Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pojem míra v geometrii a jeho testování v české a polské maturitě z matematiky

The concept of measure in geometry and its testing in czech and polish high school mathematics graduation exams

Kateřina Rodová

Vedoucí práce:	Mgr. David Janda, Ph.D.
Studijní program:	Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor:	B M-AJ 20

2025

Odevzdáním této bakalářské práce na téma *Pojem míra v geometrii a jeho testování v české a polské maturitě z matematiky* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Žatci dne 11. 4. 2025

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu své práce, panu doktoru Davidu Jandovi, za jeho vstřícnost, odborné rady a cenný čas, který mi věnoval při vedení této práce.

ABSTRAKT

Cílem mé bakalářské práce je zanalyzovat, jak je pojem míry v geometrii testován v rámci státních maturit z matematiky v České republice a Polsku. Úlohy jsou porovnávány nejen mezi sebou, ale také ve vztahu ke svým národním vzdělávacím programům. Analýza jednotlivých úloh vychází z teoretického rámce, kterému se věnuji v první části své práce. Tato teoretická část popisuje proces budování konceptuálního porozumění míře, konkrétně obvodu a obsahu, od základů až po středoškolskou úroveň.

K analýze byly vybrány úlohy z didaktických testů maturitních zkoušek z matematiky základní i rozšiřující úrovně z jarních termínů let 2023 a 2024 v České republice a Polsku. Pro lepší porozumění jsou součástí práce také charakteristiky školských systémů obou zemí a specifika jejich maturitních zkoušek. Samotná analýza obsahuje vzorové řešení a komentář ke každé úloze. V komentáři hodnotím, jaké části konceptuálního porozumění míře v geometrii jsou danou úlohou ověřovány, případně jaké poznatky lze při řešení využít. Následně porovnávám přístupy českých a polských úloh s ohledem na výstupy očekávané podle jejich vzdělávacích programů.

Z provedené analýzy vyplynulo, že mezi českými a polskými úlohami existují drobné rozdíly. České úlohy často podporují práci s geometrickým náčrtkem, na jehož základě žáci hledají vztahy a převádějí je do algebraické podoby, aby dosazením číselných hodnot získali výsledek. Polské úlohy jsou naopak různorodější a umožňují více způsobů řešení, čímž nabízejí možnost obejít se bez složitějších algebraických postupů. Tento rozdíl se odráží i v příslušných vzdělávacích dokumentech, které s charakterem úloh ve svých zemích poměrně přesně korespondují.

KLÍČOVÁ SLOVA

míra v geometrii, obvod, obsah, maturita z matematiky, testování

ABSTRACT

The aim of this bachelor's thesis is to analyse how the concept of measure in geometry is tested in Czech and Polish high school mathematics graduation exams. The selected tasks are compared not only with each other but also in relation to their respective national curricula. The analysis of individual tasks is based on the theoretical framework presented in the first part of the thesis. This theoretical section describes the development of a conceptual understanding of measure, specifically perimeter and area, from the elementary level up to the level expected in high school.

The tasks selected for analysis are taken from the didactic tests of both the standard and extended level mathematics graduation exams conducted in the spring terms of 2023 and 2024 in the Czech Republic and Poland. In order to provide clearer context, descriptions of the educational systems of both countries and the specific characteristics of their graduation exams are also included. Each analysed task is accompanied by a model solution and a commentary. In the commentary, an evaluation is provided of which aspects of the conceptual understanding of measure in geometry are being tested, and which mathematical knowledge can be utilised in the solution. The approaches taken in the Czech and Polish tasks are then compared with respect to the expected outcomes specified in their national curricula.

Based on the conducted analysis, minor differences were identified between the Czech and Polish tasks. Czech tasks are often designed to encourage the use of geometric diagrams, which students use to identify relationships and translate them into algebraic form, arriving at a solution by substituting numerical values. In contrast, Polish tasks tend to be more varied and allow for multiple solution strategies, often enabling students to avoid more complex algebraic procedures. These tendencies are reflected in the respective curricular documents, which align closely with the nature of the tasks used in each country.

KEYWORDS

measure in geometry, perimeter, area, mathematics graduation exams, testing

Obsah

Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá pojmem míra v geometrii a jeho testováním v české a polské maturitě z matematiky. V první části práce se zaměřím na konceptuální porozumění míře v geometrii. Samotný pojem míra v geometrii se v běžných učebnicích, ať už pro základní nebo střední školy, ve své obecnosti příliš neobjevuje, přesto označuje problematiku, se kterou se žáci setkávají od raného školního věku.

Častěji se v této souvislosti pracuje s konkrétními příklady jako obvod, obsah a objem. Ačkoli jsou tyto koncepty zaváděny již na základní škole, jejich porozumění nemusí být u všech žáků dostatečné. Při řešení úloh z této oblasti se žáci například často spoléhají na zapamatované vzorce, aniž by dokázali vlastními slovy vysvětlit samotný princip jednotlivých veličin. S ohledem na šíři celé problematiky se v této práci omezím pouze na problematiku obvodu a obsahu, zatímco objem ponechám stranou.

Vzhledem k praktické využitelnosti znalostí míry v geometrii je důležité, aby si žáci osvojili nejen samotné výpočty, ale i jejich význam, význam souvisejících pojmů a souvislosti mezi nimi. Je tedy žádoucí u žáků konceptuální porozumění míře v geometrii postupně budovat a také zjišťovat, do jaké míry je ve výuce i v centrálním testování zastoupeno. Ve srovnání české a polské maturitní zkoušky spatřuji vhodnou příležitost přispět k tomuto cíli.

Ve druhé části práce se proto zaměřím na testování znalostí souvisejících s mírou v geometrii. Provedu analýzu vybraných úloh z této oblasti v české a polské maturitě z matematiky z let 2023 a 2024.

Součástí analýzy bude řešení úloh, identifikace možných obtíží, se kterými se žáci mohli setkat, a zhodnocení úspěšnosti řešení. Úlohy budu rovněž porovnávat s požadavky vyplývajícími z českého rámcového vzdělávacího programu – RVP (MŠMT, 2021) a jeho polské obdoby Podstawa programowa kształcenia ogólnego (Ministerstwo Edukacji Narodnowej, 2018).

Cílem práce je tedy porovnat úlohy v české a polské maturitě z hlediska jejich zadání, náročnosti výpočtů a časové náročnosti v kontextu konceptuálního porozumění míře.

Součástí porovnání bude analýza toho, v jaké míře jednotlivé úlohy vyžadují hlubší pochopení souvislostí, nebo zda se zaměřují pouze na mechanické použití vzorců.

1 Pojem míra v geometrii

Geometrie je jedním ze stěžejních odvětví školské matematiky a je součástí výuky již od prvního stupně základní školy. V RVP pro základní vzdělávání je tato oblast matematiky a její cíle popsána takto:

V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podrobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací. (RVP, 2023, s. 31)

Je zřejmé, že záměrem programu je propojit teoretické znalosti geometrie s reálnými situacemi tak, aby znalost a pochopení této oblasti byly využitelné v každodenním životě. Je však otázkou, zda k naplnění tohoto záměru opravdu při výuce dochází.

Co se praktické využitelnosti v reálném světě týče, jednou z důležitých oblastí matematiky je právě míra v geometrii. Každý se někdy ocitne v situaci, kdy potřebuje zjistit, kolik metrů pletiva bude potřebovat na vytvoření plotu, kolik dlaždiček musí koupit na obložení stěny nebo jakou plochu zabere koberec v místnosti. Vondrová (2015) uvádí také využití míry v geometrii pro budování dalších matematických poznatků. Např. obsah obdélníku je využíván k demonstraci komutativity násobení nebo k vizualizaci vzorců (např. pro druhou mocninu dvojčlenu) a podobně.

Ne vždy však realitě odpovídají modelové úlohy, na které jsou žáci zvyklí, což může představovat významnou překážku pro efektivní a správné řešení problémů v praxi. Bohužel běžný přístup v českém vzdělávacím systému často klade důraz na použití vzorců, zatímco hlubší porozumění problematice často zůstává opomíjeno. V mnoha učebnicích lze najít úlohy s přímou instrukcí „Napiš si vzorec a dosaď do něj." Jako příklad uvádím úlohu (*Obr. 1*) z pracovního sešitu pro 2. stupeň základní školy od nakladatelství Nová škola (Jedličková a kol., 2024, s. 44).

Vzorová úloha 1:

1. Zapište vzorec a vypočítejte obvod:

a) čtverce o straně 4,6 cm

b) obdélníku o stranách 6 cm a 4,8 cm

c) kosočtverce o straně 12,4 cm

d) kosodélníku o stranách a = 7,4 cm a b = 11,8 cm

e) čtyřúhelníku o stranách a = 3 cm, b = 2,5 cm, c = 8 cm a d = 3 cm

Obr. 1: Vzorová úloha 1 (Jedličková a kol., 2024, s. 44)

Tento přístup sice umožňuje mechanické řešení mnohých úloh, avšak nepodporuje snahu zapojit do řešení problému logické myšlení a může vést k tomu, že v reálných situacích žáci selžou, protože nebudou schopni problém správně analyzovat a vyřešit bez explicitně daných číselných hodnot. Je také relevantní otázkou, do jaké míry tento přístup rozvíjí kognitivní schopnosti žáka a zda si žáci uvědomí dílčí vlastnosti, které je možné dále zobecnit a využít k zavedení pokročilejších matematických pojmů.

Právě proto je důležité, aby žáci nejen zvládali výpočty, ale aby také rozuměli vztahům a principům, na nichž tyto výpočty stojí. Klást důraz na konceptuální porozumění míře v geometrii znamená rozvíjet právě takový přístup žáků a budu se mu proto věnovat v následujících kapitolách.

1.1 Konceptuální porozumění

Hiebert a Lefevre (2013) popisují konceptuální porozumění jako hluboké pochopení matematických pojmů, vztahů a principů, které umožňuje jejich smysluplné propojení a aplikaci v různých kontextech. Uvádí, že lze konceptuální porozumění chápat jako propojenou síť vědomostí, v níž jsou vztahy mezi jednotlivými prvky stejně důležité jako samotné informace. Jde tedy o proces nebo stav, kdy jedinec rozumí principům a vztahům mezi koncepty, a tedy dokáže tyto znalosti aplikovat. Díky konceptuálnímu porozumění tak žáci při řešení problému dokážou např. přenášet znalosti do nových situací, objevovat alternativní způsoby řešení nebo odvozovat vzorce místo jejich mechanického memorování.

Jako pomyslný protipól Hiebert a Lefevre (2013) popisují pojem procedurální vědomosti[1], které lze také označit jako znalosti postupů. Tento pojem označuje znalosti zaměřené na procesy a postupy vedoucí k dosažení výsledků. V kontextu matematiky zahrnuje dvě hlavní složky: formální jazyk a symbolickou reprezentaci matematiky, tedy znalost matematických symbolů a pravidel jejich zápisu, a algoritmy a pravidla pro řešení úloh.

Zatímco tedy konceptuální porozumění klade důraz na porozumění principům a vztahům mezi koncepty, procedurální vědomosti se zaměřují na správné provedení postupů a výpočtů. V ideálním případě by měly být tyto dva typy znalostí propojeny – porozumění konceptům by mělo podporovat správné použití postupů a naopak. Jestliže jedna z těchto složek ve výuce chybí nebo jsou oddělené, vede to k problémům v porozumění i aplikaci matematiky. Tedy pokud má žák pouze konceptuální znalosti, může sice chápat matematické principy, ale nemusí umět správně řešit úlohy. Naopak pokud má jen procedurální znalosti, umí sice aplikovat vzorce, ale nerozumí tomu, proč fungují.

V případě míry v geometrii je tedy zřejmé, že procedurální znalosti odpovídají naučeným vzorcům. Pro správné a úplné pochopení problematiky je však potřeba rozšířit i konceptuální porozumění tématu, na které nebývá kladen až takový důraz.

1.2 Konceptuální porozumění míře v geometrii

Kouřim a kol. (1985) uvádí, že existují celá odvětví geometrie, kde se „obejdeme bez čísel“, ale přesto je otázka zavedení velikosti geometrických útvarů prakticky i teoreticky důležitá.

Samotný pojem míra v geometrii se objevuje spíše v odborných publikacích než v klasických školských učebnicích, kde se mnohem častěji vyskytují pojmy, které míra

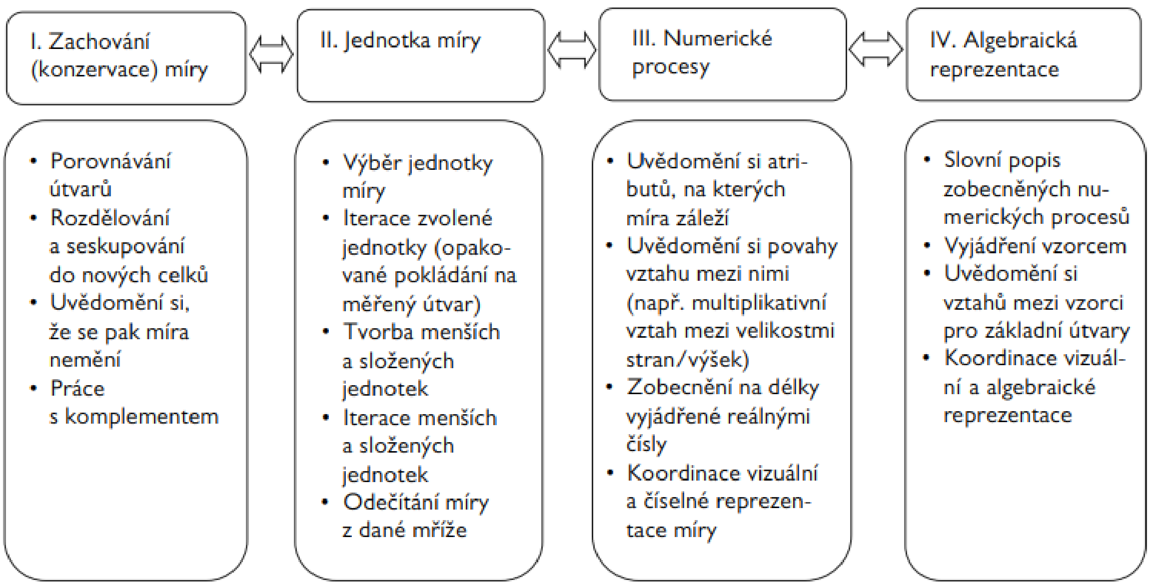
[1] Hiebert a Lafevre (2013) skutečně označují procedurální vědomosti (*procedural knowledge*) jako vědomosti, nikoliv porozumění. Nejedná se totiž na rozdíl od konceptuálního porozumění (*conceptual understanding)* o skutečné porozumění, ale spíše o znalost postupů a algoritmů.

v geometrii zastřešuje, jmenovitě např.: *úsečka a její délka, geometrický útvar a jeho obsah, těleso a jeho objem*. (Kouřim, 1985, s. 72).

Vondrová (2015) uvádí, že mezi chápáním délky, obsahu a objemu je rozdíl. Zatímco délku lze podle ní přímo měřit, obsah a objem se musí obvykle vypočítat (přestože lze obsah někdy zjistit přikládáním jednotkových útvarů a objem lze měřit přímo pomocí tekutin). Na druhou stranu jsou tyto pojmy v mnoha ohledech propojeny a jejich pojmotvorný proces je založen na stejném principu. Všechny se týkají prostoru (i když různých dimenzí) a pro všechny je důležitý pojem konzervace (zachování).

Konzervace míry označuje vlastnost, při které rozdělením geometrického útvaru na části a jejich následným přeskupením nedochází ke změně celkové míry. Jedná se o základní koncept v geometrii, který hraje významnou roli v porozumění geometrickým vztahům. (Vondrová, 2015)

Celý pojmotvorný proces míry lze podle Vondrové (2015) znázornit graficky, jak ukazuje schéma na obrázku (*Obr. 2*). Ze vztahů mezi jednotlivými pojmy je patrné, že konceptuální porozumění měření geometrických veličin není jednosměrný proces. Přestože žáci mohou znát a používat vzorce, pro skutečné porozumění je nezbytné pochopit hlubší vztahy mezi jednotlivými pojmy a vrátit se k jejich základním principům.



Obr. 2: Schéma pojmotvorného procesu míry v geometrii (Vondrová, 2015, s. 255)

Dalším podstatným aspektem v procesu porozumění míře je iterace neboli opakování jednotky. Janda a kol. (2015) uvádějí, že při měření je nutné zvolit vhodnou jednotku, která má stejnou dimenzi jako daná míra, a následně ji opakovaně pokládat na měřený útvar, a to bez překrývání a bez mezer. Zároveň je třeba zohlednit části jednotek, jako jsou např. poloviny nebo třetiny, které umožňují přesnější určení měřené veličiny při pokrývání daného geometrického útvaru. Tím je připravena cesta k zobecnění od počítání jednotek pokrývajících útvar k vytvoření numerických procesů výpočtů.

Pokrývání měřeného útvaru jednotkami představuje základní způsob strukturace prostoru, který umožňuje přesně určit jeho rozměry a vlastnosti. U délky se tento proces realizuje opakováním jednotky v jednom směru, při měření obsahu probíhá pokrytí ve dvou směrech a při určování objemu ve třech směrech. Tímto způsobem vzniká přímá souvislost mezi jednotlivými rozměry a výslednou hodnotou měřené veličiny. Měření obsahu a objemu tedy nefunguje pouze jako součet jednotlivých jednotek, ale řídí se multiplikativním vztahem mezi délkami, což je obzvláště patrné u mnohoúhelníků a hranatých těles.

1.2.1 Délka

Délka je nejzákladnější formou měření v geometrii a tvoří základ pro porozumění dalším geometrickým veličinám, jako jsou obsah a objem. Schopnost měřit délku nejen pomocí jednotek, ale také v rámci hlubšího konceptuálního porozumění je klíčová pro rozvoj matematické gramotnosti žáků.

Kouřim a kol. (1985, s. 72-73) označují délku úsečky[2] jako zobrazení. Proces měření délky úsečky je pak popsán následujícím postupem a charakteristickými vlastnostmi 1-4. Jedním z pojmů, který je v seznamu uveden a je vhodné ho zavést, je grafický součet úseček. Polák (2015, s. 415) tento pojem definuje takto:

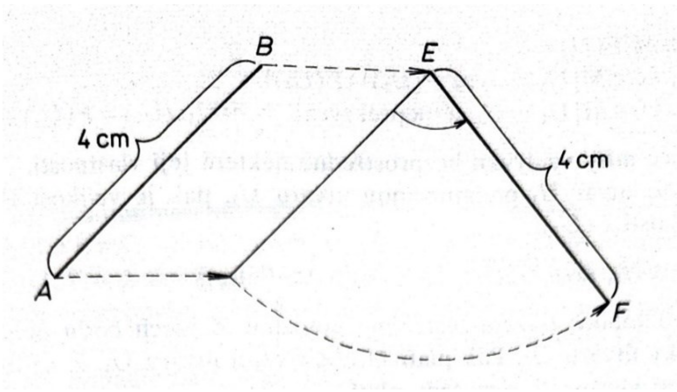
O úsečce AB s vnitřním bodem X říkáme, že je grafický součet úseček AX, XB; píšeme $AB = AX + XB$.

[2] Obdobně jako je definována délka úsečky lze také definovat míru. Takovou definici míry uvádí např. Bartsch (1983).

Po zavedení tohoto pojmu tedy můžeme uvést charakteristické vlastnosti délky úsečky:

1. *Máme-li změřit délku úsečky, musí být zvolena jednotka měření.*
2. *Výsledek měření (velikost úsečky) je kladné číslo. Označíme-li velikost úsečky AB symbolem $|AB|$, platí pro každou úsečku AB:* $|AB| > 0$. (Tedy délka jakékoliv úsečky je vždy větší než 0.)
3. *Velikost úsečky nezávisí na její poloze (viz Obr. 3).* (Tj. každé shodné úsečky mají sobě rovné velikosti.)

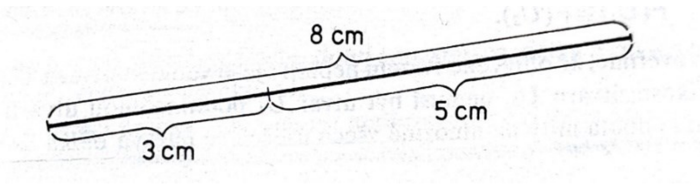
$$AB \cong EF \Rightarrow |AB| = |EF|$$



Obr. 3: Grafické znázornění rovnosti velikostí shodných úseček (Kouřim a kol., 1985, s.73)

4. *Velikost grafického součtu úseček je rovna součtu jejich velikostí (viz Obr. 4).* (Délka úsečky vytvořené složením z několika nepřekrývajících se úseček, se rovná součtu délek těchto úseček.)

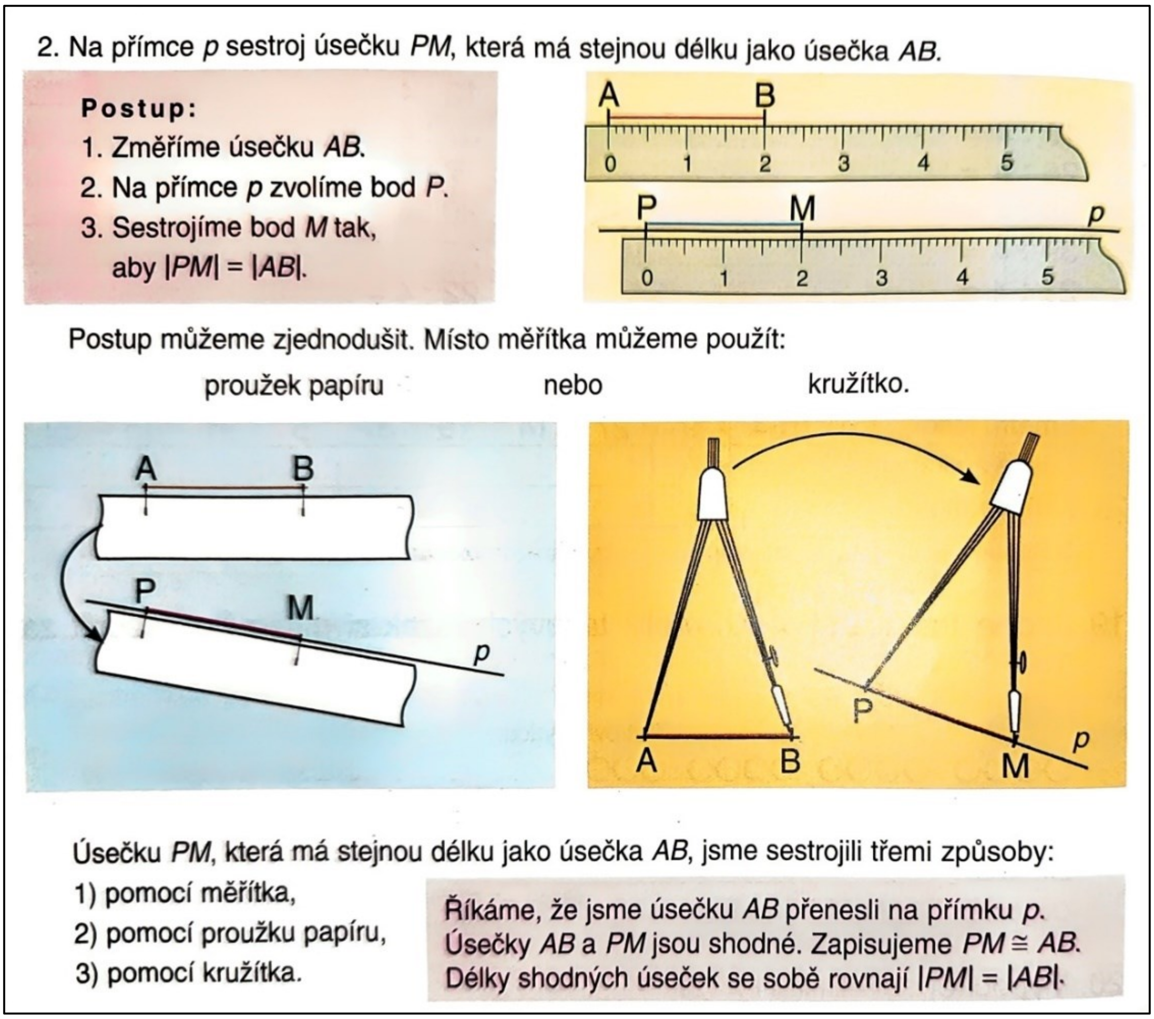
$$|AB + CD| = |AB| + |CD| = 3\ cm + 5\ cm = 8\ cm$$



Obr. 4: Grafický součet úseček (Kouřim a kol., 1985, s.73)

Konceptuální porozumění délce úsečky vyžaduje nejen pochopení procesu jejího měření, ale také vnímání její role v širších geometrických souvislostech. Proces osvojování pojmu délky začíná manipulací s konkrétními objekty a měřidly (např. vzorová úloha 2 viz *Obr. 5*), což vede k intuitivnímu chápání základních vlastností délky. Postupně se přechází k formalizovanému výpočtu délky na základě jednotek a jejich vztahů.

Vzorová úloha 2:


2. Na přímce *p* sestroj úsečku *PM*, která má stejnou délku jako úsečka *AB*.

Postup:
1. Změříme úsečku *AB*.
2. Na přímce *p* zvolíme bod *P*.
3. Sestrojíme bod *M* tak, aby $|PM| = |AB|$.

Postup můžeme zjednodušit. Místo měřítka můžeme použít:

proužek papíru nebo kružítko.

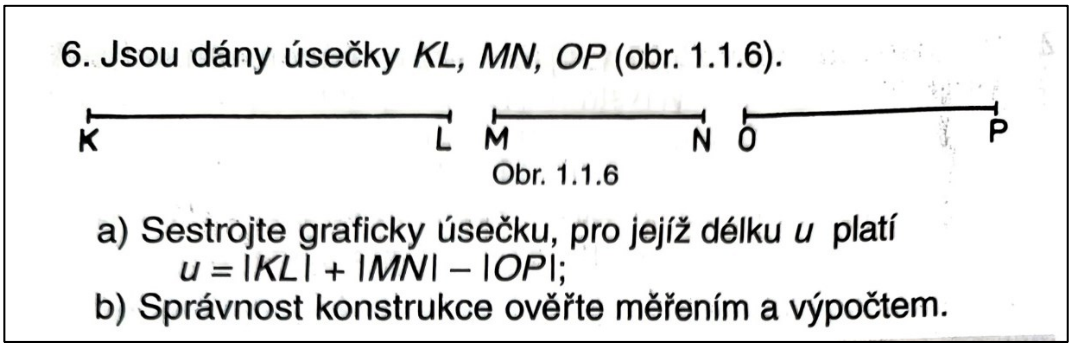
Úsečku *PM*, která má stejnou délku jako úsečka *AB*, jsme sestrojili třemi způsoby:
1) pomocí měřítka,
2) pomocí proužku papíru,
3) pomocí kružítka.

Říkáme, že jsme úsečku *AB* přenesli na přímku *p*. Úsečky *AB* a *PM* jsou shodné. Zapisujeme $PM \cong AB$. Délky shodných úseček se sobě rovnají $|PM| = |AB|$.

Obr. 5: Vzorová úloha 2 (Blažková a kol., 2017, s. 116)

Důležitým aspektem ve výuce délky je práce s různými reprezentacemi tohoto pojmu. V učebnicích se objevují úlohy zaměřené na porovnávání, grafické sčítání a odčítání úseček (viz Vzorová úloha 3 na *Obr. 6*), což žákům umožní lépe si osvojit principy délky. Na správné porozumění délce totiž navazují další podstatné pojmy míry v geometrii.

Vzorová úloha 3:



6. Jsou dány úsečky *KL, MN, OP* (obr. 1.1.6).

Obr. 1.1.6

a) Sestrojte graficky úsečku, pro jejíž délku *u* platí
$u = |KL| + |MN| - |OP|$;

b) Správnost konstrukce ověřte měřením a výpočtem.

Obr. 6: Vzorová úloha 3 (Müllerová a kol., 1998, s. 8)

1.2.2 Zavedení obvodu

Pojem obvod přímo souvisí s pojmem délky a představuje její aplikaci na uzavřené geometrické útvary. Definice obvodu vychází z obecného vymezení geometrického obrazce. Polák (2015, s. 498) definuje geometrický obrazec takto:

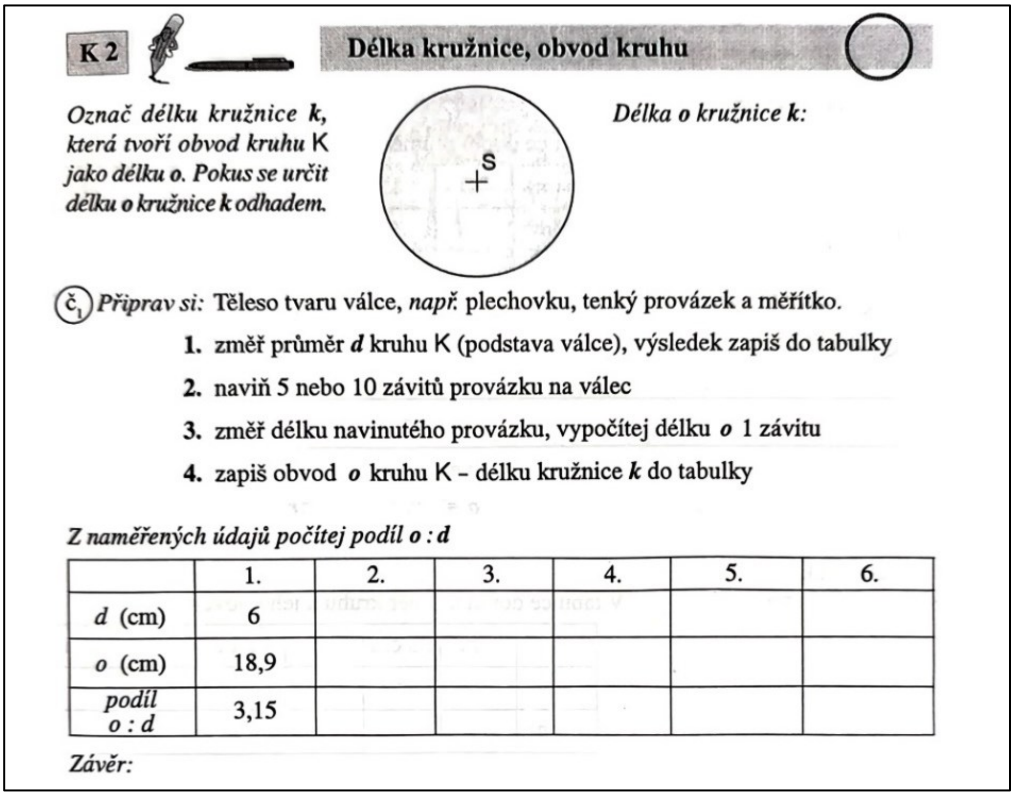
Geometrický obrazec (stručně obrazec) je rovinný geometrický útvar ohraničený uzavřenou čarou, která je též součástí obrazce.

Obvod obrazce se tedy vztahuje k délce této uzavřené hranice. Matematicky je obvykle označován písmenem *o* a jeho definice zní:

Obvodem obrazce se rozumí délka jeho hranice. (Polák, 2015, s. 498)

Při práci s obvodem si žáci často vystačí s prostým součtem délek všech stran obrazce. Tato metoda je dobře použitelná u mnohoúhelníků, kde se hranice skládá z konečného počtu úseček. V případě křivek, jako je například kružnice, však přímé sčítání úseček není možné. Proto je vhodné pracovat také s dalšími způsoby, jak mohou žáci obvod útvarů zjistit. Jednou z variant je natáhnout okolo kruhu nit a následně ji změřit, případně změřit stopu jedoucího kola. Tyto praktické metody tedy umožňují převést délku křivky na útvar měřitelný pravítkem. Obdobnou praktickou úlohu (*Obr. 7*) lze najít v pracovním sešitě od nakladatelství Nová škola (Rosecká a kol., 2001, s. 33).

Vzorová úloha 4:



K 2 **Délka kružnice, obvod kruhu**

*Označ délku kružnice **k**, která tvoří obvod kruhu K jako délku **o**. Pokus se určit délku o kružnice k odhadem.*

S

*Délka **o** kružnice **k**:*

č₁ *Připrav si:* Těleso tvaru válce, *např.* plechovku, tenký provázek a měřítko.

1. změř průměr ***d*** kruhu K (podstava válce), výsledek zapiš do tabulky

2. naviň 5 nebo 10 závitů provázku na válec

3. změř délku navinutého provázku, vypočítej délku ***o*** 1 závitu

4. zapiš obvod ***o*** kruhu K – délku kružnice ***k*** do tabulky

Z naměřených údajů počítej podíl o : d

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
d (cm)	6					
o (cm)	18,9					
podíl o : d	3,15					

Závěr:

Obr. 7: Vzorová úloha 4 (Rosecká a kol., 2001, s. 33)

Další úrovní konceptuálního porozumění délce kružnice je odhadování obvodu pomocí opsaných a vepsaných mnohoúhelníků. Tento mezistupeň porozumění pomáhá žákům hlouběji pochopit princip obvodu kruhu a vede je k limitnímu procesu, který lze názorně demonstrovat na definici délky kružnice.

Obvod kruhu

Délku kružnice (obvod kruhu) lze chápat jako limitní případ obvodu mnohoúhelníků vepsaných do kružnice. Čím více stran má vepsaný mnohoúhelník, tím přesněji se jeho obvod blíží skutečné délce kružnice. Polák (2015, s. 498) definuje tento koncept následovně:

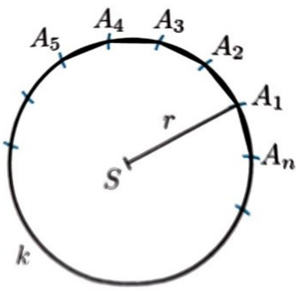
Délkou kružnice neboli obvodem kruhu nazýváme limitu posloupnosti, jejímiž členy jsou součty délek shodných úseček $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ *takových, že krajní body* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *leží na kružnici (viz Obr. 8).*

Označíme-li délku kružnice o, je tedy

$$o = \lim_{n\to\infty} p_n\,, \quad kde \qquad p_n = |A_1A_2| + |A_2A_3| + \cdots + |A_nA_1| = n \cdot |A_1A_2|$$

(p_n jsou obvody pravidelných mnohoúhelníků vepsaných kružnici).

S rostoucím n se délka zmenšuje a mnohoúhelník se stále přesněji přibližuje kružnici, což vede k reálnému vyjádření obvodu.



Obr. 8: Limitní vyjádření obvodu kruhu (Polák, 2015, s. 499)

Tento přístup umožňuje nejen formální zavedení obvodu kruhu, ale také ilustruje důležitost limitního procesu v geometrii. Žáci tak mohou pochopit, že některé geometrické koncepty nelze definovat pouze jako přímý součet jednotlivých délek, ale vyžadují sofistikovanější přístup.

Polák (2015) dále poznamenává, že pomocí metod přesahujících rámec středoškolské matematiky lze dokázat, že není možná tzv. ratifikace kružnice – tedy nelze euklidovskou konstrukcí sestrojit úsečku, jejíž délka by byla přesně rovna délce kružnice. Pro výpočet míry v kruhu se tedy zavádí konstanta π, která vyjadřuje poměr mezi obvodem kruhu a jeho průměrem.

1.2.3 Zavedení obsahu

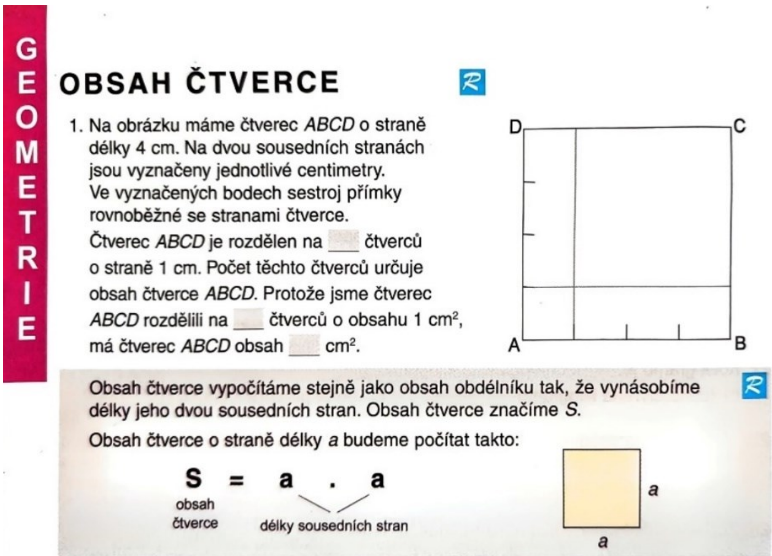
Pojem obsahu plochy je klíčovým nástrojem geometrie pro měření velikosti rovinných útvarů. Zatímco obvod vyjadřuje délku hranice obrazce, obsah charakterizuje plochu, kterou obrazec pokrývá. Polák (2015, s. 498) zavádí obsah geometrického obrazce následujícím způsobem:

Zvolí se čtverec o straně jednotkové délky, jemuž se přiřadí jednotkový obsah $1\ \mathrm{dj}^2$*; tento čtverec se nazývá jednotkový čtverec. Libovolnému měřitelnému obrazci O se pak přiřazuje obsah obrazce O označovaný S, pro který platí* $S = K\ \mathrm{dj}^2$*, kde K je kladná číselná hodnota obsahu obrazce a* dj^2 *je libovolná jednotka obsahu.*

K této definici Polák (2015, s. 498) přidává i základní (charakteristické) vlastnosti obsahu geometrických útvarů, které jsou velmi podobné vlastnostem délky:

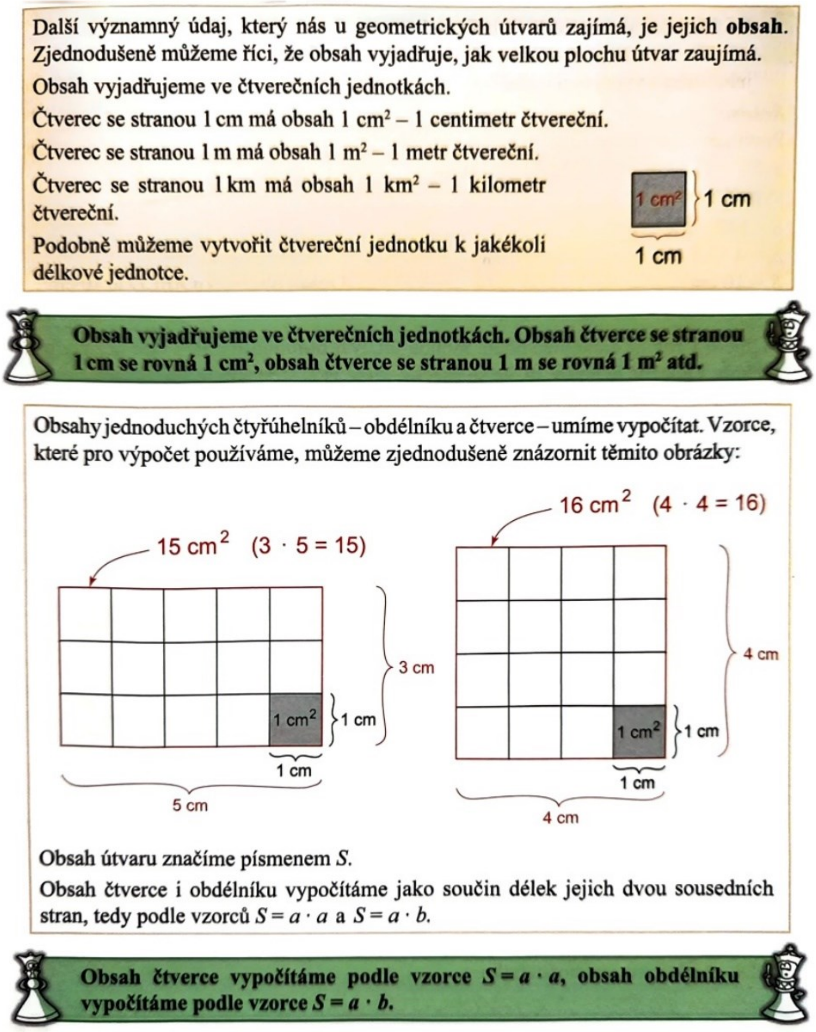
1. *Každé dva shodné geometrické obrazce mají sobě rovné obsahy.*
2. *Obsah libovolného geometrického obrazce složeného z několika nepřekrývajících se geometrických obrazců, se rovná součtu obsahů těchto obrazců.*
3. *Obsah jakéhokoliv obrazce je vždy větší nebo roven 0.*

V běžných školských učebnicích však formální zavedení obsahu často chybí a výuka se zaměřuje přímo na vzorce pro výpočet obsahu jednotlivých útvarů (např. učebnice od nakladatelství Alter (Blažková a kol., 2013, s. 28) viz *Obr. 9*).



Obr. 9: Zavedení obsahu s důrazem na vzorec (Blažková a kol., 2013, s. 28)

Někdy je obsah zaveden pomocí čtvercové sítě, obvykle s velikostí čtverce 1 cm (např. učebnice od nakladatelství Nová škola (Jedličková a kol., 2013, s. 67) viz *Obr. 10*). Tento přístup sice poskytuje vizuální představu, ale omezuje se na konkrétní jednotkový tvar a neumožňuje pracovat s jinými možnostmi měření, například s jednotkami jiného tvaru nebo s částmi jednotky.


Další významný údaj, který nás u geometrických útvarů zajímá, je jejich **obsah**. Zjednodušeně můžeme říci, že obsah vyjadřuje, jak velkou plochu útvar zaujímá.
Obsah vyjadřujeme ve čtverečních jednotkách.
Čtverec se stranou 1 cm má obsah 1 cm² – 1 centimetr čtvereční.
Čtverec se stranou 1 m má obsah 1 m² – 1 metr čtvereční.
Čtverec se stranou 1 km má obsah 1 km² – 1 kilometr čtvereční.
Podobně můžeme vytvořit čtvereční jednotku k jakékoli délkové jednotce.

Obsah vyjadřujeme ve čtverečních jednotkách. Obsah čtverce se stranou 1 cm se rovná 1 cm², obsah čtverce se stranou 1 m se rovná 1 m² atd.

Obsahy jednoduchých čtyřúhelníků – obdélníku a čtverce – umíme vypočítat. Vzorce, které pro výpočet používáme, můžeme zjednodušeně znázornit těmito obrázky:

Obsah útvaru značíme písmenem S.
Obsah čtverce i obdélníku vypočítáme jako součin délek jejich dvou sousedních stran, tedy podle vzorců $S = a \cdot a$ a $S = a \cdot b$.

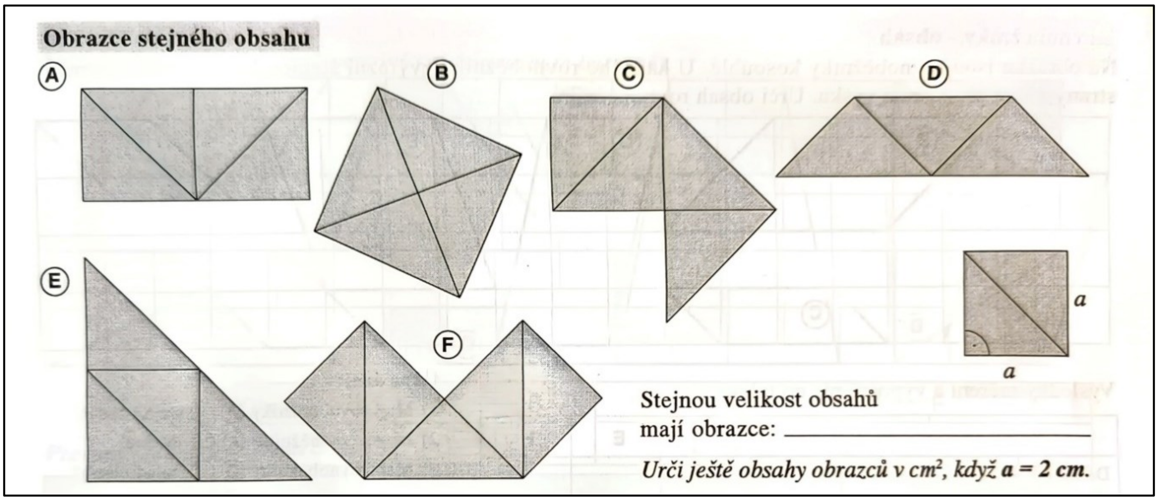
Obsah čtverce vypočítáme podle vzorce $S = a \cdot a$, obsah obdélníku vypočítáme podle vzorce $S = a \cdot b$.

Obr. 10: Zavedení obsahu pomocí čtvercové sítě (Jedličková a kol., 2013, s. 67)

1.2.4 Konceptuální porozumění obvodu a obsahu

Kospentaris a kol. (2011) popisují, že zatímco statickým pohledem žák chápe obvod a obsah jen jako číselné hodnoty, dynamický pohled se zaměřuje na změny jejich hodnot v souvislosti s proměnnou tvaru obrazce. Tímto způsobem tedy žák chápe obsah spíše jako zobrazení. Žáci by proto měli pracovat s úlohami, které zahrnují porovnávání, rozkládání, přeskupování a překrývání[3] útvarů nebo zkoumání, jak lze určitý útvar pokrýt jinými tvary než čtverci. Názorná je následující vzorová úloha (*Obr. 11*).

Vzorová úloha 5:



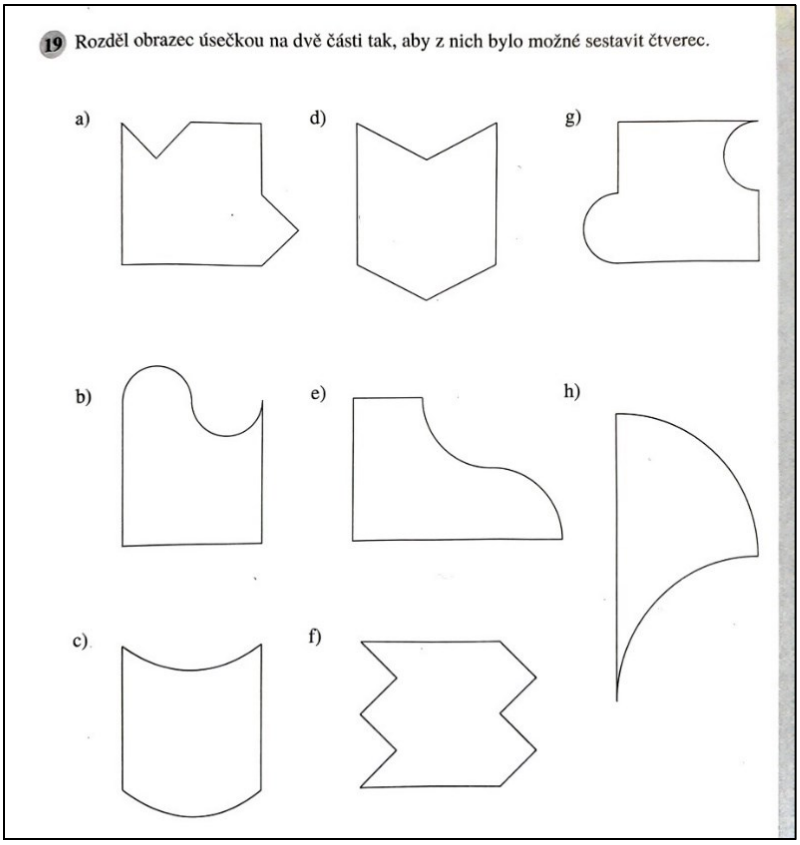
Obr. 11: Vzorová úloha 5 (Rosecká, 2000, s. 9)

V procesu osvojování si pojmu obsah hraje také významnou roli práce s komplementem (doplňkem). Využití komplementu spočívá v úpravě obrazce tak, aby bylo jednodušší zjistit jeho plochu. Může jít o případ, kdy se část útvaru přesune tak, aby vznikl nový, jednodušší tvar se shodným obsahem, nebo o tzv. rámování, kdy se kolem obrazce vytvoří větší útvar, od kterého se pak odečtou plochy přebývajících částí, např. deltoid v obdélníku (Ma, 2021, s. 170). Vondrová (2019) tento přístup běžně využívá při odvozování vzorců pro výpočet obsahu trojúhelníku, kosodélníku či lichoběžníku. Práci s komplementem však lze využít i při určování obsahu[4] složitějších tvarů, jako tomu je například v následující úloze (*Obr. 12*), kterou lze najít v pracovním sešitě MATEMATIKA 6 od nakladatelství Prodos (Molnár a kol., 1998, s. 29).

[3] Vondrová (2019) označuje tyto úlohy založené na překrývání a dělení útvarů jako manipulativní úlohy.

[4] Práce s komplementem lze využít i při zjišťování obvodu, častěji se však využije právě u obsahu, proto je tento pojem vysvětlen pouze v kontextu obsahu.

Vzorová úloha 6:



Obr. 12: Vzorová úloha 6 (Molnár a kol., 1998, s. 29)

Dalším klíčovým prvkem je iterace vhodně zvolené jednotky. Tato jednotka by neměla být omezena pouze na úsečku o délce 1 cm (v případě obvodu) a na čtverec o obsahu 1 cm^2 (u obsahu), ale mělo by se pracovat i s jinými tvary jednotek[5] a jejich částmi. Měření obsahu zahrnuje nejen určování počtu těchto jednotek, ale i zobecnění tohoto postupu do multiplikativní struktury. (Vondrová, 2019)

Porozumění aditivním a multiplikativním vztahům mezi rozměry útvaru a jeho obsahem je předpokladem pro numerické výpočty obsahu obrazce. Důležité je, aby žáci chápali vztahy mezi jednotlivými parametry (např. mezi dvěma stranami nebo mezi stranou

[5] Často se rozlišuje mezi standardními a nestandardními jednotkami a je předmětem diskuze, zda je potřeba zahrnout oboje, případně v jakém pořadí.

a výškou). Vondrová (2019) také uvádí, že přechod od přirozených k racionálním a reálným číslům v tomto kontextu může představovat obtíž.

Ve finální fázi pojmotvorného procesu pak dochází k zobecnění těchto vztahů do algebraických vzorců. Pokud žáci vzorce pouze memorují, aniž by prošli předchozími fázemi pochopení, nejedná se o skutečnou znalost, ale o formální osvojování pojmu.

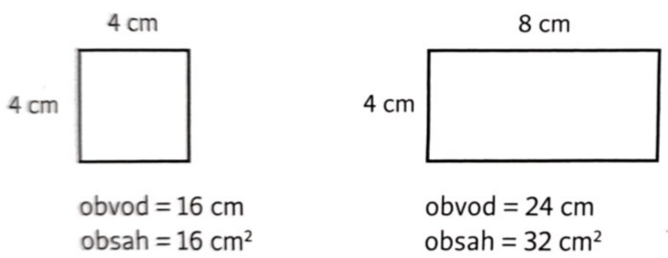
Pro efektivní výuku míry v geometrii je proto zásadní nejen správná posloupnost výukových kroků, ale i vhodná motivace žáků. Ta nespočívá v pouhém výpočtu obvodu a obsahu, ale v úlohách, které podporují objevování souvislostí a hlubší porozumění těmto pojmům. (Kamii a Kysh, 2006)

1.2.5 Vztah obvodu a obsahu

Obvod a obsah jsou dvě základní vlastnosti rovinných obrazců, které spolu sice úzce souvisejí, ale nejsou v jednoznačném vztahu. Častým chybným předpokladem je domněnka, že pokud se zvětší obvod obrazce, nutně se zvětší i jeho obsah. To však neplatí obecně. Názorně je to ukázáno při řešení následující úlohy (*Obr. 13*).

Vzorová úloha 7:

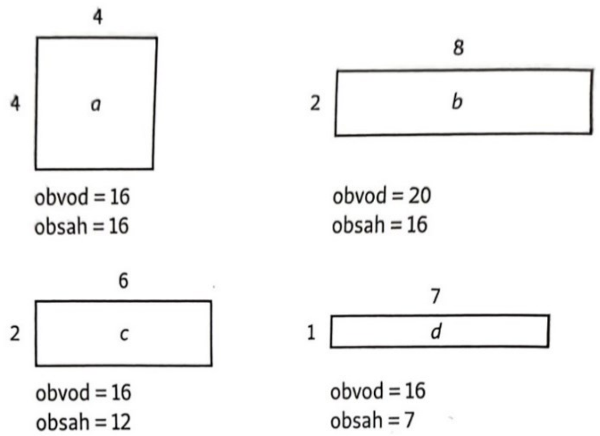
Žákyně přijde do třídy a řekne, že objevila teorii. Vysvětluje svůj objev, že se zvětšujícím se obvodem uzavřeného obrazce se rovněž zvětšuje jeho obsah. Aby doložila svou úvahu, ukáže následující obrázek:



Jak byste té žákyni odpověděli?

Obr. 13: Vzorová úloha 7 (Ma, 2021, s. 102)

Při řešení se omezíme na ilustraci pomocí čtverců a obdélníků. Uvažujme tedy čtverec o straně 4 cm. Jeho obvod je 16 cm a obsah 16 cm². Pokusme se tedy najít jiný útvar, který bude mít shodný obvod, a dopočítejme, zda i obsah bude shodný nebo se jeho velikost změní. Jeden z možných útvarů s obvodem 16 cm je úzký obdélník s rozměry a 1 cm a 7 cm. Jednoduchým výpočtem lze zjistit, že jeho obsah je pouhých 7 cm². Podobně můžeme najít také obdélník se shodným obsahem, ale rozdílným obvodem, jak je vidět na následujícím obrázku (*Obr. 14*).



Obr. 14: Útvary vyvracející teorii v úloze (Ma, 2021, s. 114)

Je tedy zřejmé, že teorie neplatí. Zároveň je patrné, že mezi obvodem a obsahem není jednoznačně určený vztah a že významnou roli v tomto vztahu hraje tvar obrazce.

Experiment, který popisuje Maová (2021), srovnává, jak učitelé v Číně a ve Spojených státech pracují s porozuměním míře v geometrii a jaké strategie volí k objasnění vztahu mezi obvodem a obsahem. Výsledky výzkumu ukazují, že čínští učitelé kladou větší důraz na konceptuální pochopení souvislostí a využívají úlohy, které žákům umožňují experimentovat s různými tvary při zachování stejného obvodu nebo obsahu. Naproti tomu učitelé ve Spojených státech amerických se často soustředí na postupy pomocí výpočtů, aniž by žáky přivedli k hlubší analýze vztahu mezi obvodem a obsahem.

Důležitým aspektem při výuce této problematiky je umožnit žákům, aby si sami ověřili, jak změny tvaru ovlivňují obvod a obsah. Manipulativní činnosti, jako je skládání a přeskupování obrazců, mohou pomoci žákům pochopit, že změna jednoho parametru nemusí nutně znamenat změnu druhého stejným způsobem. Podobně je přínosné vést žáky k hledání extrémních případů, například kdy obvod roste do velkých hodnot, ale obsah zůstává malý, což lze ilustrovat například úzkými dlouhými obdélníky. Podobným extrémem je případ, kdy při stálém obvodu je geometrickým obrazcem s největším možným obsahem tvar kruhu. Pokud bychom uvažovali pouze „hranaté" obrazce, útvar s maximálním obsahem při stálém obvodu je čtverec.

Konceptuálního porozumění vztahu mezi obvodem a obsahem je důležité především z hlediska porovnávání obvodů a obsahů útvarů. Zkušenosti s obrazci stejného obsahu a různého obvodu (a naopak) pak lze prakticky využít především v optimalizačních úlohách.

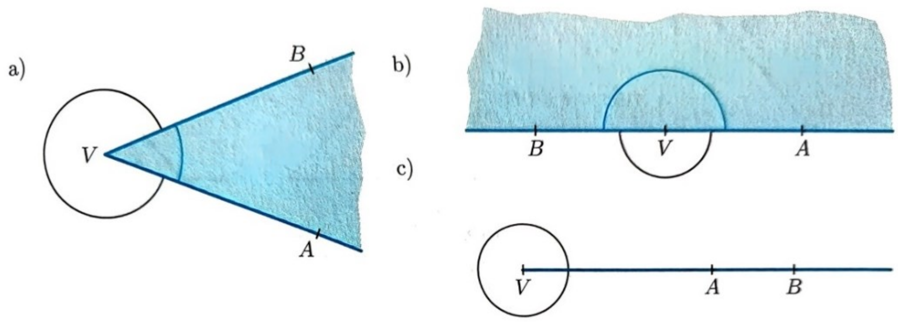
1.3 Konceptuální porozumění míře na SŠ

Konceptuální porozumění základům míry v geometrii je přirozeně dále rozvíjeno na středních školách. V této pokročilejší úrovni je porozumění zaměřeno především na algebraickou reprezentaci míry. Klíčovou roli hraje práce se vzorci a uvědomění si vztahů mezi nimi. (Vondrová, 2015) Jedním z nejčastějších postupů v úlohách týkajících se míry je vyjádření neznámé ze vzorce. Žáci by proto měli nejen znát základní vzorce, ale také umět je algebraicky upravit tak, aby dokázali vyjádřit libovolný údaj.

1.3.1 Úhel a jeho velikost

Ve středoškolské míře v geometrii se také mnohem více pracuje s porozuměním úhlu a jeho velikosti. Polák (2015, s. 418) definuje úhel následovně:

Libovolné dvě různé polopřímky VA, VB (které mohou být i navzájem opačné) rozdělí rovinu, v níž leží, ve dvě části (Obr. 15). Každá z těchto částí roviny včetně obou polopřímek VA, VB se nazývá úhel AVB.



Obr. 15: Grafické znázornění úhlu (Polák, 2015, s. 419)

Pro velikost úhlu pak platí podobné vlastnosti jako pro délku úsečky. Stejně tak i operace, které můžeme s úhly provádět, jsou obdobné operacím s úsečkami. Lze tedy úhly porovnávat, graficky sčítat a odčítat nebo měřit. K měření úhlů se zavádí míra nazývaná velikost úhlu:

Zvolí se určitý úhel, jehož velikost se vezme za jednotku velikosti úhlu; tento úhel se nazývá jednotkový úhel. Libovolnému úhlu AVB se pak přiřazuje velikost úhlu ve tvaru nezáporného násobku zvolené jednotky velikosti úhlu. (Číselná hodnota velikosti úhlu je pro nulový úhel 0 a pro nenulový úhel kladná.) (Polák, 2015, s. 419-420)

Číselná reprezentace úhlu se tedy nazývá velikost úhlu, a právě s ní se v úlohách často pracuje. Pro správné dopočítání velikostí všech úhlů v obrazci je však důležité znát také další vztahy, které pro úhly platí. Jedním z těchto vztahů, který bude využit v analýze úloh, je vztah mezi styčnými úhly.

Konvexní úhly AVB, BVC, které leží v rovině tak, že jejich průnikem je právě jen rameno VB, se nazývají styčné úhly. Úhel AVC, jehož vnitřním bodem je bod B, se potom nazývá grafickým součtem úhlů AVB, BVC. O úhlu BVC říkáme, že je grafickým rozdílem úhlů AVC, AVB; obdobně je úhel AVB grafickým rozdílem úhlů AVC, BVC. (Polák, 2015, s. 421)

V analyzovaných úlohách tak můžeme místo grafického součtu a rozdílu pracovat přímo se součtem a rozdílem číselně vyjádřených velikostí úhlů. Dalším častým způsobem dočítání velikosti úhlu je využití trigonometrie, což bude podrobněji uvedeno dále v textu.

1.3.2 Vztahy v trojúhelníku

Další součástí pokročilého konceptuálního porozumění míře je využití znalostí ohledně trojúhelníků. Mezi tyto znalosti patří znalost důležitých úseček trojúhelníku a jejich vlastností. Jednou z těchto úseček je těžnice trojúhelníku, tedy úsečka, která spojuje vrchol trojúhelníku se středem protější strany. Pro těžnice pak platí věta o těžnicích trojúhelníku:

Všechny tři těžnice trojúhelníku se protínají v jediném bodě T zvaném těžiště trojúhelníku; vzdálenost těžiště od středu kterékoliv strany je rovna jedné třetině délky příslušné těžnice. Označíme-li $|AS_a| = t_a$, $|BS_b| = t_b$, $|CS_c| = t_c$, *je tedy*

$$|TS_a| = \frac{1}{3}t_a, \quad |TS_b| = \frac{1}{3}t_b, \quad |TS_c| = \frac{1}{3}t_c.$$ (Polák, 2015, s. 434)

Další významnou úsečkou trojúhelníku je výška, což je kolmice na stranu trojúhelníku, která prochází protějším vrcholem. Trojúhelník obvykle rozdělí na dva menší pravoúhlé trojúhelníky, pro které platí některé speciální vztahy.

Jedním z těchto vztahů je Pythagorova věta. Ta říká, že *obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami*. (Kindl, 1975, s. 245) Tento vztah je žákům známý již od základní školy, avšak hojně se využívá i v úlohách středních škol. Je důležité pravoúhlé trojúhelníky v obrazci objevit a správně rozpoznat známé vztahy.

Dále se při výpočtech v pravoúhlém trojúhelníku využívá trigonometrie. Podle Poláka (2015, s. 442) se jedná o využití *definic hodnot goniometrických funkcí argumentu* α, *který představuje velikost ostrého úhlu pravoúhlého trojúhelníku (*$0° < \alpha < 90°$*)*:

- *sinus* α *je poměr protilehlé odvěsny k přeponě*
- *kosinus* α *je poměr přilehlé odvěsny k přeponě*
- *tangens* α *je poměr protilehlé odvěsny k přilehlé odvěsny*
- *kotangens* α *je poměr přilehlé odvěsny k protilehlé odvěsně.*

Trigonometrie lze využít také při řešení obecného trojúhelníku. Využívají se trigonometrické věty, mezi které se řadí sinová a kosinová věta. Polák (2015, s. 443) definuje sinovou větu takto:

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikostí α, β, γ, platí

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}\,.$$

Kosinová věta pak zní následovně:

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikostí α, β, γ, platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$ (Polák, 2015, s. 443)

V trojúhelnících platí mnoho dalších vztahů, pro které není prostor, aby byly všechny uvedeny. V analýze však bude využit ještě následující vztah, který platí díky větě o osové souměrnosti úhlu v trojúhelníku. Tato věta říká:

Pokud osa vnitřního (vnějšího) úhlu trojúhelníku ABC, vedená z vrcholu C, protíná přímku obsahující úsečku AB v bodě D, pak:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}.$$ (CKE, 2023c, s. 18)

Správné pochopení vztahů v trojúhelníku a jejich následné dopočítání pomocí výše uvedených algebraických reprezentací vztahů je často klíčové při řešení úloh, ve kterých se trojúhelníky vyskytují. V některých složitějších obrazcích je navíc užitečné trojúhelníky vyhledat nebo je do konstrukce doplnit, protože jejich vlastnosti a platící vztahy mohou výrazně usnadnit řešení.

1.3.3 Vztahy ve čtyřúhelníku

Další běžné geometrické útvary, pro které platí vztahy, které mohou být při řešení úloh praktické, jsou specifické čtyřúhelníky – rovnoběžníky. Mezi základní rovnoběžníky, tedy čtyřúhelníky, jejichž protější strany jsou rovnoběžné, řadíme obdélník, čtverec, kosodélník a kosočtverec. Pro tyto rovnoběžníky platí věta o specifických vlastnostech druhů rovnoběžníků, která se zabývá vlastnostmi úhlopříček těchto obrazců:

Úhlopříčky obdélníku jsou shodné. Úhlopříčky čtverce jsou shodné, navzájem kolmé a vzájemně se půlí, stejně jako půlí jeho vnitřní úhly. Úhlopříčky kosočtverce jsou navzájem kolmé a vzájemně se půlí, stejně jako půlí jeho vnitřní úhly. Úhlopříčky kosodélníku se vzájemně půlí. (Polák, 2015, s. 451)

Dalším specifickým typem čtyřúhelníku je tzv. tečnový čtyřúhelník, tedy čtyřúhelník, jemuž lze vepsat kružnici. Pro takový čtyřúhelník platí:

Kruh může být vepsán do konvexního čtyřúhelníku právě tehdy, když jsou součty délek jeho protilehlých stran stejné. (CKE, 2023c, s. 22)

1.3.4 Geometrická zobrazení

Je-li $\mathrm{B} = \mathrm{H}(f)$*, čili když v zobrazení* f *každý prvek množiny* B *je obrazem alespoň jednoho prvku množiny* A*, pak zobrazení* f *se nazývá zobrazení množiny* A *na množinu* B*. Jestliže speciálně* A, B *jsou bodové množiny v téže rovině, pak každému zobrazení množiny* A *do množiny* B *říkáme geometrické zobrazení v rovině.* (Polák, 2015, s. 50, s. 463)

Toto je definice geometrického zobrazení, které se dále dělí shodná zobrazení a podobná zobrazení. Shodné zobrazení je definováno následovně:

Prosté zobrazení v rovině nazýváme shodným zobrazením nebo krátce shodností, právě když pro každé dva body X, Y *roviny a jejich obrazy* X', Y' *(*$X \longmapsto X'$, $Y \longmapsto Y'$*) v tomto zobrazení platí*

$$|X'Y'| = |XY|.$$ (Polák, 2015, s. 463)

Mezi shodná zobrazení řadíme identitu, posunutí (translaci), otočení (rotaci), středovou souměrnost, osovou souměrnost a posunutou souměrnost. V analýze úloh budu potřebovat především otočení a osovou souměrnost, proto u těchto dvou zobrazení také uvedu definice. Otočení Polák (2015, s. 466) definuje takto:

Otočení (rotace) kolem středu S o úhel velikosti $0° < \alpha \leq 360°$ *v daném (kladném, resp. nezáporném) smyslu je přímá*[6] *shodnost, která přiřazuje bodu S týž bod* $S' = S$ *a každému bodu* $X \neq S$ *roviny přiřazuje takový obraz* X', *že platí*

a) *bod* X' *leží na kružnici o středu S a poloměrem* $|SX|$,
b) *polopřímka* SX' *se získá otáčením polopřímky SX o úhel otočení* $X'SX$ *velikosti* α *v daném smyslu (kladném, tj. proti pohybu hodinových ručiček, nebo záporném, tj. souhlasně s pohybem hodinových ručiček).*

Otočení je jednoznačně určeno středem otočení S, *velikostí úhlu otočení* α *a daným (kladným, resp. záporným) smyslem otočení. Úhel otočení je orientovaný úhel.*

Osová souměrnost podle osy o je definována takto:

Souměrnost podle osy o *(osová souměrnost s osou* o*) v rovině je nepřímá shodnost, která každému bodu X roviny přiřazuje takový obraz* X', *že platí*

a) *bod* X' *leží na kolmici* k *ose* o *vedené bodem X*
b) $|PX| = |PX'|$, *kde P je pata této kolmice na ose* o.

Osová souměrnost je jednoznačně určená osou souměrnosti o. (Polák, 2015, s. 466)

Podobná zobrazení, která zachovávají poměry délek, jsou pak definována:

Prosté zobrazení v rovině nazýváme podobným zobrazením nebo krátce podobností, právě když každé dvojice bodů X, Y *roviny přiřazujeme jako obrazy takové body* X', Y' $(X \mapsto X', Y \mapsto Y')$, *že platí*

$$|X'Y'| = k \cdot |XY|,$$

kde $k > 0$ *je daná konstanta zvaná koeficient podobnosti.* (Polák, 2015, s. 468)

Kromě vztahu mezi délkami podobných útvarů platí také vztah pro obsahy podobných útvarů. Tento vztah vychází z tvrzení o plochách podobných obrazců:

[6] Přímá shodnost je shodnost ve stejném smyslu otáčení. Naopak nepřímá shodnost je shodnost v opačném smyslu otáčení. (Polák, 2015)

Jestliže obrazec $\mathcal{B}$ s plochou $P_{\mathcal{B}}$ je podobný obrazci $\mathcal{A}$ s plochou $P_{\mathcal{A}}$ (různou od nuly) v měřítku k, pak poměr jejich ploch je roven druhé mocnině měřítka podobnosti.

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

(CKE, 2023c, s. 22)

1.4 Shrnutí

V této kapitole stručně shrnu klíčové body konceptuálního porozumění míře v geometrii. Toto shrnutí mi poslouží jako vhodné teoretické východisko, na které se budu odkazovat v další části práce.

Tento seznam shrnuje klíčové body o porozumění míře uvedené v předchozím textu:

1. Uvědomění si konzervace míry – pochopení skutečnosti, že dělení útvaru a přeskupení jeho částí nezpůsobí změnu míry.
2. Vhodná práce s komplementem útvaru – úprava obrazce tak, aby zjištění míry bylo intuitivnější.
3. Zvolení vhodné jednotky a její iterace – opakované pokládání jednotky a jejích částí na útvar, jehož míru chceme zjistit.
4. Zavedení délky – opakování jednotky v jednom směru ke zjištění délky úsečky.
5. Osvojování si principů délky – zahrnuje porovnávání, grafické sčítání a odčítání úseček.
6. Zavedení obvodu obrazce – pochopení obvodu jako součtu délek stran daného útvaru; v případě kruhu odvození pomocí vepsaných a opsaných mnohoúhelníků.
7. Strukturace prostoru – vytvoření pomyslné sítě opakovaným přikládáním jednotky ve dvou směrech, čímž je tvořen podklad pro zavedení pojmu obsahu.
8. Zavedení obsahu obrazce – obsah je určen počtem čtvercových jednotek pokrývajících daný útvar.
9. Pochopení aditivních a multiplikativních vztahů mezi délkami – porozumění tomu, jak se mění obvod a obsah v závislosti na změně jednoho nebo více rozměrů.
10. Přechod k číselné reprezentaci míry – vyjádření míry numericky.

11. Algebraická reprezentace – zavedení vzorců pro výpočet míry, pochopení vztahů mezi nimi a schopnost pracovat s neznámou ve vzorci.
12. Uvědomění si vztahu mezi obvodem a obsahem – nalezení extrémních případů útvarů se stálým obvodem, ale různými obsahy a naopak.
13. Zavedení úhlu a jeho velikosti – úhel slouží jako míra pro vyjádření dalších vzájemných vztahů mezi stranami a vrcholy v geometrických útvarech.
14. Pochopení hlubších vztahů v jednotlivých obrazcích, například:
    a. Vztahy v trojúhelníku – významné úsečky v trojúhelníku, Pythagorova věta (pouze pro pravoúhlé trojúhelníky), trigonometrie (pro pravoúhlé i obecné trojúhelníky).
    b. Vztahy ve čtyřúhelníku – vlastnosti úhlopříček rovnoběžníků, vztah pro tečnový čtyřúhelník.
15. Zavedení dalších geometrických pojmů – např. geometrická zobrazení a vztahy mezi původními a zobrazenými útvary.

2 Testování míry v geometrii v české a polské maturitě z matematiky

Další část této práce se zaměřuje na analýzu způsobu testování míry v geometrii v písemné části maturitní zkoušky z matematiky v Česku a Polsku. K analýze jsem vybrala všechny úlohy související s touto problematikou ze základních i rozšířených verzí jarního termínu z let 2023 a 2024. Pro lepší pochopení přístupů ve školství jsem do práce zařadila následující kapitoly přibližující vzdělávací systémy obou zemí.

2.1 Vzdělávací systém v České republice

Vzdělávací systém v České republice je pro českého čtenáře obecně známý. Povinné je pouze devítileté základní vzdělání. Další stupeň vzdělávání již povinný není. Žáci si mohou vybrat mezi školami, na kterých po absolvování získají výuční list (střední odborná učiliště), nebo mezi školami, které jsou zakončeny maturitní zkouškou (gymnázia a střední odborné školy). Po úspěšném složení maturitní zkoušky mohou studenti pokračovat na vysoké škole.

2.1.1 Maturitní zkouška

Maturita v České republice se skládá ze dvou částí: profilové (školní), kterou organizuje každá škola samostatně, a státní (společné), která je jednotná pro všechny školy. Společná část je organizovaná společností CERMAT. Zkouška má podobu didaktického testu, který obsahuje jak uzavřené, tak otevřené úlohy, přičemž minimální úspěšnost pro její absolvování je 33 % bodů z každé části testu. Povinnými předměty státní části jsou český jazyk a literatura a cizí jazyk nebo matematika, mezi kterými si žák může vybrat.

V rámci matematiky lze skládat test ve dvou úrovních – základní a rozšiřující. Základní úroveň testu se skládá z 25 úloh, na které je možné získat maximálně 50 bodů. Minimální počet bodů pro úspěšné absolvování je 17, což odpovídá 33 % z celkového počtu. Časový limit na zkoušku je 135 minut. Test obsahuje uzavřené úlohy s výběrem odpovědí i otevřené úlohy, kde je nutné uvést výsledek, avšak ne vždy je povinné doložit celý výpočet. Při řešení je povoleno používat matematické tabulky (které však nejsou jednotně specifikovány), ale kalkulačky jsou zakázány.

Rozšiřující úroveň obsahuje rovněž 25 úloh vyšší obtížnosti, ale časový limit je prodloužen na 150 minut. Stejně jako u základní úrovně lze získat až 50 bodů, přičemž minimální počet bodů pro úspěšné složení je 17. Test zahrnuje jak uzavřené, tak otevřené úlohy a povoleny jsou kalkulačky a matematické tabulky.

2.2 Vzdělávací systém v Polsku

Polský vzdělávací systém je většině české populace neznámý, popíšu ho tedy podrobněji než český. Systém polského vzdělávání je řízeno Ministerstvem národního vzdělávání (*Ministerstwo Edukacji Narodowej*).

Povinná základní škola (*szkoła podstawowa*) je pro polské žáky osmiletá. Po ukončení základní školy žáci skládají test (*egzamin ósmoklasisty*), jehož výsledky ovlivňují jejich přijetí na střední školu.

V posledních letech prošel polský systém středních škol několika reformami, přičemž poslední zásadní změna proběhla v roce 2017 (Ministerstwo Edukacji Narodowej, 2016). Střední vzdělávání v Polsku zahrnuje několik typů škol, z nichž některé jsou zakončeny maturitní zkouškou (*egzamin maturalny*). Mezi ně patří liceum ogólnokształcące (LO), což je všeobecně vzdělávací lyceum, a technikum (T), neboli technická střední škola. (Novotná-Dědečková, 1996)

Liceum ogólnokształcące trvá 4 roky a podobně jako české gymnázium připravuje studenty především na vysokoškolské studium. Technikum se naopak podobá českým středním odborným školám. Po jeho absolvování studenti skládají maturitní zkoušku a získávají odbornou kvalifikaci, což jim umožňuje pokračovat na vysokou školu nebo využít své znalosti v praxi. Studium technika trvá 5 let.

Dalším typem škol je branżowa szkoła I stopnia (odborná škola I. stupně), jejíž studium trvá 3 roky. Studium tohoto typu školy není zakončeno maturitní zkouškou, ale absolventi získávají odbornou kvalifikaci.

Maturita je nezbytná pro přijetí na vysokou školu, kam mohou studenti po absolvování střední školy pokračovat. Obvykle není pro přijetí na vysokou školu potřeba vykonání přijímacích zkoušek, klíčovým faktorem jsou právě výsledky maturity.

2.2.1 Maturitní zkouška

Polská maturitní zkouška je centralizovaná a organizuje ji Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). Písemná část zkoušky je stejně jako v ČR anonymně hodnocena externími zkoušejícími a výsledky jsou udávány v procentech, nikoliv známkami. Polská maturita má dvě úrovně obtížnosti – základní úroveň (*poziom podstawowy*), která je povinná pro všechny, a rozšířenou úroveň (*poziom rozszerzony*), kterou musí žáci splnit alespoň z jednoho předmětu, jinak je volitelná[7]. (CKE, 2025)

Nejnovější reforma maturitní zkoušky probíhala v roce 2023, kdy byla zavedena nová verze maturity nazývaná Formuła 2023. Tato nová verze nahradila starší Formułę 2015, kterou skládali studenti, kteří dokončili střední školu do roku 2022. Někteří žáci, kteří skládali opravnou zkoušku z předchozích let, mohli v roce 2024 skládat zkoušku podle Formuły 2015, ale naprostá většina studentů skládá maturitu podle Formuły 2023, kterou se budu v této práci zabývat.

V současné verzi maturity jsou povinné čtyři části: polský jazyk, matematika, cizí jazyk (nejčastěji angličtina) a jeden volitelný předmět na vyšší úrovni[8]. V části z matematiky se klade větší důraz na logické myšlení a využití matematiky v praxi než v předchozí verzi.

„Aby byla ověřena úroveň zvládnutí obecného požadavku „uvažování a argumentace“, budou mezi zkouškovými úlohami zařazeny důkazové úlohy, které budou od uchazečů vyžadovat provedení matematického důkazu.

Za účelem ověření zvládnutí obecného požadavku „Výběr a tvorba matematických modelů při řešení praktických a teoretických problémů“ mohou mezi zkouškovými úlohami být zařazeny úlohy s praktickým či realistickým kontextem.“ (CKE, 2024a, s. 7)

V základní úrovni maturity z matematiky je 31 úloh, na které mají studenti 180 minut. Lze získat celkem 46 bodů, přičemž pro úspěšné složení je nutné dosáhnout minimálně 30 % (14 bodů). V testu jsou jak uzavřené úlohy s jednou správnou odpovědí, tak otevřené úlohy, u nichž je třeba uvést celý výpočet. V rozšířené úrovni je časový limit stejný, tedy 180 minut,

7 Splnění rozšířené úrovně je nezbytné pro některé univerzitní obory.

8 Právě zařazení volitelného předmětu na vyšší úrovni je nejzásadnější změnou oproti předchozí Formułę 2015. Volitelný předmět může být jakýkoli z nabídky, například biologie, chemie, polština, matematika apod.

ale počet úloh je nižší – pouze 14. Získat lze až 60 bodů. V této části jsou úlohy pouze otevřené, takže studenti musí u každé z nich ukázat celý postup řešení. Pevná minimální hranice bodů pro splnění není stanovena. V obou úrovních mohou žáci používat kalkulačky a oficiální sbírku vzorců, kterou CKE schválila, nazývanou *Wybrane wzory matematyczne*. (CKE, 2023c)

Tento dokument je vytvořen speciálně pro potřeby polské maturitní zkoušky z matematiky. Jedná se o jednotnou a standardizovanou pomůcku pro všechny žáky. Na rozdíl od české maturity, u které není přesně stanoveno, které matematické tabulky lze používat, a žáci často využívají různé verze kombinované i s fyzikálními a chemickými tabulkami, mají polští žáci k dispozici výhradně tento oficiální dokument.

Dokument obsahuje všechny matematické vzorce, které se mohou objevit v maturitní zkoušce, a CKE na něj odkazuje i ve vzorových řešeních maturitních úloh. Je tedy klíčovým nástrojem nejen při samotné zkoušce, ale i během přípravy. Elektronická verze je volně dostupná na oficiálních stránkách CKE, tištěnou verzi pak studenti obdrží přímo u zkoušky.

Tato pomůcka zahrnuje důležité vzorce ze všech hlavních oblastí středoškolské matematiky. Podporuje tedy snahu, aby si žáci nemuseli všechny vzorce pamatovat zpaměti, ale aby se je naučili správně vyhledat a použít v kontextu konkrétní úlohy.

3 Analýza úloh

V této části práce se zaměřím na analýzu vybraných úloh z české a polské maturity z matematiky z let 2023 a 2024. Konkrétně budu zkoumat úlohy z jarních termínů základní i rozšířené verze zkoušky. Do analýzy nebudou zahrnuty úlohy zaměřené na míru u těles ani úlohy z analytické geometrie, součástí tedy budou pouze úlohy, které se týkají obvodu a obsahu rovinných obrazců.

V analýze se zaměřím na několik hledisek, včetně způsobu formulace zadání, typu požadovaného řešení a možných postupů řešení. Hlavním cílem však bude posoudit, do jaké míry úlohy testují konceptuální porozumění míře. Budu zkoumat, zda je možné úlohy vyřešit bez mechanického dosazování do vzorců a které body konceptuálního porozumění míře (shrnuté v poslední podkapitole první části práce) jsou k řešení potřeba. Zajímá mě také, zda jsou úlohy formulovány čistě v kontextu míry v geometrii, nebo zda jejich řešení vyžaduje i složitější algebraické úvahy týkající se řešení rovnic nebo úpravy výrazů.

Ke každé úloze uvedu vzorové řešení. Pokud je možné řešit úlohu více způsoby, přidám i další způsoby řešení. Některá z těchto řešení nejsou autorská, ale vycházejí ze vzorových řešení organizací, které maturitní zkoušky organizují. Součástí analýzy bude také celkový komentář ke každé úloze. V případě, že se některé úlohy budou výrazně podobat, zahrnu i jejich vzájemné porovnání.

Úlohy k analýze jsou tedy voleny ze čtyř českých a čtyř polských didaktických testů z výše uvedených termínů. Vybrala jsem všechny úlohy, jejichž zadání a řešení souvisí s obvodem a obsahem. Jedná se pouze o planimetrické úlohy, vynechány jsou úlohy stereometrické a týkající se analytické geometrie. Celkem jsem tedy k analýze zvolila 12 úloh.

3.1 Úlohy z české maturity základní úrovně 2023

3.1.1 Úloha č. 2

Tato úloha je druhou úlohou české maturity z matematiky jarního termínu roku 2023. Úloha (*Obr. 16*) obsahuje výchozí text a samotné zadání.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Je dán čtverec o straně délky a.
Obdélník o obsahu 360 cm^2 má jednu stranu o 8 cm delší než daný čtverec a druhou stranu o 8 cm kratší než daný čtverec.

(CZVV)

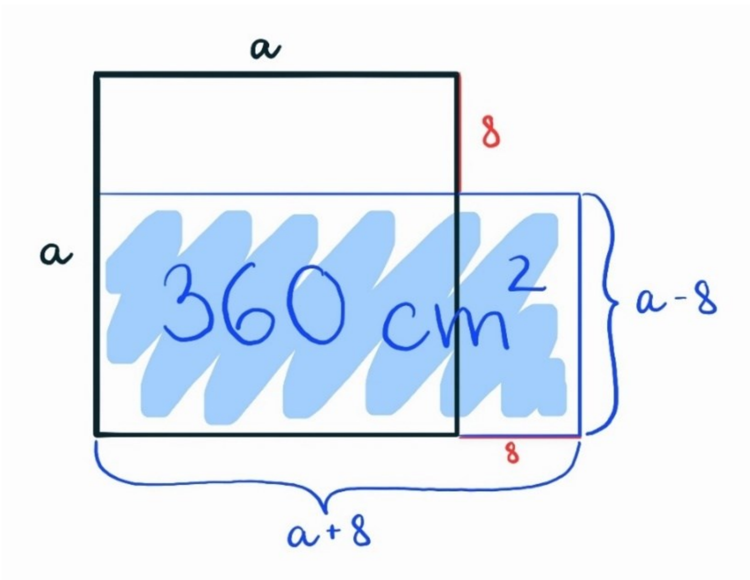
1 bod

2 Vypočtěte v cm^2 obsah daného čtverce.
Výsledek ani dílčí výpočty nezaokrouhlujte.

Obr. 16: Úloha k analýze I (CERMAT, 2023a, s. 2)

Vzorové řešení

Pro lepší pochopení úlohy je vhodné udělat si náčrt celé situace (*Obr. 17*).



Obr. 17: Náčrt k úloze I

Z obrázku je vidět, že obdélník o obsahu 360 cm^2 má strany o délce $(a + 8)$ a $(a - 8)$. Pokud tyto výrazy dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu ($S = a \cdot b$) obdélníku, dostaneme rovnici:

$$360 = (a + 8) \cdot (a - 8).$$

Po úpravě dopočítáme obsah čtverce ($S = a^2$).

$$360 = (a + 8) \cdot (a - 8)$$

$$360 = a^2 - 64$$

$$a^2 = 424$$

Obsah daného čtverce tedy je 424 cm^2.

Komentář k úloze

Úloha požaduje výpočet obsahu čtverce, jestliže známe jeho vztah k obdélníku se zadaným obsahem. Klíčovým krokem je uvědomit si, jakou délku mají strany obdélníku, a následně je dosadit do vzorce pro výpočet jeho obsahu. Ve vztahu ke shrnutí jsou tedy podstatné zejména body 10 a 11, tedy číselné vyjádření obsahu a jeho doplnění do platného vzorce. Z této algebraické reprezentace obsahu je pak vyjádřen chybějící údaj.

Důležité je také uvědomění si, že v závěrečném kroku není nutné z výsledné kvadratické rovnice určovat jednotlivé kořeny. Jelikož je jako výsledek požadován obsah čtverce, lze jej vyjádřit přímo z rovnice a není třeba dopočítávat délku strany čtverce. Přestože by šlo výsledek zjistit i touto složitější cestou, bylo by to nejen časově náročnější, ale také by bylo větší riziko chyby při řešení, případně by výsledek mohl být nepřesný kvůli zaokrouhlování, protože by bylo nutné pracovat s odmocninami nečtvercových čísel. Právě schopnost aplikovat znalosti vztahů ve čtverci (bod 8) může zásadně usnadnit řešení úlohy.

3.1.2 Úloha č. 17

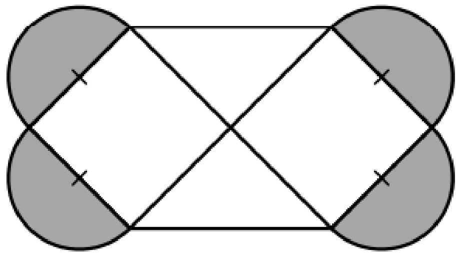
Jedná se o úlohu číslo 17 české maturitní zkoušky z matematiky jarního termínu 2023. Jde o uzavřenou úlohu (*Obr. 18*), jejíž zadání obsahuje výchozí text, který je doplněn obrázkem, a následuje otázka. Výsledkem je jedna z variant A–E.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 17

Obrazec obsahuje čtyři tmavé půlkruhy a bílý šestiúhelník, který se skládá ze dvou shodných čtverců a dvou shodných rovnoramenných trojúhelníků.

Celkový obsah tmavých částí obrazce je 32π cm^2.

(Průměrem každého půlkruhu je strana čtverce.)



(CZVV)

2 body

17 Jaký je obsah bílého šestiúhelníku?

A) 48 cm^2

B) 96 cm^2

C) 128 cm^2

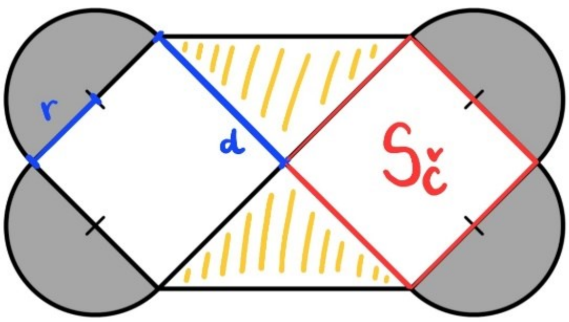
D) 183 cm^2

E) 192 cm^2

Obr. 18: Úloha k analýze II (CERMAT, 2023a, s. 11)

Vzorové řešení

Pro lepší orientaci v úloze je potřeba do připraveného náčrtku doplnit jednotlivé údaje, se kterými budeme v úloze pracovat (viz *Obr. 19*).



Obr. 19: Náčrt k úloze II

Vidíme tedy, že d je délka strany čtverce, která je rovna průměru šedého půlkruhu. Poloměr šedého půlkruhu je označen písmenem r, platí tedy $d = 2r$.

Ze zadání víme, že šedé půlkruhy zabírají plochu $32\pi\ \mathrm{cm}^2$. Díky tomuto údaji můžeme dopočítat délku poloměru r. Jednou z variant je uvažovat nad každým půlkruhem zvlášť, tedy vydělit celkovou hodnotu tmavé plochy čtyřmi a dopočítat poloměr půlkruhu. Avšak vhodnější je uvědomit si, že šedé části dávají dohromady dva kruhy. Poloměr kruhu tedy získáme vyjádřením r ze vztahu:

$$32\pi = 2\pi r^2.$$

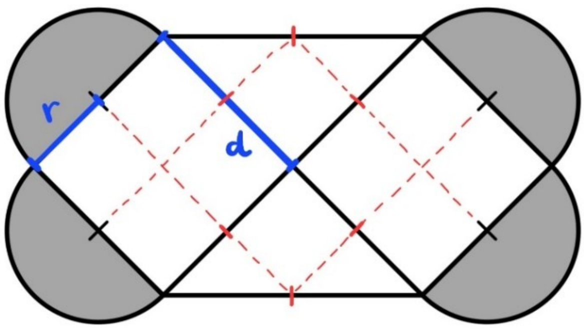
Dostaneme tedy, že $r = 4$. Platí také $d = 8$.

Nyní potřebujeme zjistit obsah bílé plochy. Tu můžeme rozdělit na dva shodné čtverce se stranou d a dva shodné rovnoramenné trojúhelníky (na náčrtku z *Obr. 19* vyšrafované žlutou barvou). Je však důležité si uvědomit, že tyto rovnoramenné trojúhelníky dají dohromady shodný čtverec o straně d, tedy obsah bílé plochy se spočítá jako součet tří obsahů čtverce $S_Č$.

$$S_Č = 8^2 = 64$$

$$S = 3 \cdot 64 = 192\ \mathrm{cm}^2$$

Druhou variantou je pracovat pouze s hodnotou r, a tedy bílou plochu pokrýt menšími čtverci o ploše $16\ \mathrm{cm}^2$ (viz *Obr. 20*).



Obr. 20: Rozdělení obrazce na menší čtverce

Těchto menších čtverců je v obrazci celkem 12 (10 celých a 4 půlky, které spojením dají další 2). Obsah bílé plochy se tedy vypočítá:

$$S = 12 \cdot 16 = 192\ \text{cm}^2.$$

Správnou odpovědí je tedy varianta E.

Komentář k úloze

Zadaný obrazec je složen z několika menších útvarů, jejichž přeskupením můžeme získat jednodušší tvary – ze čtyř šedých půlkruhů vzniknou dva kruhy, ze žlutě vyšrafovaných trojúhelníků (viz *Obr. 19*) lze sestavit třetí bílý čtverec. Tato úprava jednoznačně odkazuje na body 1 a 2 ze shrnutí, tedy přeskupení obrazce tak, aby zjištění jeho míry bylo intuitivnější, jestliže víme, že takové přeskupení zachovává míru obrazce. Přestože toto uvědomění není pro vyřešení úlohy nezbytné, výrazně celý výpočet usnadní a urychlí.

Dalším, tentokrát již nezbytným krokem, je vyjádření neznámé ze vzorce (schopnost pracovat s neznámou ve vzorci – bod 11), které vede k určení poloměru kruhu potřebného pro výpočet bílé části obrazce.

Plochu bílé části obrazce lze tedy, jak již bylo zmíněno výše, vyjádřit jako součet ploch tří shodných čtverců, pro které je výpočet obsahu poměrně jednoduchý. Druhou variantou je pokrytí tohoto bílého šestiúhelníku pomyslnou čtvercovou sítí. Můžeme zde mluvit o iteraci jednotky (bod 3), konkrétně menšího čtverce o ploše $16\ \text{cm}^2$, který pokrývá celý bílý obrazec. Tento přístup zároveň pracuje se strukturací prostoru (bod 7), což umožňuje lépe pochopit celkový obsah obrazce. Je tedy zřejmé, že oba tyto přístupy jsou založeny na konceptuálním porozumění míře.

3.2 Úlohy z české maturity rozšiřující úrovně 2023

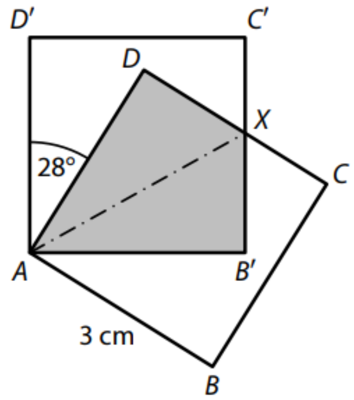
3.2.1 Úloha č. 19

Tato úloha (*Obr. 21*) je vybrána z didaktického testu z matematiky rozšiřující z jarního termínu roku 2023. Jedná se o uzavřenou úlohu. Obsahem zadání je opět výchozí text, obrázek a otázka. Výsledek je požadován jako zaokrouhlená hodnota v předem určených jednotkách.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

V otočení $\mathcal{R}(A; 28°)$ je čtverec $AB'C'D'$ obrazem čtverce $ABCD$ se stranou délky 3 cm.
Bod X je průsečík úseček CD a $B'C'$.

Průnikem obou čtverců je šedý čtyřúhelník $AB'XD$, který je osově souměrný podle osy AX.



(CZVV)

2 body

19 Jaký je obsah šedého čtyřúhelníku $AB'XD$?
(Výsledek je zaokrouhlen na desetiny cm^2.)

A) 4,6 cm^2

B) 4,8 cm^2

C) 5,0 cm^2

D) 5,2 cm^2

E) 5,4 cm^2

Obr. 21: Úloha k analýze III (CERMAT, 2023b, s. 15)

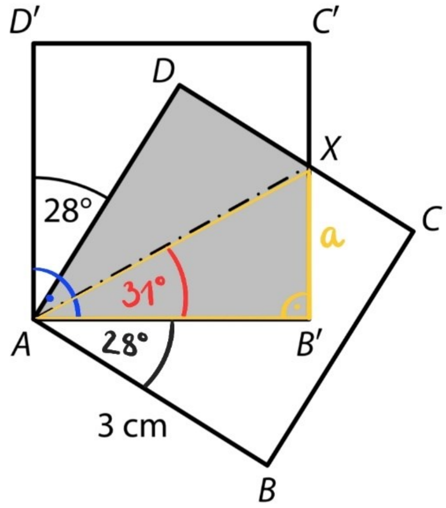
Vzorové řešení

Klíčové k vyřešení této úlohy je uvědomit si, že úhel $B'AD'$ je pravý. Jeho velikost lze také vyjádřit jako součet úhlu DAD' o velikosti 28° a dvou shodných úhlů DAX a XAB'. Tedy platí:

$$|\measuredangle DAD'| + |\measuredangle DAX| + |\measuredangle XAB'| = 90°$$

$$|\measuredangle DAX| + |\measuredangle XAB'| = 90° - 28° = 62°.$$

Vzhledem k tomu, že je celý obrazec osově souměrný podle osy AX, jsou úhly DAX a XAB' shodné, a tedy každý má velikost $31°$. Situace je znázorněna na následujícím obrázku (*Obr. 22*).



Obr. 22: Náčrt k úloze III

Z obrázku je patrné, že čtyřúhelník $AB'XD$ je složený ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků $AB'X$ a XDA. Přeskupením těchto trojúhelníků tedy vznikne obdélník se stranami a a 3 cm. Pro dopočítání obsahu tedy stačí zjistit délku strany a. Ta se v pravoúhlém trojúhelníku dopočítá funkcí tangens.

$$\tan 31° = \frac{a}{3}$$

$$a = 3 \cdot \tan 31°$$

Obsah obrazce tedy je:

$$S = 3 \cdot 3 \cdot \tan 31° \doteq 5{,}407\ \text{cm}^2.$$

Správná odpověď je varianta E.

Komentář k úloze

Klíčovým předpokladem k vyřešení této úlohy je znalost vlastností otočení a porozumění vztahu mezi původním a zobrazeným útvarem, které svým průnikem rozdělují celý obrazec na dvě shodné poloviny podle osy souměrnosti AX. Správné pochopení vztahů v obrazci vzniklém pomocí geometrických zobrazení (bod 15) je základem pro správné vyřešení úlohy.

Významnou roli v celé úloze hrají také úhly (bod 13). K určení jejich velikosti je kromě rozpoznání symetrie třeba také dopočítat velikost styčných úhlů. Jestliže si uvědomíme, že součet zadaného úhlu a dvou shodných úhlů tvoří pravý úhel, můžeme zjistit velikost hledaného úhlu v pravoúhlém trojúhelníku.

Ze vztahů v pravoúhlém trojúhelníku pak pomocí goniometrických funkcí (bod 14.a) dopočítáme kratší stranu čtyřúhelníku. Vzhledem k tomu, že je čtyřúhelník osově souměrný, skládá se ze dvou shodných trojúhelníků, a můžeme tedy říci, že se jedná o deltoid. Odvození jeho obsahu je názorným příkladem využití komplementu (bod 2) v praxi – stačí si uvědomit, že je obsah deltoidu roven součtu dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků.

Zásadní pro vyřešení této úlohy je tedy uvědomění si všech klíčových vztahů v obrazci. Řešení se většinově odkazuje na znalosti spojené s porozuměním míře na středoškolské úrovni, proto nemusí být na první pohled intuitivní.

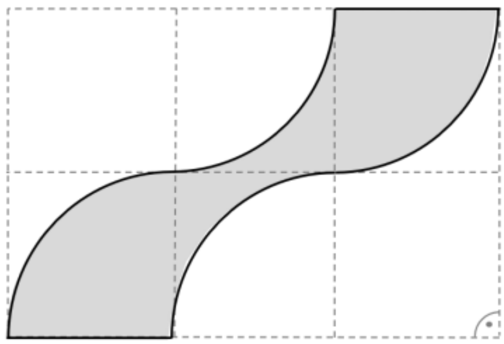
3.3 Úlohy z české maturity základní úrovně 2024

3.3.1 Úloha č. 10

Tuto úlohu (*Obr. 23*) lze nalézt v didaktickém testu z matematiky maturitní zkoušky z jarního termínu roku 2024. Výchozí text a přiložený obrázek doplňují dvě otevřené podúlohy označené jako 10.1 a 10.2. U obou se požaduje výsledek zapsaný v předem určených jednotkách, druhý výsledek má být navíc zaokrouhlený na desetiny.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

Šedý obrazec na obrázku je ohraničen čtyřmi čtvrtkružnicemi o poloměru 5 cm a stranami dvou čtverců.



max. 2 body

10

10.1 Vypočtěte obsah šedého obrazce v cm^2.

10.2 Vypočtěte obvod šedého obrazce v cm. Zaokrouhlete výsledek na desetiny cm.

Obr. 23: Úloha k analýze IV (CERMAT, 2024a, s. 7)

Vzorové řešení 10.1

Existuje více způsobů, jak spočítat obsah šedého obrazce.

Způsob I:

Obsah obrazce lze spočítat jako součet dvou obsahů čtvrtkruhu a dvou zbývajících částí uprostřed obrazce. Obsah každé této části se dá vyjádřit jako rozdíl obsahu čtverce a obsahu čtvrtkruhu. Pokud tedy obsah čtvrtkruhu označíme $S_Č$, bude výpočet vypadat následovně.

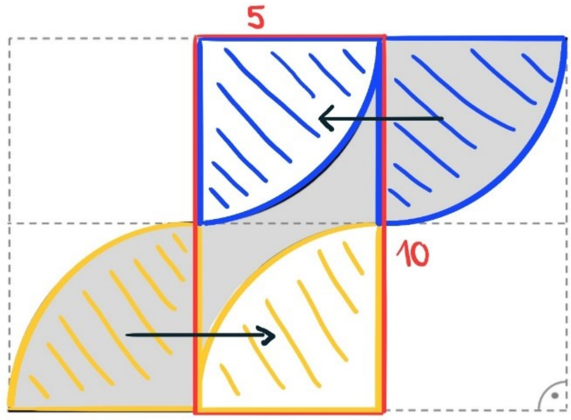
$$S_Č = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{25\pi}{4}$$

$$S = 2 \cdot \frac{25\pi}{4} + 2 \cdot (25 - \frac{25\pi}{4})$$

Úpravou výrazu a dopočítáním dostaneme výsledek $S = 50\ \text{cm}^2$.

Způsob II:

Obrazec lze přeskupit tak, aby výpočet jeho obsahu byl jednodušší. Přeskupení je znázorněno na následujícím obrázku (viz *Obr. 24*).



Obr. 24: Přeskupení obrazce v úloze IV

Z obrázku je vidět, že přeskupením čtvrtkruhů doprostřed obrazce vznikne obdélník o stranách 10 cm a 5 cm. Obsah tohoto obdélníku se dopočítá snadno.

$$S = 10 \cdot 5 = 50\ \text{cm}^2$$

Vzorové řešení 10.2

Obvod obrazce se vypočítá jako součet délek všech hranic obrazce. Hranice je tvořena čtyřmi shodnými čtvrtkružnicemi, které dají dohromady celou kružnici, a dvěma poloměry čtvrtkruhu. Obvod obrazce se tedy spočítá jako jejich součet.

$$o = 2\pi r + 2r$$

$$o = 2 \cdot 5 \cdot \pi + 2 \cdot 5 = 10\pi + 10 \doteq 41{,}4\ \text{cm}$$

Komentář k úloze

Výpočet obsahu obrazce lze řešit dvěma způsoby. Buď rovnou přejdeme k algebraické reprezentaci obsahu a spočítáme jej jako součet obsahů jeho jednotlivých částí, které vyjádříme jako části obsahu kruhu, případně jako doplněk kruhu do čtverce (bod 11).

Výhodnější však v tomto případě je části obrazce přeskupit a vytvořit z nich obdélník, což je útvar, jehož obsah lze určit snadno. Při tomto způsobu řešení tedy opět využíváme konzervaci míry a práci s komplementem (body 1 a 2). Tento způsob řešení lze považovat za rychlejší.

Naopak první zmíněný způsob řešení může být výhodnější z hlediska řešení druhé podúlohy. Pokud si totiž v první části úlohy obrazec rozdělíme, ve druhé části již známe vztahy mezi jednotlivými částmi. Obvod pak určíme jako součet všech délek ohraničujících obrazec (bod 6), přičemž je vhodné si uvědomit, že čtyři čtvrtkružnice dají dohromady jednu celou kružnici, což výpočet usnadní.

Klíčovým krokem v této úloze je tedy správné přeskupení obrazce a seskupení jeho částí tak, aby vznikly útvary, jejichž míru lze zjistit snadněji.

3.3.2 Úloha č. 12

Další vybranou úlohou z maturitní zkoušky z matematiky konané na jaře 2024 je úloha číslo 12 (*Obr. 25*). Jedná se o slovní úlohu, u které se požaduje zápis celého postupu. Zároveň jde o první z analyzovaných úloh, která má reálný kontext – konkrétně se zabývá výpočtem míry lesní školky.

max. 2 body

12 Lesní školka určená k pěstování sazenic lesních dřevin má tvar obdélníku. Rozdíl mezi délkami dvou sousedních stran obdélníku je 30 metrů. Na její oplocení se spotřebovalo 532 délkových metrů pletiva.

Jaká je výměra (plocha) lesní školky v m²?

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Obr. 25: Úloha k analýze V (CERMAT, 2024a, s. 8)

Vzorové řešení

Strany obdélníku si označíme jako a a $a + 30$. Z obvodu obdélníku zjistíme hodnotu a.

$$532 = 2 \cdot a + 2 \cdot (a + 30)$$

$$4a = 472$$

$$a = 118 \text{ m}$$

Nyní známe délky stran obdélníku, ze kterých se snadno dopočítá obsah.

$$S = a \cdot (a + 30)$$

$$S = 118 \cdot (118 + 30) = 17\,464 \text{ cm}^2$$

Komentář k úloze

Úloha je typově podobná úloze I (*Obr. 16*). Její řešení spočívá ve správném vyjádření vztahu mezi délkami na základě informací ze zadání a v následném určení neznámé ze vzorce. Klíčovým bodem je tedy práce s algebraickou reprezentací míry (bod 11).

I druhý krok (určení délek stran a jejich dosazení do vzorce pro výpočet obsahu obdélníku) je založen na práci s algebraickou reprezentací obvodu a obsahu obdélníku.

Přestože se v úloze pracuje jak s obvodem, tak s obsahem, nejedná se o úlohu, která by více testovala vztah mezi těmito dvěma veličinami. Obvod zde slouží především jako nástroj pro získání délky strany, která je následně využita při výpočtu obsahu.

K vyřešení úlohy tedy kromě bodu 11 ze shrnutí (algebraická reprezentace míry) a základních znalostí o obvodu a obsahu (body 6 a 8) není třeba znát žádné další hlubší vztahy či pravidla.

3.3.3 Úloha č. 23

Úloha číslo 23 (*Obr. 26*) je další úlohou z didaktického testu z matematiky konaného na jaře roku 2024. Jedná se o uzavřenou úlohu, ve které je na základě výchozího textu třeba určit vztah mezi délkami základen lichoběžníku.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Je dán rovnoramenný lichoběžník o obvodu 96 cm. Rameno lichoběžníku má délku 13 cm a výška lichoběžníku je 12 cm.

2 body

23 V jakém poměru (delší : kratší) **jsou délky základen lichoběžníku?**

A) 5 : 2

B) 4 : 3

C) 3 : 2

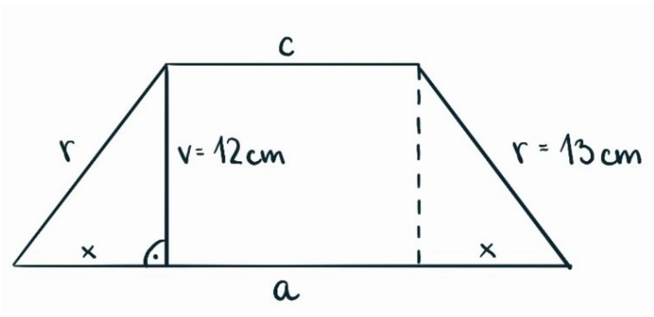
D) 2 : 1

E) nelze určit

Obr. 26: Úloha k analýze VI (CERMAT, 2024a, s. 15)

Vzorové řešení

Pro lepší orientaci v úloze je vhodné udělat si náčrt (*Obr. 27*).



Obr. 27: Náčrt k úloze VI

K určení poměru mezi délkami základen je potřeba nejprve zjistit délku rozdílu mezi základnami. Z obrázku je patrné, že platí $a = c + 2x$. Hodnotu x dopočítáme pomocí Pythagorovy věty.

$$x^2 + 12^2 = 13^2$$

$$x^2 = 169 - 144 = 25$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

Nyní můžeme dopočítat délky obou základen, neboť známe obvod i délku obou ramen.

$$o = 2r + c + c + 2x$$

$$96 = 2 \cdot 13 + 2c + 2 \cdot 5$$

$$c = 30 \text{ cm}$$

Délka druhé základny je $a = 30 + 2 \cdot 5 = 40$ cm.

Jestliže známe délky obou základen, můžeme snadno určit poměr mezi nimi.

$$a : c = 40 : 30 = 4 : 3$$

Správná odpověď je varianta B.

Komentář k úloze

K vyřešení úlohy výrazně pomůže nakreslení vhodného obrázku, ze kterého lze určit některé platné vztahy. Klíčové je především vyjádřit, o kolik je jedna základna delší než druhá. Vhodné je tedy využít znalost platných vztahů v lichoběžníku.

Vzhledem k tomu, že jde o rovnoramenný lichoběžník, získáme správným zakreslením výšky dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. V těchto trojúhelnících lze s porozuměním použít Pythagorovu větu, díky které určíme rozdíl mezi délkami základen.

K řešení bylo dosud třeba využít především známé vztahy v trojúhelnících a čtyřúhelnících, tedy se odkazuji zejména na bod 14 ve shrnutí.

Dále musíme využít také poslední zadaný údaj – obvod lichoběžníku. Vzhledem k tomu, že je obvod chápán jako součet délek všech stran (bod 6), můžeme pomocí algebraického vyjádření, dosazení číselných hodnot a následného dopočítání určit délky obou základen (body 10 a 11).

Tyto délky pak vyjádříme ve vzájemném vztahu jako poměr, který zkrátíme na základní tvar, čímž získáme hledaný výsledek.

3.4 Úlohy z české maturity rozšiřující úrovně 2024

3.4.1 Úloha č. 9

Úloha číslo 9 (*Obr. 28*) je jedinou vybranou úlohou z didaktického testu z matematiky rozšiřující pro jarní termín v roce 2024. Jde o otevřenou úlohu, jejímž cílem je určit poměr délek úhlopříček kosočtverce, pokud je znám poměr délky strany ku velikosti výšky tohoto kosočtverce. Je nutné zapsat celý postup řešení.

max. 3 body

9 V kosočtverci je poměr délky strany ku velikosti výšky 5 : 3.

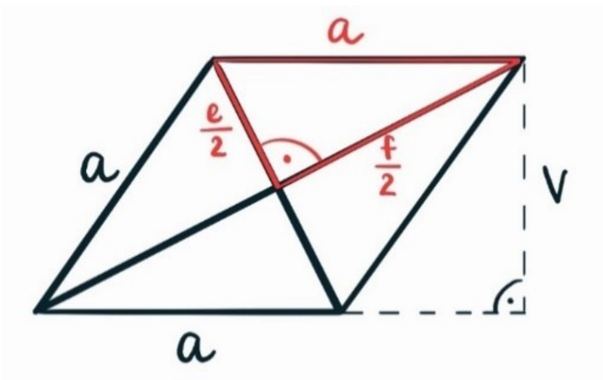
Určete poměr délek obou úhlopříček tohoto kosočtverce.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení.**

Obr. 28: Úloha k analýze VII (CERMAT, 2024b, s. 8)

Vzorové řešení

Pro lepší znázornění úlohy je uveden náčrt (*Obr. 29*).



Obr. 29: Náčrt k úloze VII

Je důležité uvědomit si, že se úhlopříčky v kosočtverci protínají v půlce a jsou na sebe kolmé. Kosočtverec je tedy složen ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků. Z Pythagorovy věty potom vyplývá:

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4}.$$

Jeden ze způsobů výpočtu obsahu kosočtverce je součet obsahů těchto čtyř trojúhelníků.

$$S_{\Delta} = \frac{\frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2}}{2} = \frac{e \cdot f}{8}$$

$$S = 4 \cdot \frac{e \cdot f}{8} = \frac{e \cdot f}{2}$$

Druhým způsobem, jak vypočítat obsah kosočtverce, je pomocí vzorce $S = a \cdot v$. Ze zadání známe poměr mezi těmito dvěma délkami, proto můžeme jednu hodnotu vyjádřit v závislosti na druhé.

$$\frac{a}{v} = \frac{5}{3}$$

$$a = \frac{5v}{3}$$

$$S = a \cdot v = \frac{5v}{3} \cdot v = \frac{5v^2}{3}$$

Jestliže máme obsah kosočtverce vyjádřen dvěma způsoby, můžeme tyto výrazy dát do rovnosti.

$$\frac{e \cdot f}{2} = \frac{5v^2}{3}$$

Nyní budeme chtít vyjádřit délku úhlopříček. Využijeme vztahy, které máme vyjádřené již výše.

$$e = \frac{10v^2}{3f}$$

$$a^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4}$$

$$\left(\frac{5v}{3}\right)^2 = \frac{\left(\frac{10v^2}{3f}\right)^2}{4} + \frac{f^2}{4}$$

$$\frac{25v^2}{9} = \frac{\left(\frac{10v^2}{3f}\right)^2}{4} + \frac{f^2}{4}$$

$$100v^2 = 9 \cdot \left(\frac{10v^2}{3f}\right)^2 + 9 \cdot f^2$$

$$100v^2 = 9 \cdot \frac{100v^4}{9f^2} + 9f^2$$

$$100v^2 f^2 = 100v^4 + 9f^4$$

$$9f^4 - 100v^2 f^2 + 100v^4 = 0$$

Při vyjadřování délky úhlopříčky f jsme se dostali k rovnici čtvrtého stupně, kterou však lze zjednodušit substitucí $f^2 = x$. Rovnice bude vypadat takto:

$$9x^2 - 100v^2 x + 100v^4 = 0.$$

Nyní musíme dopočítat hodnotu x.

$$D = (100v^2)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 100v^4 = 10\,000v^4 - 3\,600v^4 = 6\,400v^4$$

$$x_{1,2} = \frac{100v^2 \pm \sqrt{6\,400v^4}}{2 \cdot 9} = \frac{100v^2 \pm 80v^2}{18}$$

$$x_1 = 10v^2, x_2 = \frac{10v^2}{9}$$

Hodnoty $x_{1,2}$ se dosadí zpět do substituce pro zjištění hodnoty f.

$$f_1^2 = 10v^2$$

$$f_1 = v\sqrt{10}$$

$$f_2^2 = \frac{10v^2}{9}$$

$$f_2 = \frac{v\sqrt{10}}{3}$$

Hodnoty $e_{1,2}$ dopočítáme dosazením do vztahu vyjádřeného výše.

$$e_1 = \frac{10v^2}{3f_1} = \frac{10v^2}{3 \cdot v\sqrt{10}} = \frac{v\sqrt{10}}{3}$$

$$e_2 = \frac{10v^2}{3f_2} = \frac{10v^2}{3 \cdot \frac{v\sqrt{10}}{3}} = \frac{10v^2}{v\sqrt{10}}$$

Vidíme tedy, že platí $f_1 = e_2$, $f_2 = e_1$, proto má úloha pouze jedno řešení a stačí poměr mezi úhlopříčkami vyjádřit pouze jednou.

$$e_1 : f_1 = \frac{v\sqrt{10}}{3} : v\sqrt{10} = 1 : 3$$

Komentář k úloze

Toto je jediná analyzovaná úloha, která se nezaměřuje na obvod nebo obsah v zadání a ani nevyžaduje jejich výpočet. Vzhledem k tomu, že je v zadání uveden vztah mezi délkou strany kosočtverce a jeho výškou, využití obsahu se však přirozeně nabízí.

Pro zvolení správného postupu je klíčové porozumět platným vztahům v kosočtverci (bod 14.b). Z těchto vztahů vyplývá, že se kosočtverec skládá ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků, což nás vede k využití Pythagorovy věty (bod 14.a).

Skutečnost, že kosočtverec je složen ze čtyř shodných trojúhelníků, nás také vede k tomu, že obsah kosočtverce lze vyjádřit jako součet obsahů těchto trojúhelníků (bod 8). V zadání máme také uveden vztah mezi délkou strany a výškou, proto se nabízí také druhý způsob vyjádření obsahu právě ve vztahu k těmto dvěma údajům (bod 9).

V zadání však nejsou uvedeny přímo číselné hodnoty pro délky, ale jsou vyjádřeny ve vzájemném vztahu. To znamená, že je nutné pracovat s algebraickým vyjádřením jedné hodnoty vzhledem k druhé. Tento postup tedy zahrnuje poměrně zdlouhavé algebraické úpravy k získání požadovaných údajů (bod 11).

Na závěr je třeba oba způsoby výpočtu obsahu kosočtverce vyjádřit jako rovnost, ze které lze pomocí dalších algebraických úprav získat požadovaný výsledek. Jelikož úloha nepracuje s číselnými hodnotami délek, ale vše je vyjádřeno v obecných vztazích, řešení se soustředí na algebraickou reprezentaci těchto délek, bez potřeby číselné reprezentace míry.

3.5 Úlohy z polské maturity základní úrovně 2023

3.5.1 Úloha č. 22

Jedná se o úlohu (*Obr. 30*) z maturitní zkoušky základní úrovně z jarního termínu v roce 2023. Součástí zadání je text úlohy a pokyn k vyřešení. Je nutné zapsat celý postup řešení.

Zadání 22. (0–2)

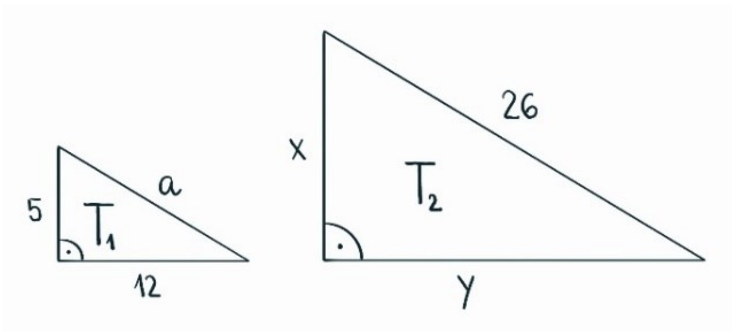
Pravoúhlé trojúhelníky T_1 a T_2 jsou podobné. Odvěsny trojúhelníku T_1 mají délky 5 a 12. Přepona trojúhelníku T_2 má délku 26.

Vypočítej obsah trojúhelníku T_2. Zapiš své výpočty.

Obr. 30: Úloha k analýze VIII (CKE, 2023a, s. 19)

Vzorové řešení

Pravoúhlé trojúhelníky a jejich rozměry jsou znázorněny v náčrtku k úloze na následujícím obrázku (*Obr. 31*).



Obr. 31: Náčrt k úloze VIII

Způsob I:

Jestliže známe v pravoúhlém trojúhelníku T_1 délky odvěsen, pomocí Pythagorovy věty můžeme snadno dopočítat délku přepony a.

$$a^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

$$a = 13$$

Známe tedy délky přepon obou trojúhelníků, o kterých víme, že jsou podobné. To nám umožňuje určit koeficient podobnosti k.

$$26 = k \cdot 13$$

$$k = 2$$

Nyní máme dvě možnosti, jak koeficient k využít. Můžeme ho využít k zjištění délek odvěsen v trojúhelníku T_2 a z nich dopočítat obsah tohoto trojúhelníku. Druhou variantou je, že koeficient podobnosti použijeme přímo k výpočtu obsahu trojúhelníku.

Nejprve uvedu první variantu:

$$x = k \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$y = k \cdot 12 = 2 \cdot 12 = 24.$$

Víme tedy, že přepony v trojúhelníku T_2 mají délky 10 a 24. Vzhledem k tomu, že se jedná o pravoúhlý trojúhelník, známe všechny potřebné údaje k dopočítání obsahu tohoto trojúhelníku.

$$S = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$S = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ j}^2$$

Způsob II:

Druhá varianta řešení vychází z tvrzení o plochách podobných obrazců uvedeného podkapitole *1.3.4 Geometrická zobrazení*. Platí tedy:

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2.$$

Spočítáme tedy obsah trojúhelníku T_1 a dosadíme do upraveného vztahu, který je uveden výše.

$$S_1 = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$$

$$S = S_1 \cdot k^2 = 30 \cdot 2^2 = 120 \text{ j}^2$$

Způsob III:

Z podobnosti trojúhelníků T_1 a T_2 víme, že platí:

$$\frac{5}{12} = \frac{x}{y}.$$

Z tohoto vztahu můžeme vyjádřit x, které pak dosadíme do Pythagorovy věty platné v trojúhelníku T_2.

$$x = \frac{5y}{12}$$

$$x^2 + y^2 = 26^2$$

$$\left(\frac{5y}{12}\right)^2 + y^2 = 26^2$$

$$\frac{25y^2}{144} + y^2 = 26^2$$

$$\frac{169y^2}{144} = 26^2$$

$$y = \sqrt{\frac{144}{169}} \cdot 26 = 24$$

Nyní dosazením zpět zjistíme hodnotu x.

$$x = \frac{5 \cdot 24}{12} = 10$$

Máme tedy všechny potřebné údaje pro výpočet obsahu trojúhelníku T_2.

$$S = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ j}^2$$

Komentář k úloze

Přestože lze úlohu vyřešit několika způsoby, klíčové body ze shrnutí porozumění míře, které při řešení využijeme, jsou u všech způsobů stejné, záleží pouze na pořadí jednotlivých kroků.

Prvním důležitým poznatkem je uvědomění si, že v úloze pracujeme s pravoúhlými trojúhelníky. Vzhledem k tomu, že známe délky stran, nabízí se využití Pythagorovy věty (bod 14.a) k výpočtu neznámých délek.

Další známou skutečností je vztah mezi oběma trojúhelníky. Víme, že tyto trojúhelníky jsou navzájem podobné, což nám umožňuje vyjádřit vztah mezi jednotlivými stranami, případně mezi plochami obou trojúhelníků (bod 15).

Cílem úlohy je zjistit obsah většího trojúhelníku. Jelikož se jedná o pravoúhlý trojúhelník, stačí znát délky odvěsen, abychom mohli určit jeho obsah (body 8 a 9).

Úlohu můžeme vyřešit převážně algebraicky, kdy nakonec dosadíme číselné hodnoty a výsledek vyjádříme numericky. Zároveň však lze také číselné hodnoty využít od začátku a řešit úlohu spíše numericky.

3.6 Úlohy z polské maturity rozšiřující úrovně 2023

3.6.1 Úloha č. 8

Úloha číslo 8 (*Obr. 32*) je vybrána z didaktického testu z rozšiřující úrovně matematiky konaného v jarním termínu v roce 2023. Jedná se o otevřenou úlohu, k jejímuž řešení je potřeba zapsat celý postup.

Zadání 8. (0–4)

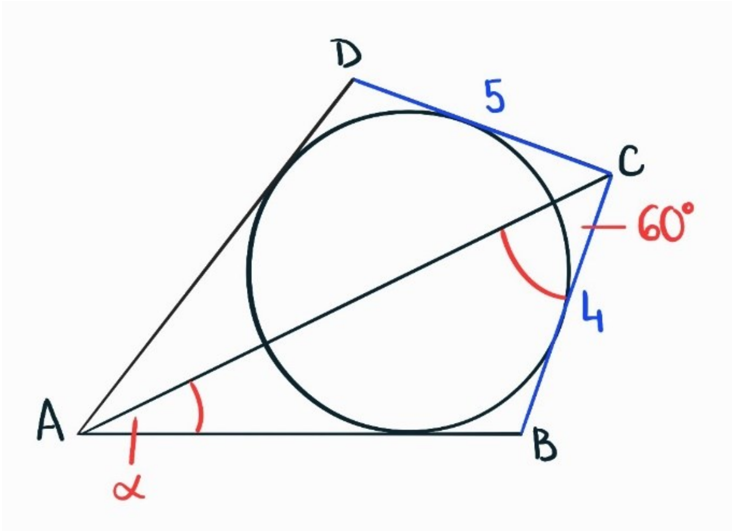
Čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém $|BC| = 4$ a $|CD| = 5$, je vepsán do kružnice. Úhlopříčka AC tohoto čtyřúhelníku svírá se stranou BC úhel o velikosti $60°$ a se stranou AB ostrý úhel, jehož sinus je roven $\frac{1}{4}$.

Vypočítej obvod čtyřúhelníku $ABCD$. Zapiš své výpočty.

Obr. 32: Úloha k analýze IX (CKE, 2023b, s. 12)

Vzorové řešení

K řešení je vhodné udělat si náčrt podle zadání viz *Obr. 33*.



Obr. 33: Náčrt k úloze IX

K vyřešení této úlohy lze dojít několika způsoby, je však podstatné znát a využít tvrzení ohledně čtyřúhelníku s vepsanou kružnicí.

Způsob I:

První způsob řešení lze provést pomocí sinové věty. Jestliže v trojúhelníku ABC známe velikosti dvou úhlů (respektive jednoho úhlu a hodnoty sinu druhého) a délku jedné protilehlé strany, přirozeně se nabízí využití sinové věty k dopočítání délky strany AB.

$$\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{|AB|}{\sin 60°}$$

$$|AB| = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

Nyní můžeme využít vztah uvedený výše:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|.$$

Dosazením můžeme dopočítat délku strany BC.

$$8\sqrt{3} + 5 = 4 + |BC|$$

$$|BC| = 8\sqrt{3} + 5 - 4 = 8\sqrt{3} + 1$$

Nakonec součtem délek všech stran určíme obvod čtyřúhelníku.

$$o = 4 + 5 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} + 1 = 10 + 16\sqrt{3}$$

Způsob II:

Dalším možným způsobem řešení je využití obsahu trojúhelníku ABC, který lze určit několika způsoby. Vzhledem k tomu, že známe délku jedné strany a hodnoty dvou úhlů, nabízí se vzorec:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma.$$

Obsah trojúhelníku ABC můžeme tedy vyjádřit jako:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha.$$

Dosazením hodnot získáme:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \frac{1}{4}.$$

Stejný obsah lze také vyjádřit pomocí jiných údajů:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin 60°.$$

Po dosazení získáme:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |AC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Nyní máme obsah trojúhelníku ABC vyjádřen dvěma způsoby, což umožňuje sestavit rovnost a vyjádřit délku strany AB.

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |AC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|AB| = 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

Známe tedy délky tří stran a můžeme opět využít vztah platný pro čtyřúhelník s vepsanou kružnicí k dopočítání obvodu. Jestliže platí vztah

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|,$$

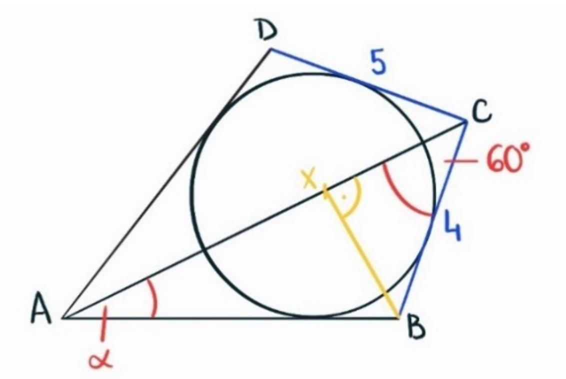
můžeme obvod dopočítat takto:

$$o = 2 \cdot (|AB| + |CD|) = 2 \cdot \left(8\sqrt{3} + 5\right) = 16\sqrt{3} + 10.$$

Způsob III:

Tento způsob řešení není autorský, ale vychází z návrhu vzorového řešení (CKE, 2023d).

Toto řešení vychází z doplnění výšky do trojúhelníku ABC, jak je znázorněno na následujícím obrázku (*Obr. 34*).



Obr. 34: Doplnění výšky do náčrtu

Doplněním výšky se trojúhelník ABC rozdělí na dva menší pravoúhlé trojúhelníky ABX a BCX. Pomocí goniometrických funkcí v těchto trojúhelnících můžeme dopočítat chybějící délky.

Nejprve využijeme funkci sinus v trojúhelníku BCX a určíme délku výšky BX.

$$\sin 60° = \frac{|XB|}{|BC|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|XB|}{4}$$

$$|XB| = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Nyní, když známe délku výšky XB, můžeme goniometrické funkce použít i v druhém vzniklém pravoúhlém trojúhelníku ABX k dopočítání délky strany AB.

$$\sin\alpha = \frac{|XB|}{|AB|}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{|AB|}$$

$$|AB| = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = 8\sqrt{3}$$

Stejně jako v předchozím způsobu dopočítáme obvod čtyřúhelníku.

$$o = 2 \cdot (|AB| + |CD|) = 2 \cdot \left(8\sqrt{3} + 5\right) = 16\sqrt{3} + 10$$

Komentář k úloze

Tuto úlohu lze (podobně jako předchozí úlohu – *Obr. 30*) vyřešit několika způsoby. V tomto případě se však znalosti potřené k jednotlivým postupům liší. Co však zůstává u všech variant řešení stejné, je využití vztahu platícího v tečnovém čtyřúhelníku (bod 15). Platí-li tento vztah, pak nám k určení obvodu (bod 6) stačí znát délky dvou libovolných protějších stran, z čehož vyplývá, že k určení obvodu stačí zjistit délku jedné další strany. Můžeme se tak soustředit pouze na práci s trojúhelníkem vytvořeným úhlopříčkou obrazce. Vzhledem k zadaným hodnotám je výhodné pracovat s trojúhelníkem ABC.

V tomto trojúhelníku známe délku jedné strany a vlastnosti dvou úhlů, což vede k využití sinové věty. Dosazením a úpravou rovnice získáme chybějící délku strany. Tento způsob řešení tedy kromě práce s úhly vyžaduje i porozumění vztahům v trojúhelníku (body 13 a 14.a).

Další způsob řešení k zjištění chybějící délky využívá vzorec pro obsah trojúhelníku. Pomocí délky dvou stran a velikost jimi sevřeného úhlu lze vyjádřit obsah třemi způsoby. Jelikož známe hodnoty dvou úhlů v trojúhelníku, můžeme vyjádřit oba tyto výrazy a položit je jako rovnost, ze které můžeme určit chybějící délku. Tento přístup tedy odkazuje na práci s obsahem (bod 8) a jeho algebraické vyjádření (bod 11).

V posledním zmíněném způsobu řešení je potřeba do obecného trojúhelníku doplnit výšku, čímž vzniknou dva pravoúhlé trojúhelníky. Díky známým vlastnostem některých úhlů se nabízí využití trigonometrických funkcí. Stejně jako předchozí způsoby, tak i tento pracuje s porozuměním úhlům (bod 13), vztahům v trojúhelníku (bod 14.a) a algebraickým úpravám (bod 11).

Úloha tak testuje především schopnost rozpoznat vztahy v obrazci. Zadání umožňuje odhalit různé vlastnosti a využít je při řešení, čímž se vytváří prostor pro více správných způsobů řešení.

3.7 Úlohy z polské maturity základní úrovně 2024

3.7.1 Úloha č. 21

Tuto úlohu (*Obr. 35*) lze nalézt v didaktickém testu maturitní zkoušky z matematiky (základní úroveň) z jarního termínu roku 2024. Jedná se o uzavřenou úlohu, jejímž řešením tedy bude jedna z variant A–D.

Zadání 21. (0–1)

Je dán rovnoběžník s délkami stran 3 a 4 a úhlem mezi nimi o velikosti $120°$.

Dokonči větu. Vyber správnou odpověď z uvedených možností.

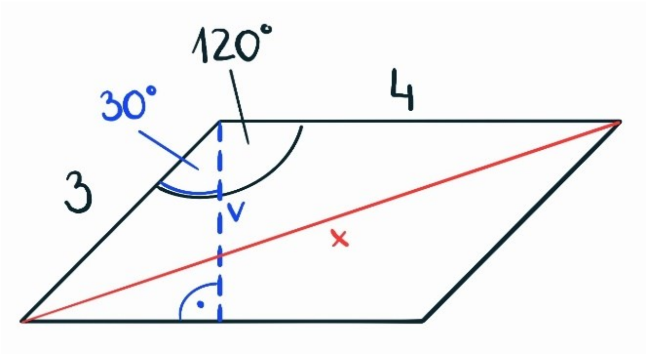
Obsah tohoto rovnoběžníku je roven

A. 12 **B.** $12\sqrt{3}$ **C.** 6 **D.** $6\sqrt{3}$

Obr. 35: Úloha k analýze X (CKE, 2024b, s. 19)

Vzorové řešení

Náčrt úlohy (*Obr. 36*) je udělán tak, aby z něj byly zřejmé oba způsoby řešení. Modrou barvou jsou zvýrazněny údaje pro první způsob, červenou údaje pro způsob druhý.



Obr. 36: Náčrt k úloze X

Způsob I:

Do rovnoběžníku doplníme výšku, která nám vytvoří pravoúhlý trojúhelník. Pomocí goniometrických funkcí v tomto trojúhelníku můžeme dopočítat délku výšky v.

$$\cos 30° = \frac{v}{3}$$

$$v = 3 \cdot \cos 30° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Obsah rovnoběžníku zjistíme pomocí běžně známého vzorce $S = a \cdot v$.

$$S = 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Způsob II:

Rovnoběžník lze rozdělit úhlopříčkou x na dva shodné trojúhelníky. Protože obsah rovnoběžníku je součtem obsahů těchto dvou shodných trojúhelníků, stačí nám určit obsah jednoho z nich.

K výpočtu obsahu trojúhelníku je vhodné využít vzorec, který vyžaduje znalost délek dvou stran a velikost jimi svíraného úhlu, což v tomto případě splňujeme.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Obsah rovnoběžníku je tedy dvojnásobkem obsahu jednoho trojúhelníku:

$$S = 2 \cdot S_{\Delta} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,.$$

Správná odpověď je varianta D.

Komentář k úloze

Cílem úlohy je zjistit obsah rovnoběžníku. Nabízí se běžně využívaný vzorec pracující s délkou strany a velikostí na ni kolmé výšky. Stejně jako v předchozí úloze (*Obr. 32*) je však potřeba výšku do obrazce doplnit a následně zjistit její délku.

Pokud si výšku vhodně zakreslíme do náčrtku, lze vidět, že vytvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona odpovídá jedné ze stran rovnoběžníku, tedy jejich délky se rovnají. V tomto pravoúhlém trojúhelníku můžeme také díky vlastnosti styčných úhlů zjistit velikost potřebného úhlu (bod 13). Pomocí goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku (bod 14.a) následně dopočítáme délku výšky. Dosazením výšky do vzorce pro výpočet obsahu pak získáme požadovaný výsledek (body 10 a 11).

Druhý způsob řešení uvažuje rozdělení rovnoběžníku na dvě shodné poloviny. V tomto případě tedy stačí zjistit obsah poloviny útvaru a výsledek vynásobit dvěma. Polovinu útvaru tvoří trojúhelník, u něhož známe délky dvou stran i velikost jimi sevřeného úhlu. Tyto hodnoty můžeme dosadit do vzorce pro výpočet obsahu. Tento postup se odkazuje na body 8 a 14.a ze shrnutí, tedy zavedení obsahu a správné užití vztahů v trojúhelníku.

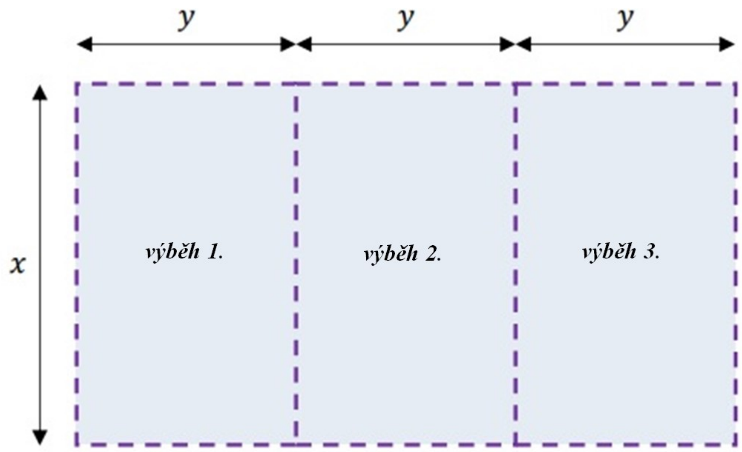
3.7.2 Úloha č. 31

Úloha číslo 31 (*Obr. 37*) je z didaktického testu ze základní úrovně matematiky z jarního termínu v roce 2024. Jedná se o optimalizační slovní úlohu, která požaduje zápis celého postupu řešení. Součástí zadání je názorný obrázek.

Zadání 31. (0–4)

V útulku pro zvířata je třeba na rovném povrchu postavit oplocení z pletiva, které vymezí tři stejné výběhy se společnými vnitřními stěnami.
Základem každého ze tří výběhů je obdélník (jak je znázorněno na obrázku).
Na stavbu tohoto oplocení je potřeba použít 36 metrů běžného pletiva.

Schématický nákres tří výběhů (pohled shora).
Pletivo je označeno čárkovanou čarou.



Vypočítej rozměry x a y jednoho výběhu, při kterých bude součet ploch základů těchto tří výběhů největší. Při výpočtech zanedbej šířku vstupu do každého z výběhů. Zapiš své výpočty.

Obr. 37: Úloha k analýze XI (CKE, 2024b, s. 27)

Vzorové řešení

Způsob I:

Ze zadání víme, že celé pletivo má 36 m. Platí tedy vztah:

$$36 = 4x + 6y.$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit y.

$$y = \frac{36 - 4x}{6} = 6 - \frac{2x}{3}$$

Vzhledem k tomu, že x i y vyjadřují délku pletiva, je zřejmé, že obě tyto hodnoty musí být kladné. Platí tedy:

$x > 0$ a zároveň $y = 6 - \frac{2x}{3} > 0$.

Z těchto nerovnic můžeme zjistit interval, jehož hodnoty může x nabývat.

$$6 - \frac{2x}{3} > 0$$

$$18 > 2x$$

$$x < 9$$

Dostáváme tedy, že $x \in (0; 9)$.

Máme zjistit největší možný obsah obrazce, k čemuž využijeme vzorec pro výpočet obsahu obdélníku:

$$S = x \cdot 3y = x \cdot 3 \cdot \left(6 - \frac{2x}{3}\right).$$

Úpravou získáme rovnost:

$$S = -2x^2 + 18x.$$

Můžeme tuto rovnost vnímat také jako kvadratickou funkci.

$$S(x) = -2x^2 + 18x$$

Graf této funkce je parabola, jejíž vrchol určuje největší možné x, což je požadované řešení. Pro výpočet souřadnic vrcholu V můžeme využít vzorec:

$$V = \left[\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a} + c\right].$$

Potřebujeme hodnotu x, tedy využijeme výraz $\frac{-b}{2a}$.

$$x = \frac{-18}{2 \cdot (-2)} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Je splněna podmínka $4{,}5 \in (0; 9)$, stačí tedy dopočítat hodnotu y.

$$y = 6 - \frac{2x}{3} = 6 - \frac{2 \cdot 4{,}5}{3} = 3$$

Výsledkem je, že optimální rozměry jednoho výběhu jsou $x = 4{,}5$ m a $y = 3$ m.

Obdobně bychom mohli z původní rovnosti $36 = 4x + 6y$ vyjádřit x místo y, nebo zavést substituci $a = 3y$. V obou případech by následný postup zůstal stejný jako ve vzorovém řešení, pouze bychom pracovali s jinými hodnotami.

Způsob II:

Tento způsob řešení využívá vyšetření průběhu funkce k určení extrémních hodnot. Začátek postupu je stejný jako v předchozím způsobu řešení.

Ze vztahu $36 = 4x + 6y$ vyjádříme y.

$$y = 6 - \frac{2x}{3}$$

Z podmínek úlohy určíme možné hodnoty x. Platí $x > 0$ a zároveň $y = 6 - \frac{2x}{3} > 0$, tedy $x \in (0; 9)$.

Dosazením do vzorce pro výpočet obsahu obdélníku $S = x \cdot 3y$ dostaneme kvadratickou funkci.

$$S(x) = -2x^2 + 18x$$

Nyní provedeme vyšetření průběhu této funkce, abychom určili lokální extrémy a intervaly monotónnosti.

První derivace položíme rovno nule a získáme hodnotu lokálního extrému.

$$S'(x) = 0$$

$$-4x + 18 = 0$$

$$x = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Zároveň platí:

pokud $y' < 0$, je funkce klesající,

pokud $y' > 0$, je funkce rostoucí.

V tomto případě platí:

$$S'(x) < 0 \text{ pro } x \in (4{,}5; 9),$$

$$S'(x) > 0 \text{ pro } x \in (0; 4{,}5).$$

Funkce $S(x)$ je tedy rostoucí v intervalu $(0; 4{,}5)$ a klesající v intervalu $(4{,}5; 9)$. Je tedy zřejmé, že lokální extrém funkce $x = 4{,}5$ je její maximum, tedy nejvyšší možná hodnota.

Dosazením získáme hodnotu y.

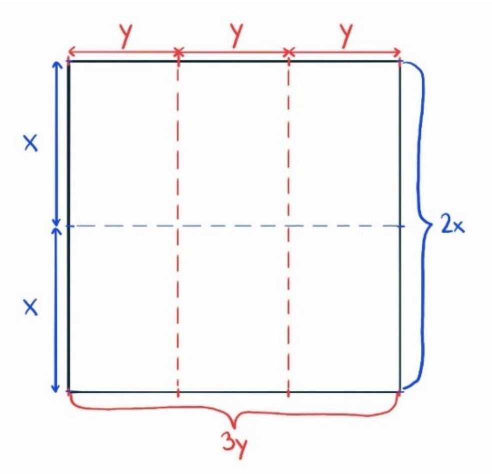
$$y = 6 - \frac{2x}{3} = 6 - \frac{2 \cdot 4{,}5}{3} = 3$$

Optimální výsledek je $x = 4{,}5$ m a $y = 3$ m.

Způsob III:

Tento způsob řešení není autorský, ale vychází z návrhu vzorového řešení (CKE, 2024d).

Víme, že platí vztah $4x + 6y = 36$. Zkusme uvažovat jiný tvar, pro který bude platit stejná rovnost (viz *Obr. 38*).



Obr. 38: Přeskupení obrazce v úloze XI

Obvod tohoto nového útvaru je vyjádřen stejným vztahem jako celková délka pletiva v zadání úlohy. Hledáme tedy takové hodnoty x a y, pro které obsah obrazce $S = 2x \cdot 3y$

bude co největší. Z kapitoly *1.2.5 Vztah obvodu a obsahu* víme, že při stálém obvodu má největší možný obsah kruh. Opačným extrémem se stálým obvodem a minimálním možným obsahem je dlouhý úzký obdélník. Protože však potřebujeme „hranatý“ útvar, nejoptimálnější bude tvar čtverce.

Pro nový útvar tedy platí, že všechny jeho strany jsou stejně dlouhé.

$$2x = 3y$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme snadno dopočítat.

$$\begin{cases} 4x + 6y = 36 \\ 2x = 3y \end{cases}$$

Řešením získáme rozměry $x = 4{,}5$ m a $y = 3$ m.

Komentář k úloze

Tato úloha požaduje výpočet rozměrů v obdélníku, pokud známe součet všech jejich délek (délku pletiva), a chceme, aby měl obdélník největší možný obsah. Řešení této úlohy může být čistě geometrické, je však také možné na obsah obdélníku pohlížet jako na kvadratickou funkci.

První dva uvedené způsoby využívají právě tento pohled. Jestliže vyjádříme délku pletiva jako součet neznámých rozměrů, můžeme jeden tento rozměr vyjádřit v závislosti na druhém (bod 11). Po dosazení tohoto výrazu do vzorce pro výpočet obsahu obdélníku získáme vztah s jednou neznámou. Další kroky již s porozuměním míře přímo nesouvisí, řešení závisí spíše na práci s funkcemi a jejich grafy.

Úlohu však lze vyřešit také geometricky, pokud využijeme znalosti vztahu mezi obvodem a obsahem obdélníků (bod 12). Vyjádříme-li si délku pletiva jako součet rozměrů, můžeme původní obrazec přeskupit (bod 2) tak, aby tato délka byla rovna obvodu nového obrazce. V tomto bodě je třeba se odkázat na znalost extrémních případů obsahů obrazců se stálým obvodem. S využitím této znalosti a několika algebraických úprav (bod 11) pak můžeme dojít k požadovaným hodnotám.

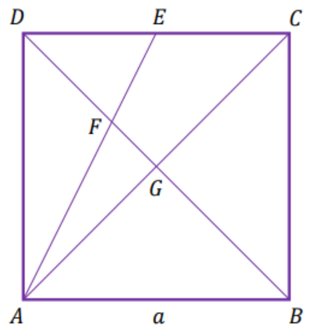
3.8 Úlohy z polské maturity rozšiřující úrovně 2024

3.8.1 Úloha č. 9

Jedná se o úlohu (*Obr. 39*) z didaktického testu maturitní zkoušky z matematiky rozšiřující úrovně konané v jarním termínu v roce 2024. Jde o otevřenou úlohu, která je zadaná výchozím textem a obrázkem. Součástí řešení má být celý postup.

Zadání 9. (0–4)

Je dán čtverec $ABCD$ se stranou délky a. Bod E je středem strany CD. Úhlopříčka BD rozděluje trojúhelník ACE na dva obrazce: AGF a $CEFG$ (viz obrázek).



Vypočítej obsahy obrazců AGF a $CEFG$. Zapiš své výpočty.

Obr. 39: Úloha k analýze XII (CKE, 2024c, s. 14)

Vzorové řešení

Způsob I:

Bod G je středem úsečky AC a bod E je středem úsečky CD. V trojúhelníku ACD jsou tedy středy dvou stran spojeny s protějšími vrcholy, což znamená, že bod F je těžištěm tohoto trojúhelníku. Z toho plynou vztahy:

$$|AF| : |FE| = 2 : 1,$$

$$|DF| : |FG| = 2 : 1.$$

Pro další výpočty budeme potřebovat délku FG, kterou ve vztahu k celé těžnici DG vyjádříme jako:

$$|FG| = \frac{1}{3}|DG|.$$

Nyní, když máme vyjádřenou délku FG, můžeme dopočítat obsah pravoúhlého trojúhelníku AGF.

$$S_{AGF} = \frac{|DG| \cdot \frac{1}{3} \cdot |DG|}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2a^2}{24} = \frac{a^2}{12}$$

Obsah čtyřúhelníku $CEFG$ určíme jako rozdíl obsahů trojúhelníku ACE a trojúhelníku AGF.

$$S_{CEFG} = S_{ACE} - S_{AGF}$$

$$S_{CEFG} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABCD} - S_{AGF}$$

$$S_{CEFG} = \frac{1}{4} \cdot a^2 - \frac{a^2}{12}$$

$$S_{CEFG} = \frac{2a^2}{12} = \frac{a^2}{6}$$

Výsledkem tedy je $S_{AGF} = \frac{a^2}{12}$ a $S_{CEFG} = \frac{a^2}{6}$.

Způsob II:

Pro výpočet obsahu pravoúhlého trojúhelníku AGF potřebujeme znát délky stran AG a FG. Protože se jedná o pravoúhlý trojúhelník, nabízí se využití Pythagorovy věty. Nejprve však musíme zjistit délku strany AF, kterou získáme pomocí vztahů v pravoúhlém trojúhelníku AED. K řešení kromě Pythagorovy věty využijeme také větu o osové souměrnosti úhlu v trojúhelníku.

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AED můžeme určit délku strany AE.

$$|AE|^2 = |AD|^2 + |DE|^2$$

$$|AE|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|AE| = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Pomocí věty o ose úhlu v trojúhelníku pak zjistíme délku strany AF.

$$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{|AD|}{|DE|}$$

$$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{a}{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{|AF|}{|AE| - |AF|} = 2$$

$$\frac{|AF|}{\frac{a\sqrt{5}}{2} - |AF|} = 2$$

$$|AF| = a\sqrt{5} - 2 \cdot |AF|$$

$$3 \cdot |AF| = a\sqrt{5}$$

$$|AF| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

Nyní, když známe délky stran AF i AG (polovina úhlopříčky), můžeme pomocí Pythagorovy věty vypočítat délku strany FG.

$$|FG|^2 = |AF|^2 - |AG|^2$$

$$|FG|^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$|FG|^2 = \frac{5a^2}{9} - \frac{2a^2}{4} = \frac{20a^2 - 18a^2}{36} = \frac{2a^2}{36}$$

$$|FG| = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

Díky zjištěným hodnotám zjistíme obsah trojúhelníku AGF.

$$S_{AGF} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{6}}{2} = \frac{2a^2}{24} = \frac{a^2}{12}$$

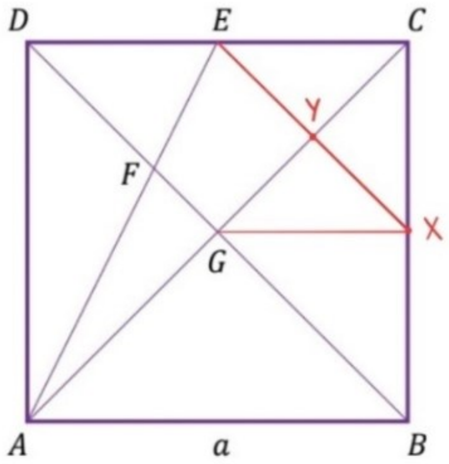
Nyní stačí dopočítat obsah čtyřúhelníku $CEFG$.

$$S_{CEFG} = S_{ACE} - S_{AGF} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{6}$$

Způsob III:

Tento způsob řešení není autorský, ale vychází z návrhu vzorového řešení (CKE, 2024e)

Pokud do náčrtu dokreslíme několik pomocných čar, získáme podobné trojúhelníky, jak je znázorněno na následujícím obrázku (*Obr. 40*).



Obr. 40: Náčrt k úloze XII

Bod X je středem strany BC a bod Y je středem strany GC. Můžeme vidět, že trojúhelníky AGF a AYE jsou podobné, protože mají shodné úhly. Z poměru délek stran AG a AY můžeme určit koeficient podobnosti.

$$k = \frac{|AG|}{|AY|} = \frac{\frac{1}{2}|AC|}{\frac{3}{4}|AC|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Z tvrzení o plochách podobných obrazců víme, že poměr obsahů podobných útvarů je roven druhé mocnině koeficientu podobnosti. Obsah trojúhelníku AGF tedy lze vyjádřit pomocí obsahu trojúhelníku AYE, který můžeme díky známým hodnotám vyjádřit. Délka strany AY je $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$, délku strany EY zjistíme z pravoúhlého trojúhelníku EPC.

$$|EP|^2 = |PC|^2 + |CE|^2$$

$$|EP|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$$

$$|EP| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Protože EY je polovinou strany EP, do výpočtu obsahu dosadíme hodnotu $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$$S_{AGF} = k^2 \cdot S_{AYE} = k^2 \cdot \frac{|AY| \cdot |EY|}{2} = k^2 \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot |AC| \cdot |EY|}{2}$$

$$S_{AGF} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{6a^2}{32} = \frac{a^2}{12}$$

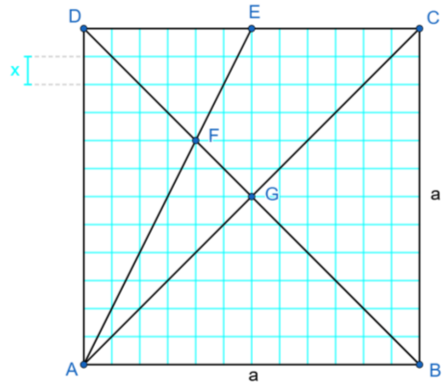
Nakonec dopočítáme obsah čtyřúhelníku $CEFG$.

$$S_{CEFG} = S_{ACE} - S_{AGF} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{6}$$

Způsob IV:

Tento způsob řešení není autorský, ale vychází z návrhu vzorového řešení (CKE, 2024e)

Celý obrazec lze zasadit do čtvercové sítě (viz *Obr. 41*). Vzhledem k tomu, že jednotlivé body obrazce leží v polovině, třetině nebo čtvrtině strany čtverce, je vhodné zvolit mřížku s velikostí čtverce x, pro kterou platí: $x = \frac{1}{12}a$.



Obr. 41: Zasazení obrazce do mřížky

Díky této mřížce můžeme snadno určit obsahy některých trojúhelníků, které následně využijeme k dopočítání požadovaných obsahů.

$$S_{ABF} = \frac{12x \cdot 8x}{2} = 48x^2$$

$$S_{ABG} = \frac{12x \cdot 6x}{2} = 36x^2$$

Obsah trojúhelníku AGF pak spočítáme jako rozdíl těchto dvou obsahů.

$$S_{AGF} = S_{ABF} - S_{ABG}$$

$$S_{AGF} = 48x^2 - 36x^2 = 12x^2 = 12 \cdot \left(\frac{a}{12}\right)^2 = \frac{a^2}{12}$$

Podobně dopočítáme obsah čtyřúhelníku $CEFG$ jako rozdíl obsahů trojúhelníků CDG a DFE, jejichž obsahy lze opět snadno zjistit z čtvercové sítě.

$$S_{CDG} = \frac{12x \cdot 6x}{2} = 36x^2$$

$$S_{DFE} = \frac{6x \cdot 4x}{2} = 12x^2$$

Dopočítáme obsah čtyřúhelníku $CEFG$.

$$S_{CEFG} = S_{CDG} - S_{DFE}$$

$$S_{CEFG} = 36x^2 - 12x^2 = 24x^2 = 24 \cdot \left(\frac{a}{12}\right)^2 = \frac{a^2}{6}$$

Komentář k úloze

Je důležité zmínit, že úlohu lze vyřešit více způsoby než pouze čtyřmi uvedenými. Například ze způsobu IV by bylo možné odvodit řešení, při kterém se obrazec zasadí do kartézské soustavy souřadnic s body $A = [0, 0]$, $B = [a, 0]$, $C = [a, a]$ a $D = [0, a]$.

Ve všech způsobech řešení je však klíčové porozumění vztahům v obrazci. Vzhledem k tomu, že jsou v něm zakresleny úhlopříčky, je vhodné znát jejich vlastnosti (bod 14.b). V útvaru je navíc znázorněno několik trojúhelníků, je tedy potřeba porozumět i jejich vlastnostem a vztahům. První způsob využívá vlastnosti těžnic, druhý pracuje s Pythagorovou větou a tvrzením o osové souměrnosti úhlu. Obecně lze říci, že oba tyto postupy vycházejí z hledání vhodných trojúhelníků v obrazci a využití jejich vlastností k vyřešení (bod 14.a).

Obsah požadovaného trojúhelníku se pak zjistí poměrně intuitivně, protože se jedná o pravoúhlý trojúhelník. Naopak určení obsahu čtyřúhelníku vyžaduje znalost vlastnosti obsahu (*Obsah libovolného geometrického obrazce složeného z několika nepřekrývajících se geometrických obrazců, se rovná součtu obsahů těchto obrazců.*). V tomto případě se tedy požadovaný obsah určí jako rozdíl obsahů trojúhelníků (bod 8).

Třetí uvedený způsob řešení je založen na práci s podobnými trojúhelníky (bod 15). Do obrazce jsou doplněny úsečky tak, aby bylo možné některé údaje vyjádřit v závislosti na jiných. Platí tak vztahy mezi podobnými délkami i mezi podobnými obsahy.

Čtvrtý způsob řešení zasazuje obrazec do čtvercové mřížky. Požadované obsahy se pak zjistí dopočítáním těchto čtverečků. V tomto případě lze mluvit o zvolení vhodné jednotky (čtvereček jako jedna dvanáctina strany čtverce) a strukturaci prostoru pomocí této jednotky (body 3 a 7).

Řešení této úlohy tedy vyžaduje nalezení a správné pochopení vztahů v obrazci. Jelikož je možné v obrazci nalézt (či doplnit) více různých vztahů, je klíčové zvolit pro daný postup právě ty vhodné.

3.9 Porovnání českých a polských úloh

Analýza vybraných úloh z české a polské maturity odhalila několik rozdílů v přístupu k testování znalostí míry v geometrii. Tyto rozdíly lze pozorovat nejen ve způsobu zadání, ale i v metodách řešení a v jejich zasazení do reálných situací.

Jedním z výrazných rozdílů je způsob, jakým jsou úlohy prezentovány. Polské úlohy často pracují pouze s čísly bez explicitního uvedení jednotek, zatímco české úlohy jednotky většinou obsahují. Oba přístupy mohou mít své přínosy. Zatímco vypuštění jednotek může klást vyšší nároky na práci s algebraickými výrazy a vyjádření hodnot v závislosti na jiných, jejich využití může naopak žákům usnadnit orientaci v zadání. V analýze je tento přístup patrný častější prací s přesnými číselnými hodnotami (bod 10) v českých úlohách než v těch polských, ve kterých se více pracuje s algebraickými reprezentacemi jednotlivých údajů.

Dalším zajímavým aspektem je porovnání didaktický testů s jejich vzdělávacími programy. Z tohoto hlediska souladu s kurikulárními dokumenty – českým Rámcovým vzdělávacím programem (RVP) a polskou Podstawa programowa – lze říci, že analyzované úlohy odpovídají požadavkům obou systémů. Mezi očekávanými výstupy RVP týkající se míry v geometrii lze najít:

- *používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary,*
- *využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému,*
- *v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly,*
- *řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí.* (MŠMT, 2021)

Právě druhý a třetí výstup odpovídají řešením vybraných českých úloh poměrně přesně. Využití vhodného náčrtu je často při řešení úloh nezbytné, správné rozklíčování a použití vzorců je pak často vhodným řešením (nalezení vztahů v obrazcích, bod 14, je klíčové ve více než polovině českých úloh). Naopak čtvrtý výstup, týkající se praktických aplikací, byl přítomen ve všech testech jen minimálně. Až na slovní úlohu s lesní školkou (úloha k analýze V – *Obr. 25*) jsou všechny české úlohy formulovány čistě geometricky bez propojení s problémy motivovanými praxí.

Podstawa programowa, která je ve srovnání s RVP koncipována stručněji a obecněji, staví výuku matematiky na třech základních pilířích: *rozvoj matematického uvažování, výpočetní dovednosti a znalost vlastností matematických objektů*. (Ministerstwo Edukacji Narodnowej, 2018)

Matematické uvažování je schopnost najít řešení daného problému. Při dobrém vzdělání rozvíjí schopnost konstruktivního myšlení a odměňuje nekonvenční a kreativní chování. Dobré zvládnutí dovedností matematického uvažování usnadňuje odlišení pravdy od lži v každodenním životě. (Ministerstwo Edukacji Narodnowej, 2018)

Z této perspektivy lze říci, že polské úlohy odpovídají požadavkům k inovativnímu řešení. Žáci jsou vedeni k objevování souvislostí mezi matematickými objekty a mají možnost volit různé originální způsoby řešení. Stejně jako český RVP i Podstawa programowa podporuje praktické využití matematiky, avšak v analyzovaných testech se tento aspekt výrazněji neprojevuje. Výjimkou je pouze jedna optimalizační úloha (úloha k analýze XI – *Obr. 37*), zatímco ostatní jsou čistě geometrické.

Celkově lze říci, že české a polské úlohy skutečně odpovídají požadavkům svých vzdělávacích programů (RVP a Podstawa programowa). Zatímco české RVP klade důraz na využití vhodného náčrtku, pochopení vztahů a využití vzorců, což reflektují i vybrané úlohy, Podstawa programowa podporuje kreativní přístupy k řešení, což se v polských úlohách projevuje větší variabilitou řešení.

Závěr

Hlavním cílem této práce bylo zanalyzovat a porovnat české a polské úlohy týkající se míry v geometrii v kontextu konceptuálního porozumění. Analýza vybraných úloh z maturitních testů se proto opírala o teoretický rámec konceptuálního pochopení míry, který byl rozpracován v první části této práce.

V úvodních kapitolách byly představeny klíčové aspekty konceptuálního porozumění míře v geometrii. Jsou vysvětleny pojmy jako konzervace míry, iterace vhodné jednotky, strukturace prostoru nebo multiplikativní vztahy mezi rozměry, které jsou základními pilíři konceptuálního porozumění míře v geometrii. Tyto koncepty jsou zásadní pro hlubší porozumění obvodu a obsahu a mohou usnadnit řešení úloh bez nutnosti mechanického memorování vzorců.

Dále byly stručně shrnuty charakteristiky českého a polského školského systému a maturitních zkoušek v těchto zemích, což poskytlo kontext pro následnou analýzu úloh. Druhá část práce se tedy věnovala rozboru vybraných úloh z didaktických testů základní i rozšiřující úrovně z let 2023 a 2024. Každá úloha byla doplněna vzorovým řešením a komentářem, který celou úlohu zhodnotil.

Analýza ukázala, že všechny úlohy podporují konceptuální porozumění míře v geometrii jinak, přičemž je znát i drobný rozdíl mezi českými a polskými testy. Zatímco české úlohy kladou důraz na využití vhodného náčrtku a z něj vyčtení správných vztahů a určení vzorců, polské úlohy se kromě algebraických postupů zaměřují na nalezení zajímavých vztahů a vlastností k vyřešení. Tato zjištění odpovídají také požadavkům českého RVP a polské Podstawa programowa, jejichž požadované výstupy do velké míry odpovídají stylu testových úloh. Jediným výstupem, který nemůže být považován za splněný ani v Česku, ani v Polsku, je zařazení úloh do praktického života.

Celkově lze říci, že obě maturity reflektují specifika svých vzdělávacích systémů. Česká maturita vede studenty k řešení úloh týkajících se míry pomocí správného pochopení podstaty úlohy, zatímco polská klade větší důraz na různé přístupy k řešení.

Seznam použitých informačních zdrojů

Bartsch, H. (1983). *Matematické vzorce*. SNTL.

Blažková, R., Matoušková, K., & Vaňurová, M. (2013). *Matematika pro 4. ročník základních škol, 3. díl*. Alter.

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M., & Staudková H. (2017). *Matematika pro 3. ročník základních škol* (3. vydání). Alter.

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2023a). *Matematyka – Poziom podstawowy (MMAP-P0-100-2305). https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Arkusze_egzaminacyjne/2023/Matematyka/poziom_podstawowy/MMAP-P0-100-2305.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2023b). *Matematyka – Poziom rozszerzony (MMAP-R0-100-2305). https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Arkusze_egzaminacyjne/2023/Matematyka/poziom_rozszerzony/MMAP-R0-100-2305.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2023c). *Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki*. *https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/wybrane_wzory_matematyczne_EM2023.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2023d). *Zasady oceniania rozwiązań zadań - Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym*. *https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Arkusze_egzaminacyjne/2023/Matematyka/poziom_rozszerzony/MMAP-R0-100-2305-zasady.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2024a). *INFORMATOR o egzaminie maturalnym z matematyki jako przedmiotu obowiązkowego (poziom podstawowy) od roku szkolnego 2024/2025. https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Informatory/2024/Informator_EM2024_matematyka_pp.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2024b). *Matematyka – Poziom podstawowy (MMAP-P0-100-2405). https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Arkusze_egzaminacyjne/2024/Matematyka/poziom_podstawowy/MMAP-P0-100-A-2405-arkusz.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2024c). *Matematyka – Poziom rozszerzony (MMAP-R0-100-2405). https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Arkusze_egzaminacyjne/2024/Matematyka/poziom_rozszerzony/MMAP-R0-100-A-2405-arkusz.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2024d). *Zasady oceniania rozwiązań zadań – Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym. https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Arkusze_egzaminacyjne/2024/Matematyka/poziom_podstawowy/MMAP-P0-100-2405-zasady.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2024e). *Zasady oceniania rozwiązań zadań – Egzamin maturalny z matematyki na poziomie rozszerzonym. https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2023/Arkusze_egzaminacyjne/2024/Matematyka/poziom_rozszerzony/MMAP-R0-100-2405-zasady.pdf*

Centralna Komisja Egzaminacyjna (CKE). (2025). *Egzamin maturalny w Formule 2023 – O egzaminie. https://cke.gov.pl/egzamin-maturalny/egzamin-maturalny-w-formule-2023/o-egzaminie/#*

CERMAT. (2023a). *Didaktický test – Matematika (MAMZD23C0T01). https://maturita.cermat.cz/files/files/testy-zadani-klice/MA_jaro_2023_sada_A_DT_new.pdf*

CERMAT. (2023b). *Didaktický test – Matematika rozšiřující (MXMVD23C0T01). https://maturita.cermat.cz/files/files/MX_jaro_2023_sada_A_DT.pdf*

CERMAT. (2024a). *Didaktický test – Matematika (MAMZD24C0T01). https://maturita.cermat.cz/files/files/MA_MZ2024J_TS.pdf*

CERMAT. (2024b). *Didaktický test – Matematika rozšiřující (MXMZD24C0T01). https://maturita.cermat.cz/files/files/MAR_MZ2024J_DT.pdf*

Hiebert, J., & Lefevre, P. (2013). *Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Conceptual and procedural knowledge* (pp. 1-27). Routledge.

Janda, D., Vondrová, N., & Tůmová, V. (2020). *Míra v geometrii pro učitele matematiky*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

Jedličková, M., Krupka, P., & Nechvátalová, J. (2013). *Matematika: Základy geometrie – Učebnice vytvořená v souladu s RVP ZV*. Nová škola.

Jedličková, M., Krupka, P., & Nechvátalová, J. (2024). *Matematika: Rovinné útvary – Pracovní sešit vytvořený v souladu s RVP ZV* (2. vydání). Nová škola.

Ježková, V., & kol. (1996). Vzdělávací systémy v zahraničí. In J. Novotná-Dědečková, *Polsko* (s. 49-56). Karolinum.

Kamii, C., & Kysh, J. (2006). The difficulty of "length × width": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 105–115.

Kindl, K. (1975). *Matematika: Přehled učiva základní školy* (2. vydání). SPN.

Kospentaris, G., Spyrou, P., & Lappas, D. (2011). Exploring student's strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 105-127.

Kouřim, J., Hejl, J., Kučerová, J., Kuřina, F., & Šedivý, O. (1985). Základy elementární geometrie pro učitelství 1. stupně ZŠ. In F. Kuřina, *Míra geometrických útvarů* (s. 72-95). SPN.

Ma, L. (2021). *Znát a učit elementární matematiku: jak učitelé v Číně a ve Spojených státech rozumí základní matematice: jubilejní vydání*. Academia.

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). (2021). *RVP G – Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. *https://edu.gov.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/*

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (MŠMT). (2023). *RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. https://edu.gov.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/*

Ministerstwo Edukacji Narodowej. (2016). *Reforma edukacji. https://www.gov.pl/web/edukacja/reforma-edukacji*

Ministerstwo Edukacji Narodnowej. (2018). *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla czteroletniego liceum ogólnokształcącego i pięcioletniego technikum*. *https://podstawaprogramowa.pl/Liceum-technikum*

Molnár, J., Kopecký, M., Lišková, H., Novák, B., & Slouka, J. (1998). *Matematika 6, pracovní sešit, I. část*. Prodos.

Müllerová, J., Rádl, J., Macháček, V., & Brant, J. (1998). *Matematika pro 6. ročník základní školy: Geometrie*. Kvarta.

Polák, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky* (10. vydání). Prometheus.

Rosecká, Z. (2000). *Geometrie 7: pracovní sešit: čtyřúhelníky, hranoly*. Nová škola.

Rosecká, Z., & kolektiv učitelů při nakladatelství Nová škola. (2001). *Geometrie: pracovní sešit k učebnici Geometrie 8*. Nová škola.

Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládání kritických míst v matematice*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Karolinum.

Vyjádření k využití nástrojů umělé inteligence

Při psaní této bakalářské práce jsem využila nástroje umělé inteligence, konkrétně Chat GPT. Tento nástroj jsem použila především k překladu textů z polštiny do češtiny a k jazykovým úpravám, zejména ke kontrole pravopisu a stylistickému zpřesnění některých formulací.

Seznam obrázků