Pre jednoduchosť uvažujeme značenie $\mathbb{X}_i = [\mathbf{1}_T \mathbb{X}_i]$ a $\boldsymbol{\beta} = [\alpha \boldsymbol{\beta}]^\top$. Vektor odoziev i -tého jednotlivca $\mathbf{y}_i = \mathbb{X}_i \boldsymbol{\beta} + \mathbb{Z}_i \boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\nu}_i$ sa skladá z deterministickej časti $\mathbb{X}_i \boldsymbol{\beta}$ a z lineárnej

kombinácie normálne rozdelených $(\boldsymbol{\mu}_i^\top, \boldsymbol{\nu}_i^\top)$. Platí

$$\mathbf{y}_i \sim \mathcal{N}(\mathbb{X}_i \boldsymbol{\beta}, \Omega_i(\boldsymbol{\tau})),$$

kde $\Omega_i(\boldsymbol{\tau}) = \text{var}(\mathbf{y}_i)$, $\boldsymbol{\tau}$ značí neznáme štrukturálne parametre. Pre celý vektor odoziev platí $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbb{X} \boldsymbol{\beta}, \Omega(\boldsymbol{\tau}))$.

Definujeme projekčnú maticu $\mathbb{Q} = \mathbb{I}_{NT} - \mathbb{X}(\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top$ a uvažujeme vektor reziduí odhadu metódou najmenších štvorcov $\mathbb{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbb{X}(\mathbb{X}^\top \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^\top \mathbf{y} = \mathbb{Q} \mathbb{Z} \boldsymbol{\mu} + \mathbb{Q} \boldsymbol{\nu}$. Takto transformovaný vektor odoziev nezávisí na parametroch $\boldsymbol{\beta}$.

Odhady $\boldsymbol{\tau}_{REML}$ metódou reziduálnej maximálnej vierohodnosti maximalizujú reziduálnu logaritmickú vierohodnosť

$$L_{REML}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}, \boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{2} \left[\log \det(\Omega(\boldsymbol{\tau})) + \log \det(\mathbb{X}^\top \Omega(\boldsymbol{\tau})^{-1} \mathbb{X}) + \underbrace{(\mathbf{y} - \mathbb{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS})^\top \Omega(\boldsymbol{\tau})^{-1} (\mathbf{y} - \mathbb{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS})}_{\text{súčet štvorcov chýb}} \right],$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$ značí odhad vektora parametrov $\boldsymbol{\beta}$. Platí $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$, [2]. Odvodenie reziduálnej logaritmickkej vierohodnosti sa nachádza v článku Frees a kol. [2].

Ukážeme si, aký tvar má reziduálna logaritmická vierohodnosť pre jednotlivé uvažované panelové verzie kredibilitných modelov. V prípade Jednoduchého Bühlmannovho kredibilitného modelu 2.2.1 je reziduálna logaritmická vierohodnosť tvaru

$$L_{REML,1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}, \boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{2} \left[N \log \left(\frac{\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 T}{\sigma_\nu^2} \right) + NT \log \sigma_\nu^2 + \log \left(\sum_{i=1}^N \frac{T}{\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 T} \right) + (\mathbf{y} - \mathbf{1}_{NT}(\widehat{\alpha + \beta}))^\top \Omega(\boldsymbol{\tau})^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1}_{NT}(\widehat{\alpha + \beta})) \right],$$

kde

$$(\widehat{\alpha + \beta}) = \left(\sum_{i=1}^N \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_i,$$

$$\Omega(\boldsymbol{\tau})^{-1} = \mathbb{I}_N \otimes \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{I}_T - \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2 (\sigma_\mu^2 T + \sigma_\nu^2)} \mathbb{J}_T \right).$$

V prípade Heteroskedastického modelu Bühlmann-Straub 2.1.2 získavame tvar

$$L_{REML,2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}, \boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{2} \left[N \log \det(\sigma_\mu^2 \mathbb{I}_T + \sigma_\nu^2 I_D) + \log \left(\sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sigma_\nu^2 + \sigma_\mu^2 \sum_{t=1}^T w_{it}} \right) + (\mathbf{y} - \mathbf{1}_{NT}(\widehat{\alpha + \beta}))^\top \Omega(\boldsymbol{\tau})^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1}_{NT}(\widehat{\alpha + \beta})) \right],$$

kde

$$\widehat{(\alpha + \beta)} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{T}{T + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_i,$$

$$\Omega(\boldsymbol{\tau})^{-1} = \mathbb{I}_N \otimes \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D - \frac{\frac{\sigma_\mu^2}{(\sigma_\nu^2)^2} I_D \mathbf{1}_T \mathbf{1}_T^\top I_D}{1 + \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\nu^2} \sum_{t=1}^T w_{it}} \right),$$

$$\widehat{\alpha + \beta} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \right)^{-1} \sum_{i=1}^N \frac{\sum_{t=1}^T w_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it} + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu^2}} \bar{y}_{i,w}$$

a $I_D = \text{diag}(w_{i1}, \dots, w_{iT})$. Nakoniec, v prípade Regresného Hachemeistrovho modelu 2.1.3 máme

$$\begin{aligned} L_{REML,3}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}, \boldsymbol{\tau}) = & -\frac{1}{2} \left[\log \det \Omega(\boldsymbol{\tau}) + \log \det \sum_{i=1}^N \mathbb{B}_i \right. \\ & \left. + \left(\mathbf{y} - \mathbb{T}(\widehat{\alpha, \beta})^\top \right)^\top \Omega(\boldsymbol{\tau})^{-1} \left(\mathbf{y} - \mathbb{T}(\widehat{\alpha, \beta})^\top \right) \right], \end{aligned}$$

kde

$$\Omega(\boldsymbol{\tau})^{-1} = \mathbb{I}_N \otimes \left(\frac{1}{\sigma_\nu^2} I_D - \frac{1}{\sigma_\nu^4} I_D \mathbb{T}_i \left(\mathbb{D}^{-1} + \frac{1}{\sigma_\nu^2} \mathbb{W}_i \right)^{-1} \mathbb{T}_i^\top I_D \right).$$

3 Numerická štúdia

Cielom kapitoly je ukážka aplikácie teórie odvodenej v kapitole 2. Kapitulu členíme na dve podkapitoly. Prvá je venovaná Regresnému Hachemeistrovmu modelu, druhá zas jednoduchšiemu Heteroskedastickému modelu Bühlmann-Straub.

3.1 Dáta Hachemeister

V tejto podkapitole si ukážeme praktickú aplikáciu teoretických poznatkov z kapitoly 2 na Hachemeistrových dátach, viz Hachemeister [8]. Na túto aplikáciu použijeme prostredie R [9]. Dáta sú dostupné v balíčku `actuar` [10]. Skrátenú podobu dát uvádzame v tabuľke 3.1.

State	Ratio 1	Ratio 2	...	Ratio 12	Weight 1	Weight 2	...	Weight 12
1	1738	1642	...	2517	7861	9251	...	9077
2	1364	1408	...	1471	1622	1742	...	1861
3	1759	1685	...	2059	1147	1357	...	1121
4	1223	1146	...	1306	407	396	...	342
5	1456	1499	...	1690	2902	3172	...	3425

Tabuľka 3.1 Dáta Hachemeister

Dáta obsahujú priemerné úhrny škôd, *Ratio 1* až *Ratio 12*, a príslušné počty škôd, *Weight 1* až *Weight 12*, v piatich štátoch USA v priebehu dvanástich štvrtrokov, medzi rokmi 1970 a 1973.

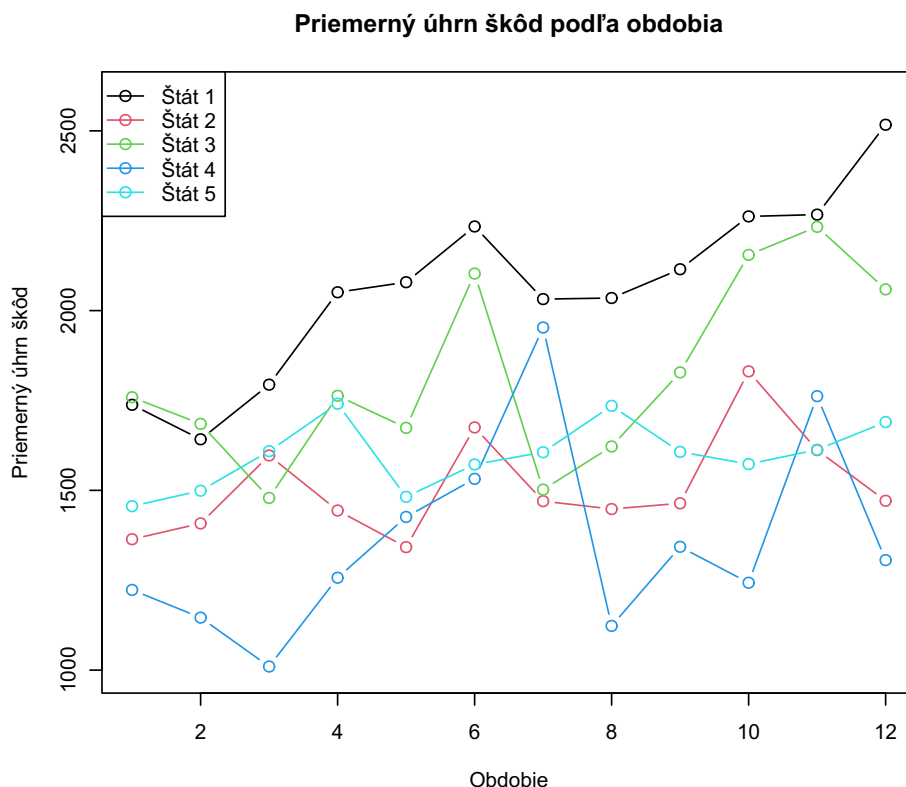
Pozrieme sa na základné popisné charakteristiky dostupných dát, uvádzame ich v tabuľke 3.2. Priemerné úhrny a priemerné počty pre jednotlivé štáty uvádzame v tabuľke 3.3. Vývin priemerných úhrnov škôd sme graficky zobrazili na obrázku 3.1, vývin počtu škôd sme graficky zobrazili na obrázku 3.2. Priemerné úhrny škôd a počty škôd sa pre jednotlivé štáty výrazne líšia. Všimnime si rastúci trend priemerného úhrnu škôd na obrázku 3.1.

Premenná	Min	Dolný kvar.	Str. hodnota	Medián	Horný kvar.	Max
<i>Ratio</i>	1010	1462	1671	1612	1829	2517
<i>Weight</i>	287	1058	2901	1622	3190	9456

Tabuľka 3.2 Popisné charakteristiky dát Hachemeister

Štát	Priemerný úhrn	Priemerný počet úhrnov
1	2022.636	7897.846
2	1514.091	1643.539
3	1800.273	1214.923
4	1365.273	419.846
5	1590.273	2907.692

Tabuľka 3.3 Priemerné úhrny a priemerné počty škôd

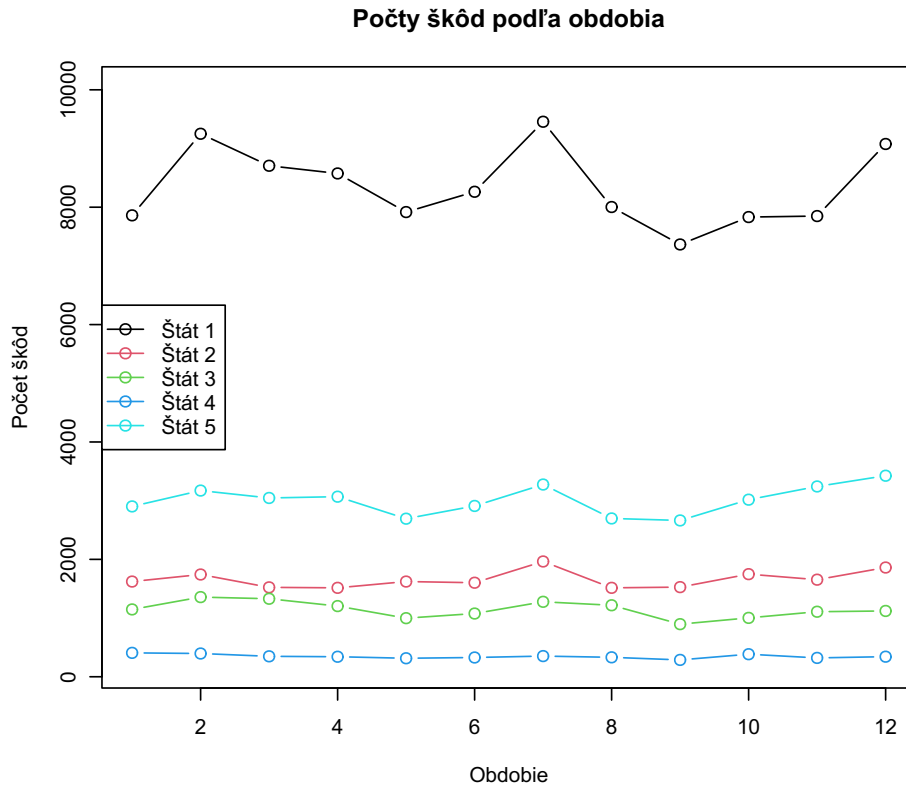


Obr. 3.1 Grafické znázornenie vývinu priemerného úhrnu škôd

Cielom je modelovať priemerný úhrn škôd pre budúci štvrťrok v jednotlivých štátoch. K dispozícii máme priemerné úhrny za minulé štvrťroky. Uvažovaná odozva, priemerný úhrn škôd, preukazuje systematický trend. Zároveň vnímame výrazné rozdiely medzi jednotlivými štátmi. Je preto prirodzené uvažovať regresný model s lineárnym trendom a špecifické trendové efekty pre jednotlivé štáty, rovnako ako v článku Frees et al. [2]. Uvažujme regresný Hachemeistrov model s lineárnym trendom 2.1.3. Ukážeme si niekoľko možností odhadu so základným rozlíšením na kredibilitný model a panelové modely.

3.1.1 Odhad kredibilitného Hachemeistrovho modelu

Model uvedený v záverečnej poznámke v podkapitole 2.1.3 odhadneme ako kredibilitný model využitím balíčka [10]. Pripomeňme značenie zavedené v podkapitole 2.1.3.



Obr. 3.2 Grafické znázornenie vývinu počtu škôd

Získavame odhady štrukturálnych parametrov. Odhad kolektívneho poistného

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1468,775 \\ 32,049 \end{pmatrix},$$

odhad strednej hodnoty rozptylov rizikových tried (*within-class variance*)

$$\widehat{E(\sigma^2(\Theta_i))} = 49870187,$$

odhad matice \mathbb{K} (*between-class variance*)

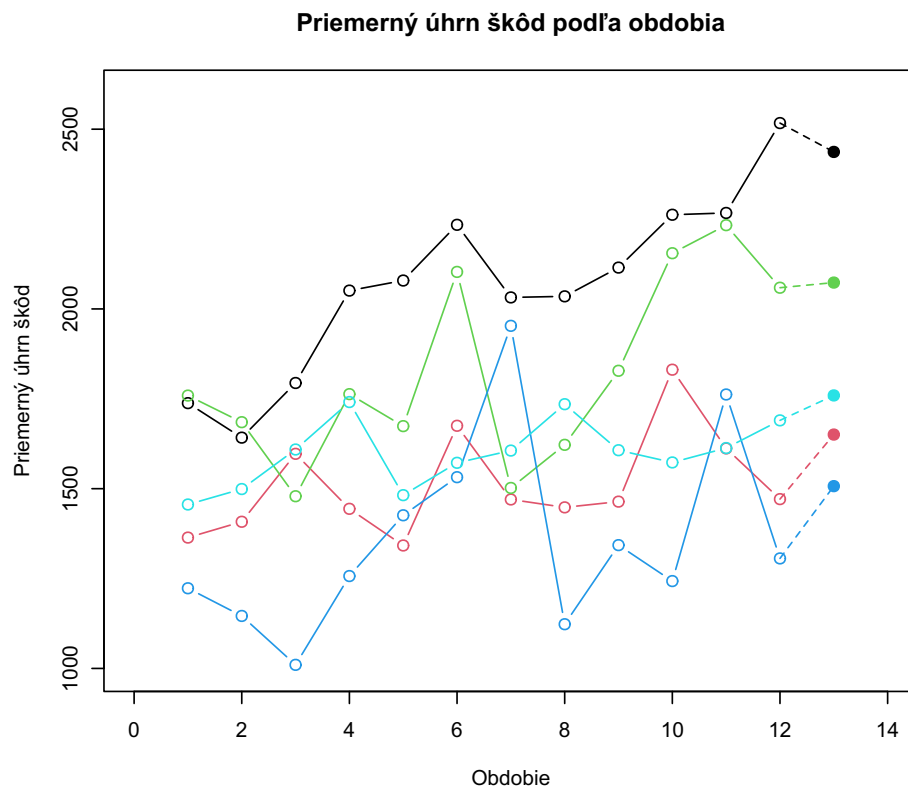
$$\hat{\mathbb{K}} = \widehat{\text{cov}(\beta(\Theta_i), \beta(\Theta_i)^\top)} = \begin{pmatrix} 24154,175 & 2699,975 \\ 2699,975 & 301,806 \end{pmatrix}.$$

Matica *between-class variance* vyjadruje, ako sa zložky parametra $\beta(\Theta_i)$, intercept a trend, líšia medzi rizikovými triedami, pripomeňme 2.13.

V nasledujúcej tabuľke pre jednotlivé štáty uvádzame individuálne odhady B_i , matice kredibilitných faktorov A_i , upravené koeficienty a kredibilitné odhady (predikcie) $\mathbb{Y}_i \widehat{\beta}(\Theta_i)$. Pod pojmom upravené koeficienty rozumieme odhad kolektívneho poistného upravený o odhad špecifického efektu štátu, teda $\hat{\beta} + \hat{\mu}_i$. Kredibilitné odhady pre budúce obdobie sú zobrazené na obrázku 3.3.

Štát	Individ. odhady \mathbb{B}_i	Kred. matica \mathbb{A}_i	Upravené koef.	Predikcia	
1	16 581,472 62,392	0,549 0,061	3,972 0,444	1693,523 57,171	2436,752
2	1398,303 17,140	0,531 0,059	3,912 0,437	1373,030 21,346	1650,533
3	1533,000 43,307	0,532 0,059	3,770 0,421	1545,364 40,610	2073,296
4	1176,704 27,807	0,478 0,053	3,421 0,382	1314,549 14,809	1507,070
5	1521,899 11,874	0,539 0,060	3,965 0,443	1417,409 26,307	1759,403

Tabuľka 3.4 Odhady kredibilitného Hachemeistrovho modelu s lineárnym trendom



Obr. 3.3 Kredibilitné odhady

3.1.2 Odhad modelu panelových dát

Dáta si upravíme do formátu uvedeného v tabuľke 3.5.

Priemerný úhrn	Obdobie	Štát	Váha
1738	1	1	7861
1642	2	1	9251
1794	3	1	8706
⋮	⋮	⋮	⋮
1364	1	2	1622
⋮	⋮	⋮	⋮
1690	12	5	3425

Tabuľka 3.5 Dáta Hachemeister po úprave

Uvažujme panelovú verziu Regresného Hachemeistrovho modelu s lineárnym trendom 2.20. Model odhadujeme ako lineárny zmiešaný model, [2], prostredníctvom balíčka `lme4` [11] a `glmmTMB` [12] v prostredí R [9]. Balíčky sme zvolili z dôvodu možnosti modifikácie nastavení odhadu modelu.

Okrem odhadu parametrov samotného modelu potrebujeme získať odhady rozptylových zložiek $\text{var}(\boldsymbol{\mu}_i) = \mathbb{D}$ a $\text{var}(\nu_{it}) = \sigma_\nu^2$, ktoré vystupujú v kredibilitnom faktore, pripomeňme podkapitolu 2.3. Na odhad rozptylových zložiek používame metódu maximálnej vierohodnosti (*maximum likelihood*) a reziduálnej maximálnej vierohodnosti (*restricted maximum likelihood* alebo *residual maximum likelihood*). Vierohodnostnú funkciu maximalizujeme iteratívne. Porovnávame odhad získaný predvolenou iteračnou metódou a inými možnými voľbami, konkrétne metódou *Nelder-Mead* a *BFGS*. Počiatočné hodnoty týchto iteratívnych algoritmov odhadujeme Swamyho momentovým odhadom, Frees et al. [2, str. 238] alebo predvolenými nastaveniami. Zároveň sa vyskúšame obmedziť na pozitívne definitné odhady matice \mathbb{D} pomocou [12], kde sa aplikuje Choleského rozklad korelačnej matice. Kombinácie všetkých možností medzi sebou porovnáme.

Pre jednotlivé štáty sme vypočítali vektory 2.22

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it} & \sum_{t=1}^T tw_{it} \\ \sum_{t=1}^T tw_{it} & \sum_{t=1}^T t^2w_{it} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T w_{it}y_{it} \\ \sum_{t=1}^T tw_{it}y_{it} \end{pmatrix} = \mathbb{W}_i^{-1}\bar{\mathbf{y}}_i.$$

pomocou balíčka *tidyverse* [13]. Hodnoty uvádzame v tabuľke 3.6.

Štát	1	2	3	4	5
$\bar{\mathbf{y}}_i$	$\begin{pmatrix} 1658 \\ 62,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1398 \\ 17,1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1533 \\ 43,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1177 \\ 27,8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1522 \\ 11,9 \end{pmatrix}$

Tabuľka 3.6 Hodnoty $\bar{\mathbf{y}}_i$ pre jednotlivé štáty

V tabuľkách 3.7 a 3.8 uvádzame niektoré výsledky odhadov modelu získané rôznymi

kombináciami nastavení, ktoré sme pre jednoduchosť označili štyrmi písmenami. Prvé písmeno značí použitie reziduálnej alebo klasickej maximálnej vierohodnosti (r alebo m), druhé písmeno značí použitie predvoleného iteratívneho algoritmu alebo inej voľby (d alebo i), tretie písmeno značí použitie predvoleného nastavenia pre počiatočné hodnoty alebo Swamyho momentový odhad (d alebo s) a štvrté písmeno značí, či sme požadovali, aby bol odhad matice \mathbb{D} pozitívne definitný (y alebo n).

Nastavenie	Kol. poistné	Špecifické efekty pre jednotlivé štáty				
		1	2	3	4	5
<i>rddn</i>	1 499,230	162,780	-69,148	55,736	-111,112	-38,256
	27,960	33,629	-14,285	11,515	-22,955	-7,903
<i>rddy</i>	1 457,713	200,763	-59,427	75,292	-280,787	64,158
	32,499	29,893	-15,357	10,807	-4,721	-20,621
<i>ridn</i>	1 501,310	158,678	-67,540	54,116	-107,713	-37,542
	27,750	34,090	-14,510	11,626	-23,140	-8,065
<i>ridy</i>	1 457,709	200,767	-59,422	75,297	-280,807	64,165
	32,500	29,892	-15,358	10,806	-4,719	-20,622
<i>rdsn</i>	1 489,430	182,087	-76,661	63,436	-127,360	-41,502
	29,980	31,407	13,223	10,942	-21,968	-7,158
<i>rdsy</i>	1 489,430	182,087	-76,661	63,436	-127,360	-41,502
	29,980	31,407	13,223	10,942	-21,968	-7,158
<i>risn</i>	1 501,330	158,638	-67,522	54,103	-107,688	-37,532
	27,750	34,095	-14,512	11,628	-23,145	-8,067
<i>risy</i>	1 457,709	200,767	-59,422	75,297	-280,807	64,165
	32,500	29,892	-15,358	10,806	-4,719	-20,622

Tabuľka 3.7 Kolektívne poistné a špecifické efekty

Nastavenie	Predikcia pre budúce obdobie				
	1	2	3	4	5
<i>rddn</i>	2462,670	1607,851	2068,136	1453,183	1721,710
<i>rddy</i>	2469,571	1621,135	2095,985	1538,038	1676,290
<i>ridn</i>	2463,922	1605,911	2067,331	1453,541	1719,689
<i>ridy</i>	2469,571	1621,134	2095,985	1538,054	1676,288
<i>rdsn</i>	2456,486	1617,548	2071,785	1453,165	1731,545
<i>rdsy</i>	2456,486	1617,548	2071,785	1453,165	1731,545
<i>risn</i>	2463,938	1605,883	2067,330	1453,492	1719,665
<i>risy</i>	2469,571	1621,134	2095,985	1538,054	1676,288

Tabuľka 3.8 Predikcie pre budúce obdobie

Medzi jednotlivými nastaveniami vnímame rozdiely, najmä v odhadoch špecifických efektov jednotlivcov. Hodnoty sa však opakujú. Výstupy zaokrúhlené na tri desatinné miesta sú identické v prípade nastavení *ridy* a *risy*, zmena nastavenia počiatočných hodnôt odhady nezmenila, podobné hodnoty sme získali nastavením *rddy*. Podobné výstupy sme získali aj s nastaveniami *ridn* a *risn*, v tomto prípade taktiež zmena nastavenia

počiatočných hodnôt odhady nezmenila. V prípade nastavení *rdsn* a *rdsy* je výstup identický, v tomto prípade podmienky kladené na odhad matice \mathbb{D} výsledok nezmenili.

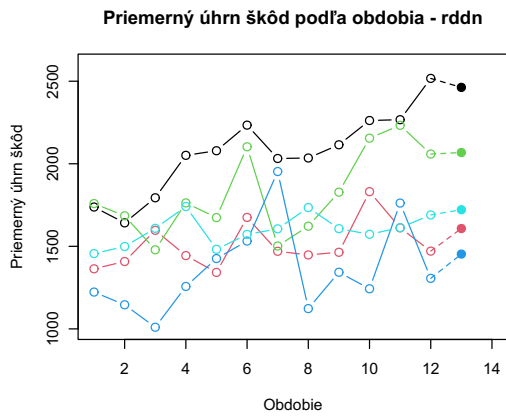
Odhady rozptylovej matice špecifických efektov $\hat{\mathbb{D}}$ a odhady σ_v^2 pre jednotlivé kombinácie nastavení uvádzame tabuľke 3.9.

Nastavenie	$\hat{\mathbb{D}}$		Odhad σ_v^2
<i>rddn</i>	13 240 2 734,738	2 734,738 564,9	$4,744 \cdot 10^7$
<i>rddy</i>	33 124,1 1 947,691	1 947,691 423,7	14 327,5
<i>ridn</i>	11 982 2 574,499	2 574,499 553	$4,76 \cdot 10^7$
<i>ridy</i>	37 505 2 141,957	2 141,957 452,3	14 327,6
<i>rdsn</i>	21 300 3 673,31	3 673,31 $6,337 \cdot 10^7$	$4,683 \cdot 10^7$
<i>rdsy</i>	21 300 3 673,31	3 673,31 $6,337 \cdot 10^7$	$4,683 \cdot 10^7$
<i>risn</i>	11 980 2 574,264	2 574,264 553,4	$4,760 \cdot 10^7$
<i>risy</i>	37 505 2 141,957	2 141,957 452,3	14 327,6

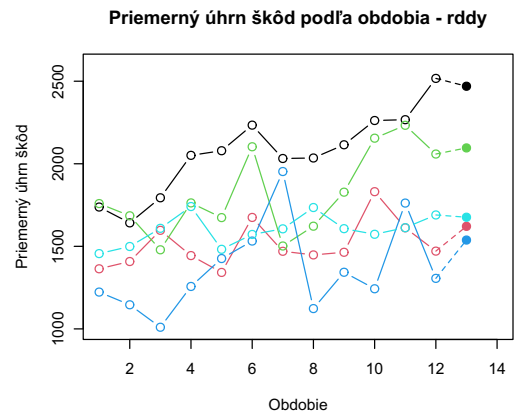
Tabuľka 3.9 Odhady kovariančnej matice $\hat{\mathbb{D}}$ a σ_v^2 pre dáta Hachemeister

V prípadoch, keď sme od odhadu matice $\hat{\mathbb{D}}$ nepožadovali pozitívnu definitnosť, sú výstupy odhadu modelu získané metódou maximálnej vierohodnosti zhodné s výstupmi odhadu toho istého modelu získanými metódou reziduálnej maximálnej vierohodnosti. Ak sme pozitívnu definitnosť požadovali, odhady modelu získané metódou maximálnej vierohodnosti ani v jednom prípade nekonvergovali, Hessián nebol pozitívne definitný. V prípade modelov *ridn*, *rdsn* a ich verzií získaných metódou maximálnej vierohodnosti je $\hat{\mathbb{D}}$ pozitívne definitná matica, aj keď sme to pri odhade modelu nepožadovali.

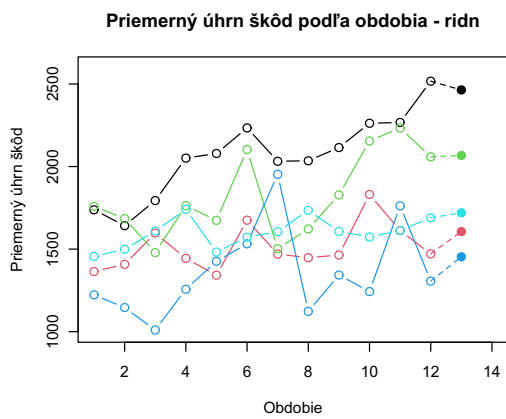
Predikcie pre jednotlivé kombinácie nastavení sú graficky znázornené na obrázkoch 3.4 a 3.5. Výrazné rozdiely medzi nastaveniami nevnímame, hodnoty predikcií sú veľmi blízke. Všimnime si však výrazne podobné hodnoty predikcií pri nastaveniach, kde sme požadovali pozitívnu definitnosť $\hat{\mathbb{D}}$ a kde nie. Iné nastavenia nemajú na hodnotu predikcií zásadný vplyv.



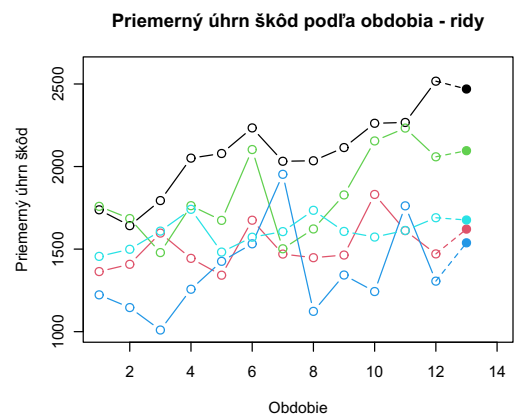
(a) Predikcie - rddn



(b) Predikcie - rddy

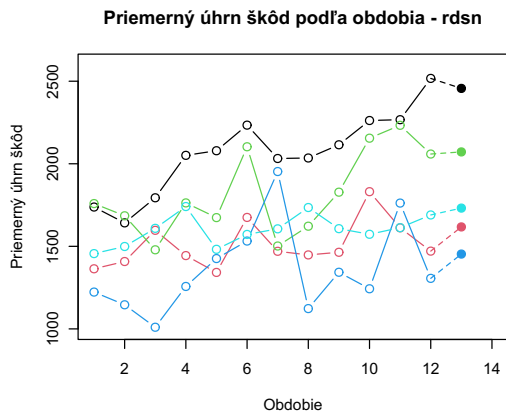


(c) Predikcie - ridn

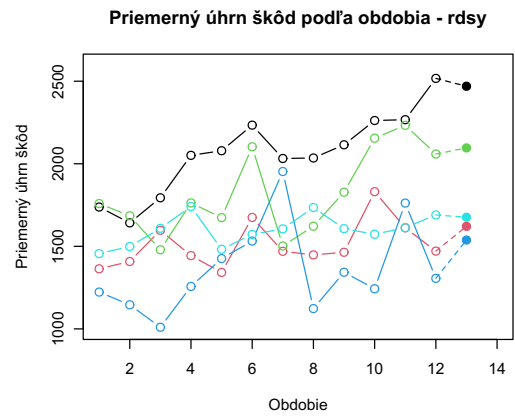


(d) Predikcie - ridy

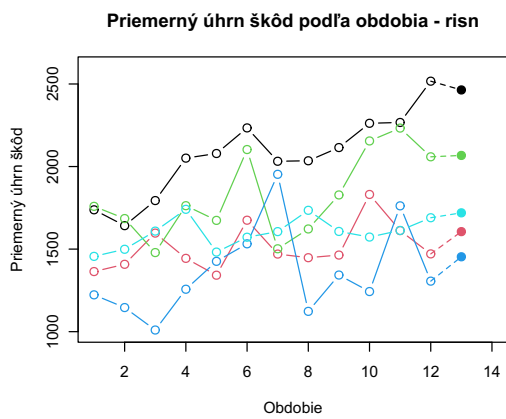
Obr. 3.4 Predikcie pre budúce obdobie



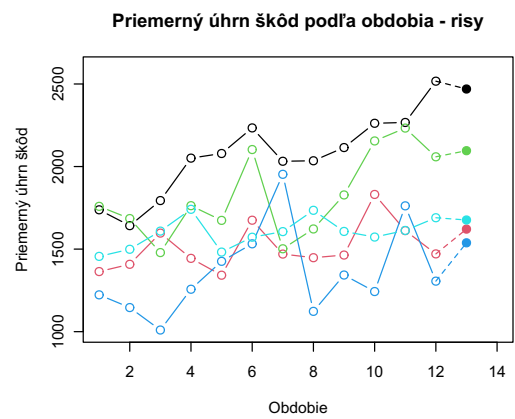
(a) Predikcie - rdsn



(b) Predikcie - rdsy



(c) Predikcie - risn



(d) Predikcie - risy

Obr. 3.5 Predikcie pre budúce obdobie

Zaujímalo nás porovnanie časovej náročnosti jednotlivých možností. Na porovnanie časovej náročnosti sme použili balíček *microbenchmark* [14]. Výsledky boli vždy získané zo sto odhadov modelu a sú uvedené v tabuľke 3.10 v milisekundách. V tabuľke uvádzame časovú náročnosť len pre nastavenia, pre ktoré odhady modelu konvergovali. Odhad kredibilitného modelu v porovnaní s predvoleným nastavením *rddn* odhadu ako modelu panelových dát je výrazne rýchlejší. Ak však zmeníme nastavenia, výrazne rýchlejší sa stáva odhad modelu panelových dát.

Metóda	Min	Dolný kvar.	Str. hodnota	Medián	Horný kvar.	Max
kred. m.	6,86	7,14	7,85	7,34	7,86	14,71
<i>rddn</i>	13,12	14,44	17,17	15,16	16,69	51,41
<i>mddn</i>	0	0	$8,6 \cdot 10^{-5}$	0	10^{-4}	$42 \cdot 10^{-4}$
<i>rddy</i>	0	0	$10,2 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	10^{-4}	$43 \cdot 10^{-4}$
<i>ridn</i>	0	0	$6,9 \cdot 10^{-5}$	0	10^{-4}	$32 \cdot 10^{-4}$
<i>midn</i>	0	0	$4,6 \cdot 10^{-5}$	0	0	$39 \cdot 10^{-4}$
<i>ridy</i>	0	0	$6,4 \cdot 10^{-5}$	0	0	$54 \cdot 10^{-4}$
<i>rdsn</i>	0	0	$6,5 \cdot 10^{-5}$	0	10^{-4}	$33 \cdot 10^{-4}$
<i>mdsn</i>	0	0	$4,5 \cdot 10^{-5}$	0	10^{-4}	$32 \cdot 10^{-4}$
<i>rdsy</i>	0	0	$7,2 \cdot 10^{-5}$	0	10^{-4}	$46 \cdot 10^{-4}$
<i>risn</i>	0	0	$7,7 \cdot 10^{-5}$	0	10^{-4}	$37 \cdot 10^{-4}$
<i>misn</i>	0	0	$7,1 \cdot 10^{-5}$	0	10^{-4}	$36 \cdot 10^{-4}$
<i>risy</i>	0	0	$10,2 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	10^{-4}	$35 \cdot 10^{-4}$

Tabuľka 3.10 Časová náročnosť jednotlivých nastavení v milisekundách

3.2 Worker's compensation data

V tejto časti záverečnej kapitoly budeme pracovať s dátami *Worker's compensation data* z knihy Klugman [15], s rovnakými dátami pracujú v článku Frees et al. [16]. Dáta sme získali kontaktovaním S. Klugmana.

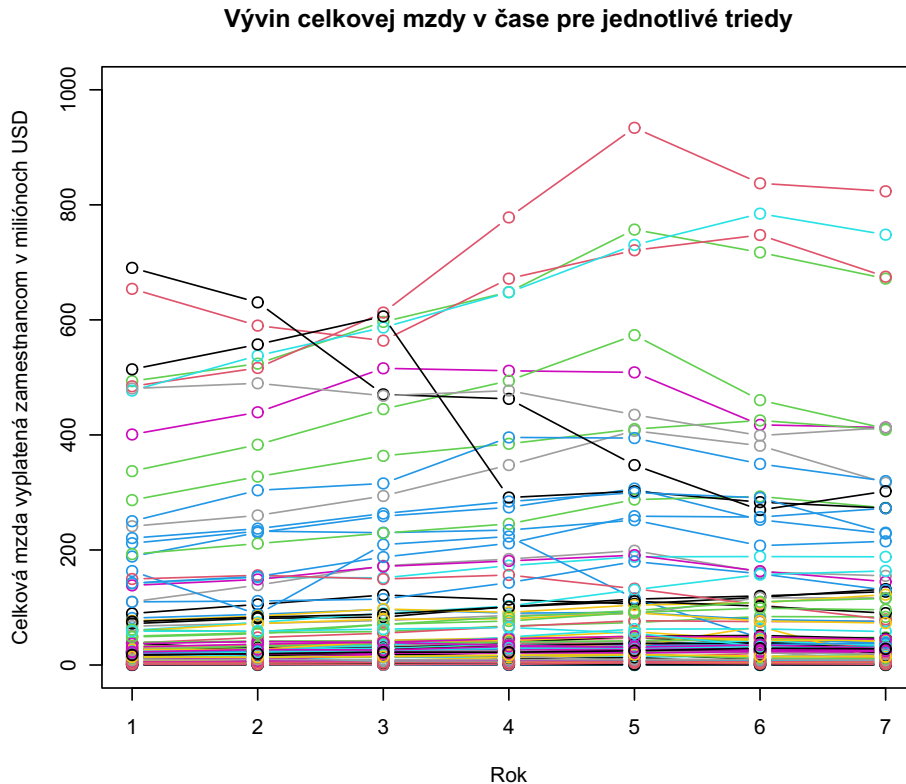
K dispozícii máme celkovú hodnotu miezd v dolároch vyplatených spoločnosťami v jednotlivých rizikových triedach zamestnancom (*payroll*) a celkovú hodnotu strát (*loss*), ktoré plynuli z celkovej alebo čiastočnej neschopnosti, rovnako v dolároch. Uvažujeme celkom 121 rizikových tried a 7 časových období, rokov. Cieľom je modelovať pomer *loss* a *payroll*, teda straty na dolár vyplatených miezd, značíme *PP*. Premenná *payroll* je jednotka objemu, vzhľadom ku ktorej sme normovali premennú *loss*. Premennú *payroll* považujeme za váhu. Pozorovania, pre ktoré je *Payroll* rovné 0, sú celkom 2 a nachádzajú sa v rovnakej rizikovej triede. Ak by sme odstránili len tieto pozorovania, pre danú rizikovú triedu by sme nemali kompletnú časovú radu, odstránime preto celú rizikovú triedu. V článku [16] odstránili aj pozorovania, pre ktoré je *Loss* rovné 0, celkom 63 pozorovaní, a ponechali aj triedy s chýbajúcimi pozorovaniami. My sme sa rozhodli tieto pozorovania ponechať. Ich odstránením by sme rovnako spôsobili nerovný počet pozorovaní v jednotlivých triedach a následné vynechanie veľkého množstva rizikových tried.

Na obrázkoch 3.6, 3.7 a 3.8 môžeme vidieť vývin premenných *payroll*, *loss* a *PP* pre jednotlivé štáty. Základné popisné charakteristiky uvádzame v tabuľke 3.11. Je dôležité všimnúť si výrazné rozdiely v odozve jednotlivých rizikových tried. V porovnaní s obrázkom 3.1 zobrazujúcim vývin odozvy pre dáta Hachemeister však nevidíme žiaden trend. Vysoké hodnoty váh *payroll* v porovnaní s hodnotami odozvy *PP* predstavovali v niektorých prípadoch pri odhade modelu problém s konvergenciou. Z tohto dôvodu sme váhy *payroll* do modelu vkladali vydelené 10^6 . V prípadoch, v ktorých bolo možné model odhadnúť aj s pôvodnými váhami, boli výstupy identické. Od tohto momentu uvažujeme modifikované váhy.

Premenná	Min	Dolný kvar.	Str. hodnota	Medián	Horný kvar.
<i>Payroll</i>	$6,625 \cdot 10^3$	$9,275 \cdot 10^6$	$1,807 \cdot 10^8$	$3,132 \cdot 10^7$	$1,048 \cdot 10^8$
<i>Loss</i>	0	128983	1556128	439343	1632857
<i>PP</i>	0	0,006	0,018	0,013	0,023

Premenná	Max
<i>Payroll</i>	$6,137 \cdot 10^9$
<i>Loss</i>	22540025
<i>PP</i>	0.369095

Tabuľka 3.11 Popisné charakteristiky dát Klugman [15]



Obr. 3.6 Celková hodnota mzdy (*payroll*)

3.2.1 Odhad kredibilitného modelu

Model odhadneme ako kredibilitný model pomocou balíčka [10]. Vzhľadom na chýbajúci trend v odozve PP a uvažované váhy, je prirodzenejšie odhadnúť model ako Heteroskedastický model Bühlmann-Straub 2.1.2. Dáta prevedieme do formátu, v akom sme mali aj dáta Hachemeister, 3.1.

Získavame odhady štrukturálnych parametrov, odhad kolektívneho poistného

$$\widehat{\mu}_0 = \overline{E[\mu(\Theta_i)]} = 0,017,$$

odhad strednej hodnoty rozptylov rizikových tried (*within-class variance*)

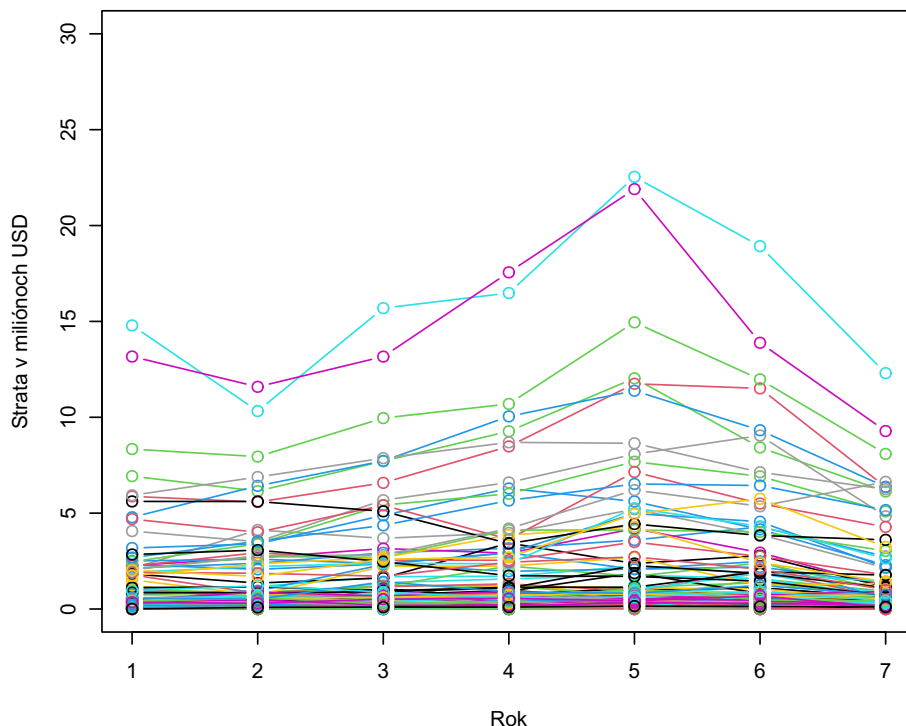
$$\overline{E[\sigma^2(\Theta_i)]} = 8,024 \cdot 10^{-5},$$

odhad rozptylu stredných hodnôt medzi jednotlivými rizikovými triedami (*between-class variance*)

$$\overline{\text{var}[\mu(\Theta_i)]} = 0,003.$$

Stredná hodnota rozptylov rizikových tried *within-class variance* vyjadruje náhodnú fluktuáciu okolo strednej hodnoty $\mu(\Theta_i)$. Hodnota *between-class variance* vyjadruje rozdielnosť jednotlivých rizikových tried. V rámci nášho odhadnutého modelu plynie vyššia variabilita z *between-class variance*, teda z rozdielov medzi jednotlivými rizikovými triedami.

Vývin straty v čase pre jednotlivé triedy



Obr. 3.7 Celková strata (*loss*)

V tabuľke 3.12 uvádzame individuálne odhady

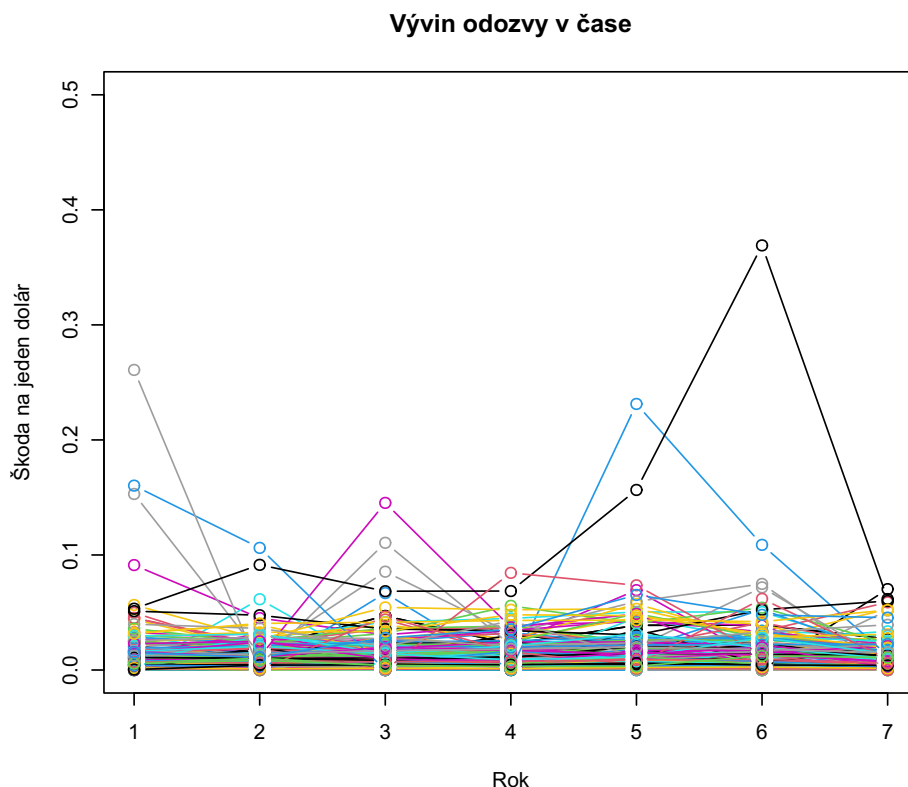
$$X_i = \frac{\sum_{t=1}^T w_{it} X_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it}},$$

celkové váhy $\sum_{t=1}^T w_{it}$, kredibilitné faktory b_i a kredibilitné odhady (predikcie). Vzhľadom na vysoký počet rizikových tried uvádzame v tabuľke výsledky len pre niektoré vybrané triedy.

Trieda	X_i	$\sum_{t=1}^T w_{it}$	b_i	Kred. odhad
1	0,032	168,237	0,843	0,029
12	0,013	1 583,447	0,981	0,013
73	0,011	4,327	0,122	0,016
98	0,007	4 623,400	0,993	0,008
124	0,037	32,948	0,513	0,027

Tabuľka 3.12 Odhady Heteroskedastického modelu Bühlmann-Straub pre dáta Klugman

Je dôležité všimnúť si výrazné rozdiely v odhadoch kredibilitných faktorov jednotlivých rizikových tried b_i . Pripomeňme kredibilitný odhad 2.9. V prípade rizikovej triedy 73 je váha prislúchajúca informácii pochádzajúcej zo všetkých dostupných dát v podobe μ_0 výrazne vyššia ako váha prislúchajúca informácii pochádzajúcej z dát len v tejto triede X_i . Naopak je to napríklad v rizikovej triede 98. Kredibilitné odhady (predikcie) pre vybrané rizikové triedy sú graficky znázornené na obrázku 3.9.



Obr. 3.8 Vývin odozvy (*PP*)

3.2.2 Odhad modelu panelových dát

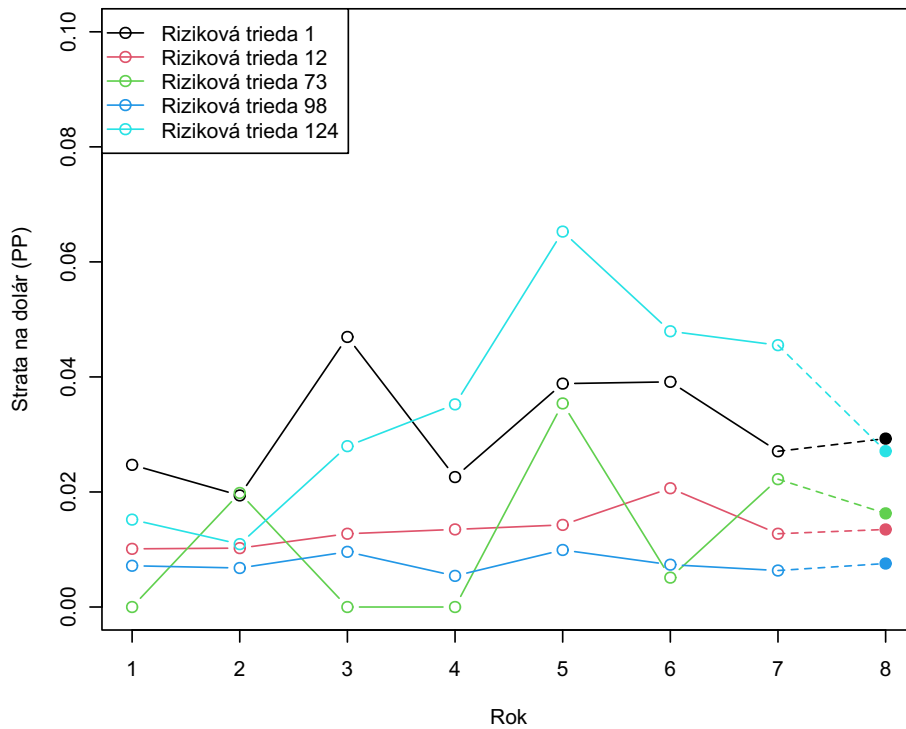
Napriek tomu, že vo vývine odozvy 3.8 nevidíme žiaden očividný trend, model sme skúsili odhadnúť ako model panelových dát viacerými možnosťami. Odhady modelov sme porovnávali z hľadiska hodnoty logaritmickej vierohodnosti, grafického zobrazenia vzťahu rezidií a odhadnutých hodnôt a taktiež zložitosti modelu. Hodnoty logaritmickej vierohodnosti a grafické zobrazenie vzťahu rezidií a odhadnutých hodnôt v tejto práci neuvádzame, sú dostupné v súbore uvedenom v prílohe A.3. Model sme odhadli ako Heteroskedastický model Bühlmann-Straub, Regresný Hachemeistrov model s lineárnym trendom a Regresný Hachemeistrov model s voľbou $\mathbf{x}_{it}^\top = 1$, $\mathbf{z}_{it}^\top = (1, t)$. Vo všetkých prípadoch boli hodnoty logaritmickej vierohodnosti veľmi blízke, grafické zobrazenie vzťahu rezidií a odhadnutých hodnôt bolo taktiež veľmi podobné, v žiadnom v spomínaných prípadoch nevnímame výrazné zlepšenie.

Vzhľadom na vývin odozvy 3.8 a záujem uvažovať čo najjednoduchší model, uvažujme panelovú verziu Heteroskedastického modelu Bühlmann-Straub 2.2.2. Pripomeňme vážený priemer pozorovaní

$$\bar{y}_{i,w} = \frac{\sum_{t=1}^T w_{it} y_{it}}{\sum_{t=1}^T w_{it}}.$$

Hodnoty váženého priemeru pre vybrané rizikové triedy uvádzame v tabuľke 3.13.

Strata na dolár vyplatenj mzdy (PP)



Obr. 3.9 Kredibilitné odhady pre dáta Klugman

Trieda	1	12	73	98	124
$\bar{y}_{i,w}$	0,032	0,013	0,011	0,007	0,037

Tabuľka 3.13 Hodnoty $\bar{y}_{i,w}$ pre vybrané rizikové triedy

Pri odhade modelu podobne ako v podkapitole 3.1 porovnáme rôzne dostupné možnosti nastavení. Použijeme metódu maximálnej vierohodnosti a metódu reziduálnej maximálnej vierohodnosti. Za zmienku stojí, že v tomto prípade bol vo výstupoch rozdiel. Podobne sme porovnávali výstupy získané ponechaním prednastavenej iteračnej metódy a voľby metódy *Nelder-Mead*. Táto zmena nastavenie nespôsobila rozdiel v odhadoch špecifických efektov jednotlivých tried. Počiatočné hodnoty iteratívnych algoritmov sme odhadovali Swamyho momentovým odhadom alebo sme ponechali predvolené nastavenie. Odhady špecifických efektov vybraných rizikových tried uvádzame v tabuľke 3.14. Kredibilitné odhady pre budúce obdobie sú po zaokrúhlení na 3 desatinné miesta pre uvažované kombinácie nastavení zhodné. Hodnoty odhadov (predikcií) pre vybrané rizikové triedy uvádzame v tabuľke 3.15. Grafické porovnanie predikcií neuvádzame. Odhady rozptylu špecifických efektov $\text{var}(\mu_i) = \sigma_\mu^2$ a odhad $\text{var}(\nu_{it}) = \sigma_\nu^2$ pre jednotlivé kombinácie nastavení uvádzame v tabuľke 3.16. Zmena iteračnej metódy ani nastavenie počiatočných hodnôt odhady nezmenili. Pri zmene metódy maximálnej vierohodnosti na metódu reziduálnej maximálnej vierohodnosti získavame mierne odlišné odhady.

Nastavenie	Špecifické efekty vybraných tried				
	1	12	73	98	124
<i>mdd</i>	$1,257 \cdot 10^{-2}$	$-3,702 \cdot 10^{-3}$	$-8,900 \cdot 10^{-4}$	$-9,622 \cdot 10^{-3}$	$1,122 \cdot 10^{-2}$
<i>rdd</i>	$1,258 \cdot 10^{-2}$	$-3,713 \cdot 10^{-3}$	$-9,011 \cdot 10^{-4}$	$-9,632 \cdot 10^{-3}$	$1,127 \cdot 10^{-2}$
<i>mid</i>	$1,257 \cdot 10^{-2}$	$-3,702 \cdot 10^{-3}$	$-8,900 \cdot 10^{-4}$	$-9,622 \cdot 10^{-3}$	$1,122 \cdot 10^{-2}$
<i>rid</i>	$1,258 \cdot 10^{-2}$	$-3,713 \cdot 10^{-3}$	$-9,011 \cdot 10^{-4}$	$-9,632 \cdot 10^{-3}$	$1,127 \cdot 10^{-2}$
<i>mds</i>	$1,257 \cdot 10^{-2}$	$-3,702 \cdot 10^{-3}$	$-8,900 \cdot 10^{-4}$	$-9,622 \cdot 10^{-3}$	$1,122 \cdot 10^{-2}$
<i>rds</i>	$1,258 \cdot 10^{-2}$	$-3,713 \cdot 10^{-3}$	$-9,011 \cdot 10^{-4}$	$-9,632 \cdot 10^{-3}$	$1,127 \cdot 10^{-2}$

Tabuľka 3.14 Odhady špecifických efektov

Predikcia pre budúce obdobie				
1	12	73	98	124
0,030	0,013	0,016	0,008	0,028

Tabuľka 3.15 Kredibilitné odhady pre budúce obdobie

Nastavenie	Odhad σ_μ^2	Odhad σ_ν^2
<i>mdd</i>	$1,062 \cdot 10^{-4}$	$25,936 \cdot 10^{-4}$
<i>rdd</i>	$1,075 \cdot 10^{-4}$	$25,930 \cdot 10^{-4}$
<i>mid</i>	$1,062 \cdot 10^{-4}$	$25,936 \cdot 10^{-4}$
<i>rid</i>	$1,075 \cdot 10^{-4}$	$25,930 \cdot 10^{-4}$
<i>mds</i>	$1,062 \cdot 10^{-4}$	$25,936 \cdot 10^{-4}$
<i>rds</i>	$1,075 \cdot 10^{-4}$	$25,930 \cdot 10^{-4}$

Tabuľka 3.16 Odhady σ_μ^2 a σ_ν^2 pre dáta Klugman

Záver

Cieľom práce bolo ukázať použitie modelov panelových dát pre oblasť kredibility vrámci matematiky neživotného poistenia.

V úvodnej kapitole sme predstavili modely panelových dát. Pre tieto modely sme odvodili odhady parametrov týchto modelov a dokázali sme ich vlastnosti, nestrannosť a konzistenciu.

Druhá kapitola práce bola venovaná aditívnym kredibilitným modelom. Na základe literatúry sme predstavili niektoré základné modely a pre každý z modelov sme odvodili tvar kredibilitného faktoru a kredibilitný odhad (predikciu) úhrnu škôd pre budúce obdobie. Následne sme sa vrátili k modelom panelových dát v prvej kapitole. Ukázali sme, že uvažované kredibilitné modely je možné vyjadriť ako modely jednosmernej chybovej zložky panelových dát. Pre tieto panelové verzie sme taktiež odvodili tvar kredibilitného faktoru, kredibilitný odhad úhrnu škôd pre budúce obdobie a porovnali sme tento odhad s odhadom kredibilitného modelu. Rovnako ako v prípade kredibilitných modelov, aj v prípade ich panelových verzií sme pre každú rizikovú triedu získali vážený priemer dát pochádzajúcich z rovnakej rizikovej triedy a všetkých dostupných dát. Taktiež sme pre jednotlivé panelové verzie odvodili tvar odhadu deterministických parametrov modelu. Tým sme doplnili citovanú literatúru o chýbajúce dôkazy.

V tretej, záverečnej, kapitole sme pracovali s dvomi dátovými súbormi, dáta Hachemeister[8] a dáta Klugman[15], kde sme ukázali použitie získaných poznatkov na reálne dáta. V oboch prípadoch sme model odhadli ako kredibilitný model a ako model panelových dát s rôznymi kombináciami nastavení. Jednou z uvažovaných možností bolo nastavenie Swamy počiatočných hodnôt. Túto metódu odvodenú v citovanej literatúre sme implementovali a prakticky použili. Dáta vyžadovali rozdielny prístup, v oboch prípadoch bol však výrazný rozdiel medzi jednotlivými rizikovými skupinami, uvažovanie špecifických efektov jednotlivých rizikových tried bolo opodstatnené. V prípade dát Hachemeister sme pozorovali výrazný lineárny trend, uvažovali sme teda Regresný Hachemeistrov model. Pri zmene nastavení sme v odhadoch pozorovali len mierne rozdiely. Zmena metódy reziduálnej maximálnej vierohodnosti na metódu maximálnej vierohodnosti nevedla v prípade konvergenie odhadu k žiadnemu rozdielu. Naopak to bolo v prípade dát Klugman, kde sme nepozorovali žiaden výrazný trend. Model sme vyskúšali odhadnúť viacerými možnosťami, nakoniec sme sa priklonili k Heteroskedastickému modelu Bühlmann-Straub. Model sme rovnako odhadli rôznymi kombináciami nastavení, v tomto prípade zmena v hodnote odhadu, aj keď minimálna, nastala práve v prípade opustenia od metódy reziduálnej maximálnej vierohodnosti.

Literatúra

1. BALTAGI, Badi H. *Econometric Analysis of Panel Data*. 6th. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.
2. FREES, Edward W.; YOUNG, Virginia R.; LUO, Yu. A longitudinal data analysis interpretation of credibility models. *Insurance: Mathematics and Economics*. 1999, roč. 24, č. 3, s. 229–247. ISSN 0167-6687. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(98\)00055-9](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(98)00055-9).
3. WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. Cambridge, MA: MIT Press, 2002. ISBN 9780262232197.
4. VAART, A. W. van der. *Asymptotic Statistics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN 9780521784504.
5. BÜHLMANN, Hans; GISLER, Alois. *A course in credibility theory and its applications*. Zv. 317. Springer, 2005.
6. BARTLETT, M. S. An Inverse Matrix Adjustment Arising in Discriminant Analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1951, roč. 22, č. 1, s. 107–111. Dostupné z DOI: [10.1214/aoms/1177729698](https://doi.org/10.1214/aoms/1177729698).
7. PRESS, William H.; TEUKOLSKY, Saul A.; VETTERLING, William T.; FLANNERY, Brian P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. 3rd. New York: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-88068-8. See Section 2.7.3, "Woodbury Formula".
8. HACHEMEISTER, Charles. Credibility for regression models with application to trend (reprint). *Credibility: Theory and Applications*. Edited by P. Kahn. New York: Academic Press, Inc. 1975, s. 307–48.
9. R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2024. Dostupné tiež z: <https://www.R-project.org/>.
10. DUTANG, Christophe; GOULET, Vincent; PIGEON, Mathieu. actuar: An R Package for Actuarial Science. *Journal of Statistical Software*. 2008, roč. 25, č. 7, s. 1–37. Dostupné z DOI: [10.18637/jss.v025.i07](https://doi.org/10.18637/jss.v025.i07).
11. BATES, Douglas; MÄCHLER, Martin; BOLKER, Ben; WALKER, Steve. Fitting Linear Mixed-Effects Models Using lme4. *Journal of Statistical Software*. 2015, roč. 67, č. 1, s. 1–48. Dostupné z DOI: [10.18637/jss.v067.i01](https://doi.org/10.18637/jss.v067.i01).
12. BROOKS, Mollie E.; KRISTENSEN, Kasper; VAN BENTHEM, Koen J.; MAGNUSSEN, Arni; BERG, Casper W.; NIELSEN, Anders; SKAUG, Hans J.; MAECHLER, Martin; BOLKER, Benjamin M. glmmTMB Balances Speed and Flexibility Among Packages for Zero-inflated Generalized Linear Mixed Modeling. *The R Journal*. 2017, roč. 9, č. 2, s. 378–400. Dostupné z DOI: [10.32614/RJ-2017-066](https://doi.org/10.32614/RJ-2017-066).

13. WICKHAM, Hadley; AVERICK, Mara; BRYAN, Jennifer; CHANG, Winston; MCGOWAN, Lucy D'Agostino; FRANÇOIS, Romain; GROLEMUND, Garrett; HAYES, Alex; HENRY, Lionel; HESTER, Jim; KUHN, Max; PEDERSEN, Thomas Lin; MILLER, Evan; BACHE, Stephan Milton; MÜLLER, Kirill; OOMS, Jeroen; ROBINSON, David; SEIDEL, Dana Paige; SPINU, Vitalie; TAKAHASHI, Kohske; VAUGHAN, Davis; WILKE, Claus; WOO, Kara; YUTANI, Hiroaki. Welcome to the tidyverse. *Journal of Open Source Software*. 2019, roč. 4, č. 43, s. 1686. Dostupné z DOI: 10.21105/joss.01686.
14. MERSMANN, Olaf. *microbenchmark: Accurate Timing Functions*. 2025. Dostupné tiež z: <https://github.com/joshualrich/microbenchmark>. R package version 1.5.0.
15. KLUGMAN, Stuart A. *Bayesian statistics in actuarial science: with emphasis on credibility*. Zv. 15. Springer Science & Business Media, 1991.
16. FREES, Edward W; YOUNG, Virginia R; LUO, Yu. Case studies using panel data models. *North American Actuarial Journal*. 2001, roč. 5, č. 4, s. 24–42.

Zoznam obrázkov

3.1	Grafické znázornenie vývinu priemerného úhrnu škôd	42
3.2	Grafické znázornenie vývinu počtu škôd	43
3.3	Kredibilitné odhady	44
3.4	Predikcie pre budúce obdobie	48
3.5	Predikcie pre budúce obdobie	49
3.6	Celková hodnota mzdy (<i>payroll</i>)	52
3.7	Celková strata (<i>loss</i>)	53
3.8	Vývin odozvy (<i>PP</i>)	54
3.9	Kredibilitné odhady pre dáta Klugman	55

Zoznam tabuliek

3.1	Dáta Hachemeister	41
3.2	Popisné charakteristiky dát Hachemeister	41
3.3	Priemerné úhrny a priemerné počty škôd	42
3.4	Odhady kredibilitného Hachemeistrovho modelu s lineárnym trendom	44
3.5	Dáta Hachemeister po úprave	45
3.6	Hodnoty \bar{y}_i pre jednotlivé štáty	45
3.7	Kolektívne poistné a špecifické efekty	46
3.8	Predikcie pre budúce obdobie	46
3.9	Odhady kovariančnej matice $\hat{\mathbb{D}}$ a σ_v^2 pre dáta Hachemeister	47
3.10	Časová náročnosť jednotlivých nastavení v milisekundách	50
3.11	Popisné charakteristiky dát Klugman [15]	51
3.12	Odhady Heteroskedastického modelu Bühlmann-Straub pre dáta Klugman	53
3.13	Hodnoty $\bar{y}_{i,w}$ pre vybrané rizikové triedy	55
3.14	Odhady špecifických efektov	56
3.15	Kredibilitné odhady pre budúce obdobie	56
3.16	Odhady σ_μ^2 a σ_v^2 pre dáta Klugman	56

A Prílohy

A.1 Prvá príloha

Elektronická príloha obsahuje R súbor odhadu kredibilitného modelu dát Hachemeister.

A.2 Druhá príloha

Elektronická príloha obsahuje R súbor odhadu panelového modelu dát Hachemeister.

A.3 Tretia príloha

Elektronická príloha obsahuje R súbor odhadu modelu dát Klugman.

A.4 Štvrtá príloha

Elektronická príloha obsahuje textový súbor dát Klugman.