

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Genetický princip
v německé didaktice matematiky
a v Hejného metodě

*The genetic principle
in German didactics of mathematics
and in Hejný method*

Bc. Filip Vosáhlo

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.

Studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy

Praha, 2025

Odevzdáním této diplomové práce na téma „*Genetický princip v německé didaktice matematiky a v Hejného metodě*“ potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Prohlašuji, že jsem při její tvorbě nepoužil nástrojů umělé inteligence jiným způsobem, než je uvedeno ve vyjádření, které je součástí textu práce. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 8. dubna 2025

Rád bych velmi poděkoval vedoucímu práce, profesoru Ladislavu Kvaszovi. Jsem mu vděčný především za vypsání podnětného tématu, doporučení a poskytnutí hodnotné literatury (z níž již hojně čerpám i v učitelské praxi) a řadu cenných rad v průběhu psaní.

Děkuji také svým žákům a kolegům z pražského Waldorfského lycea za milé a podnětné prostředí, jež v naší škole vládne.

Abstrakt

Cílem práce je teoretické srovnání dvou přístupů k didaktice matematiky, a sice německého genetického principu a české Hejného metody. Práce je orientována teoreticky. Nejprve analyzuji několik děl, která popisují východiska zmíněných metod, a také dvě učebnice matematické analýzy, které jsou napsány podle jejich zásad. Podrobně pak píš o shodnostech a odlišnostech genetického principu a Hejného metody.

V práci docházím k závěru, že společným rysem obou přístupů je využití tzv. genetické paralely, tedy přesvědčení, že myšlenkový vývoj žáka při výuce matematiky by měl být posuzován v kontextu historického vývoje matematiky v lidských dějinách. Genetický princip i Hejného metoda také shodně akcentují výchovné cíle výuky matematiky. Velmi podobné jsou rovněž obsahy analyzovaných učebnic: Obě pojednávají dříve o integrálu, nežli o derivaci, obě kladou důraz na vysvětlení konceptu určitého integrálu a obě marginalizují vyšetřování průběhu funkce. Za hlavní rozdíl mezi metodami považuji odlišné stanovení didaktických priorit. Ukazují, že genetický princip vychází výhradně z genetické paralely, zatímco Hejného metoda upřednostňuje výchovné cíle, přičemž genetickou paralelu (v podobě Teorie generických modelů) využívá jen jako jeden z nástrojů.

Na základě analýzy vyslovuji tezi, že Hejného metoda je pokračováním genetického principu, respektive jeho uvedením do širší praxe. V závěru dále nastiňuji, jak by se na mou práci dalo navázat. Doporučuji výzkum současného vývoje genetického principu v teorii i případné praxi, analýzu nově vyšlých učebnic podle Hejného metody a praktický rozbor vyučování podle Hejného metody z hlediska genetické paralely.

Klíčová slova

genetický princip, Hejného metoda, Otto Toeplitz, Gert Schubring, Vít Hejný, Milan Hejný, genetická paralela, Teorie generických modelů

Abstract

The thesis deals with the comparison of two approaches to mathematics didactics, namely the German genetic principle and the Czech Hejný method. The thesis is theoretically oriented. First, I analyze several works that describe the starting points of the mentioned methods, as well as two textbooks of mathematical analysis that are written according to these principles. Then I write in detail about the similarities and differences between the genetic principle and the Hejný method.

In the thesis, I conclude that a common feature of both approaches is the use of the so-called Method of Genetic Parallel, i.e. the belief that the intellectual development of the student in mathematics should be assessed in the context of the historical development of mathematics in human history. The genetic principle and the Hejný method also equally emphasize the upbringing goals of mathematics teaching. The analyzed textbooks are also very similar: Both deal first with the integral and then with the derivative, both emphasize the explanation of a definite integral, and both marginalize analyzing a function with its derivative. I consider the main difference between the methods to be the different determination of didactic priorities. I show that the genetic principle is based solely on Method of Genetic Parallel, while Hejný method prioritizes upbringing goals, using genetic parallel (in the form of the so-called Theory of Generic Models) as only one tool.

Based on the analysis, I propose that Hejný method is a continuation of the genetic principle, or rather its introduction into wider practice. Finally, I outline how my work could be followed up. I recommend research into the current development of the genetic principle (in theory as well as in practice), an analysis of newly published textbooks based on Hejný method, and a practical analysis of teaching according to Hejný method from the perspective of method of genetic parallel.

Keywords

genetic principle, Hejný method, Otto Toeplitz, Gert Schubring, Vít Hejný, Milan Hejný, Method of Genetic Parallel, Theory of Generic Models

Obsah

Úvod.....	8
1. Genetický princíp v pojetí Gerta Schubringa.....	10
1.1 Životopis Gerta Schubringa.....	10
1.2 Základní charakteristika genetického principu.....	10
1.3 Historický vývoj genetického principu.....	11
1.3.1 Francis Bacon (1561–1626).....	11
1.3.2 René Descartes (1596–1650).....	12
1.3.3 Antoine Arnauld (1612–1694).....	12
1.3.4 Baruch Spinoza (1632–1677).....	13
1.3.5 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716).....	13
1.3.6 Alexis Claude Clairaut (1713–1765).....	13
1.3.7 Friedrich Wilhelm Lindner (1779–1851).....	14
1.3.8 Karl Mager (1810–1858).....	15
1.3.9 Felix Klein (1849–1925).....	16
1.3.10 Otto Toeplitz (1881–1940).....	18
2. Genetický princíp v pojetí Otto Toeplitze.....	19
2.1 Životopis Otto Toeplitze.....	19
2.2 Okolnosti vzniku učebnice <i>Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung</i>	20
2.3 Obsah učebnice <i>Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung</i>	21
2.3.1 Obsah první kapitoly: <i>Podstata nekonečného procesu</i>	22
2.3.2 Obsah druhé kapitoly: <i>Určitý integrál</i>	23
2.3.3 Obsah třetí kapitoly: <i>Diferenciální a integrální počet</i>	24
2.4 Schubringova analýza Toeplitzovy učebnice.....	26
2.5 Vlastní analýza Toeplitzovy učebnice.....	28
2.5.1 Pořadí témat.....	28
2.5.2 Pořadí důkaz-věta.....	28
2.5.3 Využívání paralel.....	29
2.5.4 Výchovné poznámky.....	30
2.5.5 Závaznost historického hlediska.....	30
2.5.6 Návaznost na předchozí znalosti.....	31
2.5.7 Závěr.....	33
3. Charakteristika Hejného metody.....	35
3.1 Úvod.....	35
3.2 Životopis Víta Hejného (1904–1977).....	36
3.3 Životopis Milana Hejného (1936).....	37
3.4 Pracovní materiály školiaceho pracoviška tábora mladých matematiků.....	37
3.4.1 Duševní pohyb.....	38
3.4.2 Duševní orgán.....	38
3.4.3 Strategický duševní orgán.....	38
3.4.4 Orgán vztahově-abstrakční činnosti (orgán VAČ).....	39
3.4.5 Fylogeneze orgánu VAČ.....	40
3.4.6 Čtyři zásady dialogické strategie.....	40
3.5 Teória vyučovania matematiky 2.....	41
3.5.1 Úvod.....	41

3.5.2 Cíl učebnice.....	42
3.5.3 Cíl výuky matematiky.....	42
3.5.4 Teorie poznávání v matematice – Teorie generických modelů.....	43
3.5.5 Souvislost Teorie generických modelů a historie matematiky – metoda genetické paralely.....	44
3.5.6 Jazyk matematiky.....	45
3.5.7 Komunikace.....	46
3.5.8 Teorie množin.....	46
3.5.9 Logika.....	47
3.6 Didaktika matematické analýzy podle Hejného metody.....	47
3.6.1 Fylogeneze funkčního myšlení.....	48
3.6.2 Funkce ve škole.....	48
3.6.3 Fylogeneze infinitezimálního myšlení u Řeků.....	50
3.6.4 Čekání na Keplera.....	50
3.6.5 Od Keplera k Newtonovi a Leibnizovi.....	51
3.6.6 Propedeutika derivace.....	51
3.6.7 Analýza nekonečně malých.....	52
3.7 Vlastní analýza Hejného metody.....	54
3.7.1 Výchovný cíl.....	54
3.7.2 Rozvoj učitele.....	54
3.7.3 Vyučování podle Teorie generických modelů.....	55
3.7.4 Styl práce, komunikace se žáky a atmosféra ve třídě.....	57
3.7.5 Genetická paralela.....	58
3.7.6 Závěr.....	59
4. Porovnání genetického principu a Hejného metody.....	60
4.1 Časové zařazení.....	60
4.2 Východiska.....	61
4.3 Porovnání obsahů učebnic.....	62
4.3.1 Shodné rysy.....	62
4.3.2 Rozdílné rysy.....	63
4.4 Výchovný cíl.....	64
4.5 Genetická paralela.....	65
4.6 Shrnutí.....	65
Závěr.....	67
Seznam zdrojů.....	69
Zdroje obrázků.....	71
Vyjádření k využití nástrojů umělé inteligence.....	71

Úvod

V předkládané práci nejprve podrobně představuji dva přístupy k didaktice matematiky: genetický princip a Hejného metodu. Popisuji jejich obecná východiska a zásady. Následně analyzuji učebnice, které jsou v jejich duchu napsány. Zvolil jsem v obou případech učebnice matematické analýzy – infinitezimálního počtu. Popisuji obsah a koncepci učebnic, analyzuji, jak se v nich zrcadlí popsané teoretické zásady a jakých dalších význačných rysů jsem si v praxi všiml. V závěrečné části, která je těžištěm práce, porovnávám genetický princip a Hejného metodu: Na základě provedené analýzy popisují jejich shodné rysy a rozdílnosti.

Genetický princip je přístup k didaktice matematiky, zakořeněný zejména v německé jazykové oblasti. Za průkopníka principu bývá považován Felix Klein (1849–1925), který se ovšem odvolává na řadu starších tezí. Pro další vývoj bylo klíčové dílo Otto Toeplitze (1881–1940) a Gerta Schubringa (1944).

Základní myšlenkou genetického principu je přesvědčení, že matematické schopnosti žáka je vhodné pěstovat v souladu s vývojem matematiky jako takové: V podobném pořadí, s podobnými motivacemi, s podobnými obtížemi a mezivýsledky. Na matematické pojmy se v genetickém principu pohlíží jako na určitou cestou historicky vyvinuté (nikoli jen nyní pevně definované), a jejich vývoj má být v učebním procesu pokud možno napodoben. Neboť v literatuře ke genetickému principu není tento koncept nazýván jednotně, používám v celé práci termín Milana Hejného *genetická paralela*.

Genetický princip představuji především na základě Schubringovy monografie *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik (Genetický princip v didaktice matematiky)* z roku 1978. Analyzovanou učebnicí je Toeplitzova kniha *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung (Vývoj infinitezimálního počtu)*, vydaná z pozůstalosti roku 1949.

Hejného metoda je přístup k didaktice matematiky, který zejména ve druhé polovině 20. století v Československu vyvinuli Vít Hejný (1904–1977) a jeho syn Milan Hejný (1936). První ucelené formulace autoři publikovali v 70. letech v souvislosti s pořádáním dětských matematických táborů. Milan Hejný následně metodu podrobně rozpracoval v knize *Teória vyučovania matematiky 2* (poprvé vyšla roku 1988, pracuji s vydáním z roku 1990). Ve své práci pokračoval jako profesor na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze,

kde spolupracoval s docentkou Darinou Jirotkovou a doktorkou Janou Slezákovou. Metodu dnes pod vedením Milana Hejného rozvíjí společnost H-mat, která podle jejích zásad vzdělává učitele a vydává učebnice.

Hejného metoda staví do popředí výchovné cíle vyučování matematiky. Jejím výrazným rysem je didaktika opřená o tzv. Teorii generických modelů, jež klade důraz na vlastní činnost žáka a podmiňuje abstrakci dostatkem konkrétních zkušeností. V Hejného metodě rovněž často figurují genetické paralely mezi historickým vývojem matematiky a vývojem žáka.

Hejného metodu představují zejména na základě knih *Pracovné materiály školiaceho pracoviska tábora mladých matematikov* (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977) a *Teória vyučovania matematiky 2* (HEJNÝ a kol., 1988). Analyzovanou učebnicí je 6. kapitola *Teórie vyučovania matematiky 2*, která se týká infinitezimálního počtu.

V závěrečném porovnání vyslovuji přesvědčení, že Hejného metoda je rozvinutím a přesnějším formulováním genetického principu, a to především v jasném upřednostnění výchovných cílů před matematickými a v chápání genetické paralely jako nástroje, nikoli cíle.

1. Genetický princip v pojetí Gerta Schubringa

Genetický princip je nejsystematičtěji reflektován v pracích Gerta Schubringa, proto v první kapitole podrobně představím jeho pohled na celou problematiku.

1.1 Životopis Gerta Schubringa

Gert Schubring (narozen roku 1944) je docentem na univerzitě v německém Bielefeldu. Pobýval také na univerzitě v brazilském Rio de Janeiro. Zabýval se především historií matematiky a didaktikou matematiky, respektive propojením obou oborů. Zasloužil se o nové pojetí historie matematiky jako vědeckého oboru, rozpracoval jeho metodologii. Jedním z jeho stěžejních děl je doktorská práce *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik* (*Genetický princip v didaktice matematiky*), kterou obhájil v roce 1977 a kterou se v této práci podrobně zabývám (SCHUBRING, 1977). Dalšími významnými díly z posledních let jsou publikace *Geschichte der Mathematik in ihren Kontexten – Neue Zugänge* (*Historie matematiky v kontextech – Nové přístupy*, SCHUBRING, 2021) a *The Legacy of Felix Klein* (*Odkaz Felixe Kleina*, SCHUBRING, 2019). V roce 2019 získal za celoživotní dílo medaili Hanse Freudenthala. (ICMI, 2019)

1.2 Základní charakteristika genetického principu

V této kapitole shrnu, jak genetický princip popisuje Gert Schubring ve svém díle *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik* (SCHUBRING, 1978). Vycházet budu také z článku Reidara Mosvolda *Genesis Principles in Mathematics Education* (MOSVOLD, 2002).

V centru pozornosti genetického principu je podle Schubringa *vývoj* (slovo *genetický* zde odkazuje k řeckému *genesis* – původ, vývoj, vznik). Kognitivní schopnosti žáka by se podle genetického principu měly vyvíjet v souladu s vývojem matematiky jako takové. Na matematické pojmy se pohlíží jako na určitou cestou historicky vyvinuté (nikoli jen nyní pevně definované) a jejich vývoj má být v učebním procesu pokud možno napodoben. Tento koncept budu i v genetickém principu nazývat Hejného termínem *genetická paralela* (viz kapitolu 3.5.5).

Genetický princip chce překonat matematický formalismus. Matematickým formalismem se myslí vyučování a prezentace matematiky jako hotové vědy, tedy stav, kdy

- základní metodou vyučování je formální logika,
- vysvětlení jsou prováděna jen pomocí logických vztahů již hotových pojmů (definic),
- pojmy se zavádějí pouze skrze definice.

Pod takovým formalismem si představuji stav, kdy jsou všechna tvrzení, která v hodinách zazní, rovnou pravdivá, a matematika je prezentována jako stále se rozrůstající systém neměnných pravd.

Schubring míní, že odborníci na poli matematiky i didaktiky matematiky genetický princip obecně podporují (na str. 12 připomíná, že ostatně každý nový přístup v didaktice matematiky vytýkal tomu předchozímu přílišný formalismus), nicméně nemají o něm konkrétnější představu. Má to být způsobeno i malým povědomím o historii matematiky.

Schubring se proto ve své knize spíše než definicí genetického principu zabývá především jeho historickým vývojem, na němž postupně ukazuje jeho klíčové vlastnosti (lze říci, že vlastně hovoří o genetickém principu podle pravidel genetického principu). Budu následovat Schubringův historický výklad, přičemž se vyhnu čistě filozofickým pasážím a zmínkám o vývoji obecné didaktiky. Za průkopníka genetického principu bývá považován Felix Klein (1849–1925), termín je ovšem starší. Schubring se vrací o několik století zpět, k osobnostem a proudům, které Kleina formovaly. (SCHUBRING, 1978, str. 1–15)

1.3 Historický vývoj genetického principu

1.3.1 Francis Bacon (1561–1626)

Francise Bacona zmiňuje Schubring jako jednoho z otců novověké, empiristické vědy, s jejímž charakterem genetický princip úzce souvisí. Bacon odmítal středověkou scholastiku a vědu slepě se odvolávající na antické authority. Zdůrazňoval, že formální logika nemůže sloužit k objevování principů, nanejvýše může potvrzovat jejich správnost. Pravá cesta k poznání začíná podle něj přímým, nezprostředkovaným pozorováním fenoménu a postupným vyvozováním obecného – dedukováním. Pravé poznání má pramenit z poznání příčin. Učitel by pak měl žáka vést k poznatkům stejnou cestou, jakou k nim přišel on sám

(míněno tedy jakou k nim přišla věda, lidstvo). Takovým způsobem nabyté vědění může pak „v duši žáka zakořenit a růst“ (SCHUBRING, 1978, str. 19). Tuto metodu nazývá Bacon *přirozenou metodou* (německy *natürliche Methode*), protože zkoumá přirozenost, přirozenou povahu věcí. Předpokladem je aktivita žáka, jeho aktivní zacházení s předmětem učení. (SCHUBRING, 1978, str. 17–22)

1.3.2 René Descartes (1596–1650)

Dále Schubring zmiňuje dílo Reného Descarta. I ten kritizoval formální logiku jako k objevování nevhodnou (slouží jen k tomu, abych ostatním vyložil, co už vím, nebo bez porozumění mluvil o něčem, co nevím). Descartovy návody z *Rozpravy o metodě* (DESCARTES, 1637) se Schubringovi zdají v souladu s genetickým principem: Descartes zdůrazňuje, že vnitřní podstatu věcí pochopíme lépe, když je vidíme vznikat, než když je pozorujeme v hotovém stavu. Dále Schubring vyzdvihuje sociální rozměr Descartovy metody: Na rozdíl od dosavadního individualistického pojetí vědy jako vnuknutí nedostižných géníů může nyní každý člověk odhalovat pravdu. (SCHUBRING, 1978, str. 22–27)

1.3.3 Antoine Arnauld (1612–1694)

Antonie Arnauld dále rozvíjel Descartovu vědeckou metodu a přemýšlel zejména o vhodném způsobu prezentace výsledků vědy. Schubring zmiňuje jeho kritiku Euklidových *Základů*. Arnauld Euklidovi vytýkal, že geometrické zákonitosti prezentuje neutříděně – bez přihlédnutí k tomu, co je obecné a co zvláštní a zejména bez citu pro to, co odkud vyplývá. Roku 1667 anonymně publikoval vlastní přepracování *Základů*, kde seřadil myšlenky „zpátky do přirozeného pořádku“, aby „jedna myšlenka objasňovala druhou“. Pascal údajně spálil některá svá pojednání, když se mu tato kniha dostala do rukou. (SCHUBRING, 1978, str. 44) Arnauld také obecně kritizoval matematické důkazy vedené sporem, kdy pravdivost tvrzení obhajujeme tím, že dokážeme, že nemůže platit jeho negace. Takový důkaz nás sice jednoznačně přesvědčí o platnosti tvrzení, nicméně nám nezodpoví otázku, jak a proč daný stav věcí vznikl, což by podle Arnaulda mělo být úkolem vědy především. (SCHUBRING, 1978, str. 40–45)

1.3.4 Baruch Spinoza (1632–1677)

Ze Spinozova díla je pro Schubringa důležité pojednání o definicích. Každý genetický proces, jak jej začínáme nastiňovat, musí přeci jen odněkud začínat. I definice by však podle Spinozy měly být formulovány geneticky. Měly by netoliko vyjmenovat, jaké jsou klíčové vlastnosti předmětu, nýbrž také naznačit, jak by mohl vzniknout. Například kružnice by měla být definována jako figura vzniklá otáčením kružítka (otáčením úsečky okolo jednoho pevného konce). Spinoza si je vědom nedokonalosti takového přístupu v tom smyslu, že kružnice ve skutečnosti nijak nevznikla, nýbrž jako koncept prostě existuje. Navrhovaná definice nám ovšem dává příležitost, abychom si podle ní kružnici doopravdy stvořili. Zde vidím protiklad k běžné definici pomocí množiny všech bodů dané vlastnosti – bodů na kružnici je nekonečně mnoho, v konečném čase bychom z nich kružnici nesestrojili. (SCHUBRING, 1978, str. 29–31)

1.3.5 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

Leibniz mnil, že žák by měl být vždy badatelem, že tyto role jsou totožné. Schubring cituje jeho myšlenku, že z celého procesu vzniku konceptů, o nichž se učíme, bychom neměli poznávat pouze závěry (a důkazy jejich správnosti), ale i jejich původ, předpoklad, okolnosti vzniku. To jediné je třeba pamětně uchovat v hlavě, protože z toho už dokážeme sami odvodit vše následující. Všechny vědecké objevy by měly být prezentovány s důrazem na genezi objevu. (Tím nesnižuje hodnotu důkazu, usiluje jen o vyvážení obou složek: Světlo objevu má být spojeno s pevností důkazu.) (SCHUBRING, 1978, str. 31–33) Z Leibnizových vědeckých prací je ve slovenštině dostupná kniha *O reforme vied* (LEIBNIZ, 1956).

1.3.6 Alexis Claude Clairaut (1713–1765)

Clairaut jako první nazval svou didaktickou metodu metodou genetickou. Poprvé také přímo formuloval požadavek, aby historie matematiky posloužila jako metodický základ výuky. Odůvodňoval to úvahou, že jako každá věda, i matematika se vyvíjela postupně, v krocích, přičemž po každém kroku existovala jistá potřeba, motivace, touha učinit krok další. Clairaut nabádá, abychom tyto kroky nechali provádět žáky samotné. Tvrdí, že by k nim měli být plně kompetentní, neboť je kdysi zvládli i ti vědci, kteří principy poprvé odhalili a kteří byli na začátku ve stejné pozici „začátečníků“. Stačí jen být si jako učitel vědom

nejvážnějších omylů, které historicky hrozily, a vyvarovat se jich. Od takového způsobu výuky si Clairaut slibuje odstranění dosavadních didaktických obtíží a podněcení zájmu žáků. Za hlavní výhodu pak považuje, že se žák naučí zkoumat a objevovat. Klade tedy zřetel na schopnosti mimo matematiku, které však výuka matematiky může dobře rozvíjet – žák má být především veden k řešení problémů. Jako praktickou ilustraci svojí metody Clairaut uvádí výuku základů geometrie, kterou zpracoval v knize *Eléments de Géométrie* (CLAIRAUT, 1741). Výklad v ní odvozuje od praktických zeměměřických problémů, neboť tyto motivace zřejmě doopravdy stály u zrodu geometrie. Domnívá se, že když například začneme uvažovat, jak dopočítat vzdálenost v terénu nezměřitelnou, přirozená zvědavost nás povede k dalším příbuzným otázkám. Když se nakonec úvahy spojí ve smysluplný celek, zjistíme, že jsme odvodili celou elementární geometrii. (SCHUBRING, 1978, str. 45–46)

1.3.7 Friedrich Wilhelm Lindner (1779–1851)

Schubring obsáhle popisuje vývoj didaktiky začátku 19. století, k němuž došlo mimo jiné v důsledku průmyslové revoluce. Zřetelným společným cílem vědy i výuky nyní bylo získávání nových poznatků (interpretuji si to tak, že pouhé opakování dogmat již nemohlo obstát). Genetický princip dále rozvíjel Friedrich Wilhelm Lindner. Opíral se o myšlenky hegelianismu. Vyzdvihoval důležitost „začátků“ výukového procesu, tedy původních myšlenek, které stály za diskutovaným fenoménem a které by žák pokud možno měl sám rozvíjet. Veškeré tvořící procesy, jak se v historii odehrály, měly by se odehrát i v hlavě dítěte.

Schubring cituje Lindnerovo přirovnání: Aby vzešel celý krásný strom, musím začít od semínka a hezky se o ně starat. Při dobře opečovaném semínku a kořenech (míněno zřejmě při dostatečně pojednaných východiscích a základech látky) vyroste zdravý strom i bez dalšího zahradníkovy přičinění. Naopak není vhodné se hned zpočátku zaměřit jen na větev (míněny zřejmě konkrétní věty nebo definice ve finální podobě), neboť by strom mohl uschnout. Lindner zdůrazňuje, že co je historicky dřívější, je důležitější i z hlediska formální logiky, neboť z něj vše pozdější vyplývá (píše, že existence každého nového výukového elementu musí být odůvodněna elementy předcházejícími). I proto kritizoval časté střídání předmětů ve školách (tehdy podobně jako dnes přibližně každou hodinu). Domníval se, že pro rozvinutí opravdové úvahy potřebuje žák delší čas.

Podobně jako Clairaut rozebírá Lindner výhody genetického principu, který podle něj žákovi nejen zprostředkovává matematické poznatky, ale zároveň jej trvale motivuje k práci a hlavně jej učí důkladnosti a přesnosti ve veškerém konání. Poprvé zde zazní slovo výchova (je zmíněná coby cíl všeho vyučování, tedy i vyučování matematiky). Lindner se domníval, že genetický princip lze užít i v jiných předmětech. Mínil dokonce, že podle genetického principu by bylo vhodné organizovat nejen výuku jednotlivých předmětů, ale i skladbu a pořadí těchto předmětů v průběhu studia, přičemž matematika by sloužila jako základ všem ostatním (což však není podrobněji rozpracováno). V matematice uvedl genetický princip do praxe, když v roce 1836 podle jeho zásad významně upravil učebnici základů aritmetiky (*Ernst Tillich's Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik, oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann*, LINDNER, 1836). (SCHUBRING, 1978, str. 59–64)

1.3.8 Karl Mager (1810–1858)

Mager byl významný německý filolog, pedagog a didaktik. Svými metodikami navazoval na Humboldtovu koncepci vyššího vzdělávání. Propagoval tzv. reálné školy a reálná gymnázia jako protipól běžných gymnázií, která v jeho očích příliš pěstovala formální vzdělání (nesouhlasil například ani s důrazem na výuku mrtvých jazyků). Rozvíjel genetický princip pro všechny obory a snažil se integrovat jej do vzdělávacího systému.

Podle jeho definice¹ je genetický princip každý myšlenkový vývoj, který krok za krokem doprovází a věrně zrcadlí vývoj jsoucna, které je zkoumáno, až si obě oblasti (výsledek myšlenkové cesty a současný stav vědy) nakonec odpovídají. Důvody, proč fenomén vznikl, by měly být zároveň cestou, kterou mu porozumíme. Myšlení a bytí jsou podle Magera dvě odlišné oblasti, které spojujeme (a „smiřujeme“) rozvojem poznání, tedy pohybem (genezí), který obojí zasadí do prostoru a času. Tímto zasazením je podle mého názoru myšleno i to, že daný poznatek sami prožijeme. Dosavadní škola dělala podle Magera chybu v tom, že vybírala z přírody jen nehybné momenty; přitom právě vývoj má být to, co odlišuje člověka od zvířete. Domníval se, že zatímco jedním pilířem pedagogiky je bezesporu psychologie, druhým se musí stát historie, neboť vše, co víme, je nám historií zprostředkováno.

¹ Mager předkládá „vědeckou“ definici genetického principu; definici „didaktickou“ je podle něj nutné odvodit pro každý obor zvlášť. Pro účely tohoto textu to však nepovažuji za podstatné.

Mager chápal školní vyučování jako propedeutiku pro vědeckou práci. Byť připouštěl, že ve škole dojde vždy jen k velmi omezenému nahlédnutí systému dané vědy a že smyslem výuky je v první řadě subjektivní vzdělání žáků, trval na tom, že školní látka nemůže zůstat omezena sama sebou, ale musí poskytovat pohled výš. Doplnoval, že zatímco žáci do třinácti či čtrnácti let věku by při objevování měli mít co nejvíce vlastních zkušeností a prožitků, později je možná větší abstrakce.

Při rozpracování genetického principu na poli matematiky se Mager omezil na aritmetiku. Vzhledem k tehdejšímu odlišnému pojetí aritmetiky jsou Magerovy konkrétní didaktické postupy podle Schubringova soudu do dnešních dnů nepřenositelné. Jeho následovníci však tyto myšlenky rozvinuli v geometrii. Mager upozorňoval, že kromě vývoje fenoménů, jak o něm pojednáváme, musí žák specificky v matematice rozumět také důkazu: Umět dokázat, že závěry jeho zkoumání jsou platné (tuto dvojnost popisoval již Leibniz). Výukovou metodu, která přivede žáka k obojímu (k pochopení geneze vzniku matematické věty a zároveň i porozumění jejímu důkazu), nazývá Mager kombinatorická metoda. Kombinatorická metoda tvořila podle něj metaforický žebřík, pomocí něž matematici vylezli na „matematickou horu“, aby ho po výstupu „pro lepší efekt“ odhodili; žáci by však měli jejich výstup napodobovat. (SCHUBRING, 1978, str. 65– 101)

1.3.9 Felix Klein (1849–1925)

Felix Klein je známý jako autor Erlangenského programu, nového pojetí studia geometrie pomocí grup (dle Schubringa šlo o první systematizaci geometrie po Euklidovi). Do didaktiky matematiky (jakož i přírodních věd obecně) se zapsal jako hlavní postava Meranské reformy² z roku 1905. Zásadně přepracoval školské osnovy podle zásad genetického principu tak, jak jej chápali výše zmínění předchůdci (nechtěl princip formulovat, mínil jej zejména uvést do praxe). (SCHUBRING, 1978, str. 137–139) Je autorem významné vysokoškolské učebnice aritmetiky, algebry a analýzy *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (KLEIN, 1908), která rovněž vychází z genetického principu.

Domníval se, že učitel má postupovat „geneticky – heuristicky“, tedy pomocí šikovně zvolených otázek nechat žáky, aby si na nové poznatky přicházeli sami. Místo systematiky

2 německy Meraner Reform, Meraner Lehrplan; blíže o reformě Schubring píše v článku *Der Aufbruch zum „funktionalen Denken“: Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich: 100 Jahre Meraner Reform* (SCHUBRING, 2007); v českém prostředí o reformě podrobně pojednává Dana Trkovská (TRKOVSKÁ, 2014).

preferoval vývojové seřazení látky a heuristicky vedený výklad. (SCHUBRING, 1978, str. 143) Podrobně rozpracoval didaktiku elementární matematiky, kde před každou abstrakcí důsledně vycházel z každodenních situací, které děti znají. Rozvinul Lindnerovu metaforu: Matematiku chápal jako strom, který roste nejen vzhůru (pomocí vět a důkazů), ale který také zapouští stále mohutnější kořeny (rozšiřuje svá východiska). Matematika ve skutečnosti nevzešla z axiomů, nýbrž tyto axiomy byly také předmětem obousměrného vývoje, a didaktika by tomu měla odpovídat. (MOSVOLD, 2002, str. 12–13)

Klíčová Kleinova teze ke genetickému principu zní, že žák bude v malém měřítku přirozeně vždy procházet stejným myšlenkovým vývojem, jakým ve velkém měřítku prošla věda. Poprvé explicitně klade rovnítko mezi vývoj žákova intelektu a vývoj vědy, pravděpodobně jako první formuluje koncept, který M. Hejný později nazývá genetickou paralelou (viz kapitolu 3.5.5). Jeho myšlenka byla hojně rozporována. Oponenti se tázali, proč by měl každý opakovat chyby a dětské nemoci předchozích generací. Mínili, že je-li cesta již objevena, mělo by být povinností učitele ji žákovi nejen ukázat, ale i prošlapat. Schubring o této disputaci pojednává širěji.

Klein klade v genetickém principu velký důraz na osobnost učitele. Mínil, že učebnice mohou být psány systematicky (tedy že mohou coby záchytná osnova prezentovat precizně formulované věty a důkazy v „mrtvé“ formě), pokud učitel dokáže vést genetické vyučování, kde mají žáci možnost experimentovat. Schubring cituje Kleinův výrok, že pedagogika není věda, spíše umění, i dobová vyjádření, že metoda výuky není tak důležitá, jako dobrý učitel. Za největší překážku pro rozvoj genetického principu i didaktiky matematiky vůbec považoval Klein nedostatečné povědomí o historii matematiky mezi učiteli.

Schubring považuje Meranskou reformu za rozpolcenou. Klein totiž kromě genetického principu sledoval ještě druhý, byť související cíl. Trápila ho zásadní odlišnost školské a univerzitní matematiky. Tuto mezeru mínil překlenout například zavedením výuky diferenciálního a integrálního počtu na gymnáziích. Chtěl proto i didaktiku matematiky, podobně jako geometrii v Erlangenském programu, uspořádat podle jednotného principu, tentokrát okolo pojmu funkce. Veškerou výukou mělo procházet průběžně pěstované funkční myšlení.

Navzdory zmíněné rozpolcenosti (a navzdory tomu, že Meranská reforma byla záhy následována dalšími reformami, školství se ubíralo jiným směrem a genetický princip upadl

z velké části v zapomnění) považuje Schubring Kleinovy reformní snahy za významné, dokonce za základ veškeré didaktiky matematiky v německé jazykové oblasti. To vše navzdory dobovým požadavkům na praktičnost matematiky, kdy ve jménu technického pokroku hrozilo, že se matematika stane toliko obslužným předmětem fyziky a dalších přírodních věd. (SCHUBRING, 1978, str. 137–151)

1.3.10 Otto Toeplitz (1881–1940)

O Toeplitzově díle široce pojednává následující kapitola. V této kapitole krátce zmíním ty jeho aspekty, které jsou podle Schubringa důležité pro pochopení vývoje genetického principu.

Schubring nejprve pojednává o didaktických rozporech mezi Toeplitzem a Kleinem. Toeplitz byl výrazný odpůrce vyučování matematické analýzy dříve než na vysoké škole. Zdůrazňoval, že zásadní není získání nástrojů infinitezimálního počtu a početní zběhlost, ale důsledné pochopení jeho myšlenek a motivací, pro něž je místo až na univerzitě. Nevyhnutelná mezera mezi gymnáziem a univerzitou a také mezi vyučováním a praxí, kterou se Klein snažil přemostit, podle Toeplitze není na škodu. Jeho argumentům rozumím tak, že nevadí, když se žáci a studenti v matematice učí věcem, které nebudou potřebovat v bezprostřední praxi, pokud je hlavním cílem rozvinout u nich určitou úroveň myšlení. K rozvoji myšlení pak podle něj lépe slouží pochopení principů analýzy nežli hbité řešení příkladů. To připouští jako hodnotu toliko u studentů technických škol.

Toeplitz nesouhlasil ani s průběžným pěstováním „funkčního myšlení“, neboť to podle něj neodpovídá celkové důležitosti pojmu funkce v genezi matematiky (v učebnici se formálnímu zavedení funkce dlouho vyhýbá). Didaktický princip brzkého rozvíjení konceptů, které budou důležité později, není však Toeplitzovi v jiných případech cizí.

V souladu s Kleinem Toeplitz požadoval, aby se vysokoškolské studium orientovalo především na budoucí učitele. Zdůrazňoval, že kromě přehledu o dalším vývoji matematiky je pro učitele především důležité získat „správný postoj“ k látce. To znamená mít na prvním místě nikoli látku samu, ale vyučovací metodu, kterou k ní dojdeme, což opět vyžaduje povědomí o vzniku daných matematických konceptů. Metoda je pro Toeplitze cílem sama o sobě, proto si podle něj škola může dovolit ve vyučování zaostat za vědou a výzkumem. (SCHUBRING, 1978, str. 272–281)

2. Genetický princip v pojetí Otto Toeplitze

V této kapitole pojednám o genetickém principu v pojetí Otto Toeplitze. Těžištěm kapitoly bude analýza Toeplitzovy učebnice matematické analýzy *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung (Vývoj infinitezimálního počtu, TOEPLITZ, 1949)*. Nejprve krátce shrnu obsah jednotlivých kapitol učebnice, poté shrnu závěry Schubringovy analýzy této knihy a nakonec předložím analýzu vlastní.

2.1 Životopis Otto Toeplitze

Otto Toeplitz (1881–1940) se narodil ve Vratislavi do židovské rodiny. Jeho otec i dědeček vyučovali matematiku na gymnáziu, oba vědecky publikovali. Toeplitz vystudoval gymnázium a následně matematiku na vratislavské univerzitě. Jeho profesory byli Jacob Rosanes a Rudolf Sturm. V roce 1905 získal doktorát za práci v oboru algebraické geometrie. Mezi lety 1906 až 1913 působil na univerzitě v Göttingenu, kde navazoval na práci profesora Hilberta (spektrální teorie) a promyslel základy konceptu dnes nazývaného „Toeplitzův operátor“. Seznámil se a společně publikoval s tehdejším doktorandem Ernstem Hellingerem.

Roku 1913 přijal Toeplitz místo mimořádného profesora na univerzitě v Kielu, roku 1920 se stal řádným profesorem. Zůstal v kontaktu s Hellingerem a mnoho let spolupracovali na rozvoji teorie integrálních rovnic. Od roku 1928 pracoval na univerzitě v Bonnu. Roku 1935 byl v souvislosti s protižidovskými zákony zbaven všech funkcí a ze školy propuštěn. V Německu zůstal až do roku 1939. Navzdory nepříznivým podmínkám založil a vedl židovskou školu. Pomáhal také nadaným studentům sehnat stipendium, aby mohli z nacistického Německa odjet na univerzitní studia do zahraničí. Nakonec emigroval do Palestiny, kde pomáhal při budování jeruzalémské univerzity. Měl velké plány na její modernizaci, nicméně záhy těžce onemocněl a rok po svém příjezdu, v roce 1940, zemřel.

Toeplitz se po celý život intenzivně zabýval také didaktikou matematiky a historií matematiky. Zastával názor, že by tyto dva obory měly jít ruku v ruce. Nejvýznamnější byla v tomto ohledu jeho přednáška v roce 1926 v Düsseldorfu, kde hovořil o výuce matematické analýzy. Zastával názor, že by průběh vyučování měl pokud možno kopírovat historickou cestu, jakou se k jednotlivým konceptům, pojmům a důkazům došlo (genetická metoda). Na toto téma napsal i knihu (*Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*), která vyšla

posmrtně v roce 1949 a kterou podrobně rozebereme. Věnoval se také popularizaci matematiky, s německo-americkým matematikem Hansem Rademacherem napsal úspěšnou populárně-naučnou knihu *Von Zahlen und Figuren* (anglicky *The Enjoyment of Mathematics*, TOEPLITZ a RADEMACHER, 1957). (O'CONNOR a ROBERTSON, 2001)

2.2 Okolnosti vzniku učebnice *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*

Práci na učebnici ohlásil Toeplitz na přednášce v Düsseldorfu v roce 1926. Rozeberu anglický překlad přednášky, který vyšel v roce 2015 v časopise *Science in Context* (TOEPLITZ, 2015). Ve stejném čísle časopisu vyšla také analýza této přednášky (FRIED a JAHNKE, 2015).

Toeplitz v přednášce vytyčil tři zdánlivě nesmiřitelné protiklady, s nimiž se podle jeho mínění potýká výuka základů diferenciálního a integrálního počtu na vysokých školách:

- protiklad „exaktně“ (myšleno matematicky korektně) a „intuitivně“ pojatých učebnic (kdy exaktním jsou vytýkány didaktické nedostatky a intuitivním nedostatečně přesné vyjadřování),
- protiklad cílů výuky, kdy na jedné straně potřebujeme, aby si student nejprve rutinně osvojil matematické nástroje, které jsou potřebné pro pozdější kurzy, ale nezajímavé samy o sobě, a na druhé straně chceme, aby se student na začátku studia pro matematiku nadchnul,
- tehdejší protiklad studentů z gymnázií (neznalých diferenciálního a integrálního počtu) a studentů z technických škol (kteří se již s tímto počtem setkali, byť povýtce instruktážním způsobem).

Tyto tři protiklady je podle Toeplitze možné překonat pomocí genetické metody. Sledujeme-li historickou genezi, pak:

- látka se vyvíjí „intuitivně“ a zároveň nakonec dojdeme ke korektním vyjádřením,
- vývoj látky má potenciál zaujmout a nadchnout,

- nový pohled na věc nadchne i ty studenty, kteří zkušenost s derivacemi a integrály mají.

Na vysoké škole Toeplitz doporučuje „přímou“ genetickou metodu – studium konkrétních historických objevů s veškerým jejich kontextem. Tak to podle mého názoru činí i ve své učebnici. Pro střední školu doporučuje „nepřímou“ genetickou metodu, která předpokládá, že analýza geneze pojmu bude učiteli hlavním vodítkem při zvažování toho, co je na fenoménu didakticky podstatné; samotný historický vývoj však nemusí přímo ve výuce hrát roli. V závěru se Toeplitz vyjadřuje k ideálnímu pořadí témat podle genetické metody. To bude zřejmé z dalších kapitol. (TOEPLITZ, 2015, str. 297–309)

V předmluvě k vydání Toeplitzovy učebnice z roku 1949 Gottfried Köthe uvádí, že práce trvaly řadu let a zahrnovaly jak studium historie matematické analýzy, tak ověřování již sepsaných kapitol v pedagogické praxi a jejich úpravy. Podobně Toeplitz po léta vyvíjel a v praxi ověřoval cvičení, která jsou připojena na konci učebnice. Knihu nestihl za života dokončit a rukopis zůstal v pozůstalosti v Jeruzalémě. O vydání nedokončené učebnice se po druhé světové válce zasloužil Gottfried Köthe, profesor na univerzitě v Mohuči. Podle svých slov respektoval poslední podobu rukopisu, i když se z dochovaných poznámek dalo usuzovat, že některé kapitoly mínil Toeplitz ještě přepisovat. Kniha vyšla pod názvem *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung – Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode (Vývoj infinitezimálního počtu – Úvod do infinitezimálního počtu podle genetického principu)* v nakladatelství Springer v roce 1949. (KÖTHE, 1949, str. V–VII)

2.3 Obsah učebnice *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*

Učebnice je rozdělena do tří hlavních kapitol s názvy *Podstata nekonečného procesu*, *Určitý integrál* a *Diferenciální a integrální počet*. Právě pořadí látky je jednou za zásadních charakteristik knihy, o čemž ještě pohovoříme. Text je především chronologickým výkladem těch částí dějin infinitezimálního počtu, které autor považuje za relevantní pro jeho dnešní pojetí. Menší část textu tvoří definice, věty a důkazy, zasazené do vývojového kontextu. Od striktně chronologického pojetí se Toeplitz odchyluje, když, v menšině případů, představuje vývoj některého fenoménu izolovaně. Až na výjimky, ke kterým se dostanu později, neuzivá dnešních matematických značek tam, kde by byly anachronické – tedy užívá

jich zřídka. Výklad je proložen velkým množstvím nákresů, grafů a obrázků. Text se čtenářem neinteraguje, není prokládán úlohami, prakticky neklade otázky (ani řečnické). Přibližně 60 úloh k samostatnému procvičení (bez nápověd či výsledků) se nachází na devíti stranách na konci učebnice. Úlohy jsou podle úvodních slov gradované, tedy seřazené podle obtížnosti.

2.3.1 Obsah první kapitoly: *Podstata nekonečného procesu*

V úvodu první kapitoly Toeplitz uvádí, že pro diferenciální a integrální počet je charakteristické, že na rozdíl od jiných oblastí matematiky předpokládá nekonečné procesy – proto jej nazývá infinitezimálním počtem. Míni, že než se pustíme do zkoumání infinitezimálního počtu, musíme nejprve porozumět nekonečnému procesu jako takovému. Tomu věnuje celou první kapitolu.

Nejprve zmiňuje počátky myšlení o nekonečnu v antice – Zenonovy paradoxy a Aristotelovu formulaci téže myšlenky (nevědomý předpoklad existence součtu nekonečné řady). Dále je zmíněn Anaxagorás (nekonečná dělitelnost prostoru). S nekonečným procesem operuje také grafický důkaz nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce (podle Toeplitze důkaz, který více než co jiného určil charakter matematiky dneška). Následuje výklad o hledání metody výpočtu obsahu kruhu – nejprve neúspěšně pomocí Hippokratových měsíčků (které se neopírají o nekonečné procesy), poté úspěšně pomocí pravidelných n -úhelníků kružnici opsaných a vepsaných, které se s rostoucím n blíží výsledku libovolně přesně. Ve druhé a třetí podkapitole Toeplitz píše, jak se antická matematika, založená na podobnosti, vyrovnávala s objevem nesouměřitelnosti. Zmiňuje Euklidovy definice podobnosti a Archimédův axiom (nazývaný zde *Stetigkeitsaxiom*, axiom spojitosti) a podrobně rozebírá, jak s jeho pomocí bylo nově možné čistě dokázat (a nikoli pouze bez důkazu předjímat) výsledek limitního přechodu při výpočtu obsahu kruhu.

Čtvrtá podkapitola pojednává o historickém vývoji pojmu čísla. Časově výrazně přeskakuje. Zmiňuje vznik poziční desítkové soustavy, koncept desetinné čárky, konečného a nekonečného desetinného rozvoje, kontrast geometrického a početního náhledu na číslo. Ukazuje, kde všude bylo při vývoji pojmu nutné vědomě či nevědomě připustit nekonečné procesy. V páté podkapitole se Toeplitz vrací k procesu, který použil Archimédes při aproximaci čísla π . Ukazuje, že Archimédes již znal některé hodnoty goniometrických

funkcí a pracoval s obdobou dnešních vzorců. Jeho tabulku pro sinus vybraných úhlů považuje za první „tabulaci funkce“. V šesté podkapitole vyslovuje Toeplitz větu o součtu nekonečné geometrické řady. Jde o čistě matematický, nikoli matematicko-historický výklad. Nepoužívá pojem ani značku limity, tyto koncepty opisuje slovně a odvolává se na Archimédův axiom. Věta je vyslovena v samém závěru kapitoly jako následek myšlenek, z nichž se vyvinula – jako výsledek svého důkazu.

Sedmá podkapitola pojednává o spojitém úročení. Pomocí pokusů vede Toeplitz čtenáře k zamyšlení, zda při stále častějším úročení (ročně, měsíčně, denně atd.) roste výnos nade všechny meze. Uvádí konkrétní příklady a snaží se odhadnout obecný výsledek. Následně dokáže, že výnos při sebečastějším úročení nepřesáhne hodnotu 2,718... Stejně jako v předchozí kapitole předchází odvození a důkaz závěrečné formulaci věty. Princip důkazu je identický s principem hledání obsahu kruhu, na což Toeplitz několikrát upozorňuje. Toeplitz se opět vyhýbá použití limity a nalezený výsledek 2,718... zatím neoznačuje písmenem e . V osmé podkapitole se Toeplitz věnuje vyjasněním z oboru teorie čísel (převody mezi zápisem pomocí desetinného rozvoje a pomocí zlomku, existence a délka periody). Výklad je čistě matematický bez historických souvislostí. V deváté podkapitole se definuje limita posloupnosti pomocí epsilon-delta definice a vyslovují se věty o počítání s limitami a vztahu konvergence a omezenosti. Důkazy vět neobsahují podle Toeplitze „žádnou myšlenku, pouze rutinu“, ideový koncept limity se odvolává na množství předcházejících příkladů. V následujících praktických příkladech Toeplitz bez zvláštního zdůraznění pomocí limity definuje e . Desátá podkapitola se věnuje součtu nekonečné řady a souvisejícím větám. Nekonečnou řadu Toeplitz přesně nedefinuje, měl se k ní podle svých slov vrátit v nedokončené části knihy. Intuitivně chápanou nekonečnou řadu porovná s nekonečnou posloupností, podrobně rozebírá podmínky existence součtu (a koncept podmínky nutné, nikoli postačující). Důkazy jsou formální, podkapitola je bez konkrétní historické opory. (TOEPLITZ, 1949, str. 1–43)

2.3.2 Obsah druhé kapitoly: *Určitý integrál*

Druhá kapitola se věnuje výpočtům obsahů ploch ohraničených křivkami, tedy tomu, co dnes označujeme jako určitý integrál. V první podkapitole Toeplitz ukazuje, jak vznikají kuželosečky jako řezy kuželovou plochou. Následně se věnuje kvadratuře parabolické úseče. Ukazuje, že je možná s využitím součtu nekonečné geometrické řady. Přesně sleduje

historický vývoj u Archiméda. Ve druhé podkapitole se popisuje další vývoj po dvou tisících let: Výpočet plochy pod křivkami $y = x^3$, $y = x^4$ a následně plochy pod obecnou křivkou $y = x^k$. V odvození, vycházejícím z postupů při kvadratuře paraboly, se využijí dva nekonečné procesy zároveň: nekonečné dělení „integrovaného“ intervalu a součet nekonečné geometrické řady. Tento objev dal podle Toeplitze základ tabulkovému integrálu, resp. vzorci pro derivaci polynomické funkce (který dnes odvozujeme z definice derivace). Toeplitz důsledně hovoří o obsazích ploch – terminologii funkcí se tam, kde to jde, vyhýbá. Dále pojednává o hledání obsahu plochy pod grafem funkce $y = \frac{1}{x}$. Při porovnávání některých ploch formuluje zákonitosti, na které později poukazuje u logaritmů.

Třetí a čtvrtá podkapitola popisují vývoj Cavalieriho principu. V páté podkapitole Toeplitz definuje určitý integrál jako (obvyklými termíny řečeno) rovnost horního a dolního Riemannova integrálu, pokud existuje. Za použití běžného dnešního značení a terminologie z oblasti funkcí rozebírá, kdy je existence integrálu zaručena. Jako důsledek diskuze až na konci kapitoly dodává definici, že takto zadaný integrál lze interpretovat jako *orientovaný* obsah plochy pod grafem. V šesté podkapitole se dokazují pravidla pro počítání s integrály. V sedmé kapitole Toeplitz uvádí příklady situací (funkcí), kde rovnost horních a dolních integrálů nelze zaručit. Potřeba přesnějšího vyjádření ho vede k návratu k antickým postulátům o velikosti plochy a k Archimédovi, který měl v této souvislosti potřebu rozlišit konvexní a nekonvexní útvary, což po řadě konkrétních příkladů (v nichž se ukazuje nutnost takové definice) Toeplitz učiní. (TOEPLITZ, 1949, str. 43–73)

2.3.3 Obsah třetí kapitoly: *Diferenciální a integrální počet*

Třetí kapitola se věnuje diferenciálnímu a integrálnímu počtu (ač se domnívám, že nikoli vždy v běžném dnešním smyslu). První podkapitola se věnuje tečnám křivek. Křivky jsou vnímány nejprve planimetricky a vzápětí jako „obraz početního výrazu“, graf funkce. U tečen těchto křivek Toeplitz hledá analytickou směrnici a definuje ji klasickým způsobem jako limitu směrnic sečen (výsledek zatím nenazývá derivací). Poukazuje na různá využití tečen. Ve druhé podkapitole se uvádí klasický „tabulkový“ integrál pro polynomické funkce, tentokrát nikoli v kontextu obsahu plochy pod grafem, ale v odpovědi na otázku, jak konstruovat křivku, pokud známe její tečny. Třetí podkapitola je věnována optimalizačním úlohám (rovinné i objemové). Toeplitz uvádí nejprve Euklidovo planimetrické řešení. Později

naznačuje, jak by se dala řešit prostředky analýzy, přičemž jedním ze závěrů (nikoli předpokladů) podkapitoly je, že v extrémech funkce je směrnice grafu nulová.

Ve čtvrté podkapitole Toeplitz popisuje Galileovy objevy týkající se gravitačního zrychlení. Tvrdí, že navzdory zažitému přesvědčení odhalil Galilei tyto principy pomocí teoretických matematických úvah a experimenty je pouze potvrdily. Dále Toeplitz rozebírá fyzikální souvislosti vztahu funkce s první a druhou derivací (dráha, rychlost a zrychlení). V páté podkapitole je podrobně vylíčena potřeba vzniku logaritmických tabulek. Je vysvětlen vznik přirozeného logaritmu jako základu všech ostatních a znovu definováno číslo e .

V šesté kapitole Toeplitz dochází k základní větě infinitezimálního počtu, jak ji formuloval Isaac Barrow (tedy k její první části, hovořící o vztahu derivace a integrace za daných podmínek). Z toho odvozuje, že derivace konstanty je nulová a naopak, že primitivních funkcí k dané funkci je nekonečně mnoho a liší se o konstantu. Závěrem kapitoly je druhá část základní věty infinitezimálního počtu (Newton-Leibnizova věta) dávající určitému integrálu početní interpretaci (výpočet plochy pod polynomickými funkcemi byl v učebnici popsán už dříve, tato věta je rozšířením na všechny spojité funkce). V následujících podkapitolách Toeplitz nejprve definuje derivaci a následně odvozuje konkrétní pravidla střídavě pro derivování a integrování – derivace součinu, integrace metodou per partes (včetně polemiky o vhodnosti současného značení), derivace složené funkce, použití substituce při výpočtu určitého integrálu.

Jedenáctá podkapitola vychází z praktického příkladu s logaritmickými tabulkami. Popisuje vztahy navzájem inverzních funkcí a jejich derivací. Z toho vychází odvození derivace a^x (ve speciálním případě e^x) a tudý se Toeplitz dostává k definici funkce: Říká, že křivka je tehdy a jen tehdy obrazem funkce na intervalu $(a; b)$, pokud je každou svislou přímkou v tomto intervalu protnuta právě jednou.

Dvanáctá podkapitola se věnuje goniometrickým funkcím a jejich derivacím. Toeplitz široce pojednává historické způsoby měření úhlu, končí u radiánů (poprvé je v učebnici zavádí, aniž by je pojmenoval). Odvozuje vzorce pro součet argumentů a dokazuje, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. To slouží jako ilustrace praktického významu použití radiánů. V následujících podkapitolách se ukazují pokročilejší derivační a integrační postupy, což končí v sedmnácté podkapitole odvozením obsahu kruhu pomocí určitého integrálu.

Osmnáctá podkapitola je obsáhlým historickým výkladem o vývoji pojmu funkce. Ilustruje jej mimo jiné i na sporu o prvenství objevu nekonečného počtu mezi Leibnizem na jedné straně a Newtonem s Barrowem na straně druhé. Závěrem článku Toeplitz zdůrazňuje, že student by si měl uvědomovat rozdíly v různých pojetích funkce, zejména mezi tradičním čistě početním pojetím a náhledem, který připouští i funkce výrazně nespojitě.

Posledních pět podkapitol (až do konce nedokončené knihy) se věnuje praktickému využití infinitezimálního počtu ve fyzice (Galileovy zákony, Keplerovy zákony, kyvadlo, kmitavý pohyb) a nastiňuje (rovněž pro fyzikální účely), jak provádět transformaci souřadnic při zobrazení v rovině. (TOEPLITZ, 1949, str. 73–164)

2.4 Schubringova analýza Toeplitzovy učebnice

V této kapitole vycházím opět ze Schubringovy knihy *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik* (SCHUBRING, 1978, kapitola III.1.3 *Analyse des Lehrbuchs*, str. 282–299). Schubring analyzuje Toeplitzovu učebnici (a celé Toeplitzovo dílo) nikoli z pohledu didaktiky matematiky obecně, ale z úzce specializovaného pohledu genetického principu. Vybírám z jeho analýzy postřehy, které přesto mohou být zajímavé i pro obecnou didaktiku matematiky.

Schubring se nejprve pozastavuje nad seřazením látky v učebnici. Soudí, že věrnost historické genezi dostala přednost před logickým uspořádáním. Už v úvodu poznamenává, že ke skutečně zajímavému využití probíraných fenoménů se Toeplitz kvůli tomu může dostat až ve třetí kapitole. Poukazuje na paradox, že i když jediným vodítkem má být sledování geneze, tato není lineární a lze si z ní patrně toliko vybrat některé posloupnosti událostí, zatímco jiné musejí být zamlčeny nebo zmíněny v nesprávném pořadí. Tyto poznámky si interpretuji jako pochybnost, do jaké míry má smysl trvat na důsledném chronologickém uspořádání napříč celou učebnicí. S kritikou souhlasím a rozebírám ji v kapitole 2.5.5.

Toeplitz pojímá vývoj infinitezimálního počtu jako vývoj tří propojených fenoménů: nekonečného procesu, pojmu čísla a pojmu funkce. Schubring soudí, že v Toeplitzově podání se fenomén nekonečného procesu a pojem čísla vyvinuly u Řeků a dále se již zásadně neproměňovaly. S tím zásadně nesouhlasí a rozsáhle poukazuje na „didaktické chyby“, které tímto pojetím údajně vznikly:

1. Toeplitz pominul rozdíl mezi aktuálním a potenciálním nekonečnem.
2. Toeplitz anachronicky oddělil vývoj chápání čísla od vývoje chápání funkce (cituje Dedekinda, který uvádí, že motivací k práci v oblasti čísel byla právě potřeba lépe porozumět analýze).
3. V učebnici nejsou korektně zavedena a používána reálná čísla.

Souhlasím s první výtkou. Neformální chápání rozdílů mezi aktuálním a potenciálním nekonečnem (například jak je popisují u Hejného v kapitole 3.6.4) není v učebnici pěstováno, přitom je podle mého názoru důležitou propedeutikou infinitezimálního počtu. Další dvě výtky nejsou dle mého názoru podstatné, propojení analýzy a teorie čísel nepovažuji za didakticky nosné.

Schubring dále rozporuje několik míst v učebnici, kde se Toeplitz dle jeho mínění příliš zaměřuje na vývoj matematiky jako takové a nezhledňuje kontext doby, což ho vede k údajně pomýleným závěrům. Cituje například Toeplitzovu formulaci (TOEPLITZ, 1949, str. 72), že Archimédes by diskutované lemma o rovnosti horních a dolních integrálů jistě „*uměl dokázat, ale neměl zkrátka zájem vyjadřovat se tak obecně.*“ Oponuje, že i když principu Archimédes intuitivně rozuměl, formálně a obecně by ho nedokázal (což je podstatný rozdíl), neboť v celkovém kontextu doby to ještě nebylo možné. Domnívám se, že tento fenomén můžeme pozorovat nejen v historii matematiky, ale v souladu s genetickým principem i ve vývoji jednotlivce, a že právě jednotlivého čtenáře Toeplitz na některých místech opravdu tímto způsobem přečnuje (například v abstraktní kapitole 3.18 učebnice, jak uvádím ve svojí analýze v kapitolách 2.5.5 a 2.5.6 této práce).

Dle mého názoru nejzásadnější výtku má Schubring k tomu, že Toeplitz podceňuje roli kalkulu (myšleno počtářského řemesla – samotného derivování, integrování, výpočtu ploch). Dokládá to citáty, z nichž vyplývá Toeplitzův důraz na obecné principy, přičemž jejich konkrétní doformulování pro účely praktických výpočtů už pro něj není podstatné. Oponuje, že i obyčejný kalkul může být produktivním nástrojem při odhalování matematických zákonitostí a matematickém pokroku. K tomu se vyjadřuji v kapitole 2.5.7.

V závěru analýzy Schubring shrnuje, že Toeplitz podle něj přečnuje důležitost historické kontinuity. Jeho kritiku si vysvětluji jako varování před nebezpečím, aby dosavadní didaktickou strnulost, proti níž se genetický princip vymezuje (představování matematických

pravd jako neměnných vzorců k zapamatování) nenahradila strnulost založená na dogmatické chronologii (která rovněž nemusí genezi dobře vystihovat). Domnívám se, že apeluje, abychom z dějin spíše vybíraly ty okamžiky, které dobře (například v kontrastních příkladech) osvětlí podstatu probíraného fenoménu, tedy aby dějiny byly ve službách didaktiky a nikoli naopak. (SCHUBRING, 1978, str. 282–299)

2.5 Vlastní analýza Toeplitzovy učebnice

2.5.1 Pořadí témat

Za z dnešního hlediska zásadní zvláštnost učebnice považují pořadí a důležitost témat:

- Učebnice začíná podrobným zkoumáním různých infinitezimálních procesů, aniž by pro ni byl důležitý koncept limity (limita je definována, ale není akcentována a širěji využita).
- Učebnice pojednává nejprve o integrálu, až později o derivaci.

Obojí odpovídá historickému vývoji, z něž učebnice vychází.

2.5.2 Pořadí důkaz-věta

Za zásadní didaktický rys učebnice považují, že na více místech předchází matematickou větu její důkaz, respektive věta je formulována až na základě svého důkazu. Typicky jsou takto vystavěny například kapitoly 1.6 (*Nekonečná geometrická řada*), 1.7 (*Spojité úročení*), 2.1 (*Archimédova kvadratura paraboly*) nebo 3.1 (*Tečnové úlohy*)³.

V případech technických důkazů (například v kapitolách 1.9 nebo 1.10) zase Toeplitz zdůrazňuje jejich formálnost, konstatuje například: „*Důkaz vypadá poněkud uměle. Je to jen zdání. Neobsahuje žádnou myšlenku, jen rutinu. Je zřejmé, že komparzisté, kteří se v něm nečekaně objevují, jsou průhledným způsobem vždy předem určeni tak, aby vše nakonec dobře dopadlo.*“⁴ (TOEPLITZ, 1949, str. 39). Myšlenky, na jejichž základě věta vznikla, pak nechává vzejít z jiných úvah a experimentů.

3 německy: *Die unendliche geometrische Reihe, Die stetige Verzinsung, Die Parabelquadratur des Archimedes, Tangentenaufgaben*

4 německy: „*Der Beweis sieht etwas kunstvoll aus. Das ist nur Schein. Er enthält keinen Gedanken, nur Routine. Man schaut leicht durch, dass die Statisten, die in ihm etwas unvermittelt auftreten, von hinten in stets durchsichtiger Weise bestimmt sind, damit am Ende alles gut klappt.*“

Bez ohledu na dějinný vývoj analýzy má čtenář možnost v mnoha konkrétních případech pochopit, jaké potřeby a motivace větě předcházely, jaké konkrétní případy byly brány v potaz a jaké experimenty a zobecňování bylo třeba vykonat. Obecnou větu nakonec získá coby odpověď na diskutované otázky. Tento postup Toeplitz užívá i v případě vzorců, které nejsou přímo větou, ale odvozením z definice: Například mnoho takzvaně „integračních“ úloh je vyřešeno dříve, než je v kapitole 3.2 navržen vzorec pro tabulkový integrál polynomické funkce a v kapitole 3.6 definován určitý integrál. Byť je čtenář stále jen čtenářem a do procesu odvozování aktivně nevstupuje, domnívám se, že tento způsob výkladu může pomoci pochopit podstatu probírané látky, neboť usiluje zejména o vysvětlení jejího vzniku.

V podobném smyslu se vyslovuje Hans Freudenthal v knize *Mathematics as an Educational Task*, když hovoří o „Sokratovské metodě“. Tradiční pojetí věta-důkaz považuje za pochopitelné a matematicky korektní, nicméně postrádá v něm odpověď na otázku *proč*. Prosazuje proto, aby věty v učebnicích vznikaly teprve na základě projednaných potřeb a předpokladů, a to i za cenu užití přechodně nekorektních a vícekrát přeformulovaných tvrzení. Analýza učiva je podle Freudenthala totiž vlastně jediným didakticky relevantním prvkem (FREUDENTHAL, 1973, str. 99–108). Domnívám se, že Toeplitzova učebnice je realizací Freudenthalových myšlenek (ačkoli Freudenthal publikoval o několik desetiletí později).

2.5.3 Využívání paralel

Za další charakteristický rys učebnice považuji, že upozorňuje na paralely mezi probíranými fenomény. Vede výklad tak, aby tyto paralely byly zřejmé, a část látky vysvětluje právě na jejich základě. Zmínil bych zejména první kapitolu: Celá kapitola je vystavěna na podobnosti historických úvah, které nakonec vedly k aproximaci čísla π a k aproximaci čísla e . Tyto koncepty jsou dále přirovnány k zapisování zlomků pomocí desetinného rozvoje (zejména k nekonečnému periodickému desetinnému rozvoji a zpětné interpretaci tohoto zápisu jako zlomku). Toeplitz svůj postup na více místech opatřuje didaktickým komentářem, např. str. 29: „Šlo zde právě o to jasně zdůraznit, co mají oba případy společného. Než z toho snadno vyvodíme zobecňující závěr, seznámíme se s tímtež z jiného úhlu ještě ve třetím případě.“⁵ (TOEPLITZ, 1949, str. 29)

⁵ německy: „Und darauf kam es hier an, das Gemeinsame beider Fälle deutlich herauszuarbeiten. Wir werden es noch in einem dritten Falle von anderer Seite kennenlernen, ehe wir das verallgemeinernde Fazit daraus dann mit leichter Mühe ziehen werden.“

Na základě těchto zkušeností pak Toeplitz, coby zveřejnění tří příkladů nekonečného procesu, definuje limitu a související aparát. V menším měřítku nalzáme tento didaktický postup napříč celou učebnicí, např. v kapitolách 1.10 (paralely mezi limitou posloupnosti a součtem nekonečné geometrické řady), 2.7 (souvinnost konvexních a nekonvexních útvarů s konvexními a konkávními funkcemi) nebo 3.1 (souvinnost logaritmických tabulek a inverzní funkce). Výklad založený na genezi pojmů vede k poukazování na souvislosti již z podstaty věci. Domnívám se však, že Toeplitz tuto metodu „paralel“ využívá ještě častěji, než by bylo nutné pro samotný historicky věrný výklad.

2.5.4 Výchovné poznámky

Význačným rysem učebnice jsou také místa, která nazývám „výhovnými poznámkami“ a která se netýkají přímo matematiky, ale možných přístupů ke studiu, objevování či vědě obecně. Příkladem budiž str. 81 („*Člověk, který si sedne před přístroj, pozoruje a hledá zákonitosti, nikdy nic neobjeví, stejně jako ten, kdo pouze přemýšlí, jak by to mohlo být, aniž by se kdy poradil s přírodou.*⁶“) nebo str. 84, kde se zdůrazňuje, že Napier nejprve sestavoval logaritmické tabulky pomocí mechanického počítání, ale pak na jeho místo nechal nastoupit myšlení a odhalil princip logaritmů. Tento aspekt zdůrazňuje i Schubring (SCHUBRING, 1978, str. 278).

2.5.5 Závaznost historického hlediska

Při četbě Toeplitzovy učebnice je podle mého soudu důležitá otázka, zda byla historická geneze pojmů jediným vodítkem při tvorbě pořadí a metody výkladu, či zda se autor od těchto hledisek také někdy odchýlil, pokud to bylo didakticky smysluplné. Toeplitz se na více místech vyjadřuje v tom smyslu, že historie musí zůstat podřízena didaktice a nikoli naopak, například:

- „*I zde by bylo zajímavé vyprávět, jak došlo k objevu; zde však leží hranice mezi historií jako takovou a tím, k čemu nám historie slouží.*⁷“ (TOEPLITZ, 1949, str. 95)

6 německy: „*Nie wird ein Mensch etwas entdecken, der sich vor einen Apparat setzt, beobachtet und ein Gesetz sucht, sowenig wie der, der nur nachdenkt, wie es sein könnte, ohne je die Natur zu befragen.*“

7 německy: „*Es wäre auch hier amüsant zu erzählen, wie das entdeckt wurde; aber hier liegt die Grenze von Geschichte als solcher und dem, wozu uns die Geschichte dient.*“

- „*V posledních odstavcích jsme záměrně opustili objevitelský styl. Usilovali jsme o jasnou terminologii, která neodpovídá situaci 17. století.*⁸“ (TOEPLITZ, 1949, str. 121)

Podobně jako Schubring se však domnívám, že tomu tak v učebnici není vždy. Jako příklad bych kromě konkrétních míst, kde přebujelý popis okolností podle mě neslouží didaktické věci (např. kapitola 1.4 o pojetí čísla nebo historika o Keplerovi na str. 78), uvedl kapitolu 3.8 (*Integrace per partes*). Toeplitz v ní zdůrazňuje důležitost chápání různých pojetí pojmu funkce pro pochopení integrálu a derivace. Domnívám se, že čtenáři by však k jejich pochopení na tomto místě pomohlo spíše větší množství praktických příkladů, nežli prováděný historický výklad.

Rozpolcený je též přístup k definici funkce. Přestože se s funkcemi rutinně pracuje, teprve na str. 105 najdeme částečnou definici toho, kdy je křivka grafem funkce. Samotná definice funkce se nachází až na str. 123, ovšem nikoli jako pointa či závěr, ale coby mimochodem zmíněné „lemma“ prováděného výkladu. To odpovídá genezi i postupnému budování pojmu na základě příkladů. Potíž vidím v tom, že se Toeplitz v průběhu celé knihy neopírá pouze o konkrétní příklady, ale odvolává se často i na funkci jako abstraktní pojem. Schubring (1978, str. 282) uvádí, že Toeplitz koncipoval učebnici jako příklad nepřímé genetické metody. Zde spatřuji rozpor s tím, jak Toeplitz v Düsseldorfské přednášce (TOEPLITZ, 2015) rozlišuje přímou a nepřímou genetickou metodu (viz kapitolu 2.2 této práce). Učebnici bych totiž na jejím základě označil za typického zástupce genetické metody přímé.

2.5.6 Návaznost na předchozí znalosti

Z učebnice mi bohužel není zřejmé, na jaké znalosti míní navazovat. Je koncipována jako základní kurz matematické analýzy v prvním ročníku vysoké školy. Není ovšem jasné, nakolik počítá s tím, že analýza byla vyučována před maturitou (proti čemuž se Toeplitz vymezoval, viz např. SCHUBRING, 1978, str. 274–275). Obsah učebnice staví do jiného světla, pokud by její čtenáři například již měli umět řešit úlohy na vyšetřování průběhu funkce (jak je to dosud obvyklé u maturantů na českých gymnáziích), nebo pokud by naopak všechny koncepty matematické analýzy (včetně pojmu limity a funkce) měli potkat až v této učebnici

8 německy: „*Wir haben bei der Darstellung der letzten Paragraphen den Stil der Entdecker bewusst verlassen. Wir haben überall eine prinzipielle Klarheit der Begriffe angestrebt, die der Zeitalter des 17. Jahrhunderts nicht gemäß ist.*“

(respektive až v této fázi vzdělání a pouze touto formou). Domnívám se, že Toeplitzův ideální předpoklad je znalost analytické geometrie a některých elementárních funkcí (pokročilejší koncepty totiž Toeplitz definuje od začátku, byť stručně). Myslím si však, že čtenář by pouze s těmito znalostmi nevystačil, jak rozeberu dále.

Učebnice na mne působí tak, že především reaguje na konvenční výuku analýzy⁹ a chce studenty, kteří ji absolvovali, reedukovat. Uvedu několik charakteristických citátů:

- kapitola 1.8: „*K povaze této přednášky patří, že se věnujeme tématům, která byla probírána ve školní výuce, a nahlížíme na ně ze zcela jiné perspektivy. Někdy si připadáme jako učitel houslí, který vezme žáka z povrchní hodiny s čistě amatérským cílem a chce ho dovést k vážné profesionální hudbě: musí začít úplně od začátku. I my musíme ‚začít od nuly.‘*¹⁰“ (TOEPLITZ, 1949, str. 30)
- kapitola 1.5: „*Vzhledem k tomu, že obvyklá vysvětlení při využití moderní terminologie nedají dostatečně vyniknout podstatě věci, která nás zajímá, uveďme krátce, co Archimédes ve skutečnosti dělá.*¹¹“ (TOEPLITZ, 1949, str. 20)
- kapitola 2.5: „*Když maturant (...) dostane otázku, co je určitý integrál, (...) načrtne graf funkce, omezený svislými čarami na daný interval, vyšrafuje obrazec ohraničený osou x a řekne: Tento obsah plochy. Když následně dostane otázku, co je ale obsah plochy (...), řekne: Ach tak, určitý integrál. Vyvozujeme z toho, že je nutno jednu z těchto věcí řádně vysvětlit.*¹²“ (TOEPLITZ, 1949, str. 59–60)

Je to legitimní cíl. Soudím nicméně, že učebnice ve skutečnosti nezačíná od začátku, nýbrž konvenčně nabytých znalostí na příhodných místech využívá, aniž by je dostatečně podrobně

9 Konvenční výukou míním důraz na vyšetřování průběhu funkce a výpočet integrálů, v tomto pořadí, bez podrobného vysvětlení původu integrálu.

10 německy: „*Es gehört zum Wesen dieser Vorlesung, dass wir Gegenstände, die im Schulunterricht vorgekommen sind, aufgreifen und von einer ganz andere Warte betrachten. Dabei ergeht es uns manchmal wie einem Geigenlehrer, der einen Schüler aus einem flachen Unterricht mit rein dilettantischem Ziel übernimmt und ihn zu ernster Berufsmusik überleiten will: er muss ganz von vorn anfangen. Auch wir müssen hier ‚ganz von vorn anfangen.‘*“

11 německy: „*Da die üblichen Berichte, indem sie die moderne Terminologie benutzen, den Sachverhalt, der hier interessiert, nicht klar genug hervortreten lassen, sei hier kurz angegeben, was Archimedes in Wahrheit macht.*“

12 německy: „*Wenn man einen Examenskandidaten (...) fragt: was ist ein bestimmtes Integral, so (...) zeichnet er eine Kastenfigur, schraffiert sie und sagt: dieser Flächeninhalt. Wenn man ihn dann fragt: was ist aber ein Flächeninhalt, (...) sagt er: Ach so, ein bestimmtes Integral. Wir entnehmen daraus die Notwendigkeit, eines von beiden ordentlich zu erklären.*“

definovala po svém, a proto je mi zatěžko hodnotit ji jako svébytnou alternativu konvenční didaktice.

Na podporu svého tvrzení uvádím například úvodní podkapitoly 3. kapitoly. Zde se od planimetrického pojetí hbitě přejde k chápání křivky jako obrazu početního výrazu. Aniž by to bylo podrobněji komentováno, začnou být využívány především polynomické funkce (které se od již známých kuželoseček mohou lišit). Znalost, která rovnost dvou proměnných chápat jako křivku, učebnice předpokládá – a i když připouštíme zkušenosti z analytické geometrie, domnívám se, že čtenář neznalý konvenční analýzy by potřeboval výrazně podrobnější výklad. To se týká především běžně používaného zápisu $f(x)$ ve smyslu „funkční hodnota obecné funkce f v obecném bodě x “, jak píše již v kapitole 2.5.5. Za nedostatečně diskutované považuji také vnímání derivace jako funkce od kapitoly 3.2. Bez vysvětlení se od str. 47 užívá symbolu \circ a zejména celého konceptu skládání zobrazení. Rutinně také začne být využíváno složitých zápisů s různě indexovanou proměnnou, složitými exponenty nebo výpustkami „...“ uprostřed dlouhých výrazů. Domnívám se, že bez většího cviku (který bývá zvykem získat právě i na konvenčně vyučované analýze), by se čtenář snadno ztratil.

2.5.7 Závěr

Přes všechny připomínky vyslovuji názor, že učebnice může žáka se znalostí analytické geometrie a elementárních funkcí (což je, jak se domnívám, Toeplitzův ideální předpoklad) seznámit se základy matematické analýzy. Využívá metod, které bychom i dnes označili za inovativní – představování vět jako výsledku jejich důkazu, poukazování na paralely napříč látkou. Učebnice usiluje předávat čtenáři nejen matematická fakta, znalosti a dovednosti, ale i morální postoje a hodnoty.

Těžiště učebnice je, v souladu s dějinným vývojem, zejména na podrobném odvození určitého integrálu coby obsahu plochy ohraničené křivkami a dále na využití diferenciálního počtu ve fyzice. Na vyšetřování průběhu funkce není kladen důraz. Domnívám se, že je to legitimní pojetí věci, neboť diskuze, která část analýzy je užitečnější (ať už pro praktické využití mimo matematiku, nebo pro matematické vzdělání jako takové), by asi neměla jednoznačný závěr.

Za neopodstatněnou považuji Toeplitzovu nechť k řemeslu samotného derivování a integrování. Domnívám se, že dobré zvládnutí vyšetřování průběhu funkce může být

dobrým didaktickým cílem samo o sobě. Jedná o proces tak komplexní, že žák nevystačí s aplikací memorovaných pouček a musí rozumět podstatě procesu, orientovat se v příčinách a důsledcích skutečností, které zjistí, také kvalifikovaně tipovat a improvizovat.

3. Charakteristika Hejného metody

3.1 Úvod

Hejného metodou v této práci rozumím souhrn teorií a konceptů, které na poli obecné didaktiky a didaktiky matematiky zejména v průběhu 20. století v Československu zformulovali Vít Hejný, jeho syn Milan Hejný a jimi vedené kolektivy. Jedná se zejména o *teorii generických modelů* (viz kapitolu 3.5.4) a *metodu genetické paralely* (viz kapitolu 3.5.5)

Obecné zásady těchto didaktických směrů ukážu na třech příkladech.

1. Stručně představím obsah knihy Víta a Milana Hejných *Pracovní materiály školiaceho pracoviska tábora mladých matematikov* (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977). Jedná se o základní shrnutí didaktických myšlenek Víta Hejného, které původně vzniklo pro účely letního tábora mladých matematiků v 70. letech 20. století, nicméně zaujalo širší veřejnost.
2. Představím základní principy a myšlenky knihy *Teória vyučovania matematiky 2* (HEJNÝ a kol., 1988), jak jsou popsány v její úvodní kapitole. Knihu napsal kolektiv autorů pod vedením Milana Hejného; poprvé vyšla roku 1988, pracuji s vydáním z roku 1990. Jedná se o první komplexní metodické rozpracování didaktických myšlenek Víta a Milana Hejných v konkrétních oblastech matematiky základní i střední školy. Milan Hejný plynule navazuje na práci svého otce, proto popis některých částí knihy *Pracovní materiály* vynechávám a myšlenky uvádím až zde v rozvinuté podobě.
3. Představím obsah 6. kapitoly knihy *Teória vyučovania matematiky 2*, v níž je podrobně rozpracována didaktika matematické analýzy podle principů Hejného metody. (Autorem zmíněné kapitoly není přímo M. Hejný, ale Peter Bero.)

V závěru kapitoly sám analyzuji předložené materiály a shrnuji, co je podle mého názoru pro didaktické dílo Víta a Milana Hejných charakteristické a jak se to projevuje na příkladu didaktiky matematické analýzy.

3.2 Životopis Víta Hejného (1904–1977)

Vít Hejný se narodil v moravské Litovli, kde vystudoval gymnázium. Po krátké učitelské praxi a maturitě na učitelském ústavu v Přerově pokračoval ve studiu na Vysoké škole obchodní v Praze, kde byl posluchačem přednášek Karla Engliše, F. X. Šaldy i prezidenta Masaryka. Na základě Masarykovy výzvy k rozvoji Slovenska se v pětadvaceti letech (roku 1929) vydal pracovat jako učitel matematiky na obchodní akademii v Martině, kde se usadil a oženil. V roce 1936 se mu narodil syn Milan, v roce 1941 dcera Ivana. Učitelskému povolání se od počátku věnoval se zaujetím – zajímal ho vnitřní svět žáků a jejich duševní vývoj. Již v prvních letech v Martině se věnoval studiu psychologie a vlastnímu teoretickému bádání, začal mimo jiné s vývojem svých „projekčních dotazníků“.

Účastnil se Slovenského národního povstání v hodnosti důstojníka (měl za sebou základní vojenskou službu a řadu navazujících měsíčních cvičení). Po válce v roce 1945 se celá rodina nakrátko přestěhovala do Prahy, kde Vít Hejný pracoval na ministerstvu školství. Po převratu v roce 1948 byl však z ministerstva propuštěn a na vlastní žádost se vrátil na Slovensko. Až do odchodu do důchodu v roce 1965 byl opět profesorem na obchodní akademii v Martině. Kromě pedagogické činnosti také intenzivně přednášel, hovořil zejména k rodičům na psychologická témata. Nadále rozvíjel svoje teoretické dílo, o kterém na pravidelných schůzích každý týden diskutoval s kolegy a přáteli, zejména s profesorkou Vierou Šetkovou.

Dalším impulzem pro práci Víta Hejného bylo působení syna Milana jako učitele matematiky na základní škole. Společně hledali způsob, jak uchopit didaktiku matematiky a jak děti nadchnout. Rozhodli se pořádat „Tábory mladých matematiků“ (TMM), kde pracovali s dětmi i dospělými a které se pro velký úspěch opakovaly mnoho let (Vít Hejný se stihl účastnit jen prvního ročníku v roce 1975). Pro tyto tábory společně vypracovali metodické materiály, které jsou součástí mé analýzy. Kromě pedagogiky se Vít Hejný po celý život věnoval ochotnickému divadlu. Byl proslulým režisérem a uměleckým vedoucím mnoha souborů, jeho manželka byla profesionální herečkou. Po celý život rovněž čelil politickému útlaku, za války i za komunismu byl několikrát krátkodobě propuštěn ze zaměstnání, přeložen nebo s celou rodinou donucen ke stěhování. (BACHRATÝ, 2012, str. 14–22)

3.3 Životopis Milana Hejného (1936)

Milan Hejný se narodil ve slovenském Martině, kde vystudoval gymnázium. Roku 1959 absolvoval Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy v Praze, následně vědecky pracoval na různých vysokých školách v Československu a experimentálně vyučoval matematiku na základních školách v Bratislavě. Jeho koncepce výuky geometrie, kterou se pokusil v 80. letech prosadit do učebnic, nebyla přijata. Velkého ohlasu ovšem došla publikace *Teória vyučovania matematiky 2*, kterou s vědeckým týmem dokončil roku 1988. Kniha shrnuje a zásadně rozvíjí didaktické myšlenky, na kterých pracoval už jeho otec Vít Hejný. Dílo analyzuji v dalších kapitolách. (PAMETNARODA.CZ, nedatováno)

Od roku 1992 působí Milan Hejný na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Zde dále vyvíjí své didaktické koncepty – metodu genetické paralely, teorii generických modelů a teorii vyučování orientovaného na budování schémat. Za účelem rozvoje a šíření své metody založil obecně prospěšnou společnost H-mat. (H-MAT.CZ, nedatováno) S kolektivem autorů sepsal sadu učebnic pro základní školu (např. HEJNÝ, 2015). Společnost nyní připravuje sadu učebnic středoškolských, první díl *Množiny a výroky* vyšel v roce 2024 (HANUŠOVÁ, 2024).

3.4 Pracovní materiály školiaceho pracoviska tábora mladých matematiků

Kniha Víta a Milana Hejných *Pracovní materiály školiaceho pracoviska TMM* (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977) poprvé vyšla roku 1977 v Krajském pedagogickém ústavu v Banské Bystrici. Jednalo se o metodické materiály pro vedoucí matematických letních táborů, které autoři společně pořádali. Úzce zaměřená publikace ovšem čerpala z rozsáhlých teoretických prací a praktických zkušeností obou autorů a zájem o ni se rychle rozšířil i mimo okruh táborových vedoucích. Pro velkou poptávku po omezeném počtu výtisků vyšla v roce 1992 znovu. Naposledy vyšla jako součást monografie *Archív Víta Hejného I* v roce 2012, z této verze čerpám i já. Text se skládá z 25 krátkých kapitol, které jsou proloženy příklady didaktických situací a 58 úlohami pro čtenáře. Dále představím nejvýraznější myšlenky publikace.

3.4.1 Duševní pohyb

Pro Víta a Milana Hejných je pedagogicky nejdůležitější „duševní pohyb“ žáka, který musí učitel podle vnějších projevů umět diagnostikovat. Pohyb se podle autorů skládá z pohnutky (jež v mysli poruší rovnováhu a vyvolá napětí), z hodnocení situace (tedy plánování reakce na pohnutku) a ze samotné činnosti (kterou se vyrovná nebo transformuje počáteční tenze; duševní pohyb končí, případně pokračuje v upravené podobě).

Tentýž duševní pohyb (například řešení matematické úlohy) se může odehrávat v různých klimatech (například v atmosféře spontánního zájmu nebo v atmosféře zklamání, například řešení úlohy za trest). Autoři upozorňují, že je nutné dbát na obecně příznivé klima ve třídě, neboť ovlivňuje kvalitu a intenzitu pohybu. O tom, zda bude pohyb radostnou cílevědomou činností, nebo jen zástupným odreagováním od frustrace, rozhoduje podle autorů také kvalita pohnutky. Rozlišuje mezi pohnutkou orientovanou, která staví reálný cíl (touha vyřešit úlohu), a neorientovanou, která žádný cíl nedává (například zákaz vycházek s kamarády). Neorientovaná pohnutka podle autorů na psychiku dítěte působí deformativně. (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 38–42)

3.4.2 Duševní orgán

Podle autorů je nutné na žáka nahlížet nikoli staticky (a nálepkovat jej, přisuzovat mu neměnné vlastnosti), ale dynamicky, v činnosti a neustálém vývoji. Aby mohl o takových jevech snadněji hovořit (a nemusel sahat po statických hodnotících slovech), zavádí terminologii „duševních orgánů“. Jsou to pomyslné orgány v mysli žáka, které jsou zodpovědné například za komunikaci, plánování činností nebo abstraktní myšlení. Autoři se následně mohou vyjadřovat například o žákově „nemocném komunikačním orgánu“, podobně jako by lékař hovořil o nemocných játrech, což jim má umožnit lepší přístup k problematice, než kdyby řekli, že žák je drzý. Autoři se podrobně rozepisují o „strategickém duševním orgánu“ a „orgánu vztahově-abstraktní činnosti“. (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 42–43)

3.4.3 Strategický duševní orgán

Jedná se o orgán organizující duševní pohyby jedince. Autoři dělí jeho funkce do tří oblastí:

- **Administrace minulých duševních pohybů:** Jedná se o spojování zážitků do struktury zkušenosti a její neustálou restrukturalizaci. Autoři upozorňují, že pilíři

naší zkušenosti bývají zážitky, které prožíváme sami, nikoli zprostředkovaně, které jsou spojeny se silným emočním nábojem a které přijímáme více smysly. Poznatky, které přijímáme pouze komunikací, si podle něj nezachovávají v naší zkušenosti stálou podobu, proměňují se nebo mizí.

- **Projektování probíhajících duševních pohybů:** Orgán si vybavuje minulé zkušenosti a podle nich vybírá z možných alternativ svoji strategii. Pokud nemá k dispozici dostatek zkušeností, musí volit náhodně. V případě neorientovaného duševního pohybu volí zástupnou činnost (například dítě při domácím vězení uniká do představ o hře s kamarády).
- **Zaměřování budoucích duševních pohybů:** V této oblasti autoři zkoumají, v jakém časovém horizontu a s jakým emočním nábojem dokáže jedinec plánovat svoji činnost a především do jaké míry je schopen předvídat a ovlivňovat etickou stránkou svého budoucího jednání. (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 43–48)

S posledním bodem souvisí jeden z hlavních výchovných cílů táborů TMM: „*Cielom TMM je ovplyvniť pomocou premysleného systému zážitkov skúsenosť pioniera tak, aby sa v budúcnosti perspektívne zamerlal na vyhľadávanie takých situácií, v ktorých sa rozvíja logické myslenie s etickým zameraním celospoločenského prospechu.*“ (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 44)

3.4.4 Orgán vztahově-abstrakční činnosti (orgán VAČ)

Jedná se o orgán uskutečňující kauzální operace v duševním pohybu: je zodpovědný za chápání vazby „příčina-důsledek“ a realizuje všechny logické operace (hierarchizaci, modelování, abstrahování, hledání paralel a podobně). Pro studium činnosti tohoto orgánu je podle autorů nejvhodnější genetické hledisko: „*Porovnanie fylogenézy a ontogenézy ukáže jadro všeobecnej zákonitosti antropomorfnej. [...] Znalosť fylogenézy dáva veľké možnosti aplikácií v ontogenéze.*“ (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 49) Podstatou „genetického hlediska“ je přesvědčení, že vývoj výše popsaných abstraktních schopností u lidstva jako druhu má podobné rysy, zlomy a klíčové momenty, jako jejich vývoj u jednotlivce, čehož lze didakticky využívat: „*Ludovo povedané: dívajúc sa na históriu matematiky pochopíme, ako máme učiť deti.*“ (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 49) Autoři však důrazně upozorňují, že tato genetická paralela není samospásná: funguje pouze při současném dobrém porozumění struktuře orgánu

vztahově-abstrakční činnosti. Podrobněji metodu genetické paralely rozvíjí M. Hejný, viz kapitolu 3.5.5 této práce.

Fungování orgánu VAČ autoři ukazují na konkrétních příkladech. Vyvozují z nich základy teze, kterou rozvíjejí v dalších kapitolách: Prioritou výuky matematiky by nemělo být ovládnutí konkrétních postupů (například sčítání), ale vždy především rozvoj orgánu VAČ. Tím se výuka matematiky liší například od nácviku psaní (které je v pojetí autorů cílem samo o sobě). Proto je také nutné jinak pracovat s chybou: Chyba totiž může nastat na různých místech procesu a pouhá nereflektovaná korekce špatné odpovědi by mohla žáka vést k tomu, aby přestal přemýšlet a operace uchopoval pamětně. Ze stejného důvodu autoři doporučují pracovat s netradičními úlohami v proměnlivých prostředích (například sčítat v prostředí arabských číslic, římských číslic, smluvených symbolů a podobně – aby se žák mohl spolehnout pouze na představy mnohosti v orgánu VAČ). (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 49-53)

3.4.5 Fylogeneze orgánu VAČ

Autoři představují tezi, jak se rozvíjelo chápání abstrakce a kauzality u lidstva v průběhu historie. Domnívají se, že nejprve se rozvinula kauzalita společenská (chápání příčiny a důsledku v mezilidských vztazích), neboť vztah člověk-člověk poskytuje dobrou zpětnou vazbu. Teprve na bázi vyspělé společenské kauzality vznikla kauzalita přírodovědná, která podle autorů nahradila racionalitou tehdejší víru ve fatálně vnímaný osud.

Podobným vývojem podle autorů prochází i dítě na začátku školní docházky. Pokud si nenese z rodiny dobré povědomí o kauzalitě společenské, nemůže se mu dobře dařit ani v matematice, vyžadující přírodovědné pojetí kauzality. Na několika příkladech uvádějí, že není žádoucí, aby dítě bylo „odevzdané osudu“, naopak by mělo cítit osud ve svých rukou a zažívat „závrat“ z objevu“, klidně přehnanou, podobně jako Pythagoras nebo Descartes. (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 53–56)

3.4.6 Čtyři zásady dialogické strategie

Autoři dále představují svoji teorii poznávání v matematice, známou dnes jako Teorie generických modelů. Dále rozpracovávají strategie, jak ve třídě nastolit dialogickou interakci.

Obojí je podrobně představeno znovu v knize *Teória vyučovania matematiky 2*, proto tato témata zpracovávám až v následující kapitole.

Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM jsou zakončeny čtveřicí zásad dialogické interakce. Ačkoli se rovněž týkají tématu odloženého do další kapitoly, zmíním je již zde, neboť mi připadají pro *Pracovné materiály* typické. Pro dosažení dialogické strategie je podle autorů nutné, aby učitelé:

- k žákovi přistupovali s touhou vychovat, zušlechtit, zapálit;
- nedovolili, aby touha „naučit“ přehlušila touhu „vychovat“ (to souvisí s výše zmíněnou prioritou rozvoje „orgánu VAČ“);
- pracovali sami na sobě (jedině tak mohou práci vychovávat);
- v negativním chování žáků neviděli útok na svou osobu, ale (podobně jako staří matematici stojící před nevyřešeným problémem) výzvu k práci a k experimentu. (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 71–73)

Výchova prací je pro V. a M. Hejných zásadní téma (tento koncept ostatně rozpracoval v samostatném vědeckém článku). Píše: „*Kultúry staroveku považovali prácu za utrpenie. [...] Renesančná kultúra už spočíva na celkom inom pohľade na prácu: práca zušľachtľuje človeka. [...] Vzťah dieťaťa k práci je rozhodujúce kritérium jeho sociétnej zrelosti.*“ (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 72)

3.5 Teória vyučovania matematiky 2

3.5.1 Úvod

Knih *Teória vyučovania matematiky 2* poprvé vyšla v Bratislavě v roce 1988. Sepsal ji kolektiv autorů pod vedením Milana Hejného a byla akreditována jako učebnice pro studenty učitelství na pedagogických fakultách¹³. Kniha se hlásí k odkazu Víta Hejného, jehož „*pedagogické názory*“ důsledně rozvíjí a specifikuje v konkrétních tematických oblastech. Zpracována je didaktika všech tematických celků přibližně od 5. třídy základní školy

13 První díl učebnice sepsal jiný kolektiv autorů. Soustředí se čistě na matematickou odbornost učitele matematiky, myšlenky Hejného metody neobsahuje.

až po maturitu. Autoři se opírali o rozsáhlé výzkumy a didaktické experimenty, prováděné v průběhu pěti let na slovenských základních i středních školách.

Text je dělený do krátkých kapitol. Je prokládán řadou komentovaných didaktických situací z praxe a desítkami úloh pro čtenáře (podrobná řešení úloh jsou uveřejněna na konci každé kapitoly). Shrnu základní myšlenky knihy tak, jak jsou podány v 1. kapitole *Základní myšlenky*, a jak to odpovídá mé zkušenosti s celou publikací.

3.5.2 Cíl učebnice

Hejný si neklade za cíl naučit budoucí učitele učit, neboť didaktiku podle něj nelze axiomatizovat. V rovině informační chce předat takovou strukturu, aby čtenář dokázal

„1. evidovať svoje každodenné pedagogické skúsenosti,

2. triediť ich a hodnotiť objektívnymi kritériami,

3. tvorivo hľadať cesty skvalitnenia vlastnej práce“. (HEJNÝ a kol., 1988, str. 19–20)

V rovině „influentní“ chce čtenáři *„ukázat vlastní starosti, ale hlavně radosti při práci so žiakmi a študentmi.“* (HEJNÝ a kol., 1988, str. 20) Pojem radosti v knize zaznívá opakovaně.

Hejný vychází z kritiky stávajících učebnic, které jsou podle jeho výzkumů hodnoceny zároveň jako příliš vágní v obecných didaktických zásadách a jako příliš konkrétní v metodikách jednotlivých témat. Vyčítá jim také, že příliš vycházejí z matematiky (přírodovědné) a málo z didaktiky (humanitní vědy), kteréžto dvě oblasti by u učitele měly být v rovnováze. (HEJNÝ a kol., 1988, str. 19–21)

3.5.3 Cíl výuky matematiky

Podle M. Hejného má být hlavním cílem učitele matematiky formování osobnosti žáka, čímž míní pěstování žakovy sebedůvěry ve vlastní schopnosti myšlení, pěstování žakovy touhy po poznání a rozvoj žakova myšlení. Akcentuje vnitřní motivaci žáka, v jejímž pozadí stojí „geneze myšlení“ (podnětená počátečním rozporem mezi žakovými vědomostmi a touhou vědět víc) a také žákův citový vztah k matematice. Klíčová je proto strategie, kterou učitel zvolí: Ideální vztah učitele a žáka M. Hejný popisuje jako *„zosúladená motivácia,*

permanentný dialóg a spoločná radosť oboch interagujúcich strán.“ To popisujú i v kapitole 3.5.7 této práce. (HEJNÝ a kol., 1988, str. 22)

3.5.4 Teorie poznávání v matematice – Teorie generických modelů

Interakci se žákem je podle M. Hejného nutné přizpůsobovat tomu, že struktura žakových zkušeností je jiná než naše. Žákovo jednání, má-li být autonomní, musí vycházet výhradně z jeho zkušeností; učitel by mu neměl podsouvat své strategie, nýbrž měl by porozumět jeho poznávacímu procesu. Proces poznání v matematice M. Hejný rozděluje do šesti etap:

- motivace (pohnutka, jak byla popsána již v knize *Pracovné materiály*),
- tvorba izolovaných modelů (získávání konkrétních zkušeností s fenoménem v různých podobách, bez počátečního vědomí souvislosti),
- tvorba generického modelu (poznání, co mají všechny izolované modely společné; volba modelů, které jsou nejvhodnější pro manipulaci, a překlad ostatních modelů do jejich jazyka),
- vznik abstraktního poznatku (který nevyžaduje oporu o modely),
- krystalizace poznatku (jeho další používání v nových kontextech a neustálá restrukturalizace)
- a případně automatizace.

Zjednodušeně Hejný používá schéma „motivace → zkušenosti → poznání“. Dnes hovoříme o takzvané **Teorii generických modelů**. Důraz je kladen na okamžik objevu (třetí, respektive čtvrtá odrážka), který podle Hejného hraje při formování žakovské osobnosti klíčovou roli. Učitel by měl žákovi zprostředkovat dostatek zkušeností k tomu, aby objev mohl učinit sám, a pak by měl spoluprožívat jeho radost. Naopak pokud vynecháme etapu motivace a získávání zkušeností, k žakovskému objevu nemůže dojít. Poznatky jsou tak pouze verbální a formální, navíc bez citového náboje. Zrychlení výukového procesu je efektivní pouze zdánlivě. Hejný následně uvádí deset námětů, jak formální poznání v hodinách pravidelně diagnostikovat a reedukovat (například hledáním chyby v úvaze, řešením nestandardní úlohy, objasňováním paradoxu). (HEJNÝ a kol., 1988, str. 23–25)

Vít a Milan Hejní v knize *Pracovní materiály* uvádějí příklad z výuky v 5. třídě základní školy. Učitel zadal třídě úlohu začínající slovy „*Dokažte, že v rovnostranném trojúhelníku ABC platí, že...*“. Žáci narýsovali velké množství konkrétních trojúhelníků, pro něž tvrzení platilo, a většinou nebyli schopni nahlédnout, že se nejedná o obecný důkaz. Chyba podle autorů spočívala v tom, že učitel komunikaci zahájil na úrovni generických modelů (v představách), zatímco se žáci ještě potřebovali seznamovat s izolovanými modely (sbírat konkrétní zkušenosti), čemuž odpovídaly i jejich pracovní nástroje (kružítka a pravítka). Náprava spočívala v zadání sady úloh „*Narýsujte trojúhelník...*“, z nichž některé neměly řešení. Když si žáci osvojili fenomén v mnoha konkrétních podobách, dokázali později zformulovat abstraktní pravidlo o trojúhelníkové nerovnosti, k němuž směřovala původní úloha. (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 61–62)

3.5.5 Souvislost Teorie generických modelů a historie matematiky – metoda genetické paralely

Velkým zdrojem poučení pro výše popsaný proces poznávání je podle M. Hejného historie matematiky: „*Analýzou histórie matematiky možno získať užitočné predstavy o genéze myslenia, a tieto potom skúsiť aplikovať pri vyučovaní. Túto tézu budeme nazývať metódou genetickej paralely. V celej knihe uvedenú metódu často používame.*“ (HEJNÝ a kol., 1988, str. 25) M. Hejný věří na výraznou paralelu mezi fylogenezí a ontogenezí matematického myšlení, tedy mezi vývojem myšlení lidstva a jednotlivce, a domnívá se, že rozvoj žáka by měl do určité míry rozvoj vědy napodobovat. Dokládá to dvěma příklady, kde se tak přirozeně děje: Zrod matematického myšlení (například přechod k idealizovaným objektům, cílevědomé získávání a třídění poznatků, touha vysvětlit příčiny jevů...) nebo zrod kauzality přírodovědné z kauzality emoční můžeme sledovat jak v historii matematiky (přibližně v Řecku), tak v biografii žáka (na prvním stupni základní školy), a to za velmi podobných okolností a souvislostí. Řadu dalších Hejného paralel popisují v následujících kapitolách. (HEJNÝ a kol., 1988, str. 25)

V. a M. Hejní v knize *Pracovní materiály* ilustrují využití historie matematiky v procesu poznávání následujícím příkladem: Pokud se žák nachází ve stadiu poznávání izolovaných modelů a dlouho neví, jak postupovat dál (zatím z nějakého důvodu nevidí společné rysy všech modelů), je nutná pomoc učitele. Nabídnout žákovi správnou odpověď ve formě generického modelu by však nebylo správné, neboť bychom jej připravili o okamžik objevu.

Vhodnější může být dovést žáka k dalším izolovaným modelům (nebo jejich protipříkladem), na nichž je princip vidět lépe. Vymyslet takové příklady je však zpravidla obtížné. V takovou chvíli učitelé podle V. a M. Hejných znalost historie matematiky výrazně pomůže. (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 59–61)

Na stejném místě knihy *Pracovné materiály* přirovnávají autoři etapy historického vývoje matematické analýzy k etapám poznání podle Teorie generických modelů. Peter Bero téma zpracovává podrobněji, k tomu blíže viz kapitolu 3.6 této práce.

3.5.6 Jazyk matematiky

Didakticky klíčové je podle M. Hejného zkoumání, jak jsou matematické představy a myšlenky jazykově vyjadřovány. Na příkladech ukazuje historický vývoj některých symbolů a formuluje tezi, že teprve nalezení vhodné terminologie a symboliky umožňuje další vývoj fenoménů (například pro pokrok v geometrii bylo nutné jazykově rozlišovat mezi přímkou, úsečkou a polopřímkou a nemít nadále pro všechny druhy rovných čar jediné pojmenování). Na úrovni jednotlivce pak Hejný pojmenovává čtyři etapy pojmotvorného procesu (od pozvolného, neostrého vydělování zážitků, které budou asociované s budoucím pojmem, až po pojem jako prvek axiomatizované teorie) a ilustruje jej na pojmu kružnice. Zde se částečně odkazuje na Piageta (PIAGET, 1972).

Následně M. Hejný vypočítává, jaká nedorozumění v oblasti matematického jazyka mohou ve vyučování vzniknout a navrhuje jejich diagnózu a řešení. Pokud je slovu či znaku přiřazena chybná představa nebo dokonce žádná představa, domnívá se M. Hejný, že je na vině příliš brzy zavedený pojem či příliš brzy formulovaná definice, které se neopírají o dostatečné množství žákových zkušeností, tedy předbíhají jeho vývoj. Pokud naopak žák nedokáže dát jazykové vyjádření svým představám, nevidí v tom M. Hejný problém, ale naopak znak zdravého vývoje a příležitost k pedagogické práci (o představách lze s žákem hovořit, precizovat je a nakonec nabídnout vhodný termín) – podobně v historii nejprve chyběla slova například pro myšlenky limity, komplexních čísel nebo grupy. (HEJNÝ a kol., 1988, str. 26-36)

I v oblasti matematického jazyka tedy M. Hejný opakovaně odkazuje na paralelu mezi fylogenezí a ontogenezí, tedy historickým vývojem a vývojem žáka. Navíc upozorňuje, že stupni vývoje musí odpovídat také přesnost použitého jazyka: „*To, čo bolo vrcholom*

presnosti pre Euklida, má z nášho hľadiska vážne nedostatky. Výrok, za ktorý skritizujeme maturananta, môže z piatakových úst znieť ako skvelý.“ (HEJNÝ a kol., 1988, str. 35) Učitel by neměl vyžadovat přehnaně precizní formulace, u nichž je nebezpečí formalismu, ale zároveň by měl žáky vést k nejlepšímu vyjadřování, jakého jsou schopni. Toto je pojednáno i v didaktice matematické analýzy, např. v kapitole 6, úloze 10 je podán příklad správné, ale pro didaktické účely zbytečně složité definice (HEJNÝ a kol., 1988, str. 244).

3.5.7 Komunikace

M. Hejný klade důraz na ústní komunikaci ve vyučování, preferuje ji před písemnou komunikací (například pomocí učebnice), neboť *„umožňuje simultánnu spätnú väzbu, bohatšie prostriedky prenosu informácie (intonácia, gestikulácia, kreslenie obrázkov v čase), a najmä tvorbu komunikačnej klímy.*“ (HEJNÝ a kol., 1988, str. 37) Za nejúčinnější považuje vzájemnou diskuzi třídy, kde učitel plní pouze roli moderátora – mimo jiné to učitelé umožňuje vidět, jak žáci o konceptech přemýšlejí a jaký používají jazyk. Tyto myšlenky podrobněji rozeberu ve své analýze. Hejný poskytuje několik návodů, jak diskuzi ve třídě podnítit a organizovat. (HEJNÝ a kol., 1988, str. 36–39)

V. a M. Hejní v knize *Pracovné materiály* proti sobě staví nežádoucí interakci „postojovou“ a kýženou interakci „dialogickou“. Žáky bychom neměli vnímat staticky a subjektivně jim přisuzovat neměnné vlastnosti a dovednosti, ale dynamicky, jako vyvíjející se jedince, na jejichž potřeby pružně reagujeme. (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 66) Dobrý didaktický dialog se podle V. a M. Hejných nedá axiomatizovat, shrnout do fází a podobně. Jeho dostatečnou charakteristikou by však mělo být, že probíhá permanentně, a to v atmosféře spontánní radosti, při podobné motivaci učitele i žáka (například touha po poznání). (HEJNÝ a HEJNÝ, 1977, str. 70–71)

3.5.8 Teorie množin

V předposlední kapitole Hejný popisuje průběh zavedení teorie množin do vyučování matematiky, k němuž došlo celosvětově v 70. letech 20. století. Za stěžejní pro naše téma považuji jeho domněnku, že modernizace osnov byla ku prospěchu do té doby, dokud se i učitelé museli rozvíjet – studovat nové obory, promýšlet metodiku, vyrábět nové pomůcky: *„[Učitel] musel sám poznávat strasti, ale aj slasti výskumníka, [...] prestal demonštrovať,*

mentorovať a strašiť a začal tvoriť, motivovať a debatovať.“ (HEJNÝ a kol., 1988, str. 41) Když si učitelé zvykli na nové obsahy, optimalizovali podle Hejného svoji práci a navrátili se k původním metodám: „*Mechanismus násobilky a delilky sa nahradil mechanizmom červených a zelených množín, zaklínadlá o sčítovaní a odčítovaní zlomkov zaklínadlami o prenikaní a zjednocovaní množín. Učiteľovi už nešlo o dobrodružstvo poznávania, ale o úspešný nácvik činností.*“ (HEJNÝ a kol., 1988, str. 41) To vedlo k vystřízlivění a přehodnocení teorie množin. Hejný z toho vyvozuje poučení, že kvalita vyučování je daleko více než osnovami nebo učebnicemi určena osobností učitele: „*Úroveň vyučovacieho procesu závisí od množstva intelektnej práce, ktorú vloží učiteľ do samoštúdia, prípravy a vyučovania.*“ (HEJNÝ a kol., 1988, str. 41)

3.5.9 Logika

V poslední kapitole úvodu se Hejný věnuje logice a logickému myšlení. Domnívá se, že byt' je pro něj matematika vhodná, mělo by se logické myšlení rozvíjet v každém předmětu, neboť nikde by se neměl žák učit poznatkům, nýbrž poznávání.

Za přínosné pro naše téma považují četné pasáže, kde Hejný porovnává historický vývoj logiky s vývojem jednotlivce, například

- vznik prvních logických schémat („selského rozumu“) v předhistorické, respektive předškolní době,
- původ binárního rozlišování pravda-nepravda (0/1) v mytologické potřebě ostrého rozlišení mezi dobrem a zlem, nebo
- vývoj citlivosti k rozdílu mezi implikací a ekvivalencí ve starém Řecku (a s tím související výuku formální logiky na střední škole). (HEJNÝ a kol., 1988, str. 44–53)

3.6 Didaktika matematické analýzy podle Hejného metody

V této kapitole shrnu, jak je didaktika matematické analýzy zpracována v 6. kapitole knihy *Teória vyučovania matematiky 2* (BERO, 1988). Provedu krátký přehled jednotlivých částí kapitoly. Analýzu myšlenek a pojmenování obecných rysů předloženého didaktického přístupu sepisuji (i na základě předchozích kapitol) v kapitole následující. Kapitola nese název

Analýza. Jejím autorem je Peter Bero. Kapitola čítá 55 stran. Stejně jako zbytek knihy obsahuje velké množství příkladů z praxe a úloh pro čtenáře.

3.6.1 Fylogeneze funkčního myšlení

V první kapitole Bero na malé ploše rekonstruuje vývoj funkčního myšlení od starověku do 19. století. Začíná od představ o závislosti jevů. Přes první tabulace funkcí, počátek rozlišování diskrétního a spojitého a výzkum konkrétních i obecných křivek se dostává až ke studiu křivek pomocí analytického aparátu, respektive definici funkce analyticky bez nutnosti použití geometrie, jak ji chápeme dnes. (BERO, 1988, str. 238–240)

3.6.2 Funkce ve škole

Druhá kapitola obsahuje obecné i konkrétní metodické pokyny k didaktice funkcí. V kapitole vidím dvě hlavní myšlenky:

1. Bero konstatuje, že ve výuce zpravidla probíhá pouze demonstrace poznatků (elementární funkce a jejich vlastnosti, technika vyšetřování průběhu funkce), ačkoli právě problematika funkcí se hodí k tvořivé žákovské práci, což dokládá bohatými příklady.
2. Bero se domnívá, že soudobé vyučování zanedbává vnější stránku práce s funkcemi, tedy příliš se zabývá funkcemi jako čistě matematickými objekty a opomíjí poznávání a modelování vnějších jevů jejich prostřednictvím. K zamyšlení nad takovým modelováním vyzývá čtenáře v úlohách.

Bližší se zastavím u několika dalších myšlenek kapitoly. Bero klade důraz na pěstování funkčního myšlení na základní škole. Dává příklady, jak pomocí her intuitivně uchopovat přímou a nepřímou úměrnost, jak využívat tabulky při heuristickém řešení rovnic a jak s žáky vytvářet a interpretovat grafy. Úlohy čtenáře nabádají, aby našel motivaci pro zavedení různých druhů funkcí a výzkum jejich vlastností. (BERO, 1988, str. 240–246)

Postup zkoumání vlastností elementárních funkcí Bero podrobně rozpracovává na příkladu kvadratické funkce. Popisuje experimenty, jejichž cílem je, aby žák všechny vlastnosti odhalil sám a učitel jen dodal terminologii. Úloha čtenáře vyzývá, aby si experimentování, které mají žáci zažít s kvadratickými funkcemi, vyzkoušel na funkcích kubických.

Dále se Bero zabývá logaritmickými funkcemi. Shrnuje jejich historický vývoj (zejména dnes nezvyklý Napierův kinematický přístup). Konstatuje, že ačkoli dnes už nemají logaritmy význam jako nástroj rychlého počítání, jsou stále (spolu s funkcemi exponenciálními) didakticky zajímavé jako matematické modely reality. Goniometrické funkce slouží Berovi k tomu, aby na nich ozřejmil pojem periodicity. Jelikož je žákovská představa opřena spíše o jednotkovou kružnici nežli o graf, je podle jeho názoru třeba tento pojem dále budovat „sérií vhodně volených izolovaných modelů“, které nabízí v úlohách.

Pojednáno je také o spojitosti funkce. Pojem spojitost funkce je intuitivně dobře uchopitelný, ale v konkrétních formulacích zrádný (kupříkladu bod mimo definiční obor funkce není jejím bodem nespojitosti). V úlohách Bero zadává výzkum, jaké „druhy“ nespojitosti mohou nastávat (například podle existence jednostranných limit k bodu nespojitosti). Vlastnosti funkcí navrhuje Bero zkoumat nejen pojmenováváním vlastností zadané funkce, ale i opačnými úlohami, v nichž hledáme vyhovující funkce k daným kombinacím vlastností. (BERO, 1988, str. 240–248)

Další článek se týká grafu funkce. Bero uvádí, že pojmy „graf funkce“ a „funkce“ v mysli žáka zpravidla splývají. Nabízí způsoby, jak tuto představu rozvíjet a proměňovat (mimo jiné úlohami na krystalizaci pojmů vzor a obraz). Rozebírá také, zda lze každému grafu přiřadit předpis funkce, a popisuje rozdíl mezi funkcemi z hlediska grafu „rozumnými“ a funkcemi, jako jsou Dirichletova nebo Riemannova.

V závěru Bero porovnává možnosti zavedení pojmu funkce. Takzvaný klasický přístup spočívá v porovnání známých funkcí v různých podobách (předpis, tabulka, graf) a v zevšeobecnění, že jednomu x odpovídá nejvýše jedno y . Následně mohou být zavedeny související pojmy. Proti němu stojí modernizační přístup definující kartézský součin, relaci, zobrazení a následně funkci jako zvláštní případ. Bero se z více důvodů přiklání ke klasickému postupu: Relační přístup zejména neumožňuje využít koncepty, které si žák nese z minulosti (relaci žák chápe zpravidla pasivně, nikoli jako nástroj). V relačním pojetí navíc výrazně převažuje diskrétní chápání funkce nad spojitým, což zatemňuje představu proměnné veličiny. (BERO, 1988, str. 240–248)

3.6.3 Fylogeneze infinitezimálního myšlení u Řeků

Kapitolu Bero uvádí sedmi netradičními úlohami zaměřenými na různé podoby nekonečných procesů (směřují k podstatě limity, derivování a integrování, součtu nekonečné řady a výpočtu těžiště). Konstatuje, že „*aby sme prenikli do podstaty myšlienok infi-počtu, je užitočné oboznámiť sa s ich históriou.*“ (BERO, 1988, str. 250)

Za důležité pro vývoj myšlení o nekonečnu považuje Bero Zenónovy paradoxy. Počátek infinitezimálního počtu spojuje s prvními pokusy o porovnávání rovných čar a útvarů s těmi oblými, především s výpočtem obsahu kruhu. Zmiňuje Hippokratovo lemma (dva kruhy se k sobě mají jako jejich vepsané čtverce) a Eudoxovu exhaustivní metodu (vepisování n -úhelníků do kružnice). Stručně ukazuje proces kvadratury paraboly s poukazy na to, jak postupoval Archimédes. Podrobně popisuje průběh Archimédova objevu, že poměr objemu koule a jí opsaného válce je dva ku třem. Jde o myšlenku integrace: zkoumáme, jak se k sobě mají konkrétní řezy těles vodorovnou rovinou (tedy obsahy kruhů), a pak tyto poznatky přenášíme na všechny myslitelné řezy. Úlohy pro čtenáře se týkají dokončení probíraných důkazů. (BERO, 1988, str. 249–255)

3.6.4 Čekání na Keplera

Bero nejprve porovnává řeckou představu nekonečna (nekonečno potenciální) a jeho dnešní vnímání (nekonečno aktuální) a formuluje úlohy zkoumající tento fenomén (zejména nekonečné součty a mocniny). Obě představy nekonečna podle Bera málo rozvíjíme a málo hovoříme o vztazích mezi nimi (jako příklad uvádí důkaz matematickou indukcí, v němž se pracuje s oběma představami zároveň). Bero míní, že ve škole předkládáme nekonečno většinou v aktuální podobě (přímka, číselné obory), zatímco žákům je bližší nekonečno potenciální (i aktuální modely vnímají potenciálně). Dokládá to příkladem z praxe – žáci nebyli schopni zodpovědět jednoduchou otázku o konvergenci posloupnosti, protože za n dosazovali pouze malá čísla a nemysleli dynamicky. Schopnost přechodu mezi oběma pojetími nekonečna dává Bero také do souvislosti se schopností přechodu mezi teoretickým prostorem a prostorem reprezentací v geometrii.

Dále Bero rozebírá přínos Galilea Galilei. Zmiňuje jednak myšlenkové experimenty týkající se spočetnosti a nespočetnosti, a pak zejména pojem *okamžitá rychlost*. Koncept nekonečně malé dráhy za nekonečně krátký čas pokládá za jeden ze základů infinitezimálního počtu

a ukazuje ho na více příkladech (otáčení soustředných kruhů, hod křídou). Kapitulu doprovází množství úloh pro čtenáře a metodologický komentář, který rozebírám v kapitole 3.7.3. Je zde také jasná souvislost s Newtonovou teorií fluxií, kterou Bero zmiňuje v kapitole *Analýza nekonečně malých* (viz kapitolu 3.6.7 této práce). (BERO, 1988, str. 255–260)

3.6.5 Od Keplera k Newtonovi a Leibnizovi

Rozvoj všech vědních oborů byl impulzem k dalšímu vývoji matematiky. Ten se podle Bera uskutečnil díky Keplerově práci s nekonečně malými veličinami. Kepler vycházel ze svých zkušeností v astronomii – za posloupností izolovaných hodnot dokázal vidět spojitý děj. Jeho myšlenka se týkala určování obsahů a objemů: Útvar neznámé velikosti (například kruh, válec) navrhoval dělit na nekonečně mnoho nekonečně malých, „nedělitelných“ útvarů, které přeskupíme do podoby jiného útvaru, jehož objem či obsah bude zřejmý (například trojúhelník, hranol). Myšlenku ilustruje mnoha příklady i protipříklady, úlohami, ukázkami žákovských řešení a výstupů z výuky. Keplerovy myšlenky byly rozvinuty v Cavalieriho principu, který se v závěrečné podobě o „nedělitelné“ veličiny už explicitně neopírá, a v Torricelliho díle, zobecňujícím metodu nedělitelných na křivočaré útvary. I tyto principy Bero doprovází úlohami. (BERO, 1988, str. 261–268)

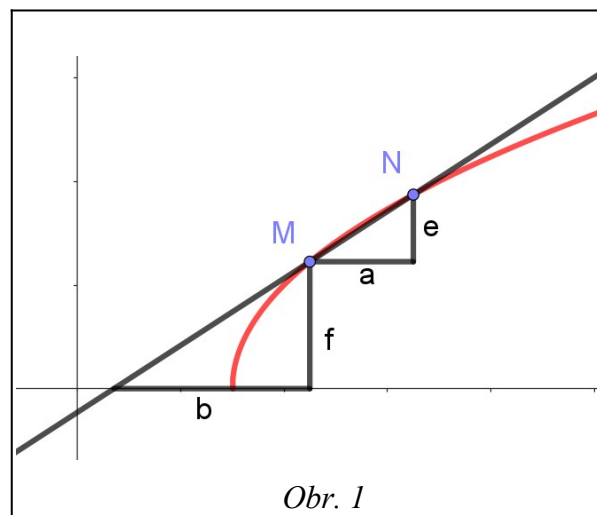
3.6.6 Propedeutika derivace

V této kapitole Bero neukazuje historický vývoj derivace, nýbrž přímo navrhuje didaktický postup z něj vycházející. Zadává úlohy o směrnici tečny dané konkrétní funkce f v daném konkrétním bodě M . Řeší je přibližnými metodami: Nejprve pomocí směrnic konkrétních „blízkých“ sečen funkce skrz body M a N , poté průměry takových údajů. Nakonec oba sečné body postupně přibližuje tak, že výsledek vypočítá s libovolnou přesností. Postupy dále zobecňuje, aby bylo možné najít tečnu například i v inflexním bodě. Důležitou roli v kapitole hrají konkrétní numerické výpočty a tabulky.

V závěru Bero nepřímou zavádí derivaci prostřednictvím pojmu „infinitesimální trojúhelník“. Jedná se o následující koncept: Směrnici sečny funkce f v bodech M , N vypočítáme jako poměr přírůstků souřadnic (a a e) mezi oběma body. Pokud body nekonečně přibližujeme, blíží se sečna tečně a poměr přírůstků se stává poměrem nekonečně malých veličin. O tomto nezvyklém poměru však tvrdíme, že se rovná konkrétnímu nenulovému

číslu, respektive pomocí něj dokonce určujeme konečné poměry, například b ku f (viz obr. 1).

Zůstává otázka, jak poměr vypočítat. Aby „infinitesimální trojúhelník“ získal praktický význam, píše Bero o „umění zanedbávání“. Aby se tečna stala sečnou, musejí body M a N splynout. V tom okamžiku se ovšem přírůstky a a e stávají nulovými a jejich poměr ztrácí význam. Tento paradox obejdeme tím, že



z předpisu funkce f vyjádříme podíl e ku a (tedy směrnici sečny MN) coby funkci jediné proměnné e . Pak můžeme zůstat u toho, že e volíme libovolně malé, ale nikoli nulové, neboť z předpisu pro výpočet podílu je zřejmé, které části lze jako libovolně malé zanedbat (řečeno dnešním jazykem: je možné spočítat limitu pro e jdoucí k nule). Závěrečně historické příklady se týkají hledání tečny k parabole a cykloidě. (BERO, 1988, str. 268–274)

3.6.7 Analýza nekonečně malých

Vznik diferenciálního a integrálního počtu na konci 17. století Bero popisuje jako abstrakční zdvih – předmětem zkoumání už nejsou jednotlivé úlohy, ale obecné metody řešení. Ačkoli pro vývoj matematiky bylo důležitější Leibnizovo pojetí, z didaktického hlediska zajímavější jsou podle Bera Newtonovy koncepty.

Newton matematickými nástroji zkoumal pohyb. Pohyb bodu v rovině (například po křivce) rozkládal do dvou přímočarých pohybů x a y . Tyto pohyby nazývá „fluentami“¹⁴. Bero je definuje jako „proměnné veličiny vznikající spojitým narůstáním, podobně jako dráha opisovaná pohybujícím se tělesem“. Trajektorii bodu, tedy vztah mezi fluentami, Newton zachycuje rovnicí $f(x, y) = 0$. Například pohyb bodu po parabole by mohl být zachycen rovnicí $x^2 - y = 0$. Rychlosti, kterými fluenty rostou, se během cesty bodu po křivce mění.¹⁵ Tyto rychlosti Newton nazývá fluxie.

14 Fluenty x a y si pro zjednodušení interpretují jako navzájem kolmé, nicméně není to zřejmě podmínkou. Klíčovou vlastností se mi zdá být jejich přímočarost (v kontrastu s křivkou, po níž se pohybuje bod).

15 Například pokud by při cestě bodu po parabole $x^2 - y = 0$ vodorovná fluenta x rostla rovnoměrně, fluenta y by nejprve ubývala (stále pomaleji) a pak rostla (stále rychleji). Nebo naopak: Pokud by fluenta y rostla rovnoměrně, fluenta x by rostla či klesala stále pomaleji.

V centru zkoumání stojí poměr fluxií v jednom (konkrétním či obecném) momentu času, tedy v jednom bodě křivky. V poměru získávají bezrozměrné fluxie smysl.¹⁶ Fluxie připomínají odvěsny infinitezimálního trojúhelníku, jen pomyslná tečna funkce zde není graficky důležitá.

Podobné jako v předchozí kapitole jsou i úlohy a metody řešení. Z daného poměru fluent zjišťujeme poměr fluxií („derivujeme“), nebo z daného poměru fluxií zjišťujeme poměr fluent („integrujeme“). Do rovnic dosazujeme nekonečně malý moment času, rovnice od sebe odečítáme a nekonečně malé veličiny zanedbáváme. Úlohy pro čtenáře se týkají také rozkladu pohybu do tří fluent x, y, z nebo převodu Newtonovské symboliky do dnešního značení.

Bero na příkladu Newtonovy metody „prvních a posledních poměrů“ důrazně upozorňuje, že v procesu zanedbávání nekonečně malých veličin je skryta idea limity. Právě na limitě podle něj stojí celá teorie fluxií i dnešní matematická analýza, přestože při samotném derivování a integrování limity nepočítáme explicitně. S tímto vědomím objasňuje vznik Leibnizovy terminologie, symboliky a algoritmů, které pro svou praktičnost přetrvaly dodnes. V poslední kapitole Bero ukazuje postup ze 17. století, kterým bylo možné aproximovat některé složitější funkce (například racionální) jednoduššími polynomickými funkcemi bez použití derivací (dnešní Taylorovy řady) a díky tomu je mimo jiné snadněji integrovat. (BERO, 1988, str. 275–282) Další desítky stran zabírají podrobná řešení všech 68 zadaných úloh.

16 Například na zmíněné parabole urazí fluenty x a y cestu od 0 do 1 za stejnou dobu, nicméně v tomto okamžiku již roste fluenta y dvakrát rychleji než fluenta x , tedy fluxie y je dvakrát větší než fluxie x .

3.7 Vlastní analýza Hejného metody

V této kapitole shrnu, které didaktické rysy mi na základě analýzy výše představených děl *Pracovní materiály (Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM, HEJNÝ a HEJNÝ, 1977)* a *Teorie vyučování (Teória vyučovania matematiky 2, HEJNÝ a kol., 1988)* připadají pro Hejného metodu charakteristické.

3.7.1 Výchovný cíl

Oba analyzované materiály explicitně a opakovaně uvádějí, že hlavní cíl výuky matematiky je výchovný (viz kapitoly 3.4.4, 3.4.6 a 3.5.3). Formování osobnosti žáka a rozvoj jeho myšlení jsou podle Hejného metody důležitější než osvojení konkrétních matematických konceptů (tyto jsou výchovným prostředkem). Domnívám se, že se jedná o nejdůležitější charakteristiku Hejného metody, která se odráží ve všech navrhovaných didaktických postupech. Zcela průzračně se autorská „touha vychovat“ podle mého názoru odráží ve zpracování životopisů matematických osobností (např. Archimédes na str. 252, Galilei na str. 258 nebo Pythagoras na str. 294 *Teorie vyučování*). Vždy je zdůrazněna jejich důvěra v experiment a ve vlastní rozum. Dále bych zmínil například úlohu 45, kde Bero v analýze žákovského řešení zdůrazňuje, že důležitý není nesprávný výsledek, ale evidentní tvořivost a odvaha žáka při práci v novém prostředí (str. 289 *Teorie vyučování*).

3.7.2 Rozvoj učitele

Vít a Milan Hejní ve studovaných materiálech přisuzují výzkumnickou roli nejen žákům, ale i učitelům. Ohlašovaným cílem *Teorie vyučování* není naučit budoucího učitele učit, ale podnítit jej k přemýšlení o didaktice, představit mu cesty možných didaktických experimentů, naučit jej vnímat své úspěchy a chyby a vyvozovat z nich poučení (viz kapitolu 3.5.2 nebo str. 19–20 *Teorie vyučování*). Vít a Milan Hejní přirovnávají učitele stojícího před žáky k vědcům zvučných jmen a doporučuje mu jejich zásadní pracovní nástroj – experiment. Opakovaně také zdůrazňuje nutnost učitelova seberozvoje, píše například: „*Pracuj na sebe, aby si mohl pracou vychovávat. Práce ti musí být potešením, zmyslom života.*“ (*Pracovní materiály*, str. 71–73, viz také kapitolu 3.4.6).

Obě analyzovaná díla obsahují velké množství úloh pro čtenáře. Deklarovaným smyslem úloh v *Pracovních materiálech* je inspirovat k činnosti a nastolit téma k diskuzi (*Pracovní materiály*, str. 36). Cílem úloh v *Teorii vyučování matematiky 2* je podle mého názoru mimo jiné podnítit učitele, aby na svojí, vyšší matematické úrovni zažil experimenty, které učebnice v jednodušší formě doporučuje předkládat žákům (například v 6. kapitole úloha 5 – čtenář má experimentovat s funkcemi kubickými namísto kvadratických, nebo úlohy 6 a 7 – čtenář má namísto s běžným logaritmem experimentovat s nezvyklou funkcí „Nog“). Další úlohy vyzývají k „introspekci“ vlastního chápání matematických konceptů (například úloha 36 v *Pracovních materiálech* nebo 37 v *Teorii vyučování matematiky 2*). Domnívám se, že v Hejného metodě je geneze žáka nerozlučně spjata s genezí učitele.

3.7.3 Vyučování podle Teorie generických modelů

Výrazným rysem Hejného metody je Teorie generických modelů (TGM), jak ji popisují v kapitole 3.5.4 této práce. Vztah TGM a Hejného metody si definuji takto:

- TGM je teorie poznávání v matematice, která si nárokuje obecnou platnost, avšak nevydává konkrétní didaktická doporučení.
- Hejného metoda doporučuje zajistit takové prostředí, aby žák sám svojí činností prošel všemi fázemi poznání podle TGM (například aby měl příležitost před abstrakcí nasbírat dostatek konkrétních zkušeností).

Domnívám se, že k důslednému postupu podle fází poznávání TGM se Hejného metoda uchyluje především proto, aby mohla sledovat primární výchovný cíl, jehož naplnění v něm spatřuje. Pokud žáka učíme pamětně uchopovat postupy, jež nejsou opřeny o předchozí zkušenosti a objevy, vede to podle Hejného metody k formálnímu poznání, které nevychovává. M. Hejný se navíc domnívá, že poznatky nabyté podle TGM jsou trvalejší, nežli ty formální, čímž je lépe splněn i sekundární cíl matematický (blíže viz kapitolu 1.1.8 *Teórie vyučovania matematiky 2*).

V analyzované 6. kapitole *Teórie vyučovania matematiky 2*, zabývající se didaktikou matematické analýzy, spatřuji postup podle Teorie generických modelů například v těchto prvcích:

- **Didaktika funkce v kapitolách 6.1 a 6.2.** Projednány jsou nejprve žákovské představy funkčních závislostí („bodových“ i spojitých), důraz je kladen na využití funkcí k modelování jevů vnějšího světa. Na příkladu kvadratické funkce je popsáno, jak mají žáci experimentálně zjišťovat vlastnosti funkcí. Teprve v závěru kapitoly dochází k rozlišení funkce a grafu funkce (kteréžto představy v myslích žáků zpravidla zpočátku splývají) a vůbec k zavedení pojmu funkce (Bero doporučuje nechat žáky zevšeobecnit své zkušenosti do poznání, že jednomu x zodpovídá nejvýše jedno y ; odmítá funkci definovat v úvodu celého procesu, za didakticky nevhodnou považuje definici pomocí relace). Podrobněji viz kapitoly 3.6.1 a 3.6.2 této práce.
- **Didaktika derivace v kapitolách 6.6 a 6.7.** Nejprve hledáme tečnu ke grafu funkce. Výklad začíná mnoha manuálními výpočty prezentovanými v tabulce i grafu. Zvláštní případy (extrémy, inflexní body) a z nich vyplývající zobecnění přibývají zvolna, na základě zkušeností se selháním jednodušších postupů. Myšlenka limitního splynutí dvou bodů (jimiž prochází sečna) v jeden (jímž prochází tečna) je vyjádřena slovně a obrázkem a je podpořena zažitými výpočty; pojem *limita* naproti tomu není vůbec použit. I po částečném zobecnění jsou „limity“ počítány pomocí úsudku („zanedbávání nekonečně malých“), nikoli algoritmicky. Následně je čtenáři představen ještě zcela jiný izolovaný model pro derivaci, jímž je Newtonova *okamžitá rychlost*. Vnímání stran infinitezimálního trojúhelníku coby fyzikálních veličin (které navíc nemusejí „téci rovnoměrně“) přináší novou interpretaci zmenšování trojúhelníku (stále menší vzdálenost za stále kratší čas, ale rychlost se nemění, pouze zpřesňuje). Výpočty dojdou vyššího stupně abstrakce, ani nyní však nepracujeme s limitou. Podrobněji viz kapitoly 3.6.6 a 3.6.7 této práce.
- **Pořadí integrál-derivace.** Za předřazením integrálu derivaci (kapitoly 6.5–6.7 učebnice) vidím dva důvody:
 - Oba procesy v podání Hejného metody pracují (explicitně, nikoli implicitně) s nekonečně malými veličinami. Při integrování jsou nekonečně malé veličiny reprezentovány „skutečnými“ objekty, například pomyslnými plátky koule nebo jehlanu, s nimiž žák „fyzicky“ manipuluje a například je přeskládává do podoby jiného tělesa. Žák tedy získá izolované zkušenosti s různou podobou nekonečně

malých veličin, dříve než je v abstraktnější podobě „limity“ (resp. infinitezimálního trojúhelníku) musí použít u derivace.

- Potřeba výpočtu ploch a objemů tzv. křivých objektů je žákovi srozumitelná již na základní škole; potřeba analyzovat průběh funkce pomocí její tečny je výrazně abstraktnější. Je tedy z hlediska vývoje žáka logičtější nejprve uchopit myšlenky integrace a následně je využít při derivování, nežli naopak formálnější poznatky o derivacích využívat při integraci.
- **Začlenění pochybností do poznávacího procesu.** Čtenář je v úlohách opakovaně vyzýván, aby analyzoval výrok, našel chybu nebo vysvětlil paradox (např. 21, 39, 40, 44); některé úlohy nemají jednoznačné řešení (např. 10), případně je v řešeních chyba pouze naznačena a ponechána k další analýze čtenáři (např. 44c). O historických pochybnostech a slepých uličkách je také vyprávěno (například v kapitolách 6.3.2 nebo 6.4.3). V kapitole 6.4.4 Bero pochvalně analyzuje Galileův didaktický dialog: *„[Galilei] privedie besedujúceho do situácie, v ktorej sám vidí, že je potrebné hľadať východisko. Teda neodovzdáva poznatok, ale obratne vedie priateľa k úskaliu – rozporu, ktorý je potom motiváciou hlbšieho poznania. Záverečné slová asi nie sú postačujúcim vysvetlením, ale tým lepšie. Ujasnenie pojmu nie je možná naraz. [...]*“ (BERO, 1988, str. 260) Pochybnost je vnímána jako součást cesty ke generickému modelu nebo abstrakci.

3.7.4 Styl práce, komunikace se žáky a atmosféra ve třídě

Jak pojednávám v kapitolách 3.4.6 a 3.5.7, Hejného metoda prosazuje aktivní a tvořivou práci žáků, akcentuje jejich objevitelskou činnost a vlastní přemýšlení. Naopak zavrhuje pojetí výuky jako osvojování konceptů, které přináší učitel. Za nejvhodnější formu komunikace je označován ústní dialog mezi žáky, který učitel pouze moderuje, případně mu dodává odborné termíny. Před obrázky v učebnici je preferováno kreslení obrázků na tabuli v reálném čase a podobně. Vidím v tom opět následování výše zmíněného výchovného cíle.

Za důležité ještě považuji opakovaná upozornění na nutnost příznivého klimatu ve třídě a především výzvy k prožívání radosti. Píší o tom například v kapitolách 3.4.1 (vzdělání ideálně jako radostná, cílevědomá činnost), 3.5.2 (sdílení strastí a hlavně radostí při práci s žáky jako cíl učebnice), 3.5.3 (vztah učitele a žáka prožívaný v radosti obou interagujících

stran), 3.5.4 (učitel spoluprožívající žakovu radost z objevu) nebo 3.5.7 (dialog mezi učitelem a žákem v atmosféře spontánní radosti). V. a M. Hejní vyjadřují přesvědčení, že pouze zážitky s emočním nábojem se stávají pilíři naší zkušenosti (viz kapitolu 3.4.3). Zdůrazňována je také umělecká, estetická složka matematického učiva (například v kapitole 6.5.3 *Teórie vyučovania matematiky 2*). Domnívám se, že promyšlení těchto aspektů je pro plnění vytyčených výchovných cílů stejně důležité, jako výše zmíněné dialogické vyučování.

3.7.5 Genetická paralela

Vít i Milan Hejní opakovaně zmiňují metodu genetické paralely: Jsou přesvědčeni, že v historickém vývoji matematiky a ve vývoji matematických schopností jedince jsou společné rysy, kterých lze didakticky využívat (podrobněji v kapitolách 3.4.5 a 3.5.5). Analyzovaná 6. kapitola *Teórie vyučovania matematiky 2* obsahuje historický výklad ke všem probíraným fenoménům (s částečnou výjimkou derivace, což zmiňuji dále). Celá didaktika je tedy prezentována na pozadí základního historického přehledu. Přímé provázání didaktiky s historií vidím například v následujících myšlenkách:

- **Pořadí integrál-derivace:** Z dnešního pohledu nezvyklé pořadí odpovídá tomu historickému. Z historie učebnice čerpá také velké množství izolovaných modelů pro integrál i derivaci (například „integrální“ rozkládání těles na nekonečně malé objekty nebo Newtonovo fyzikální pojetí derivace).
- **Integrační myšlenky zprvu nezávislé na funkcích:** Myšlenky výpočtu obsahů a objemů „křivých“ objektů nejsou omezeny na plochy pod grafem funkce. Výklad začíná u velikosti kruhu, koule nebo jehlanu, jak tomu bylo i v historii. Konvenčně jsou přitom objemy těchto těles zmíněny spíše jako závěrečný zvláštní případ „užití integrálního počtu“ (například HRUBÝ a KUBÁT, 2022).
- **Představy nekonečna:** Bero v kapitole 6.4 popisuje, jak se v historii vyvíjelo chápání nekonečna, a následně je porovnává s žakovskými představami o nekonečnu a limitách. Z paralel čerpá didaktická doporučení.

Souvislost s historií vidím i v preferenci kreslení nákresů na tabuli či do sešitu v reálném čase před hotovými obrázky v učebnici (viz kapitola 3.5.7 této práce nebo 1.3.2 *Teórie*

vyučovania matematiky 2). Byť výstavba náčrtu ve vyučování nemusí odpovídat historické genezi konceptu, za zásadní považují důraz na vývoj jako takový, jak popisuje dále.

Domnívám se, že historické souvislosti, myšlenky a úlohy nejsou nikdy uváděny samoučelně. Například v kapitole 6.7 Bero upozorňuje, že vývoj matematické analýzy ovlivnil především Leibnizův integrál; Newtonovy myšlenky jsou ovšem didakticky zajímavější, a proto tvoří výklad na jejich základě. V úvodu kapitoly 6.6 (derivace) se zase konstatuje, že „*nebudeme sledovat historický vývoj, ale ukážeme návrh didaktického postupu, ku ktorému nás štúdium fylogenézy dovedlo*“ (BERO, 1988, str. 268), tedy historie zde stojí jako zdroj inspirace, nikoli jako metodické dogma. Některé části učebnice jsou psány bez odkazů k historickým kontextům (například většina kapitoly 6.2 týkající se výzkumu vlastností funkcí a definice funkce).

Vyslovuji tezi, že využívání historie matematiky (genetické paralely) není pro Hejného metodu cílem, ale pouze jedním z osvědčujících se nástrojů, jak u žáka budovat poznání v souladu s Teorií generických modelů. Cílem Hejného metody je geneze poznatku v myslí žáka. Pro přípravu vhodných didaktických podmínek může být vodítkem geneze historická. Například jak píše v kapitole 3.5.5, znalost historie může učiteli pomoci s volbou vhodných izolovaných modelů nebo jejich protipříkladů.

3.7.6 Závěr

Jsem přesvědčen, že pro Hejného metodu je primární výchovný cíl (kapitola 3.7.1). Aby jej dosáhla, doporučuje coby nástroj takové vyučování matematiky, aby bylo v souladu s Teorií generických modelů (kapitola 3.7.3). Dobrým zdrojem inspirace k takovému vyučování může být využití genetické paralely mezi vývojem lidstva a jednotlivce, v níž věří (kapitola 3.7.5). Svoji tezi shrnuji diagramem:

$$\text{výchovný cíl} \rightarrow \text{využití TGM} \rightarrow \text{využití genetické paralely}$$

Radostnost ve vyučování je podle mého názoru předpokladem i následkem naznačeného procesu, stejně jako sebevýchova učitele.

4. Porovnání genetického principu a Hejného metody

V této kapitole provedu srovnání genetického principu a Hejného metody, a to na základě vzorku výše přibližných teoretických děl a učebnic. Porovnáám dobu jejich vzniku, deklarovaná východiska a provedu obsahové srovnání analyzovaných učebnic. Především se pak nakonec vyslovím k tomu, k jakým cílům metody chtějí směřovat a jak pracují s genetickou paralelou. Výsledky bádání shrnuji v závěru kapitoly.

4.1 Časové zařazení

Nejvýznamnějšími teoretiky genetického principu jsou

- Felix Klein (1849–1925), známý zejména jako autor Meranské reformy z roku **1905**; jeho učebnice aritmetiky, algebry a analýzy podle zásad genetického principu poprvé vyšla v roce **1924**,
- Otto Toeplitz (1881–1940), který práci na genetické učebnici matematické analýzy oznámil v roce **1926** na přednášce v Düsseldorfu; učebnice vyšla posmrtně v roce **1949**,
- Gert Schubring (1944), autor rozsáhlé monografie o genetickém principu, která poprvé vyšla roku **1978**.

Množství vědeckých článků o genetickém principu vychází i ve 21. století. Nacházel jsem ovšem převážně takové, které pouze shrnují již publikované myšlenky; výjimkou je například polemika Nielse H. Jahnkeho (JAHNKE, 2005) nebo článek Ladislava Kvasze, využívající genetický princip jako jeden ze základů genetického konstruktivismu. (KVASZ, 2016).

Hejného metodu vyvinuli zejména Vít Hejný (1904–1977) a Milan Hejný (1936). Jejich první publikací byly *Pracovní materiály TMM* z roku **1977**, vycházející z desetiletí bádání Víta Hejného. Další významnou publikací byla *Teória vyučovania matematiky 2*, vysokoškolská učebnice pro učitele matematiky, která pod vedením Milana Hejného vznikla v roce **1988**. Hejného metoda je živě rozvíjena i dnes, Milan Hejný roku **2013** založil obecně prospěšnou společnost H-mat, která školí učitele a od roku **2015** také vydává učebnice podle zásad Hejného metody.

Nepodařilo se mi dopátrat zmínky či důkazu, že by se Hejného metoda přiznaně inspirovala genetickým principem, zmiňovala se o něm či na něj odkazovala. V textech analyzovaných knih jsem o genetickém principu či jeho protagonistech nenašel zmínku, nevyskytují se ani v rozsáhlých rejstřících a seznamech literatury těchto knih (s výjimkou dávných osobností jako Descartes nebo Leibniz, které Schubring uvádí jako předchůdce genetického principu a kteří tvůrcům Hejného metody samozřejmě známi byli). Ani Schubring coby zástupce genetického principu se o Hejném nezmiňuje (což ovšem vzhledem k výše uvedenému časovému zasazení není překvapující). Proto předpokládám, že obě didaktické metody vznikaly nezávisle.

4.2 Východiska

Východiska analyzovaných knih popisujících genetický princip a Hejného metodu spolu podle mého názoru úzce souvisí:

- Podle Schubringa je cílem genetického principu překonat matematický formalismus; na matematické koncepty chce nahlížet jako na nějakou cestou vyvinuté, nikoli jen nyní pevně definované; většímu rozvoji genetického principu podle něj brání též malé povědomí o historii matematiky (kapitola 1.2).
- Toeplitz vychází z několika zdánlivých protikladů (zejména protikladu korektně vyjadřované a rutinně ovládané matematiky proti matematice intuitivní a heuristické), které slibuje usmířit pomocí genetické metody (kapitola 2.2).
- Na počátku Táborů mladých matematiků, z nichž vzešly *Pracovní materiály*, stála mimo jiné otázka, jak uchopit didaktiku matematiky, aby žáky nadchla (kapitola 3.2).
- Milan Hejný v *Teorii vyučování* vychází z kritiky stávajících učebnic, příliš vágních v obecných didaktických zásadách a zbytečně konkrétních v didaktice jednotlivých témat (kapitola 3.5.2).

Domnívám se, že i zvolené metody výkladu u Schubringa a M. Hejného se podobají – knihy svojí strukturou napodobují princip, jenž se snaží popsat (Schubring: genetický princip poznáváme na základě jeho geneze; Hejný: čtenáře nechceme naučit učit, chceme mu jen ukázat metodu, pomocí které bude moci sám nahlížet a zlepšovat své vyučování). Všechny

čtyři publikace také jako jedno z řešení záhy zmiňují využití historie matematiky, o čemž pojednávám později.

4.3 Porovnání obsahů učebnic

V této kapitole porovnám obsahy dvou analyzovaných učebnic – Toeplitzovy učebnice *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung* a 6. kapitoly Hejného *Teórie vyučovania matematiky 2*, zabývající se matematickou analýzou.

4.3.1 Shodné rysy

Zásadní společnou charakteristikou obou učebnic je podle mého názoru pořadí témat (viz kapitoly 2.5.1 a 3.7.3). Věnují se nejprve různým podobám infinitezimálních procesů (zejména výpočtům ploch a objemů), aniž by zdůrazňovaly koncept limity (Hejný ji ani nedefinuje, Toeplitz ji využívá okrajově). Následně probírají určitý integrál a až poté derivaci. Určitý integrál je pojednán široce, s mnoha historickými souvislostmi a důrazem na vysvětlení značení (viz kapitoly 2.3.2, 2.3.3 a 3.6.7). Derivace je probrána okrajověji a takřka bez historických souvislostí. Učebnice se téměř vůbec nevěnují vyšetřování průběhu funkce. Domnívám se, že to odpovídá historické genezi matematické analýzy a představuje to i relevantní didaktickou variantu, jak analýzu vyvíjet v hlavě žáka.

Dále se učebnice výrazně shodují:

- v líčení vývoje infinitezimálního myšlení u Řeků (viz kapitoly 2.3.1 a 3.6.3),
- v líčení vývoje funkčního myšlení (viz kapitoly 2.3.1 a 3.6.1),
- v akcentování fyzikálního náhledu na graf funkce a derivaci (okamžitá rychlost a podobně, viz kapitoly 2.3.3 a 3.6.7),

což jsou všechno oblasti, v nichž je, jak se domnívám, historický vývoj pro učitele vhodnou didaktickou předlohou.

Za významný didaktický rys Toeplitzovy učebnice považuji, že důkaz zpravidla předchází svoji větu, respektive věta je formulována až na jeho základu (viz kapitolu 2.5.2). V analyzované kapitole Hejného učebnice nelze tento jev pozorovat, neboť v ní nejsou žádné věty formulovány ani dokazovány (v jiných kapitolách jsou formulace vět nebo jejich důkazů

často ponechány čtenářům jako cvičení a nejsou součástí hlavního textu). Domnívám se nicméně, že Hejný postupuje v zásadě stejně jako Toeplitz, jen formulaci vět ani nepovažuje za nutnou (například kvůli zbytečné abstrakci).

4.3.2 Rozdílné rysy

Zásadní rozdíly mezi učebnicemi jsou podle mého názoru následující:

- Toeplitz se nevěnuje rozdílu mezi potenciálním a aktuálním nekonečnem, který je pro Bera velmi důležitý (viz kapitoly 2.4 a 3.6.4).
- Toeplitz se vyhýbá používání dnešního značení, kde to jen jde (viz úvod kapitoly 2.3); Bero se jeho použití nebrání – nevádí mu, pokud je jeho význam odhalován postupně (například symbolika integrálů je objasněna až v kapitole 6.7, operuje se s ní ale již dříve).¹⁷
- Toeplitz v úvodních kapitolách podrobně popisuje různé nekonečné procesy i mimo geometrii (číslo e , nekonečná geometrická řada, pojem čísla, Archimédův axiom, viz kapitolu 2.3.1), zatímco Bero zůstává ve světě geometrie, kde přináší více různých modelů (zmiňuje nejen Cavalieriho princip, ale i jeho předchůdce, viz kapitolu 3.6.5).

Domnívám se, že pro Toeplitze je historické hledisko závaznější než pro Hejného metodu, a proto témata pojednává v celé historické šíři (nekonečné procesy), nevěnuje se jim, pokud nebyla historicky akcentována (aktuální a potenciální nekonečno) a zpravidla nepřipouští anachronismus (použití dnešního značení), byť uznává, že tento postup není závazný (viz kapitolu 2.5.5).

Bero podle mého názoru vybírá z historické geneze fenoménů pouze to, co může ve své genezi žák dobře napodobit, tedy některé části historie staví do popředí a jiné zanedbává (viz závěr kapitoly 3.7.5). Dobře je to myslím vidět na průběžném pěstování funkčního myšlení: Bero doporučuje s funkčním myšlením cílevědomě začít již na prvním stupni (viz kapitolu 3.6.2), zatímco Toeplitz jej odmítá, neboť podle něj neodpovídá důležitosti pojmu funkce v historii matematiky (viz kapitolu 1.3.10)¹⁸.

17 Zde je však nutno také vzít v potaz, že autoři zřejmě kalkulují s jinými počátečními znalostmi čtenáře: Bero se na rozdíl od Toeplitze věnuje podrobněji i různým typům funkcí, kteroužto zkušenost Toeplitz zřejmě předpokládá.

18 Klein i Schubring (další zástupci genetického principu) by však Toeplitzův přístup zřejmě rozporovali.

4.4 Výchovný cíl

Domnívám se, že hlavním cílem Hejného metody je výchova žáka – pěstování žákovy sebedůvěry ve schopnost vlastního myšlení a pěstování žákovy touhy po poznání (viz kapitoly 3.5.3 a 3.7.1). Matematické obsahy a didaktické strategie jsou pouze prostředkem k těmto výchovným cílům, které mohou být naplňovány také v jiných předmětech (žák by se neměl učit poznatkům, ale poznávání, viz kapitolu 3.5.9). Didaktické strategie Vít a Milan Hejní posuzují a volí právě podle toho, nakolik splňují výchovný cíl (píší o tom v kapitole 3.4.4; podrobněji viz především kapitoly 17–20 v knize *Pracovní materiály* a také většinu číslovaných „Příkladů“ tamtéž).

V Schubringově přehledu myšlenek, z nichž se formoval genetický princip, je výchova v různých formách rovněž zmíněna opakovaně, například

- u F. W. Lindnera (výchova jako cíl všeho vyučování; genetický princip jako výuka důkladnosti a přesnosti ve veškerém konání, viz kapitolu 1.3.7),
- u K. Magera (vývoj je to, co odlišuje člověka od zvířete, viz kapitolu 1.3.8),
- u F. Kleina (žáci by měli mít možnost experimentovat a ve vhodném prostředí na poznatky přicházet sami, viz kapitolu 1.3.9).

Také Toeplitz zdůrazňuje, že úkolem školy je rozvinout u žáků určitou úroveň myšlení (nevadí tedy, pokud se žáci učí věcem, které bezprostředně nevyužijí, nebo pokud škola zaostane za vědou a výzkumem, pakliže se žák rozvíjí, viz kapitolu 1.3.10).

Obě metody výchovu akcentují. Obě analyzované učebnice jsou rovněž prokládány „výchovnými poznámkami“, tedy místy, kde autoři (často na příkladu historických osobností) zdůrazňují nutnost důvěry ve vlastní rozum, v experiment a tvořivost (viz kapitoly 2.5.4 a 3.7.1). Domnívám se ovšem, že zatímco pro Hejného metodu je výchova primární, pro genetický princip je výchozí motivací sledování genetické paralely – tedy tvorba didaktických postupů na základě zkoumání a napodobení (zejména historického) vývoje matematiky. Zamýšlené výchovné účinky takových postupů jsou v genetickém principu popisovány zcela stejně, jako v Hejného metodě (rozvoj myšlení, prožití objevu, motivace k dalšímu studiu). Nejsou ovšem tak mohutně akcentovány, jsou vnímány spíše jako vítaný vedlejší produkt centrální genetické paralely (viz např. kapitoly 1.3.6 nebo 1.3.7). Nejblíže Hejného metodě je

v tomto smyslu Magerovo pojetí genetického principu (myšlení a bytí jako dvě odlišné oblasti, které smiřujeme procesem poznání – vlastním prožitkem, který nás kultivuje a odlišuje od zvířete, viz kapitolu 1.3.8).

4.5 Genetická paralela

Využití genetické paralely, jak ji definoval Karl Mager (viz kapitolu 1.3.9) a později Milan Hejný (viz kapitolu 3.5.5), je velmi důležité v genetickém principu i v Hejného metodě. Obě metody se shodují v tom, že učitel by měl mít povědomí o historii matematiky a z ní čerpat didaktické inspirace. Obě analyzované učebnice obsahují množství historických odkazů – buď přímo vyprávějí o historickém vzniku matematických konceptů, nebo je objasňují s poukazem na jejich historii.

Zásadní rozdíl vidím v tom, že zatímco pro genetický princip je genetická paralela hlavním *cílem*, výchozím konceptem, od něhož odvozuje další didaktické kroky (viz především kapitoly 1.2, 1.3.9 a 2.2), Hejného metoda vychází z výchovných cílů a z cílů daných Teorií generických modelů, a genetická paralela je pro ni ideálním *nástrojem* (viz kapitoly 3.7.5 a 3.7.6). Zatímco genetický princip vychází především z *geneze učiva* (jejíž sledování má být didakticky efektivní a jejímž následkem může být i geneze žáka, viz Magerovo pojetí v kapitole 1.3.8), Hejného metoda vychází z *geneze žáka* (formuluje, v čem jej chce rozvinout – viz kapitolu 3.5.3), přičemž genetická paralela může, ale nemusí být využita. Představitelé genetického principu Toeplitz a Schubring sice uvádějí, že historické hledisko nemusí být didakticky závazné, nicméně domnívám se, že i přes tyto proklamace zůstala v analyzované Toeplitzově učebnici didaktika podřízena historii (viz kapitolu 2.5.5).

Obě analyzované učebnice však shodně vedou výklad tak, aby byly zřetelné paralely mezi probíranými tématy, upozorňují na tyto paralely a staví na nich (u genetického principu o tom pojednávám v kapitole 2.5.3, u Hejného metody je to podle mého názoru jeden z předpokladů vedení výuky podle Teorie generických modelů).

4.6 Shrnutí

Na základě výše uvedených srovnání vyslovuji tezi, že *Hejného metoda je* (přínejmenším zprvu nevědomým) *pokračováním a rozvinutím genetického principu*, respektive jeho uvedením do širší praxe.

Hejného metoda využívá pro genetický princip klíčovou metodu genetické paralely. Samotná genetická paralela však podle mého názoru nikdy nebude dostatečně efektivní, pokud jí nebude předcházet zájem o genezi žáka, jenž je dodán právě v Hejného metodě. Za klíčové považuji přesvědčení, že žák musí matematiku odhalovat zcela sám (tedy nezávisle na její historii), ale pro učitele, který mu chystá vhodné prostředí, je znalost historie matematiky zásadní výhodou (viz kapitolu 3.5.5). Druhý důležitý posun od genetického principu k Hejného metodě spočívá podle mého názoru v Hejného chápání vývoje jazyka matematiky, který už jen sám o sobě také umožňuje objevy, a to nikoli jen v dějinách, ale i u jednotlivce (viz kapitolu 3.5.6).

Domnívám se, že teprve na základě orientace na žáka a jeho prožívání mohou vůbec vznikat konkrétní, v praxi využitelné didaktické zásady (za nejdůležitější považuji ty o atmosféře ve třídě, viz kapitolu 3.7.4). Řekl bych, že právě tento posun umožnil Hejného metodě vybudovat ucelenou didaktiku matematiky, která již v různých formách zpracovala všechna témata základní i střední školy. Podle genetického principu jsou zpracovány, nakolik je mi známo, pouze některé části aritmetiky, algebry a analýzy. Hejného matematika vytváří uzavřený systém, který nemusí navazovat na jiné didaktické přístupy¹⁹ a může tak lépe pracovat s celkovou provázaností učiva, která je i v genetickém principu akcentována.

¹⁹ Na příkladu Toeplitzovy genetické učebnice ukazují, že přecházení mezi různými přístupy může být problematické, viz kapitolu 2.5.6.

Závěr

Ve své diplomové práci jsem popsal teoretická východiska genetického principu a analyzoval učebnici matematické analýzy psanou podle jeho zásad. Za klíčovou jsem považoval myšlenku genetické paralely, a také nikoli zcela mimochodem formulované přesvědčení, že výuka matematiky může mít rovněž výchovné účinky. Pozastavoval jsem se mimo jiné nad otázkou, nakolik má být historické hledisko primární a závazné.

Dále jsem popsal teoretická východiska Hejného metody a analyzoval kapitolu z učebnice Milana Hejného, zabývající se didaktikou matematické analýzy (autorem kapitoly je Peter Bero). Za klíčové jsem považoval chápání výchovných cílů jako primárních, formulaci teorie poznávání v matematice (Teorie generických modelů) a využití genetické paralely coby vhodného nástroje pro realizaci předchozích dvou konceptů. Poukazoval jsem mimo jiné na zdůraznění role emocí v poznávacím procesu.

Na základě analyzované literatury jsem konstatoval velkou podobnost mezi genetickým principem a Hejného metodou, a to jak v teoretických východiscích (práce s genetickou paralelou a výchovnými cíli), tak v praktické formulaci učebnic matematické analýzy (pořadí integrál-derivace, důraz na koncept určitého integrálu, marginalizace vyšetřování průběhu funkce). Na základě svých závěrů o obecných rysech učebnic a o deklarovaných cílech obou metod jsem vyslovil finální tezi, že Hejného metoda je nevědomým pokračováním a rozvinutím genetického principu, respektive jeho uvedením do praxe.

Na tuto diplomovou práci je možné navázat v mnoha oblastech. Pracoval jsem jen s velmi malým vzorkem nabízející se literatury, vycházel jsem výhradně ze zdrojů starých několik desítek let a v praxi jsem téma zúžil pouze na příklad didaktiky matematické analýzy.

V oblasti genetického principu by bylo především vhodné podrobněji analyzovat učebnici *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (KLEIN, 1908), zpracovávající nejen analýzu, ale i aritmetiku a algebru. Podobně by budoucí badatelé neměli opomenout ani ještě starší genetickou učebnici aritmetiky od F. W. Lindnera (LINDNER, 1836; viz také kapitolu 1.3.7). Klíčové by nakonec bylo pečlivěji zjistit, zda a nakolik je genetický princip v německojazyčném prostředí dále teoreticky rozvíjen či dokonce uplatňován praxí.

V oblasti Hejného metody by bylo vhodné analyzovat učebnice, které podle jejích zásad vyšly u společnosti H-mat v posledních letech. Dobré by bylo přesněji zjistit, nakolik vůbec využívají genetickou paralelu, případně zda je tato použita výlučně v zájmu výchovných cílů, jak jsem to formuloval já. Pro oblast matematické analýzy, na niž jsem se zaměřil především, bude zajímavá řada středoškolských učebnic, která teprve postupně vychází. Klíčová by nakonec mohla být hospitační činnost ve třídách, které jsou vyučovány Hejného metodou, a rozbor soudobé výuky z hlediska otázek, jimiž se tato práce zabývala.

Takový badatel by mohl podat výrazně fundovanější popis vztahu genetického principu a Hejného metody, než jaký jsem přinesl já. Domnívám se ovšem, že coby jeden z prvních průzkumů problematiky může mít moje práce svoji hodnotu, zejména díky podrobnému zmapování teoretických východisek.

Seznam zdrojů

- BACHRATÝ, Hynek (2012). *Profesor Vít Hejný*. In: BACHRATÝ, Hynek (ed.). 2012. *Archív Víta Hejného I*. Žilina: Edis. ISBN: 978-80-554-0614-5
- BERO, Peter (1988). *Analýza*. In: HEJNÝ, Milan a kolektiv (1988). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. ISBN: 80-08-01344-3 (2. vydání 1990).
- CLAIRAUT, Alexis Claude (1741). *Eléments de Géométrie*. Paříž: Chez David Fils.
- DESCARTES, René (1637). *Rozprava o metodě*. Praha: OIKOYMENH. ISBN: 978-80-7298-212-7 (Vydáno roku 2016.)
- FRIED, Michael a JAHNKE, Hans Niels (2015). *Otto Toeplitz's 1927 Paper on the Genetic Method in the Teaching of Mathematics*. In: *Science in Context, Volume 29* (2015). Cambridge: Cambridge University Press. ISSN: 0269-8897.
- FREUDENTHAL, Hans (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. ISBN: 90-277-0235-7.
- H-MAT.CZ (nedatováno). *Prof. RNDr. Milan Hejný, CSc.* Dostupné online: <https://www.h-mat.cz/prof-milan-hejny> [cit. 13. 2. 2025]
- HANUŠOVÁ, Jana a kolektiv (2024). *Množiny a výroky*. Praha: H-mat. ISBN: 978-80-88247-43-2.
- HEJNÝ, Milan a kolektiv (1988). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. ISBN: 80-08-01344-3 (2. vydání 1990).
- HEJNÝ, Milan a kolektiv (2015). *Matematika B*. Praha: H-mat. ISBN: 978-80-88247-35-7
- HEJNÝ, Vít a HEJNÝ, Milan (1977). *Pracovné materiály školiaceho pracoviska TMM*. In: BACHRATÝ, Hynek (ed.). *Archív Víta Hejného I*. 2012. Žilina: Edis. ISBN: 978-80-554-0614-5
- HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef (2022). *Matematika pro gymnázia: Diferenciální a integrální počet*. Praha: Prometheus. ISBN: 978-80-7196-363-9.
- ICMI (The International Commission on Mathematical Instruction) (2019). *The 2019 Hans Freudenthal Award*. Dostupné online: <https://www.mathunion.org/icmi/awards/hans-freudenthal-award/2019-hans-freudenthal-award> [cit. 16. 2. 2024]
- JAHNKE, Niels Hans (2005). *A Genetic Approach to Proof*. Dostupné online: <http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/05Automne/CERME4Jahnke.pdf> [cit. 27. 3. 2025]
- KLEIN, Felix (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Berlin / Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 978-3-662-11652-4 (4. vydání 1933).

KÖTHER, Gottfried (1949). *Vorwort*. In: TOEPLITZ, Otto (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*. Berlin / Göttingen / Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 978-3-642-49496-3.

KVASZ, Ladislav (2016). *Princípy genetického konstruktivismu*. In: *Orbis scholae*, 2016/10 (2), str. 15–45. ISSN: 1802-4637

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1956). *O reforme vied*. Bratislava: Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied.

LINDNER, Friedrich Wilhelm (1836). *Ernst Tillichs Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik, oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann*. Leipzig: Gräffschen Buchhandlung.

MOSVOLD, Reidar (2002). *Genesis Principles in Mathematics Education*. Notodden: Telemarkforskning Notodden. ISBN: 82-7463-089-0

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (2001). *Otto Toeplitz*. Dostupné online: <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Toeplitz/> [cit. 13. 2. 2024]

PAMETNARODA.CZ (nedatováno). *Prof. RNDr., CSc. Milan Hejny*. Dostupné online: <https://www.pametnaroda.cz/cs/hejny-milan-1936> [cit. 13. 2. 2025]

PIAGET, Jean (1972). *The Principles of Genetic Epistemology*. New York: Routledge & Kegan Paul Ltd. ISBN: 0-415-16890-2.

SCHUBRING, Gert (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Stuttgart: Klett-Cotta. ISBN: 3-12-929191-1

SCHUBRING, Gert (2007). *Der Aufbruch zum „funktionalen Denken“: Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich: 100 Jahre Meraner Reform*. In: *NTM International Journal of History and Ethics of Natural Sciences, Technology and Medicine*, 15 (1). ISSN: 00366978

SCHUBRING, Gert (2019). *The Legacy of Felix Klein*. Cham: Springer Nature. ISBN: 978-3-319-99385-0

SCHUBRING, Gert (2021). *Geschichte der Mathematik in ihren Kontexten – Neue Zugänge*. Cham: Springer Nature. ISBN: 9783030694821

TOEPLITZ, Otto (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*. Berlin / Göttingen / Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 978-3-642-49496-3.

TOEPLITZ, Otto a RADEMACHER, Hans (1957). *The enjoyment of mathematics*. Princeton: Princeton University Press. ISBN: 0-691-07958-7.

TOEPLITZ, Otto (2015). *The Problem of University Courses on Infinitesimal Calculus and Their Demarcation from Infinitesimal Calculus in High Schools*. In: *Science in Context, Volume 29* (2015). Cambridge: Cambridge University Press. ISSN: 0269-8897.

TRKOVSKÁ, Dana (2014). *Historický vývoj geometrických transformací*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta (disertační práce).

Zdroje obrázků

Obrázek 1: Vlastní obrázek volně podle (HEJNÝ, 1988), str. 270, obr. 25.

Vyjádření k využití nástrojů umělé inteligence

Využil jsem internetové překladače Google Translator a DeepL Translator pro rychlou prvotní orientaci v anglických textech a pro první návrh anglického překladu abstraktu. Jiných služeb umělé inteligence jsem v této práci nevyužil.