

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Diferenciální počet podle l'Hospitala
Differential calculus according to l'Hospital

Silvie Skalická

Vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., Dr.

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Diferenciální počet podle l'Hospitala potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Prohlašuji, že jsem při její tvorbě nepoužila nástrojů umělé inteligence jiným způsobem, než je uvedeno ve vyjádření, které je součástí textu práce. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 13. 4. 2025

ABSTRAKT

V bakalářské práci se budu zabývat markýzovým studiem křivek a počátky diferenciálního počtu, které sepsal do spisu pojmenovaného *Analýza nekonečně malých*. Cílem je porovnat, jak se liší tehdejší postupy od těch současných na základě odlišných definic pojmů a odlišných přístupů. Způsob, jakým budu metody hodnotit, je řešení stejných či obdobných úloh oběma postupy a následné porovnání získaných výsledků. V první kapitole uvádím stručný přehled historického vývoje studia křivek, základní údaje o markýzově životě a aktuální definice pojmů křivka a funkce. V druhé kapitole vysvětluji dobové pojmy a značení použité v *Analýze nekonečně malých*. V kapitole třetí se zabývám prvním diferenciálem, hledáním tečen a otázkou *de maximis & minimis*. Čtvrtá kapitola obsahuje rozbor druhého diferenciálu a hledání inflexních bodů. V páté kapitole používám l'Hospitalovo pravidlo a v kapitole šesté uvádím celkové porovnání l'Hospitalova přístupu s moderními postupy diferenciálního počtu. Výsledným pozorováním jsem zjistila, že l'Hospitalovy metody nepřinášejí ucelené informace o křivkách, jelikož nebral v potaz záporné hodnoty proměnných a nepracoval s kolmým souřadnicovým systémem. Zároveň všechny jeho definice vycházejí z grafického znázornění řešených problémů. Práce je určena pro vysokoškolské studenty a učitele středních škol, kterým pomůže pochopit důležitost moderních rigorózních definic. Také v práci vyzdvihuji didaktický přínos grafického znázornění řešených problémů.

KLÍČOVÁ SLOVA

křivka, tečna, derivace, porovnání pojmů, porovnání symboliky

ABSTRACT

In the bachelor's thesis, I explore the Marquis's study of curves and the beginnings of differential calculus, which he compiled in the treatise *Analyse des infiniment petits*. The aim is to compare how the methods of the time differ from modern approaches, based on different definitions of concepts and different methodologies. I evaluate the methods by solving the same or similar problems using both historical and modern approaches and comparing the results. The first chapter provides a brief overview of the historical development of curve studies, basic biographical information about the Marquis, and modern definitions of the terms "curve" and "function." The second chapter explains the period terminology and notation used in *Analyse des infiniment petits*. In the third chapter, I focus on the first differential, the search for tangents, and the topic *de maximis & minimis*. The fourth chapter contains an analysis of the second differential and the search for inflection points. The fifth chapter covers l'Hospital's rule, and the sixth chapter offers a comprehensive comparison of l'Hospital's approach with modern methods of differential calculus. My findings show that l'Hospital's methods do not provide a complete understanding of curves, as he did not consider negative values of variables and did not use a Cartesian coordinate system. Moreover, all of his definitions are based on graphical representations of the problems being solved. This thesis is intended for university students and secondary school teachers, as it aims to help them understand the importance of modern rigorous definitions. At the same time, it highlights the didactic value of graphical representations of mathematical problems.

KEYWORDS

curve, tangent, derivation, comparison of concepts, comparison of notation

Obsah

Úvod	6
1 Historický kontext, křivky versus funkce.....	8
1.1 Vývoj křivek a poznatků o nich až do začátku 18. století	8
1.2 Markýz l'Hospital.....	11
1.3 Křivka versus funkce	12
2 Vysvětlení symboliky	13
2.1 Ordináta a abscisa.....	13
2.2 Na druhou	14
2.3 Poměr délek	14
2.4 Horní příčka, vinculum.....	15
2.5 Přirozenost	15
3 Diferenciál, tečna, extrémní ordináty	16
3.1 Diferenciál versus derivace	16
3.1.1 Řešené úlohy	18
3.1.2 Porovnání.....	19
3.2 Tečna ke křivce versus tečna k funkci.....	19
3.2.1 Řešené úlohy	20
3.2.2 Porovnání.....	24
3.3 Největší a nejmenší ordináty versus extrémy	25
3.3.1 Řešené úlohy	27
3.3.2 Porovnání.....	29
4 Druhý diferenciál, inflexní body	30
4.1 Druhý diferenciál versus druhá derivace	30
4.1.1 Řešené úlohy	31

4.1.2	Porovnání.....	32
4.2	Křivky vyduté a vypouklé, body přehybu a vratu versus konvexní a konkávní funkce, body inflexe	32
4.2.1	Řešené úlohy	35
4.2.2	Porovnání.....	36
5	L'Hospitalovo pravidlo	37
5.1.1	Řešené úlohy	39
5.1.2	Porovnání.....	40
6	Celková komparace	41
	Závěr.....	42
	Seznam použitých informačních zdrojů	43

Úvod

Ve studiu matematiky se klade důraz na různé způsoby řešení problémů a následnou diskusi, zda jsou tyto způsoby ekvivalentní. Ke stejným diskusím docházelo současně s historickým vývojem matematiky. Pro svoji bakalářskou práci se zaměřím na oblast diferenciálního počtu a poznatky markýze l'Hospitala.

Tato bakalářská práce je primárně určena pro studenty vysokých škol se zaměřením na matematiku a historii matematiky. Další skupinou, která může čerpat z této práce, jsou učitelé středních škol se zájmem o didaktiku matematiky. Budou diskutována témata obsahující odbornou terminologii, všechna budou podrobně definována a ukázána na vzorově řešených úlohách. Na závěr porovnáím l'Hospitalův přístup k diferenciálnímu počtu s aktuálními postupy.

Cílem práce je seznámit čtenáře s rozdílnými definicemi v kontextu diferenciálního počtu a porovnat definice a tvrzení, jak je zavedl Guillaume-Francois-Antoine de l'Hospital ve své práci *Analýza nekonečně malých*, s moderní výstavbou matematické analýzy reálných funkcí jedné reálné proměnné podle Richarda Couranta, Vojtěcha Jarníka a Jiřího Veselého. Dále se zaměřím na řešení stejných problémů oběma pohledy a porovnáím výsledky. Konkrétní pojmy a témata, kterými se budu zabývat, jsou diferenciály a derivace, hledání tečny v daném bodě křivky, otázka největších a nejmenších ordinát neboli extrémů, inflexní body a konvexnost a konkávnost křivek. L'Hospitalově pravidlu je věnována vlastní kapitola. L'Hospital ve své práci ještě zavádí řešení problémů evolut, kaustik a bodů obalových čar. Tato témata zde nebudou diskutována, jelikož souvisí s tématem diferenciálních rovnic a optiky a obtížností přesahují rámec úvodních kurzů matematické analýzy na dnešních vysokých školách, tudíž by pro cílovou skupinu čtenářů neměla zmíněná témata kýžený přínos.

Primárním zdrojem je monografie *Markýz de l'Hospital a Analýza nekonečně malých* od Jana Makovského. Jedná se o český překlad původního francouzského spisu z roku 1696 doplněného o komentáře vycházející z ruského překladu z roku 1935, konkrétně překlad od N. V. Leviho s komentářem Adolfa Juškeviče. Makovský ve své knize na prvních 116 stránkách popisuje markýzovu akademickou dráhu v kontextu dalších soudobých matematiků. Zbytek práce obsahuje překlad l'Hospitalovy *Analýzy nekonečně malých*

za účelem pochopení křivých čar doplněný o komentář Makovského. Z důvodu odlišení autorů budu v citacích vztahujících se ke zmíněné monografii rozlišovat, zda se jedná o markýzovu část nebo o Makovského komentáře.

V první kapitole stručně shrnu historický vývoj a dosavadní znalosti o křivkách do začátku 18. století. Zároveň uvedu základní biografické údaje o l'Hospitalovi. V rámci druhé kapitoly vysvětlím L'Hospitalovo značení a symboliku. V kapitole třetí se zaměřím na diferenciály, určování tečen a hledání extrémů, což předvedu na několika úlohách. Téma druhého diferenciálu a inflexních bodů rozpracuji a předvedu v kapitole čtvrté. Nejslavnějšímu poznatku spojeným s l'Hospitalovým jménem, tedy l'Hospitalově pravidlu, se budu věnovat v páté kapitole. V poslední, šesté kapitole porovnáám celkový přístup l'Hospitala s aktuálními poznatky o diferenciálním počtu.

Křivkami, vlastnostmi funkcí a dalšími tématy diferenciálního počtu se v minulosti zabývaly například tyto závěrečné práce: Koudela (2012) *O pojetí křivky*, Labíková (2022) *Matematické křivky ve fyzikálních problémech*, Mixa (2013) *Základní pojmy matematické analýzy u Newtona, Berkleyho a jejich následovníků*, Procházková (2020) *Konvexní a konkávní funkce*. V žádné z nich ale nebyl probírán L'Hospitalův přínos v porovnání s moderními postupy.

1 Historický kontext, křivky versus funkce

V první kapitole stručně popíšu historii a vývoj významných či přelomových poznatků o křivkách až do l'Hospitalovy doby a poté uvedu základní údaje o markýzově životě a práci. V poslední řadě uvedu současnou definici křivky a funkce.

1.1 Vývoj křivek a poznatků o nich až do začátku 18. století

Následující sekce vychází ze souhrnné práce *Historický vývoj pojmu křivka* Lenky Lomtatidze (2007), konkrétně z prvních čtyř kapitol. Cílem je uvést výčet historie křivek se zaměřením na spisy.

Křivka se v nějaké formě objevuje v historii už od počátku lidstva. Tyto prvopočátky jsou ryze nematematické a mají spíše umělecký či náboženský význam, jako je například Věstonická Venuše a další podobné oblé sošky z doby zhruba 25 000 let před naším letopočtem (Lomtatidze, 2007, s. 17–18).

Nejjednoduššími křivkami, které lze identifikovat v umění západní Evropy zhruba od čtvrtého tisíciletí př. Kr., jsou úsečky a kružnice. Právě těm byl často přisuzován až magický význam a měly symbolizovat Slunce a Měsíc. Do kruhovitěho tvaru byly tak stavěny kamenné struktury sloužící jako sluneční nebo měsíční kalendář. Nejznámějším megalitem je anglický Stonehenge, dále se jedná o zdobené hrobky či jednotlivé menhiry (Lomtatidze, 2007, s. 18–19).

Už v Mezopotámii byli tamní stavitelé schopni výpočtů na základě geometrických znalostí. Tato dovednost byla zásadněji rozvinuta v Egyptě, kde pravděpodobně byli nuceni každoročně vytyčovat pozemky v zaplavovaných oblastech u Nilu. Co se týče stavby pyramid a chrámů, stavitelé konstruovali rytím půdorysy staveb na vydlážděná prostranství. V Luxoru se tak dochoval tvar oválu (Lomtatidze, 2007, s. 20–21).

Obdobným způsobem přistupovali ke křivkám v hinduistických spisech *Šulvasútra* neboli *Pravidlo provazce*. Kromě architektonického významu měly křivky význam i náboženský, například mandaly, což jsou zdobené kružnice v písku. Poslední známou křivkou tohoto období je spirála, která měla znázorňovat „pohyb či víření“ (Lomtatidze, 2007, s. 23). V Číně zase vznikl spis *Ťious čang suan šu* neboli *Matematika v devíti knihách*. Oba zmíněné spisy

jsou z období prvního tisíciletí př. Kr. a byly v nich popsány pouze kružnice a elipsa (Lomtatidze, 2007, s. 22–23, 70–71).

Zásadní rozvoj doznalo studium křivek v období antického Řecka a Říma. Už v mykénské civilizaci byli schopni vytvářet keramické nádoby bez hrnčířského kruhu zdobené kroužky a spirálami. Pravděpodobně z Kréty pocházela znalost konstrukce pravidelného pětiúhelníku a s ní spojeného zlatého řezu. V období známém jako helénistické byl kladen důraz na studium geometrie a pěstování matematiky jako vědního oboru. Mnoho poznatků bylo sepsáno do prvních učebnic. Zásadní spisy byly Apollóniový (260–180 př. Kr.) *Kuželosečky* a Eukleidovy (352–265 př. Kr.) *Základy*. Právě zde se objevuje první definice křivky, tedy „čára pak délka bez šířky“ (Servít, 1907, s.1). Díky dalším definicím je zřejmé, že tak Eukleides opravdu definoval křivku, jelikož „přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně“ (Servít, 1907, s. 1). Kružnice byla definována jako obvod kruhu. Dalšími významnými matematiky, kteří se podíleli na rozvoji řecké geometrie, byli Vitruvius (asi 90–20 př. Kr.) a jeho *Deset knih o architektuře* a Klaudios Ptolemaios (85–168 po Kr.) se spisy *Almagest*, *Náčrtek*, *Planisférium* a *Geografie*. Zde lze najít náznak užití souřadnic. Zástupci stříbrného věku byli Proklos (cca 410–485) a Pappos (přibližně 290–350), jehož spis je dnes znám jako *Sbírka* (Lomtatidze, 2007, s. 29–36).

Geometrie v Řecku byla součástí filozofie. Proto v kontextu různých paradoxů a problémů geometrických vyvstávaly otázky i logické a byly hledány hranice matematiky. Známe tři problémy, jejichž nekonstruovatelnost byla plně dokázána až v 19. století: kvadratura kruhu, zdvojení krychle a trisekce úhlu. Řekové se snažili najít alespoň přibližná, eukleidovsky konstruovatelná, řešení. Tak byla objevena Hippiova trisektris nebo také kvadratrix. Dioklova kisoida z nedochovaného spisu *O zápalných zrcadlech* také měla význam mnoho století po svém objevení. K sestrojení Nikomedovy kochloidy byl vynalezen nový konstrukční stroj. Dnes používaný pojem konchoidy se vztahuje k „obecnější křivce“ (Lomtatidze, 2007, s. 54). V architektuře, například na ozdobu iónských sloupů, se používala spirála. Archimedes (287–212 př. Kr.) ji popsal ve spisu *O spirálách* a v dnešních polárních souřadnicích je definována jako $r = a \cdot t$, kde t je úhel opsaný průvodičem. Archimedes byl schopen určit plochu části parabolické výseče a metoda výpočtu připomíná dnešní určitý integrál. Okrajově byly známé i některé prostorové křivky, vycházející ze spirály nebo

kružnice, jako je například kónická spirála nebo šroubovice. Obecně se tedy křivky rozlišovaly na geometrické a mechanické podle sestrojitelnosti eukleidovskými konstrukcemi. Toto rozlišení přetrvalo až do 17. století (Lomtatidze, 2007, s. 37–66).

Většina antických spisů se dochovala do středověku díky arabským překladům a komentářům, například bratři Banú Músá (9. století) doplnili teoretickou část *Kuželoseček*. Omar Chajjám (1048–1131) se zabýval geometrickým řešením kubických rovnic (Lomtatidze, 2007, s. 72–78).

Ve 12. století v jižních státech Evropy vznikla gotika a geometrie se zde projevila zpočátku v architektuře. Typickým prvkem jsou lomené oblouky a křížové klenby, které se skládají ze dvou kružnicových či eliptických oblouků. Komplikovanější prvek, kterým byla zdobena okna, se nazývá kružba. Teoretickou geometrií se zabýval spis Leonarda Pisánského Fibonacciho (1170–1250) *Practica geometriae*. Nicole Oresme (1323–1382) se zabýval *proportio* neboli poměrem dvou veličin a dával ho do souvislosti se vztahem mezi délkami úseček. Podstatného rozvoje se křivky v období gotiky nedočkaly, převážně se překládaly starší spisy. V tomto směru zmiňují Federica Commandina (Lomtatidze, 2007, s. 86–93).

Za bohatší období z matematického hlediska lze považovat renesanci. Potřeba nových zobrazovacích metod přirozeně vyplynula z umění, kdy se začala používat lineární perspektiva. Teoretickými vlastnosti perspektivy těles bez systematického pojmenování se zabýval Albert Dürer (1471–1528) v práci *Příspěvek k měření s kružítkem a pravítkem v přímkách, rovinách a tělesech*. Daniel Barbaro (1513–1570) a Hans Lecker (1530–1585) vytvořili nákresy těles s povrchovou sítí. Z perspektivy vznikla projektivní geometrie, které se věnovali Francois d'Aiguillon (1566–1617) v *Šesti knihách o architektuře* a Girard Desargues (1591–1661) v *Konceptu návrhu dosahu události střetu kužele s rovinou*. Ten také zavedl souřadnice bodu v prostoru. Projektivní vlastnosti kuželoseček rozvinul Blaise Pascal (1623–1662) a vyslovil dnes známou Velkou Pascalovu větu o vepsaném šestiúhelníku (Lomtatidze, 2007, s. 95–99).

Všechny doposud zmíněné studie přispěly ke vzniku analytické geometrie, vědního oboru spojujícího algebru a geometrii. René Descartes (1596–1650) ještě nepoužíval ve svém klíčovém spisu *La Géométrie* souřadný systém, ale provedl klasifikaci křivek. Francois Viète (1540–1603) zdokonalil dosavadní zápis rovnic a na příklad mocniny neznámé veličiny

značil A , A quadratum, A cubus. Až posmrtně byl vydán spis Pierra de Fermata (1601–1665) *Úvod do teorie rovinných a prostorových míst* (Lomtatidze, 2007, s. 100–124). L'Hospital byl přímo ovlivněn bratry Bernoulliiovými. Jacob Bernoulli (1654–1705) využíval při studiu křivek polární souřadnice a objevil lemniskátu, což je speciální druh oválu Giovanniho Cassiniho (1625–1712). Mladší Johann Bernoulli (1667–1748) se pak věnoval fyzikální úloze o brachistochroně. Řešením podobných úloh se zabýval na stránkách časopisu *Acta eruditorum* Gottfried Leibniz (1646–1716) a další (Makovský, 2022, s. 22). O rozvoj diferenciálního počtu se zasadil Isaac Newton (1643–1727), který přednášel na univerzitě v Cambridge. Většina jeho objevů byla nejdříve šířena korespondenčně a až později oficiálně publikována. Klíčové spisy se jmenují *Matematické principy přírodních věd*, *Optika* a *Obecná aritmetika*. Místo dnešního pojmu derivace používal *fluxe* (Lomtatidze, 2007, s. 127–162).

1.2 Markýz l'Hospital

Guillaume-Francois-Antoine de l'Hospital se narodil roku 1661 do šlechtického rodu. Jeho urozený původ ho vedl k vojenské službě. Ve volném čase se věnoval studiu geometrie a již od mladého věku řešil komplikované úlohy, jako byl například Pascalův problém o cykloidě. Kvůli krátkozrakosti byl nucen z vojska odejít. Byl členem francouzského spolku Oratoř, který se věnoval matematice a fyzice. Později vstoupil do Královské akademie věd, jejíž členové společně debatovali nad nejrůznějšími problémy. Na základě soukromých hodin a korespondence s Johannem Bernoullim v letech 1691 a 1692 byl schopen sepsat *Analýzu nekonečně malých*, klíčové dílo počátků diferenciálního počtu. V dalším přínosu matematice a sepsání spisu o integrálním počtu mu roku 1704 zabránila mrtvice, na kterou zemřel ve věku 43 let. Díky jeho manželce, markýze Marii-Charlotte de l'Hospital, a dalším byl vydán *Analytický traktát o kuželosečkách a o jejich použití k řešení* roku 1707, což byl první systematický výklad analytické geometrie (Makovský, 2022, s. 16–35; Lomtatidze, 2007, s. 131).

1.3 Křivka versus funkce

Níže uvádím další definice křivky, které jsou srozumitelné i bez hluboké znalosti topologie.

Definice dle Camille Jordana (1838–1922): Rovinnou křivkou nazveme soubor bodů $X = [x, y]$ v rovině, jejichž souřadnice jsou dány rovnicemi

$$x = \phi(t), y = \psi(t),$$

kde ϕ, ψ jsou spojité funkce proměnné $t \in [0,1]$ (Lomtatidze, 2007, s. 200).

Definice dle Pavla Uryhsona (1898–1924): Křivkou rozumíme kontinuum dimenze 1 (Lomtatidze, 2007, s. 214). Kontinuum má vlastnosti souvislé a kompaktní množiny (Lomtatidze, 2007, s. 207). Velikost dimenze odpovídá tomu, že každou křivku lze zobrazit na přímkou či úsečku.

Dnes je uznávána topologická definice křivky, totiž že křivka je n -rozměrná varieta. Tento pohled na křivky vychází z Riemannových (1826–1866) poznatků o n -rozměrné geometrii.

Pro diferenciální počet je klíčový pojem funkce. Jarník (1974) ji zavedl následovně:

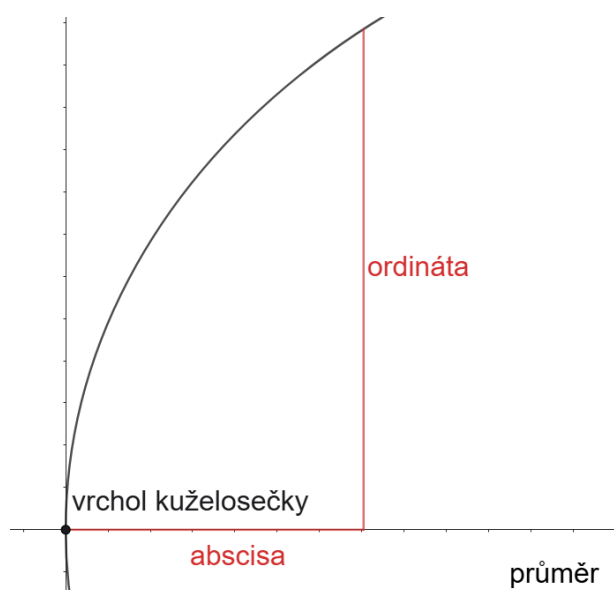
Budiž M nějaká množina reálných čísel. Jestliže každému číslu x množiny M je přiřazeno určité číslo y , říkáme, že y je funkcí x ; množinu M nazýváme oborem této funkce (s. 148).

2 Vysvětlení symboliky

V této kapitole vysvětlím užité dobové pojmy a značení, které se objevují v l'Hospitalově *Analýze nekonečně malých* a které se mohou jevit z dnešního pohledu jako nezvyklé nebo nesrozumitelné. Následující vysvětlení termínů a symbolů umožní pochopit hlubší myšlenky l'Hospitalova výkladu.

2.1 Ordináta a abscisa

Poprvé se výrazy ordináta a abscisa, v češtině pořadnice a úsečka, objevily v řeckém spisu o kuželosečkách od Apollónia z Pergy (260–180 př. n. l.), respektive v jeho latinském překladu od italského matematika Federica Commandina ze 16. století (Lomtatidze, 2007, s. 87). *Ordinatum applicatae* jsou rovnoběžné úsečky mezi křivkou a průměrem, abscisy jsou potom části průměru ohraničené vrcholem kuželosečky ležícím na průměru a příslušnou ordinátou (ukazuje obrázek 1). Význam pojmů se v průběhu času změnil a l'Hospital pracoval s termíny způsobem bližším souřadnému systému. Ve francouzském originálu *Analýzy nekonečně malých* používal pojmy *appliquée* pro ordinátu a *coupée*, v překladu do češtiny useknutá či úsečka, pro abscisu (Makovský, 2022, str. 356). Ačkoliv jsou pojmy čistě nemetrické a nevztažné, v základních úlohách, které budou řešeny ve třetí a čtvrté kapitole, s nimi budu pracovat podobně jako s úsečkami na osách x a y neboli hodnotami na ose x a funkčními hodnotami na ose y v kartézské vztažné soustavě.



Obrázek 1: ordináta a abscisa (vytvořeno v Geogebře)

2.2 Na druhou

Už v odvození „diferenciálu libovolné úplné nebo neúplné mocniny nějaké proměnné veličiny“ uvedl l’Hospital (2022, s. 130) geometrickou posloupnost $1, x, xx, x^3, x^4$ a dále. Absence horního indexu druhé mocniny vytrvala až do konce 18. století a využívali ji například matematici René Descartes (1596–1650), Leonard Euler (1707–1783) či Carl Gauss (1777–1855) – ten tuto zvláštnost vysvětloval stejným počtem znaků při tisku. Pro zajímavost Blaise Pascal (1623–1662) a Gottfried Leibniz (1646–1716) značili čtverec způsobem x^2 . (Makovský, 2022, s. 366)

Další možná nesrozumitelnost s ohledem na součinnové značení druhé mocniny se vyskytuje u značení druhých diferenciálů, jak podrobněji ukážu ve čtvrté kapitole. Druhá mocnina diferenciálu dy je zavedena jako dy^2 , třetí mocnina pak dy^3 . Geometrická posloupnost mocnin druhého diferenciálu jsou ddy, ddy^2, ddy^3 apod. (l’Hospital, 2022, s. 189).

2.3 Poměr délek

Pro vysvětlení z dnešního pohledu atypického zápisu poměru délek stran podobných trojúhelníků, pomocí kterého l’Hospital odvozoval například délku subtangenty, uvedu řešení úlohy přímé úměry a její zápis. Vozidlo ujede konstantní rychlostí za 30 minut jízdy dráhu 35 km. Pro výpočet času t jízdy 49 km sestavím následující poměr:

$$\frac{35 \text{ km}}{49 \text{ km}} = \frac{0,5 \text{ hod}}{t \text{ hod}}$$

Angličan William Oughtred zavedl ve svém spisu *Clavis mathematicae* v roce 1631 značení pomocí „:“ (Cajori, 1993, s. 168; Makovský, 2022, s. 367). Výše zmíněnou situaci by on a později i l’Hospital zapsali takto:

$$35 \text{ km} . 49 \text{ km} :: 0,5 \text{ hod} . t \text{ hod} = 0,7 \text{ hod}$$

Slovní interpretace by zněla: „35 kilometrů ku 49 kilometrům se má stejně jako půlhodina k času t , jež nabývá hodnoty sedm desetin hodiny“. Zlomková čára podílu je nahrazena tečkou, rovnost podílu je označena dvěma dvojtečkami (Cajori, 1993 s. 168, 195). Symbol rovnosti se vztahuje pouze k poslednímu členu, nikoliv k celému výrazu. Zobecnění údajů v podobě: $s_1 = 35 \text{ km}, s_2 = 49 \text{ km}, t_1 = 0,5 \text{ hod}, t_2 = t$ by poukázalo na další dobovou specialitu:

$$s_1(35 \text{ km}).s_2(49 \text{ km}) :: t_1(0,5 \text{ hod}).t_2 = t_1 \times \frac{s_2}{s_1}$$

Pokud je nutné z libovolného důvodu označit jednu veličinu nebo jednu úsečku různými způsoby, ekvivalentní označení se uvádí do závorky. V závěru je užito označení „ \times “ pro násobení, jež také používal Oughtred (Cajori, 1993, s. 197). Symbol není užíván konzistentně, ale často se vyskytuje v kombinaci s vinculem (Makovský, 2022, s. 367).

2.4 Horní příčka, vinculum

V dnešní matematice má horní příčka několik významů. V geometrii označuje přímku danou dvěma body, například \overline{AB} . V oblasti číselných oborů značí periodicitu desetinného rozvoje racionálních čísel, pro demonstraci $\frac{22}{7} = 3, \overline{142857}$. V kontextu komplexních čísel představuje operaci komplexního sdružování tímto způsobem: $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$. V rámci Booleovy algebry ji lze využívat pro negaci proměnné, ačkoliv je častější značení pomocí $\neg A = \bar{A}$. L'Hospital horní příčku neboli vinculum (ve francouzštině provázek) užíval pro uzávorkování členů ve výrazech po vzoru Bernoulliho a Franze Van Schootena, respektive podle značení z jeho souhrnného vydání Viětových prací z roku 1696. Nejedná se o závorkování v běžném smyslu, jelikož vinculum v l'Hospitalově *Analýze nekonečně malých* nemá vlastnost distributivity, tj.

$$-\overline{x - y} = -x - y \neq -(x - y) = -x + y$$

Descartes spojil symbol vincula se symbolem pro odmocninu $\sqrt{\quad}$ a v této podobě se stejným způsobem užívá i dnes (Cajori, 1993, s. 185, 208, 375; Makovský, 2022, s. 365)

2.5 Přirozenost

L'Hospital často používal spojení „přirozenost křivky“ neboli *natura* – tím je myšlen rovnicový či implicitně funkční předpis. Ten byl sestaven na základě fyzikálních vlastností křivky, například jak tomu bylo u brachistochrony¹. Obecně se jednalo o „odklonění se od geometrického tvaru ve prospěch symbolické formule“ (Makovský, 2022, s. 368).

¹Z řeckých slov *βραχύς* jako krátký, od toho vystupňované *βραχίστος* jako nejkratší a *χρόνος* jako čas. Křivka nejkratšího času. (Trkal, 1956, s. 346)

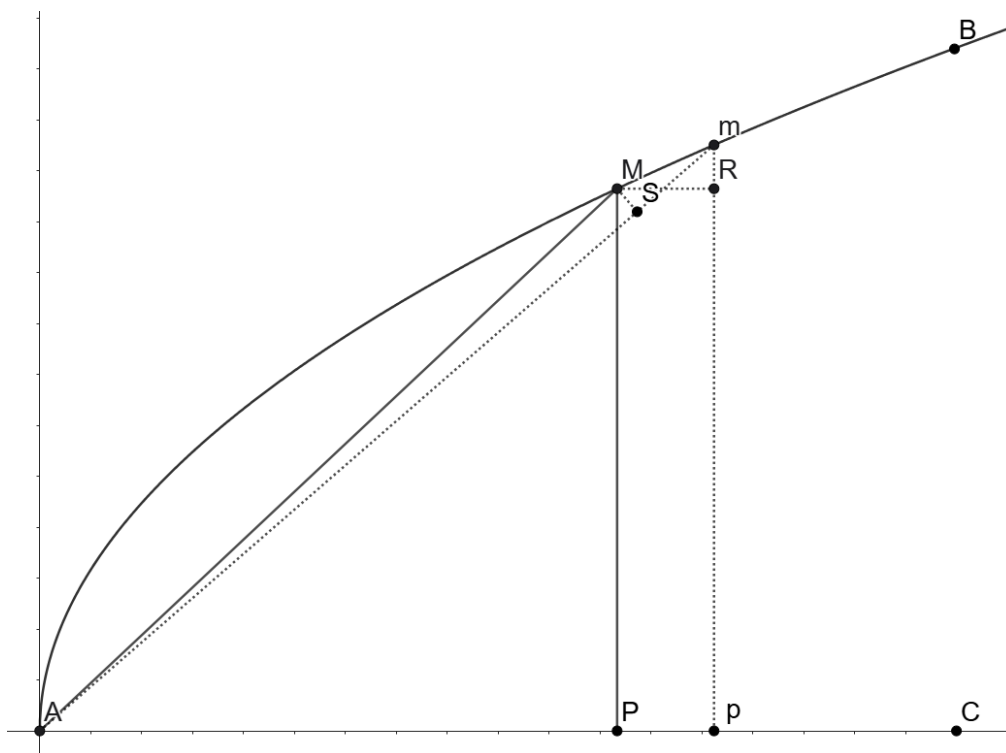
3 Diferenciál, tečna, extrémní ordináty

Následující kapitola se v první části věnuje l'Hospitalovu pojmu diferenciálu, jeho užití a porovnání s dnešní definicí derivace. Další části se věnují tečnám a hledání extrémů.

3.1 Diferenciál versus derivace

L'Hospital definoval diferenciál jako „nekonečně malou část, o kterou spojitě roste nebo klesá proměnná veličina“ (2022, s. 127). Definici doprovází i grafické znázornění (obrázek 2) a jeho popis:

Budiž například nějaká libovolná křivá čára AMB , jejíž osou či průměrem je AC a jednou z jejích ordinát úsečka PM ; a budiž druhá ordináta pm , která je PM nekonečně blízká. Nyní jestliže povedeme úsečku MR rovnoběžnou s AC , tětivy AM , Am ; a ze středu A o poloměru AM opišeme malý kruhový oblouk MS , pak Pp bude diferenciálem AP , Rm diferenciálem PM , Sm diferenciálem AM a Mm diferenciálem oblouku AM . Tak i malý trojúhelník MAM o základně v oblouku Mm bude diferenciál výseče AM a malá plocha $MPpm$ diferenciálem plochy mezi úsečkami AP , PM a obloukem AM (s. 127).



Obrázek 2: diferenciál (vytvoreno v Geogebře)

Jsou využity vlastnosti podobných trojúhelníků a následné poměry délek stran. Markýz následně vysvětlil na jednotlivých příkladech diferenciál součtu a rozdílu veličin a zvlášť ještě určil diferenciál násobených veličin či dělených. Pracoval tedy čistě s výrazy složenými z mocninných a racionálních veličin představujícími geometrické a fyzikální vlastnosti křivek.

V moderní matematické analýze se k vyšetřování průběhu funkcí jedné proměnné používají derivace funkcí. Courant (1937, s. 88) uvedl několik pohledů na to, jak definovat derivaci. Zaměřil se stejně jako l'Hospital na geometrický význam a „v souladu s naivní intuicí“² pomocí nákresu křivky určil derivaci jako směrnici tečny v daném bodě křivky, také diskutoval fyzikální význam derivace dráhy neboli rychlosti pohybu. Courant (1937, s. 90) uvedl Lagrangeovo i Leibnitzovo značení a zároveň i delta značení rozdílu hodnot pro derivaci funkce v bodě $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Jarník (1974, s. 210–211) uvedl ekvivalentní definici derivace funkce f v bodě x_0 pomocí limity

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

L'Hospital pracoval s předpisy křivek jako s implicitními funkcemi a je tedy vhodné uvést i definici totálního diferenciálu pomocí parciálních derivací, jak ji uvedl Jarník (1974, s. 334–341):

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

Parciální derivace jsou derivace pouze jedné proměnné u funkcí více proměnných. Se zbylými proměnnými se při parciální derivaci zachází jako s konstantami.

² If P is a point on a given curve, we shall, in conformity with naïve intuition, define the tangent to the curve at the point P by means of the following geometrical limiting process (Courant, 1937, s. 88).

3.1.1 Řešené úlohy

Na několika příkladech ukáží, jak l'Hospital počítal diferenciály a jak se určují derivace odpovídajících funkcí podle definic.

Úloha 1

L'H³: Diferenciál přímé úměrnosti $ax = y$, kde a značí nenulovou konstantu, je $adx = dy$.

MP: Lineární funkce $f(x) = y = ax$ má derivaci ve všech bodech definičního oboru, což jsou reálná čísla. Derivace je

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = a$$

Úloha 2

L'H: Diferenciál součtu dvou mocnin proměnné $x^2 + x^3 = y$ je

$$2x dx + 3x^2 dx = dy = \overline{2 + 3x} \times \overline{xdx}$$

MP: Derivace kubické funkce $f(x) = y = x^3 + x^2$ má smysl pro všechna reálná x a má hodnotu $f'(x) = 3x^2 + 2x$.

Úloha 3

L'H: Diferenciál výrazu představujícího hyperbolickou křivku $xy = a$, kde a značí konstantní veličinu, je $ydx + xdy = 0$.

MP: Funkce nepřímé úměrnosti $f(x) = y = \frac{a}{x}$ nemá derivaci v bodě $x = 0$, pro zbylé reálné hodnoty nezávislé proměnné je derivace

$$f'(x) = \frac{-a}{x^2}$$

Úloha 4

L'H: Diferenciál z $\frac{\sqrt[3]{axx+x^3}}{\sqrt{xy+xx}}$

³ Následujícím způsobem budu i nadále rozlišovat řešení úloh podle l'Hospitalova vzoru. „MP“ pak značí moderní přístup.

je podle pravidel pro součin a podíl veličin

$$\frac{\frac{2axdx+3xxdx}{3\sqrt[3]{axx+x^3}} \times \sqrt{xy+xx} + \frac{-ydx-2xdx-xdy}{2^2\sqrt{xy+xx}} \times \sqrt[3]{axx+x^3}}{xy+xx}$$

MP: Pro uvedený výraz nelze vyjádřit příslušnou funkci.

3.1.2 Porovnání

Zatímco dnešní matematická analýza pracuje s pojmem derivace jako limitním poměrem změny funkčních hodnot a změny nezávislé proměnné funkce, l'Hospital chápal diferenciál jako nekonečně malou část veličiny nebo příslušné křivky. L'Hospitalovo odvození se liší v rozdílném limitním přechodu, totiž limitně se přibližujících bodů na dané křivce, jimiž je vedena sečna, a nikoliv poměru zmenšujících se ordinát a abscis, respektive poměru rozdílu závislé a nezávislé proměnné, jako je tomu dnes. Zároveň zvláště diskutuje klesající proměnné, pro které je nutno zdůraznit tuto skutečnost formou záporného diferenciálu $-dx$. Samotné výpočty jsou obdobné v obou pohledech, odlišnosti se vyskytují ve formě zápisu, jako je zápis čtverců nebo vinculum. Ve třetí ukázkově řešené úloze se zdá, že jsem l'Hospitalovým postupem došla k odlišnému výsledku. Záleží pouze na vyjádření, po úpravě výrazu a zpětnému dosazení pro y získávám shodné údaje.

$$ydx + xdy = 0 \Leftrightarrow xdy = -ydx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = -\frac{a}{xx}$$

L'Hospital určoval diferenciály z předpisů rovnic, které z dnešního pohledu mohou být implicitně zadané funkce. V prvním oddílu *Analýzy nekonečně malých* nicméně určuje převážně diferenciály výrazů, nikoliv rovnic, ke kterým ne vždy lze určit odpovídající funkce, jak tomu bylo vidět ve čtvrté ukázkové úloze.

3.2 Tečna ke křivce versus tečna k funkci

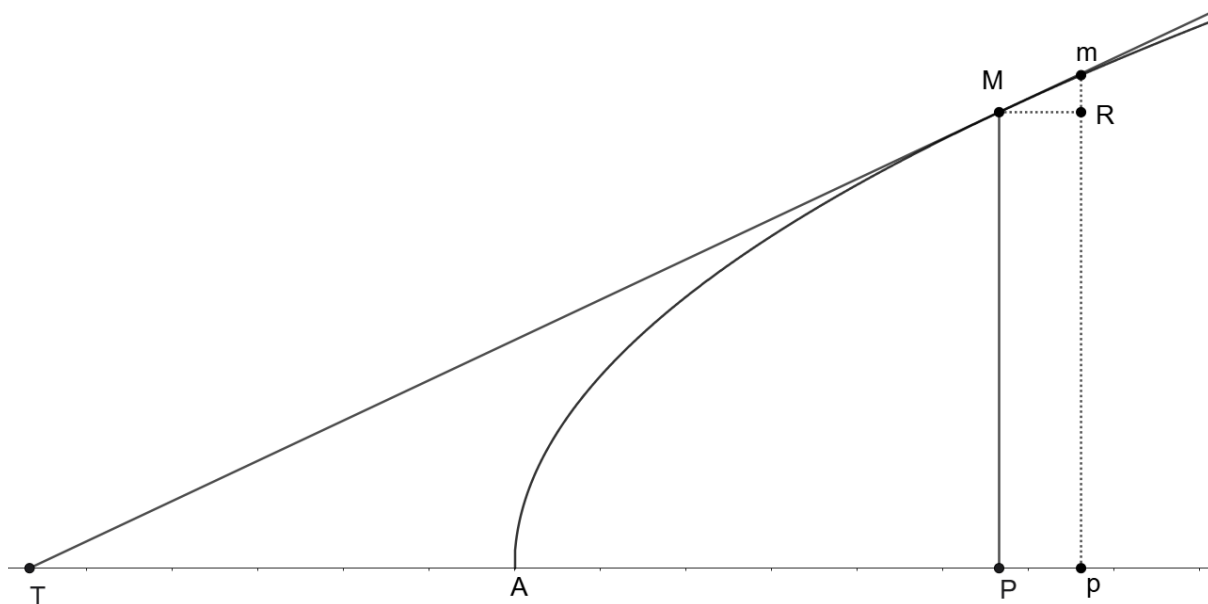
L'Hospitalova definice tečny vychází z přirovnání křivky mnohoúhelníku následující formulací: „jestliže prodloužíme jednu z malých stran Mm mnohoúhelníku, z něhož se skládá křivá čára, pak se takto prodloužená malá strana bude nazývat tečnou v bodě M neboli m “ (l'Hospital, 2022, s. 135). Konstrukci tečny vyvodil obdobně jako diferenciál pomocí podobnosti trojúhelníků a hledání subtangenty, což je velikost pravoúhlého průmětu délky tečné úsečky, jejíž koncové body jsou bod dotyku na křivce a průsečík tečny s abscisou

(Merriam-Webster, n.d.). V l'Hospitalově (2022) značení se jedná o úsečku PT (znázorňuje obrázek 3). Následujícím způsobem odvodil výpočet její délky:

Vedme ordinátu MP a předpokládejme, že úsečka MT protínající průměr v bodě T je hledanou tečnou; představme si druhou ordinátu mp prvé nekonečně blízkou a malou úsečku MR rovnoběžnou s AP . Nyní jestliže AP označíme jako x , PM jako y (a tedy Pp čili $MR = dx$ a $Rm = dy$), z podobnosti trojúhelníků mRM a MPT dostáváme

$$mR(dy).RM(dx) :: MP(y).PT = \frac{ydx}{dy}$$

(s. 135).



Obrázek 3: odvození subtangenty (vytvoreno v Geogebře)

Jarník (1974, s. 212) zavádí tečnu k funkci f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ pomocí předpisu lineární rovnice

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

za předpokladu, že funkce má v daném bodě vlastní derivaci.

3.2.1 Řešené úlohy

Určení tečny k danému bodu křivky předvedu na úlohách hyperboly, paraboly a cykloidy.

Úloha 1 – hyperbola

L'H: Je dána hyperbolická křivka s přirozeností $xy = a$. Diferenciací výrazu získám předpis $ydx + xdy = 0$ a po úpravě

$$\frac{ydx}{dx} = -x,$$

což dává délku subtangenty PT . Záporné znaménko vyjadřuje skutečnost, že bod T připadne na opačnou stranu než bod A vzhledem k bodu P a zároveň $PT = PA$.

MP: Je dána hyperbola $f(x) = y = \frac{a}{x}$ s derivací $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$. Tečna s bodem dotyku $\left[x_0; \frac{a}{x_0}\right]$ má předpis

$$y = \frac{a(x_0 - x)}{x_0^2} + \frac{a}{x_0} = \frac{2ax_0 - ax}{x_0^2}.$$

Pro určení subtangenty a porovnání výsledků určím průsečík s osou x .

$$y = \frac{2ax_0 - ax}{x_0^2} = 0 \Rightarrow x = 2x_0$$

Tečna tedy protne osu ve dvojnásobné hodnotě vzhledem k x_0 , což odpovídá výsledku l'Hospitalova algoritmu.

Úloha 2 - parabola

L'H: Parabola je dána rovnicí $ay = xx$, kde a je libovolná nenulová konstanta. Určím diferenciál $ady = 2xdx$ a následně vyjádřím délku subtangenty

$$PT \left(\frac{ydx}{dy} \right) = \frac{ay}{2x} = \frac{xx}{2x} = \frac{x}{2}$$

Tečna, která se dotýká paraboly v bodě M , protíná základní přímku v polovině délky příslušné abscisy AP .

MP: Nyní určím předpis tečné přímky moderním způsobem. Je dána funkce $f(x) = y = \frac{x^2}{a}$, derivace v bodě x_0 má hodnotu $f'(x_0) = \frac{2}{a}x_0$ a tečna je dána předpisem

$$y = \frac{2}{a}x_0(x - x_0) + \frac{x_0^2}{a}$$

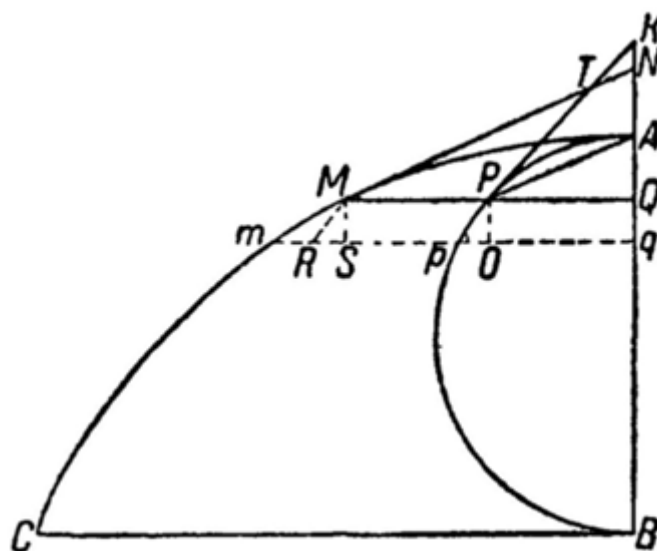
Abych porovnála oba výsledky, určím, v jakém bodě tečna protíná osu x , a tím určím délku odpovídající subtangenty.

$$0 = \frac{2xx_0 - 2x_0^2 + x_0^2}{a} = \frac{x_0(2x - x_0)}{a} \Rightarrow \left(x_0 = 0 = x \vee x = \frac{x_0}{2}\right)$$

Tečna k vrcholu paraboly splývá s osou x , pro ostatní body tečna protíná souřadnicovou osu v bodě, který má souřadnice $\left[\frac{x_0}{2}; 0\right]$. Oba způsoby řešení tedy přináší shodné výsledky.

Úloha 3 – prostá cykloida⁴

L'H: V sekci nazvané Důsledek odvodil l'Hospital (2022, s. 142) určení tečny k prosté cykloidě čistě konstrukčně pomocí tětivy hlavní kružnice. Tětiva vedená mezi body P a A , kde PM je úsečka rovnoběžná se základnou a A je nejvyšší bod cykloidy, je rovnoběžná s hledanou tečnou s bodem dotyku M . Tuto skutečnost lze odůvodnit vytvořením Thaletovy kružnice, respektive vepsáním pravoúhlého trojúhelníku nad průměrem hlavní kružnice, kde u vrcholu M je pravý úhel.



Obrázek 4: část cykloidy (Makovský, 2014, s. 120)

⁴ Transcendentní křivka „kruhu podobná“. Vychází z odvalování kružnice a bodu na ní ležícím. Dále se definuje cykloida zkrácená a prodloužená podle toho, jestli se opisovaný bod, pevně s ní spojený, nachází uvnitř či vně kružnice. Je zajímavé, že l'Hospital používal tyto termíny naopak (Makovský, 2022, s. 372–375).

Zároveň uvedl následující řešení pomocí určení diferenciálu vycházejícího z podobnosti trojúhelníků znovu doplněné nákresem (obrázek 4). Za předpokladu, že hlavní kružnice se nachází v pozici dotyku nejvyššího bodu cykloidy, ten označím A , a ke kružnici je vedena tečna PK , bod P na kružnici a bod K na přímce odpovídající průměru kružnice, lze k bodu cykloidy M vést tečnu MN . Bod Q leží na přímce MP a průměrové přímce. Vytvořením nekonečně blízké ordináty mq získám další body S, p, O . Trojúhelníky $KPQ \cong PpO$, $mSM \cong MQN$ dávají následující poměry

$$PK(t).KQ(s) :: Pp(dx).PO$$

$$MS = \frac{sdx}{t}$$

$$mS(dy).SM\left(\frac{sdx}{t}\right) :: MQ(y).QN = \frac{sydx}{tdy}$$

MP: Prostou cykloidu, jejíž hlavní kružnice má poloměr r , lze definovat pomocí parametru θ , který značí úhel daný průvodičem (Boman & Rogers, 2024, s. 171; Trkal, 1956, s. 350).

$$x = r(\theta - \sin \theta); y = r(1 - \cos \theta)$$

Derivaci pro určení směrnice tečny určím jako derivaci složené funkce a pomocí goniometrických vzorců vyjádřím následovně:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{r(0 + \sin \theta)}{r(1 - \cos \theta)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2}$$

Předpis tečny k bodu cykloidy je potom

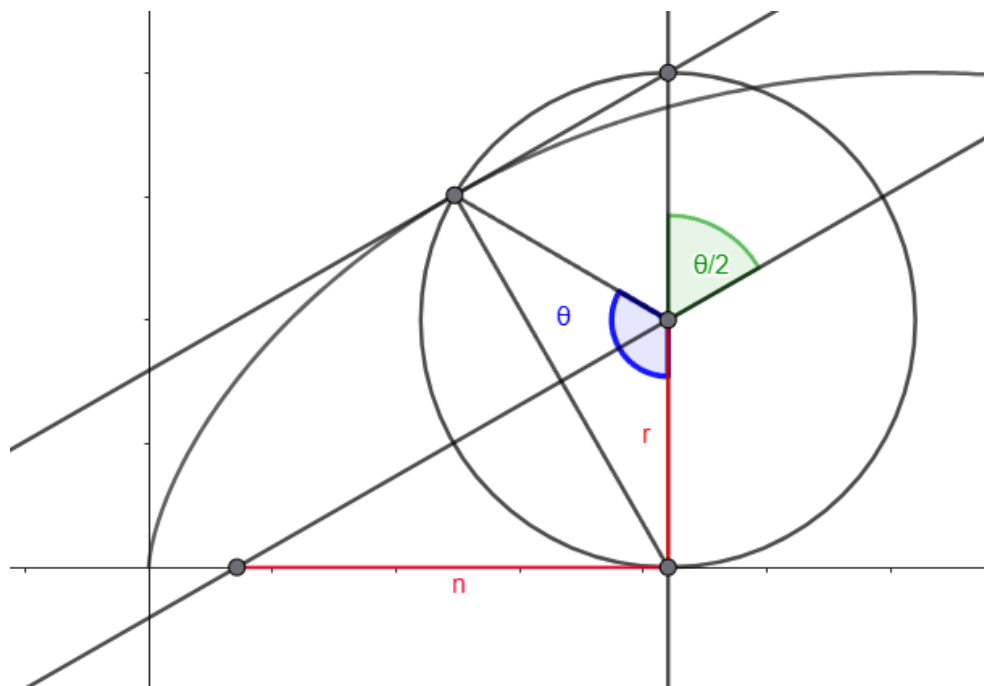
$$y - r(1 - \cos \theta) = \cot \frac{\theta}{2} (x - r(\theta - \sin \theta))$$

Vzhledem k diametrálně odlišnému vyjádření cykloidy se mi nepodařilo transformovat vyjádření výsledků tak, abych je mohla porovnat. To je zapříčiněno parametrickým vyjádřením a obtížností⁵ vyjádřit cykloidu jako funkci jedné proměnné $y = y(x)$. Je možné

⁵ It would be difficult to express the cycloid as the graph of some curve: $y = y(x)$. But it is fairly simple to parameterize it (Boman & Rogers, 2024, s. 170).

graficky (znázorňuje obrázek 5) porovnat první uvedený způsob, kde je tečna k cykloidě rovnoběžná s přeponou pravoúhlého trojúhelníku daného poloměrem hlavní kružnice.

Potom směrnice tečny odpovídá $\tan\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right) = \cot\frac{\theta}{2} = \frac{r}{n}$.



Obrázek 5: směrnice tečny k cykloidě (vytvoreno v Geogebře)

3.2.2 Porovnání

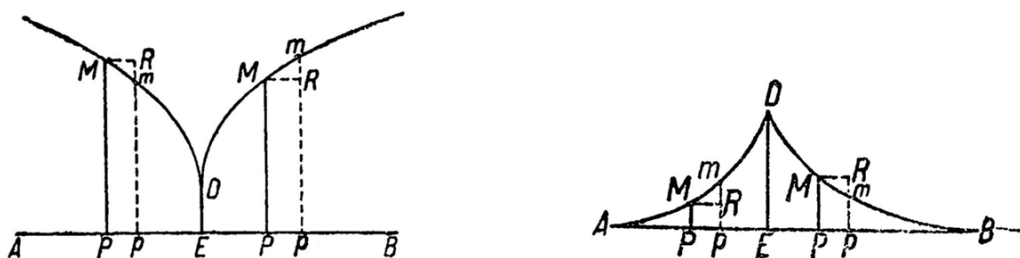
L'Hospitalův způsob přináší délku subtangenty a je nutné konstrukčně násobit a dělit úsečky. Moderní postupy určují směrnici tečny a předpis lineární funkce vzhledem k souřadnicové soustavě, respektive vzhledem k parametru θ u cykloidy, a konstrukce je tedy méně náročná, nicméně nemusí být čistě eukleidovská.

Jak bylo možné vidět ve druhém způsobu hledání tečny k cykloidě, ordináty a abscisy nemají pevně danou polohu oproti souřadným osám v kartézské soustavě. V tomto případě l'Hospital volil směr ordinát rovnoběžně se směrem pohybu hlavní kružnice a abscisy kolmo na ně. Navíc jsou abscisa $AP(x)$ a její diferenciál $Pp(dx)$ části oblouku hlavní kružnice, což předpokládal v prvním oddílu *Analýzy nekonečně malých*. Totiž že „křivou čáru bylo možno pokládat za seskupení nekonečně mnoha nekonečně malých čar přímých“ (l'Hospital, 2022, s. 128).

3.3 Největší a nejmenší ordináty versus extrémny

L'Hospital (2022) se zabýval hledáním největších a nejmenších ordinát neboli otázkami *de maximis & minimis* ve třetím oddílu *Analýzy nekonečně malých*. Tyto významné úsečky, respektive body na křivce, zavedl ve dvou definicích doplněných o nákres (obrázek 6):

Budiž nějaká křivka MDM , jejíž ordináty PM, ED, PM jsou navzájem rovnoběžné, a necht' je taková, že pokud spojitě roste abscisa AP , roste též ordináta MP , a to až do určitého bodu E , po kterém začne klesat, anebo naopak taková, že do určitého bodu E klesá a po něm začne růst. Nuže čáru ED nazveme největší, anebo naopak nejmenší ordinátou (s. 173).



Obrázek 6: nejmenší a největší ordináty (Makovský, 2014, s. 142)

Jestliže položíme nějakou veličinu takovou jako PM , která se skládá z jedné nebo více neurčitých veličin takových jako AP , přičemž když AP spojitě roste, roste též PM , a to až do určitého bodu E , po němž začne klesat, anebo naopak, a necht' je třeba najít pro AP takovou hodnotu AE , že odtud složená ED bude větší nebo menší než kterákoli jiná veličina PM obdobně utvořená z AP , pak takovou úlohu nazýváme otázkou *de maximis & minimis* (s. 173).

Způsob, jak hledat takové ordináty, formuloval l'Hospital (2022) v Obecném tvrzení a následné Poznámce:

Přirozenost křivky MDM je dána, nyní je třeba najít pro AP takovou hodnotu AE , že ordináta ED bude největší nebo nejmenší ze všech podobně utvořených PM . Pokud při růstu AP roste též PM , je zjevné, že její diferenciál Rm bude vzhledem k diferenciálu AP kladný, a pokud naopak PM klesá, zatímco abscisa AP roste, její diferenciál bude záporný. Žádná spojitě rostoucí nebo klesající veličina se však nemůže obrátit z kladné v zápornou, aniž by prošla nekonečnem nebo nulou, jestliže nejprve klesá, a nekonečnem, jestliže nejprve

roste. Odtud pak plyne, že diferenciál veličiny, která něčeho vyjadřuje nejvíce nebo nejméně, se musí rovnat nule nebo nekonečnu. Nuže je dána přirozenost křivky MDM , najdeme hodnotu Rm , a když ji pak položíme nejprve rovnou nule a posléze nekonečnu, poslouží nám na základě prvního nebo druhého předpokladu k nalezení hledané hodnoty AE .

Tečna v D je rovnoběžná s osou AB , když se diferenciál Rm v tomto bodě stane nulovým, jestliže však dosáhne nekonečna, splývá tečna s ordinátou ED . Odtud je zřejmé, že poměr mR ku RM , který vyjadřuje poměr ordináty k subtangentě, se v bodě D rovná nule nebo nekonečnu. Snadno nahlédneme, že spojitě klesající veličina se z kladné nemůže proměnit v zápornou, aniž by prošla nulou, neukazuje se však již s takovou samozřejmostí, že by, pokud je rostoucí, musela projít nekonečnem. Přizvěme tedy na pomoc představivost tečny uvažované v bodech M, D, M . Zřejmě u těch křivek, kde je tečna v D rovnoběžná s osou AB , subtangenta PT nepřetržitě poroste tím více, čím více se body M, P budou přibližovat bodům D, E , a stane se nekonečnou, jakmile bod M připadne do bodu D . A zřejmě když AP nakonec přesáhne AE , subtangenta PT se z původně kladné převrátí v zápornou, anebo naopak (s. 173–174).

V dnešní matematické analýze se definují lokální extrémy, případně ostré lokální extrémy. Jarník (1974) uvedl následující definici těchto pojmů:

Budiž dáno číslo c a funkce f , definovaná v jistém intervalu (a, b) obsahujícím bod c . Existuje-li kladné číslo δ tak, že pro všechna x na intervalu $(c - \delta; c + \delta)$ je $f(x) \leq f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c lokální maximum. Lze-li zvolit $\delta > 0$ dokonce tak, že pro všechna x intervalu $(c - \delta; c + \delta)$, různá od c , je $f(x) < f(c)$, říkáme, že funkce f má v bodě c ostré lokální maximum. Nahradíme-li nerovnosti $f(x) \leq f(c), f(x) < f(c)$ nerovnostmi $f(x) \geq f(c), f(x) > f(c)$, dostaneme definici lokálního minima a ostrého lokálního minima (s. 253–254).

Pro hledání bodů, které jsou podezřelé z extrémů, tak zvané stacionární body, se běžně užívá následující věta ve tvaru odměněné implikace. Uvádím Jarníkovo (1974) znění:

Existuje-li $f'(x_0) \neq 0$, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém (s. 255).

Rigoróznější způsob, jak hledat extrémy funkce, udává Jarník (1974) ve větě o změně znaménka první derivace na okolí bodu:

Budiž (a, b) otevřený interval obsahující bod x_0 . Budiž $f(x)$ funkce, spojitá v intervalu (a, b) , jež má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) různém od bodu x_0 (v tomto bodě tedy derivaci mít může ale nemusí). Potom platí:

1. Existuje-li $\Delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je $f'(x) > 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f'(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.
2. Existuje-li $\Delta > 0$ tak, že pro $x_0 - \Delta < x < x_0$ je $f'(x) < 0$ a pro $x_0 < x < x_0 + \Delta$ je $f'(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.
3. Existuje-li $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \Delta$ je $f'(x) > 0$, je funkce f v bodě x_0 rostoucí.
4. Existuje-li $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \Delta$ je $f'(x) < 0$, je funkce f v bodě x_0 klesající (s. 255).

Courant větu formuloval obdobným způsobem:

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá a má spojitou derivaci, která není definovaná pouze v konečném počtu bodů. Potom $f(x)$ má maximum nebo minimum v bodě $x = \xi$ právě tehdy, když derivace $f'(x)$ mění znaménko při průchodu tímto bodem; konkrétně, funkce má minimum, když derivace je záporná nalevo od ξ a kladná napravo, a naopak v případě maxima.⁶

3.3.1 Řešené úlohy

Úloha 1

L'H: Je dána křivka $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \frac{2}{a - x^3}$. První diferenciál je vyjádřen jako

$$dy = \frac{-2\sqrt[3]{a}dx}{3\sqrt[3]{a-x}}$$

⁶ We suppose that the function $f(x)$ is continuous and has a continuous derivative $f'(x)$ which vanishes only at a finite number of points. Then $f(x)$ has a maximum or a minimum at the point $x = \xi$ if, and only if, the derivative $f'(x)$ changes sign on passing through this point; in particular, the function has a minimum if the derivative is negative to the left of ξ and positive to the right, while in the contrary case it has a maximum (Courant, 1937, s. 161).

a je roven nule pro $0 = -2\sqrt[3]{a}dx$, což nemá obecně řešení pro nenulovou konstantní veličinu a . Při položení diferenciálu rovnému nekonečnu dostanu

$$\infty = \frac{-2\sqrt[3]{a}dx}{3\sqrt[3]{a-x}} \Rightarrow 3\sqrt[3]{a-x} = 0$$

neboli $x = a$. Tato křivka má tedy minimum pro abscisu délky a .

MP: Je dána funkce $f(x) = y = \sqrt[3]{a^3 - 2a^2x + ax^2} + a$.

Z derivace $f'(x) = \frac{1}{3} \frac{-2a^2 + 2ax}{\sqrt[3]{a^3 - 2a^2x + ax^2}}$ určím stacionární bod $x = a$ (v tomto bodě funkce

nemá derivaci, což dle Jarníka není překážkou pro určení extrémů). Pro kladné a je funkce derivace zleva záporná, zprava kladná, a funkce má tedy v bodě $[a, a]$ ostré lokální minimum. Pro záporné a má v tomto bodě ostré lokální maximum. Jelikož je funkce definovaná na celém rozšířeném oboru reálných čísel \mathbb{R}^* , je nutno určit limitní hodnoty v nekonečnech:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{a^3 - 2a^2x + ax^2} + a = +\infty$$

Úloha 2

Už na středních školách se často žáci setkávají se základními optimalizačními úlohami. L'Hospital uvedl řešení následující úlohy: „ze všech kuželů, které lze vepsat nějaké dané kouli, určit kužel o největším vypouklém povrchu“ (L'Hospital, 2022, s. 178).

L'H: Znázornění problému v řezu dává následující vlastnosti. Nad částí průměru koule $AB = a$ chci vytvořit pravoúhlý trojúhelník tak, aby přepona AF odpovídala délce strany kuželu s , jedna odvěsna AE ležela na průměru a druhá odvěsna EF měla vlastnost poloměru podstavy kužele. Pomocí Eukleidovy věty o odvěsně jsou dány délky $AE = x, AF = s = \sqrt{ax}, EF = r = \sqrt{ax - xx}$. Povrch pláště kužele se počítá jako $S_{pl} = \pi rs$, tudíž je třeba určit čtverec $AE \times EF$ co největší. Ze vzniklé rovnice $y = \sqrt{aaxx - ax^3}$ určím diferenciál a položím ho roven nule.

$$dy = \frac{2aaxdx - 3axxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0 \Rightarrow ax \times \overline{2a - 3x} = 0$$

Pro $x = 0$ nemá konstrukce kuželu smysl, tudíž získávám výsledek $AE = x = \frac{2}{3}a$.

MP: S nástroji dnešní matematické analýzy a analytické geometrie lze tento problém řešit následovně: do kartézské soustavy souřadnic umístím kružnici a vyjádřím její kladnou část jako funkci $(x - R)^2 + y^2 = R^2, k(x) = \sqrt{2Rx - x^2}$. Tato funkce odpovídá možnému poloměru kužele $r = k(x)$. Délku strany kužele určím stejně jako v předchozím postupu pomocí Eukleidovy věty, tj. $s = s(x) = \sqrt{2Rx}$. Derivací funkce získávám stacionární bod.

$$f(x) = k(x) \cdot s(x) = \sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}$$

$$f'(x) = \frac{8R^2x - 6Rx^2}{2\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}}$$

$$4R - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{4R}{3}$$

Výše uvedené výsledky jsou ekvivalentní, jelikož v l'Hospitalově postupu figuruje konstanta a představující průměr kružnice a $a = 2R$.

3.3.2 Porovnání

V l'Hospitalových formulacích lze vidět náznak limit, konkrétně „body M, P se budou přibližovat bodům D, E “ (2022, s. 174). Je ovšem obtížně plně pochopit, co l'Hospital myslel tím, že „diferenciál veličiny se rovná nekonečnu“ (l'Hospital, 2022, s. 173), když diferenciál zavedl jako „nekonečně malou část, o kterou spojitě roste či klesá proměnná veličina“ (l'Hospital, 2022, s. 127). Z mého pohledu se jedná o matematický oxymóron. Tuto nepřesnost jsem dovedla ad absurdum v rámci ukázkově řešené úlohy.

V Poznámce v *Analýze nekonečně malých* si lze povšimnout, že se vlastně zabýval směrnici tečny, když se snažil vyjádřit poměr ordináty k subtangentě, a následně ho pokládal roven nule. V tomto pohledu se oba přístupy shodují. Chybějící informace o extrémech v kladném a záporném nekonečnu je zapříčiněná tím, že křivky vnímal jako omezené, ohraničené objekty s koncovými body v průsečících s osou či základnou. Navíc všechny poměry délek a délky zadaných úseček představující konstanty jsou vždy nezáporné, nemohl tedy určit vlastnosti křivek pro hodnoty odpovídající záporné nezávislé proměnné.

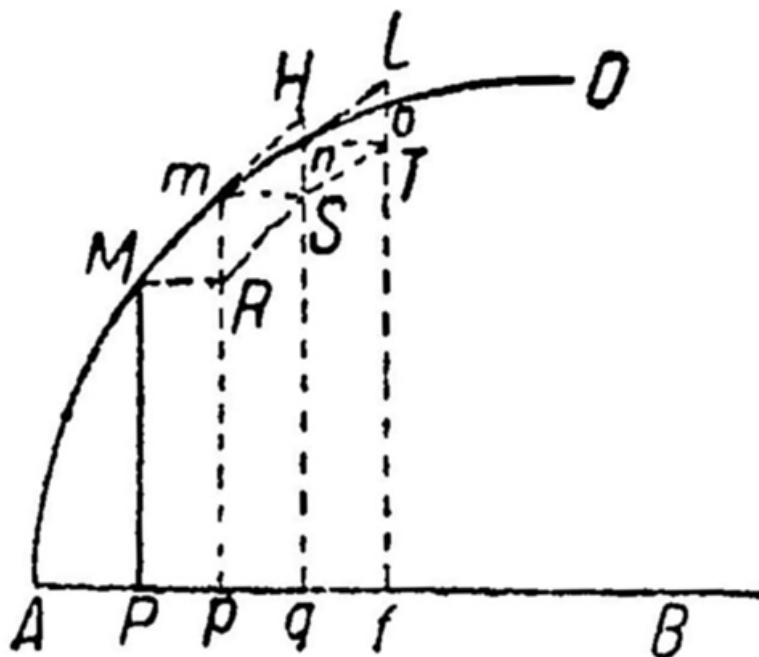
4 Druhý diferenciál, inflexní body

Ve čtvrté kapitole se blíže zaměřím na pojem druhého diferenciálu a s ním spojeného určování inflexních bodů a konvexnosti křivek. V rámci porovnání uvedu definice vyšších řádů diferenciálů a derivací, v řešených úlohách je ale nebudu využívat, jelikož ve studiu křivek a funkcí nemají snadno viditelný význam.

4.1 Druhý diferenciál versus druhá derivace

Diferenciál druhého řádu l'Hospital (2022) znovu definoval graficky (znázorňuje obrázek 7) stejně jako první diferenciál.

Nekonečně malá část, o kterou spojitě roste či klesá diferenciál nějaké veličiny, nazveme diferenciálem diferenciálu této veličiny neboli jejím druhým diferenciálem. Takto pokud si představíme třetí ordinátu nq nekonečně blízkou druhé mp a povedeme mS rovnoběžnou s AB a mH rovnoběžnou s RS , nazveme Hn diferenciálem diferenciálu Rm neboli druhým diferenciálem PM . Obdobně jestliže si představíme čtvrtou ordinátu of nekonečně blízkou třetí nq a povedeme nT rovnoběžnou s AB a nL rovnoběžnou s ST , pak diferenciál malých úseček Hn, Lo nazveme diferenciálem druhého diferenciálu neboli třetím diferenciálem PM . A tak dále (s. 189).



Obrázek 7: druhý diferenciál (Makovský, 2014, s. 156)

Po popisu grafického významu druhého diferenciálu vysvětlil markýz l'Hospital (2022) značení:

Nadále budeme počtem d u každého diferenciálu vyznačovat jeho řád či rod. Například druhý diferenciál neboli diferenciál druhého řádu vyznačíme dd , třetí diferenciál neboli diferenciál třetího řádu vyznačíme ddd , čtvrtý diferenciál neboli diferenciál čtvrtého řádu $dddd$ a tak podobně. Takto ddy bude vyjadřovat Hn , ddy bude vyjadřovat $Lo - Hn$ nebo $Hn - Lo$ atd. Co se týče mocnin těchto diferenciálů, budou vyznačeny číslovkami postavenými shora za ně, jak tomu běžně bývá u konečných veličin. Například čtverec dy bude dy^2 , krychle dy^3 , čtverec ddy bude ddy^2 , krychle ddy^3 , čtverec ddy bude ddy^2 , krychle ddy^3 , čtverec ddy bude ddy^2 , krychle ddy^3 atd. (s.189).

Stejně jako pro vyšetřování extrémů funkcí jedné proměnné se používá derivace, ačkoliv l'Hospital pracoval s diferenciály, uvádím definici druhé derivace podle Jarníka (1974):

Budiž $f(x)$ funkce; derivace $f'(x)$ čili $\frac{df(x)}{dx}$ je také funkce proměnné x ; jejím oborem je množina všech hodnot x , pro něž vlastní derivace existuje. Derivaci funkce $f'(x)$ (pokud existuje) nazýváme druhou derivací funkce f a značíme ji $f''(x)$ nebo též $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ (označíme-li $f(x)$ jediným písmenem y , píšeme též y'' nebo $\frac{d^2y}{dx^2}$). Derivaci funkce $f''(x)$ nazýváme třetí derivací; obecně: derivaci $(n - 1)$ -vé derivace nazýváme n -tou derivací funkce $f(x)$ a označíme ji $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ (nahore píšeme n hned za znak d , dole až za znak dx). Je zřejmé, že $(f^{(m)}(x))^{(n)} = f^{(m+n)}(x)$; neboť derivuji-li m -tou derivaci ještě n -krát, derivoval jsem funkci f celkem $(m + n)$ -krát. Je někdy účelné psát $f^{(0)}$ místo f („nultá“ derivace funkce f je funkce f sama) (s. 227–228).

4.1.1 Řešené úlohy

Úloha 1

L'H: Markýz určoval diferenciál výrazu $\frac{ydy}{dx}$, nejprve když dx je konstanta, jako $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$, a pro konstantní dy je diferenciál $\frac{dx dy^2 - y dy ddx}{dx^2}$.

MP: Určím diferenciál jako diferenciál součinu: $\frac{1}{dx}(dy^2 + yddy)$.

L'H: První diferenciál parabolické křivky s přirozeností $ay = xx$ jsem již určila v části 3.2.1, konkrétně jsem získala předpis $ady = 2xdx$. Druhý diferenciál, když dx je konstantní, je $addy = 2dx^2$ a pro konstantní dy je diferenciál $0 = 2dx^2 + 2xddx$.

MP: Obdobně už znám první derivaci funkce $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a}\right) = \frac{2x}{a}$. Druhá derivace je $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{a}\right) = \frac{2}{a}$.

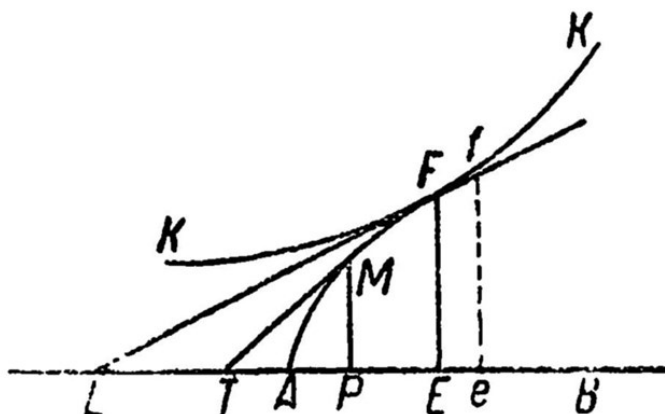
4.1.2 Porovnání

L'Hospital diskutoval velikost diferenciálů a nekonečně malých veličin. Oproti jeho definici prvních diferenciálů je výčet speciálních případů mnohem komplikovanější. To je způsobeno tím, že l'Hospital diferenciál křivky nevnímal jako novou křivku, kterou by opětovně diferencoval, jak je tomu dnes u funkcí a jejich derivací. Lze si povšimnout, že pro dx konstantní vychází po úpravě výrazů stejné výsledky v obou postupech. Na příkladu paraboly podle l'Hospitala dostanu $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{a}$ a pro moderní postup $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{a}$. Volit dx za konstantní proměnou tedy odpovídá volbě nezávislé proměnné.

4.2 Křivky vyduté a vypouklé, body přehybu a vratu versus konvexní a konkávní funkce, body inflexe

L'Hospital (2022) definoval v *Analyze nekonečně malých* inflexní body (jedná se o bod F , obrázek 8) a dnes už málo používaný pojem – body vratu:

Jestliže je křivá čára AFK vzhledem k přímé AB , anebo k pevnému bodu B , z části vydutá a z části vypouklá, pak bod F , který odděluje vydutou část od části vypouklé, a proto je



Obrázek 8: bod přehybu (Makovský, 2014, s. 160)

koncem jedné a počátkem druhé, nazveme bodem přehybu neboli inflexní bodem v případě, že křivka doputujíc do bodu F pokračuje dále ve stejném směru, a bodem vratu, když se ve své cestě navrácí na stranu svého počátku (s. 195).

Dále uvedl markýz L'Hospital (2022) obecný postup hledání takových bodů:

Je dána přirozenost křivé čáry AFK a nyní je třeba určit bod přehybu či vratu F : Předpokládejme nejprve, že křivka AFK má coby průměr přímost AB a její ordináty PM, EF atd. jsou všechny navzájem rovnoběžné. Jestliže bodem F povedeme ordinátu EF a tečnu FL , a libovolným bodem M části AF ordinátu MP a tečnu MT , pak je zřejmé, že:

1. U křivek, které mají inflexní bod: když abscisa AP spojitě roste, také část AT průměru vymezená jeho průnikem s tečnou a počátkem hodnot x roste až do okamžiku, kdy bod P splyne s E , a pak následuje její pokles. Odtud je zjevné, že AT odpovídající ordinátě v P se musí stát největší AL , právě když bod P připadne do hledaného bodu E .
2. U křivek, které mají bod vratu: když spojitě roste část AT , pak roste též abscisa AP , a to až do okamžiku, kdy bod T splyne s bodem L , a pak následuje její pokles. Odtud je zjevné, že AP odpovídající ordinátě v T musí být největší AE , právě když bod T připadne do L .

Jestliže nyní AE označíme jako x , EF jako y , budeme mít

$$AL = \frac{ydx}{dy} - x,$$

čehož diferenciál (za předpokladu, že dx je konstantní) činí

$$\frac{dy^2 dx - y dx ddy}{dy^2} - dx,$$

který, vydělen dx , tj. diferenciálem AE , musí být nulový nebo nekonečný. Což dává

$$-\frac{y ddy}{dy^2} = 0 \text{ nebo nekonečnu,}$$

Odkud po vynásobení dy^2 a vydělení $-y$ vychází

$$ddy = 0 \text{ nebo nekonečnu.}$$

Což nadále bude platit za obecnou formuli pro nalezení bodů přehybu nebo vratu F . Jestliže je totiž dána přirozenost křivky AFK , hodnoty dy můžeme vyjádřit přes dx , a jejím diferencováním za předpokladu, že dx je konstantní, najdeme hodnotu d^2y vyjádřenou přes dx^2 . Když pak tuto hodnotu položíme rovnou nejprve nule a následně nekonečnu, na základě jednoho nebo druhého předpokladu najdeme pro AE hodnotu takovou, že ordináta EF protne křivku AFK právě v bodu přehybu nebo vratu F .

Počátek A hodnot x může být položen i tak, že místo $\frac{ydx}{dy} - x$ bude platit $AL = x - \frac{ydx}{dy}$, a tedy že AL či AE bude nejmenší, a nikoliv největší. Protože však bez jakýchkoli obtíží dojdeme ke shodným závěrům, nebudu se u toho více zdržovat (s.195–197).

V dnešní terminologii se určuje konvexnost či konkávnost funkcí na jednotlivých intervalech a hledají se inflexní body. Uvádím znění definic dle Jarníka (1974):

Nechť existuje derivace $f'(x_0)$ v bodě x_0 . Existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ leží bod $[x, f(x)]$ nad tečnou

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

říkáme, že funkce f je ryze konvexní v bodě x_0 ; existuje-li číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - x_0| < \delta$ leží bod $[x, f(x)]$ pod tečnou, říkáme, že funkce f je ryze konkávní v bodě x_0 (s. 252).

Funkce f nechť má v bodě x_0 derivaci. Nechť existuje číslo $\delta > 0$ tak, že platí jeden z těchto dvou případů:

1. Buďto leží bod $[x, f(x)]$ pro $x_0 - \delta < x < x_0$ pod tečnou

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ nad ní.

2. Nebo leží bod $[x, f(x)]$ pro $x_0 - \delta < x < x_0$ nad tečnou a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ pod ní.

Potom říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi, nebo také, že křivka $y = f(x)$ má v bodě $[x_0, f(x_0)]$ inflexní bod (s. 260).

Bod vratu, dnes pod používanějším termínem hrot křivky nebo anglicky *cusp* či *spinode*, se definuje jako bod, ve kterém je funkce spojitá, ale jednostranné limity derivace se nerovnají (na příklad jedna je ∞ a druhá $-\infty$) (Weisstein, n.d.).

4.2.1 Řešené úlohy

Úloha 1

L'H: Je dána přirozenost křivky $axx = xxy + aay$ na základě poměru abscisy $AE(x)$ k ordinátě $EF(y)$. Pro určení inflexního bodu F je třeba určit druhý diferenciál ddy za předpokladu, dx je konstanta. Diferencováním prvního diferenciálu $2axdx = 2xydx + xxdy + aady$, vyjádřeného jako $dy = \frac{2a^3xdx}{xx+aa}$ získám následující rovnici.

$$ddy = \frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx + aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx + aa}}{\overline{xx + aa}^4} = 0$$

Nutnou úpravou výrazu získávám $aa - 3xx = 0$ a pro $AE(x) = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Pokládat druhý diferenciál roven ∞ je bezpředmětné, jelikož neexistuje délka abscisy, pro kterou by platilo $xx + aa = 0$.

MP: Funkce $f(x) = y = \frac{ax^2}{x^2+a^2}$ má první derivaci $f'(x) = \frac{2ax(x^2+a^2)-2ax^3}{(x^2+a^2)^2} = \frac{2a^3x}{(x^2+a^2)^2}$ a druhou derivaci $f''(x) = \frac{2a^3(x^2+a^2)^2 - 8a^3x^2(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^4} = \frac{2a^3(a^2-3x^2)}{(x^2+a^2)^3}$. Tou při položení rovnou nule získám body inflexe $[x; y] = \left[a\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{a}{4}\right]$ a $\left[-a\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{a}{4}\right]$. Navíc dokážu určit dle znaménka druhé derivace, že tato funkce je na intervalu $(-\infty; -a\frac{\sqrt{3}}{3}) > a < a\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty)$ konkávní a na prostředním intervalu $< -a\frac{\sqrt{3}}{3}; a\frac{\sqrt{3}}{3} >$ je konvexní pro kladný parametr a . Pro záporné hodnoty parametru má křivka na daných intervalech opačné vlastnosti.

Úloha 2

L'H: Je dána křivka s přirozeností $y^3 = x^2$. První diferenciál je $3yydy = 2xdx$ a po úpravě $dy = \frac{2}{3\sqrt{x}}dx$. Druhý diferenciál za předpokladu konstantního diferenciálu dx má hodnotu

$ddy = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} dx^2$. Rovnost nule nepřináší žádné informace o křivce, z rovnosti nekonečnu dostávám existenci bodu vratu $x = 0$.

MP: Funkce $f(x) = y = x^{\frac{2}{3}}$ je spojitá na celém definičním oboru. První derivace $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ není definovaná pro $x = 0$, pro zbylé hodnoty definičního oboru má derivace smysl. Zároveň jednostranné derivace pro okolí nuly udávají směrnici tečny jako $-\infty$. Druhá derivace $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ je na svém definičním oboru záporná, tudíž je křivka konkávní a v bodě $[x; y] = [0; 0]$ má hrot.

4.2.2 Porovnání

V definici bodu přehybu a vratu si lze povšimnout, že l'Hospital vnímal pojmy vydutá a vypouklá křivka jako naprosto přirozené a vůbec je nedefinoval. Proto ani neurčoval, jestli je na daných úsecích křivka vydutá či vyfouklá a pouze hledal body přehybu. Tato skutečnost ostatně vyplývá z prvotního grafického znázornění křivky – tvar křivky byl znám dopředu podle fyzikálních či geometrických vlastností a bylo nutné pouze dohledat přesnou polohu významných bodů.

Při samotném výpočtu podle l'Hospitala je důležitá poznámka, že diferenciál dx se považuje za konstantu, respektive ddx je v porovnání s ostatními členy příliš malé. V tomto oddílu znovu diskutoval různou velikost nekonečně malých veličin.

Aktuální postupy použité v první vzorově řešené úloze přinesly údaje i o záporných hodnotách x , což odpovídá skutečnosti, že l'Hospital pracoval s délkami úseček, které jsou vždy nezáporné.

5 L'Hospitalovo pravidlo

Běžná matematická populace zná pravděpodobně z L'Hospitalovy práce pouze jednu větu či pravidlo, která je po něm neprávem pojmenována, neboť pochází od jeho učitele Bernoulliho jako většina L'Hospitalových poznatků. Makovský (2022) toto pravidlo uvedl ve své publikace hned ve dvou zněních, nejdříve to od Bernoulliho:

Úloha: je dána křivka, jejíž přirozenost je vyjádřena zlomkem rovným y , který má v určitém případě čitatele a jmenovatele rovné nule: požadujeme jeho hodnotu, tj. velikost ordináty y .

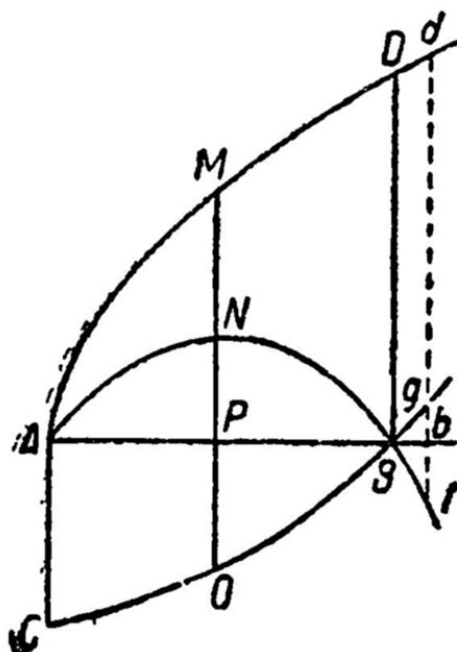
Řešení: necht' AEC je daná křivka, $AD = x$, $DE = y$, $AB =$ nějaké konstantě takové, že BC se stane rovným zlomku, jehož čítec a jmenovatel se rovnají nule. Abych našel velikost ordináty BC , sestřím tedy na téže ose adb dvě další křivky aeb a αeb takové přirozenosti, že když vezmu abscisy rovné AD , ad , pak ordináty de budou úměrné čitateli obecného zlomku vyjadřující ordináty DE ; a $d\epsilon$ pak budou úměrné jmenovateli téhož zlomku. Za těchto podmínek je zřejmé, že de děleno $d\epsilon$ může být položeno rovným DE ; a otázka se omezuje na nalezení hodnoty de děleno $d\epsilon$ pro případ, kdy ab je rovno AB . Shledávám nyní, že v tomto případě de a $d\epsilon$ vymizí, neboť vymizí oba členy zlomku; a tak se obě křivky aeb a αeb protnou v bodě b : a stačí tedy vzít tyto poslední diferenciály βc , $\beta \gamma$, které když jeden vydělím druhým, vyznačí velikost hledané BC . Což mi poskytne následující obecné pravidlo: k získání hodnoty ordináty uvedené křivky v řečeném případě je třeba vydělit diferenciál čitatele obecného zlomku diferenciálem jmenovatele a tento podíl za předpokladu, že x bude učiněno rovným AB , bude hodnotou BC (s. 112–113).

L'Hospital (2022) zavedl pravidlo (graficky znázorňuje obrázek 9) v devátém oddílu *Analýzy nekonečně malých*, kde jsou uvedena řešení úloh:

Budiž křivá čára AMD ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) taková, že hodnota ordináty y je vyjádřena zlomkem, jehož čítec i jmenovatel se při $x = a$ stávají nulovými, tj. když bod P spadne vjedno s daným bodem B . Ptáme se, jaká bude v tomto případě hodnota ordináty BD .

Uvažujme dvě křivé čáry ANB , COB se společnou osou v podobě úsečky AB takové, že ordináta PN vyjadřuje čítec a abscisa PO jmenovatel obecného zlomku, který odpovídá všem PM tak, že platí $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Je zřejmé, že obě tyto křivky se setkají v bodě B , neboť

podle předpokladu se PN a PO obě stávají rovny nule, když bod P připadne do B . Nuže, pokud si nyní představíme ordinátu bd nekonečně blízkou BD , která se s křivkami ANB, COB setkává v bodech f, g , získáme hodnotu $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$, jež se neliší od BD . Jde tedy pouze o to najít poměr bg ku bf . Avšak je zjevné, že když abscisa AP přejde v AB , ordináty PN, PO se stanou rovny nule, a že když AP přejde v Ab , stanou se tyto ordináty bf, bg . Odtud plyne, že samy ordináty bf, bg představují diferenciály ordinát v bodech B a b vzhledem ke křivkám ANB, COB , a tudíž, že když vezmeme diferenciál čitatele a vydělíme jej diferenciálem jmenovatele, za předpokladu $x = a = Ab$ neboli AB , získáme hledanou hodnotu ordináty bd neboli BD (s. 301).



Obrázek 9: l'Hospitalovo pravidlo (Makovský, 2014, s. 246)

Veselý (2004) korektně označil pravidlo jmény obou matematiků:

Věta (Johann Bernoulli 1691/92, de l'Hospital 1696). Necht' f, g mají vlastní derivace všude v intervalu (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $g'(x) \neq 0$ všude v (a, b) a

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*.$$

Je-li dále splněn jeden z předpokladů

- 1) $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow a_+$, nebo
- 2) $|g(x)| \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow a_+$,

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Analogické tvrzení platí (po nezbytné modifikaci) pro $x \rightarrow b_-$, resp. $x_0 \in (a, b)$ (s. 144).

5.1.1 Řešené úlohy

Úloha 1

L'H: Na základě dvou úseček délek a, b , kde konstanta a je delší než konstanta b , je určena křivka $xy + aby + aa = xx + axy + bxy$, neboli $y = \frac{xx-aa}{xx-ax-bx+ab}$. Pro určení ordináty BD , když příslušná abscisa $AB(x) = a$, vyjádřím diferencially čitatele a jmenovatele: $2x dx$ a $\overline{2x - a - b} \times dx$. Podíl těchto hodnot, když $x = a$, je $\frac{2a}{a-b}$.

MP: Funkce $y = \frac{x^2-a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$ má bod odstranitelné nespojitosti v $x = a$ (De Lellis, 2013).

Chci-li určit hodnotu na okolí tohoto bodu a funkci tak uměle dodefinovat, aby byla spojitá, ověřím předpoklady věty a následně určím limitu.

$$f(x) = x^2 - a^2 \rightarrow 0 \text{ pro } x \rightarrow a;$$

$$f'(x) = 2x, f'(a) = 2a;$$

$$g(x) = x^2 - (a+b)x + ab \rightarrow 0 \text{ pro } x \rightarrow a;$$

$$g'(x) = 2x - a - b, g'(a) = a - b \wedge g'(x) \neq 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x}{2x - a - b} = \frac{2a}{a - b} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 - (a+b)x + ab}$$

Problém lze řešit i bez l'Hospitalova pravidla běžnou úpravou výrazu a zkrácením kořenů.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 - (a+b)x + ab} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{2a}{a-b}$$

Úloha 2

L'H: Křivka má danou přirozenost $y = \frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a^3\sqrt{aax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ a je třeba určit velikost ordináty BD pro $x = a$, což přímým dosazením do výrazu znamená podíl $\frac{0}{0}$. Čítec rovnice lze

diferencovat na tvar $\frac{a^3 dx - 2x^3 dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^2 dx}{3\sqrt[3]{axx}}$, pro $x = a$ má hodnotu $-adx - \frac{1}{3}adx = -\frac{4}{3}adx$.

Stejný proces pro jmenovatel přináší výraz $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}} = -\frac{3dx}{4}$. Podíl takto upravených výrazů dává délku ordináty $BD = \frac{16}{9}a$.

MP: Je třeba určit limitu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a^3\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

Pro ověření předpokladů určím limitní hodnoty a derivace funkcí v čitateli a jmenovateli:

$$f(x) = \sqrt{2a^3x - x^4} - a^3\sqrt[3]{a^2x} \rightarrow 0 \text{ pro } x \rightarrow a;$$

$$f'(x) = \frac{2a^3 - 4x^3}{2\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{a^3}{3\sqrt[3]{a^4x^2}}, f'(a) = -\frac{4a}{3};$$

$$g(x) = a - \sqrt[4]{ax^3} \rightarrow 0 \text{ pro } x \rightarrow a;$$

$$g'(x) = -\frac{3ax^2}{4\sqrt[4]{a^3x^9}} = -\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x}}$$

$$g'(a) = -\frac{3}{4} \wedge g'(x) \neq 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}, \text{ pro } x = 0 \text{ je derivace nevlastní.}$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{4a}{3}}{-\frac{3}{4}} = \frac{16a}{9} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a^3\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

Oba postupy přináší shodné výsledky.

5.1.2 Porovnání

V postupu určování limitních hodnot křivky podle l'Hospitala nebylo nutné určovat splněné předpoklady pravidla, jelikož vycházel z existujících křivek nespojitých jen v několika bodech.

6 Celková komparace

L'Hospitalův přínos byl převážně didaktický. Metody a postupy, které sepsal v *Analýze nekonečně malých*, pocházely od jeho učitele Johanna Bernoulliho, který byl markýzem náležitě odměněn (Makovský, 2022, s. 44).

V porovnání s dnešním diferenciálním počtem zmíněné metody často přináší jen částečné údaje, což je dáno absencí ortogonálního souřadnicového systému. Veličiny nabývají nezáporných hodnot, jelikož vyjadřují délku úseček. Pokud se někde vyskytuje záporná hodnota, je to dáno polohou vůči bodu a polopřímce. Dále se liší použitá matematická symbolika a terminologie. V některých úlohách se určuje jiný prvek, jako tomu bylo například při hledání tečny. L'Hospital tyto úlohy řešil určením velikosti subtangenty a v dnešní době se běžně určuje směrnice tečny vůči kartézské soustavě souřadnic.

Závěr

Cílem této práce bylo porovnat postupy vycházející z l'Hospitalových a současných definic diferenciálního počtu. Tyto odlišnosti jsem předvedla při řešení několika úloh ke každému pojmu. Vybrala jsem ta témata, se kterými jsou středoškolští učitelé matematiky a studenti vysokých škol po úvodním kurzu matematické analýzy obeznámeni a jejichž porovnání s počátky diferenciálního počtu může přispět k bližšímu pochopení řešení problémů. Zároveň l'Hospitalův geometrický přístup může mít didaktický význam i v dnešní době.

Jsem si vědoma toho, že můj pohled na l'Hospitalovy algoritmy, respektive jejich aplikování na řešení úloh, je ryze subjektivní a poznamenaný předchozí znalostí aktuálních metod. Přesto jsem se je snažila předvést v plné míře užíváním dobové symboliky.

Možné navázání na tuto práci je rozbor a porovnání zbývajících témat z *Analýzy nekonečně malých*, jako jsou evoluty, kaustiky a obalové čáry. Další možný rozvoj práce je porovnání přístupu k diferenciálnímu počtu a studiu křivek jiného významného matematika.

Seznam použitých informačních zdrojů

Knižní publikace:

Boman, E., & Rogers, R. (2024). *Differential calculus: From practice to theory*. Milne Open Textbooks.

<https://knightscholar.geneseo.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1031&context=oer-ost>

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations: two volumes bound as one*. Dover Publications. https://archive.org/details/historyofmathema00cajo_0

Courant, R. (1937). *Differential and integral calculus* (Second edition, Vol. 1.). Blackie & Son Limited. <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.205513>

Jarník, V. (1974). *Diferenciální počet (I)*. Academia.

<https://www.scribd.com/doc/169827849/Jarnik-Diferencialni-po%C4%8Det-I>

Lomtatidze, L. (2007). *Historický vývoj pojmu křivka*. Nadace Universitatis v Brně.

Makovský, J., & l'Hospital, G. -F. -A. de. (2022). *Markýz de l'Hospital a Analýza nekonečně malých*. Filosofía.

Servít, F. (1907). *Eukleidovy Základy*. Nákladem Jednoty českých matematiků.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ae/Eukleides_Servit.pdf

Trkal, V. (1956). *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa, I. díl*. Nakladatelství československé akademie věd. <https://www.digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:70f379a0-b6c8-46cd-a239-ad5da1f23453>

Veselý, J. (2004). *Základy matematické analýzy: První díl*. Matfyzpress.

Závěrečné práce:

Koudela, L. (2012). *O pojetí křivky* [Dizertační práce, Univerzita Karlova]. Digitální repozitář Univerzity Karlovy. <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/47789>

Labíková, B. (2022). *Matematické křivky ve fyzikálních problémech* [Bakalářská práce, Masarykova univerzita]. Informační systém MU. <https://is.muni.cz/th/n5n1h/>

Makovský, J. (2014). *Markýz de l'Hospital a Analýza nekonečně malých* [Disertační práce, Západočeská univerzita v Plzni]. Portál ZČU.

<https://portal.zcu.cz/StagPortletsJSR168/CleanUrl?urlid=prohlizeni-prace-detail&praceIdno=63355>

Mixa, L. (2013). *Základní pojmy matematické analýzy u Newtona, Berkleyho a jejich následovníků* [Bakalářská práce, Univerzita Karlova]. Digitální repozitář Univerzity Karlovy. <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/60196>

Procházková, V. (2020). *Konvexní a konkávní funkce* [Bakalářská práce, Univerzita Karlova]. Digitální repozitář Univerzity Karlovy. <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/120572>

Internetové zdroje:

De Lellis, C. (2013, 30. listopadu). *Discontinuity point*. Encyclopedia of Mathematics. Dostupné 28. 3. 2025 z http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Discontinuity_point&oldid=30834

Merriam-Webster. (n.d.). *Subtangent*. Merriam-Webster.com dictionary. Dostupné 6. 3. 2025 z <https://www.merriam-webster.com/dictionary/subtangent>

Weisstein, E. (n.d.). *Spinode*. MathWorld-A Wolfram Web Resource. Dostupné 10. 4. 2025 z <https://mathworld.wolfram.com/Spinode.html>

Vyjádření k využití nástrojů umělé inteligence

Při tvorbě bakalářské práce byla umělá inteligence, konkrétně ChatGPT, použita k překladu abstraktu do anglického jazyka. Jiným způsobem nebyla použita.

Seznam obrázků

Obrázek 1: ordináta a abscisa (vytvořeno v Geogebře).....	13
Obrázek 2: diferenciál (vytvořeno v Geogebře).....	16
Obrázek 3: odvození subtangenty (vytvořeno v Geogebře).....	20
Obrázek 4: část cykloidy (Makovský, 2014, s. 120).....	22
Obrázek 5: směrnice tečny k cykloidě (vytvořeno v Geogebře).....	24
Obrázek 6: nejmenší a největší ordináty (Makovský, 2014, s. 142).....	25
Obrázek 7: druhý diferenciál (Makovský, 2014, s. 156).....	30
Obrázek 8: bod přehybu (Makovský, 2014, s. 160).....	32
Obrázek 9: l'Hospitalovo pravidlo (Makovský, 2014, s. 246).....	38