Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Využití heuristických strategií při řešení úloh z pravděpodobnosti na ZŠ

Using heuristic strategies solving probability problems at secondary school

Petr Klajl

Vedoucí práce: Mgr. David Zenkl

Studijní program: ODBAMACH21

2025

Odevzdáním této bakalářské práce na téma „Využití heuristických strategií při řešení úloh z pravděpodobnosti na ZŠ“ potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Prohlašuji, že jsem při její tvorbě nepoužil nástrojů umělé inteligence jiným způsobem, než je uvedeno ve vyjádření, které je součástí textu práce. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 14.4. 2025

Poděkování:

Rád bych na tomto místě poděkoval Mgr. Davidu Zenklovi za cenné rady a připomínky k práci, za vstřícný přístup a za množství času, které mé práci věnoval na konzultacích i mimo ně.

ABSTRAKT

Cílem této práce je seznámit čtenáře s možností užití heuristických metod v oblasti pravděpodobnosti na základní škole a vytvoření portfolia výukových materiálů z pravděpodobnosti včetně fiktivního žákovského řešení. Práce se skládá ze čtyř kapitol.

V první kapitole se věnuji Globálnímu rámci odborné způsobilosti pro matematiku a revizi Rámcového vzdělávacího programu, kde jsou nově zařazené očekávané výsledky učení spojené s tématem pravděpodobnosti. Ve druhé kapitole zmiňuji základní zákonitosti pravděpodobnosti a rozdíl mezi šancí a pravděpodobností. Třetí kapitola se věnuje heuristice, konstruktivismu a speciálně genetickému konstruktivismu, který může být nástrojem, jak aplikovat heuristiku ve výuce. Dále jsou zde zmíněné základní heuristické strategie, které by žáci mohli používat při řešení pravděpodobnostních úloh, na něž neznají algoritmická řešení.

Ve čtvrté kapitole je samotné portfolio úloh, které je hlavním výstupem práce. Úlohy jsou rozdělené do témat podle kontextu, přičemž pokrývají všechny odborné způsobilosti z Globálního rámce. Každá úloha obsahuje poznámku učiteli, která vysvětluje výběr úlohy, či problémy, na které může s žáky při řešení narazit, a fiktivní žákovské řešení užívající heuristických metod. Při řešení využívám různé typy diagramů a znázornění, se kterými se žáci mohou setkat v hodinách matematiky. Samotné úlohy bez řešení jsou přiložené k práci v příloze.

KLÍČOVÁ SLOVA

heuristické metody, pravděpodobnost, gradované úlohy, genetický konstruktivismus

ABSTRACT

The objective of this thesis is to introduce the reader to the possibility of using heuristic methods in the field of probability in primary school and to create a portfolio of teaching materials in probability, including a fictitious student solution. The thesis consists of four chapters.

In the first chapter, I discussed the Global Proficiency Framework for Mathematics and the revision of the Framework Educational Program (RVP), where the expected learning outcomes associated with the topic of probability are newly included. In the second chapter, I mention the basic laws of probability and the difference between chance and probability. The third chapter is devoted to heuristics, constructivism and especially genetic constructivism, which can be a tool for applying heuristics in teaching. Furthermore, basic heuristic strategies are mentioned that students could use when solving probability problems for which they do not know algorithmic solutions.

The fourth chapter contains the actual portfolio of problems, which is the main output of the thesis. The tasks are divided into topics according to context, covering all the competencies from the Global Framework. Each problem includes a teacher's note explaining the choice of problems, or the problems he or she may encounter with students in solving them, and a fictional student solution using heuristic methods. In solving, I use different types of diagrams and representations that students may encounter in mathematics classes. Separate problems without solutions are included in the appendix.

KEYWORDS

heuristic methods, probability, graded problems, genetic constructivism

Obsah

Úvod

Losujete v kroužku týmy. Trenér, nebo učitel stojí před vámi, v jedné ruce drží žlutý a v druhé modrý dres. Schová ruce za záda a dresy mezi sebou promíchá. Jaká je pravděpodobnost, že skončíte ve žlutém týmu? Úloha, která pro děti může být každodenním chlebem, když se například rozřazují do týmů, a přesto se velmi často s úlohami tohoto typu potkají až na střední škole (dále také SŠ).

Když se žáci poprvé setkají s tématem pravděpodobnosti v hodině matematiky, bývá to až v maturitním ročníku. Začínají úvodem, který jim je známý z běžného života: hody kostkou, hody mincí, pravděpodobnost, že si vytáhnu kuličku atd. Ve své podstatě nejde ze začátku o nic jiného než o procenta, poměry, či zlomky, které se žáci učí často v sedmém ročníku základní školy (dále také ZŠ). Jedinou novinkou je jinak formulované zadání a trochu odlišný cíl úlohy. Žáci navazují na znalosti a dovednosti, které získali na ZŠ, tudíž by úvodní úlohy k pravděpodobnosti mohli řešit dříve, hravější formou, a aniž by znali pojmy z kombinatoriky (variace, kombinace, …), na které toto téma obvykle navazuje.

Z mezinárodního šetření TIMMS pro 8. ročníky vyplývá, že ač jsou čeští žáci v matematice v porovnání se světem i Evropskou Unií nadprůměrní, práce s daty a pravděpodobnost, což je jeden z měřených tematických okruhů, je naší nejhorší oblastí (NZ TIMMS8, 2024). Podíváme-li se na data z dosud posledního šetření z roku 2023, dosahoval výsledek v této oblasti 504 bodů, což zhruba odpovídá evropskému průměru, zatímco ostatní oblasti jsou nadprůměrné (tabulka 1).

Tabulka 1. Počet bodů získaných žáky 8. ročníků při měření TIMMS 2023 (NZ TIMMS8, 2024)

TIMMS 2023	Průměr	Čísla	Algebra	Geometrie	Data a pravděpodobnost
Česká republika	518	525	513	520	504
Průměr zemí EU	503	503	499	505	501

Do výběru úloh k šetření se promítly změny v minimálních znalostech a dovednostech uvedených v Globálním rámci. Tento dokument byl vydán v roce 2020 a jeho účelem je definovat klíčové dovednosti a znalosti, které si mají žáci osvojit učením na základních školách (Rhodes et al., 2020). Byl do něj zařazen tematický celek týkající se této problematiky: Statistika a pravděpodobnost. Tento celek bude nově zařazen do Rámcového vzdělávacího programu (dále RVP), který jej doteď neobsahoval. Přímo z Globálního rámce vychází i nová revize RVP ZŠ pro matematiku, která tuto oblast a očekávané výsledky učení z ní obsahuje.

Cílem této práce je vytvořit sadu úloh[1] k odborným způsobilostem uvedeným v Globálním rámci a nastínit fiktivní žákovská řešení za využití heuristických metod. Heuristické metody řešení jsem zvolil, jelikož žáci ZŠ neznají algoritmické metody řešení pravděpodobnostních úloh. Ty jsou součástí studia na SŠ a podle návrhu revidovaného RVP ZŠ ani není cílem žáky tyto metody na ZŠ učit. Nabízí se tak využít heuristiky pro řešení úloh. Vzhledem k charakteru některých odborných způsobilostí budou voleny metody a postupy dovolující i přibližný výsledek, či určení předpovědi na základě popisných slov. Práce je zaměřena na 2. stupeň ZŠ a odpovídající ročníky víceletého gymnázia, kterých se týká zmiňovaná revize RVP v oblasti náhoda a pravděpodobnost. Práce je určena především učitelům matematiky na ZŠ, kteří se chtějí seznámit s konkrétními úlohami rozvíjejícími očekávané výsledky učení, jež se týkají pravděpodobnosti podle revidovaného RVP ZŠ, a s heuristickými strategiemi a jejich využíváním.

V první kapitole se věnuji revizi RVP ZŠ v oblasti matematiky. Ta se odvíjí z velké části z Globálního rámce. V kapitole se věnuji především novému tematickému celku, kterým je Statistika a pravděpodobnost. Druhá kapitola je zaměřena na základní zákonitosti pravděpodobnosti užité v této práci. Ve třetí kapitole se nachází seznámení s heuristikou a jednotlivými strategiemi. Rovněž je zde popsaná hlavní idea genetického konstruktivismu, který lze využít při realizaci výuky matematiky pomocí heuristiky. Na tuto teoretickou část navazuje ve čtvrté kapitole portfolio výukových materiálů a jejich reflexe. Portfolio se skládá ze sady úloh z oblasti pravděpodobnosti. Reflexe se skládá z fiktivních žákovských řešení využívajících heuristických strategií.

V závěru shrnuji myšlenky uvedené problematiky a reflektuji portfolio a jeho potenciální využití ve výuce.

[1] Sada úloh se může stát nástrojem, jak rozvíjet výše uvedené nízké dovednosti žáků při řešení pravděpodobnostních úloh na druhém stupni ZŠ.

1 Revize RVP ZŠ v oblasti matematiky

Revidovaný rámcový vzdělávací program pro ZŠ vzniká od roku 2021 v rámci Strategie 2030+. To je strategický dokument Ministerstva školství a tělovýchovy (dále též MŠMT) zaměřený na úpravu školství a vzdělávání pro potřeby 21. století (MŠMT, 2020). Je v souladu se zásadami a obecnými cíli vzdělávání uvedenými v zákoně č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (školský zákon). Revidovaný RVP ZŠ byl schválen MŠMT k 30. prosinci 2024 a aplikován bude v pilotním režimu od září 2025. Školy mohou dobrovolně od tohoto data inovovat své školní vzdělávací programy a realizovat podle nich výuku. Povinně budou školy učit podle revidovaného RVP pro první až šestý ročník ZŠ ve školním roce 2027/2028, od září 2031 bude povinnost přejít na revidovaný RVP pro všechny ročníky ZŠ (NPI, 2023).

1.1 Globální rámec

Vzdělávací obsah RVP pro matematiku vychází z Globálního rámce (NPI, 2023). Globální rámec odborné způsobilosti pro matematiku byl vydán v roce 2020. Dokument vznikl za spolupráce zemí OECD a vymezuje minimální znalosti a dovednosti, které žáci mají mít při výstupu z daného ročníku (Bendl, 2024).

Rámec je rozdělen do pěti tematických celků – Číslo a početní operace (N), Měření a výpočty (M), Geometrie v rovině a prostoru (G), Statistika a pravděpodobnost (S) a Algebra (A).

Samotné výstupy jsou více zaměřené na matematiku v praktickém využití, než tomu bylo doposud. Žáci budou více řešit úlohy, s kterými mají šanci se setkat v běžném životě. Budou se více setkávat s technologiemi a programy. Naopak méně budou řešit rutinní úlohy a operace či geometrické konstrukce. Ty se žáci mají více snažit pochopit, ideálně v kontextu, odvozovat a variabilně řešit (Bendl, 2024; Rhodes et al., 2020).

Největší změnou oproti stávajícímu RVP ZŠ je v dokumentu zavedení Statistiky a pravděpodobnosti jako nového tematického celku. Ten se dělí na dvě témata, práce s daty (S1) a náhoda a pravděpodobnost (S2), na které se ve své práci zaměřuji. Náhoda a pravděpodobnost se začíná řešit v pátém ročníku ZŠ (tabulka 1.1).

Tabulka 1.1: Globální rámec – téma S2 (Rhodes et al., 2020)

Téma		Obor		Odborné způsobilosti	Ročník	Kód[2]
S2	Náhoda a pravděpodobnost	S2.1	různými způsoby popisuje pravděpodobnost náhodných jevů	určí pravděpodobnost, že se stane náhodný jev, určí, zda je pravděpodobný, nebo nepravděpodobný	5	P/N
				porovná pravděpodobnost dvou nebo více náhodných jevů s použitím popisných slov	6	PPS
				vypočítá pravděpodobnost výskytu elementárního jevu, přičemž odpověď je vyjádřena zlomkem, desetinným číslem nebo procenty, a zařadí získané hodnoty na stupnici od 0 (nemožné) do 1 (jisté).	7	PEJ
				zjistí očekávaný počet výskytů určitého nezávislého výsledku při mnohonásobném opakování pravděpodobnostního pokusu	8	MOP
				vypočítá pravděpodobnosti různých výsledků pro složené jevy obsahující dva elementární jevy, pokud je lze uvést jako diskrétní prostor elementárních jevů	9	2SJ
				používá širokou škálu zobrazení, jako jsou stromové diagramy a kontingenční tabulky ke zkoumání možných výsledků náhodných jevů a pokusů zahrnujících více složených jevů.	9	VSJ
		S2.2	určí permutace a kombinace	systematicky počítá všechny možné výsledky (prostor elementárních jevů) pro situaci zahrnující jev složený ze dvou elementárních jevů s vrácením vybraného předmětu do sady, či bez	9	SPV

[2] Kódové označení je mnou vytvořené pro značení úloh v kapitole 4 této práce.

1.2 RVP ZŠ v oblasti pravděpodobnosti

V RVP až do roku 2024 očekávané výsledky učení z pravděpodobnosti nenajdeme. Nalezneme v něm však výstup, který se pravděpodobnosti dotýká. V oblasti v oblasti Nestandardní aplikační úlohy a problémy je očekávaný výstup M-9-4-01: „užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací“ (RVP ZV, 2013). Na to někteří autoři učebnic zareagovali a zařadili úlohy na kombinatoriku a pravděpodobnost do svých učebnic pro ZŠ. Toto téma pokrývá učebnice Matematika C od Hejného a kol. (2016).

V revidovaném RVP verze z roku 2024 se po vzoru Globálního rámce vyskytuje nový tematický okruh Statistika a pravděpodobnost (RVP ZV, 2025). Tomu jsou věnované čtyři očekávané výsledky učení (tabulka 1.2). Jejich popisy vychází přímo z Globálního rámce. Pro výuku pravděpodobnost (a moji práci) jsou stěžejní očekávané výsledky učení „Určí pravděpodobnost jevu různými způsoby pro rozhodování v dané situaci“.

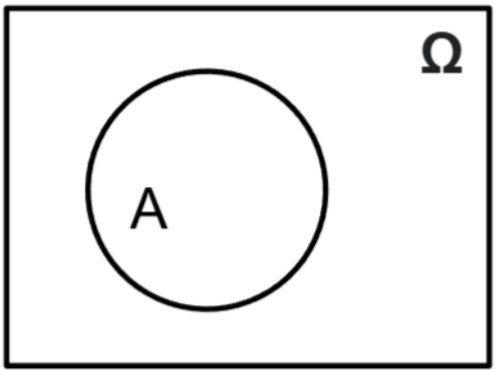
Tabulka 1.2: Očekávané výsledky učení v tematickém okruhu Statistika a pravděpodobnost dle revize RVP (RVP ZV, 2025)

MAT-MAT-004-ZV9-011	Interpretuje a vytváří různě graficky prezentovaná data
MAT-MAT-004-ZV9-012	Vypočítá a interpretuje základní charakteristiky souboru dat
MAT-MAT-004-ZV9-013	Určí pravděpodobnost jevu různými způsoby pro rozhodování v dané situaci
MAT-MAT-004-ZV9-014	Vyhledá všechny prvky nebo skupiny prvků, které splňují dané podmínky

2 Pravděpodobnost

Pravděpodobnost je číslo, které vyjadřuje, jak moc je daný jev očekávaný na náhodném pokusu. Nejčastěji je interpretována číslem mezi 0 (nemožný jev) a 1 (jistý jev) (Mošna, 2017). Pro základní vymezení pravděpodobnosti využijeme Laplaceovy definice pravděpodobnosti. Mějme experiment, u kterého chceme zkoumat pravděpodobnost. Ω je universum daného experimentu neboli množina všech možných událostí, které během experimentu mohou nastat (v anglické literatuře označován jako sample space). A je náhodným jevem (random event) splňujícím podmínky experimentu, zároveň je podmnožinou Ω. Výsledná pravděpodobnost jevu je poté rovna $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ a je v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, kde $|M|$ značí počet prvků množiny M (Grimaldi, 2004; Mošna, 2017).

Geometricky lze tato definice zakreslit pomocí Vennových diagramů (obrázek 2.1), což usnadňuje přehlednost při určování pravděpodobnosti složených jevů a zároveň lze díky nim znázorňovat základní vztahy.

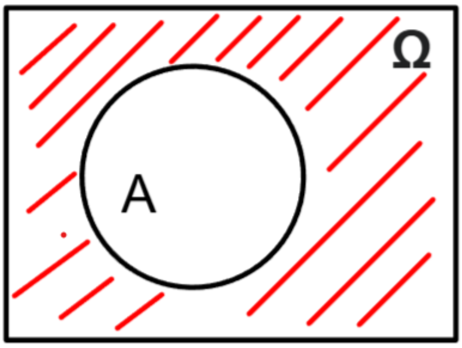


Obrázek 2.1: Vennův diagram pro jev A v prostoru Ω

Laplaceovu (klasickou) definici pravděpodobnosti je možné použít jen tehdy, kdy je množina Ω konečná (existuje konečný počet náhodných pokusů), každý náhodný pokus má stejnou pravděpodobnost a všechny výsledky se navzájem vylučují (žádné dva nemohou nastat současně) (Bachratý et al., 2010; Polák, 2008).

2.1 Opačný jev

Při řešení úloh můžeme užít opačného jevu. Místo abychom určovali pravděpodobnost jevu přímo, což by mohlo být složité, můžeme určit pravděpodobnost jevu opačného. Ten je doplňkem A do množiny Ω. Celou představu demonstrujme na Vennově diagramu. Jev opačný je zde ukázán červeným šrafováním (obrázek 2.2).



Obrázek 2.2:Vennův diagram pro opačný jev

V univerzu Ω leží každý prvek. Pravděpodobnost výběru prvku z takové množiny je rovna 100 % neboli jedné. Jev opačný k jevu A dostaneme odečtením pravděpodobnosti jevu A od pravděpodobnosti jevu Ω: $P(\Omega - A) = 100\,\% - P(A)$[3] (Mošna, 2017).

2.2 Základní zákonitosti

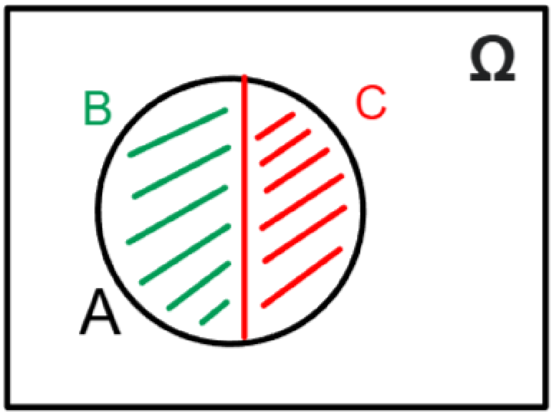
Grimaldi (2004) ve své publikaci přibližuje princip určování složených jevů v kombinatorice a pravděpodobnosti na základě dvou pravidel – *The Rule of Sum* (pravidlo součtu) a *The Rule of Product* (pravidlo součinu).

Pravidlo součtu lze použít tehdy, kdy se dá původní jev (A) rozdělit na dva jevy (B a C), které nejsou proveditelné zároveň a nemají žádný stejný prvek (Čech, 1939; Grimaldi, 2004). Pravděpodobnosti jevů B a C sčítáme a je rovna pravděpodobnosti jevu A: $P(A) = P(B) + P(C)$

Toto pravidlo si opět můžeme představit na množinách a Vennových diagramech. Množina A (jevy odpovídající zadání úlohy) je složena ze dvou množin, pro naše potřeby se jedná

[3] Lze se setkat i s jiným značením opačného jevu (doplňku množiny) jako $\bar{A}$ (Bachratý et al., 2010) nebo A´ (Polák, 2008).

o B a C. Ty nemají žádný společný prvek a jejich sjednocení pokrývá celou množinu A (obrázek 2.3). Tuto větu můžeme zapsat matematickými symboly: $A = B \cup C$, kde $B \cap C = \emptyset$. Výsledná pravděpodobnost jevu A se rovná součtu pravděpodobností jevu B s jevem C: $P(A) = P(B) + P(C)$.



Obrázek 2.3: Vennův diagram pravidla součtu

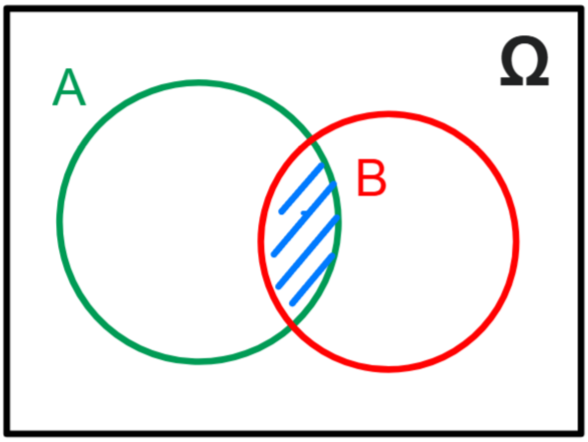
Vzorová úloha 1: Házíme standardní kostkou a chceme hodit šestku nebo jedničku. Jaká je pravděpodobnost, že se mi to podaří?

Pravděpodobnost, že nám padne určité číslo na hrací kostce, je rovna $\frac{1}{6}$, protože se jedná o výběr jednoho prvku ze šesti rovnocenných možností. Jevy nejsou proveditelné zároveň, buď nám padne jednička, nebo šestka. Jedná se o jinou číslici v rámci jednoho jevu. To vše nám splňuje podmínky pravidla součtu. Výsledná pravděpodobnost tak bude $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

Pravidlo součinu lze použít tehdy, jsou-li dva jevy (A a B) na sobě závislé (jeden je podmínkou pro druhý), a můžeme je rozdělit do dvou fází po sobě (Grimaldi, 2004). Pravděpodobnosti jevů B a C mezi sebou násobím: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Toto pravidlo si můžeme ve Vennově diagramu představit jako průnik dvou množin $(A \cap B)$[4] (obrázek 2.4). Jevy jsou na sobě závislé, jev A již musel nastat.

[4] Na obrázku značené modrým šrafováním



Obrázek 2.4: Vennův diagram pro pravidlo součinu

Vzorová úloha 2: Házíme dvěma kostkami najednou. Abychom vyhráli, musíme hodit součet 12. Jaká je pravděpodobnost, že vyhrajeme?

Z úlohy 1 víme, že pravděpodobnost toho, že nám padne na jedné kostce šestka, se rovná $\frac{1}{6}$. Součet 12 znamená, že musíme hodit dvě šestky, tudíž na každé kostce jednu. Jev tak lze separovat do dvou fází – na první kostce nám padne šestka a na druhé také. Tímto rozborem jsme zjistili, že můžeme užít pravidla součinu, a tak lze pravděpodobnosti prvního a druhého jevu násobit. Pravděpodobnost, že mi padne součet 12, je proto rovna $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

2.3 Geometrická definice pravděpodobnosti

Tato definice je založena na geometrickém významu daných jevů. V případě, že o jevech přemýšlíme geometricky, v délkách, obsazích či objemech, při určování pravděpodobnosti porovnáváme velikosti geometrických útvarů. V případě rovinných útvarů je pravděpodobnost vyjádřena $P(A) = \frac{\omega}{S}$, kde ω představuje obsah příznivého jevu (obdoba A) a S je obsah plochy možného rozsahu výsledků[5] (Mošna, 2017).

[5] Zvolil jsem dvoudimenzionální geometrii, protože s ní mají žáci mnohé zkušenosti. Geometrickou definici můžeme aplikovat i na úlohy, kde žáci mohou pracovat s délkou, či grafy, v nichž lze jednotlivé jevy znázornit. Tohoto využíváme ve vzorové úloze k tématu Geometrická cesta (oddíl 3.3.6) a v úlohách věnované jízdním řádům (4.3).

Výhoda užití geometrické definice pravděpodobnosti je, že se dá užít, i když má experiment nekonečný počet výsledků (Bachratý et al., 2010).

2.4 Statistický odhad

Nemáme-li splněné podmínky pro použití klasické definice pravděpodobnosti nebo jen chceme ověřit náš výsledek v praxi, můžeme použít několikanásobné opakování pokusu a následně jej statisticky vyhodnotit (Polák, 2008).

Statistický výpočet lze využít při provádění experimentu (např. ve třídě). Provádějme *M*-krát náhodný pokus. Během experimentu se vyskytne *N*-krát příznivý jev. Pravděpodobnost jevu v experimentu bude rovna $\frac{N}{M}$ (Bachratý et al., 2010; Polák, 2008).

S rostoucím počtem opakování se tento poměr blíží k pravděpodobnosti jevu *A* (Bachratý et al., 2010).

2.5 Šance

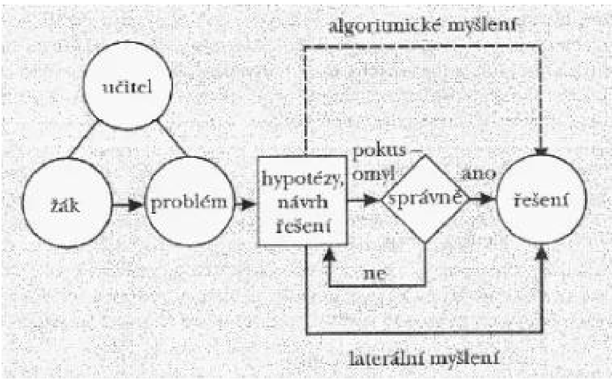
Fiala a Petrášková (2024) zmiňují ve svém článku důležitost rozlišovat mezi šancí a pravděpodobností i na úrovni školské matematiky.

Šance je poměr počtu příznivých a nepříznivých jevů, což je rovno poměru pravděpodobností (Płocki, 1982). Pro žáky je šance intuitivnější a snáze použitelný koncept v propedeutické fázi výuky pravděpodobnosti než pravděpodobnost uvedená v procentech, či zlomku (Fiala & Petrášková, 2024).

3 Heuristika

Heuristika je věda, která se zabývá zkusmými způsoby řešení úloh a obecně rozvíjí tvůrčí myšlení. Vychází z řeckého slova *Heuréka*[6], které se překládá a rovněž používá jako „objevil jsem“, „nalezl jsem“. Jedná se o moderní termín, pro který je důležité lidské poznávání, bádání, odhalování všeho, co je pro náš život důležité (Maňák & Švec, 2003).

Ve školním prostředí se jedná o styl výuky, kdy pedagog řešení žákům přímo nesděluje, nýbrž jim napomáhá k tomu, aby řešení sami nalezli. Při tomto procesu je usměrňuje, řídí tak, aby žáci nakonec dospěli ke správnému řešení. Žák používající heuristickou strategii nejprve navrhne řešení problému a stanoví hypotézy, které následně zkusmo ověřuje. V případě, že pokusy potvrzují jeho hypotézy, stává se návrh opravdovým řešením problému. V opačném případě dochází k jeho změně a přeformulování hypotézy a proces se opakuje (obrázek 3.1) (Maňák & Švec, 2003).



Obrázek 3.1: Vývojový diagram znázorňující heuristickou metodu řešení problému (Maňák & Švec, 2003)

K tomuto stylu výuky je třeba zvídavých žáků, kteří chtějí hledat, objevovat nová řešení, ale i pedagog, jenž žáky umí nadchnout do problematiky, dokáže s nimi bádat, ptát se jich a argumentovat. Žák při objevování pracuje s informacemi, shromažďuje, třídí a tvoří hypotézy. Proto je tento způsob výuky časově náročnější, na pedagoga klade vyšší nároky a u složitějších problémů nemusí vést k správnému řešení. Pedagog tímto stylem výuky rozvíjí u žáka týmovou práci, kreativní myšlení ale i samostatnost (Maňák & Švec, 2003).

[6] Nebo též *εὑρίσκω* (heuriskó), což v překladu znamená nalézt, objevit.

Heuristika souvisí ve školském prostředí s konstruktivismem. Konstruktivistické pojetí výuky je způsob, jak realizovat výuku, která může být postavena na využívání heuristických metod.

3.1 Konstruktivismus

Ve školním prostředí rozlišujeme především dvě různá pojetí výuky – transmisivní a konstruktivistické.[7] Při transmisivním vyučování dostává žák hotové poznatky, dovednosti jsou zde již zprostředkované (Zormanová, 2012). Žák je tak jen jejich konzumentem a očekává se od něj, že si informace (pojmy, vztahy a procedury) zapamatuje. Jedná se o tradiční způsob vyučování, který v matematice sahá zřejmě až do 16. století, kdy takto začali matematiku vyučovat jezuité (Kvasz, 2023). Žáci přijímají většinu informací pomocí frontální výuky. Potřeby žáka (motivace, potíže, jiné strategie řešení) jsou v tomto pojetí upozaděny, pedagog je velmi často tlačen časem a osnovami.

(Didaktický) konstruktivismus se snaží přijít s jiným pojetím výuky. Je založen na budování identity žáka na základě učení. Zabývá se žákovými znalostmi, vnímáním jeho světa, jeho potřebami. Základním rysem je aktivní pojetí výuky, v procesu učení žák zapojuje fantazii, logické myšlení, tvůrčí dovednosti. Pedagog k tomu žákům napomáhá dialogem, diskusí, projekty, či didaktickými hrami (Maňák & Švec, 2003).

Konstruktivistickým vyučováním matematiky se u nás zabývali především Hejný s Kuřinou (2009). Ve svém díle dochází k závěru, že konstruktivní vyučování v sobě může obsahovat transmisi, přesné instrukce, jak danou úlohu řešit. Záleží vždy na záměru daného pedagoga v hodině. „Podstatné je, zda se v průběhu vzdělávacího procesu v myslích žáka rodí s porozuměním matematika ukotvená na již zažitá témata“ (Hejný & Kuřina, 2009, s. 196).

Konstruktivismus se větví do několika odnoží. Kuřina nazval svůj přístup realistickým konstruktivismem (Hejný & Kuřina, 2009), zatímco Hejného přístup nazval Kvasz (2016) genetickým konstruktivismem.

[7] Transmise – česky přenos a konstrukce – neboli budování. Tato dvě slova přesně vystihují procesy, kterými žáci přicházejí do styku s novými poznatky v těchto pojetích výuky.

3.1.1 Genetický konstruktivismus

Kvasz (2016) teoreticky vyjasnil místo, které zaujímá tzv. Hejného metoda v systému konstruktivistického pojetí výuky. Hejný podle něj nezastává roli radikálního[8] konstruktivisty ani realistického[9] kvůli propojení výuky s historickým vývojem matematiky.

Kvasz vymezuje jádro genetického konstruktivismu, které podle něj spočívá v přístupu k výuce matematiky založeném na jejím historickém vývoji. Když učitel dává žákovi úlohu, měl by myslet na to, aby u žáka rekonstruoval proces objevování z historie. Kvasz vychází z principu souladu ontogeneze jedince a fylogeneze vývoje hlavních matematických myšlenek (Toeplitz, 2007).

Žák nedostává od učitele hotové poznatky, které by měl memorovat. Oproti tomu řeší ale soubor úloh, který odpovídá historickému kontextu. Díky tomuto propojení s historií lidského poznání se metoda vymezuje oproti jiným typům konstruktivismu a Žák poznává matematiku v různých prostředích a kontextech. Místo práce s jedním nástrojem genetický konstruktivismus otvírá možnosti žákům v používání různých nástrojů a reprezentací pro jednu a tu stejnou situaci (Kvasz, 2016).

Genetický konstruktivismus využívá také gradací. Gradace může sloužit jako nástroj, jak žáky motivovat. Mohou si vybrat úlohu dle svých vlastních dovedností, tu vyřešit a pro další řešení si mohou zvolit obtížnější úlohy. Gradace úlohy probíhá skrze gradační parametry. Jedná se o prvek, který dělá úlohu obtížnější. Gradačních parametrů může být v rámci jedné úlohy více (Hejný et al., 2004).

Tento směr může být náročnější pro učitele v komunikaci kontextů mezi historickým vývojem a rozvojem matematického myšlení, ale dle mého názoru může být přínosem pro celkové vnímání matematiky jako vyvíjející se vědy, kterou se vyplatí do budoucna i studovat. Celý princip tak může sloužit i jako zajímavá motivace.

[8] Radikální konstruktivismus v didaktice tvrdí, že poznání nelze jen přijímat, ale každý žák si své poznání vytváří sám. Žák na základě vlastní zkušenosti přiděluje věcem význam i obsah (Smejkalová, 2014).

[9] Realistický konstruktivismus je založen především na otázkách žáka a hledání odpovědí na ně. Pedagog je zaměřen na rozvíjení aktivit žáka, na vytváření jeho poznatků, především duševních (nemusí být nikde fyzicky zapsány) (Maňák & Švec, 2003).

3.2 Heuristika v matematice

Za otce heuristiky v matematice je označován György Pólya. Ten ve své publikaci *How to solve it?* popsal postup, jakým by se řešitel jemu dosud neznámého problému měl řídit při jeho řešení (Pólya, 1945/2004).

Prvním krokem by mělo být pochopení problému. Pólya (1945/2004) tento krok označuje za zásadní a často přehlížený. Žáci většinou zadání plně nerozumí, a tak řeší často jiný problém. Učitel by měl žákům v tomto pomoci v podobě návodných otázek. Můžeme úlohu přeformulovat, popsat vlastními slovy? Můžeme si úlohu překreslit do obrázku, do schématu? Na co se musíme zeptat, abych problém vyřešil? Co vlastně hledáme?

Druhým krokem je navrhnout plán, kterým chci úlohu řešit. Strategií, kterými žáci mohou úlohu řešit, je velké množství. Pólya (1945/2004) uvádí, že pouhé ukázání jednoho postupu na tabuli žáky v kreativitě nepodpoří. Učitel by tak měl žáky podporovat ve vymýšlení nových postupů a ve vlastním přístupu k řešení. K tomu nám pomohou otázky. Setkali jsme se s podobným problémem? Jak ten se řešil? Můžeme použít jeho výsledky, nebo metodu? Můžeme problém ještě přeformulovat? A ještě jinak?

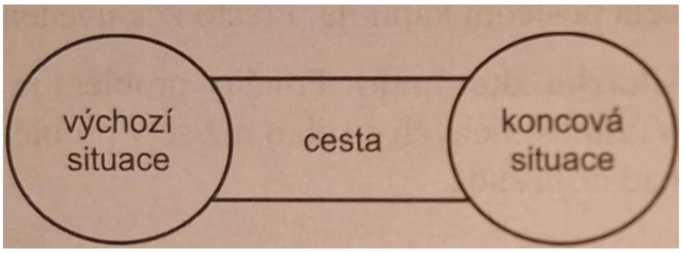
Třetím krokem je provedení plánu. V tomto kroku aplikujeme plán navržený v předchozím kroku. Důležitá je pečlivost a kontrola postupů v rámci provedení plánu. Je každý krok správný? Můžeme to dokázat? V případě, že tento plán nezabral, je třeba vymyslet jiný.

Posledním krokem při řešení je ohlédnutí se za vyřešenou úlohou. Můžeme si výsledek nějak zkontrolovat? Ohlížím se zpět za danou úlohou a přemýšlím nad vztahy v zadání. Použil jsem všechny údaje? Co když se mi hodnoty v zadání změní? Bude úloha řešitelná touto strategií? Které další úlohy lze řešit stejnou strategií? A co když ne?

3.2.1 Problém

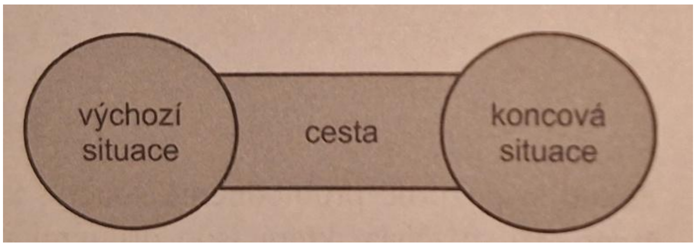
V předchozím oddíle jsme narazili na slovo „problém“. Toto slovo má v matematice trochu specifický význam. Každý problém má podle Kopky (2013) hlavní složky: výchozí situaci, cíl a cestu (obrázek 3.2). Výchozí situace popisuje souvislosti a základní informace. Ve zkratce se dá říci, že se jedná o údaje a informace ze zadání. Cíl je výsledek daného problému. Jako řešitelé chceme v rámci problému cíle dosáhnout. Poslední složkou je cesta.

Cesta znázorňuje postupy, kterými se od výchozí situace jdeme k cíli. Na základě těchto tří složek můžeme problémy rozdělit do několika skupin.



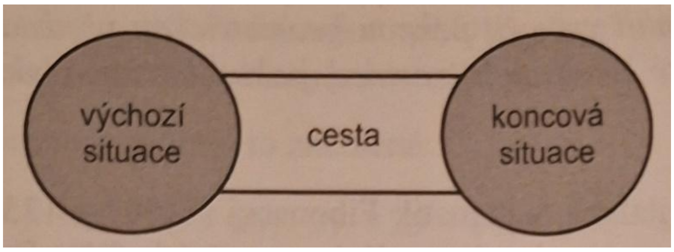
Obrázek 3.2: Problém (Kopka, 2013)

Cvičení (či rutinní problém) je problém, u kterého je přesně popsána výchozí situace i cíl a cesta k němu je nám známá (obrázek 3.3).



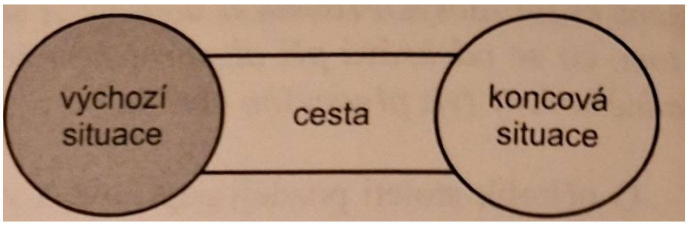
Obrázek 3.3: Cvičení (Kopka, 2013)

Úloha neboli nerutinní problém, je nejčastěji rozšířena ve školské matematice. Výchozí situace a cíl úlohy jsou přesně popsané, ale cesta nám na začátku není známa (obrázek 3.4). Nerutinní problém se může stát rutinním. Žák si danou cestu osvojí natolik, že i při řešení obdobné úlohy mu bude cesta známá, a tudíž se pro něj stává úloha cvičením.



Obrázek 3.4: Úloha (Kopka, 2013)

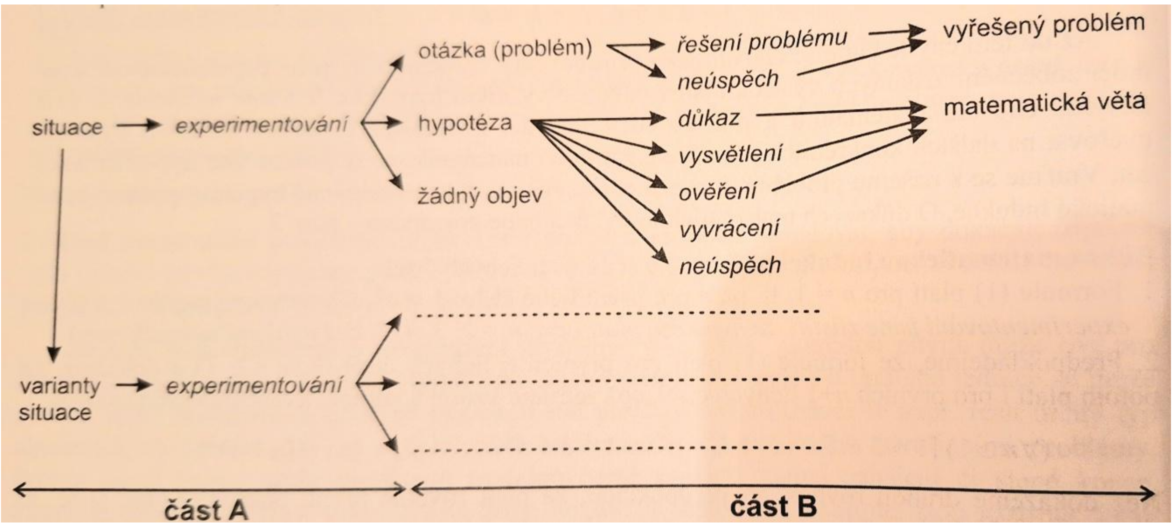
Zkoumání začíná být čím dále rozšířenějším (nejen) ve školské matematice. Jedná se o problém, u kterého známe výchozí situaci, nicméně cíl není znám nebo jen není přesně zadán a cesta je nám též neznámá (obrázek 3.5). K cíli úlohy se musíme dostat na základě pozorování a formulace hypotéz.



Obrázek 3.5:Zkoumání (Kopka, 2013)

3.2.2 Výzkumný přístup při zkoumání

Výzkumný přístup a jeho náležitosti jsou podstatné pro úspěšné zkoumání. Na úvod takového zkoumání je zásadní motivace. Proč vlastně chceme tuto situaci zkoumat? Jak jsme k ní došli? Poté žákům předkládáme situace. Ta by pro ně měla být poutavá, obtížnostně a znalostně přijatelná. Kopka (2013) shrnuje výzkumný přístup v schématu na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Výzkumný přístup (Kopka, 2013)

Od úvodní situace se lze vydat dvěma cestami. Horní cesta nerozporuje úvodní situaci, bere ji za platnou a hodlá s ní pracovat a rozvíjet ji. Spodní cesta[10] naopak reprezentuje rozpor. Zkoumanou situaci začínáme měnit, hledat případy pro které situace nefunguje. K této strategii obvykle dospějeme časem po neúspěchu v horní cestě.

Proces spočívá v první fázi ve tvorbě otázek či hypotéz. Jakmile máme hypotézu, či otázky formulované začínáme dokazovat a ověřovat naše hypotézy. Když prokážeme správnost naší hypotézy a ověříme ji, nalezli jsme matematickou větu, či jsme problém vyřešili.

[10] Tečky ve spodní cestě odkazují na opakování stejného z horní části grafu.

Když nikoli, tak můžeme buď formulovat jiné otázky, hypotézy, abychom problém úspěšně vyřešili, či se vydat výše zmíněnou spodní cestou a hledat případy, kdy je problém neřešitelný. I touto cestou se však vydáváme skrz tvorbu otázek a hypotéz.

3.3 Základní heuristické strategie

K řešení problému žáci používají heuristické strategie. Ty jsou nástrojem při hledání cesty k cíli. Stěžejními pro heuristiku jsou tzv. výzkumné strategie. Do nich bychom zařadili metodu pokus – omyl[11], odhad – ověření – korekce, či systematické experimentování. Mezi další významné strategie pro matematiku, které se využívají nejen ve školském prostředí, patří konkretizace – zobecnění a analogie (Novotná et al., 2016). V následujících oddílech ilustruji použití jednotlivých heuristických strategií při řešení úloh z pravděpodobnosti, které lze v rámci revidovaného RVP zařadit ve výuce na ZŠ.

3.3.1 Pokus – omyl

U této metody experimentujeme nesystematicky a náhodně. Tato strategie nemusí vést k cíli vůbec, nebo až po mnoha opakováních. Ve škole ji žáci využívají, když mají řešit úlohu, se kterou se ještě nesetkali a nevědí, jak u ní postupovat. Může být dobrá k uvědomění si základních zákonitostí (Kopka, 2013; Novotná et al., 2016).

V úlohách z pravděpodobnosti můžeme metodu užít na každý problém, který je pro nás nový a nevíme, kam a jak se dál vydat.

Vzorová úloha 3: V pytlíku je 9 modrých, 1 červená, 1 zelená a 1 žlutá kulička. Která barva bude pravděpodobně vybrána?

Úloha je přejatá z Globálního rámce (Rhodes et al., 2020, s. 69).

Zkusíme odhadnout, že by to mohla být červená kulička. Při zpětné kontrole ale zjišťujeme, že ta je jen jedna oproti zbylým jedenácti kuličkám. Je tedy velká pravděpodobnost, že vytáhnu kuličku jinou než červenou. Takže to musí být jiná barva. Touto metodou lze experimentálně dojít k závěru, že se pravděpodobně bude jednat o modrou kuličku, která převažuje v pytlíku nejčastěji, a to devět proti zbylým třem jiné barvy.

[11] Někdy též nověji nazývaná metodou pokusů.

3.3.2 Odhad – ověření – korekce

Tato metoda vychází ze strategie pokus – omyl. Zde na rozdíl od předchozího náhodného provádění pokusů provedeme po ověření výsledku nový odhad na základě korekce předchozího odhadu. Postupně se tak přibližujeme tíženému výsledku. Znovu je vhodné používat tabulky, které zpřehlední výsledky (Kopka, 2013).

Vzorová úloha 4: Kolika procentům (zaokrouhleně na jedno desetinné místo) odpovídá pravděpodobnost $\frac{1}{12}$?

S touto úlohou se žáci mohou setkat, když se učí zlomky a použití této metody může být způsob, jak si lépe představit algebraický způsob řešení úlohy. Dovednost převádět mezi zlomky a procenty je nezbytná pro splnění odborné způsobilosti „vypočítá pravděpodobnost výskytu elementárního jevu, přičemž odpověď je vyjádřena zlomkem, desetinným číslem nebo procenty, a zařadí získané hodnoty na stupnici od 0 (nemožné) do 1 (jisté). (Rhodes et al., 2020)“

Pravděpodobnost $\frac{1}{12}$ chceme zapsat procenty na jedno desetinné místo. Jako první odhadneme, že to bude okolo 10 %. Zlomek se příliš neliší od $\frac{1}{10}$ a tu si žáci pamatují, že odpovídá právě 10 %[12]. Po zpětné kontrole (vynásobení 12) nám ale vyšlo, že to není přesné, a tak se snažíme odhadnout číslo bližší (tabulka 3.1). Když nám vyjde výsledek nad 100 %, musíme v dalším pokusu zvolit méně procent, a naopak.

Tabulka 3.1: Řešení vzorové úlohy 4

Odhad	Kontrola	Co potřebujeme
10 %	120 %	Méně
9 %	108 %	Méně
8 %	96 %	Více
8,5 %	102 %	Méně
8,4 %	101 %	Méně
8,3 %	100 %	Výsledek

Takto jsme odhadli, že po zaokrouhlení 8,3 % nejlépe odpovídá $\frac{1}{12}$.

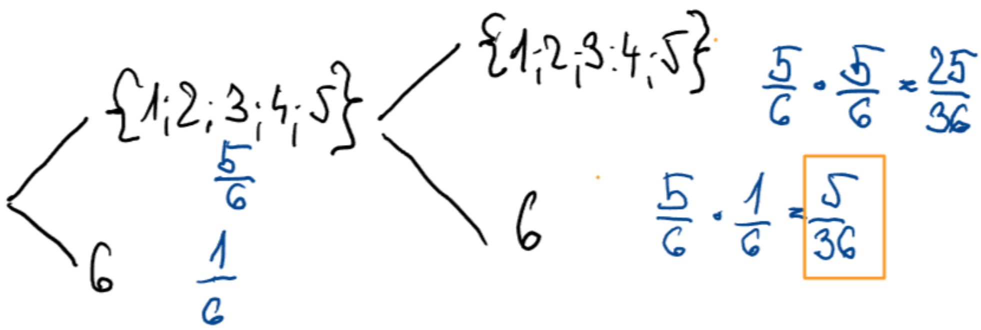
[12] Zlomek $\frac{1}{10}$ není roven 10 %. Jedná se o představu, že $\frac{1}{10}$ z 1 je rovna 10 % z 1. Ve výsledcích však často zestručňuji zápis symbolem „=“, např.: $\frac{5}{72} = 6{,}9$ %.

3.3.3 Systematické experimentování

Při této strategii vkládáme nejčastěji poznatky a následné výsledky do tabulky, která nám může pomoci při hledání souvislostí a zákonitostí. Objevenou vlastnost bychom měli matematicky vyjádřit, či vyslovit hypotézu (Kopka, 2013).

Vzorová úloha 5: Házíme opakovaně kostkou. Po kolikátém hodu budeme mít pravděpodobnost větší než 50 %, že hodíme šestku?

Nejprve zjišťujeme pravděpodobnost, že nám padne šestka prvním hodem. Můžeme hodit šest čísel a jen šestku chceme. Tudíž pravděpodobnost, že nám padne šestka při prvním hodu, je rovna $\frac{1}{6}$. Jak to ale bude, když ji hodíme při druhém hodu? Musíme si uvědomit, že v tomto případě se nám nepovedlo šestku hodit na první pokus. Jedná se o složený jev.[13] V prvním hodu jsme šestku nehodili a v druhém již ano. Tento jev si rozkreslíme do stromového diagramu (obrázek 3.7). Ten nám pomůže si lépe situaci představit s příslušnými hodnotami pravděpodobnosti.



Obrázek 3.7:Stromový diagram k vzorové úloze systematického experimentování

V prvním hodu můžeme hodit pět čísel, pravděpodobnost je rovna $\frac{5}{6}$ a pravděpodobnost, že se nám povede šestku hodit na druhý pokus, je rovna $\frac{1}{6}$. Celkově je tedy pravděpodobnost rovna $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$. Nyní provedeme systematické experimentování na dalších hodech obdobnou metodou (tabulka 3.2).

[13] Úlohu bychom proto mohli zařadit do 9. ročníku ZŠ v rámci odborné způsobilosti „vypočítá pravděpodobnosti různých výsledků pro složené jevy obsahující dva elementární jevy, pokud je lze uvést jako diskrétní prostor elementárních jevů“ (Rhodes et al., 2020).

Tabulka 3.2: Řešení vzorové úlohy 5

Počet hodů	Pravděpodobnost	Součet
1	$\frac{1}{6}$	0,167
2	$\frac{5}{36}$	0,306
3	$\frac{25}{216}$	0,421
4	$\frac{125}{1296}$	0,518
5	$\frac{625}{7776}$	0,598

Z tabulky jednotlivých součtů můžeme pozorovat, jak nám postupně roste pravděpodobnost s každým dalším hodem. Přes 50 % se dostaneme po čtvrtém hodu. Můžeme též pozorovat, že ve jmenovateli jsou mocniny čísla šest podle toho, o jaký hod se jedná. V čitateli jsou též mocniny, tentokrát čísla pět, a vždy o jedna menší, než je počet hodů, což představuje počet předchozích vždy neúspěšných hodů. Odvozením z pozorování bychom našli i algebraickou cestu, kterou lze úloha též vyřešit.

K vyřešení úlohy tak nepotřebujeme znát vzorce, či mít dovednosti s exponenciální funkcí a logaritmy, na jejichž použití úloha spěje při zvolení algebraické cesty. Úlohu jsme efektivně vyřešili strategií systematického experimentování.

3.3.4 Konkretizace a zobecnění

Tato strategie slouží k porozumění vět a problémů. Při konkretizaci chceme žáky seznámit se speciálním případem problému, abychom ho žákům přiblížili. Můžeme hledat další konkrétní případy, než přejdeme k obecnému řešení úlohy (Kopka, 2013, Novotná et al., 2016).

Konkretizace nám může pomoci, dostat se ze situace, kdy nevíme, co dělat dál. Nepomůže nám sice problém vyřešit, ale může nám pomoci najít zákonitosti, vztahy a cestu, jak se dostat z daného problému. Zobecnění nám následně pomůže konkrétní případy interpretovat pomocí jejich obecného vyjádření, většinou na základě vztahu, který je nám znám v jeho konkrétní podobě (Kopka, 2013).

Vzorová úloha 6: Pravděpodobnost, že se narodili dva lidi ve stejný den v týdnu, je $\frac{1}{7}$. Kolik lidí se musí potkat, aby byla pravděpodobnost alespoň 60 %?

Při řešení úlohy použijeme následující myšlenku. Neurčuji pravděpodobnost, že se potkají, nýbrž že se nepotkají lidé se stejným dnem narození, tedy opačný jev. Už v případě tří lidí by se mi totiž mohlo stát, že všichni tři budou narozeni v tentýž den, což je samozřejmě též validní řešení.

Začneme úvodní tezí: oba jsme se narodili v tentýž den v týdnu. To znamená, že v jeden konkrétní den ze sedmi, což má pravděpodobnost $\frac{1}{7}$. Jiným postupem, určujeme-li pravděpodobnost opačného jevu, můžeme využít konkretizace. Pakliže jsem se narodil v neděli, druhý člověk se musí narodit v jednom ze zbylých šesti dnů, abychom se nenarodili ve stejný den. Pravděpodobnost opačnému jevu je tak rovna $\frac{6}{7} = 0{,}857 = 85{,}7\ \%$[14]. Číselným vyjádřením nám tak opět vychází $1 - 85{,}7\ \% = 14{,}3\ \%$

Pro setkání tří lidí už budeme určovat jen opačný jev. Opět platí, že chceme nalézt pravděpodobnost situace, kdy jsme se nenarodili nikdo ve stejný den. Narodil-li jsem se v neděli, tak druhý se mohl narodit jen ve zbylých šesti dnech. Narodil-li se například v sobotu, pak na třetího zbývá jen pět dnů, čemuž odpovídá pravděpodobnost $\frac{5}{7}$. Výsledná pravděpodobnost se tak bude rovnat $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{49} = 0{,}612 = 61{,}2\ \%$. Pravděpodobnost jevu opačného je poté rovna $1 - 61{,}2\ \% = 38{,}8\ \%$. Zbytek úlohy dořešíme systematickým experimentováním (tabulka 3.3).

[14] V úloze užívám zaokrouhlení na tři desetinná místa. Kvůli zlomkům s vysokým jmenovatelem je toto vyjádření přehlednější a lépe uchopitelné.

Tabulka 3.3: Řešení vzorové úlohy 6

Počet lidí	V jiný den	Ve stejný den	%
2	0,857	0,143	14,3 %
3	0,612	0,388	38,8 %
4	0,350	0,650	65,0 %
5	0,150	0,850	85,0 %
6	0,043	0,957	95,7 %
7	0,006	0,994	99,4 %

Z tabulky 3.3 vyplývá, že stačí čtyři lidi, abychom se dostali nad 60 %. Nutno podotknout, že tento postup bychom ideálně chtěli vyjádřit obecně. Pro tuto úlohu však není nutné hledat obecné řešení. Pokud se potká více než sedm lidí, máme jistotu, že alespoň dva se narodili ve stejný den na základě Dirichletova principu (oddíl 3.4.3). Tím jsme dokázali, že pro počet lidí větší než sedm, nemá smysl počítat pravděpodobnost.

Použití zobecnění a následné obecné řešení problému je pro žáky na ZŠ často nemožné. Většinou nás vede do složité algebraické cesty (oddíl 3.4.1). V uvedené úloze spočívá zobecnění v tomto pozorování. Můžeme pozorovat, že v čitateli se nám objevuje číselná řada. Když se nám potkají 3 lidé, v čitateli máme $7 \cdot 6 \cdot 5$ (v řešení úlohy sedmičku zanedbáváme, protože je stoprocentní pravděpodobnost, že se s nikým jeden člověk nenarodil ve stejný den, když je tam sám). Toto číselné vyjádření se dá zapsat pomocí faktoriálů jako $\frac{7!}{4!}$. Obecně bychom pak toto pozorování mohli vyjádřit jako $\frac{7!}{(7-n)!}$, kde n je počet lidí, kteří se potkají. Ve jmenovateli máme opakující se sedmičku v každé části $- 7^n$. Výsledná rovnice o jedné neznámé by tak byla $P(A) = \frac{\frac{7!}{(7-n)!}}{7^n}$ a z ní bychom počítali opačný jev. Tato rovnice je neřešitelná i pro žáky SŠ.

3.3.5 Analogie

Analogii využíváme, když máme nějaký jev, s kterým jsme se například nesetkali, ale můžeme ho přirovnat k jevu, s kterým zkušenosti již máme. Celý problém tak můžeme přeformulovat do známé úlohy a k původní úloze se vrátit s již nabytými zkušenostmi (Kopka, 2013).

Vzorová úloha 7: Házíme šestnáctistěnnou kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že padne větší číslo než 9?

Záludnost úlohy může pro žáky spočívat v tom, že se s takovou hrací kostkou ještě nesetkali.

Úlohu můžeme přeformulovat pro standardní hrací kostku: Jaká je pravděpodobnost na standardní hrací kostce, že padne číslo větší než 4? Taková čísla jsou dvě: pětka a šestka. Celkem má kostka šest stěn, a tedy šest variant, které můžeme hodit.

Na šestnáctistěnné hrací kostce to bude obdobné, máme šestnáct stěn, tedy šestnáct možností čísel, které můžeme hodit. Čísla větší než 9 opět můžeme zpracovat výčtem možností. Zjišťujeme, že jich je sedm, a to 10, 11, 12, 13, 14, 15 a 16. Výsledná pravděpodobnost, tak bude $P(A) = \frac{7}{16}$.

3.3.6 Geometrická cesta

Geometrická cesta je strategie, při níž úlohu interpretuji pomocí geometrického obrázku, náčrtu, který mi pomůže s vyřešením dané úlohy. Pro toto téma je tato cesta obtížně aplikovatelná, ačkoli lze nalézt úlohy, kde mi tato cesta pomůže lépe získat vhled do situace (Kopka, 2013).

Vzorová úloha 8: Z Národní třídy na Hradčanskou jezdí dvě tramvaje – číslo 2 a 18. Mohu tedy jet oběma spoji. Oba spoje jezdí v desetiminutových intervalech. Jaká je pravděpodobnost, že když přijdu na zastávku, pojede tramvaj do tří minut od mého příchodu?

Řešení a komentář k této úloze je uvedeno v portfoliu úloh (oddíl 4.3) spolu s dalšími podobnými úlohami v kontextu jízdních řádů.

3.4 Další strategie

V tomto oddíle jsou vyjmenovány další heuristické strategie, které lze využívat při řešení úloh. Pro moji práci jsou však méně významné, jelikož jejich využití k řešení úloh z pravděpodobnosti na ZŠ jsem žádné nenalezl. Proto jsou v textu uvedeny jen okrajově.

3.4.1 Algebraická cesta

Jedná se o strategii sestavování rovnice či soustav rovnic a jejich následné řešení. Tato strategie je pro žáky více abstraktní než strategie předchozí. Zároveň pro ně není ze své podstaty názornou. Žáci musí ovládat teorii daného tématu a technikám výpočtů, aby mohli metodu správně aplikovat, např. sestavit rovnice ze zadání (Kopka, 2013). Je to ale velmi užitečný, účinný a často používaný způsob pro řešení problémů.

Metoda je sice velmi užitečnou a účinnou v některých oblastech matematiky, pro moji práci je tato strategie nevhodnou. Rovnice v této oblasti nás často zavedou k počítání kombinačních čísel a faktoriálů, se kterými se žáci setkají nejdříve na SŠ. Příkladem je úloha na zobecnění (oddíl 3.3.4)

3.4.2 Cesta zpět

Hojně využívanou strategií je cesta zpět. Ta se používá při řešení geometrických úloh, rozborech konstrukčních úloh a konstrukcích důkazů, nejčastěji implikací. V posledním případě předpokládáme, že důkaz platí a z věty se snažíme odvodit to, co již víme, nebo něco, co obecně platí, či se dá snadno dokázat (Novotná et al., 2016).

Cestu zpět můžeme využít i na úlohách z pravděpodobnosti (a kombinatoriky), jen je to pro nás leckdy náročnější možnost než postupovat metodami pokus – omyl, odhad – ověření – korekce, či systematickým experimentováním.

3.4.3 Dirichletův princip

Dirichletův princip je metoda využívaná nejen v matematice. Je to tvrzení z oblasti teorie množin. Princip lze názorně ukázat na problému s holuby. Mám devět přihrádek v holubníku, ale deset holubů. Jak je rozmístím? Nejspíše budou dva holubi sdílet jednu přihrádku. Jestliže je tedy více objektů než přihrádek, pak minimálně jedna přihrádka bude obsahovat alespoň dva objekty (Kopka, 2013).

Dirichletův princip je možné aplikovat už na ZŠ, aniž by žáci tento pojem znali. V kombinatorických úlohách se vyskytuje častěji než v pravděpodobnostních. Jeho praktické využití jsme mohli vidět na vzorové úloze v oddílu 3.3.4.

4 Portfolio výukových materiálů s jejich řešením

V rámci portfolia pokrývám odborné způsobilosti stanovené Globálním rámcem. Úlohy jsou rozdělené dle prostředí, ve kterém se odehrávají. V rámci jednoho tematického celku uvádím úlohy v takovém pořadí, aby tvořily sérii gradovaných úloh. Záměrně nejsou úlohy rozdělené dle ročníků, protože jednotlivé školy si zařazení jednotlivých výstupů určují sami svým školním vzdělávacím programem.

Každá úloha obsahuje komentář vysvětlující můj záměr zařadit ji do portfolia a poznámky k dané úloze. K ní je v závorce přidán kód, který úlohu přiřazuje k odborným způsobilostem z Globálního rámce. Řešení úloh jsem koncipoval tak, aby obsahovalo otázky, které lze žákům pokládat. Rovněž jsou zde začleněná různá vizuální schémata, které žákům pomohou s představou situací

4.1 Kouzelník

Známý kouzelník má obrovskou škálu svých triků. Pojďme některé z nich v následujících úlohách poodkrýt.

4.1.1 Karty

U těchto úloh doporučuji mít k ruce balíček karet pro lepší představu. Dle mých zkušeností mnoho žáků s kartami zkušenosti nemá, či je mají jen velmi omezené. Odborné pojmy z této oblasti (snímání, hodnoty karet[15] či barvy karet[16]) je lepší ukázat přímo na kartách.

Úloha 1: Na stole je rozloženo deset karet, z nichž jednu vybíráme. Je tam sedm srdcových, dvě pikové a jedna křížová. Která karta bude nejspíš vybrána?

Poznámka: (P/N) Jedná se o úvodní, motivační úlohu do tématu. Ve třídě můžeme demonstrovat řešení úlohy na experimentu.

Řešení: Která karta bude nejspíše vybrána? Nabízí se varianta, že ta, od které je jich na stole nejvíce. Nejvíce máme srdcových, a to sedm. Jak to ověříme? Aby jich bylo jednoznačně

[15] Někteří žáci mohou mít zažité jiné názvosloví, co se týče hodnoty karet. Tato terminologie se mění i s použitými kartami. Zatímco u mariášových karet se karta označuje jako spodek, u kanastových (pokerových) jako kluk (ang. Jack). Svršek či filek je ekvivalentem pro dámu.

[16] Žáky je žádoucí seznámit také s karetními symboly, které budeme v úlohách používat. Karty se symbolem listu (♠) se označují jako pikové karty, karty se symbolem ♣ jsou křížové, karty se symbolem ♥ srdcové a karty se symbolem ♦ jsou kárové. Pikové a křížové karty jsou černé, kárové a srdcové červené.

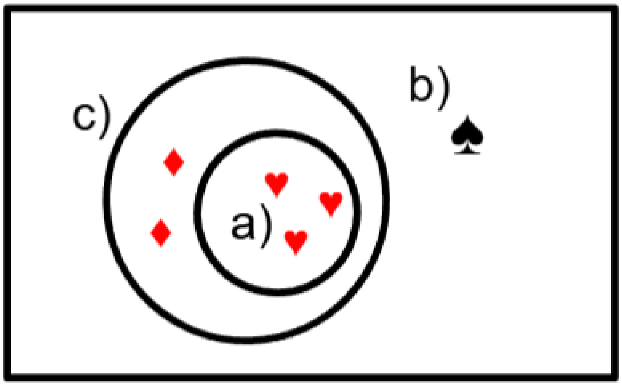
nejvíce, musí jich být více než polovina. V tomto případě pět. To splňujeme. Nejvíce bude srdcových.

Úloha je také řešitelná heuristickou strategií pokus – omyl, systematickým experimentováním či analogií.

Úloha 2: Tentokrát vybíráme z šesti různých karet, z nichž jsou tři srdcové, dvě kárové a jedna piková. Kterým slovem byste popsali předpověď, že z nich vybereme **a)** srdcovou, **b)** pikovou, **c)** červenou kartu?
Jisté Skoro jisté Pravděpodobné Nepravděpodobné Skoro nemožné Nemožné

Poznámka: (PPS) Jestliže se jedná o první setkání žáků s podobnými pojmy, měla by se o jejich významu rozproudit diskuse. Jev jistý a nemožný jsou jednoznačně definovány v rámci definice pravděpodobnosti. Tu však, předpokládejme, žáci dosud neznají. Slova se však používají i v běžném jazyce, nejen v matematice, proto zde nepředpokládám zásadní potíže při objasnění jejich významu.

Řešení: Srdcové máme tři karty, pikovou jednu. Kolik máme červených? Červené jsou kárové a srdcové dohromady. Těch máme celkem pět. Čím více karet na výběr, tím je větší šance, že kartu vybereme. To víme již z předešlé úlohy. Nejpravděpodobněji vybereme červenou kartu, pravděpodobně vybereme srdcovou a nepravděpodobně vybereme pikovou kartu. Toto si můžeme ověřit i na Vennově diagramu.



Většinu prvků obsahuje velká množina c) s červenými prvky, celkem jich je pět. Množina a) obsahuje tři (srdcové) prvky a množina b) jeden (pikový) prvek. Celkem jich je v prostoru šest. Nyní bychom dle definice mohli spočítat pravděpodobnost. Nám postačilo určení poměrem.

Výběr červené můžeme popsat též jako „skoro jisté“. Přesné vymezení těchto popisných slov není, tudíž se můžeme přiklonit k oběma variantám.

Úloha 3: S kartami určenými ke hře prší[17] hrajeme hru „Větší, menší“. Od každé hodnoty máme právě jednu kartu. Kouzelník otočí kartu a já se rozhoduji, zda bude následující karta větší, či menší. Zahlásím, jak jsem se rozhodl, a otáčím kartu z balíčku. Pokud jsem se trefil, vyhrál jsem. Role se v dalším kole střídají. Kdo vyhraje spíše? **I)** Kouzelník otočil desítku a já jsem zvolil vyšší. **II)** Já jsem otočil svrška (královnu) a kouzelník zvolil nižší.

Poznámka: (P/N) Otázka se přímo neptá na pravděpodobnost, ale úloha se jí úzce dotýká. Je žádoucí princip hry ukázat ve třídě na kartách, ať žáci plně pochopí, v čem tato hra spočívá. Na tuto úlohu navazují další úlohy ke stejné hře.

Řešení: Kouzelník otočil desítku. Co to pro nás znamená? My musíme otočit spodka, svrška, krále či eso. Jak je na tom kouzelník? Ten musí otočit spodka, desítku, devítku, osmičku, či sedmičku. Zatímco my máme čtyři varianty karet, abychom vyhráli, kouzelník jich má pět. Spíše vyhraje kouzelník (má větší pravděpodobnost výhry).

Úlohu jsme řešili výpisem a metodou pokus – omyl.

Úloha 4: Navažme na předchozí úlohu. Kouzelník si táhne kartu. Jakou kartu si musí vytáhnout, abychom měli největší šanci vyhrát? Kdy je šance nejmenší? Předpokládejme, že volím vždy pro mne výhodnější variantu z „větší, menší“.

Poznámka: (P/N) Tato úloha je takovým malým zkoumáním. Zjistíme zde, jestli žáci úlohu skutečně pochopili.

Řešení: Máme osm hodnot karet. Kolik variant na vítězství bude, když si kouzelník vytáhne sedmu? K vítězství nám bude stačit osma, devítka, desítka, spodek, svršek, král, eso, celkem 7 karet. Jak to bude s devítkou? Mohu vyhrát již jen s desítkou, spodkem, svrškem, králem a esem – celkem pěti kartami. S další kartou v pořadí akorát ubereme jednu možnou kartu.

---

[17] Tyto karty se tradičně označují jako mariášové. Žáci se s tímto pojmem však velmi zřídka setkají, proto užívám netradičního označení. Karet je třicet dva, po čtyřech barvách, od sedmy do esa. Po desítce následuje spodek, svršek, král a eso.

Kdy se nám to ale zlomí na druhou stranu neboli bude více nižších karet než vysokých? To můžeme porovnat v tabulce.

Hodnoty	"Vyšší"	"Nižší"
Sedma	7	0
Osma	6	1
Devítka	5	2
Desítka	4	3
Spodek	3	4
Svršek	2	5
Král	1	6
Eso	0	7

V tabulce můžeme pozorovat, že mezi desítkou a spodkem se nám číslo láme. Když si kouzelník vytáhne desítku, hrajeme vyšší, když spodka, hrajeme již nižší s možností čtyřech karet na vítězství. Nejmenší šance na vítězství je právě u těchto hodnot. Naopak největší šance je, když padnou krajní hodnoty – sedma a eso, ty berou ve hře vše, a tak jistě vyhrajeme.

V úloze užíváme konkretizace a systematického ověřování, kterým jsme vytvořili tabulku. Úloha je řešitelná i metodou pokus – omyl.

Úloha 5: Nyní hru ztížíme. Pokud zahlásím nevýhodnou variantu, hraji o dvojnásobek. Která karta bude pro mě nyní nejvýhodnější? Vyplatí se tento risk vůbec někdy?

Poznámka: (PEJ) Úloha navazuje na předešlou úlohu. Zde bude třeba vyčíslit pravděpodobnost. Zda se skutečně vyplatí dvojnásobek za alespoň poloviční pravděpodobnost, by mohlo být podnětem k diskuzi ve třídě.

Řešení: Vyberme například devítku. Za standardních podmínek bychom zahlásili „vyšší" a měli bychom pět možností k vítězství ze sedmi zbylých karet. Při zahrání „menší" bychom měli sice jen dvě možnosti – sedmu a osmu ze sedmi karet, ale dvojnásobek výhry. Kdy se to vyplatí? V balíčku již máme jen sedm karet a vítězné varianty se nám s každým dalším číslem snižují. Když tato čísla dáme do poměru, získáme pravděpodobnost. Počítejme, že po vynásobení nižší pravděpodobností (jedná se o jev opačný k výhodnější variantě) dvěma bychom se měli minimálně dostat na stejnou hodnotu, jako když zahlásíme lepší variantu. To si opět můžeme zanést do tabulky.

Hodnoty	"Vyšší"	P(A)	"Nižší"	P(Ω-A)
Sedma	7	100 %	0	0 %
Osma	6	85,71 %	1	14,29 %
Devítka	5	71,43 %	2	28,57 %
Desítka	4	57,14 %	3	42,86 %
Spodek	3	42,86 %	4	57,14 %
Svršek	2	28,57 %	5	71,43 %
Král	1	14,29 %	6	85,71 %
Eso	0	0 %	7	100 %

V tabulce můžeme pozorovat, že jediná varianta, kdy se nám to může vyplatit, je, když nám padne právě hodnota s nejmenší pravděpodobností na vítězství a zkusit opak. Když kouzelník otočí desítku, zkusíme „nižší“ za dvojnásobek a když spodka, tak vyšší za dvojnásobek.

Bude pro mě tato karta nejvýhodnější? Nebude. Když kouzelník otočí krajní hodnoty, jistě vyhrajeme a když hodnoty před nimi (eso a osmu), tak též pravděpodobněji vyhrajeme více peněz než s desítkou či spodkem za dvojnásobek.

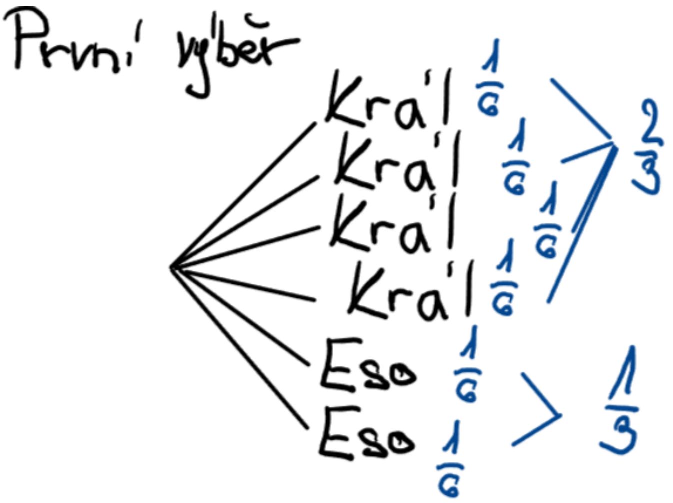
V úloze využíváme konkretizace a systematického ověřování. Úloha je řešitelná metodou pokus – omyl a zobecněním přes počítání pravděpodobnosti opačného jevu ve zlomcích.

Úloha 6: Nyní má u sebe kouzelník šest karet – čtyři krále a dvě esa. Vytáhne kartu a odkládá ji vedle sebe na hromádku. To provede celkem dvakrát. Určete pravděpodobnost, že v hromádce budou **a)** dva králové, **b)** dvě stejné, **c)** dvě rozdílné karty.

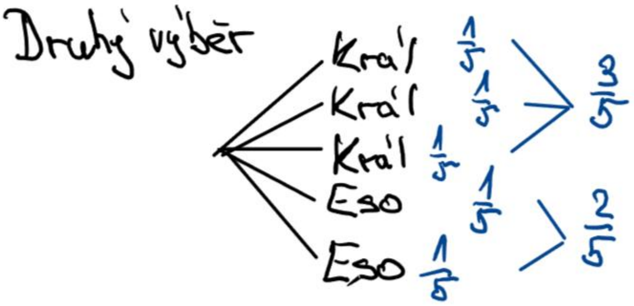
Poznámka: (2SJ) U této úlohy je důležité si představit všechny možnosti co mohou nastat. Že jsou v hromádce dva králové, není stejný jev jako, že jsou v hromádce dvě stejné karty. Zároveň je to také pro žáky jedna z prvních úloh, kde karty nevracíme a s tím musí též pracovat. Na podúloze c) se dá žákům představit opačný jev.

Řešení:

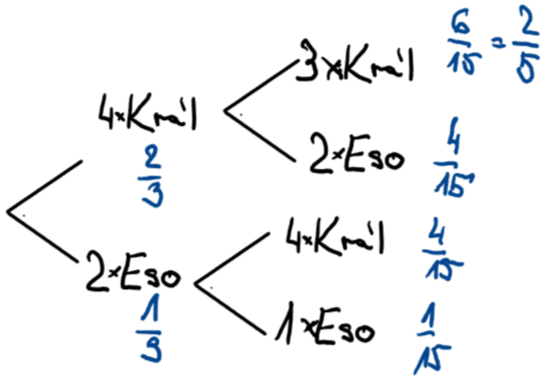
a) Jaká je pravděpodobnost, že si kouzelník při prvním výběru vytáhne krále? Máme čtyři krále ze šesti karet. To si můžeme rozkreslit i do diagramu.



Vidíme, že po rozvětvení je pravděpodobnost, že si vytáhneme krále rovna $\frac{2}{3}$. Bude tomu i tak při druhém výběru karty? Nebude. Nyní totiž máme jen tři krále a pět karet:

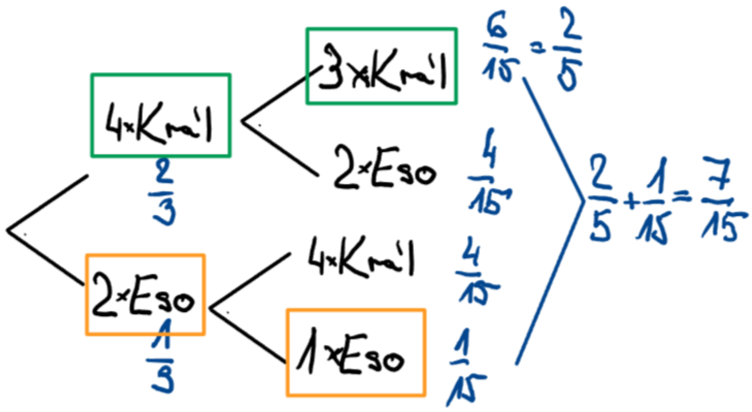


Výsledná pravděpodobnost bude rovna součinu obou získaných pravděpodobností dle pravidla součinu: $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Předešlou úvahu lze potvrdit na diagramu. Pravděpodobnost, ze které vycházíme, se dělí stejným dílem mezi všechny větve. Těch máme pět, tři větve pro krále a dvě pro esa. Jedna větev (vycházející od králů) má hodnotu $\frac{2}{15}$:



b) V předchozí úloze, jsme si rozkreslili celý stromový diagram. Můžeme z něj čerpat při řešení dalších podúloh. Jaká pravděpodobnost bude, že si kouzelník vybere dvě stejné karty? Může si vybrat dvě esa nebo dva krále.

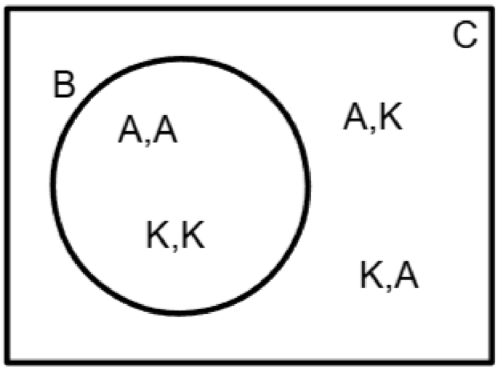
Pravděpodobnosti obou jevů dle pravidla součtu sčítáme:



Pravděpodobnost, že nám padnou dvě stejné karty, je rovna $\frac{7}{15}$.

c) Stejnou strategii, jakou jsme došli k řešení podúlohy b), můžeme použít zde. Sečteme pravděpodobnosti jevu, kdy kouzelníkovi nejprve padne král a poté eso, s jevem, kdy padne nejprve eso a poté král: $\frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$.

K řešení lze přistoupit i jiným způsobem. Z řešení podúlohy b) víme, že pravděpodobnost, kdy nám padnou obě karty stejné, je $\frac{7}{15}$. Jedná se o opačný jev k c), tudíž pravděpodobnost jevu C lze vyčíslit (oddíl 2.1): $P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$. Lze to ostatně pozorovat i ve Vennově diagramu[18]:



4.1.2 Mince

Kouzelník hází mincí. Vždy začíná stejně. Na palci má položenou minci rubovou stranou nahoru (strana s hodnotou mince, též „panna“)[19] a vycvrnkne ji nahoru. Mince mu dopadne do dlaně a on ji otočí na hřbet ruky.

Úloha 7: Kolik otočení ve vzduchu musí mince udělat, aby hodil pannu? **I)** lichý **II)** sudý počet

Poznámka: (P/N) Úloha je zde zařazena jako vstupní úloha pro seznámení s tématem.

Řešení: Pokud minci vycvrnkne bez rotace (0 rotací odpovídá sudému počtu rotací), mince mu na dlaň dopadne pannou nahoru. Na hřbet ruky minci jednou otáčí a odhaluje orla. Kouzelník potřebuje hodit pannu, což znamená, že odpovědí bude první možnost. Když se mince otočí ve vzduchu jednou (a tudíž i třikrát, pětkrát, …), dopadne kouzelníkovi do dlaně orlem nahoru. Po otočení na hřbet dostane pannu.

V úloze jsme využili metody pokus – omyl a konkretizace. Dále by se dala využít analogie.

[18] V diagramu máme v množině B dvojice stejných karet, mimo množinu máme dvojice, které jsou různé. Pro výpočet pravděpodobnosti jevu C můžeme tak využít opačného jevu.

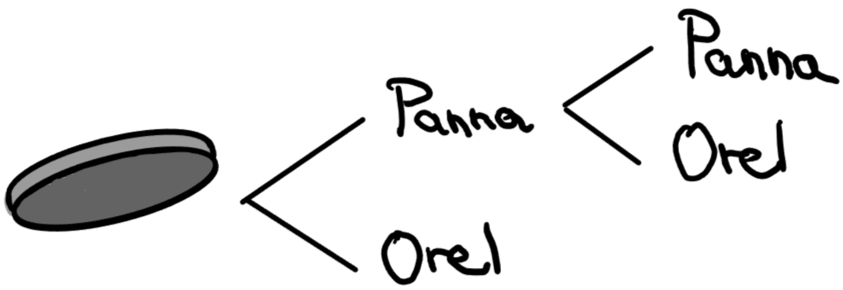
[19] Rubová strana mince, kde je vyražena její hodnota, se při hodech mincí označuje jako „panna“. Lícní strana, na které nalezneme českého lva, se označuje jako „orel“. Pojmenování pochází patrně z dob rakouské monarchie, kdy byla na mincích rakouská orlice.

Úloha 8: Kterým slovem byste popsali předpověď, že se kouzelníkovi pannu **a)** podaří hodit napoprvé, **b)** podaří hodit dvakrát po sobě **c)** nepodaří hodit nikdy?

Jisté   Skoro jisté   Pravděpodobné   Nepravděpodobné   Skoro nemožné   Nemožné

Poznámka: (PPS) V této úloze jde o porovnání jevů, jejichž pravděpodobnost nepotřebujeme vyčíslovat. V podúloze c) může žákům dělat problémy představa, co znamená nekonečný jev, že pannu nehodí nikdy. Rovněž popsat takový jev slovem může být pro žáky náročné.

Řešení: Co může při prvním hodu kouzelník hodit? Pannu nebo orla. Když se mu povede hodit pannu napoprvé, musí ji potvrdit druhým hodem, kde může hodit orla. Spíš hodí kouzelník pannu napoprvé než dvakrát po sobě. To si můžeme lépe představit i na stromovém diagramu:



Co když kouzelník nehodí pannu nikdy? Bude neustále jen házet orla. Může to nastat? Teoreticky ano, prakticky spíše ne. Někdy mu panna padnout musí. Tento jev bychom proto určili jako nemožný.

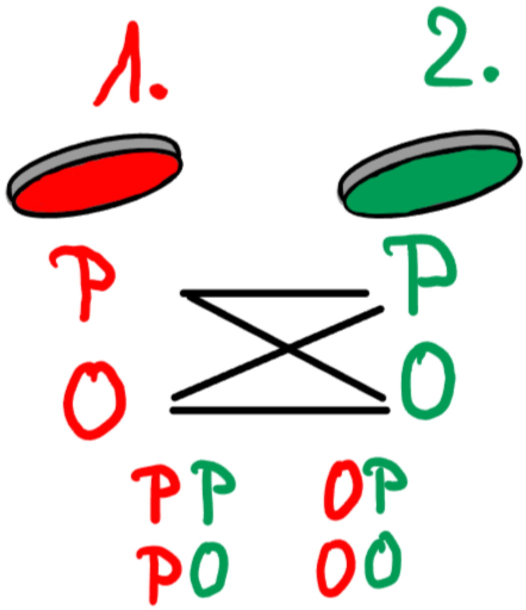
Jevy bychom tak popsali jako pravděpodobné, že kouzelník hodí pannu napoprvé, nepravděpodobné, že kouzelník ji hodí dvakrát po sobě a (skoro) nemožné, že kouzelník ji nehodí nikdy.

V řešení úlohy se dají využít metody pokus – omyl a analogie.

Úloha 9: Adam, Břéťa a Cyril hrají s mincemi hru. Hra se hraje na jeden hod dvěma mincemi najednou. Adam vyhraje, když padnou dvě panny, Břéťa, když padne dvakrát orel a Cyril, když padne každého strana mince právě jednou. Je tato hra spravedlivá? Za koho byste chtěli hrát v této hře? Jestliže není spravedlivou, jak by se mohla spravedlivou stát?

Poznámka: (MOP) Úloha je inspirována úlohou z učebnice Matematika (Hejný et al., 2016). Cílem úlohy je diskutovat nad spravedlností hry. Vnímání spravedlnosti her u žáků probouzí kritické myšlení a propojuje více očekávaných výsledků učení. Nástrojem může být pravděpodobnost.

Řešení: Situace, které mohou nastat máme popsané v zadání. Označíme si mince barevně – jedna bude červená a jedna zelená. Pojďme rozkreslit možné dvojice, které mohou padnout:



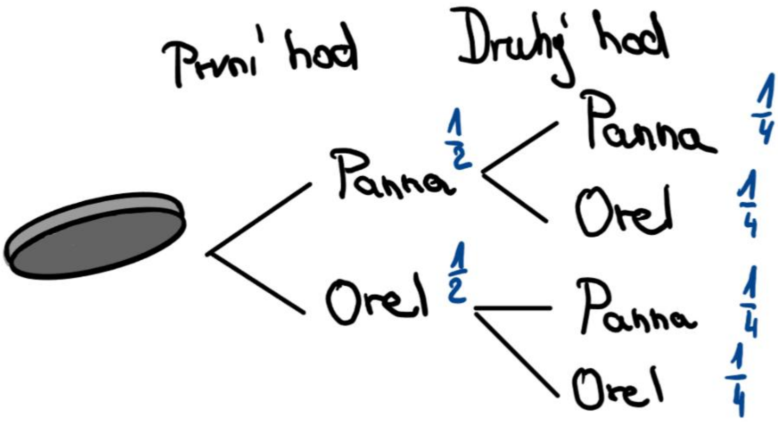
Vidíme, že zatímco dvě panny a dva orli mohou padnout jednou, panna s orlem může padnout dvakrát. Hra tím pádem není spravedlivá. Je dvakrát pravděpodobnější, že vyhraje Cyril než Adam, nebo Břéťa. Hrát bychom tedy měli chtít za Cyrila.

Při řešení se dají využít metody pokus – omyl a analogie.

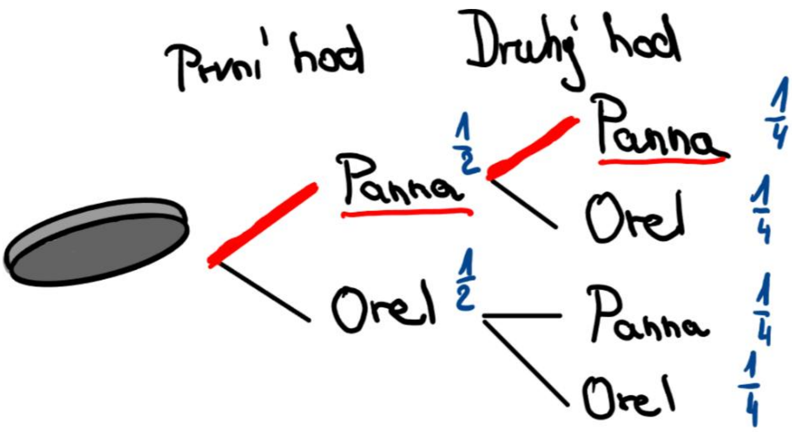
Úloha 10: Určete pravděpodobnost, že kouzelník hodí pannu **a)** dvakrát po sobě, **b)** poprvé ano, podruhé ne, **c)** právě jednou ze dvou pokusů **d)** alespoň jednou ze dvou pokusů.

Poznámka: (2SJ) Úloha je velmi podobná přechozí úloze jen s tím rozdílem, že cílem této úlohy je stanovit pravděpodobnost jednotlivých jevů.

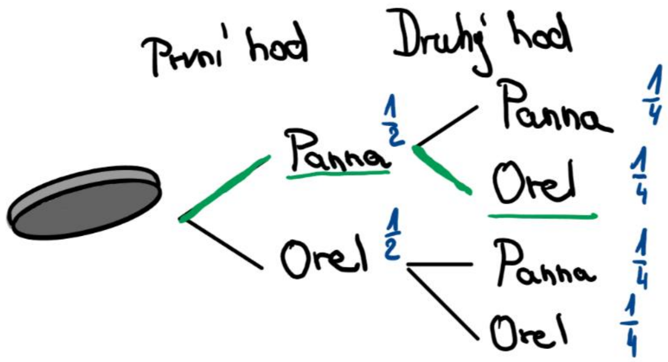
Řešení: Využijme diagramu z řešení přechozí úlohy. Kouzelník má vždy jen dva hody, s každým z nich se větev dělí na dvě větve (padne panna, nebo orel). Pravděpodobnost v každé větvi půlíme (princip z úlohy 8). Hodnoty pravděpodobnosti lze dopsat k jednotlivým jevům znázorněným ve stromu:



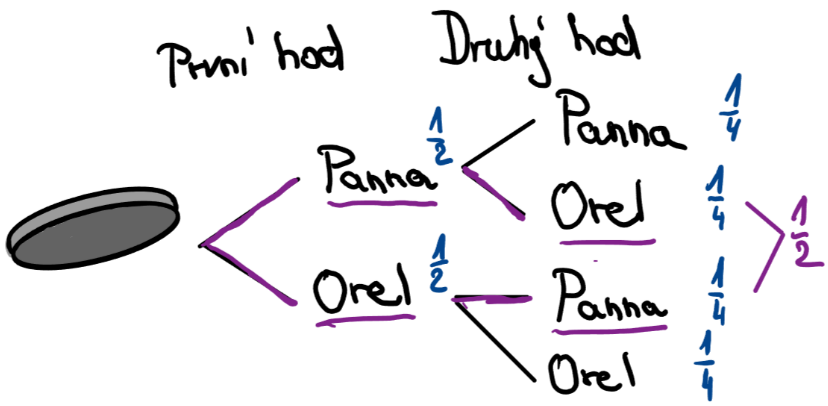
a) Panna padne dvakrát po sobě jen v nejsvrchnější větvi, tudíž je pravděpodobnost rovna $\frac{1}{4}$.



b) Nejprve padne panna a poté orel padne podle diagramu opět jen v jedné možnosti ze čtyř, tedy $\frac{1}{4}$.



c) Kdy hodíme pannu právě jednou? Jednou nám musí padnout orel. Když půjdeme systematicky, zaprvé lze hodit pannu na první hod. Na druhý hod musíme hodit orla. Zadruhé, hodíme-li orla, tak na druhý hod nám musí padnout panna. Případy máme dva[20], každý z nich má stejnou pravděpodobnost. Výsledná pravděpodobnost bude rovna $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$:



d) Kdy hodíme pannu alespoň jednou? V předchozí podúloze jsme ji hodili právě jednou. Chybí nám varianta, že padnou dvě panny, což splňuje tuto podmínku. K pravděpodobnosti z podúlohy c) musíme přičíst pravděpodobnost, že nám padnou dvě panny (podúloha a): $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

[20] Žáci, kteří nemají s pravděpodobností žádné zkušenosti, v této úloze chybují (Hejný et al., 2017). Domnívají se, že jsou možné jen tři možnosti: panna + panna, panna + orel a orel + orel. V takovém případě se doporučuje ověřit domněnku pokusem (Hejný et al., 2017), k čemuž podle mého názoru lze využít strategie systematického experimentování.

Podúloha d) lze efektivně řešit pomocí opačného jevu: panna nepadne žádná. Takový případ nastane, pokud nám na mincích padnou dva orli. Výslednou pravděpodobnost určíme výpočtem $1 - P(O,O) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, kde $P(O,O)$ nám označuje pravděpodobnost, že nám padnou právě dva orli.

Můžeme též využít metody pokus – omyl, analogie a systematické experimentování.

Úloha 11: Kolikrát padne panna průměrně z dvaceti pokusů? Udělejte si ve třídě experiment a porovnejte výsledky. Jak to, že se (ne)shodují?

Poznámka: (MOP) Úloha je přejatá z Globálního rámce (Rhodes et al., 2020). Tenhle experiment si mohou vyzkoušet žáci ve třídě. Lze na něj navázat diskuzí, jak je možné, že to vyšlo ve třídě jinak než na papíře.

Řešení: Mějme dvacet pokusů. Pravděpodobnost, že nám padne panna, je 50 % (neboli $\frac{1}{2}$). Kolikrát nám padne průměrně panna z dvaceti pokusů? Nabízí se čísla mezi sebou vynásobit: $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$. Jak je možné, že nám ve třídě panna padla průměrně dvanáctkrát (například), když výpočtem by průměrně měla padnout desetkrát? S větším počtem pokusů bude pravděpodobně odchylka od deseti menší. Úloha je řešitelná metodou pokus – omyl a analogií.

Úloha je řešitelná metodou pokus – omyl a analogií.

Úloha 12: Jak je možné, že kouzelník má 80% úspěšnost, že hodí pannu?

Poznámka: (MOP) Úloha navazuje na předešlou myšlenku, že průměr nevychází vždy přesně. Nyní nemáme zadaný počet hodů, ale úspěšnost kouzelníka. Nechme žáky, ať vymyslí důvody takto vysoké úspěšnosti.

Řešení: Nabízím zde některá případná vysvětlení. Kouzelník:

- měl nízký počet pokusů a velké štěstí. Z pěti hodů mu panna padla čtyřikrát.
- se naučil házet minci, tak aby se mu otáčela na určitý počet otáček ve vzduchu, podobně jako tomu bylo u úlohy 7.

- má cinklou[21] minci, na jedné straně je mince těžší. Další možností je, že s mincemi vyloženě švindluje.

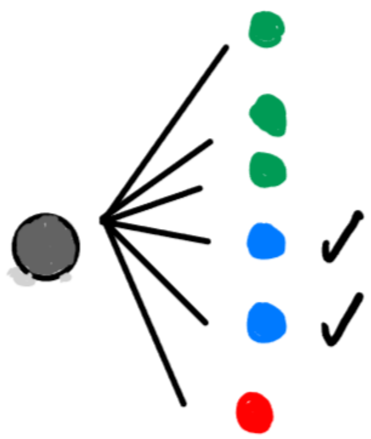
4.1.3 Barevné míčky

Hrajeme různé hry s barevnými míčky. Jsou spravedlivé, nebo nespravedlivé? Lze u nich švindlovat?

Úloha 13: V klobouku máme tři zelené, dva modré a jeden červený míček. Porovnejte následující situace. **I)** Vytáhneme modrý. **II)** Nevytáhneme zelený míček.

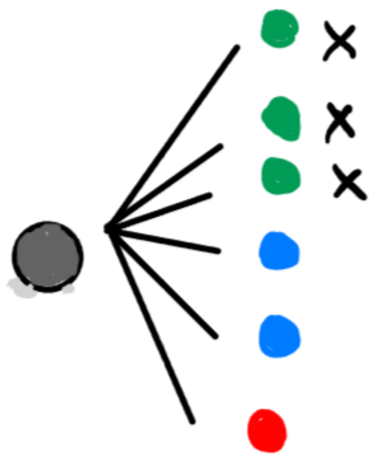
Poznámka: (P/N) Primárně je úloha zaměřená na porovnání pravděpodobností jevů. Otázka v úloze je záměrně takto zadaná. Chceme, aby si žáci uvědomili, co znamená záporka v zadání.

Řešení: Máme šest míčků, z nichž jsou dva modré. Taháme jednou. Kolik máme možností, že vytáhneme modrý míček? Dvě. Toto si můžeme rozkreslit:



Jev, že si nevytáhneme zelený míček, můžeme rozkreslit podobně:

[21] Slovo se užívá v kouzelnických tricích a kartách pro speciálně upravené pomůcky.



Zatímco modré míčky můžeme vytáhnout dva, u druhého případu máme možnosti tři. Druhý jev tak nastane častěji.

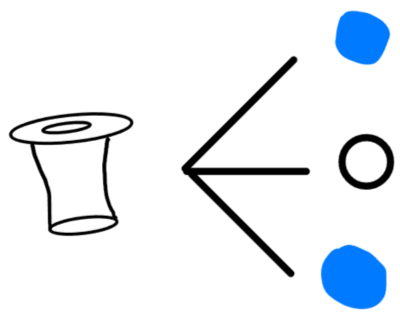
Úloha je řešitelná metodou pokus – omyl a analogií.

Úloha 14: V klobouku zbyly tři míčky, z nichž jsou dva modré a jeden bílý. Kterým slovem byste popsali předpověď, že si příště vytáhneme modrý míček?

Jisté Skoro jisté Pravděpodobné Nepravděpodobné Skoro nemožné Nemožné

Poznámka: (PPS) Úloha má spíše charakter cvičení. Žáci mohou aplikovat princip z předešlé úlohy. Můžeme též opakovaně zkusit experiment ve třídě. Na výsledky experimentu se lépe aplikují uvedená popisná slova.

Řešení: V klobouku máme tři míčky, dva modré a jeden bílý. Který míček nejspíše vybereme? Modrý, který je v klobouku víckrát. Situaci si opět můžeme rozkreslit:



Stále si ale nejsme jisti popisným slovem. Je jev pravděpodobný, nebo skoro jistý? Kdybychom vytáhli modrý devětkrát z deseti, tak to asi označíme za jev, který je blízký jevu jistému.

Zkusíme si ve třídě experiment. Sedmkrát z deseti jsme vytáhli modrý míček. Jev tak můžeme prohlásit za pravděpodobný.

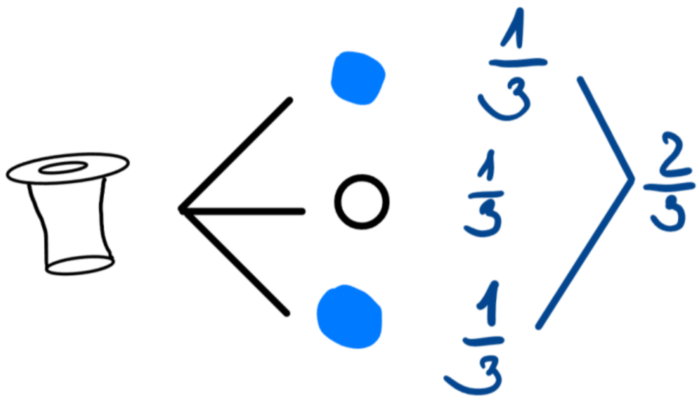
Úlohu jsme řešili analogií. Mohli bychom ji též řešit metodou pokus – omyl.

Úloha 15: Mějme stejnou situaci jako v předchozí úloze. Určete pravděpodobnost, že si **a)** nevytáhnu bílý míček, **b)** vytáhnu míček stejné barvy jako můj kamarád, který si vybírá po mně. Míček do klobouku nevracím

Poznámka: (PEJ, 2SJ) Úloha navazuje na předchozí úlohu. Nyní počítáme konkrétní pravděpodobnost jevů. Podúloha b) je úvodní úlohou ke složeným jevům.

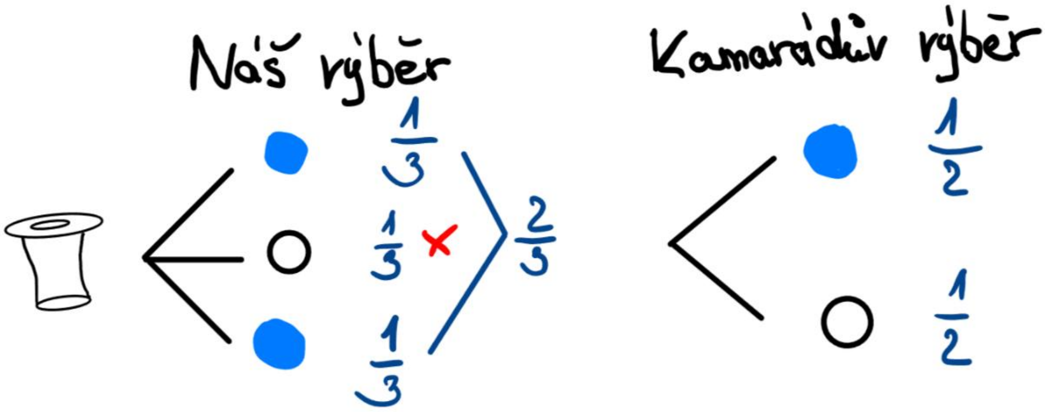
Řešení:

a) Můžeme použít schéma z předchozí úlohy. Co znamená, že si nevytáhnu bílý míček? Vytáhnu jeden ze dvou modrých. Celkem máme tři větve, ke každému z míčků. Pravděpodobnost, že vylosuji kterýkoli z nich, je stejná: $1 : 3 = \frac{1}{3}$.

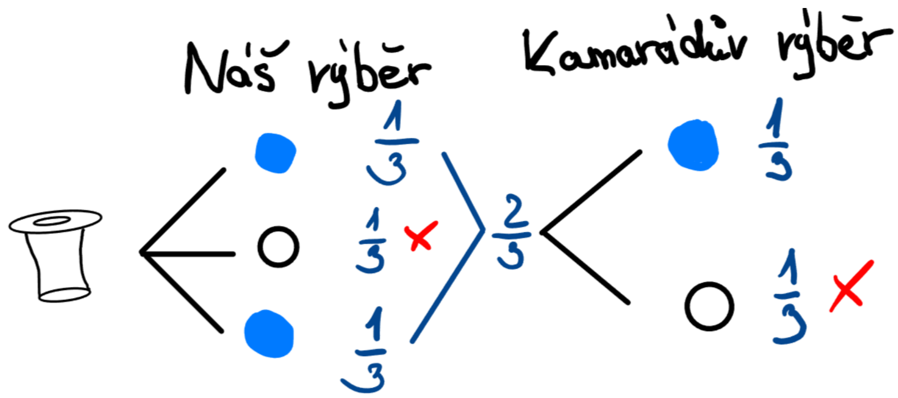


Modré míčky máme dva a můžeme vytáhnout kterýkoli z nich. Pravděpodobnost tak sčítám a výsledná pravděpodobnost, že vylosuji modrý míček, je rovna $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

b) Máme v klobouku dva modré míčky a jeden bílý. Když si vylosuji bílý míček, zbydou v klobouku jen dva modré, protože míčky do klobouku nevracím. Kamarád si nebude moci vylosovat míček stejné barvy. Musím si vylosovat modrý a kamarád také. Kamarád má na výběr jeden bílý a jeden modrý míček:



Pravděpodobnost, že si vybereme modrý míček, je rovna $\frac{2}{3}$ a pravděpodobnost, že si kamarád vybere modrý míček, je rovna $\frac{1}{2}$. Nejprve musím vybrat modrý já, aby mohl vybrat modrý i kamarád. Oba jevy tak můžeme zakreslit za sebou v diagramu (jeden závisí na druhém) nebo použít pravidlo součinu, abychom se dostali k výsledku: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

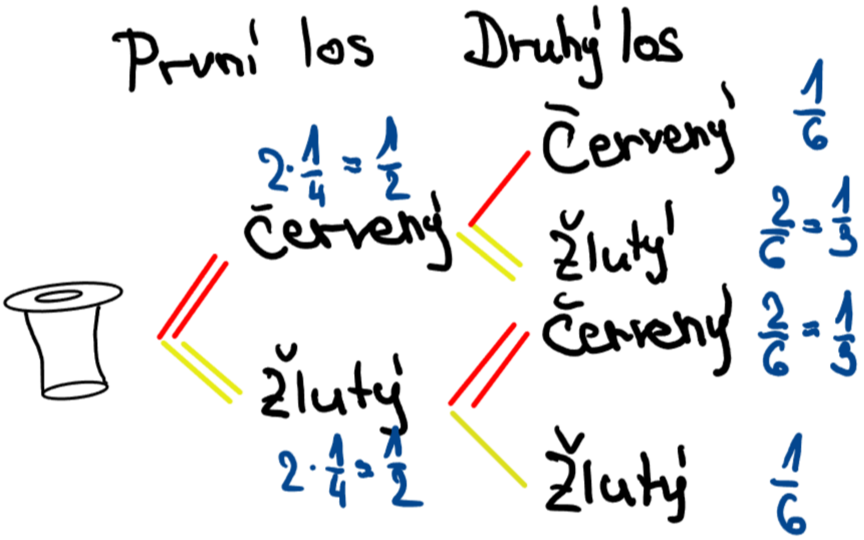


Úlohy jsou řešitelné metodou pokus – omyl. Během toho využijeme konkretizace a nejspíš i analogie.

Úloha 16: Adam, Břéťa a Cyril hrají s míčky speciální hru. V klobouku mají čtyři míčky – dva červené a dva žluté. Adam losuje míček z klobouku a schová jej za zády. Břéťa vylosuje míček po něm a též jej schová. Na pokyn Cyrila míčky ukazují. Pokud si oba vytáhnou červený míček, vyhrává Adam. Pokud si oba vytáhnou žlutý, vyhrává Břéťa. Když si vylosují každý jiný míček, vyhrává Cyril. Je hra spravedlivá? Za koho byste chtěli hrát?

Poznámka: (2SJ) Úloha je inspirována úlohou z učebnice Matematika C (Hejný et al., 2016) a podobná úloze 9 z oddílu 4.1.2. Řešení bude obdobné. Cílem úlohy je diskutovat nad spravedlností hry. Určení pravděpodobností může být argumentem. Žákům lze zadat instrukci k pozměnění principu hry, aby byla pravděpodobnost stejná jako s mincemi.

Řešení: Co může Adam vylosovat? Jeden ze dvou červených nebo jeden ze dvou žlutých. Šance je pro obě barvy stejná. Bude tomu tak i když losuje Břéťa? Nebude. Břéťovi totiž při losování chybí míček, který má Adam za zády. Použijme konkretizaci. Když by Adam vylosoval červený, Břéťovi v klobouku zbývají dva žluté a jeden červený. Rozkresleme si to diagramu. Když budeme mít dvě varianty, budeme je značit jako dvojitou cestu:



V diagramu vidíme, že hra není spravedlivá. Aby byla spravedlivou, museli by všichni chlapci mít pravděpodobnost výhry stejnou a to $\frac{1}{3}$. Hrát bychom rozhodně měli chtít za Cyrila, který má čtyřnásobnou šanci vyhrát než zbylí chlapci.

Jak úlohu pozměnit, aby byla totožná jako s mincemi? O co šlo u mincí? Každá mince má dvě strany. Musíme i tady dosáhnout stejného principu. Když budeme mít v klobouku jen dva míčky, jeden červený a jeden žlutý a Adam po vytažení si barvu zapamatuje a vrátí míček zpět. Břéťa tak vybírá znovu ze dvou. Tento princip si u mincí můžeme představit, že házeme jednou mincí dvakrát po sobě.

4.1.4 Kostky

Úloha 17: Na rozházení se s kostkou házíme jen jednou. Co padne na kostce spíše? **I)** prvočíslo **II)** číslo dělitelné dvěma

Poznámka: (P/N) Vstupní úloha seznamující žáky s hody kostkou. Rovněž si žáci mohou připomenout pojmy z dřívějška, jako jsou prvočíslo a dělitelnost.

Řešení: Jaká čísla mohou na kostce padnout? Čísla 1, 2, 3, 4, 5, nebo 6. Která z nich jsou prvočíslem? Prvočíslem je dvojka, trojka a pětka. Která čísla jsou dělitelná dvěma? Dva, čtyři a šest. Oba jevy mají tři možnosti, budou tak padat přibližně stejně často.

Úloha 18: Máme průměrnou úspěšnost **a)** 2:1, **b)** 1:1, že ve hře kouzelníka porážíme. Navrhněte takovou hru, která by úspěšnosti odpovídala. Je hra spravedlivá?

Poznámka: (MOP) Úloha navazuje na tu předchozí. Žáci si úspěšnost budou patrně vysvětlovat jako šanci.

Řešení: Nejprve vyřešme spravedlnost hry: a) nespravedlivá, b) spravedlivá. Při spravedlivá hře mají všichni hráči stejnou šanci vyhrát, což při úspěšnosti 2:1 dodrženo není.

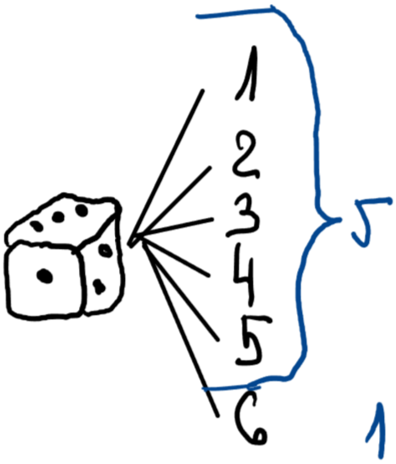
Kterou hru jsme mohli hrát? Vyjdeme-li z předchozí úlohy, mohli jsme házet a) „prvočíslo a jednička“ proti „není prvočíslo“ anebo „není dělitelné třemi“ proti „je dělitelné třemi“, b) „sudé“ proti „liché“ anebo „vyšší“ (6, 5, 4) proti „nižší“ (3, 2, 1).

Úloha 19: Nyní házíme s kostkou dvakrát. Hodíme poprvé, zapíšeme výsledek hodu a hodíme podruhé. Určete šanci, že **a)** na první hod hodíme šestku, **b)** hodíme dvě šestky **c)** hodíme alespoň jednu šestku

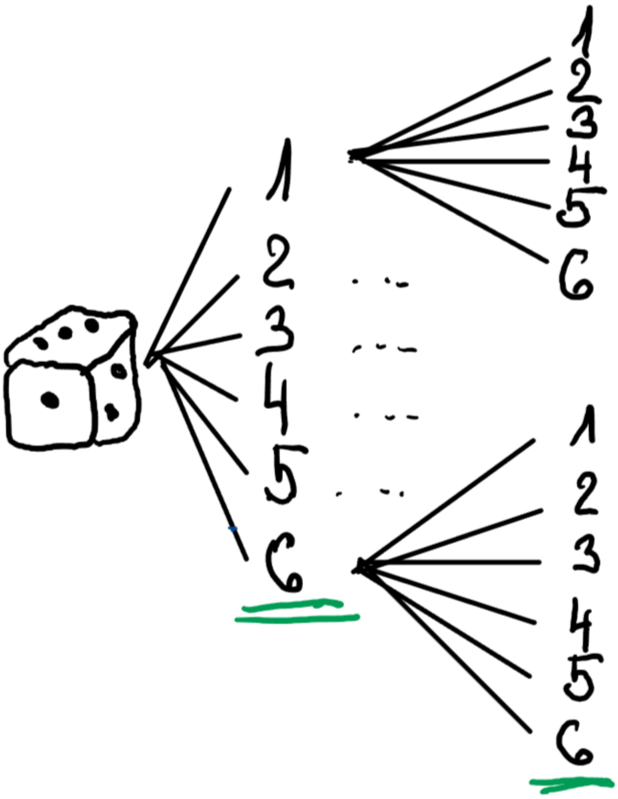
Poznámka: (2SJ) V této úloze určujeme hodnotu šance. Úloha je zde zařazena, aby žáci ekonomizovali svá řešení pomocí diagramů. Většina z nich nebude chtít rozkreslovat strom o třiceti šesti větvích.

Řešení:

a) Jaká bude šance, že hodíme jednu šestku? Jedná se o jedno číslo ze šesti na kostce, takže šance bude rovna $1:5$.



b) Jaká bude šance, že nám padne i podruhé? To si můžeme nakreslit do stromového diagramu. Na každý hod máme šest variant toho, co nám může padnout, celkem $6 \cdot 6 = 36$ variant. Kolik z nich obsahuje dvě šestky? Jen jedna. Šance je 1:35:



c) Kolik je variant, kdy hodíme alespoň jednu šestku? Když hodíme prvním hodem šestku, druhým hodem nám může padnout už cokoli. Máme další možnost? Máme. Když hodíme např. jedničku, máme stále jednu možnost, že nám padne šestka. Těch je pět, za každé jedno číslo, kdy se nám to nepovedlo prvním hodem. Celkem máme jedenáct variant, dvacet pět je jich tedy nepříznivých. Šance bude 11:25.

Úlohu můžeme řešit metodou pokus – omyl a systematickým experimentováním.

Úloha 20: Jakou pravděpodobnost bude kouzelník mít při hodu dvěma kostkami, aby hodil **a)** dvě stejná čísla, **b)** součet 7, **c)** součet 8.

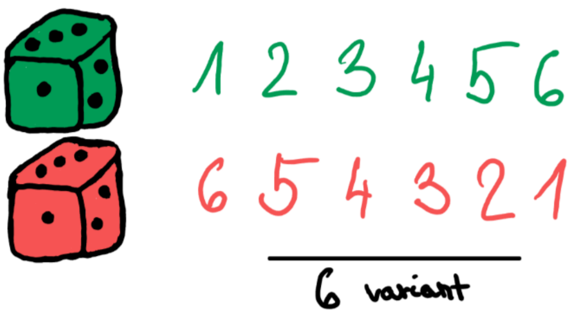
Poznámka: (2SJ, SPV) Navazujeme na poznatky získané v předchozí úloze. Žáci mohou využít výpisu možností. Opět cílíme na to, aby žáci hledali efektivní reprezentaci párů čísel, protože vypisovat hody do stromového diagramu bude zdlouhavé a nepřehledné.

Řešení:

a) Jaké máme možnosti? Třeba dvě jedničky, obecně dvě stejná čísla, celkem tedy šest variant. Kolik je celkem všech různých variant, které mohou nastat? Na jednu kostku šest variant, které mohou padnout, a na druhou také. Celkem tedy $6 \cdot 6 = 36$ variant. Výsledná pravděpodobnost bude podíl těchto výsledků: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Druhý pohled na úlohu může spočívat v tom, co nám může padnout, když budeme kostky házet po sobě. Na první kostce cokoli, to je jedno. Ale na druhé kostce už nám musí padnout stejné číslo jako na první, což odpovídá pravděpodobnosti $\frac{1}{6}$.

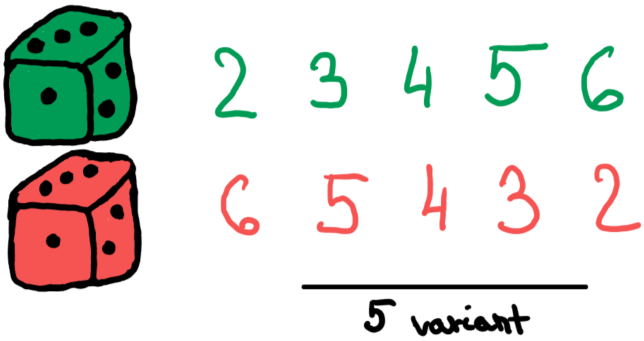
b) Jak nám může padnout sedma? Třeba šestka s jedničkou. Vypíšeme si všechny varianty. Nesmíme zapomenout na to, že 6+1 není to stejné jako 1+6. Každá z kostek je pro nás „jiná“. Označíme si je proto barevně:



Máme tedy šest možností z 36 všech možných variant: $6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Druhé uchopení úlohy opět spočívá v tom, že prvním hodem nám může padnout opět cokoli. Druhým hodem nám musí padnout číslo, které v součtu s prvním číslem dá 7, to znamená opět jedno konkrétní číslo, tudíž stejně jako v a): $\frac{1}{6}$.

c) Zde užijeme také systematického výpisu všech variant:



Celkem máme pět variant, kdy nám může padnout součet 8, proto: $\frac{5}{36}$.

Použijeme-li opět druhou metodu, prvním hodem může padnout cokoli kromě jedničky, pět variant, tedy pravděpodobnost $\frac{5}{6}$. Druhým hodem doplňujeme první číslo do osmi, a to je vždy po jedné možnosti: $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

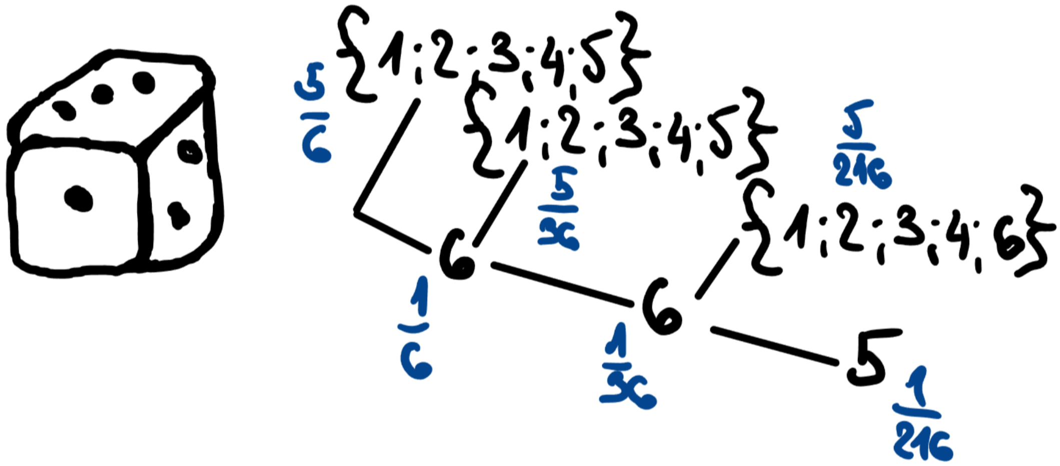
Úloha 21: V případě, že hodíme dvě stejná čísla, máme k dispozici jeden extra hod navíc. Jaká bude pravděpodobnost, že padne součet **a)** 17, **b)** 8?

Poznámka: (VSJ, SPV) Tato úloha rozvíjí předchozí úlohu novou podmínku. Pravděpodobnost všech možností zde není stejná.

Řešení:

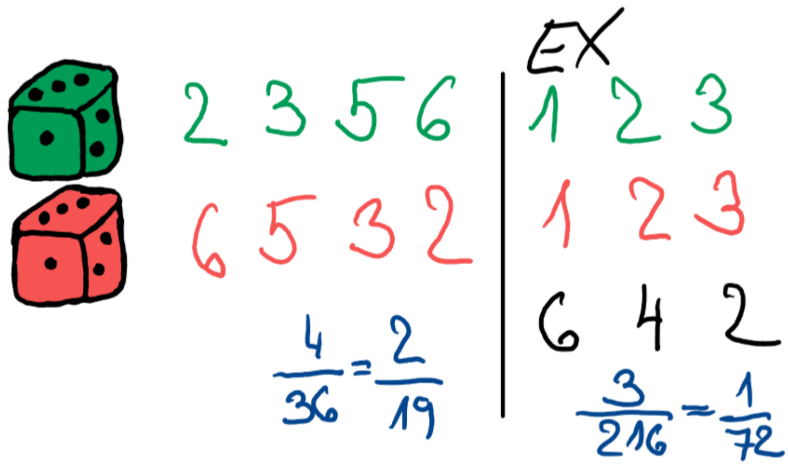
a) Jak nám může padnout součet 17? Musíme hodit dvě šestky, abychom dostali extra hod. Dvě pětky a šestka je totiž málo – součet je jen 16.

Máme tři hody celkem a každý je určený, co má padnout:



Výsledná pravděpodobnost bude $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. Díky tomu víme nyní pravděpodobnost každého jednoho jevu v extra hodu.

b) Pravděpodobnost, že nám padne součet 8, již víme. Změní nám pravděpodobnost extra hody? Ano. Kolik takových možností máme? Můžu využít dvě čtyřky? Nemohu. Po dvou čtyřkách následuje extra hod, takže nemohu tuto možnost započítat ani jako samotnou, ani s extra hodem. Uděláme si znova výpis všech možností.



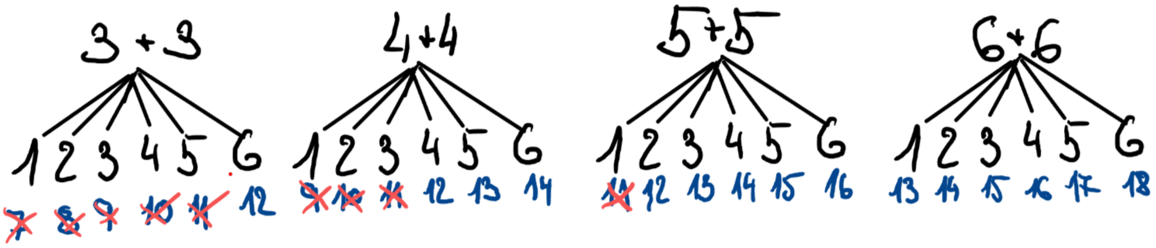
Vidíme, že máme čtyři varianty s dvěma hody a tři s extra hody. Pravděpodobnost, že padne součet 8, tak bude $\frac{4}{36} + \frac{3}{216} = \frac{27}{216} = \frac{3}{24} = 12{,}5\ \%$.

Úloha 22: Pokračujeme ve hře. Kouzelník chce hodit číslo větší než 11. Určete pravděpodobnost, že se mu to povede napoprvé. Jak tomu bude u druhého jeho pokusu?

Poznámka: (VSJ, SPV) Úloha navazuje na předchozí úlohu. Druhá otázka se dá pojmout různě. Můžeme v tomto bodu po žácích chtít, ať zakreslí situace, kdy se mu to podaří i kdy se mu to nepodaří. Úloha se dá modifikovat a pojmout ji jako zkoumání.

Řešení: Kouzelník chce hodit číslo větší než 11. Počítá se součet 11? Ne, musí součet být větší než 11. Co může tedy hodit na dva hody? Může hodit dvě šestky. Na ně navazuje extra hod.

Dá se tedy říct, že v této úloze budeme počítat jen extra hody. Pravděpodobnost, že nám padne jedna konkrétní možnost s extra hodem, je $\frac{1}{216}$. Zbylé možnosti si rozkreslíme:



Z diagramu můžeme vidět, že je celkem patnáct možností toho, co kouzelník může hodit. Pravděpodobnost tak určíme: $\frac{1}{216} \cdot 15 = \frac{5}{72} = 6{,}9\ \%$.

Jak tomu bude u druhého hodu? To je složitější problém. Použijme analogii s jednou kostkou. Když házíme dvakrát, násobíme pravděpodobnosti prvního a druhého hodu mezi sebou, např. dvojitá šestka: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Takže pravděpodobnost, že kouzelník hodí alespoň součet 12 i napodruhé, bude $\frac{5}{72} \cdot \frac{5}{72}$, což je zaokrouhleně 0,5 %. Jaká bude pravděpodobnost, že se mu to druhým hodem nepodaří? Pomocí opačného jevu: $1 - \frac{5}{72} = \frac{67}{72}$. Nyní nám zbývá jevy mezi sebou vynásobit a získáme výsledek, že kouzelník napoprvé hodí součet 12 a výš, ale napodruhé již ne: $\frac{5}{72} \cdot \frac{67}{72} = 6{,}5\ \%$.

4.2 Turnaj

Turnajové a zápasové úlohy odkazují na kombinatoriku a pomocí ní lze určovat pravděpodobnost.

Ve škole se pořádá fotbalový turnaj. Ten má dvě fáze: základní část a finále. Základní části se účastní čtyři týmy složené z žáků. Jména týmů byla volena podle šelem, či mytických zvířat – Draci, Tygři, Lvi a Fénixové. Dva nejlepší z nich se dostávají do finálového zápasu. Všechny týmy jsou stejně silné. Kdo nakonec turnaj ovládne?

4.2.1 Základní část

Za vítězství v zápase se udělují dva body, za porážku jeden bod. V základní části hrají týmy každý s každým jednou.

Úloha 23: Kolik se bude hrát utkání v základní části turnaje?

Poznámka: (SPV) Tato úloha nepatří přímo do tématu pravděpodobnosti. Jedná se o kombinatoriku. Vstupní úloha slouží jako příprava k dalším úlohám. Většina žáků se dle mých zkušeností setkala s tímto turnajovým systémem na kroužcích, a tak někteří budou tušit, jak úlohu vyřešit. Můžeme toho využít při skupinovém řešení úlohy.

Řešení: Máme čtyři týmy. Zakreslíme si je proto do čtverce. Jestliže hraje každý s každým, můžeme propojit všechny týmy.

Ze schématu vidíme, že je šest propojení, a tudíž šest zápasů. Ty si na závěr můžeme vypsat.

Úloha 24: Předpovězte, co se spíš stane. **I)** Draci ovládnou základní část **II)** Tygři neskončí poslední

Poznámka: (P/N) Cílem této úlohy je porovnat, který jev je pravděpodobnější. To lze i bez složitého výpočtu na základě pozice, kde mohou týmy skončit.

Řešení: V této úloze nejspíše žák využije metodu pokus – omyl. Je větší šance, že Draci vyhrají, nebo že Tygři neskončí poslední? Draci mohou skončit jen na prvním místě, žádná jiná možnost není. Kde ale mohou skončit Tygři? Nesmí být poslední. Mohou vyhrát? Ano.

Mohou skončit druzí? Ano, jen nesmí skončit poslední. Docházíme k závěru, že mohou skončit první, druzí a třetí, což je poměrně pravděpodobné. Zatímco Draci musí dle podmínky vyhrát, což je méně pravděpodobné.

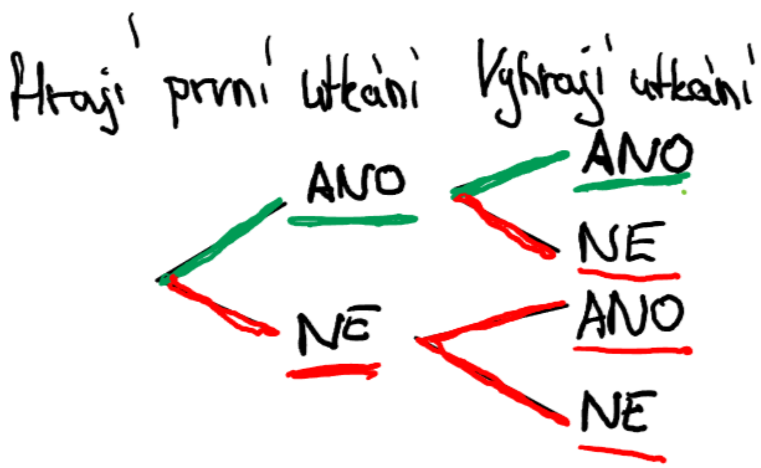
Úloha 25: Jaká je šance, že Draci **a)** hrají první utkání turnaje **b)** hrají a vyhrají první utkání turnaje **c)** hrají první utkání turnaje nebo vyhrají své první utkání na turnaji?

Poznámka: (PEJ, 2SJ) V této úloze žáci určují šanci. U podúlohy c) je záludnost v tom, že žáky by mohla překvapit spojka „nebo“.

Řešení:

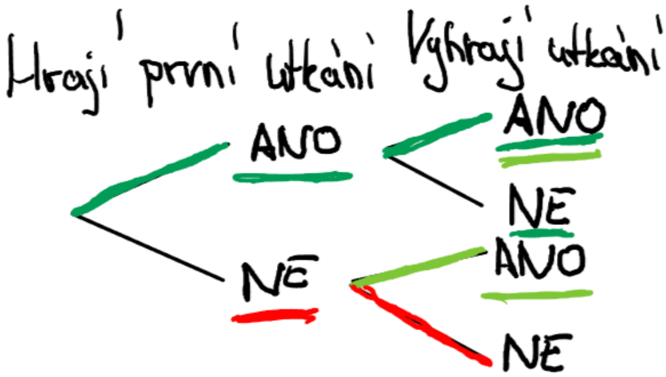
a) Draci hrají první utkání. Z úvodní úlohy víme, že se v turnaji hraje celkem šest utkání. Podívejme se tedy zpět do řešení úlohy 1. Tří utkání Draci odehrají, tři nikoli. Je úplně jedno, které z těchto šesti utkání se odehraje jako první. Šance, že budou hrát první utkání, tak je 1:1.

b) Zde skládáme dva jevy. Jsou na sobě jevy závislé? Musí hrát první utkání a vyhrát ho. Rozkreslíme si všechny možnosti, které mohou nastat:



Vidíme, že na jeden příznivý jev, připadají další tři, které neodpovídají zadání. Poměr tak bude 1:3.

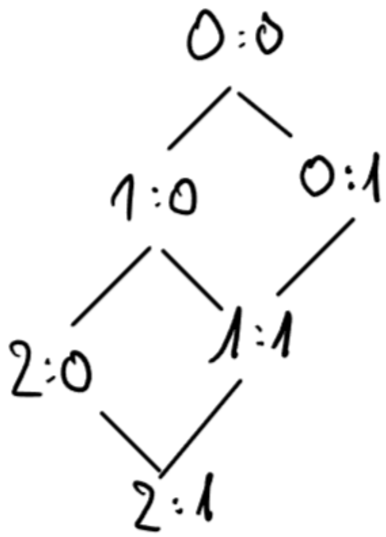
c) Využijeme stejný diagram. V horní větvi máme dva jevy, kdy první hrají první utkání. Také máme dva jevy, kdy své první utkání vyhrají. Co znamená spojka „nebo“? Stačí jeden z jevů, aby byl příznivý. Celkem máme tři jevy příznivé a jen jeden nepříznivý. Šance tak bude 3:1:



Úloha 26: První utkání skončilo 2:1 pro Draky. Jak se mohlo vyvíjet skóre? Kolik je takových možností?

Poznámka: (SPV) Opět se jedná o kombinatorickou úlohu, která slouží jako příprava k dalším úlohám z této sekce. Žáci mohou řešení rozkreslit do diagramu nebo rozepsat do tabulky.

Řešení: Využijeme konkretizace. Kdo dá první gól zápasu? To si rozkreslím do stromu. Strom podobně pokračuje až do stavu 2:1. Na závěr spočítáme možné cesty, kterými jsme k němu mohli dojít. Docházíme k celkem třem různým cestám.



Stejný postup nás navede do tabulky připomínající graf v souřadnicovém systému. Na ose x máme skóre „domácích“ Draků a na ose y skóre hostí. V grafu nalezneme bod [2; 1] (v tabulce buňku 2:1) a hledáme možné cesty, jak jsme sem mohli dojít. Budeme postupovat od kraje systematicky. Začneme ze stavu 2:0, ta je jen jedna. Ze stavu 1:0 dál může vést jen cesta do stavu 1:1 (2:0 máme již pokryté) a dále do 2:1. Z 0:0 mohu jít jen do 0:1 a odsud vede cesta jen jedna. Celkem jsme došli ke třem cestám:

0:1	1:1	2:1
0:0	1:0	2:0

Aplikujeme-li cestu zpět (strategie se nabízí vzhledem k tomu, že konečný stav známe a v předchozí strategii jsme si výsledky rozkreslili), můžeme si v úloze všimnout, že první dva góly mohou padnout téměř jakkoli a třetí gól k výsledku vždy dodáme jako korekci. Jedinou variantou, kdy tomu tak nebude, je, že hosté dají první dva góly a stav by byl 0:2. Tuto variantu odečteme. Na oba góly máme tedy dvě možnosti, kam mohou padnout, což jsou celkem $2 \cdot 2 = 4$, a jednu variantu odčítáme, proto tři.

Úloha 27: Kolik nejméně bodů bude stačit na postup do finále? Kolik by musely mít ostatní týmy? Navrhněte, jak bude výsledná turnajová tabulka vypadat?

Poznámka: (SPV) Tato úloha může být pro žáky, kteří se s turnaji nepotkávají, velmi náročná. Doporučuji proto postupovat metodou systematického ověřování. Rovněž si všechny kontroly můžeme provádět pomocí dělitelnosti. Za vítězství jsou dva body, za prohru jeden, tudíž za každý zápas rozdáme tři body, za celý turnaj osmnáct bodů. Jedná se o kombinatorickou úlohu, která může žákům pomoci při řešení poslední úlohy základní části turnaje.

Řešení: Draci všechny tři zápasy vyhrají. Celkem získají 6 bodů. Fénixové všechny prohrají. To jsou celkem 3 body. Na zbylé dva týmy připadá 9 bodů. Ty si rozdělí mezi sebou na 5 bodů pro první tým a 4 body pro druhý.

1.	První	Druzí	Třetí	Čtvrtý
Počet bodů	6	5	4	3
Počet výher	3	2	1	0

Dalo by se to celé zkomplikovat? Co když čtvrtý tým (Fénixové) vyhrají zápas? Draci budou mít stále 6 bodů za tři vítězství, ale Fénixové budou mít 4 body za jedno vítězství a dvě prohry. Zbývá 8 bodů. Ty musíme rozdělit opět mezi dva týmy. Kdyby jeden z nich měl tři prohry, vytvořili bychom stejné řešení jako v prvním případě. Oba týmy musí mít po čtyřech bodech. Jeden z těchto týmů (druzí) musí mít na kontě dvě prohry. Od prvních (Draků) a od posledních (Fénixů). Aby měl tým 4 body, musí třetí zápas vyhrát. Pro třetí tým dopočítáme vítězství, taky aby se celkový počet rovnal šesti:

2.	První	Druzí	Třetí	Čtvrtý
Počet bodů	6	4	4	4
Počet výher	3	1	1	1

Co když první celek bude mít na kontě také porážku? Počítejme s tím, že poslední tým opět prohrál všechna utkání. První tým nahraje 5 bodů, poslední 3 body, zbývá tak 10 bodů na zbylé dva týmy. Žádný nevyhraje všechna utkání, nezíská 6 bodů za tři vítězství, protože první tým je již dán. Oba týmy tak budou mít po pěti bodech. Využijeme-li stejné myšlenky i na počet vítězství, můžeme tabulku rovnou doplnit. Oba týmy budou mít po dvou výhrách. Jeden z nich musí vyhrát nad posledním i prvním týmem:

3.	První	Druzí	Třetí	Čtvrtý
Počet bodů	5	5	5	3
Počet výher	2	2	2	0

Poslední variantou bude, že čtvrtý tým jednou vyhraje. Dohromady s prvním to je 9 bodů a zbývajících 9 bodů opět dělíme mezi dva týmy. Opět platí, že žádný z týmů nezaznamená tři vítězství. Body si rozdělí na 5 bodů a 4 body. Tabulku již nyní můžeme doplnit.

4.	První	Druzí	Třetí	Čtvrtý
Počet bodů	5	5	4	4
Počet výher	2	2	1	1

Pro postup ze skupiny do finále za určitých okolností stačí zisk 4 bodů, v ostatních případech bude muset tým získat 5 bodů, a tudíž dvě vítězství. Tato tabulka může pomoci při řešení další úlohy:

Celkem	První	Druzí	Třetí	Čtvrtý
1.	6	5	4	3
2.	6	4	4	4
3.	5	5	5	3
4.	5	5	4	4

Úloha 28: V prvním utkání prohráli Tygři s Draky. Jak by museli dopadnout ostatní duely, víme-li, že Draci, kteří vyhráli základní skupinu, dosáhli počtu **a)** šesti bodů **b)** pěti bodů a Tygři postoupili? Jaká je pro to pravděpodobnost? Počítejme s tím, že při shodném počtu bodů postoupí Tygři.

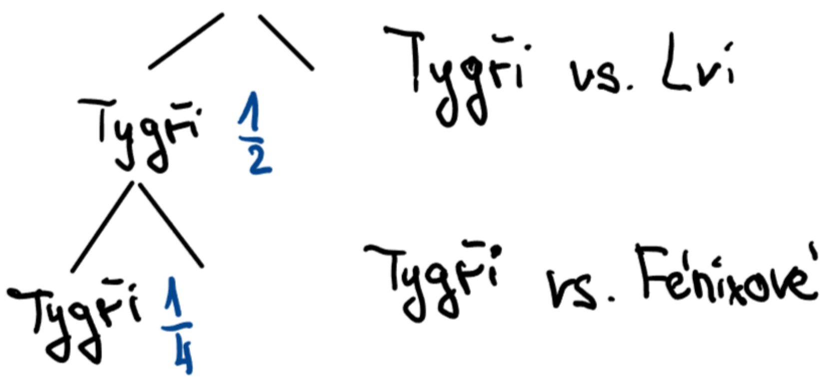
Poznámka: (SPV, VSJ) Úloha je velmi náročná a opírá se o poznatky z předchozí úlohy. Při výuce lze pojmout jako zkoumání jednotlivých jevů, které mohou nastat.

Řešení: Postupovat budeme systematicky dle předchozí úlohy, protože v jejím řešení máme rozepsané body, které v následujícím postupu využijeme.

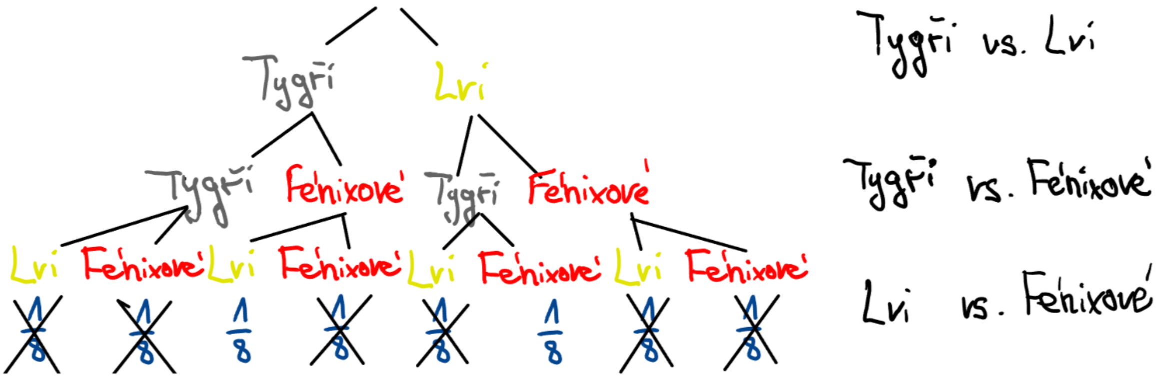
a) Vycházet budeme z případů, kde první tým (Draci) získal 6 bodů:

	První	Druzí	Třetí	Čtvrtý
1.	6	5	4	3
2.	6	4	4	4

V prvním případě můžeme vidět, že Tygři na postup potřebují 5 bodů. Kdy budou mít 5 bodů, co se musí stát? Prohru mají právě s Draky, a tak aby získali 5 bodů musí zbylé dvě utkání vyhrát. Jaká je pravděpodobnost, že tato utkání vyhrají? To si rozkreslíme:



V druhém případě je situace komplikovanější. Tygři mohli vyhrát proti Fénixům a prohrát proti Lvům a naopak. Záleží i na výsledku zápasu Lvů s Fénixy. Každý tým z těchto tří duelů zaznamenal právě jedno vítězství, aby mohli všechny týmy mít 4 body. Toto si opět rozkreslíme:



Pravděpodobnost, že nám tato (druhá) situace nastane, je rovna $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. Na závěr podúlohy zkontrolujeme, zda se nám jevy nepřekrývají. To můžeme ověřit jen tím, že zatímco v prvním případě Tygři vyhrají oba své duely, v druhém jen jeden.

Pravděpodobnost, že Tygři postoupí, pakliže Draci získají šest bodů, je $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

b) V této podúloze si můžeme všimnout, že se jedná o naprosto obdobnou situaci jako v předchozí podúloze.

	První	Druzí	Třetí	Čtvrtý
3.	5	5	5	3
4.	5	5	4	4

Ve třetím případě každý z týmů se ziskem pěti bodů porazí poslední tým. Mezi sebou pak každý zaznamená jedno vítězství a jednu porážku. To se dá opět vyjádřit stejným stromovým diagramem jako ve druhém případu předchozí podúlohy. Výsledná pravděpodobnost bude rovna opět $\frac{1}{4}$. Ve čtvrtém a poslední případě je situace obdobná jako v prvním případě z předchozí podúlohy. Tygři musí zvítězit v obou svých zbývajících utkáních, aby dosáhli počtu pěti bodů, čehož pravděpodobnosti se rovná $\frac{1}{4}$. Celková pravděpodobnost bude rovna součtu pravděpodobností, a to $\frac{1}{2}$.

4.2.2 Finále

Turnaj dospěl až do finále. Tam se probojoval tým Draků a Tygrů. Vyhraje ten tým, který jako první vstřelí pět gólů do sítě soupeře. Za vítězství v turnaji byla slíbena odměna v podobě dortu.

Úloha 29: Jaká je šance, že první gól vstřelí Draci?

Poznámka: (PEJ) Úloha je slouží jako připomenutí, jak určovat pravděpodobnost, že padne gól, čehož budeme využívat i v dalších úlohách.

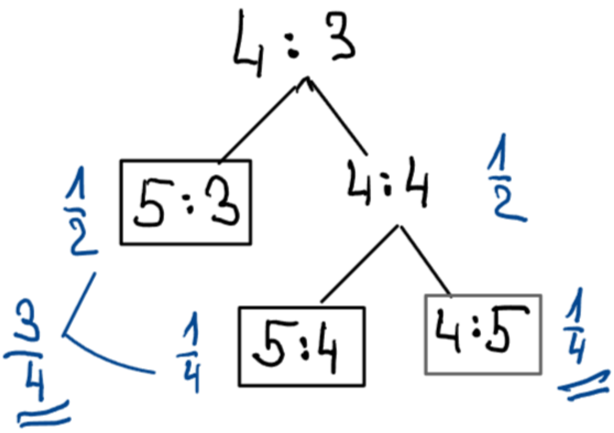
Řešení: Úlohu budeme řešit úvahou. Šance, že první gól vstřelí Draci, je 50:50 oproti Tygrům. Úloha by se dala řešit pomocí Vennova diagramu, či stromového diagramu. Tyto metody využijeme v obtížnějších úlohách.

Úloha 30: Utkání bylo bohužel přerušeno kvůli dešti za stavu **a)** 4:3, **b)** 3:3, **c)** 4:1 pro Draky. Jaká je pravděpodobnost, že by Draci turnaj vyhráli, kdyby se utkání dohrávalo po dešti?

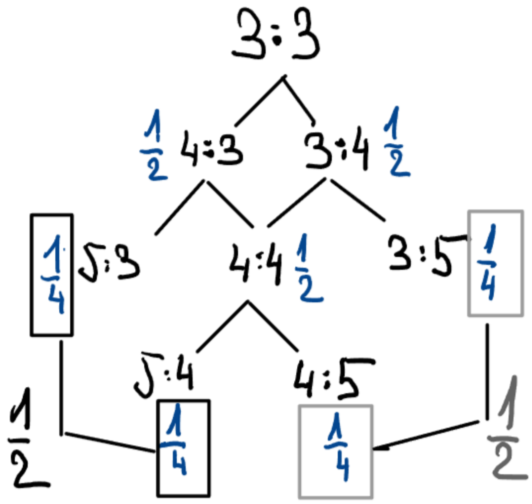
Poznámka: (VSJ) Úloha je inspirována úlohami z knihy Bachratého a kol. (2010, s. 12-18). Úloha navazuje na předchozí úlohy řešené především stromovým diagramem. Pro některé žáky se tak stanou cvičením. To není na škodu v rámci algoritmizace postupů. Pokud bychom i je chtěli přimět k heuristice, nabízí se je vyzvat k tomu, aby nalezli jiný způsob řešení než stromovým diagramem.

Řešení:

a) Při připsání pravděpodobností k větvení stromu vidíme, že Draci vyhrají s pravděpodobností $\frac{3}{4}$:

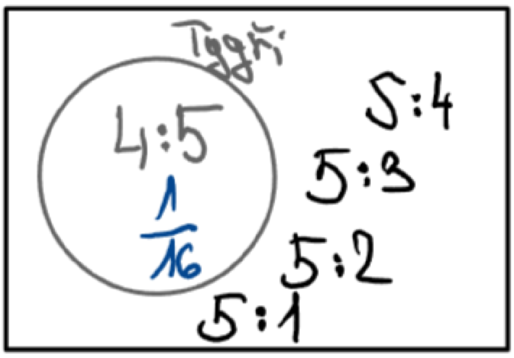


b) U podúlohy nejprve vyslovíme hypotézu. Když je stav vyrovnaný, je stejná pravděpodobnost pro oba celky, že vyhrají? Pro ověření hypotézy rozkreslíme strom od stavu 3:3:



Symetrie stromu zaručuje, že pravděpodobnost pro vítězství obou týmů je stejná, a to $\frac{1}{2}$.

c) Podúlohu vyřešme, aniž bychom si situaci zakreslovali do stromu. Jaké konečné výsledky mohou ze skóre 4:1 nastat? Draci mohou vyhrát 5:1, 5:2, 5:3, 5:4. Tygři mohou vyhrát jen za skóre 4:5, kdyby vstřelili 4 góly po sobě. Jak určíme pravděpodobnost tohoto jevu? Na vstřelení každého gólu je pravděpodobnost $\frac{1}{2}$. Výsledná pravděpodobnost, že Tygři vyhrají, je: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. Možné konečné výsledky se známou pravděpodobností opačného jevu zakreslíme do Vennova diagramu:



Ve všech případech, kdy Tygři nevyhrají, vyhrají Draci. Pravděpodobnost, že vyhrají Draci, bude rovna $1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Úloha 31: Mějme stejnou situaci jako v předchozí úloze. Jak byste rozdělili výhru mezi týmy, aby to bylo spravedlivé?

Poznámka: (MOP) Úloha je inspirována úlohami z knihy Bachratého a kol. (2010, s. 12-18). Úloha (potažmo zkoumání) cílí na zvědomění, že rozdělit výhru v poměru skóre není spravedlivé.

Řešení: Jak to udělat spravedlivé? Nabízí se použít skóre. Představme si, že je skóre 4:0. Je spravedlivé, aby nedostali Tygři žádnou odměnu? A co teprve kdyby se hrálo na deset, nebo sto gólů? Také by měli nulovou šanci, a tudíž nulovou výhru? Ve skóre řešení přímo nebude.

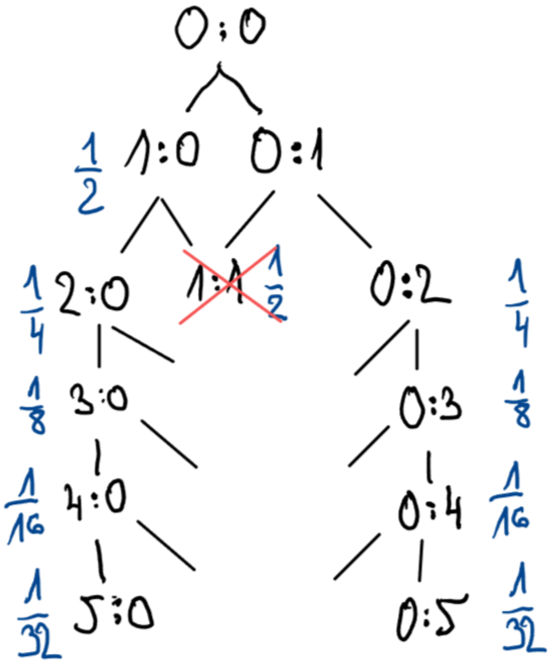
Co takhle vzít skóre, které týmům chybí do pěti a rozdělit to podle opačného poměru? V podúloze a) bychom rozdělili výhru v poměru 2:1. To zní již spravedlivěji. Co ale v podúloze c)? Tam by byl poměr 4:1, což je vlastně stejné jako skóre, což už víme, že příliš spravedlivé není. Nejspravedlivější se tak jeví počítat pravděpodobnost, že tým utkání vyhraje, když se bude zápas dohrávat. Domluvme se tedy, že spravedlivé rozdělení výhry bude dáno šancí, s jakou by vyhrávající tým dospěl k výhře.

A tyto výsledky máme již z předchozí úlohy. Spravedlivé rozdělení výhry tak je v poměru **a)** 3:1, **b)** 1:1, **c)** 15:1.

Úloha 32: Jaká je pravděpodobnost, že utkání skončí rozdílem pěti gólů? Vyjádřete v procentech.

Poznámka: (VSJ) Na úloze se dá ukázat užití mocnin v kombinatorice a pravděpodobnosti.

Řešení: Jak může zápas skončit? 5:0, nebo 0:5. Jak se nám zápas vyvíjel? Může se vyvíjet jen tak, že všechny góly vstřelili buďto hosté, nebo domácí. Pomocí rozepsání hodnot pravděpodobnosti k jednotlivým větvím určíme výslednou pravděpodobnost $\frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16} = 6{,}25\ \%$:



Další možnost, jak úlohu vyřešit, je použití strategie systematického experimentování. Počítejme nyní pouze se skórem 5:0. Pravděpodobnost, že dají Draci první gól, je rovna 50 %. Jak to bude s druhým gólem? Musí ho dát znovu Draci. Jsme tak vystaveni stejné situaci. Pravidlem součinu docházíme k $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Nyní můžeme vyslovit hypotézu – násobí se s každým dalším gólem výsledek $\frac{1}{2}$? Ověříme ji na skóre 3:0. Opět musí vstřelit gól Draci (s pravděpodobností $\frac{1}{2}$) a docházíme k pravděpodobnosti $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Počet gólů	Skóre	Pravděpodobnost	%
1	1:0	$\frac{1}{2}$	50 %
2	2:0	$\frac{1}{4}$	25 %
3	3:0	$\frac{1}{8}$	12,5 %
4	4:0	$\frac{1}{16}$	6,25 %
5	5:0	$\frac{1}{32}$	3,125 %

V tabulce vidíme, že ve jmenovateli máme mocniny dvojky. Cestou zpět tak můžeme dojít k zobecnění úlohy, a to $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$, kde n je počet gólů, které padnou. Nesmíme zapomenout v řešení i na skóre 0:5, které má stejnou pravděpodobnost jako 5:0. Výsledná pravděpodobnost je rovna $\frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{16} = 6{,}25\ \%$.

4.3 Jízdní řády

Úlohy v kontextu jízdních řádů lze začlenit do tématu pravděpodobnosti na ZŠ. V těchto úlohách se dá použít geometrická cesta (oddíl 3.3.6), zároveň lze některé úlohy zobecnit a rozvíjet tak dovednost, která bývá zařazená do přijímacích zkoušek na SŠ.

Z Národní třídy na Hradčanskou jezdí dvě tramvaje – číslo 2 a 18. Mohu tedy jet oběma spoji. Oba spoje jezdí v desetiminutových intervalech. Cesta trvá 12 minut.

Úloha 33: Kolik tramvají dorazí na zastávku v průběhu hodiny?

Poznámka: (MOP) Úloha je motivační. Není přímo zaměřená na pravděpodobnost, ale úzce se jí dotýká.

Řešení: Jestliže spoj jezdí každých deset minut, kolik tramvají přijede za hodinu? Šest tramvají. Může jich přijet sedm? Pokud by například přijela první tramvaj v nulté vteřině a poslední přesně v šedesáté minutě, bude jich sedm? Nebude. Tramvaj v čase 1:00:00 přijede již v druhé hodině. Spoje máme dva, celkem tedy během hodiny přijede dvanáct tramvají.

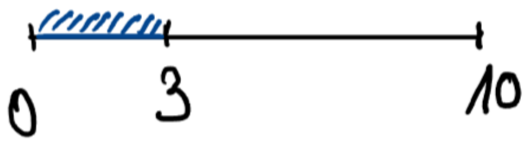
Úloha 34: Jaká je pravděpodobnost, že když přijdu na zastávku, **a)** pojede tramvaj číslo 2 do tří minut **b)** pojedou obě tramvaje do tří minut **c)** pojede tramvaj do tří minut od mého příchodu?

Poznámka: (PEJ, VSJ) Podúloha c) je přejatá z knihy Mošny (2016, s. 27). Při řešení úlohy je vhodné užít geometrické cesty, protože časové údaje představující spojitou veličinu není možné zahrnout do konečné množiny, které jsou předpokladem klasické definice pravděpodobnosti. Při geometrické interpretaci budeme určovat délky, resp. obsahy a jejich poměr (oddíl 2.3).

Řešení:

a) Tramvaj má desetiminutový interval, během nějž jednou přijede. Jaká je pravděpodobnost, že přijede do tří minut? To bychom mohli řešit zlomkem $\frac{3}{10}$. Můžeme to takto vyřešit a úlohu zjednodušit? Spíš ne[22].

Vhodnější je použít geometrickou definici. Nedokážeme totiž vyjádřit konečnou množinu časů, kdy může tramvaj přijet. Můžeme však vyjádřit interval $\langle 0; 10 \rangle$ a pro představu jej zakreslit:

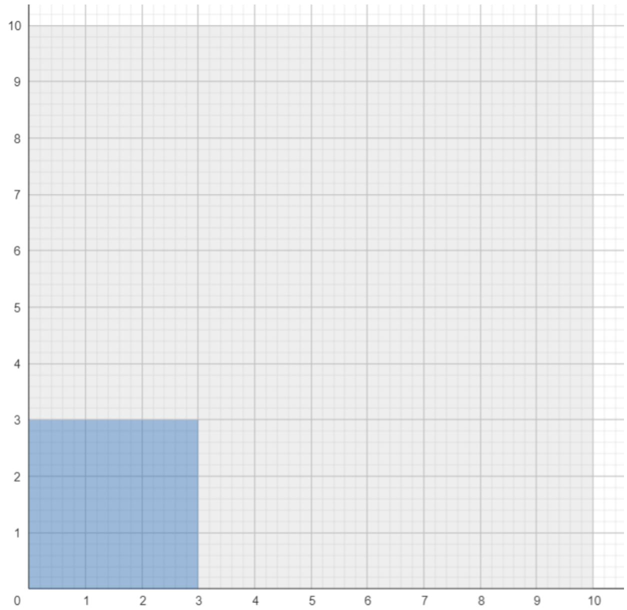


Použitím geometrické definice porovnáváme délky na úsečce: $\frac{3}{10}$.

b) Je stejná pravděpodobnost, že přijede i tramvaj č. 18 do tří minut? Ano, postup je úplně stejný. Můžeme tedy použít pravidlo součinu pro vyjádření pravděpodobnosti. Ta bude rovna $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 9\ \%$.

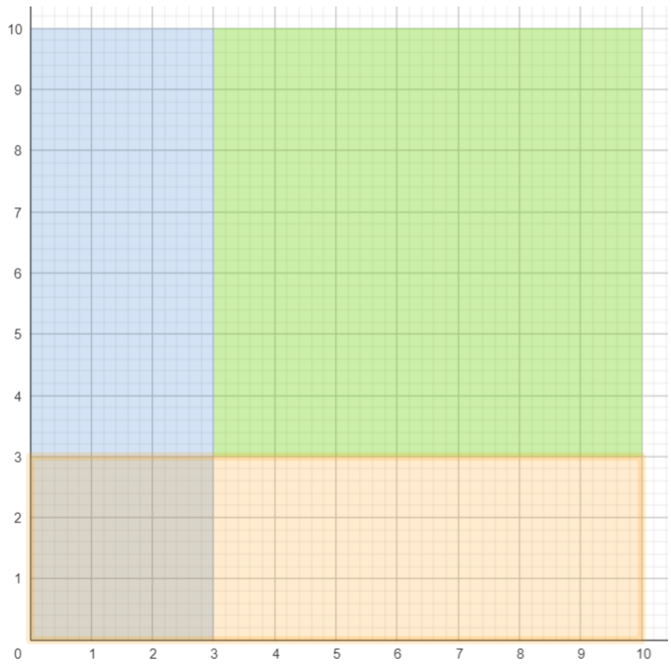
Řešenou úlohu můžeme znázornit. Tím, že máme dvě tramvaje a každá z nich má vlastní časový interval, v kterém jezdí, nabízí se zakreslit obě do jednoho grafu. Na ose *x* bude tramvaj č. 2 a na ose *y* naneseme časy k tramvaji č. 18. Obě tramvaje musí přijet do tří minut. Z toho nám v grafu vznikne čtverec, který je průnikem obou oblastí:

[22] Ano, výsledky jsou shodné. Je to tím, že celou úlohu máme v celých minutách. Vzhledem k nutnosti konečnosti množin Ω a A je úloha pomocí klasické definice pravděpodobnosti neřešitelná. Geometrická definice nám poskytne určit pravděpodobnost jako poměr míry intervalů.



Hodnotu pravděpodobnosti stanovíme na základě geometrické definice. Obsah modrého čtverce znázorňující pravděpodobnost příjezdu je roven $3 \cdot 3 = 9$. Obsah celého čtverce je roven $10 \cdot 10 = 100$. Pravděpodobnost jevu bude rovna $\frac{9}{100} = 9$ %.

c) Můžeme jet oběma tramvajemi, tudíž stačí, když do tří minut přijede alespoň jedna z nich. Jaké tedy jsou možnosti? Tramvaj č. 2 přijede do tří minut, a tudíž tramvaj č. 18 může přijet kdykoli, nebo druhá možnost: tramvaj č. 18 přijede do tří minut a tramvaj č. 2 může přijet kdykoli. Vyznačíme na grafu dva obdélníky, modrý pro první případ, oranžový pro druhý. Šedivá část na našem grafu je část, kde se oba obdélníky překrývají, tj. oblast, kdy obě tramvaje přijedou na zastávku do tří minut:



Pro výslednou pravděpodobnost nám stačí spočítat a porovnat obsahy. Na tomto případu vidíme i krásné využití opačného jevu. Zatímco bychom museli počítat obsahy dvou obdélníků a od nich odečítat překrývající se plochu, stačí nám spočítat obsah čtverce, prostoru, kdy ani jedna tramvaj do tří minut nepřijede, a odečíst ho od jedné: $10 \cdot 10 - 7 \cdot 7 = 51$ %.[23]

Úloha 35: Jaká je pravděpodobnost, že když přijdu na zastávku, přijede tramvaj do x minut od mého příchodu?

Poznámka: (2SJ) Úloha je přejetá od Mošny (2016, s. 27). Cílem úlohy je zobecnění vztahu z předešlé úlohy. Tato dovednost žákům umožní získávat nástroj k efektivnějšímu řešení obdobných typů úloh, které se vyskytují i v přijímacích zkouškách.

Řešení: Využijeme řešení pomocí opačného jevu z minulé úlohy. Kdybychom chtěli příjezd do dvou minut, kolik to bude? Opět chceme počítat obsah „zeleného“ čtverce. Jak velká bude jeho strana? Bude se jednat o doplněk od dvou do desíti, tedy 8. Zajímá nás jeho obsah, tedy $8 \cdot 8 = 64$. Pojďme to zobecnit. Jak vyjádřit doplněk od x do desíti? To vyjádříme jako $10 - x$. Nyní už jen určíme pravděpodobnost opačného jevu: $1 - \frac{(10-x)\,(10-x)}{100}$.

[23] Vzhledem k tomu, že celý čtverec má obsah 100, lze čísla 100, 49 a 51 vnímat jako počet procent.

Úloha 36: Cesta metrem i s přestupem trvá deset minut. Metro jezdí každé čtyři minuty. Navrhněte, kdy se mi cesta s přestupem vyplatí. Pokuste se ve skupině určit pravděpodobnost, v kolika procentech případů se mi vyplatí jet tramvají.

Poznámka: (VSJ) Úloha patří v portfoliu mezi ty nejnáročnější a není důležité vypočítat přesnou pravděpodobnost jevu. Nechme žáky pracovat ve skupině, ať navrhují postupy, jak danou úlohu řešit.

Řešení: Cesta tramvají trvá deset minut, zatímco metrem dvanáct. Když metro jezdí každé čtyři minuty, kolik času strávím na cestě, když použiju metro? Něco mezi deseti a čtrnácti minutami. Když pojedu tramvají hned v první minutě, za jak dlouho musí na zastávku přijet metro, abych byl na Hradčanské alespoň ve stejný čas? Když metro pojede ve třetí minutě, dorazíme metrem a tramvají stejně. Uděláme si tabulku všech možností:

Odjezd tramvaje	Čas (+12)	Odjezd metra	Čas (+10)	Rozdíl
1	13	3	13	0
1	13	4	14	1
2	14	4	14	0

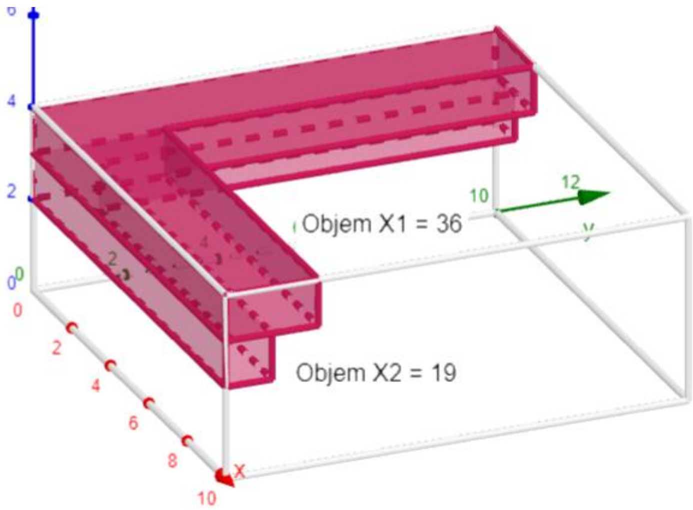
Jak velká je pravděpodobnost, že na Hradčanské budu dříve, jestliže pojedu tramvají? Z tabulky vidíme, že se mi časově spíše vyplatí jet metrem. Tramvaj může přijet kdykoli v deseti minutách, metro každé čtyři a my jsme vymezili celkem tři konkrétní případy, kdy tramvaj přijede stejně nebo dříve (na celé minuty).

V tomto bodě bychom zkoumání nejspíše ukončili, protože zbytek řešení úlohy by se odvíjel algebraickou cestou (následující dva odstavce), nebo geometrickou cestou (třetí odstavec).

Pro jevy uvedené v tabulce jsme schopni určit pravděpodobnost. Pravděpodobnost, že libovolná tramvaj (T_1) přijede do jedné minuty, lze určit z grafu nebo zobecněného vztahu: $P(T_1) = \frac{20 \cdot 1 - 1^2}{100} = \frac{19}{100} = 19\,\%$. Musíme kalkulovat i s příjezdem metra. To může přijet ve třetí minutě (a ve čtvrté, ale pro usnadnění výpočtu to nyní zanedbáme). Metro jezdí v intervalu čtyři minuty. To znamená, že pravděpodobnost, že metro přijede, je $P(M_1) = \frac{1}{4}$. Nabízí se tedy mezi sebou pravděpodobnosti vynásobit: $P(X_1) = P(T_1) \cdot P(M_1) = \frac{19}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{400}$.

Nyní vyřešme poslední případ. Pravděpodobnost, že přijede metro ve čtvrté minutě, je $P(M_2) = \frac{1}{4}$. Určíme ještě pravděpodobnost příjezdu tramvaje. K tomu opět můžeme využít zobecněného vztahu $P(T_2) = \frac{20 \cdot 2 - 2^2}{100} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$. Pomocí pravidla součinu získáme výslednou pravděpodobnost $P(X_2) = P(M_2) \cdot P(T_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{100}$. Celková pravděpodobnost jevu je rovna součtu pravděpodobnosti těchto dvou jevů: $P(X_1) + P(X_2) = \frac{19}{400} + \frac{9}{100} = \frac{55}{400} = \frac{11}{80} = 13{,}75\ \%$.

Problém geometrické cesty tkví v tom, že obrázek je trojrozměrný. Žáci by si ho museli zakreslit na papír nebo v 3D programu. Na ose x a y jsou jednotlivé tramvaje jako v předchozích úlohách. Na ose z (svislá osa) máme čas odjezdů metra. Do grafu naneseme časy, kdy tramvaj přijede do minuty a roztáhneme do hranolu na ose z. Stejně budeme postupovat i při třetím případu.



Na závěr porovnáme objemy kvádrů. Objem růžových hranolů je roven $19 + 36 = 55$ a objem celého hranolu je roven $10 \cdot 10 \cdot 4 = 400$. Pravděpodobnost je rovna $\frac{55}{400} = 13{,}75\ \%$ stejně jako v algebraické cestě výše.

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit portfolio úloh z tématu pravděpodobnosti s fiktivními žákovskými řešeními využívajícími heuristických strategií. K práci jsou přiložené samotné úlohy pro učitele k využití při výuce. Úlohy jsou rozřazené do úrovní (levelů) dle odborných způsobilostí v Globálním rámci (příloha 1).

Pojem šance znají žáci nejspíše z reálného života. Pro žáky není podstatné, aby znali jednotlivé definice pravděpodobnosti. Důležitější pro ně je dovednost vyřešit úlohy, s kterými se dosud nesetkali. Součástí této dovednosti[24] je najít způsoby, jak úlohu pochopit, uchopit a vyřešit. K tomu jim může pomoci učitel skrze konstruktivistické pojetí výuky a samotná heuristika. Heuristickými strategiemi řešení za využití diagramů, schematických obrázků a návodných otázek mohou žáci řešit složitější, či jim dosud neznámé úlohy.

Některé úlohy řešené v práci jsou na základní školy velmi náročné. V práci jsem je uvedl jako případy zkoumání, kde je hlavním úkolem žáků přijít na postup, který může fungovat a díky kterému se mohou dostat k výsledku. Následujícími otázkami můžeme žákům postupně pomáhat dostávat se k cíli. Výsledků je v úloze více? Zkuste přijít na další variantu. Jak jsme se dostali k této variantě? Můžeme se dostat i k jiné? A co když…? Nicméně pro nadané žáky mohou být právě tyto úlohy výzvou.

Další matematickou oblastí, která s realizací navržené revize RVP bude nově zařazena na ZŠ, je kombinatorika. Vzhledem k rozsahu práce však nebylo možné zpracovat podobně obě témata. Kombinatorika je z hlediska výskytu úloh pro ZŠ na tom lépe než pravděpodobnost. Kombinatorické úlohy se například pravidelně vyskytují v různých matematických soutěžích a olympiádách, či v přijímacích zkouškách na SŠ. Svůj přístup včetně uvedených úloh bych rád v budoucnu (v učitelské praxi, či v navazující diplomové práci) vyzkoušel v praxi.

[24] Rozvoj této dovednosti souvisí s odhodláním žáka nový problém vůbec začít řešit. Žák, který toto odhodlání nemá, řešení neznámé úlohy vzdá.

Seznam použitých informačních zdrojů

Bachratý, H., Grendár, M., & Bachratá, K. (2010). *Ako sa počíta pravdepodobnosť*. Žilinská univerzita v Žiline.

Bendl, V. (2024). Globální rámec odborné způsobilosti pro matematiku. *Metodický Portál Rvp.cz*. https://clanky.rvp.cz/clanek/23932/GLOBALNI-RAMEC-ODBORNE-ZPUSOBILOSTI-PRO-MATEMATIKU.html

Čech, E. (1939). Kombinatorika a počet pravděpodobnosti na středních školách. *Časopis Pro Pěstování Matematiky A Fysiky*, (68), 197-206.

Fiala, J., & Petrášková, V. (2024). K významu a aplikacím pojmu šance ve školní výuce pravděpodobnosti. *Učitel Matematiky*, *32*(3), 140–153. https://ojs.cuni.cz/ucitel/article/view/4514

Hejný, M., & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika*. Portál.

Hejný, M., Novotná, J., & Stehlíková, N. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Pedf UK.

Hejný, M., Šalom, P., Hanušová, J., Jirotková, D., & Sukniak, A. (2017). *Matematika CD – příručka učitele pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia*. H-mat.

Hejný, M., Šalom, P., Jirotková, D., Hanušová, J., Sukniak, A., & Bomerová, E. (2016). *Matematika C*. H-mat.

Kopka, J. (2013). *Umění řešit matematické problémy*. HAV.

Kvasz, L. (2023). Jezuiti a ich pojatie vyučovania matematiky. In: Vondrová, N. (Ed.). (2023). *Dva dny s didaktikou matematiky* (s. 63–73). PedF UK Dostupné z: https://8d8f55af62.clvaw-cdnwnd.com/0023db53731df613e31376e312bef977/200000238-35c0435c06/Sbornik%20Dva%20dny%20s%20didaktikou%20matematiky%202023.pdf

Kvasz, L. (2016). Princípy genetického konštruktivizmu. *Orbis scholae*, *10*(2), 15−45.

Maňák, J., & Švec, V. (2003). *Výukové metody*. Paido.

Mošna, F. (2017). *Pravděpodobnost a náhodné veličiny*. Nakladatelství Karolinum.

MŠMT (2020). Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2030+. Ministerstvo školství a tělovýchovy. Dostupné z https://msmt.gov.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/strategie-2030

Novotná, J., Eisenmann, P., & Přibyl, J. (2016). Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. In: Vondrová, N. (Ed.). *Dva dny s didaktikou matematiky*. (s. 9−22) http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/SbornikyZKonferenci/DvaDnySDM/DvaDny2015.pdf

NPI (2023). *Vše o revizi ZV*. Národní Pedagogický Institut České republiky. [cit. 2025-09-04]. https://revize.rvp.cz/vse-o-revizi-zv

NZ TIMSS8. (2024). *Národní zpráva TIMMS 2023–8. ročník*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2024_p%c5%99%c3%adlohy/Dokumenty/TIMSS_2023_8_rocnik_v5-1.pdf

Płocki, A. (1982). *O náhodě a pravděpodobnosti*. Mladá fronta.

Polák, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky* (deváté přepracované vydání). Prometheus

Pólya, G. (1945/2004). *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (Second edition expanded with a new foreword). Princeton University Press. http://www.loc.gov/catdir/toc/fy0703/2004100613.html

RVP ZV (2013). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, [cit. 2025-04-09]. Dostupné z: https://www.gymtri.cz/wp-content/uploads/2012/11/RVP-ZV-2013.pdf

RVP ZV (2025). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. Praha: MŠMT, [cit. 2025-04-09]. Dostupné z: https://prohlednout.rvp.cz/export/pdf?rvp_type_id=6&mandatory_part_only=true

Płocki, A. (1982). *O náhodě a pravděpodobnosti*. Mladá fronta.

Rhodes, R., Platas, L. et al. (2020). *Global proficiency framework for mathematics.* UNESCO Institute of Statistics. https://www.edu-links.org/sites/default/files/media/file/GPF-Math-Final.pdf

Smejkalová, K. (2014). K pojetí konstruktivismu jakožto modernímu paradigmatu vzdělávání. *Paideia: Philosophical E-Journal Of Charles University*, (1). https://ojs.cuni.cz/paideia/article/download/1477/1063/

Toeplitz, O. (2007). *The Calculus: A Genetic Approach*. The University of Chicago Press.

Zormanová, L. (2012). *Výukové metody v pedagogice*. s. 9-13, Grada Publishing. https://www.knihydaniela.cz/book-preview-11227.pdf

Vyjádření k využití nástrojů umělé inteligence

Umělou inteligenci jsem používal pouze k vyhledávání dalších zdrojů užitých v práci.

Seznam příloh

Příloha 1 – Sada úloh