

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Tam a zpátky mezi vědou a realitou: Matematické modelování v úlohách
s přírodovědným kontextem (didaktický experiment)

Back and forth between science and reality: Mathematical modelling in tasks
with a science context (didactic experiment)

Ráchel Šmíd Ridzoňová

Vedoucí práce: Mgr. Radka Havlíčková, Ph.D.
Studijní program: Učitelství pro základní školy
Studijní obor: Učitelství pro 1. stupeň základní školy

Odevzdáním této diplomové práce na téma Tam a zpátky mezi vědou a realitou: Matematické modelování v úlohách s přírodovědným kontextem (didaktický experiment) potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha-Střešovice 3. prosince 2023

Na tomto místě bych chtěla poděkovat zejména své vedoucí, dr. Radce Havlíčkové, za konzultace této práce a vedení k preciznosti formulací a opatrnosti soudů, a to během celého studia. Děkuji všem svým gymnaziálním i univerzitním učitelům jazyka, matematiky, filozofie a datových struktur, kteří formovali mé myšlení. Podobně jsem vděčná za št'ouravé otázky Ondry a jiných dětí. Zůstalo to ve mně. Nakonec děkuji Tonymu a Miriam za nekonečné rozhovory na procházkách o modelech ze světa ekonomie a počítačové grafiky a zbylé rodině a přátelům za všestrannou podporu. A do Rakouska posílám pozdrav dr. Marii Fast z vysoké školy KPH Wien: Ich möchte mich bei Ihnen dafür bedanken, dass Sie meinen Horizont in der Mathematikdidaktik so sehr erweitert haben.

ABSTRAKT

Matematické modelování je součástí zaměření vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace v Rámcovém vzdělávacím programu a zároveň tématem, jemuž se hojně věnují zahraniční studie. V českém výzkumu se mu ovšem nedostává velké pozornosti. Cílem diplomové práce je představit pojem českým čtenářům a vyzkoušet propojení matematického modelování s přírodovědnými tématy a realizaci modelovacích úloh v 5. ročníku základní školy. Matematické modelování je představeno jako řešitelský proces komplexní úlohy s reálným kontextem v krocích (0) uchopení úlohy, (1) tvorba reálného modelu, (2) matematizace, (3) matematické operace, (4) interpretace výsledku a (5) validace řešení. Dále je popsána kompetence k modelování, modelovací úloha a vztah k problematice slovních úloh.

Zvolený kvalitativní výzkum metodou didaktických experimentů zkoumá uplatnění holistického a analytického přístupu k výuce, identifikuje obtížné kroky modelování pro žáky 5. ročníku a přináší poznatky k mezipředmětovým vztahům a organizačním formám ve výuce modelování. Výsledky výzkumu pozitivně ukázaly, že zařazení modelovacích úloh do běžné výuky a jejich propojení s přírodovědnými tématy je možné, ale přináší nové výzvy pro učitele. Kromě práce ve skupinách a strategických intervencí učitele se jako přínosná prokázala také celotřídní diskuse. V závěru diplomové práce jsou výsledky diskutovány s odbornou literaturou. Učitelům je předložen nápadník úloh a souhrn doporučení pro výuku.

KLÍČOVÁ SLOVA

Matematické modelování, reálný kontext, kompetence k modelování, slovní úloha, didaktický experiment, mezipředmětové vztahy, 1. stupeň ZŠ

ABSTRACT

Mathematical modelling is part of the focus of the educational area "Mathematics and its applications" in the Czech national curriculum and is also a widely studied topic abroad. However, it does not receive much attention in Czech research. This thesis aims to introduce the concept to Czech readers and test the connection of mathematical modelling with science topics and the implementation of modelling tasks in the 5th grade of primary school. The thesis presents mathematical modelling as solving process of a complex problem with a real context in steps (0) understanding the problem, (1) creating the real model, (2) mathematization, (3) mathematical operations, (4) interpretation of the result and (5) validation of the solution. Modelling competence, the modelling problem, and the relationship to word problems are also described.

The chosen qualitative research method of didactic experiments explores the application of a holistic and analytical approach to teaching, identifies the difficult steps of modelling for 5th-grade students, and provides insights into cross-curricular relationships and organizational forms in the teaching of modelling. The research findings positively demonstrate that incorporating modelling tasks into regular lessons and linking them to science topics is possible but brings new challenges for teachers. In addition to group work and teacher's strategic interventions, whole-class discussion proved beneficial. In the end, the results are discussed with the literature. Teachers are presented with an inspirational task list and a summary of recommendations.

KEYWORDS

mathematical modelling, real world context, modelling competence, word problem, didactic experiment, cross-curricular teaching, primary education

HIN UND HER ZWISCHEN WISSENSCHAFT UND REALITÄT: MATHEMATISCHE MODELLIERUNG IN AUFGABEN MIT NATURWISSENSCHAFTLICHEN KONTEXT (DIDAKTISCHES EXPERIMENT)

Mathematisches Modellieren ist ein Bestandteil des Schwerpunkts des Bildungsbereichs Mathematik und ihre Anwendung im tschechischen Rahmenbildungsprogramm (Kurrikulum) sowie ein Thema, dem sich viele ausländische Studien widmen. In der tschechischen Forschung wird dem mathematischen Modellieren jedoch nicht viel Aufmerksamkeit gewidmet. Das Ziel meiner Diplomarbeit ist es, diesen Begriff den tschechischen Lesern vorzustellen und eine Verbindung des mathematischen Modellieren mit naturwissenschaftlichen Themen sowie eine Umsetzung der Modellierungsaufgaben in der 5. Klasse zu probieren. Mathematisches Modellieren wird als Lösungsprozess einer Komplexaufgabe mit realem Kontext in folgenden Schritten vorgestellt: (0) Begreifen der Aufgabe, (1) Erstellung des realen Modells, (2) Mathematisierung, (3) mathematische Operationen, (4) Interpretation des Ergebnisses und (5) Validierung der Lösung. Weiter wird die Modellierungskompetenz, die Modellierungsaufgabe und die Beziehung zur Problematik der Textaufgaben beschrieben.

Die gewählte quantitative Forschung nutzt die Methode der didaktischen Experimente zur Untersuchung der Anwendung der holistischen und der analytischen Einstellung zum Unterricht, identifiziert schwierige Schritte der Modellierung für Schüler und Schülerinnen der 5. Klasse und bringt Erkenntnisse zu fächerübergreifenden Beziehungen und organisatorischen Formen im Modellierungsunterricht. Die Ergebnisse der Forschung haben positiv gezeigt, dass die Eingliederung der Modellierungsaufgaben in den üblichen Unterricht und ihre Verbindung mit naturwissenschaftlichen Themen möglich ist, aber sie bringt neue Herausforderungen für die Lehrkräfte. Neben der Gruppenarbeit und den strategischen Lehrerinterventionen hat sich auch die Klassendiskussion als nützlich erwiesen. Im Fazit der Diplomarbeit werden die Ergebnisse mit Fachliteratur diskutiert. Den Lehrkräften werden hier Ideen für Aufgaben und eine Zusammenfassung von Empfehlungen für den Unterricht vorgelegt.

SCHLÜSSELBEGRIFFE

mathematisches Modellieren, realer Kontext, Modellierungskompetenz, Textaufgabe, didaktisches Experiment, fächerübergreifende Beziehungen, Primarstufe

1 Obsah

1	Obsah.....	6
2	Úvod	9
3	Teoretická východiska výzkumu	12
3.1	Vymezení významů termínu „modelování“	12
3.2	Matematické modelování pohledem aplikované matematiky.....	14
3.2.1	Tři složky matematického modelu	15
3.3	Matematické modelování pohledem pedagogiky	16
3.4	Proces modelování	18
3.4.1	Cyklus matematického modelování podle Bluma	20
3.4.2	Cyklus matematického modelování podle Turner.....	22
3.4.3	Srovnání a návrh vlastního modelovacího cyklu.....	24
3.5	Kompetence k modelování	27
3.5.1	Dílčí kompetence a jejich indikátory	28
3.5.2	Orientační smysl: jak se díky metakognici neztratit v procesu	32
3.6	Slovní úlohy a modelovací úlohy jako prostředek k modelování.....	34
3.6.1	Vymezení modelovací úlohy	35
3.6.2	Reálný kontext úloh.....	36
3.6.3	Povrchový proces řešení vs. modelování	37
3.6.4	Jiné příležitosti k modelování.....	38
3.7	Výuka matematického modelování na 1. stupni základní školy?	38
3.8	Jak učit matematické modelování.....	41
3.8.1	Kompetence k modelování jako cíl: holistický a analytický přístup.....	41
3.8.2	Role učitele	42
3.8.3	Vhodné organizační formy	43
4	Výzkumná část	45

4.1	Sledované otázky	45
4.2	Metodologie	46
4.2.1	Teoretické ukotvení výzkumné strategie	46
4.2.2	Tvorba úloh a pracovních listů	47
4.2.3	Etika výzkumu, účastníci a průběh realizace.....	48
4.2.4	Pozorování, sběr dat a jejich vyhodnocení	49
4.3	Dýchání myši, slona a člověka (didaktický experiment)	50
4.3.1	Analýza úlohy a jejího potenciálu vzhledem k modelování.....	51
4.3.2	Poznatky z pozorování (úloha Dýchání)	56
4.4	Ideální tepová frekvence (didaktický experiment)	61
4.4.1	Analýza úlohy a jejího potenciálu vzhledem k modelování.....	62
4.4.2	Poznatky z pozorování (úloha Ideální tepová frekvence)	65
4.5	Školní věk (didaktický experiment).....	67
4.5.1	Analýza úlohy a jejího potenciálu vzhledem k modelování.....	68
4.5.2	Poznatky z pozorování (úloha Školní věk).....	72
4.6	Výsledky a jejich diskuse	74
4.6.1	Holistický vs. analytický přístup k výuce modelování.....	74
4.6.2	Obtížné dílčí kompetence	75
4.6.3	Mezipředmětové vztahy (propojení matematiky a přírodovědy)	78
4.6.4	Organizační formy výuky	81
4.6.5	Shrnutí výsledků	82
5	Vědecké a didaktické důsledky výzkumu	84
5.1	Dilemata a otázky výzkumníka matematického modelování	84
5.2	Dilemata a otázky učitele matematického modelování	88
5.2.1	Nápadník úloh	90
5.2.2	Doporučení pro učitele	90

5.3	Limitace a podněty k dalšímu výzkumu	92
6	Závěr.....	94
7	Literatura	96
9	Seznam příloh.....	103
	Příloha 1 – Dýchání myši, slona a člověka (původní pracovní list).....	103
	Příloha 2 – Ideální tepová frekvence (původní pracovní list)	103
	Příloha 3 – Školní věk (původní pracovní list).....	103
	Příloha 4 – Školní věk (upravený pracovní list)	103
	Příloha 5 – Vzduch v nose (původní pracovní list)	103

2 Úvod

Motto:

Erst das Hin und Wieder

zwischen Wissenschaft und Wirklichkeit in beiderlei Richtung

erschöpft die Aufgabe, die im materialen Zweck der Mathematik liegt.

Teprve až obousměrným „tam“ a „zpátky“
mezi vědou a realitou
se vyčerpá úkol, který leží v materiálním účelu matematiky.¹

(Lietzmann, 1919; cit. dle Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013, s. 19)

Německý citát jsem vybrala proto, že s tématem matematického modelování jsem se poprvé setkala díky svému studijnímu pobytu ve Vídni. V seminářích pod vedením doktorky Marie Fast, profesora Christiana Nosko a dalších vyučujících jsem pracovala s rakouskými kurikulárními dokumenty, plánovala výuku matematiky podle německých učebnic i individuální podporu žáků podle místních odborných metodik. A především jsem nahlížela do tradice didaktiky německojazyčných zemí a divila se pokaždé, když jsem narazila na nový pojem, nebo dokonce taxonomii pro postupy, o kterých jsem v Česku ani neslyšela.

Některé pojmy a koncepty německé didaktiky² jsem později dokázala spárovat s jejich českými protějšky, některé zpětně vidím jako zbytečné, neprostopupné klece pro zařazení kreativních aktivit a některým dosud nerozumím. Přesto mě moje zahraniční zkušenost upozornila na několik zajímavých témat. Jedním z nich je právě matematické modelování.

Později, když jsem začala samostatně učit, jsem cítila, jak mě přitahují jakékoliv metody výuky, projekty nebo alternativní vzdělávací směry, kde je možné prohlubovat mezipředmětové vztahy. Při reflexi vlastního vyučovacího stylu jsem shledala, že aniž bych

¹ Pozn.: překlad autorka.

² Myšleno didaktiky matematiky německojazyčných zemí. Německo a Rakousko sdílejí učebnice matematiky, a pokud mohu ze své krátké zkušenosti soudit, i základní směřování a terminologii v didaktice.

to vždy dělala cíleně, ve výuce téměř denně využívám propojení matematických, informatických, jazykových a jiných struktur pro vztahování se ke světu. S vedoucí práce dr. Radkou Havlíčkovou jsme se proto snažily hledat téma, které by z matematiky přesahovalo jinam. Původní zaměření na úlohy s přírodovědným kontextem se postupně vyvinulo právě do zkoumání matematického modelování ve výuce.

Po krátké rešerši jsem zjistila, že české RVP sice matematické modelování zmiňuje, ale téma není v české literatuře téměř vůbec zpracováno. Z tohoto důvodu jsem přijala za jeden ze dvou cílů práce opravdu odpovědně nastudovat dostupnou zahraniční literaturu a sestavit teoretickou část práce tak, aby z ní mohl český čtenář získat základní, ale dobře podložený úvod do tematiky. Cíl výzkumné části jsem volila takový, aby souzněl s mým osobním zaměřením a zároveň aby odpovídal běžné české realitě ve školách. Cílem je vyzkoušet, jestli a jak by se daly úlohy s prvky modelování propojit s přírodovědnými tématy a zároveň realizovat na ploše běžných vyučovacích hodin v rozvrhu 5. ročníku základní školy. Tento cíl posléze konkretizuji ve čtyřech otázkách.

Diplomová práce je rozdělena na část teoretickou (*Teoretická východiska výzkumu*) a část výzkumnou. na tyto dvě navazuje ještě část s názvem *Vědecké a didaktické důsledky výzkumu*, kde diskutuji vybrané otázky a problémy týkající se matematického modelování. Protože zde vycházím jak ze svých empirických závěrů, tak z výkladu v teoretické části, nezařazuji *Vědecké a didaktické důsledky výzkumu* ani do teoretické, ani do praktické části, ale nechávám je stát zcela stranou.

Teoretická část obsahuje vymezení pojmu matematického modelování, schéma procesu modelování podle dvou autorů a mé vlastní schéma, kapitolu ke kompetencím modelovat a konečně několik dílčích kapitol, které se věnují přímo modelovacím úlohám a didaktice modelování. Ve výzkumné části prvně uvádím sledované otázky. Na ně navazuji popisem metodologie svého výzkumu a poté popisem tří didaktických (výukových) experimentů. U každého z nich analyzuji využitou úlohu, resp. úlohy, uvádím zajímavá pozorování z realizace a analýzu těchto pozorování. Výsledkem výzkumu jsou souhrnné odpovědi na sledované otázky, založené na vlastních experimentech, ale prezentované zároveň v dialogu se zjištěními z odborné literatury (kapitola *Výsledky a jejich diskuse*). V závěrečné kapitole *Vědecké a didaktické důsledky výzkumu* nakonec částečně se zkušeností

z experimentů zpochybňují některá teoretická východiska práce a jasně přiznávám limity realizovaného výzkumu. Tato část práce také nabízí velmi stručný seznam doporučení pro výuku matematického modelování a soupis literatury s dalšími úlohami a popisuje několik klíčových dilemat při zavádění matematického modelování do praxe.

Pro učitele, kteří by se chtěli s matematickým modelováním jen letmo seznámit anebo zkusit ve třídě konkrétní aktivitu, doporučuji z teoretické části obzvlášť kapitolu 3.4.3, kde navrhuji a česky popisuji přehledné schéma řešitelského procesu a dále souhrn dílčích kompetencí, které by žáci při modelování měli zvládnout (kap. 3.5.1). K praktické realizaci se pak může hodit nápadník modelovacích úloh s odkazy na další literaturu (kap. 5.2.1) a stručné doporučení pro učitele (kap. 5.2.2).

3 Teoretická východiska výzkumu

V teoretické části práce je prvně vymezen pojem „modelování“, jak jej používám pro účely této práce. V následujících dvou podkapitolách je představen pohled na matematické modelování ze dvou stran: perspektivou aplikované matematiky (3.2) a proti tomu perspektivou pedagogiky (3.3). Protože současný výzkum popisuje matematické modelování jako cyklický proces, uvádím v podkapitole 3.4 – *Proces modelování* dvě schémata modelovacích cyklů podle různých autorů a vytvářím také schéma vlastní (3.4.3). na představený modelovací cyklus a jeho dílčí kroky pak přímo navazuje oddíl pojednávající o kompetenci k modelování a dílčích kompetencích (3.5).

Východiskem pro modelování ve výuce je vždy nějaký problém nebo úloha. Proto je v podkapitole 3.6 – *Slovní úlohy a modelovací úlohy jako prostředek k modelování* vymezeno, jaké charakteristiky má mít modelovací úloha. Zároveň v podkapitole hledám průsečíky tématu modelování a problematiky slovních úloh.

Na posledních stranách teoretické části se snažím zpracovat dostupnou literaturu k otázce, jak vlastně modelování učit. Protože se většina výzkumů zaměřuje na sekundární stupeň vzdělávání, rozpadla se tato otázka do dvou podkapitol: jestli vůbec matematické modelování patří na 1. stupeň základní školy (3.7) a jaké principy a doporučení platí pro výuku nezávisle na věku žáků (3.8).

3.1 Vymezení významů termínu „modelování“

Celá diplomová práce se zabývá (matematickým) modelováním a jeho využitím ve vzdělávání. Objevila jsem ale více odlišných významů, které má výraz „modelování“ v pedagogickém diskurzu:

1. Modelování jako strategie předávání instrukcí³ a uvádění žáků do nové činnosti je v českém prostředí popsáno především při výuce čtenářských dovedností. Obdobně ale může fungovat pro každou jinou manuální nebo mentální dovednost.

³ Podle University of Louisville je modelování „instructional strategy“; my bychom mohli mluvit o vzdělávací metodě. (University of Louisville, n.d., nečíslováno)

Modelováním se míní názorná ukázka činnosti spolu se slovním vysvětlením každého kroku, příp. vysvětlením, jak se vyrovnat s možnými obtížemi. Jeho efekt stojí na zapojení zrcadlových neuronů a modelování v tomto smyslu je tedy součástí učení přímou nápodobou (Šafránková, 2009; University of Louisville, n.d.).

2. Především v didaktice matematiky je sloveso „modelovat“ někdy používáno v podobném významu jako „reprezentovat“. Číslo nebo třeba geometrický pojem je zastoupen – reprezentován – modelován něčím jiným, totiž svou reprezentací. Žáci tak modelují součet pomocí kuliček nebo trojúhelník pomocí gumičky na geoboardu. Pro reprezentace samotné můžeme přijmout Brunerovo dělení na enaktivní (činnostní), ikonické nebo symbolické reprezentace (Kuřina, Jazyky a reprezentace ve vyučování matematice, 2013). Hošpesová explicitně zmiňuje, že modelování má charakter činnosti (2014, nečíslováno). Tomu odpovídá, že se pohybujeme především v rovině enaktivní reprezentace. Řečeno jinak: v praxi obvykle „modelujeme“ pomocí modelíny, sirek, tangramů, parket; manipulujeme s fyzickými předměty.
3. Jiné pojetí modelování se nalézá u Maňáka: „Modelování je postup, který vede k vytvoření modelu, [skrze nějž] umožňuje zkoumat složité jevy jako systémy.“ (2007, str. 41). Modelování v tomto významu může nést přívlastek „vědecké“, právě proto, že se uplatňuje jako metodologický postup v přírodních i společenských vědách (stránky 40–43). Pokud do vědeckého modelování vstupuje matematika, píše se o modelování matematickém a přesouváme se do oblasti aplikované matematiky (Hřebíček & Škrdla, 2006).

Já budu mít nadále na mysli tento třetí význam: modelování jako metodologický postup, ve kterém se snažíme vytvořit model a díky němu zjednodušit reálnou situaci natolik, abychom jí lépe porozuměli a aby byla přehlednější. Tvorba matematického modelu má vždy nějaký cíl: díky modelování můžeme vyřešit dané otázky nebo úlohy, i když analyzovat přímo reálnou situaci nebo jev by bylo příliš komplikované, či dokonce nemožné.

Příkladem situace, která vyžaduje matematické modelování ad 3 a je zároveň přístupná pro žáky základní školy, může být srovnávání různých variant plánovaného školního výletu

podle očekávaných výdajů. Je zjevné, že řešení takové úlohy bude víceukrokové, že hned na jeho počátku bude potřeba zjednodušovat a že cesta k výsledku skrz realizaci nápadu a pozorování důsledků není možná (žáci pojedou na jeden vybraný výlet, ne na všechny navržené, aby je srovnali). Cesta k modelu situace v tomto případě zahrnuje předpoklad počtu cestujících, zjišťování orientačních cen dopravy a programu nebo úvahu o finanční rezervě pro nečekané výdaje.⁴

Matematické modelování ve významu ad 3 také využívají vývojáři 3D zobrazovacích softwarů, když se snaží napodobit chování světla (Phong, 1975); vedoucí, kteří objednávají chleba k táboráku a zároveň na snídani po noční hře; epidemiologové sledující šíření choroby nebo budoucí maminka, která podle zveřejněných statistik o poskytované péči vybírá porodnici. Ti všichni modelují realitu pomocí matematických struktur.

3.2 Matematické modelování pohledem aplikované matematiky

Právě se nacházíme v oblasti aplikované matematiky. Zde popíšu matematické modelování jako metodologický postup zkoumání jevů (někdy též „systémů“) z reálného světa. Podrobněji se podívám na výhody použití matematického modelu, pokusím se ukotvit matematické modelování mezi reálným a matematickým světem a nakonec představím složky matematického modelu.

Autoři vysokoškolských skript *Úvod do matematického modelování* Hřebíček a Škrdla popisují modelování jako pomocníka, nástroj pro jiné vědní obory, a to jak v přírodních, tak ve společenských vědách. Matematický model zjednodušeně reprezentuje studovanou situaci nebo jev z reálného světa (Maaß, 2010; Hřebíček & Škrdla, 2006) a jeho použití přináší mnoho výhod:

- srozumitelně popisuje všechny relevantní faktory dané situace,
- umožňuje odhalit podstatné vztahy mezi jednotlivými prvky,
- může urychlit proces poznání, pokud pozorování skutečných jevů vyžaduje dlouhý čas,

⁴ Úloha je inspirována podobným projektem o třídní exkurzi, který v rámci svého výzkumu s několika třídami realizovala Carlson (2021).

- přináší nové, přehledné, stručné zobrazení reality, čímž obohacuje naše myšlení,
- umožňuje více variant řešení (Hřebíček & Škrdla, 2006, stránky 1–2).

Matematický model je jako lupa, díky níž lépe uvidíme jednotlivá vlákna zašmodrchaného klubíčka tenké příze reality v místě toho nejtužšího zauzlení. Je pozoruhodné, že i autoři, kteří velmi technicky popisují účelovou aplikaci matematických modelů v aktuálních vědeckých problémech, upozorňují na přínos v tom, že „vnášejí nové poznání do našeho myšlení“ (str. 2).

V dosavadním popisu se nám stále dokola objevovala „reálná situace“, „reálný jev“ nebo vůbec „realita“ stojící jakoby v protikladu vůči matematickému modelu. Můžeme si opravdu představit dva oddělené světy: *svět reality* a *svět matematiky*. Matematický model jistě náleží do světa matematiky. Realita zahrnuje „zbytek světa“ mimo matematiku – přírodu, každodenní život nebo jiné vědní disciplíny. Matematické modelování je v tomto vidění překlad tam i zpět mezi těmito dvěma světy (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Maaß, 2010; Pollak, 1977), viz schéma 1.

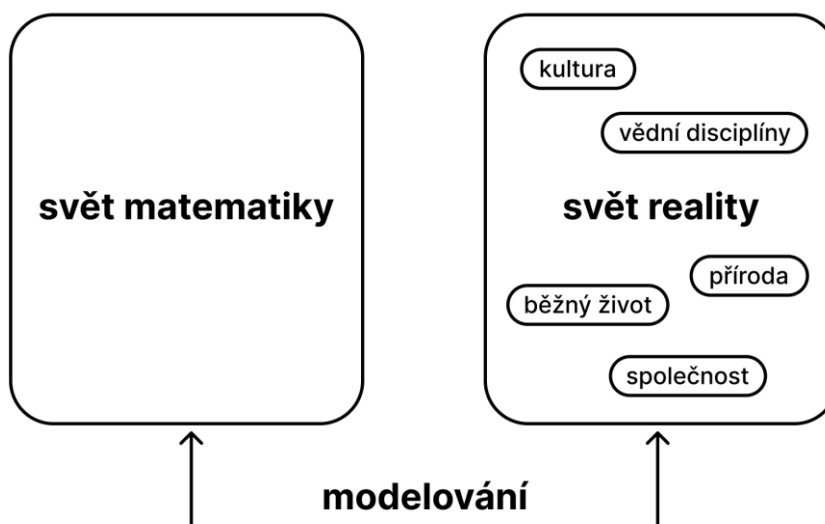


Schéma 1 – Modelování jako překlad (Niss, Blum & Galbraith, 2007, str. 4; úprava a doplnění autorka)

3.2.1 Tři složky matematického modelu

Modelování jsem zakotvila mezi světem matematiky a světem „zbytku“, totiž světem reality. Nyní můžeme nakouknout pod pokličku matematice. Co se skrývá uvnitř matematického modelu? Jen pozor, že stále držíme perspektivu aplikované matematiky. Ta zde může být

nápomocná. Jakmile se totiž dostaneme k pedagogickému pohledu na matematické modelování, budeme zkoumat nikoli útroby matematiky, nýbrž především proces *překladu* mezi dvěma světy.

Podle Hřebíčka & Škrdlý (2006) popisuje každý matematický model reálný jev pomocí dvou, resp. tří složek:

- První složkou jsou proměnné a konstanty. Proměnná nabývá různé hodnoty podle vstupních údajů v dané situaci; kromě čísla se může jednat třeba o booleovské hodnoty ($ANO \times NE$), slovo nebo jiný textový řetězec.
- Druhou složkou jsou matematické struktury neboli omezující podmínky, které vymezují vztahy mezi proměnnými. Matematický model může být založen na struktuře analytické (můžeme si představit rovnice nebo funkce), geometrické, topologické (spojnicové grafy, cesty v nich), arteficiální (vývojový diagram, programovací jazyky) nebo kvalitativní (jiné prostředky popisu).
- Za třetí složku matematického modelu můžeme považovat jeho řešení. Podle zadaného problému a cíle hledáme přípustné, maximální, minimální, optimální nebo aproximativní řešení (stránky 3–5).

Pro další uvažování je zásadní šíře tohoto obecného pohledu. Čtenář, učitel a nejlépe i žák musí mít stále na paměti, že matematický model není nutně vždy rovnice, která by se sestavila z několika dostupných číselných údajů a přinesla to jediné správné, pěkné, číselné řešení.

3.3 Matematické modelování pohledem pedagogiky

Od aplikované matematiky se pomalu dostáváme směrem k pedagogickému pojetí matematického modelování. Jeden z mála autorů, který se mu v českém prostředí věnoval, je Fiala (2004). Ten uvádí matematické modelování jako výukovou metodu, která má vycházet z pedagogického konstruktivismu. Podle něj je „cílem matematického modelování činnostními formami výuky dosáhnout u žáků kognitivních posunů prostřednictvím matematizace reálných situací, tj. hledáním matematických struktur (modelů skutečnosti a teorií) a jejich následnou interpretací“ (str. 1).

Podle Greefratha a kolektivu (2013, str. 20) plní modelování dokonce mnoho cílů; dělí je na cíle *obsahové*, *procesní* a *všeobecné*⁵. *Obsahovými* cíli míní, že žáci dokážou využít matematické prostředky, aby poodkrývali (*erschließen*) okolní svět a aby dokázali porozumět jevům okolního světa. Totiž že prostě použijí modelování jako nástroj i v situacích mimo školu.

Další skupinu cílů vztahuje Greefrath k učebnímu procesu (cíle *procesní*): modelování podle něj vyžaduje a podporuje další matematické kompetence, jako třeba řešení problémů, využití rozličných heuristických strategií, komunikaci a argumentaci. Modelovací úlohy by podle něj také měly zvyšovat motivaci a zájem o matematiku.

Ještě v širším pohledu využití modelování ve výuce pomáhá budovat obraz matematiky jako vědy, která má dopady i na celou demokratickou společnost. Skupinová práce nad modelovacími úlohami studentům poslouží k rozvoji sociálních kompetencí a později umožní, aby kriticky posuzovali různé společenské fenomény, jako třeba daňové modely. Tyto cíle nazývá Greefrath „všeobecné“ (str. 20). V pojmosloví české pedagogiky tušíme sociální, personální a také občanské klíčové kompetence (MŠMT, 2023, str. 12).

Hledáme-li odraz matematického modelování ve vzdělávací politice nebo kurikulu, může nám pomoci termín *STEM education* nebo prostě jen STEM, akronym pro *Science – Technology – Engineering – Math*⁶. Jedná se o snahu Spojených států amerických a následně mnoha dalších států světa podpořit vzdělávání v přírodovědných a technických oborech a tím i konkurenceschopnost ekonomiky těchto zemí. Kromě posílení jednotlivých oborů na všech stupních škol usilují i o jejich integraci a vzájemné propojení (White, 2014; Cimbálník, 2017) a také rozvíjení dalších kompetencí, jako je kritické myšlení, schopnost řešit problémy nebo kreativita (Wei, Zhang & Guo, 2022).

⁵ Opatrněji přeloženo: *inhaltsorientierte* – orientované na (matematický) obsah; *prozessbezogene* – vztahující se k procesu; *allgemeine* – všeobecné, obecně pedagogické. Pozn.: překlad autorka.

⁶ Česky *věda, technika, technologie, matematika*. V českém prostředí odpovídá pojmu STEM zhruba termín „polytechnické vzdělávání“. Koncept polytechnického vzdělávání také usiluje o integraci klasických oddělených předmětů, ale na rozdíl od STEM místo matematiky zahrnuje oblast environmentálního vzdělávání (Cimbálník, 2017, str. 35).

Podle přehledové studie Wei a kolektivu je matematické modelování právě tím, co může propojit jinak nesouvisející obory STEM mezi sebou (2022, str. 10). Pokud aplikovaná matematika viděla v matematickém modelování především „pomocníka“ pro vyřešení otázek nebo problémů z jiných oborů (Hřebíček & Škrdla, 2006, str. 1), začínají Wei a kolektiv svou definici slovem „proces“:

„Matematické modelování je proces použití matematických metod, abychom analyzovali situace z reálného světa. Během procesu je problém z reálného světa matematicky formulován, řešen pomocí matematických modelů a řešení problému je interpretováno a vyhodnoceno v reálném světě.“⁷

(Wei, Zhang & Guo, 2022, str. 2)

O několik stránek později autoři také dodávají, že matematickým modelováním se myslí jak celý proces, tak jeho výsledek (*outcome*) (str. 10). Tomu celému můžeme rozumět tak, že aplikovaná matematika hledá efektivní způsob, jak matematiku využít, ale pedagogika hledí i na to, jaké má vlastní proces, vlastní činnost matematického modelování přínosy pro řešitele. Ve schématu Niss a kolektivu, které jsem uvedla výše (Schéma 1), znázorňovala celé modelování jen jedna oboustranná šipka. Některá schémata z oblasti aplikované matematiky jsou košatější (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013), přesto nikdy nedosahují takové propracovanosti, jako když celý *proces* modelování v jednotlivých krocích popisují badatelé v pedagogice. Od zvládnutí všech jednotlivých kroků totiž pak odvozují definici kompetence matematicky modelovat (Wei, Zhang & Guo, 2022). To popíšu v následujících podkapitolách.

3.4 Proces modelování

Pro zobrazení jednotlivých myšlenkových kroků v procesu modelování se využívá kruhové schéma, tzv. modelovací kruh nebo cyklus. Ty jsou už od konce minulého století

⁷ „Mathematical modelling is the process of using mathematical methods to analyse real-world situations. During the process, a real-life problem is formulated mathematically, and it is solved with the help of mathematical models, and the solution to the problem is interpreted and evaluated in the real world.“ (Pozn.: překlad autorka.)

publikovány v mnoha variantách (Blum, 2015; Vorhölter, Greefrath, Borromeo Ferri, Leiß & Schukajlow, 2019). Zde uvedu pouze dva z nich:

- Sedmikrokový modelovací cyklus Bluma původně z roku 2007 (cit. dle Blum & Borromeo Ferri, 2009) je založen na výzkumech z aplikované matematiky, lingvistiky i kognitivní psychologie (Blum, 2015, str. 76). Zajímavostí je, že v různých krocích rozlišuje různé „modely“. Toto schéma je s drobnými změnami často přebíráno autory z německojazyčného prostředí (Maaß, 2010; Vorhölter, Greefrath, Borromeo Ferri, Leiß & Schukajlow, 2019; Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013).
- Pětifázový⁸ modelovací cyklus Turner a kolektivu, publikovaný v knize *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (2021), naopak odpovídá prostředí Spojených států: navazuje na předchozí výzkumy severoamerických autorů, reflektuje kurikulární dokumenty USA a strategii STEM vzdělávání (Turner, a další, 2021, stránky 238–239). Především má ale sloužit jako popis procesu modelování pro další výzkum speciálně v primárním vzdělávání.

⁸ Pojmy „krok“ a „fáze“ v této práci používám střídavě a synonymicky pro jeden posun v rámci modelovacího procesu.

3.4.1 Cyklus matematického modelování podle Bluma

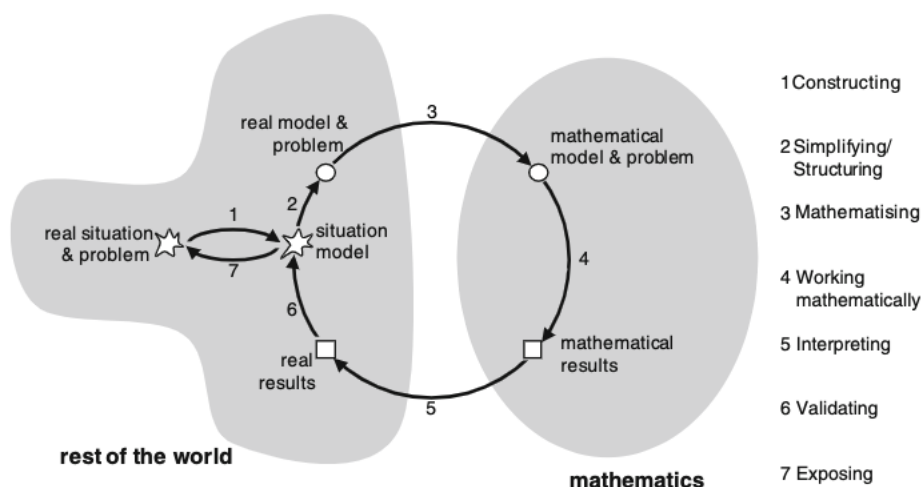


Schéma 2 – Cyklus matematického modelování podle Bluma

Blum se ve svém cyklu drží rozdělení na dva světy, jak jsem o něm psala v podkapitole 3.2. Ve schématu je proto na první pohled patrné, o co tu vlastně jde: Z reálného světa se řešitel podívá do světa matematiky (krok 3 – *Matematizace*) a po postupech ve světě matematiky musí jasně překlénout oblouk zpět do světa reality (krok 5 – *Interpretace*).

Už samotný postup v rámci světa reality ale obsahuje několik dílčích kroků (1, 2, 5, 6, 7), které vyžadují krátký komentář:

- V kroku 1 – *Constructing a situation model* musí řešitel porozumět reálné situaci a vůbec vytvořit situační model (*situation model*). Podle Bluma vznikají obtíže proto, že řešitelé se zkrátka naučili, že „mohou přežít i bez snahy o pozorné čtení a porozumění danému úkolu v jeho kontextu“⁹ (2015, str. 79). Borromeo Ferri (2007) pojem „situační model“ nahradila pojmenováním *mental representation of the situation (MRS)*, čímž zdůrazňuje, že sledujeme kognitivní procesy uvnitř hlavy řešitele.

⁹ „...they can survive without the effort of careful reading and understanding given contextual tasks.“ (Pozn.: překlad autorka.)

- Krok 2 – *Simplifying and structuring* vyžaduje vlastní předpoklady (*assumptions*) (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Nahlédnout, co se myslí *zjednodušením a strukturováním*, může pomoci Šíma. Ten píše o kroku *Definování systému*: „...prvky a vazby nevýznamné z hlediska účelu použití nebudeme dále zohledňovat.“ (2013, str. 11). Někdy také některé informace nejen vypustíme, protože nejsou třeba k danému cíli, ale také situaci nebo některé vstupy *idealizujeme* (Maaß, 2006, str. 115), aby byl problém dostupným aparátem snáze řešitelný.
- Kroky 4 a 5 popisují převedení reálného modelu do matematického modelu (*mathematising*) a matematické postupy, kterými se matematický model řeší (*working mathematically*).
- Krok 5 – *Interpreting* je klíčová chvíle návratu ze světa matematiky k realitě. V tu chvíli si řešitel uvědomuje, co vyjadřuje řešení matematického modelu v kontextu původní úlohy. Ve shodě s popisem matematického modelu z perspektivy aplikované matematiky, jak ho už známe od Hřebíčka a Škrdly (2006, str. 5), má i Blum ve svém schématu *results*, tedy více výsledků (řešení).
- Když dojde na krok 6 – *Validating*, už víme, co nového jsme zjistili v kontextu původní úlohy. Pokud původní otázka směřovala například na informované rozhodnutí, můžeme na základě výsledku odpovědět (ano, vyplatí se...). Každopádně do tohoto kroku náleží kontrola, je-li výsledek smysluplný (Blum, 2015, str. 76).
- Pro krok 7 – *Exposing* používá Maaß v témže schématu *presenting* (2010, str. 288) a Greefrath *vermitteln*, tj. „sdělit“ (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013, str. 18). Pokud bychom se na modelovací úlohy dívali jako na speciální typ slovních úloh (viz kapitola 3.6), mohli bychom si pod tímto krokem představit zápis celého řešení a odpovědi. Protože je ale Blumův cyklus modelování původně z německojazyčného prostředí, nabízí se také souvislost s kompetencí *komunikovat a zobrazit* myšlenkové procesy nebo řešitelské strategie v matematice, která je součástí německého kurikula (KMK [Kultusministerkonferenz], 2005, str. 8).

3.4.2 Cyklus matematického modelování podle Turner

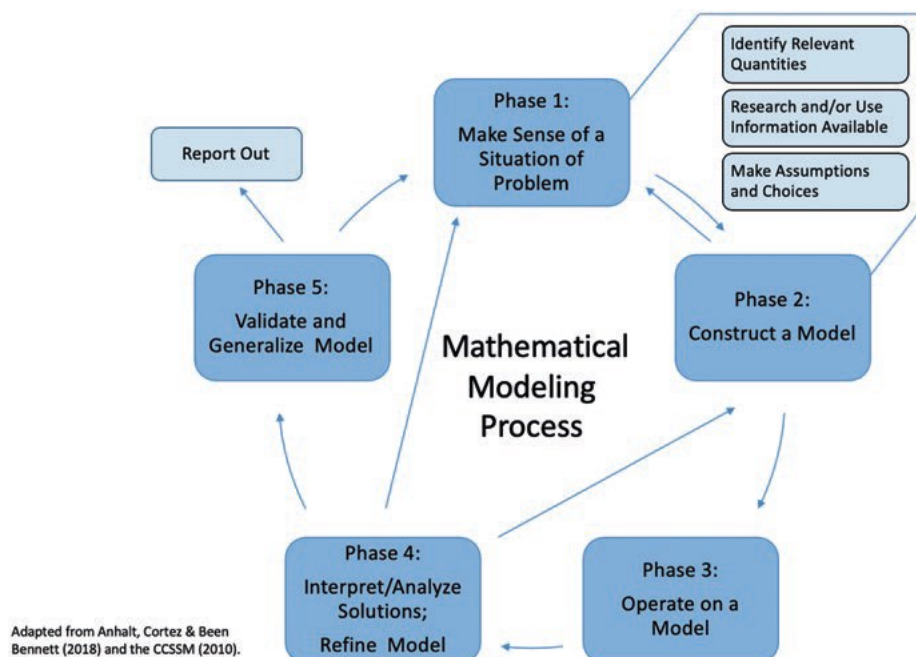


Schéma 3 – Cyklus matematického modelování podle Turner

Turner ve svém cyklu nerozlišuje situační, reálný a matematický model, jako to činil Blum. Pracuje s jedním modelem situace. V jejím schématu je patrná perspektiva pedagogického výzkumu i reality amerického školství. Kroky (fáze), do kterých proces rozčleňuje, srovnává s procesem modelování, jak by ho měli zvládnout američtí studenti podle *Common Core State Standard*¹⁰. Zároveň zohledňuje dosavadní poznatky o tom, jaké úvahy jsou součástí jednotlivých fází a jak do procesu modelování promítají studenti své osobní zkušenosti s daným kontextem: „Náš výzkum se zaměřoval na to, jak znalost kontextu a zkušenosti studentů s kontextem podporují a vedou (určují) modelovací aktivity.“¹¹ (str. 238).

Nyní se podrobněji podíváme na fáze 1, 2, 4 a 5, protože ty se významněji liší od kroků, které už známe od Bluma:

¹⁰ Tzv. „společné jádro“ – vzdělávací standardy definované po jednotlivých letech vzdělávání až do 12. ročníku pro jazykovou výchovu a matematiku. Ke *Common Core State Standard* se jako k závazným nebo jako k podpůrným staví většina amerických států.

¹¹ „Our research focused on how students' contextual knowledge and experiences inform, support and guide their modeling activity.“ (Pozn: překlad autorka.)

- Ve fázi 1 – *Make Sense of a Situation or*¹² *Problem* musí studenti porozumět situaci nebo problému, který do výuky přinesl učitel nebo oni sami ze své životní zkušenosti. Sami sebe se ptají: Co vím? Mám nějaké zkušenosti, které by s touto situací mohly souviset? Co ještě potřebuji za informace; mohu je nějak získat (Turner et al., str. 239)? Turner tedy klade velký důraz na osobní zkušenost a pozici žáka v reálném světě, předpokládá seberefektivní uvažování. Podobné otázky by mohly poukazovat na zapojení metakognice, o které píšu v podkapitole 3.5.2.
- Mezi fází 1 a fází 2 jsou ve schématu dvě šipky a také tři rámečky. V rámečcích jsou „aktivity“ (*activities*), nebo také „úvahy“ (*considerations*) klíčové pro konstruování modelu. Abychom sestavili správný model, musíme uvažovat, které kvantitativy jsou ve zkoumané situaci relevantní a jaké jsou mezi nimi vztahy. Kromě toho zvažujeme, které informace už máme k dispozici a můžeme je využít, které naopak musíme zjistit nebo jinak získat, a konečně co budeme muset třeba jen předpokládat (*assume*) (stránky 239–240).
- Už jsme zmínili, že autoři ve svém výzkumu sledují, jak se v procesu modelování odráží zkušenosti studentů s daným kontextem. I fáze 2 – *Construct a Model* se těsně dotýká kontextu a studenti díky konstruování modelu prohloubí své porozumění situaci (fáze 1). Aby zdůraznili, že jsou první dvě fáze prostupné a že se řešitel běžně pohybuje mezi nimi tam i zpět, použili autoři ve schématu dvě navzájem opačné šipky (str. 240).
- Ve fázi 3 – *Operate on Model* vznikne pomocí matematických operací jedno nebo více řešení. Fáze 4 ale jako by obsahovala několik postupných kroků: Tato řešení se mají „analyzovat“ a „interpretovat“ a zároveň se má model „vylepšit“ (*refine model*). Co se těmito slovesy míní? Řešitel analyzuje, jestli nalezená řešení ve srovnání s tím, co má z vlastní zkušenosti a co ví o kontextu situace, vůbec dávají smysl. Interpretuje, co vlastně řešení implikuje pro původní situaci. Poté, je-li

¹² Ve schématu je, soudě podle dalšího textu, chyba – záměna předložky *of* a *or*.

třeba, upraví, zlepší model podle nových úvah tak, aby seděl na širší paletu situací (str. 240).

- *Fáze 5 – Validate and Generalize Model* „je vyhodnocovací fází, která zahrnuje validaci (ověření platnosti) a zobecnění modelu tak, aby byl znovupoužitelný a umožňoval použití v podobných scénářích“¹³ (str. 240). Pokud nejsou studenti s modelem spokojeni, mohou se vrátit k fázi 1, situaci redefinovat a začít v cyklu opět od začátku. V opačném případě, totiž když je vše v pořádku, cyklus matematického modelování ukončí. Dle mého soudu fáze 5 navazuje na fázi 4 a jemně se s ní překrývá. I fáze 4 totiž obsahovala zhodnocení modelu a směřovala k jeho zobecnění. Snaha o generalizaci modelu je nicméně myšlenka, kterou Turner přináší proti Maaß nově. Upomíná nás na Hřebíčka a Škrdlu, kteří tvrdili (viz podkapitola 3.2), že matematické modelování přináší nové poznání do našeho myšlení (2006, str. 2).

3.4.3 Srovnání a návrh vlastního modelovacího cyklu

Každý z prezentovaných modelů měl oproti druhému některé věci navíc, a naopak v jiném ohledu byl méně srozumitelný. Proto se nyní pokusím využít výhody obou a představit pro potřeby této práce vlastní cyklus modelování.

¹³ „...is an evaluation phase that involves validating and generalizing the model so that it is reusable and allows for applications to similar scenarios.“ (Pozn.: překlad autorka.)

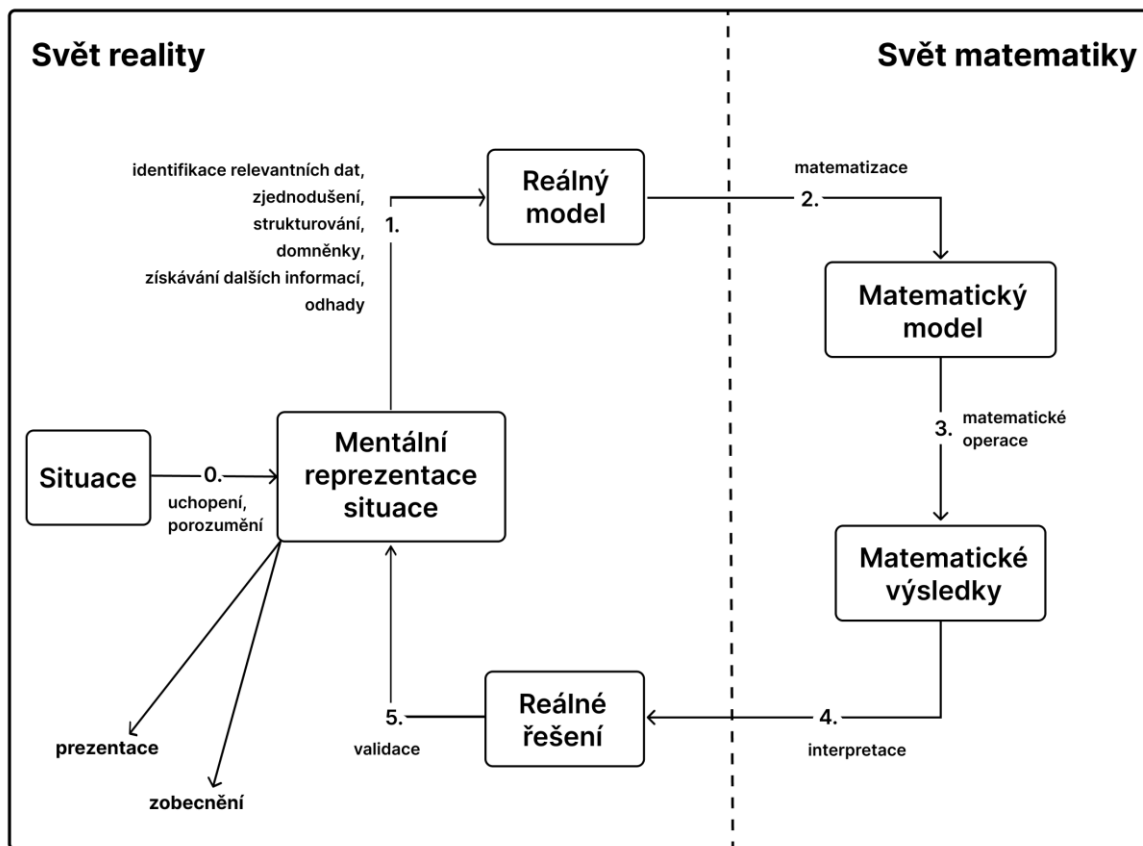


Schéma 4 – Návrh vlastního cyklu modelování

Mé schéma procesu modelování se skládá ze dvou základních složek: jednotlivých *stavů*, které jsou zobrazeny pomocí rámečků, a *kroků* mezi nimi, které znázorňují šipky s popisky. Výchozím bodem je *situace* nebo zadaný problém. Tomu musí řešitel porozumět (krok 0) a tím vznikne prvotní *mentální reprezentace situace* (MRS). Pokud řešitel prostou mentální reprezentaci idealizuje a zjednoduší (krok 1), mluvíme o *reálném modelu*; po jeho matematizaci (krok 2) o *modelu matematickém*. Pomocí matematických operací (krok 3) dojde řešitel k jednomu nebo více *matematickým výsledkům* a ty poté interpretuje (krok 4) zpět v kontextu reality, totiž jako *reálné výsledky*. K dokončení cyklu je ještě nutné toto výsledné řešení validovat (krok 5).

Proč jsme se rozhodli první krok číslovat vlastně jako nultý? Jaké změny jsou zásadní proti cyklu Turner a Bluma a proč jsme se pro ně rozhodli?

Z Blumova cyklu chci ve svém schématu zachovat zřetelné rozdělení samotné situace, její mentální reprezentace a reálného modelu. Zůstane tak dobře viditelné, že řešitel musí situaci

nějak porozumět, totiž přijmout ji do své mysli (mentální reprezentace), a až poté ji může jakkoli zjednodušovat nebo strukturovat. Proto také tento krok čísluji jako nultý, abych naznačila, že jde o nutnou podmínku začátku práce. Domnívám se, že je možné, že v některých případech řešitel do cyklu modelování ani nevstoupí, protože krok porozumění odmítne nebo ho není schopen. To ovšem zůstává k ověření výzkumem.

Pro krok prezentace výsledků (také pod názvy *report out*, *present*, *communicate the result* nebo 7 – *expose* u Blumova cyklu) volím zpracování podle cyklu Turner. To znamená, že prezentace výsledků není součástí samotného cyklu modelování, nýbrž je zakreslená jako šipka bez čísla vystupující z cyklu ven. Rozhodla jsem se tak vědomě, přestože srozumitelné sdělení výsledku, například ve formě slovní odpovědi ke slovní úloze, je běžnou součástí hodin matematiky – a dokonce přestože je prezentace výsledků práce užitečnou kompetencí pro spolupráci v jakémkoli týmu a pro život mimo školu. Reportování výsledků totiž nepovažuji za něco inherentní matematickému modelování.

Jako další šipku ven, výstup z cyklu, přebírám i *generalizaci*. V uvažování o generalizaci navazuji také na Turner. Matematické modelování probíhá vždy na konkrétním problému, konkrétní úloze, generalizace ale umožňuje přesah dál. Domnívám se, že snaha o zobecnění modelu přináší i další výhodu: místo aby řešitel skončil u jednoho nebo více řešení a celý proces modelování hodil za hlavu, musí se vrátit zpět k reálnému modelu, aby ho porovnal s jinými možnými situacemi. Protože generalizace ale není nutná k vyřešení jedné zadané situace, kreslím ji také jako nečíslovanou šipku vedoucí z cyklu ven.

Nakonec přebírám z cyklu podle Turner ještě jasný důraz na aktivity a úvahy, díky kterým se vůbec MRS může zformovat v reálný model. Řešitel musí posoudit, co je zásadní a co je vedlejší, strukturovat a zjednodušovat a někdy také dohledávat informace nebo něco předpokládat. Tato slovesa proto uvádím u šipky mezi MRS a reálným modelem situace.

3.5 Kompetence k modelování

V této podkapitole směřuji k vymezení pojmu kompetence k modelování.¹⁴ Využiji k tomu schéma modelovacího cyklu, které jsem představila v předchozí podkapitole, zároveň ale bude třeba i obecněpedagogický exkurz k pojmu kompetence:

Podle Kasíkové a Vališové (2007) jsou kompetence „soubory znalostí, dovedností, návyků a postojů, které jsou využitelné v různých učebních i praktických činnostech a situacích“ (str. 128). Dánové Niss a Højgaard (2019) definují kompetenci stručněji jako něčí „připravenost přiměřeně reagovat na výzvy dané situace“¹⁵ (str. 12). Dále vysvětlují, že připravenost (*readiness*) může být kognitivní, afektivní i volní. Tím dohánějí souborný český výčet všeho, co může patřit do kompetence. Zároveň se obě definice překrývají ve slově *situace*. Kompetence neexistuje v žádném vzduchoprázdnu, ale prokáže se až v jednání (*act*), v jejím využití v konkrétní situaci.

Z obecné definice kompetence můžeme sestoupit o abstrakční patro níže ke kompetenci matematické. Niss ji definuje takto: „Matematická kompetence pak znamená schopnost chápat, posuzovat, dělat (*do*) a používat matematiku v různých kontextech uvnitř i vně matematiky a situacích, kde matematika hraje nebo by mohla hrát roli.“¹⁶ (Niss 2004, cit. dle Maaß, 2006, str. 116). I zde odpovídá definice tomu, co známe z obecnější úrovně: Matematická kompetence je vždy kontextuálně, situačně vázaná (Niss & Højgaard, 2019, str. 20). Kontext může být přímo matematický i vně matematiku. Jakkoli Niss ve výše uvedené definici školní prostředí přímo nezmiňuje, pravděpodobně čeká, že matematická kompetence přesáhne z hodin matematiky i jinam; podobně jako Kasíková a Velíšková mluví o „učebních i praktických situacích“.

¹⁴ Výrazy „kompetence k modelování“, „kompetence k matematickému modelování“ a „kompetence modelovat“ používám synonymicky.

¹⁵ „readiness to act appropriately in response to the challenges of given situation“ (Pozn.: překlad autorka.)

¹⁶ „Mathematical competency then means the ability to understand, judge, do and use mathematics in a variety of intra- and extra- mathematical context and situations in which mathematics plays or could play role.“ (Pozn.: překlad autorka.)

Z nejvyššího patra kompetence jako obecného pojmu můžeme přes kompetence matematické jít ještě níže, ke kompetenci k (matematickému) modelování. Pokud postupujeme analogicky, bude i tady v jádru definice požadavek, aby žák uměl modelování především využít v různých situacích? Budeme čekat, že si poradí s různými kontexty? Budeme sledovat dovednosti – návyky – postoje – složku kognitivní i složku volní?

Podívejme se, s jakou definicí ve svém článku *What are modelling competencies?* pracuje Maaß: „Kompetence k modelování zahrnují schopnosti a dovednosti cíleně a náležitě provést procesy modelování a stejně tak i vůli je použít.“¹⁷ (Maaß, 2006, str. 117).

Jak je možné, že z definice podle Maaß vypadl důraz na situaci a na kontext? Domnívám se, že proto, že už modelování samotné neexistuje ve vzduchoprázdnu, nýbrž je vždy inherentně kontextuální, situační. Odkazují se především na dva výše uvedené cykly modelování: Oba začínají i končí v reálné situaci. Pokud se každé modelování váže ke konkrétní situaci, pak kompetence k modelování také.

Již v předchozí kapitole jsem poukazovala na důraz badatelů-didaktiků na procesuální charakter modelování. Modelování popisovali jako proces, který je třeba projít a ze kterého může řešitel těžit; dál ho dělili na jednotlivé kroky. Nyní se ve své definici kompetence k procesu modelování vrací i Maaß („...provést procesy modelování...“), když podle jednotlivých kroků modelování detailně rozepisuje příslušné dílčí kompetence (tj. subkompetence celkové kompetence k modelování) (str. 116).

3.5.1 Dílčí kompetence a jejich indikátory

V identifikaci dílčích kompetencí navazuji na práce Maaß (2006, stránky 116–117) a Greefratha a kolektivu (2013, str. 19). Obě práce vycházejí z Blumova cyklu matematického modelování, jak jsem ho popsala v podkapitole 3.4.1, a každou dílčí kompetenci přiřazují k jednomu kroku v cyklu. Následující tabulka srovnává dílčí kompetence (tj. subkompetence) podle obou autorů s kroky v mém schématu:

¹⁷ „Modelling competencies include skills and abilities to perform modelling processes appropriately and goal-oriented as well as the willingness to put these into action.“ (Pozn.: překlad autorka.)

Kroky v sestaveném schématu	Dílčí kompetence podle Maaß	Dílčí kompetence podle Greefratha
0. Uchopení a vytvoření MRS	Understand the real problem and simplify the situation	Verstehen
1. Tvorba reálného modelu		Vereinfachen
2. Matematizace	Set up a mathematical model	Mathematisieren
3. Matematické operace	Solve mathematical question	Záměrně neuvádí – nepovažuje za specifické pro modelování
4. Interpretace výsledků	Interpret mathematical results in a real situation	Interpretieren
5. Kontrola	Validate the solution	Validieren
(zobecnění; prezentace)	neuvádí	Vermitteln

Tabulka 1 – Srovnání dílčích kompetencí

Je zřejmé, že pouhý výčet dílčích kompetencí se příliš neliší od samotného kruhového schématu modelování. Pro plánování, zacílení a analýzu konkrétních vyučovacích hodin bude proto užitečné dílčí kompetence ještě dále konkretizovat pomocí indikátorů. K tomu využívám Greefrathovy „indikátory“ subkompetencí (2013, str. 19), opět také přehled Maaß (2006, stránky 115–117) a dále spíše jednotlivé myšlenky několika dalších autorů. Následující odstavce uvádějí šest dílčích kompetencí a ke každé z nich indikátory, že kompetenci řešitel ovládl:

Kompetence k vytvoření mentální reprezentace situace (MRS)

- Žák má vůli řešit vybraný problém reálného světa pomocí matematického modelování (Kaiser & Brand, 2015).
- Žák si vytvoří vlastní mentální model situace, a tak porozumí zadanému problému nebo otázce (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013).
- Žák pro zadanou situaci z reálného světa formuluje relevantní otázku, pokud není přímo zadána (Niss, Blum, & Galbraith, 2007; Verschaffel, Van Dooren, Greer, & Mukhopadhyay, 2010).
- Žák se ptá sám sebe, co už o situaci ví (Turner et al., 2021).

Kompetence k vytvoření reálného modelu

- Žák využije zadání jako zdroj potřebných informací (Turner et al., 2021).
- Žák strukturuje a ve vhodné míře zjednodušuje a idealizuje vstupní situaci (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013; Maaß, 2006).
- Žák identifikuje relevantní kvantify, totiž takové, které ovlivňují situaci (Turner et al., 2021; Maaß, 2006; Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013; Niss, Blum & Galbraith, 2007); irrelevantní informace naopak zanedbá (Šíma, 2013).
- Žák vytváří vlastní domněnky o reálné situaci (*assumptions*) (Maaß, 2006; Turner et al., 2021).
- Žák v případě potřeby dohledává nebo měří další potřebné hodnoty (Maaß, 2006; Turner et al., 2021).
- Žák hledá vztahy mezi jednotlivými proměnnými a konstantami v situaci (Maaß, 2006).

Kompetence matematizovat reálný model

- Žák matematizuje kvantify a jejich vztahy (Ulu, 2017).
- Žák přeloží vztahy mezi proměnnými v reálném modelu do matematiky. Využije vhodné matematické struktury, například rovnice, funkce, diagram (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013, str. 19).
- Žák zjednodušuje kvantify a vztahy mezi nimi (Maaß, 2006), aby se dal model lépe matematicky zpracovat.
- Žák volí vhodnou formu matematického zápisu nebo grafické reprezentace (Maaß, 2006).

Kompetence operovat na matematickém modelu

- Žák využívá znalosti v oblasti matematiky k řešení problému (Maaß, 2006).
- Žák používá různé heuristické strategie (rozdělení řešeného problému na menší, přeformulování problému, pohled na úlohu v různých formách...) (Maaß, 2006).
- Žák správně a účelně provádí základní matematické algoritmy (Niss & Højgaard, 2019).
- Žák bezchybně pracuje s různými veličinami a jednotkami (Maaß, 2006).

- Žák správně identifikuje matematické řešení v podobě odpovídající danému matematickému modelu. Je otevřený různým variantám (jedno číslo, více čísel, geometrický výsledek...) (Maaß, 2006).

Kompetence interpretovat matematický výsledek v realitě

- Žák zpětně vztáhne svůj matematický model a jeho výsledek ke kontextu mimo matematiku (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013).
- Žák interpretuje matematické výsledky jako reálná řešení, smysluplná v původním kontextu (Maaß, 2006).
- Žák analyzuje zvnějšku zadaný model, úvahy za ním a jeho účel a interpretuje jeho složky a výsledky v situaci, kterou má zastupovat (Niss, Blum & Galbraith, 2007; Kaiser & Brand, 2015).
- Žák volí vhodný jazyk a komunikuje o matematickém výsledku a reálném řešení původního problému na základě toho, k čemu došel v dosavadním procesu řešení (Borromeo Ferri, 2006; Maaß, 2006).

Kompetence validovat reálné výsledky

- Žák se vrátí k reálnému modelu a ověří přiměřenost výsledků (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013).
- Žák reviduje některé části modelu, pokud se ukáže, že výsledky neodpovídají původní situaci (Maaß, 2006; Turner et al., 2021).
- Žák má vůli znovu projít pozměněný celý cyklus modelování, pokud se výsledek ukáže jako nevyhovující (Maaß, 2006).
- Žák reflektuje celý postup a identifikuje místa, kde mohly vzniknout nepřesnosti (Maaß, 2006; Blomhøj & Jensen, 2003).
- Žák reflektuje odlišné způsoby řešení problému a jiné cesty k výsledku (Maaß, 2006).

Povšimněme si, že většina indikátorů dílčích kompetencí popisuje kognitivní dovednost nebo výkon, přesto se mezi ně zatoulalo i několik bodů, které se dotýkají klíčového faktoru: vůle řešitele a jeho vytrvalosti v celém procesu. Tak se vrací oboustrannost definice

kompetence k modelování, jak jsme ji již uvedli podle Maaß (2006, str. 117): „Kompetence k modelování zahrnují schopnosti a dovednosti [...] a stejně tak i vůli je použít.“¹⁸

V literatuře můžeme najít zmínky i o dalších dílčích kompetencích, které ale podle mého názoru nejsou nutné k tomu, aby řešitel úspěšně prošel celým modelovacím cyklem. Proto je, podobně jako Niss (Niss & Højgaard, 2019), uvádím stranou:

- Kompetence zobecnit řešení konkrétního problému pro širší spektrum situací (Maaß, 2006; Turner et al., 2021).
- Kompetence prezentovat výsledky své práce ve vhodné formě (Niss & Højgaard, 2019).
- Sociální kompetence ke spolupráci v týmu, argumentaci a obhajobě vlastních názorů (Niss & Højgaard, 2019).

Tyto dílčí kompetence jsou dle mého soudu obecnějšího charakteru. Nepochybně přispívají k rozvoji žáků a v českém kurikulu patří pod některou z klíčových kompetencí. Jak jsem již psala u schématu modelování v podkapitole 3.4.3, skutečnost, že zobecnění a prezentaci výsledku vyřazují ze základního modelovacího cyklu, neznamená, že bych považovala předávání těchto dovedností za nepodstatné.

V této podkapitole jsem ukázala mnoho složek kompetence k modelování podle jednotlivých částí celého modelovacího procesu. Ale je to tak, že kompetence k modelování je (jen) souhrnem těchto dílčích složek? Touto otázkou se také zabývala Maaß a došla k závěru, že ne. Kompetentní řešitel se zároveň nesmí cestou ztratit!

3.5.2 Orientační smysl: jak se díky metakognici neztratit v procesu

V předchozí podkapitole jsem na základě studie Maaß *What are modelling competencies?* a několika dalších autorů shrnula jednotlivé dílčí kompetence, které jsou potřebné k tomu, aby řešitel zvládl projít celým cyklem modelování. Pokud má ale tento úkol zvládnout samostatně, nesmí v náročném procesu uvíznout nebo ztratit nit. Maaß metaforicky píše o „orientačním smyslu“ (*sense of direction*) (2006, str. 137).

¹⁸ „Modelling competencies include skills and abilities [...] as well as the willingness to put these into action. (Pozn.: překlad autorka.)

Není těžké představit si žáka dívajícího se dezorientovaně na zadání úlohy nebo takového, který počítá a počítá, až najednou neví, kde skončil. Má-li ale vágní *orientační smysl* být další částí kompetence k modelování, bude užitečné ho vztáhnout k jinému, etablovanému konceptu psychologie, totiž *metakognici*.

Krykorková o metakognici píše, že to je „určitá forma poznání, která má charakter nadhledu nad naším poznáním, učením a myšlením“ (Krykorková & Chvál, 2001, str. 188). To se do obrazné představy hodí: Žák, který má nadhled nad svým myšlením o daném problému – totiž nad řešením modelovací úlohy – neztratí orientaci.

V souvislosti s modelováním se metakognicí zabývala Vorhölter a kolektiv v článku *Metacognition in mathematical modeling* (Vorhölter, Krüger & Wendt, 2019). Metakognitivní kompetence dělí na deklarativní metakognitivní znalosti a procedurální metakognitivní strategie (str. 33).

Metakognitivní znalosti by podle autorů měl řešitel mít jak o obecné povaze modelovacích úloh, tak o strategiích, jak úlohy řešit. Musí tedy například vědět, že usuzování, domýšlení a vyhledávání dalších informací mimo zadání *je* povoleno, a dokonce se od něj čeká. Za znalost o strategiích je v tomto případě možné považovat znalost zjednodušeného schématu modelování a potřebných kroků (stránky 33–35). Jak studenti pracují, když je jim cyklus modelování prvně explicitně představen, ostatně zkoumá více autorů (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Maaß, 2006).

Další skupina metakognitivních znalostí přesahuje do seberefektivních schopností. Žák si musí být vědom svých schopností i omezení. Navíc, pokud je úkol zpracováván ve skupině, by měl každý znát i osobnostní charakteristiky ostatních, aby si práci mohli dobře rozdělit (Vorhölter, Krüger & Wendt, 2019, stránky 33–36).

Kromě právě představených metakognitivních znalostí se k metakognitivním kompetencím řadí ještě metakognitivní strategie. Tím jsou myšleny strategie plánování práce a sledování a regulace průběhu práce (str. 33). Vorhölter vysvětluje, jaký je rozdíl mezi běžnou strategií řešení úlohy (tj. kognitivní strategií) a strategií metakognitivní. Žáci například potřebují k řešení úlohy informaci o délce lidského chodidla, ale v zadání je uvedena jen velikost boty. Mohou proto tuto informaci najít. Nebo mohou vyjít z velikosti vlastních bot a z měření

vlastních chodidel. Obě strategie jsou na kognitivní úrovni; ale porovnat je a rozhodnout se podle vybraného kritéria pro jednu z nich, to už je záležitostí metakognice (str. 36). Zároveň je patrné, že metakognitivní strategie stojí na využití metakognitivních znalostí o schopnostech řešitelů a charakteristikách různých řešitelských postupů.

Vedle výběru nejlepších nástrojů a průběžného monitorování práce patří podle Vorhölter a kolektivu k metakognitivním strategiím také strategie, jak „evaluovat modelovací proces se záměrem zjistit, co by se příště dalo zlepšit“¹⁹ (str. 37). To by se zdálo neproblematické u popisu metakognice obecně. Nicméně vzhledem k tomu, že je řeč o metakognitivních kompetencích ve vztahu k modelování, je namísto zbystřit. Evaluace modelovacího procesu se totiž podobá závěrečné evaluaci modelu, kterou uvádí Turner (2021, stránky 240–241). Podobná myšlenka se promítla také do indikátorů *Kompetence validovat reálné výsledky* (indikátor *žák reflektuje celý postup & jiné způsoby řešení*). Domnívám se, že prosté kroky v modelovacím postupu vyžadují vždy do jisté míry nadhled nad řešením problému a že metakognitivní a kognitivní rovina řešení částečně splývá.

Zpočátku podkapitoly jsem vyšla ze závěru Maaß (2006), že pro řešení modelovacího problému nestačí jen subkompetence k vykonání jednotlivých kroků, ale že je potřeba „orientační smysl“. Jako vysvětlení „orientačního smyslu“ jsem nabídla koncept metakognice: metakognitivních znalostí a strategií. Řešitel ví o povaze modelovacích úloh; alespoň hrubě si práci naplánuje a dále monitoruje svůj postup. Tak se v procesu orientuje a neztratí. Metakognitivní kompetence jsou proto nepochybně nutnou součástí kompetence k modelování.

3.6 Slovní úlohy a modelovací úlohy jako prostředek k modelování

Tato a následující kapitoly teoretické části řeší výuku matematického modelování. Jako první je nutné vymezit pojem *modelovací úloha*, protože právě ta je hlavním prostředkem, díky kterému se žáci s modelováním mohou setkat. Kromě toho se pokusím vysvětlit vztah

¹⁹ „...to evaluate the modeling process in order to find out, what can be improved next time.“ (Pozn.: překlad autorka.)

modelování k problematice, která je v českém prostředí dobře zpracovaná, a tou jsou slovní úlohy.

3.6.1 Vymezení modelovací úlohy

V předchozí podkapitole byla představena kompetence k modelování a její dílčí kompetence, totiž subkompetence, které znamenají zvládnutí jednotlivých kroků v modelovacím cyklu. Výuka modelování se bude jistě snažit rozvíjet kompetence k modelování, a to skrze *modelovací úlohy* neboli *modelovací problémy*. Maaß je definuje takto:

Modelovací problémy jsou autentické, komplexní a otevřené problémy, které se vztahují k realitě. Jejich řešení vyžaduje divergentní myšlení a řešení problémů (*problem solving*). Obsah je třeba volit podle cílové skupiny řešitelů.²⁰

(Maaß, 2006, str. 115)

V definici Maaß je zřejmý důraz na autenticitu a vztah k realitě. Chybí v ní nicméně potenciál úloh rozvíjet kompetenci k modelování. Proto vymezuji pro účely této práce modelovací úlohy, resp. modelovací problémy takto: „Modelovací úlohy jsou komplexní, autentické úlohy, které vycházejí z reálného kontextu. Proces jejich řešení zahrnuje všechny kroky modelovacího cyklu, díky čemuž jsou prostředkem k rozvíjení kompetence k modelování.“ Proti *modelovací úloze*²¹ ve smyslu tohoto vymezení stojí *úloha s prvky modelování*, která se zaměřuje jen na některý krok nebo kroky v modelovacím procesu, a tedy může rozvíjet jen některé dílčí kompetence.

Podle Verschaffela a kolektivu (Verschaffel, Van Dooren, Greer & Mukhopadhyay, 2010) je ovšem jako tradiční prostředek, jak modelování uvést do hodin matematiky, používána *slovní úloha* (s. 11). Vondrová o slovních úlohách tvrdí, že „tvoří jakýsi most mezi světem matematiky a světem mimo školu“ (2020, str. 66). To může připomínat podobnou představu

²⁰ „Modelling problems are authentic, complex and open problems which relate to reality. Problemsolving and divergent thinking is required in solving them. The content needs to be chosen appropriately according to the addressee.“ (Pozn.: překlad autorka.)

²¹ Pojmy „modelovací úloha“ a „modelovací problém“ používám synonymicky.

o matematickém modelování jako o překladu mezi realitou a matematikou (viz podkapitola 3.2). Z těchto vyjádření se zdá, že pojmy „modelovací úloha“ a „slovní úloha“ musí stát velmi blízko, že se překrývají, nebo že jde dokonce o zcela totožné koncepty.

Kdyby byly tyto dva pojmy ekvivalentní, znamenalo by to, že by jakákoliv slovní úloha mohla být úlohou modelovací. A to včetně toho, že by (každá slovní úloha) vycházela z reálného kontextu a proces řešení by (u všech slovních úloh) rozvíjel kompetence k modelování. Jako klíčový bod ke zvážení se proto objevuje problematika reálnosti kontextu slovních úloh a problematika řešitelského procesu.

3.6.2 Reálný kontext úloh

Čeští i zahraniční autoři se ve většině shodují, že slovní úloha je verbálně kódovaný úkol, který obsahuje alespoň jednu otázku (Smetáčková, 2017; Havlíčková, 2020), a který je zasazen v nějakém kontextu mimo matematiku (Vondrová, 2022; Niss, Blum & Galbraith, 2007; Smetáčková, 2017). Vztah kontextu slovních úloh k realitě je ale předmětem diskusí. Někteří autoři uvádějí jako dvě rovnocenné kategorie slovní úlohy s kontextem z reality a z fikce (Havlíčková, 2020; Meyer, Dekker & Querelle, 2001). Boaler (1993) upozorňuje, že některé úlohy mají kontext, který sice odpovídá skutečnému světu, ale vůbec se neprotíná s žitou realitou žáků. Jiné úlohy zase podřizují kontext matematickému obsahu úlohy a předpokládají svět, který se sice podobá tomu skutečnému, ale platí v něm příliš zjednodušené nebo naprosto absurdní zákonitosti (str. 14). Palm (2008) zkoumá *autenticitu* slovních úloh, čímž míní, do jaké míry simuluje slovní úloha problém, který by se řešil v reálném světě. Posuzuje různé aspekty slovní úlohy, jako například množství uvedených informací nebo smysluplnost otázky, kterou má řešitel zodpovědět. Vždy se ptá, jestli je slovní úloha dostatečně věrná svému protějšku, totiž situaci v reálném světě. Na smysluplnost položené otázky kladou důraz také Maaß (2011, str. 8) nebo Meyer (Meyer, Dekker & Querelle, 2001, str. 527).

Až slovní úloha, která by prošla všemi těmito síty pro „reálný kontext“, může být kandidátem na modelovací úlohu. Zdá se, že modelovací úlohy by mohly být podmnožinou všech slovních úloh.

Nyní mohu zároveň upřesnit, co míním ve svém vymezení pod formulací, že modelovací úloha „vychází z reálného kontextu“: Ideální modelovací úloha by měla co nejlépe simulovat problém tak, jak by nastal ve skutečnosti. Měla by počítat se vztahy mezi aktéry (proměnnými) tak, jak se k sobě vztahují i v realitě, a účelně je nezjednodušovat. Výběr a forma prezentace informací v zadání úlohy by také měly odpovídat tomu, které informace a jak bývají dostupné i v reálném světě. To jsou kritéria pro tvorbu modelovacích úloh.²²

3.6.3 Povrchový proces řešení vs. modelování

Druhým bodem možného překryvu nebo rozporu slovních úloh a modelovacích úloh je proces jejich řešení.

Řešitelský proces slovních úloh popisuje Vondrová podle Reussera (1985) v několika fázích: porozumění textovému zadání; vytvoření situačního modelu a případný zápis klíčových faktů a vztahů; matematizace; provedení výpočtů včetně případné numerické zkoušky; interpretace v kontextu situace úlohy, sémantická zkouška a slovní odpověď (Vondrová, 2020, str. 67). Takový postup řešení slovní úlohy je minimálně srovnatelný s některým modelovacím cyklem, totiž popisem řešitelského procesu modelovací úlohy.

Proti takto ideálnímu postupu stojí ale empirická zjištění mnohých výzkumníků o tom, jak ke slovním úlohám přistupují skuteční žáci a případně i učitelé ve školách. Verschaffel a kolektiv kritizuje, že mnozí žáci své řešení vůbec nestaví na reálném kontextu, své znalosti světa a logice vztahů mezi aktéry v úloze, ale jen kombinují číselné údaje ze zadání s některou ze základních operací (Verschaffel, Van Dooren, Greer & Mukhopadhyay, 2010, str. 12). Tento nešvar je nazýván „povrchová strategie“ a může mít příčinu ve stereotypním formátu („žánru“) slovní úlohy, ale například i ve způsobu, jak jsou slovní úlohy prezentovány ve škole a jaká sociokulturní norma tím vzniká (Vondrová, 2020; Smetáčková, 2017; Palm, 2008).

Z perspektivy procesu řešení je modelování protipólem povrchových strategií. Proto Verschaffel ve své práci *Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical*

²² Otázku, jestli má kontext modelovací úlohy odpovídat žité realitě žáků, nechávám stranou. Domnívám se, že patří spíše do didaktiky matematiky jako takové, než aby mířila k podstatě modelovacích úloh.

Modelling (2010) hledá způsoby, jak upravit (*rekonceptualizovat*) stávající praxi v zadávání slovních úloh tak, aby žáci nezůstávali na povrchu, ale aby se při řešení snažili pátrat po smyslu úloh a jejich činnosti co nejlépe odpovídaly komplexnímu procesu matematického modelování (str. 21).

3.6.4 Jiné příležitosti k modelování

Ukázala jsem, že slovní úlohy mohou vytvářet příležitost k modelování, že tomu tak ale není vždy. Modelovací úlohy jsem představila jako podmnožinu, speciální typ slovních úloh, a modelování jako protipól povrchových strategií řešení slovních úloh. Zároveň ale slovní úlohy ve své relativně jednotné formě nejsou jediným prostředkem, jak ve výuce vytvořit situaci, která by naváděla k matematickému modelování:

Carlson (2021) ve svém výzkumu pro začátek modelování využila velmi otevřené zadání: Žáky uvedla do kontextu plánování školního výletu a za součást procesu modelování brala i jejich diskusi a plánování ve třídě. Až poté byla formulována řešená matematická otázka na očekávané náklady. Výchozí situace tedy nebyla předána verbálně, jako slovní úloha, ale přímou inscenací.

Bonotto dokonce cílí na kompetenci žáků hledat v daném kontextu smysluplnou otázku samostatně. Impulsem v její výuce je vždy nějaký artefakt, například menu z restaurace, ceník zábavního parku nebo slevové kupony do supermarketu (Bonotto, 2013). S artefaktem žáci pracují, sami formulují smysluplné otázky a pak je pomocí modelování řeší.

Závěrem lze tedy říci, že modelovací problémy mívají často formu slovních úloh, ale mohou být zadány i jinak. Naopak ne každá slovní úloha je modelovací úlohou, která by umožňovala projít všechny fáze modelování.

3.7 Výuka matematického modelování na 1. stupni základní školy?

Výzkumy uvádějí, že zapojení modelovacích úloh do výuky pomáhá žákům lépe rozumět světu, budovat a chápat matematické koncepty a řešitelské strategie a matematiku umět využít i v praxi. Poskytuje žákům nástroje, díky kterým se mohou rozhodovat v nejistých

situacích. Mimo to rozvíjí kritické myšlení, zvyšuje motivaci, komunikační a sociální kompetence a přispívá k odpovídajícímu obrazu matematiky jako vědy (Maaß, 2011; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Wei, Zhang & Guo, 2022; English, 2022; Turner et al., 2021).

Různé státy světa jako Německo, Spojené státy americké nebo Čína mají matematické modelování nebo kompetenci k modelování jako pevnou součást svého kurikula (Wei, Zhang & Guo, 2022; Vorhölter, Greefrath, Borromeo Ferri, Leiß & Schukajlow, 2019). Některé tyto státy mají také matematické modelování i v kurikulárních dokumentech detailněji rozvedené a přesně popisují, co má žák kdy zvládnout.

Také český *Rámcový vzdělávací program pro základní školy* uvádí mezi cílovým zaměřením vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* mimo jiné, že má žáky vést k

„vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely“ (MŠMT, 2023, str. 32).

Rámcový vzdělávací program, na rozdíl od obdobných dokumentů jiných států, nezabíhá do detailů. Podle citovaného textu se nicméně očekává, že žáci během devíti let základního vzdělávání pochopí některé základní charakteristiky matematického modelu a že s modelováním získají vlastní zkušenost. Zřejmě by tedy měli i některé modelovací úlohy sami řešit a učitelé by měli pro modelování vyčlenit čas v hodinách matematiky.

Já jsem si dala za cíl zkoumat možnosti implementace modelovacích úloh a úloh s prvky modelování do výuky na 1. stupni, konkrétně v 5. ročníku. Prvně jsem proto provedla rešerši, co říká výzkum konkrétně k této věkové kategorii.²³

Greefrathovy cíle výuky matematického modelování, které jsem popsala v podkapitole 3.3 – *Matematické modelování pohledem pedagogiky*, jsou formulovány obecně pro

²³ Do rešerše jsem zahrнула zkoumání kategorie *primary education, elementary education i lower secondary education*. Důvodem je rozdílný věk žáků, ve kterém v různých státech světa opouštějí primární vzdělávání, a tedy stupeň vzdělávání, kam patří 5. ročník.

jakoukoli práci s modelovacími úlohami, nikoliv specificky pro tu či onu úroveň vzdělávání. Modelovací aktivity jsou ale zároveň považovány za kognitivně velmi náročné (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Klock, 2020). Přestože se matematickému modelování věnuje mnoho výzkumníků, naprostá většina z nich referuje o zkušenostech s výukou na 2. nebo 3. stupni (Wei, Zhang & Guo, 2022, str. 1; Turner et al., 2021; English, 2010). Nabízí se tedy otázka: Je vůbec modelování vhodné pro výuku na 1. stupni? Nesvědčí skrovné pokrytí výzkumy o tom, že podobné komplexní aktivity má smysl nabízet až žákům starším než žáci páté třídy? Opačný názor je už v úvodu knihy s výmluvným názvem *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (Suh, Wickstrom & English, 2021). Australská výzkumnice English zde cituje tuto definici modelování:

„Modelovací úlohy (problémy) jsou realisticky složité situace, kdy je řešitel vtažen do matematického myšlení nad rámec běžné školní zkušenosti a kde očekávané výsledky často zahrnují komplexní artefakty nebo koncepční nástroje potřebné k určitému účelu nebo k dosažení nějakého cíle.“²⁴ (str. 5).

Podle English se do této definice vejdou modelovací problémy různé složitosti, při jejichž řešení mohou zažít úspěch různě zdatní žáci, včetně těch nejmladších. Proto je podle ní možné s matematickým modelováním začít už v primární škole (str. 6).

Ještě dál jde Maaß (2011). Podle ní jsou žáci na začátku školní docházky „kreativní, zvědaví, kladou rádi otázky a modelují už mnoho situací, ještě než nastoupí do školy“²⁵ (str. 16), což je dobrým důvodem k tomu, „na tyto schopnosti od prvního ročníku navazovat a dál rozvíjet a podporovat již existující kompetence k modelování“²⁶ (str. 16). Nejenže je tedy podle

²⁴ „Modeling problems are realistically complex situations where the problem solver engages in mathematical thinking beyond the usual school experience and where the products to be generated often include complex artifacts or conceptual tools that are needed for some purpose, or to accomplish some goal.“ (Pozn.: překlad autorka.)

²⁵ „...sind kreativ, neugierig, stellen gerne Fragen und modellieren bereits viele Situationen, bevor sie in die Schule kommen.“ (Pozn.: překlad autorka.)

²⁶ „...die vorhandenen Fähigkeiten vom ersten Schuljahr an aufzugreifen und die bereits im Modellieren vorhandenen Kompetenzen weiterzuentwickeln und zu fördern.“ (Pozn.: překlad autorka.)

Maaß možné modelovat situace i s *nějakými* prvostupňovými žáky, ale je nanejvýš vhodné začít už od 1. třídy. Obava, že by 5. ročník ZŠ byl příliš brzy, je zjevně zahrnuta.

3.8 Jak učit matematické modelování

V předchozí podkapitole jsem předložila podklady pro to, že modelování na 1. stupni základní školy má smysl a je realizovatelné. Také jsem vymezila, které úlohy mohou mít potenciál při výuce modelování a co míním pod pojmem *modelovací úloha*. V této podkapitole se budu věnovat tomu, *jak* by se modelování mělo učit. Mým původním záměrem bylo najít empirická zjištění pro to, v čem je výuka modelování na 1. stupni odlišná od práce se staršími žáky a jaká jsou pro ni doporučení. Po analýze nejméně 17 článků a studií z různých zemí světa jsem ale zjistila, že až na velmi vzácné výjimky se autoři rozdílům v přístupu k výuce různě starých žáků nevěnují. Musela jsem se proto spokojit s doporučeními pro výuku modelování obecně. Specifika jednotlivých věkových skupin ponechávám dalšímu výzkumu.

Z didaktiky matematického modelování jsem vybrala tři dílčí témata. Nejprve se věnuji dvěma odlišným přístupům k tomu, jak zacílit výuku na kompetenci k modelování, poté roli učitele a nakonec organizačním formám, které se nejlépe hodí v jednotlivých fázích řešení modelovací úlohy.

3.8.1 Kompetence k modelování jako cíl: holistický a analytický přístup

Podkapitola 3.3 rozebírala mimo jiné obsahové, procesní a všeobecné cíle matematického modelování ve výuce (Greefrath, Kaiser, Blum & Borromeo Ferri, 2013). Obsahovým cílem bylo míněno, že žáci jsou schopni použít modelování pro studium jevů z okolního světa. To znamená, že disponují kompetencí k modelování.

Postupy, jak ke kompetenci mířit, se ale liší. Podle práce Blomhøje & Jensena (2003) a Kaiser & Brand (2015) rozlišujeme dva základní přístupy: holistický a analytický²⁷. Jejich rozlišení vychází už z odlišného pojetí pojmu kompetence. Popis kompetence modelování skrze výčet subkompetencí (viz kapitola *Dílčí kompetence a jejich indikátory*) odpovídá analytickému pohledu. Naproti tomu můžeme kompetenci k modelování vidět jako jednu

²⁷ Někdy též „atomistický“ (Blomhøj & Jensen, 2003).

nedělitelnou, komplexní schopnost nebo způsobilost, kterou řešitel buď má, nebo nemá; úlohu buď vyřeší, nebo nevyřeší. Takový přístup se nazývá holistický (Kaiser & Brand, 2015, stránky 138–140).

Výuka, která odpovídá holistickému pojetí, umožní žákovi vždy práci od začátku až do konce modelovacího cyklu. Tomu samozřejmě musí odpovídat i výběr úloh, aby při jejich řešení byla zřetelná fáze vytváření reálného modelu i například fáze validace; musí tedy jít o skutečné Vymezení modelovací úlohy. Argument pro tento přístup uvažuje transfer kompetence k modelování do jiné situace: Pokud žáci během výuky neprojdou celým procesem modelování, je možné, že při řešení nové úlohy v nějakou chvíli zaseknou a nebudou schopni pokročit dál. Blomhøj & Jensen zároveň uvažují o motivačním faktoru holistického přístupu: „Matematické modelování v úplném provedení může práci studentů dodat na autentičnosti, což může být motivačním faktorem.“²⁸ (2003, str. 128).

Stinnou stránkou holistického přístupu je jeho časová náročnost. Některé fáze modelování, především pochopení situace a vytváření reálného modelu, vyžadují podle autorů značné množství času. Výhodou analytického přístupu k výuce modelování může naopak být, že učitelé umožňuje identifikovat jen obtížné kroky a věnovat jim dostatek času (Blomhøj & Jensen, 2003). Můžeme si představit, že ostatní kroky řešení proběhnou místo prací ve skupinách například jako frontální výklad u tabule.

3.8.2 Role učitele

Niss a kolektiv (2007) píše k didaktice modelování toto: „Didaktika modelování a aplikací [matematiky] se v mnoha ohledech překrývá s obecnou didaktikou matematiky, ale zároveň obsahuje řadu postupů, které nejsou součástí tradiční výuky matematiky.“²⁹ (str. 21). V kontrastu s výukou matematiky způsobem, který nazývají „tradiční“, píše Blum a Borromeo Ferri (2009) a Wei a kolektiv (2022) o celkové změně role učitele.

²⁸ „Full-scale mathematical modelling may give authenticity to the students' work and this might be a motivating factor.“ (Pozn.: překlad autorka.)

²⁹ „The pedagogy of applications and modelling intersects with the general pedagogy of mathematics instruction in many respects, but simultaneously involves a range of practices that are not part of the traditional mathematics classroom.“ (Pozn.: překlad autorka.)

Wei a kolektiv považují za zásadní přístup zaměřený na žáka (*student-centred approach*), protože jen tak může být rozvíjena dovednost odůvodňování. Blum a Borromeo Ferri se s Wei shodují v tom, že je třeba ve třídě aplikovat přístup zaměřený na žáka (*learner-oriented classroom management*), nicméně zároveň zdůrazňují, že učitel je v každém případě nepostradatelný. Výuka modelování podle nich vyžaduje udržovat „neustálý balanc mezi (minimálním) vedením učitele a (maximální) samostatností žáků“³⁰ (stránky 51–52).

Blum a Borromeo Ferri provedli dokonce kvalitativně-kvantitativní studii (*Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?*, 2009), ve které srovnávali pokroky studentů vedených dvěma různými vyučovacími styly s různou mírou řízenosti. Polovina tříd byla vedena direktivně: Učitelé střídali výuku celé třídy a samostatnou práci na cvičeních a žáky seznámili s některými běžnými schémata řešení. Druhá polovina tříd byla vedena „operativně-strategicky“. Učitelé takových tříd se snažili maximálně podpořit aktivitu a nezávislé řešení a žákům individuálně pomáhali podle toho, v jaké fázi modelovacího cyklu se nacházeli. Výsledky výzkumu ukázaly, že většího pokroku dosáhli žáci vedení méně direktivním přístupem. Obě dvě vedené skupiny měly nicméně lepší výsledky posttestu než žáci, kteří byli ponecháni, aby se úlohami zabývali sami. Výzkum tedy potvrdil, že intervence vyučujícího je při výuce modelování přínosná, ale že by se učitel ještě více než v jiných oblastech matematiky měl snažit podpořit autonomii žáků.

3.8.3 Vhodné organizační formy

Co se týče managementu třídy a forem výuky, má učitel flexibilně měnit metody a střídat nezávislou práci ve skupinkách a celotřídní aktivity (Blum & Borromeo Ferri, 2009). English (2006) považuje modelovací aktivity dokonce za „inherentně sociální“, protože žáci musí pracovat v malých skupinách, klást si navzájem otázky, řešit konflikty, znovu a znovu své řešení revidovat a výsledek formulovat tak, aby ho mohli sdílet i s ostatními ve třídě (str. 208). Maaß ukázala, že právě práce ve skupinách a samostatná práce podporují rozvoj kompetencí k modelování (Maaß, 2006, str. 119).

³⁰ „a permanent balance between (minimal) teacher’s guidance and (maximal) students’ independence“ (Pozn.: překlad autorka.)

Společná práce u tabule se předpokládá především na konci procesu, kdy mají žáci prezentovat výsledky své skupinky před ostatními (English, 2010). V tu chvíli může učitel pomocí otázek vést žáky ke srovnání různých řešení a tak tematizovat, proč se výsledky liší mezi sebou a jestli mohou být všechny platné (Maaß, 2011). Naopak dílčí kroky v procesu modelování řeší žáci samostatně ve skupinách (English, 2006). V tu chvíli je úkolem učitele skupinky obcházet a podnikat *strategické intervence* (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Tím jsou míněné návodné otázky, které ale žákům neberou jejich samostatnost, nýbrž je upomínají na další kroky v postupu: Co ještě chybí? O co se snažíš? (str. 52). Podle rozlišení v kapitole 3.5.2 o metakognici je možné jinými slovy říct, že učitel poskytuje podporu na metakognitivní úrovni, pokud žák ještě nemá plně osvojené metakognitivní strategie.

4 Výzkumná část

Přestože je matematické modelování zmíněno v českém kurikulu (MŠMT, 2023, str. 32), výzkumně se mu u nás věnoval jen Fiala (2004). Ten ovšem svůj experiment prováděl na odpoledním kroužku s malou skupinou žáků, nikoliv ve třídě během standardní výuky. Právě vzhledem k chybějícím empirickým výzkumům v České republice jsem vybírala zaměření své výzkumné části.

Cílem výzkumné části bylo zkoumat možnosti, jak rozvíjet kompetence k modelování u žáků 5. ročníku v prostředí běžné české základní školy. Motivací bylo jak obohacení současného českého výzkumu, tak praktický výstup pro učitele nebo jiné čtenáře. Jako základní výzkumnou strategii jsem zvolila sérii didaktických experimentů.

Nejprve uvádím otázky, které jsem si kladla pro didaktické experimenty, a metodologii. Pak představuji tři experimenty: prvně vždy uvádím zadání, analyzuji je z pohledu didaktiky matematiky a hledám jejich potenciál z hlediska modelování. Poté analyzuji i pozorování z realizace experimentu ve třídě. V kapitole *Výsledky a jejich diskuse* se vracím k položeným otázkám a snažím se na ně najít odpověď. Odkazuji se jak na své poznatky, tak závěry již existujících empirických výzkumů a výklad problematiky, jak jsem ji představila v teoretické části.

Na výzkumnou část diplomové práce navazuje kapitola *Vědecké a didaktické důsledky výzkumu*. Ta mimo jiné obsahuje výše zmíněné praktické výstupy diplomové práce: totiž *Nápadník úloh* a *Doporučení pro učitele*.

4.1 Sledované otázky

Jak již bylo vyloženo, matematické modelování je vždy navázáno na modelovací úlohu s reálným kontextem (kap. 3.6.1) a v aplikaci mimo školu typicky řeší problémy a situace z přírody nebo věd (kap. 3.2). Proto jsem se rozhodla využít kontext přírodovědný, a tak zároveň propojit výuku matematiky a vzdělávací oblasti *Člověk a jeho svět*. Bylo zřejmé, že během realizace nebude možné sledovat jen izolovanou práci na modelovacích úlohách, postupy řešení a pokroky žáků, ale že práci budou ovlivňovat požadavky tematického plánu přírodovědy i matematiky a časová dotace obou předmětů. To je nepochybně specifikum a zároveň omezení mého výzkumu.

Po shrnutí teoretických východisek mne napadlo mnoho otázek, které by byly vhodným předmětem výzkumu. Bylo ale třeba zúžit jejich výběr a výzkum přesněji zaměřit. Nakonec jsem vybrala otázky tak, aby navazovaly na předestřenou řešerši problematiky modelování, aby se týkaly mého specifického cíle (sledovat možnosti realizace matematického modelování v běžné základní škole) a aby mohly odrážet problematiku mezipředmětových vztahů. Jsou to tyto:

- Bude s žáky 5. ročníku možné projít celý cyklus modelování (holistický přístup; modelovací úloha), nebo bude nutné začít jen s přípravnými úlohami a cílit na rozvoj dílčích kompetencí (analytický přístup; úlohy s prvky modelování)?
- Které dílčí kompetence k modelování budou pro žáky nejhůře zvládnutelné?
- Osvědčí se propojení dvou vzdělávacích oblastí?
- Jaké organizační formy práce budou v této třídě fungovat nejlépe?

Odpovědi na otázky se snažím dát v kapitole *Výsledky a jejich diskuse*.

4.2 Metodologie

4.2.1 Teoretické ukotvení výzkumné strategie

Můj výzkum se zcela jistě řadí do kvalitativního přístupu, protože zkoumá jevy a problémy v autentickém prostředí, zpracovává nenumernická data, a především pro svůj způsob analýzy výsledných dat a pro svou dialogičnost (Švaříček et al., 2014, stránky 15–22).

Zásadní výzkumnou fází byla detailní analýza vytvořených úloh a také konfrontace vlastních zkušeností s nastudovanou literaturou. Ze syntézy vlastních zkušeností a teoretického rámce vznikly kapitoly *Výsledky a jejich diskuse* a *Vědecké a didaktické důsledky výzkumu*. Obě kapitoly jsou proto z povahy dialogické a odpovídají charakteristice kvalitativního výzkumu, jak ji uvádí Švaříček a kolektiv (2014): „Kvalitativní analýza a interpretace dat je hledání sémantických vztahů mezi nimi a spojování deskriptivních kategorií do logických celků.“ (str. 16).

V rámci kvalitativního přístupu byla základní metodou výzkumu série³¹ didaktických (výukových) experimentů.³² Podle Pelikána (2011) je možné didaktický experiment využít při „ověřování nových didaktických postupů“ (str. 230), a protože se řadí do skupiny formujících experimentů, očekává se, že probíhá v přirozených podmínkách a badatel sleduje i jiné než výzkumné cíle (v tomto případě cíle výukové). Přirozené podmínky byly zajištěny tím, že výuka byla organizována, jak jsou žáci zvyklí, a i výukové formy odpovídaly běžné praxi ve vybrané třídě. Žáky učil stejný učitel jako jindy, nebyla přítomna žádná osoba navíc proti běžnému provozu a žáci nevěděli, že právě v tu chvíli jsou z výzkumných důvodů pozorováni.

4.2.2 Tvorba úloh a pracovních listů

Při tvorbě modelovacích úloh jsem chtěla, podobně jako English a Watters ve svém výzkumu (2005), využít mezipředmětové vztahy. Zadávané úlohy jsem proto vytvářela tak, abych mohla navázat na témata probíraná v přírodovědě a využít reálný kontext lidského těla. Jako další propojující téma mezi matematikou a přírodovědou v 5. ročníku se ukázala práce s jednotkami a jejich převody.

Kvůli snaze o mezipředmětové vztahy jsem také modelovací úlohy nepředkládala žákům izolovaně, ale zapojila jsem je do pracovních listů, které nabízely možnost jít v jednom zkoumaném tématu více do hloubky a zároveň vybudovat logickou návaznost úloh s přírodovědným zaměřením a matematického obsahu. Každý list obsahoval prvky matematického modelování, v některých případech typickou modelovací úlohu, která žáka provede celým modelovacím cyklem.³³

Tvorba samotných úloh probíhala takto:

³¹ Za experiment považuji práci na jednom pracovním listě s jedním tématem; jeden pracovní list ale zabral více než jednu vyučovací hodinu.

³² Podle rozdělení konstrukčního, akčního a experimentálního přístupu, jak ho uvádí Ellederová (2017), má můj výzkum i některé charakteristiky výzkumu akčního nebo konstrukčního: inovaci jsem nejenom testovala, ale i postupně zdokonalovala a výzkum jsem vedla nejen jako výzkumník, ale i jako praktik.

³³ Pracovní listy uvádím v plném znění v příloze. V dalším textu u analýzy jednotlivých modelovacích úloh je vždy jen samotná úloha.

Předem jsem sestavila seznam všech témat z okruhu lidského těla a zdraví člověka, kde se nabízelo pracovat s kvantitami a číselnými údaji. K některým z nich jsem vymýšlela nebo ve zdrojích hledala vhodné úlohy, a to v ideálním případě úlohy modelovací, nebo alespoň úlohy s prvky modelování. Snažila jsme se také podle doporučení Gilberta a Suh (2021) vždy navázat na učivo matematiky probírané v 5. ročníku, aby práce s modelovacími úlohami nebyla jen přídatkem, ale „nedílnou součástí studia“ (str. 350). Konkrétní výběr a znění úloh jsem ale finalizovala až postupně, s ohledem na aktuálně probíranou látku v přírodovědě, a především podle toho, jak jsem vyhodnotila zkušenost z práce s předchozím pracovním listem. Pokud jsem při jedné sledované lekci zaznamenala zásadní obtíže, snažila jsem se příští pracovní list, resp. lekci plánovat tak, abych se identifikovanému problému vyhnula.

Při tvorbě pracovních listů jsem dbala na to, aby uvedené informace byly ověřené podle patričních odborných zdrojů. Lekce jsem také sestavovala tak, aby dávaly dost příležitostí k argumentaci a formulování vlastních úvah. Všechny tyto požadavky považuji za standard při tvorbě jakýchkoli didaktických materiálů, ještě zásadnější ale jsou, pokud se snažíme představit matematické modelování jako vědeckou metodu. Získávání informací z důvěryhodných zdrojů a podložená argumentace jsou vedle modelování složitých jevů dalšími pilíři vědecké práce (Evagorou, Nicolaou & Lymbouridou, 2020).

4.2.3 Etika výzkumu, účastníci a průběh realizace

Didaktických experimentů se zúčastnila jedna třída 5. ročníku státní školy v Praze. Etická stránka výzkumu byla vyřešena takto: Ve škole podepisují rodiče žáků informovaný souhlas, který je mimo jiné informuje o možnosti přítomnosti studentů v hodinách a aktivitách, které jsou spojené s přípravou budoucích pedagogů (např. audiozáznam pro následnou reflexi). Dále byli zákonní zástupci žáků experimentální třídy několik měsíců před začátkem prvního experimentu písemně informováni, že ve třídě pravděpodobně proběhne ověření nové didaktické metody, totiž výzkum pro diplomovou práci, který se bude týkat slovních úloh, že ale nebude pořizován žádný záznam a výzkum nijak nenaruší běžnou výuku. Samotní žáci byli o možnosti experimentu informováni ústně, o něco později než jejich rodiče. Žákům bylo vysvětlen očekávaný přínos výzkumu v mezipředmětových vztazích. O začátku

sledovaných experimentů účastníci informováni nebyli, aby jejich chování zůstalo co nejvíce autentické.

Ve třídě je 21 žáků, všichni s mateřským jazykem češtinou, a převažují v ní dívky. Tři chlapci a jedna dívka mají podpůrná opatření 2. a vyššího stupně, ve třídě je po celou dobu přítomen asistent pedagoga. Žáci jsou zvyklí na střídání různých metod výuky a práci ve skupinách, nicméně obvykle sedí v lavicích po dvou a pracují podle učebnice nebo instrukcí učitele. Přírodovědu a matematiku učí stejný učitel. Hodiny přírodovědy probíhají v režimu CLIL, kdy je přítomen ještě rodilý mluvčí a žáci se často dělí na práci s českým a anglickým učitelem. Některé úseky didaktického experimentu byly zpracované právě s takto polovičním kolektivem, zatímco druhá polovina měla zrovna jiný program v angličtině. Třída už v předchozích dvou letech pracovala nejméně na jedné modelovací úloze a na více projektech, kde byly zastoupeny prvky modelování: prezentace dat vhodným způsobem, měření, zápis modelu v různých strukturách nebo úsudky a argumentace na základě předložených informací.

V experimentu byla práce na jednom pracovním listu podle potřeby rozdělena do několika vyučovacích hodin přírodovědy nebo matematiky a střídána s jinými aktivitami. Neměla jednotnou organizační formu: střídala se práce ve skupinkách o třech až čtyřech žácích, celotřídní diskuse a práce na tabuli vedená učitelem a zřídka také individuální práce. Někteří žáci v době konání některého ze tří experimentů nebo jeho části chyběli. Všechny didaktické experimenty proběhly během 2. pololetí školního roku (únor–květen 2023).

4.2.4 Pozorování, sběr dat a jejich vyhodnocení

Metodou sběru dat bylo zúčastněné, přímé, nestrukturované pozorování, v němž byl pozorovatel (totiž já) zároveň aktivním aktérem v situaci. Nestrukturované proto, že předem položené otázky byly spíše vágní a pozornost jsem zaměřila i na náhle vzniknuvší, nečekané situace (Švaříček et al., 2014, stránky 142–146). Pozorování jsem zaznamenala ve formě terénních poznámek vždy po odučené lekci.

Věnovala jsem pozornost jak postupům a komentářům konkrétních žáků, tak interakcím žáci–učitel a naladění a práci celé třídy. U výroků žáků jsem se vždy snažila zaznamenat

jejich přesnou formulaci. Pokud jsem u některé úlohy očekávala, že by mohly zajímavé poznatky přinést artefakty vytvořené žáky, totiž jejich zápisy, nahlížela jsem i do nich.

Limitem tohoto postupu je nepochybně nesystematičnost sběru dat. Z realizace nemáme žádný audiovizuální záznam a ani práce žáků nemám jako celek okopírované. Pozorovatel měl zároveň roli vyučujícího a nemohl se plně soustředit pouze na sběr dat. Proto své závěry považuji za platné jen pro tuto danou třídu a situaci, a proto je také v podkapitole *Výsledky a jejich diskuse* srovnávám s výsledky empirických výzkumů.

Povrchní analýza sebraných dat proběhla vždy bezprostředně po ukončeném experimentu, a to za účelem přizpůsobit další pracovní list a výuku podle zkušeností z dosavadní práce. Tím se má metodologie přiblížit postupům akčního výzkumu. Důkladně jsem data ovšem analyzovala až o několik měsíců později (září–listopad 2023) jako jeden celek. Domýšlela jsem, na jaké myšlenkové procesy nebo obtíže asi poukazují pozorované situace a výroky. Hledala jsem, které ze zapsaných momentů mají vypovídající hodnotu směrem k matematickému modelování a průběhu jeho cyklu, případně které postřehy mohou rovnou odpovídat na zkoumané otázky.

V následujících kapitolách uvádím ke třem didaktickým experimentům postupně zadání úlohy s krátkým komentářem, poté *Analýzu úlohy a jejího potenciálu vzhledem k modelování* a nakonec podkapitolu *Poznatky z pozorování*. Ta pro každou úlohu obsahuje několikero zapsaných pozorování (tj. sebraná data) a ihned za nimi analýzu pozorovaného jevu.

4.3 Dýchání myši, slona a člověka (didaktický experiment)

Práce je zadána jako pracovní list, který dostane každý žák ve třídě a bude na něm pracovat ve skupině. Pracovní list³⁴ obsahuje úvodní text o společných znacích savců a částečně vyplněnou tabulku s několika řádky prázdných okének (zde uvádím jen část pracovního listu relevantní pro modelování a zkrácenou tabulku; údaje o hmotnosti se týkají jiné úlohy).

³⁴ Na základě práce ve třídě jsem poté pracovní list vylepšila a některé otázky, které jsem původně žákům kladla ústně, jsem do něj přidala. Viz Příloha 1 – Dýchání myši, slona a člověka (původní pracovní list) a Příloha 4 – Dýchání myši, slona a člověka (upravený pracovní list).

Zadání úlohy

Kdo se za život nadechne vícekrát? Myš, člověk nebo slon?

	myš domácí	slon indický	a co člověk?
hmotnost při narození	0,5 až 1,5 gramů	80 až 100 kg	
hmotnost v dospělosti	40 až 45 gramů	4,5 až 6 tun	
počet nádechů	80 až 200 za minutu	5 až 6 za minutu	
délka dožití	2 roky	70 let	

4.3.1 Analýza úlohy a jejího potenciálu vzhledem k modelování

Úloha: Kdo se za život nadechne vícekrát? Myš, člověk nebo slon?

Obsah učiva přírodovědy: společné znaky živočichů

Obsah učiva matematiky: multiplikativní operace, velká čísla, práce s jednotkami

Řešení celé úlohy, totiž srovnání tří živočichů podle počtu jejich nádechů za život, je komplexní úkol. Úloha splňuje podmínky modelovací úlohy (viz kap. 3.6.1). V následujících odstavcích rozeberu, co se musí stát v každém kroku řešení. Totiž: jak je můj cyklus modelování (viz kapitola 3.4.3) realizován v případě této konkrétní úlohy. Aneb: co všechno musí řešitel během řešení překonat, které dílčí kompetence zvládnout.

Uchopení situace. Situace je představena slovním zadáním. Uchopit situaci a vytvořit mentální reprezentaci (fáze 0 v našem schématu modelování) zde znamená pochopit text, a vyžaduje proto čtení s porozuměním. Zásadní je porozumění výrazu „vícekrát“, totiž že

živočichy máme srovnat podle počtu jejich nádechů. Také určení času „za celý život“ vyžaduje uvědomění faktu, že se každý živočich dožívá jiného věku.

Ještě před dalšími kroky vyžaduje tato úloha strategické plánování (tj. metakognitivní strategii – viz kap. 3.5.2) na základě představy o výsledném řešení. Řešitel si představí, že k zodpovězení otázky jsou nutné tři výsledky a že se bude postup jakoby trojmo opakovat: pro člověka, myš a slona. Předpokládám, že většina řešitelů bude implicitně očekávat, že otázka v zadání v sobě vlastně skrývá tři nevyřešené podotázky: Kolikrát za život se nadechne myš? Kolikrát se za život nadechne člověk? A co slon?³⁵

Vytváření reálného modelu. Reálnému modelu (fáze 1 ve schématu modelování) zde předchází rovnou několik aktivit. Zadání obsahuje tabulku s informacemi, které ale není možné jen jednoduše použít. Předně nejsou všechny uvedené informace relevantní, protože část z nich je určena pro druhou otázku na pracovním listu (růst živočichů). Jiné potřebné informace pro řešení, jako jsou vztahy jednotek času mezi sebou, naopak chybějí. Očekává se, že je řešitel bude znát, a hlavně že si uvědomí, že musí tuto svou matematickou znalost aktivovat (že mu vůbec něco chybí).

Zřejmým specifikem této úlohy je, že číselné údaje, které jsou dané, jsou uvedené jen jako rozpětí (80–200 nádechů za minutu). Žák si musí na základě zkušeností z reálného světa představit, že rozpětí v realitě znamená, že každý exemplář daného druhu má jinou hmotnost, jiné srdce, je jinak starý. Přesně tento nesystematický jev z reality je třeba při vytváření reálného modelu zjednodušit, idealizovat. A naopak: chybou by bylo krok reálného modelu přeskočit a místo toho se pokusit všechny číselné údaje rovnou zapojit do matematického modelu a dále na nich provádět nějaké matematické operace. Je každopádně možné, že mnohým žákům v 5. ročníku ZŠ může úloha přinést první setkání s přibližně uvedenými údaji v zadání.

³⁵ Čtenáři tohoto textu a ostatní prozíraví matematici pravděpodobně využijí jednodušší postup, jak mezi sebou počet nádechů tří živočichů srovnat. Zúročí tak své znalosti o operacích a zkušenosti z předchozího řešení podobných úloh. Od žáků 5. ročníku takový vhled hned na počátku procesu řešení ale spíše nečekám.

Řešitelský proces zjednoduší, pokud má řešitel s modelováním již zkušenost a má metakognitivní znalost o povaze modelovacích úloh. Potom zkrátka ví, že se v modelovacích úlohách často pracuje s přibližnými informacemi a že je na něm, aby se rozhodl, jak si s přibližností poradí. Nemusí už být touto nepřijemností zaskočen.

K vytváření reálného modelu je třeba správně identifikovat zásadní proměnné a vztahy mezi nimi. Žák by měl správně určit, že na počet nádechů za celý život má vliv proměnná *délka života* a proměnná *počet nádechů za minutu*; dále pak konstanty určující vztahy mezi jednotkami času. Domnívám se, že určení vztahu mezi proměnnými můžeme rozdělit do dvou pomyslných kroků. Prvním krokem je poznání, že jde vůbec o nějaký druh úměrnosti (čím delší život, tím více nádechů – představa jakoby stoupající funkce). To dle mého názoru patří ještě k hledání vztahů mezi proměnnými (fáze modelování 1 – vytváření reálného modelu). Druhým krokem je určení, že jde přímo o vztah přímé úměrnosti a tedy o multiplikativní vztah. To bych zařadila už k matematizaci reálného modelu (fáze 2).

Představila jsem zatím jen dílčí aktivity v rámci fáze 1 – vytváření reálného modelu. Vezměme si k ruce seznam dílčích kompetencí, jak byl prezentován v kapitole 3.5.1. Z kompetencí k vytváření reálného modelu jsou zde potřebné všechny! Navíc jsem zmínila metakognitivní kompetence a tvrdím, že metakognitivní znalost o povaze modelovacích úloh vytváření reálného modelu zjednoduší.

Matematizace úlohy (fáze 2) už jsme se dotkli, přímo totiž navazuje naa kognitivní úsilí při vytváření reálného modelu. Řešitel si uvědomil, že se musí vypořádat s údaji zadanými jako rozpětí. Nyní může například na základě představy „průměrného člověka“ nebo „průměrného slona“ určit, že bude v každém zadaném rozpětí hledat střední hodnotu.

Matematický model této úlohy může mít formu několika navazujících rovnic (nádechy myši (resp. slona, člověka) za hodinu; nádechy myši za den..., za x let). Úloha má zároveň potenciál rozvíjet funkční myšlení³⁶ v tom smyslu, jak s tímto pojmem pracuje Vollrath (1989). Vztah pro počet nádechů za život je funkcí se dvěma argumenty: *délka života*

³⁶ Funkčním myšlením míním schopnost popisovat a pozorovat svět pomocí funkcí, totiž vidět závislosti veličin jedné na druhé.

a nádechů za minutu. Pro žáky 1. stupně je ovšem algebraický zápis něčeho takového jistě nedostupný a v matematizaci úlohy ho nemůžeme čekat. Mezi indikátory kKompetence matematizovat reálný model uvádím ovšem také bod „žák volí vhodnou formu [...] grafické reprezentace“. Jako vhodná grafická reprezentace se zde nabízí „had“, který může hezky zobrazit řešení rovnice s několikerou operací násobení za sebou. Prázdná kolečka vybízejí doplnit stavy mezi operacemi a zároveň navádějí k myšlence, že tento „had“ by mohl fungovat pro výpočet u všech tří živočichů.



Schéma 5 – Hadovité zobrazení funkce. Červená místa označují vstup proměnných.

Pro matematizaci samotné úlohy a její řešení není objev tohoto zjednodušení, totiž skryté funkce, nutný. Na konci celého kruhu modelování jsem ale jako volitelný krok zařadila generalizaci modelu pro širší paletu situací. Právě k zobecnění matematického modelu by tento zárodek funkce mohl pomoci. Na učiteli v hodině pak zůstává rozhodnutí, bude-li i ke kroku generalizace směřovat, nebo nechá-li práci plynout podle toho, jak zralé myšlenky se ve třídě objeví. Pokud by žákům chtěl myšlenku zobecnění zpřístupnit, může v této úloze využít zřetelnou podobnost mezi třemi v podstatě totožnými matematickými modely. Grafická reprezentace hadem je jednou ze šikovných možností.

Operace, interpretace výsledku. Po vytvoření matematického modelu (fáze 2) musí řešitel provést všechny náležité operace, dojít k výsledku (fáze 3), výsledek následně interpretovat (fáze 4) a validovat (fáze 5). V této úloze bude řešitel pro každého živočicha pravděpodobně čtyřikrát za sebou násobit a výsledek bude v řádu stamilionů. Úloha proto může být pro žáky obtížná v řetězení operací za sebou a v číselném oboru, do kterého zasahuje. Schopnost *správně a účelně provést základní matematické algoritmy* zde projde zatěžkávací zkouškou. Na konci téže kapitoly jsem jako součást kompetence k modelování zmínila i volní předpoklady. Ty budou při tolikerém opakování algoritmu násobení také stěžejní.

Předpokládám, že matematickým řešením jsou v této úloze tři devíticiferná čísla. Řešitel, který se zatím neztratil v procesu, se vrací k reálnému modelu a vidí za čísly počet nádechů slona, člověka a myši. K zodpovězení otázky ještě chybí srovnat tři velká čísla a tím i tři

živočichy mezi sebou. Domnívám se, že srovnávání je na pomezí ještě fáze 3 (matematických operací) a fáze 4 (interpretace). Zároveň se totiž už vztahujeme zpět k původnímu kontextu mimo matematiku, ale zároveň patří srovnávání čísel mezi jasně matematickou dovedností.

Validate. Validace výsledku je neoddělitelnou fází řešení modelovací úlohy. Nejde totiž jen o kontrolu numerických operací, tu známou „zkoušku“. Specificky v modelování validace znamená, že se řešitel vrací zpět k reálnému modelu a ověřuje, že je výsledek z matematického světa přiměřený i v realitě.

V této úloze jsou kritickým místem aritmetické operace, které vyžadují obezřetnou práci s řády a přesné vykonání algoritmů. Všichni tři živočichové se za život nadechnou více než stomilionkrát. V možnostech žáka 5. ročníku není jak usoudit, jestli je tak velký výsledek vůbec v realitě možný, nebo jestli se třeba o jeden řád spletl. Domnívám se proto, že tato úloha nemá dobrý potenciál pro nácvik validace.

Jak píšu v příslušném oddíle, do Kompetence validovat reálné výsledky je zahrnuto také to, že žák „reflektuje celý postup, [...] odlišné způsoby řešení [...] a identifikuje místa, kde mohly vzniknout nepřesnosti“. Řešitel by si měl i sám uvědomit, jak křehké místo bylo v jeho řešení opakované násobení, a důkladně si ho zkontrolovat. Ale nejen to – první chvíle, kde mohly vzniknout nepřesnosti nebo odlišnosti v jednotlivých řešeních, bylo rozhodování o vstupních údajích v rámci zadaného rozpětí (80–200 nádechů za minutu). Budu počítat s klidnou, nebo vyděšenou, rychle dýchající myší? Jak přesně jsme mohli změřit počet nádechů člověka za minutu? Na tuto problematiku může dobře poukázat srovnání řešení jednotlivých žáků nebo skupin mezi sebou.

Zároveň úloha skrývá myšlenku jakési konzistence v rámci řešení. Pokud jsme počítali s mladou myší, dýchající klidně, měli bychom ji srovnávat jedině s mladým člověkem, dýchajícím klidně, nikoliv s člověkem, který dýchá rychle při sportu. Pokud jsme brali střední hodnotu, měli bychom ji brát u všech živočichů a všech údajů. Úloha tak poukazuje na velkou svobodu a vliv řešitelského procesu v modelovacích úlohách, ale zároveň ukazuje, čím je řešitel limitován. Můžeme si vybrat, jaký postup a čísla použijeme, ale vždy odůvodněně. Právě v této svobodě jsou modelovací úlohy ojedinělé a zároveň obtížné. Tímto směrem může učitel vést debatu ve fázi validace a srovnávání více cest k řešení.

Shrnutí. Představila jsem postupně analýzu jednotlivých fází řešení modelovací úlohy o počtu nádechů slona, člověka a myši. Sledovala jsem, jestli má potenciál uplatňovat nebo rozvíjet jednotlivé dílčí kompetence podle toho, jak jsem je představila v podkapitole 3.5.1. Závěrem analýzy konstatuji, že největší potenciál (a zároveň obtížné místo) při práci s touto úlohou je ve zpracování zadaných informací a vytvoření reálného modelu. Naopak slabší místo je ve validaci řešení, protože k posouzení výsledku není možné použít informace ze světa mimo matematiku.

V následující části popíšu několik zajímavých bodů ze svého pozorování práce s úlohou v 5. třídě.

4.3.2 Poznatky z pozorování (úloha Dýchání)

Pozorování: Poučený odhad jako součást uchopení úlohy. Hned zpočátku řešení úlohy byli žáci vyzváni, aby každý za sebe formuloval odůvodněný odhad, který živočich se nadechne nejvícekrát. Záměrem bylo žákům usnadnit uchopení úlohy a porozumění zadání a mobilizovat i přírodovědné znalosti.

Žáci se při odhadování ve třídě k jednotlivým živočichům rozdělili zhruba rovnoměrně, nepřevažoval jasný názor. Zajímavé byly ovšem argumenty, které zazněly: „miminko dýchá rychleji a myš je taky malá, proto dýchá rychle“, „když dýchá rychle, nadechne se nejvícekrát“, „myš se dožije méně let, takže dýchá méněkrát“, „slon je velký, takže dýchá pomalu“, „člověk je něco mezi, nadechne se nejvícekrát“. Někteří žáci odpovídali pouze na základě vlastní zkušenosti a znalostí, někteří ale rovnou argumentovali s pomocí tabulky: „Podívejte, myš dýchá strašně rychle, určitě nejvícekrát.“ Většina žáků projevila o problém zájem, někteří ovšem nedokázali sestavit srozumitelný argument. Někteří svůj odhad formulovali jen neochotně a bez motivace.

Pozorování: Uchopení úlohy u slabého žáka. Zvlášť pozoruhodná byla argumentace žákyně Anežky³⁷. Anežka je žákyně s velmi slabými výkony v matematice i v českém jazyce, kolísavou pozorností, nízkou motivací k učení, podezřením na nižší intelekt a se

³⁷ Jméno bylo změněno.

zájmem o zvířata. Ve chvíli zadání se spíše nesoustředila, ale předestřená situace ji zaujala. Svůj názor formulovala takto: „Nejvíce se nadechne slon, protože u toho tak funí!“

Analýza: Uchopení úlohy. Podle pozorování usuzuji toto: Výzva, aby udělali odůvodněný odhad řešení, žáky donutila úlohu uchopit (porozumět zadání) a dále se alespoň rámcově zamyslet nad relevantními kvantitami a jejich vztahy, které jsou pro řešení důležité. Tím se posunuli v procesu řešení směrem k reálnému modelu. Na tom, že část žáků byla schopná už takto na začátku správně vystihnout vztahy v situaci (např. s rostoucí *délkou života* vzrůstá i *počet nádechů*), vidíme, že situace pro ně byla přístupná.

Většina žáků pro svůj úsudek použila vlastní zkušenost; někteří navíc informace uvedené v tabulce pod zadáním. To hraje pro mezipředmětové vztahy: žáci u tématu, které je zaujalo, spontánně využívali své znalosti o přírodě. I Anežka využila svou znalost o živočichovi, nicméně ne takovou, která by byla významná pro řešení úlohy (totiž že slon dýchá hlasitě). Musím tak konstatovat, že selhala ve výběru relevantních proměnných a jistě proto není kompetentní vytvořit reálný model této situace (fáze 1 ve schématu modelování) a pokračovat matematizací úlohy. Otázkou je, jestli chyba nevznikla ještě o krok dříve: ve správném pochopení zadání (fáze 0). Podle její formulace „nejvíce se nadechne slon“ si nemůžeme být jistí, zda jen neobratně formuluje odpověď, nebo zda opravdu nepochopila výraz „nejvícekrát“ a vůbec nerozumí, na kterou kvantitu se ptáme.

Pozorování: Získávání chybějících údajů měřením. Zadání úlohy vybízí srovnat mezi sebou tři živočichy. Jen ke dvěma z nich, ke slonovi a k myši, jsou ale k dispozici vstupní údaje. Žáků jsem se přímo zeptala, jaké možnosti jako řešitelé mají, pokud úloha neobsahuje všechny údaje potřebné k řešení. Žáci se na základě své zkušenosti shodli na dožití člověka okolo 80 let a počet nádechů za minutu nechali vybrané žáky změřit. Ochotných žáků pro měření bylo ve třídě mnoho. Vybraní měřiči došli k výsledku zhruba 25 nádechů za minutu, což naprosto neodpovídá běžně udávanému rozpětí 12–16 (Silbernagl & Despopoulos, 1984, str. 68). Učitel proti původnímu plánu, který s tím nepočítal, vyzval ke společnému přeměření, stopoval minutu a jako střední naměřená hodnota se ve třídě vybral počet nádechů 16 za minutu. Měření ale zabralo velkou část vyučovací hodiny matematiky.

Analýza: Získávání chybějících údajů měřením. Potřeba zjistit nebo získat měřením chybějící údaje vychází z povahy modelovacích úloh. Údaje o člověku jsem vynechala také

proto, abych žáky donutila zapojit i jejich znalosti a dovednosti mimo matematiku, a tím podpořila mezipředmětové vztahy. Měření kromě toho žáky této třídy zajímá a motivuje. Jsem toho názoru, že měření a zjišťování informací podporuje pochopení povahy modelování, což náleží k metakognitivním znalostem (viz kapitola 3.5.2). Žáci se seznamují s tím, že modelovací úlohy nejsou jen „klasické slovní úlohy“ s pár čísly, které stačí navzájem kombinovat a vypočítat výsledek. Na druhou stranu je měření a podobné aktivity extrémně časově náročné a bohužel vytváří další příležitosti k chybám.

Pozorování: Ztráta orientace v průběhu řešení úlohy. Po celotřídní diskusi o zadání a očekávaném výsledku se žáci rozdělili do skupin o čtyřech žácích a v nich pokračovali v práci. K zadání a tabulce už nedostali žádné vysvětlení. Během práce bylo patrné, že někteří žáci nebo celé skupiny jsou dezorientované, přestávají pracovat. Poprvé tento moment nastal už ve chvíli, kdy bylo potřeba vypořádat se s údaji zadanými jako rozpětí. Někteří žáci rovnou pokračovali v řešení a přibližné informace je nijak nevykolejily – především ti, kteří jsou ve třídě obvykle aktivní a úspěšní v řešení matematických úloh. Někteří žáci a skupiny se doptávali, jak mají pokračovat, a byli schopni si vybrat nějakou strategii (vzít systematicky nejmenší číslo z rozpětí – vybrat z rozpětí náhodné číslo...). Pro některé žáky byl ale tento krok bariéra a pro jistotu další postup vzdali. O úlohu definitivně ztratili zájem.

Podruhé bylo možné pozorovat, že se někteří řešitelé v úloze ztrácejí, když došlo na samotné matematické operace. Někteří žáci ve třídě měli v této době (jarní měsíce 5. ročníku) i tak obtíže v písemném násobení několikacífernými čísly a v práci s nulami, tyto obtíže se projeví i teď. Dále se některým skupinám nedařilo organizovat tolik čísel a výpočtů na jednom listu papíru. Práce byla přerušena přestávkou a po ní už se k výpočtům nebyli schopni vrátit, protože nevěděli, který mezivýsledek je kde zapsaný a co znamená.

Zadání obsahovalo tabulku s několika prázdnými řádky. Očekávala jsem, že žáci mohou využít jako místo pro mezivýsledky, které by tak přehledně strukturovali pro slona, myš i člověka. Když byly skupiny ale ponechány víceméně v samostatné práci, neoznačeným řádkům neporozuměli; jedna skupina sama sdělila, že je prázdné řádky v zadání matou.

Analýza: Ztráta orientace v průběhu úlohy. Domnívám se, že mé pozorování o ztrátě orientace v průběhu řešení poukazuje na obtížné rozhodování o způsobu zadávání práce.

Na základě analýzy jsem věděla, že se jedná o nestandardně obtížnou úlohu v počtu operací, které je potřeba vykonat za sebou. Pokusila jsem se proto vytvořit takový pracovní list, aby naváděl k systematické evidenci mezivýsledků do tabulky. Zároveň jsem ale chtěla nechat skupiny pracovat pokud možno samostatně, a rozhodně je předem nenavádět na jednotlivé mezikroky; pak ale tabulka zůstala nevyužita a některé skupiny nedokázaly sledovat vlastní navržený postup. Dilema zůstává: vést žáky při práci na obtížné úloze, nebo je nechat pracovat co nejvíce samostatně?

Po zkušenosti ve třídě, kdy se některé skupiny zcela ztrácely, zároveň otevřeně kladu otázku: Není tato úloha pro žáky 5. ročníku příliš obtížná? Jak by se dala zjednodušit? Nebo se vůbec pro 5. ročník nehodí? Část žáků by se patrně nebyla ztratila, nebýt přestávky, která práci přerušila. Byl-li jedním z problémů příliš dlouhý proces, stálo by za to vynechat počáteční rozhovor a měření? Nebo můžeme u této věkové kategorie zkrátka cílit jen na část procesu (analytický přístup), jen na některé fáze, a zbytek žákům třeba jen ukázat?

Snažím se také porozumět úspěšným řešitelům, kteří se ani v tak dlouhém procesu řešení úlohy docela nového typu neztratili. Hned v prvním kroku bylo zřejmé, že vědí, kam úloha směřuje. Aby bylo možné srovnat tři výsledky mezi sebou, bude potřeba vybrat důležité údaje a doplnit chybějící, provést s kvantitami několikero násobení... Domnívám se, že právě toto myslí Maaß, když píše, že úspěšní řešitelé disponují od začátku orientačním smyslem (*sense of direction*) (2006, str. 137).

Pozorování: Srovnání matematických mezivýsledků mezi sebou a formulování reálného řešení. Skupiny, ve kterých žáci na úloze pracovali, dostaly volnost v postupu řešení. Na základě dohody ve třídě začaly svůj postup u různých živočichů, někdo u myši, někdo u člověka. Zároveň se samostatně musely vypořádat s tím, že vstupní údaje nejsou zadány jednoznačně; každá skupina také pracovala rozdílným tempem. Po zhruba 30 minutách práce, rozdělených ale přestávkou, jsem skupiny vyzvala k prezentaci jejich postupu a matematických výsledků k jednotlivým živočichům. V tu chvíli nebyla ve třídě ani jedna skupina, která by mohla podle svých dílčích výsledků srovnat všechny tři živočichy mezi sebou, každého živočicha měla ale dopočítaného alespoň jedna skupina. Bylo tedy principiálně možné formulovat společně reálné řešení, totiž odpověď na původní otázku.

Dílčí výsledky k jednotlivým živočichům se mezi skupinami samozřejmě lišily (např. správné výsledky pro myš: 147 168 000 vs. 210 240 000 nádechů). Navíc nebylo vzhledem k náročné validaci na první pohled jasné, jestli nejsou některé dílčí výsledky ze skupin chybné. Ke společnému řešení jsem vybrala dílčí výsledky od skupin, které alespoň provedly numerickou kontrolu a byly tedy důvěryhodné. Ty jsem napsala na tabuli a podle nich jsme srovnali živočichy mezi sebou. Skutečnost, že se výsledky mezi sebou liší, jsem z časových důvodů jen stručně okomentovala. Bylo ale zřejmé, že někteří žáci ve třídě jsou zmateni tím, že se dílčí výsledky na tabuli liší od těch jejich. Někteří se bránili, že oni to mají jinak a správně.

Nakonec jsem se zeptala, jak zněla původní otázka a jestli už nyní můžeme napsat odpověď. Ze třídy byla schopná odpovědět jen menšina žáků.

Analýza: Srovnání matematických mezivýsledků mezi sebou a formulování reálného řešení. Příliš (?) komplikovaná úloha. V předchozí kapitole jsem shrnula, jaký potenciál se v celé úloze skrývá. Z nejednoznačně zadaných vstupních údajů plynou odlišné matematické výsledky. Jak píše Maaß (2011), srovnání různorodých výsledků umožňuje reflexi různých postupů a výchozích předpokladů (str. 18). V mé třídě se ovšem nepodařilo vytěžit zároveň různorodé postupy a výsledky k jednotlivým živočichům a zároveň dojít k dostatečně transparentnímu řešení předloženého reálného problému a tím uzavřít modelovací cyklus. Zároveň mám obavu, že někteří žáci neviděli přínos svého úsilí a rozhodně nezískali sebevědomí, že jsou schopní modelovací úlohy řešit samostatně.

Podle mne z toho plyne toto: Pokud bychom chtěli samostatnou práci žáků dojít k reálnému řešení a zároveň jim nechat svobodu zacházet dle vlastní úvahy se vstupními údaji, není tato úloha použitelná v běžném časovém rozmezí vyučovacích hodin o 45 minutách. Bylo by potřeba jak výrazně navýšit časovou dotaci a úlohu řešit jako nějaký projekt, tak lépe rozmyslet vizuální prezentaci odlišných výsledků z jednotlivých skupin.

U takto komplexní úlohy, kde už je i tak potřeba srovnat více mezivýsledků mezi sebou, se ale na základě popsané zkušenosti kloním ke zjednodušení. Usnadnit práci by bylo možné tím, že bychom ještě reálný model na začátku řešili společně jako třída a omezili bychom tak, s jakými kvantitami budeme pracovat. Nebo bychom řešili pouze myš a slona (či jen jednoho z nich?) a zaměřili se na reflexi různých postupů a výsledků (fáze validace).

Scénáře, ve kterých bychom se zaměřili na vybrané fáze a jiné urychlili, by odpovídaly analytickému didaktickému přístupu k modelování (viz kapitola 3.8.1).

4.4 Ideální tepová frekvence (didaktický experiment)

K ideální tepové frekvenci dostali žáci celý pracovní list³⁸ s různorodými úlohami. Zde uvádím jen matematické úlohy z pracovního listu, celý list je vložený v příloze. Pracovní list dostane každý žák a bude na něm pracovat částečně pod vedením učitele a částečně samostatně.

³⁸ Pracovní list vznikl po vyhodnocení práce s úlohou Dýchání myši, slona a člověka. Snažila jsem se proto změnit zadání tak, aby fungovalo dobře tam, kde jsem právě u předchozí úlohy spatřovala nedostatky. Především jsem se snažila o zadání, které bude každého žáka jednotlivě explicitněji navádět k činnostem (zapiš odpověď, vypočítej...), tím mu dodá orientaci a učitelé naopak možnost nahlédnout do řešitelského procesu žáků.

Zadání úlohy

Tepová frekvence (tzv. „tepovka“) udává počet tepů srdce za minutu. Liší se podle věku člověka.

Můj odhad:

Naměřil jsem si:

Technika měření (jak jsme měřili):

Kde můžou být chyby v měření:

Pro každý věk člověka se stanovuje maximální tepová frekvence.

Maximální tepová frekvence (tzv. „maximálka“, značka M) se počítá takto:

$$M = 220 - (\text{věk člověka})$$

Jaká je tvoje maximálka?

Výpočet:

Slovní odpověď:

Při zdravém sportu by mělo srdce tepat zhruba tolikrát, kolik je 6/10 z maximální tepové frekvence. Kolik by mělo tepat tvé srdce při zdravém sportu?

Výpočet:

Slovní odpověď:

Zapiš v hadovi postup celého výpočtu ideální tepové frekvence při sportu.

4.4.1 Analýza úlohy a jejího potenciálu vzhledem k modelování

Z hlediska matematického modelování nás budou zajímat dvě úlohy:

Úloha 1: Jaká je maximální tepová frekvence pátáka při sportu?

Úloha 2: Jaká je ideální tepová frekvence pátáka při sportu?

Obsah učiva přírodovědy: oběhová soustava, zdravý sport

Obsah učiva matematiky: semisymbolické vyjádření vztahu, nekmenové zlomky

Reálný kontext úloh. Pracovní list obsahuje dva matematické modely ve smyslu zjednodušené reprezentace reality. Těmito modely jsou matematické vzorce pro maximální tepovou frekvenci a pro ideální tepovou frekvenci při sportu. Úlohy z pracovního listu také, stejně jako modelovací úlohy, pracují s reálnými, nijak nezjednodušenými informacemi. Jedná se ale pouze o úlohy s prvky modelování (viz *Vymezení modelovací úlohy*), protože řešitel nemusí z reality vytvářet reálný model ani reálný model matematizovat. Model je v tuto chvíli zadán.

Přestože zadání úloh neumožňuje projít celým modelovacím procesem, můžou být na základě pracovního listu rozvíjeny jednotlivé dílčí dovednosti, které řešení modelovacích úloh vyžaduje:

Interpretace matematického modelu. Jak jsem již psala výše, podle některých autorů je součástí kompetence interpretovat matematický model a jeho výsledky také toto:

Žák analyzuje zvnějšku zadaný model, úvahy za ním a jeho účel a interpretuje jeho složky a výsledky v situaci, kterou má zastupovat (Niss, Blum & Galbraith, 2007, str. 12; Kaiser & Brand, 2015).

To znamená, že žáci nemusejí nutně pracovat jen s modely, které sami vytvoří, ale mohou začít rovnou od zadaného modelu a jím se zabývat. Podívejme se na toto hybridní, částečně symbolické vyjádření (budu mu říkat „hybridní rovnice“):

$$M = 220 - (\text{věk člověka})$$

Pracovní list můžeme bez komentáře zadat a sledovat, jestli jsou žáci schopní do hybridní rovnice správně dosadit a formulovat slovní odpověď. Už jen přeložení rovnice do srozumitelné věty je svého druhu interpretace. Ve společné diskusi je ale možné pomocí následujících otázek jít ještě mnohem dál: Jak asi tenhle model vznikl? Je možné, že mají ve skutečnosti některé desetileté děti jinou maximálku? Je tedy model všeobecně a vždy platný? K čemu je užitečný? Co model říká o starých a mladých lidech?

Předchozí úloha na pracovním listu žáky navádí k měření aktuální tepové frekvence. Naměřené hodnoty se jistě budou navzájem lišit, což je správně. Matematický model

maximální tepové frekvence, se kterým mají následně pracovat, působí naopak jako něco direktivně daného a všeobecně platného, co se „dá vypočítat“. Domnívám se, že právě tento zjevný rozdíl spolu s výše navrženými otázkami může žáky vést k porozumění, co to vlastně matematické modelování je. Diskuse nad sestaveným pracovním listem má potenciál žákům předat, že matematický model se vždy liší od reality, že situaci nějak zjednodušuje a že to může být užitečné (viz *Matematické modelování pohledem aplikované matematiky*).

Generalizace matematického modelu. Pracovní list postupně představuje nové pojmy týkající se tepové frekvence a k nim také navazující slovní úlohy. Provádí tak řešitele po krůčcích k pojmu ideální tepové frekvence a zároveň k matematickému vyjádření, které je už poměrně komplikované. Ideální tepovou frekvenci bychom mohli algebraicky vyjádřit takto:

$$I = (220 - V) * \frac{6}{10},$$

kde V je věk člověka. Žák ovšem zatím počítal jen krok po kroku konkrétní hodnotu ideální tepové frekvence pro sebe samého, a navíc ve dvou oddělených slovních úlohách; proto se domnívám, že algebraický zápis by pro většinu žáků byl nedostupný. Abych i tak žákům pomohla nahlédnout postupné výpočty jako jeden celek, totiž jako matematický model ideální tepové frekvence, přidala jsem do pracovního listu poslední úlohu:

Zapiš v hadovi postup celého výpočtu ideální tepové frekvence při sportu.

Kompetence matematizovat reálný model a vytvořit tak matematický model ostatně neznamena, že by řešitel nutně musel použít jazyk písmen nebo pracovat hned obecně. Jak uvádím mezi kompetencemi k matematizaci, má řešitel pouze použít vhodnou matematickou strukturu a vhodné grafické zobrazení. Tvrdím, že „had“ je výhodný a vhodný, protože šipkami naznačuje procesuální charakter původního postupu, zároveň ale sjednocuje několik navazujících kroků; a také podle možností každého žáka umožňuje zapsat konkrétní čísla a zůstat na konkrétní úrovni a současně matematický model zobecnit.

Shrnutí. Úloha Ideální tepová frekvence sice pracuje s reálným kontextem, ale neumožňuje řešitelům projít celým procesem matematického modelování. Nejedná se tedy o modelovací

úlohu v pravém slova smyslu, nýbrž jen o úlohu s prvky modelování. Pracovní list je ale sestaven tak, aby nabízel možnosti k diskusi o matematických modelech a jejich vlastnostech a vedl žáka od vyjádření konkrétními čísly k vyjádření obecnému.

4.4.2 Poznatky z pozorování (úloha Ideální tepová frekvence)

Pozorování: Interpretace zadaného matematického modelu. Pracovní list postupně představuje pojmy aktuální tepové frekvence, maximální tepové frekvence a ideální tepové frekvence při sportu. S žáky jsme jej vypracovávali v průběhu několika vyučovacích hodin. V první hodině přírodovědy jsme společně měřili aktuální tepovou frekvenci každého žáka, srovnávali ji mezi sebou a mluvili o možných chybách při různém způsobu měření. Mluvili jsme také o tepu a tepové frekvenci všeobecně a pojem vztáhli k celkovému tématu oběhové soustavy člověka. V další hodině přírodovědy jsem žáky nechala samostatně zpracovat Úlohu 1 (maximální tepovou frekvenci), poté jsme společně zkontrolovali výsledky a žákům jsem položila doplňující otázky. Naprostá většina žáků dokázala do vzorce správně dosadit, vypočítat vlastní maximální frekvenci a srovnat maximální frekvenci mladších a starších lidí. Žáci také reflektovali, že mezi lidmi mohou být individuální odchylky.

K ideální tepové frekvenci (Úloha 2) jsme se vraceli v hodině matematiky až o několik dní později. Žáci měli opět pracovat samostatně. Pozorovala jsem, že mnoho žáků úlohu nedokáže vyřešit: Pro některé žáky byla bariérou matematická složka (porozumění grafickému zápisu $6/10$ nebo práce se zlomkem); po dotazu se ale ukázalo, že někteří si v zadání nevědí rady se slovním spojením „z maximální tepové frekvence“, které zaznělo naposledy v předchozí hodině.

Analýza: Interpretace zadaného matematického modelu a obtížnost zadání. Domnívám se, že mé pozorování vypovídá o tom, že žáci 5. ročníku byli schopni porozumět předloženému semi-algebraicky zapsanému modelu a samostatně ho použít pro řešení konkrétní otázky (jejich maximální tepová frekvence, Úloha 1). Dokázali porovnat jeho výsledky i pro jiné vstupní hodnoty, totiž pro různě staré lidi. Prokázali tak, že jsou principiálně schopni interpretovat zvnějšku zadaný matematický model, což uvádím jako jeden z indikátorů příslušné kompetence. O zadání úlohy také podle pozorování soudím, že je adekvátně obtížné.

V Úloze 2 (ideální tepová frekvence) byla úspěšnost řešení podstatně nižší. Myslím si, že problémy mohlo způsobit rovnou několik faktorů: obtížný matematický obsah (nekmenové zlomky, nepěkná numerika), způsob zadání, ale také potřeba aktivovat znalost z předchozí hodiny. Opět se ukazuje, že rozdělit navazující práci do více vyučovacích hodin je riskantní rozhodnutí. Tento fakt je ovšem omezující, pokud se snažíme propojovat učivo a práci z různých předmětů.

Pozorování: Zápis složitého matematického modelu pomocí „hada“. Úloha „Zapiš v hadovi postup celého výpočtu...“ byla na pracovním listě zadána jako bonusová, a proto se jí samostatně věnovalo jen několik žáků, kteří byli rychleji hotoví s jinou zadanou prací. Nikomu z nich se ale nepodařilo ji dotáhnout až ke zdárnému konci. S celou třídou jsme ji poté řešili společně na tabuli. Žáci věděli, co znamená zápis pomocí „hada“, potřebovali ale připomenout, že pro splnění úkolu je potřeba projít celý pracovní list od začátku. První krok, totiž počáteční stav s číslem 220, dokázalo navrhnout jen několik žáků, většině pak pomohlo vysvětlení, že „šipka v hadovi vždycky znamená, co jsme dělali dál“. Dokončením hada jsme tak uzavřeli práci na tématu tepové frekvence jak v matematice, tak v přírodovědě.

Analýza: Zápis matematického modelu pomocí „hada“. Na základě pozorování si myslím, že „had“ splnil očekávání ohledně dobrého shrnutí celého roztroušeného procesu řešení, jak jsem ho formulovala v podkapitole analýzy úlohy. Domnívám se ovšem, že na rozdíl od předchozích úloh na pracovním listě, kde se osvědčila samostatná práce žáků, je u tohoto zadání vhodnější pracovat společně na tabuli. Pro některé žáky by při samostatné práci mohl být zápis příliš obtížný, takto ale dostali možnost se podílet na společném uzavření.

Co to vypovídá o modelovacích úlohách? Že forma zápisu složitého matematického modelu pomocí „hada“ je pro žáky 5. ročníku dobře přístupná, ale že v případě složitějších vztahů budou i tak potřebovat jasné vedení učitele.

Pozorování: Přínos aktivit na pomezí matematiky a přírodovědy ve faktických vědomostech. Zhruba o měsíc později byl jako ověření znalostí z tématu oběhové soustavy

některým žákům třídy zadán vědomostní test³⁹. Jedna z otázek zněla: „Jaká je běžná tepová frekvence dítěte? (kolik tepů za minutu)““. Některé dvojice žáků napsaly číslo, které zhruba odpovídalo běžné tepové frekvenci člověka v klidu nebo ve stresu. Jiné dvojice ale zadávaly čísla řádově nižší, např. 20 nebo 30. Jednalo se v obou případech o průměrné nebo slabší žáky, kteří ale zcela jistě byli přítomni na několika hodinách, kde jsme se tepovou frekvencí zabývali.

Analýza: Přínos aktivit ve faktických vědomostech. Toto pozorování nepřináší nové poznatky k tomu, jak učit modelování. Otevírá ovšem nové otázky: Modelovací úlohy se snažím použít jako vhodnou metodu podporující mezipředmětové vztahy a implicitně očekávám přínos i pro přírodní vědy. Jak přesněji bych tento „přínos“ měla definovat? Zde se nepotvrdilo, že by se několik desítek minut probíraná tepová frekvence promítla do vědomostí žáků. Mají se ovšem sledovat nově nabyté vědomosti, nebo spíše nějaké dovednosti či porozumění složitějším vztahům? Jak by vypadaly odpovědi žáků, kteří byli při řešení modelovacích úloh velmi aktivní, méně aktivní, zjevně se neorientovali...? Přesvědčivé odpovědi by mohl poskytnout až další výzkum zaměřující se na mezipředmětové vztahy.

4.5 Školní věk (didaktický experiment)

Zadání úlohy

Modelovací úloha, kterou analyzuji, je zadána v rámci pracovního listu s nadpisem:

Upravujeme text, aby byl srozumitelný. Poznáváme období lidského života. Počítáme.

Jak už nadpis napovídá, pracovní list opět propojuje učivo přírodovědy, matematiky a částečně směřuje k dovednosti kriticky posuzovat a měnit text, aby byl funkčním komunikátem. Zde uvádím jen krátký výsek pracovního listu, který je důležitý pro kontext

³⁹ Žáci si mohli vybrat, jakou formou budou jejich znalosti ověřeny, někteří zvolili klasifikovanou domácí práci. Test plnilo asi 9 žáků z celkového počtu 21 a pracovali na něm ve dvojicích.

zadané modelovací úlohy. Celý pracovní list obsahuje *Příloha 3 – Školní věk (původní pracovní list)*.

Jako předškolní věk se označuje od 0,3 desetiletí do chvíle, kdy dítě vstoupí do školy. V té době je mu v Česku obvykle _____ nebo _____.

Jako školní věk se označuje období od _____ do 5475 dní. Další období se nazývají dospívání, dospělost a stáří.

Kolikrát za tu dobu, co je člověk ve školním věku, jde do školy?

K zadané úloze bude učitelem položena doplňující otázka: „Pokud bych chtěl tohle vypočítat, co všechno budu muset vzít v úvahu?“

4.5.1 Analýza úlohy a jejího potenciálu vzhledem k modelování

Úloha: Kolikrát za tu dobu, co je člověk ve školním věku, jde do školy?

Obsah učiva přírodovědy: období života člověka

Obsah učiva matematiky: aditivní a multiplikativní operace (+ navíc práce s daty a jednotkami u dalších úloh na pracovním listu)

Úloha směřuje ke zkušenosti žáků z reálného světa a reálnou situaci je pro řešení nepochybně potřeba zjednodušit, možná také zobecnit a rozhodně tedy vytvořit její model. Protože výsledná odpověď bude číslo, pohybujeme se ve světě matematiky, a jde tedy o matematické modelování. Opět tu uvádím jednu pravou modelovací úlohu a v následujících odstavcích se budu věnovat některým fázím řešení. Opět se odkazuji na schéma modelování a jeho kroky neboli fáze, jak je prezentuji v kapitole 3.4.3.

Uchopení situace. Situace je na první pohled dobře pochopitelná. Zkušenost s chozením do školy bude mít patrně každý řešitel, kromě toho zadání vypadá jako klasická slovní úloha, jejíž odpovědí bude právě jedno správné číslo. Výzvou ale může být slovní spojení „ve školním věku“. Zde musím odhalit, že nejde jen o slovní spojení popisující zhruba dobu, kdy člověk navštěvuje nějakou školu, ale přesně definovaný termín pro jedno ohraničené období lidského života. Při řešení bude třeba vyjít z exaktní definice termínu a toto uvědomění je

nutnou podmínkou dalšího správného postupu. Řešitel tedy, jak by řekla Turner a kolektiv (2021), musí aktivovat mimomatematickou znalost (*extra-mathematical knowledge*). Nutno dodat, že sestavený pracovní list představuje žákům vymezení všech období lidského života a je díky tomu návodný i pro tuto úlohu.

Podrobnější řešitelská analýza zadání by zároveň mohla ukázat, že považovat přesně definovaný pojem „školní věk“ zároveň za stejně dlouhou dobu pro všechny děti je mýlka. „Školní věk“ totiž začíná nástupem do školy, totiž 1. září v 6 nebo v 7 letech dítěte, a končí vždy v jeho 15 letech. Striktně vzato tedy neoznačuje 9 let školní docházky, stejných pro všechny, ale pro každé dítě jinak dlouhou dobu. Domnívám se ovšem, že je nepravděpodobné, že by v 5. třídě tento rozpor někdo objevil.

Vytváření reálného modelu. Ve svém schématu modelování uvádím u šipky mezi mentální reprezentací situace a reálným modelem několik aktivit a myšlenkových procesů nutných k vytvoření reálného modelu situace. Mezi nimi také identifikaci relevantních proměnných.

Co všechno se vztahuje k počtu návštěv školy po celou dobu „školního věku“? Proměnné, které je nutné vzít v úvahu, je možné rozdělit na obecně platné a individuálně specifické. Mezi obecné faktory bude patřit reálný počet dní v roce, kdy se chodí do školy. Na ten má opět vliv několik činitelů: počet všedních dní a výjimky v podobě prázdnin, státních svátků a dnů ředitelského volna. Individuální faktory tvoří nemocnost dítěte, respektive vůbec počet dní, kdy chybí, a poté již zmíněná komplikovaná délka období zhruba mezi 6 a 15 lety; a to ve dnech.

„Žák hledá vztahy mezi jednotlivými proměnnými,“ píše v kapitole o kompetencích k modelování. Všechny výše uvedené proměnné jsou ve vzájemných vztazích, které situaci komplikují: Navzájem se totiž kryjí a ruší, jak je vidět na příkladu státních svátků. Počet státních svátků v roce je přesný a zjistitelný údaj, ale bohužel jej nelze jednoduše odečíst od všedních dní. Některé svátky totiž připadají na víkend. Podobné to je s prázdninami atd.

Proto je v této úloze klíčová jiná subkompetence, totiž že řešitel „ve vhodné míře zjednodušuje a idealizuje vstupní situaci“. Může například zvolit takovou strategii, že některé proměnné bude naprosto záměrně ignorovat (třeba ředitelská volna).

A konečně je pro vytvoření reálného modelu v této úloze nutné i formulování domněnek a odhadů. Budou se týkat především těch proměnných, které nazýváme individuální. Počet dní, kdy žák sám chyběl nebo byl nemocný, by on sám mohl buď odhadnout, nebo zjistit z přehledu absence. Pokud je ale úloha formulována obecně (kolikrát jde *člověk* do školy), je odhad jedinou možností. Může třeba jako poučený odhad vycházet z absence několika žáků ve třídě, ale stále to bude odhad: Opravdová statistika absence všech žáků nebude žákům dostupná.

Probrala jsem, které všechny myšlenkové procesy musí řešitel zvládnout, aby získal reálný model, který bude situaci ve vhodné míře zjednodušovat, ale zároveň nevynechá žádný podstatný faktor. Fáze vytváření reálného modelu je u této úlohy opravdu komplexní.

Matematizace modelu a hledání vhodné matematické struktury. Na dny ve škole a mimo školu je možné dívat se pohledem teorie množin. Všechny dny ve „školním věku“ můžeme vidět jako prvky univerzální množiny, a všední dny, víkendy, státní svátky atd. potom jako její podmnožiny. Nahlíženo touto optikou je pak jasné, že odpovídající grafická reprezentace vztahů mezi množinami může být Vennův diagram. Ten je jako struktura navíc známý i žákům 5. ročníku.

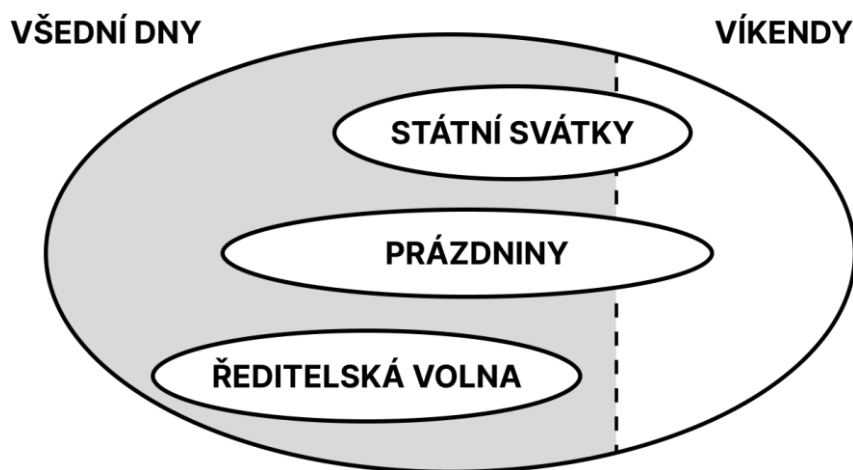


Schéma 6 – Vennův diagram jako vhodná grafická reprezentace faktorů ovlivňujících počet školních dnů.

Řešitel, který by situaci správně zakreslil tímto diagramem, by prokázal, že „přeloží vztahy mezi proměnnými v reálném modelu do matematiky“, „využije vhodné matematické struktury“ a „volí vhodnou formu matematického zápisu nebo grafické reprezentace“ – to jsou všechno indikátory toho, že ovládá kompetenci matematizovat reálný model.

Netvrdím nicméně, že je Vennův diagram pro řešení úlohy nutný. Pro správnou matematizaci si musí být řešitel jen a pouze jistý, které proměnné a jak budou ovlivňovat výsledný počet dní. Tedy například že státní svátky počet dní ve škole sníží (bude třeba je odečíst), ale státní svátky připadající na víkend jej neovlivní. Aritmetický zápis bude naprosto dostačující.

Matematické operace na modelu. U této úlohy mají řešitelé poměrně velkou volnost v tom, jakou cestou dojit k matematickému výsledku. Nabízí se především vypočítat prvně počet školních dní v jednom roce a pak jej vynásobit počtem let (a nevědomky tak využít distributivitu násobení vůči sčítání). Různé heuristické strategie budou ale vždy závislé na tom, jaké zjednodušení situace řešitel při vytváření modelu připustil.

Interpretace, validace. Matematický výsledek poté řešitel interpretuje jako počet dní, kdy jde člověk ve školním věku do školy. Jak jsem již ukázala u schématu modelování, je v této fázi záhodno vrátit se k původnímu zadání situace. V případě této úlohy není součástí zadání jen jedna otázka, ale také text o různých obdobích lidského života.⁴⁰ V něm jsme mohli číst, že „školní věk“ trvá do 5476 dní života; následující období života se nazývá „dospívání“.

Důmyslný řešitel vidí pomůcku k validaci výsledku: Končí-li školní věk, když je člověku 5476 dní, patrně bude počet návštěv školy do té doby nižší. Důmyslný a zároveň zkušený řešitel zvládne obdobně filtrovat i příliš nízké výsledky: počet všech dní do 15 let je vyšší než počet návštěv školy, ale neměl by se lišit řádově.

Shrnutí. Úloha Školní věk je úplnou modelovací úlohou, takže její řešení vyžaduje všechny kroky v modelovacím cyklu. Její jedinečný přínos vidím v tom, že při tvorbě reálného modelu a jeho matematizaci vyžaduje formulování domněnek, pečlivý výběr všech relevantních proměnných a zároveň velké zjednodušení situace. Ve fázi validace mohou řešitelé získat novou zkušenost s tím, jak pro ověření výsledku využít informace ze zadání.

K diskusi dávám otázku na samotné zadání úlohy a jeho smysluplnost. Úloha se snaží využít pojem z přírodovědy „školní věk“, který ale patří do členění podle psychologie, a ne podle

⁴⁰ Klíčové věty z textu jsem uvedla výše v podkapitole Zadání, celý pracovní list je v příloze.

systému školství. Nebylo by smysluplnější ptát se, kolikrát jde člověk do školy za celou povinnou školní docházkou?

4.5.2 Poznatky z pozorování (úloha Školní věk)

Protože pracovní list, který se věnoval tématu období lidského života, byl dlouhý a obsahoval více matematických úkolů, neřešili jsme úlohu Školní věk jako celou, ale věnovali jsme se jen tvorbě modelu situace a jeho matematizaci. Z realizace mám tato pozorování:

Pozorování: Identifikace velkého množství relevantních proměnných. Úloha na počet školních dní během „školního věku“ člověka navazovala na předchozí práci na pracovním listu, kdy se žáci postupně seznamovali se všemi výrazy pro období lidského života a také prováděli převody mezi různými jednotkami času. Tyto přípravné aktivity jsme prováděli v hodině přírodovědy; žáci se ohrazovali, že musí „i během přírodovědy počítat“.

Modelovací úlohu samotnou jsme řešili během jedné hodiny matematiky. Po přečtení zadání a připomenutí pojmu „školní věk“ jsem žáky vyzvala, aby si položili otázku: „Pokud bych chtěl tohle vypočítat, co všechno budu muset vzít v úvahu? Co všechno budu muset započítat?“

Žáci o otázce prvně diskutovali ve dvojicích a někteří si své odpovědi poznamenávali. Poté se hlásili, navrhovali možnosti a jejich nápady jsem zapisovala na tabuli. Mezi návrhy zazněly víkendy, prázdniny, ředitelská volna, státní svátky, nemoci žáka a dovolené na lyžích a u moře. Žáci na sebe ve svých návrzích reagovali a posouvali společnou debatu novými argumenty a nápady. Někteří žáci rovnou spontánně a pobouřeně přidávali svůj komentář: „Toho je strašně moc, to nejde!“ „Ale to je u každého jinak.“ „To je neřešitelné.“ Odpovědi žáků se zřetelně lišily v úplnosti, kvalitě vysvětlení a přesnosti.

Analýza: Identifikace proměnných. Závěr, který si беру z pozorování, je pozitivní: U úlohy, která se týká jejich běžné životní zkušenosti, je většina žáků schopná identifikovat relevantní proměnné; a to i v případě situace, kterou ovlivňuje mnoho faktorů. Jistě tedy situaci nějak uchopují, tvoří si mentální reprezentaci (MRS) a zároveň směřují k strukturovanému reálnému modelu. Dále se domnívám, že žáky v přemýšlení ovlivnila

otázka učitele. Museli tak opravdu verbalizovat, co všechno je třeba vzít v úvahu. Důkladně se zabývali fází reálného modelu, nepřeskočili zbrkle nikam dál.

Pozorování: Obtíže se zjednodušením situace. Diskusi jsem dále směřovala k tomu, jak se se situací, kdy se výsledky u každého dítěte liší, vyrovnat. Zmínila jsem také, že můžeme situaci rozumně zjednodušit, že výsledek nemusí být přesný. Žáci navrhovali další kroky k řešení, které se ovšem zjednodušení netýkaly, jako například vyhledat v kalendáři státní svátky. Také kladli konkrétní otázky na délku „velkých“ a „malých prázdnin“. Po chvíli společné diskuse jsem se opět pokusila, tentokrát o něco direktivněji, žáky směřovat ke zjednodušení situace. Vzhledem ke krátkému času, který jsme úloze mohli věnovat, bylo zřejmé, že k finálnímu řešení bude možné dostat se jen za cenu opravdu velkého zjednodušení. Shrnula jsem proto, co všechno zaznělo z jejich úst za klíčky a složitosti řešeného problému, a navrhla jim zjednodušení na zhruba jeden měsíc volných dní během školního roku. Žáci ale návrh nepřijali a nebyli ochotní na něj navázat.

V časové tísní jsem úlohu uzavřela takto: „Toto je velmi komplikovaná úloha, kde hraje roli hodně různých věcí. Dnes ji nebudeme dopočítávat. Je ale skvělé, že jsme vůbec dali dohromady seznam všech důležitých věcí, které by mohly ovlivnit výsledek. Tenhle příklad je blízko vědě a věda není vždy jen přesné počítání. Často jsou údaje u každého člověka nebo zvířete trochu jiné.“

Analýza: Obtíže se zjednodušením situace. Z mého pozorování je nejzávažnější zjištění neochota žáků přijmout zjednodušení situace a některé jednotlivosti shrnout do jednoho celku nebo je vynechat. Zdá se mi proto, že z kroků vedoucích k reálnému modelu je pro 11leté žáky principiálně schůdnější vymýšlet, co všechno je relevantní faktor a jaký vliv na situaci má, než vědomě některý faktor zanedbat či část úlohy řešit odhadem. Ke správné interpretaci tohoto jevu by bylo nutné zapojit vývojovou psychologii a hledat obdobné zjištění z jiného výzkumu.

Pozorování: Vhled nadaného žáka do matematizace úlohy. Bartoloměj⁴¹ je žák s velkým matematickým nadáním, který má tendenci úlohy řešit úvahou, důmyslnou zkratkou nebo způsobem „kouknu, vidím“. Také on vznesl k plánu řešení úlohy námitku: „Ty víkendy jsou ale strašně složité, protože je můžeš odečíst, ale pak to je ještě jednou, když jsou prázdniny!“

Analýza: Vhled nadaného žáka. Bartoloměj se k úloze vyjadřoval ve chvíli, kdy se ostatní diskutující nacházeli ve fázi výběru údajů, vztahů mezi nimi a tvorby reálného modelu (fáze 1). Slova nadaného žáka ale ukazují, že je v myšlenkách už o krok dále. Už si představuje, jak reálný model a vztahy mezi proměnnými převede do světa matematiky (fáze 2 – matematizace). Předvídá, co se bude dít dál; vidí navazující kroky v řešení úlohy. Maaß by možná řekla, že Bartoloměj má „orientační smysl“ (2006).

4.6 Výsledky a jejich diskuse

V podkapitole 4.1 jsem položila otázky pro svůj výzkum a nyní se je podle svého pozorování a analýzy pokusím zodpovědět. Otázky tvoří logické členění této podkapitoly a odpovědi na ně představují výsledky výzkumu.

Mohu ovšem mluvit jen na základě zkušeností se třemi zadanými úlohami, a výsledky mají proto jen omezenou platnost (viz také kapitola Limitace a podněty k dalšímu výzkumu). Pro obecně platnou výpověď by byl potřeba mnohem rozsáhlejší a přesněji zaměřený výzkum. Proto také svá zjištění rovnou srovnávám se zjištěními jiných výzkumů, pokud taková existují.

4.6.1 Holistický vs. analytický přístup k výuce modelování

Bude s žáky 5. ročníku možné projít celý cyklus modelování (holistický přístup), nebo bude nutné začít jen s přípravnými úlohami a cílit na rozvoj dílčích kompetencí (analytický přístup)?

Pozitivně mohu konstatovat, že se mi v experimentu podařilo vyzkoušet práci v duchu holistického i analytického přístupu (viz kapitola 3.8.1). Úloha Dýchání byla zadána jako

⁴¹ Jméno bylo změněno.

holistická: žáci postupně prošli všemi kroky modelovacího cyklu. Zjistila jsem však, že taková snaha je extrémně náročná na výběr úlohy a organizaci práce v rozvrhu. Úloha Dýchání se větvila do tří stran a neumožňovala na úrovni 5. ročníku provést validaci a tak celý proces dotáhnout. U ní i u dalších úloh jsem také pozorovala obtížné navazování a pokles motivace, pokud byla práce rozdělena do více dní. Poctivá, i když třeba zdlouhavá práce na jednom kroku, jako třeba tvorba reálného modelu (Školní věk), spolu se strategickým vedením ze strany učitele naopak umožnila cíleně rozvíjet jednu dílčí kompetenci.

Plánovat výuku modelování striktně holisticky, s předpokladem, že žáci opravdu zvládnou všechny kroky vlastním mentálním úsilím, se mi na základě výzkumu jeví jako nerozumné a přepjaté. V tom mám ostatně podporu i u Blomhøje a Jensena (2003), protože ti jak krajně analytickou, tak krajně holistickou pozici označují jako „extrémní“ (str. 128). Maaß (2011) dokonce doporučuje vysledovat kritická místa v modelování a vytvořit drobnější aktivity přesně třídě na míru (str. 10). Spíše si proto ve shodě s Blumem (Blum, 2015, str. 85) myslím, že je vhodné oba přístupy podle potřeby kombinovat.

V rozsahu tohoto výzkumu už bohužel nebyl prostor na analýzu různých přípravných aktivit, které ve sledované třídě probíhaly nárazově v průběhu celého školního roku. Jednalo se například o měření a práci s různými formáty dat a zápisu matematických modelů. To odpovídá analytickému přístupu.

4.6.2 Obtížné dílčí kompetence

Které dílčí kompetence k modelování budou pro žáky nejhůře zvládnutelné?

Kompetence uchopit úlohu, totiž utvořit si její mentální reprezentaci, jsem mohla sledovat u úlohy Dýchání a úlohy Školní věk. Žáci měli úlohu vždy před sebou jako text, který byl ale zadán zároveň s otázkou učitele (Jaký výsledek odhadujete? Co všechno musíme vzít v úvahu?). Z toho, že většina žáků byla schopná alespoň nějakým způsobem odpovědět, usuzuji, že si MRS vytvořili a nebylo to pro ně obtížné. Z pozorování také vyvozují, že velkou roli v této fázi hraje motivační faktor. To souzní s prvním indikátorem kompetence,

totiž že „žák má vůli řešit vybraný problém“. Neadekvátní uchopení úlohy jsem mohla tušit u žákyně ohrožené školním neúspěchem.

Protože častou formou zadání modelovacích úloh je text nebo slovní zadání kombinované s jiným formátem dat, píší někteří autoři o propojení kompetence k uchopení úlohy se čtením s porozuměním a s prací s daty. Takovou situaci jsem ale v experimentu nemohla pozorovat.

Osvojení **kompetence k vytvoření reálného** modelu jsem pozorovala na klíčových úvahách nebo aktivitách, které uváděla Turner (2021) u svého modelovacího cyklu (viz kapitola 3.4.2) a které patří k indikátorům kompetence. Jmenovitě to v případě úloh Dýchání a Školní věk bylo získání informací ze zadání, identifikace relevantních proměnných, měření nebo získání dalších potřebných hodnot a zjednodušení situace.

Lze konstatovat, že jediným nepřekonatelným krokem bylo pro žáky nutné zjednodušení situace (úloha Školní věk). Všechny ostatní aktivity sami nebo s pomocí učitele zvládli. Měření hodnot se v provedení žáků 5. ročníku ukázalo jako kriticky nepřesné a zároveň časově velmi náročné. U hledání informací v zadání a identifikaci relevantních proměnných jsem sledovala značné rozdíly v preciznosti a rychlosti provedení a chybné úvahy u slabé žákyně. Nemohu proto vyloučit, že pokud by žáci měli pracovat samostatně nebo jen v malých skupinkách bez pomoci dospělého, mohlo by pro ně vytváření reálného modelu být velmi obtížné.

Nejvýznamnějším zjištěním ovšem zůstává neochota žáků přijmout zjednodušení situace. Tento nutný krok patrně myslí Verschaffel a kolektiv (2010), když píše, že řešení komplexní modelovací úlohy může vyžadovat „se rozhodnout o úrovni přesnosti“ (str. 21). Pro obtíže žáků v této oblasti jsem bohužel nenašla žádný podklad – alespoň co se týče matematického modelování. Z jiných oblastí matematiky se ke srovnání nabízí pozorování Vondrové (Vondrová et al., 2017):

„Jedním z opakujících se jevů, se kterými jsme se setkávali v různých zkoumaných tématech, bylo to, že žáci jako by se bránili libovolnosti, neurčitosti, dožadovali se konkrétních údajů nebo si je sami zadávali. [...] Je možné, že je to projev nejistoty

a snahy dostat zadání pod kontrolu ve chvíli, kdy mají od daných, určitých konkrétních reprezentací přejít k abstrakcím.“

(Vondrová et al., 2017, str. 406)

Vezmu-li v potaz všechna pozorování k vytváření reálného modelu, musím konstatovat, že se jedná o náročnou kompetenci a pravděpodobně nejobtížnější krok. V souladu s doporučeními k výuce Bluma & Borromeo Ferri (2009) vnímám zvláště při vytváření reálného modelu jako zásadní strategické intervence učitele v tomto duchu: „Co všechno je třeba vzít v úvahu? Nedala by se situace zjednodušit?“

Krok matematizace jsme mohli pozorovat u úloh Školní věk a Dýchání. Nikde v průběhu experimentu se mi ho ale nedařilo natolik dobře zaměřit, abych mohla vyvodit jasné závěry. Důvodem může být úzká provázanost tvorby reálného modelu a jeho matematizace až do té míry, že se fáze překrývají. Všimla jsem si například reakce nadaného žáka, který z reálného modelu vmžiku vyvozoval důsledky pro svět matematiky (úloha Školní věk). Zároveň v této fázi ale pracovali žáci samostatně ve skupinách a pro lepší posouzení **kompetence matematizovat** by bylo třeba cíleně pozorovat dění v jedné z nich. To nechávám jako návrh pro design dalšího výzkumu.

Kompetence operovat na matematickém modelu byla pozorovatelná v úloze Dýchání a Ideální tepová frekvence. V obou případech byly patrné obtíže žáků: u úlohy Dýchání se ztráceli ve víceukrovém výpočtu a nedokázali si vytvořit systém a heuristickou strategii. V úloze Ideální tepová frekvence zvládli vyřešit rovnici, kde bylo třeba jen odčítat, ale u druhého úkolu si často nedokázali poradit s nekmenovým zlomkem. Z toho je zřejmé, že obtížnost kroku matematizace přímo vyplývá z obsažené matematické látky. Řešitelé mohou právě při operacích na modelu selhat nebo ztratit motivaci. Jistě to ale není nejobtížnější krok typický pro modelovací cyklus. Pro svou celkovou kognitivní náročnost je ale nepochybně jistější, staví-li modelovací úlohy vždy jen na matematice, kterou žáci již bezpečně ovládají.

Žáci 5. ročníku mohou být **kompetentní interpretovat matematický model** a jeho výsledek zpět v realitě. Dokonce jsme viděli, že jsou schopni analyzovat zvnějšku zadaný model (Ideální tepová frekvence), což je jeden z indikátorů kompetence. Obtíže, které jsem

zaznamenala v kroku interpretace, vycházely vždy z nedokončených operací na modelu (Dýchání).

Kompetence validovat má mnoho indikátorů, k nimž patří i srovnání různých řešení a řešitelských strategií. Bylo možné pozorovat pokus o srovnání výsledků různých skupin mezi sebou (Dýchání). Zjistila jsem, že pro takovou celotřídní diskusi je třeba úlohu pečlivě formulovat a velmi dobře trefit úroveň třídy. Také jsem zjistila, že u některých úloh může být pro žáky nespílitelné validovat výsledek pomocí odhadu (Dýchání). Konstatuji tedy, že bylo obtížné připravit a realizovat takovou úlohu, aby pro vytvořila příležitost pro všechny činnosti, které řadím do fáze validace.

Shrnutí. Výsledky mého výzkumu říkají, že mezi dílčími kompetencemi jsou pro žáky 5. ročníku těžko zvládnutelné dvě: kompetence vytvořit reálný model a kompetence validovat získané výsledky a řešení. U vytváření reálného modelu pak činilo problémy pouze zjednodušení situace, ostatní nutné aktivity ne.

Srovnání s literaturou ukazuje, že s mými zjištěními se shodují jen někteří autoři: Maaß (2011) považuje za cennou a zároveň obtížnou validaci výsledků (str. 18). Blum & Borromeo Ferri (2009) naopak uvádějí, že zásadní kompetencí, ale zároveň také nejobtížnější a nejvíce frustrujícím krokem je kompetence k matematizování a k operacím na modelu (str. 129). Teoretické uchopení kroku validace zároveň zůstává nejasné; tomu se věnuji v kapitole Vědecké a didaktické důsledky výzkumu.

4.6.3 Mezipředmětové vztahy (propojení matematiky a přírodovědy)

Osvědčí se propojení dvou vzdělávacích oblastí?

Tuto otázku můžeme rozdělit na dva pohledy: Prvně pohled obsahový, když se ptáme: Do jaké míry bylo propojení matematiky a přírodovědy skrze matematické modelování přínosné pro žáky? Zadruhé pak pohled praktický: Jaké praktické výzvy musel v organizaci hodin učitel řešit?

Obsahový pohled. Do jaké míry bylo propojení matematiky a přírodovědy skrze matematické modelování přínosné pro žáky? Cílem mého výzkumu nebylo po časové prodlevě ověřovat výsledky práce ve třídě. Spíše náhodou jsem přesto zjistila, že modelovací úloha Ideální tepová frekvence neměla dlouhodobý přínos v tom, že by si žáci zapamatovali

konkrétní informace z přírodovědy, se kterými během řešení úlohy pracovali (tepová frekvence za minutu). Tento výsledek mohlo ovlivnit, že se jednalo opravdu o vědomost, číselný údaj. Jiné měřitelné dopady našeho experimentu pro další práci ve třídě jsem nesledovala.

Jedno z témat, které propojuje přírodní vědy a matematiku, jsou veličiny, totiž měření různých veličin, jejich jednotky, adekvátní použití v kontextu a také převody (MŠMT, 2023, stránky 34, 35, 50 aj.). Veličiny a jejich jednotky vystupovaly ve všech třech sledovaných úlohách. V úloze Školní věk a Dýchání museli řešitelé používat vztahy mezi různými jednotkami času. Měření a odhadování veličin žáci využili v úloze Dýchání, kde jsem také v experimentu zjistila její časovou náročnost a riziko velkých nepřesností.

Další práce s jednotkami a veličinami nebyla součástí řešení samotných modelovacích úloh, ale zadávala jsem ji na témže pracovním listě a modelovací úloha na ni přímo navazovala. V souvislosti s modelováním tak žáci museli pracovat i s nezvyklými jednotkami v textu (např. desetiletí – Školní věk) a také provádět a porovnávat různé způsoby měření a diskutovat původ možných chyb v měření (Ideální tepová frekvence). Zjistila jsem tedy, že přínosem modelovacích úloh ve výuce bylo, že vytvořily příležitosti k různorodé práci s veličinami a jednotkami v jejich přirozeném kontextu, a učitele navíc navedly k tomu, aby práci s veličinami zařadil jako přípravné úlohy. Tak modelování propojilo základy fyziky a jiných věd a matematiku.

Matematické modelování jako metoda ovšem stojí na pomezí matematiky a jiných věd i samo jako metoda, bez ohledu na konkrétní učivo. Mohlo by proto při použití ve výuce rozvíjet vědecký způsob myšlení u žáků. Z didaktických experimentů ovšem nevyplývají žádná zjištění k tomuto bodu, proto se mu věnuji až v diskusi.

Praktický pohled. Jaké praktické výzvy musel v organizaci hodin učitel řešit?

První výzvou, kterou musel učitel v souvislosti s propojením předmětů řešit, byla tvorba úloh tak, aby obsah navazoval na aktuálně probíranou látku v přírodovědě. Podařilo se mi najít použitelný reálný kontext, nicméně jedna z úloh (Ideální tepová frekvence) ani nebyla modelovací úlohou v pravém slova smyslu, totiž nenutila řešitele projít celým cyklem modelování. Pro učitele by jistě bylo jednodušší vycházet z již použitých modelovacích

úloh, dokumentovaných v literatuře, a nepatrně je modifikovat než vymýšlet originální úlohu k zadanému tématu.

Dále jsem zjistila přílišnou subjektivní i objektivní obtížnost některých úloh nebo některých kroků. Subjektivní obtížností míním, že žáci úlohu nebo daný krok hodnotili jako obtížné (Dýchání). Objektivní obtížnost konstatuji na základě analýzy úloh. Obtížnost byla způsobena potřebnými matematickými operacemi (násobení zlomkem – Ideální tepová frekvence), jejich kombinací (Dýchání, Školní věk) a číselným oborem (Dýchání) a způsobila větší nárok na intervence, vedení a motivování ze strany učitele. Sledovala jsem také váhání žáků a pokles motivace daný subjektivní obtížností úlohy. Obtížnost řešených matematických modelů přitom nebyla volbou učitele, ale vycházela ze vztahů v reálné situaci.

Z toho plyne odpověď, že propojení dvou vzdělávacích oblastí přineslo v mém experimentu inspiraci k výběru reálného kontextu pro modelovací úlohy, ale zároveň velmi omezilo možnosti zvolit adekvátní obtížnost vzhledem k věku řešitelů a vůbec sestavit úplnou modelovací úlohu.

Využití úloh na pomezí matematiky a přírodovědy přineslo otázku rozdělení práce do hodin obou předmětů. K jednomu pracovnímu listu jsme se vraceli dvakrát až čtyřikrát, z čehož jsem se snažila práci spíše přírodovědnou řešit v hodinách přírodovědy a úsilí matematické vyvíjet v hodinách matematiky. Tak jsem rozložením práce chtěla alespoň vzdáleně kopírovat rozdělení procesů v cyklu modelování do světa reality a světa matematiky.

Často jsem pracovním listům věnovala jen kratší úsek vyučovací hodiny a prostřídala ji s jinou aktivitou. U úlohy Ideální tepová frekvence jsem ale narazila na důsledek přerušené kontinuity práce: žáci zapomněli probraný pojem, který byl klíčový pro další řešení. U úlohy Školní věk jsem si naopak všimla nízké motivace žáků řešit početní úlohy v průběhu jiné hodiny než matematiky.

Cílem výzkumu bylo zkoumat možnosti zařazení modelovacích úloh do běžného rozvrhu. Proto jsem se chtěla vyhnout organizaci výuky do projektů, jak je realizovali autoři jiných výzkumů (Vorhölter, Greefrath, Borromeo Ferri, Leiß & Schukajlow, 2019, str. 98). Zjistila jsem, že praktické rozhodování o rozprostření modelovacích aktivit, rozkročených mezi

dvěma vzdělávacími obory, na plochu běžných, 45minutových hodin jednotlivých předmětů bylo pro učitele velkou výzvou.

4.6.4 Organizační formy výuky

Jaké organizační formy práce budou v této třídě fungovat nejlépe?

Ve výukovém experimentu jsem střídala různé organizační formy výuky. Některé úkoly byly zadány jako individuální práce s možností poradit se v lavici (např. Ideální tepová frekvence), v některých fázích byla klíčová práce ve skupinách o třech až pěti žácích (Ideální tepová frekvence). U všech úloh samostatně řízenou práci žáků uváděla a střídala celotřídní diskuse vedená učitelem, který vycházel z předem připravených otázek (např. uvedení úlohy Školní věk) a také reagoval na dosavadní postup skupin (např. fáze validace úlohy Ideální tepová frekvence).

Jako poznatek plynoucí z experimentu mohu uvést, že doplňující otázky učitele mohou dobře posunout žáky v procesu řešení, a to zvláště v prvních fázích (fáze tvorby MRS – úloha Dýchání). Pozorovala jsem také, že společná debata o všech relevantních informacích posouvala dál kolektivní vědění ve třídě a pomohla tvorbě reálného modelu (Školní věk). Jako přínosná se v experimentu ukázala společná forma práce také při uzavírání práce na úloze (Ideální tepová frekvence).

Skupinová práce žákům dala možnost na úloze pracovat co nejvíce samostatně a práci si i autonomně řídit; tak mohli rozvíjet metakognitivní strategie. Pozorovala jsem ale kolísající pozornost a motivaci (Dýchání), která pravděpodobně souvisela s obtížností některých kroků. V takových případech byla nutná i při práci ve skupinách intenzivní a opakovaná intervence učitele.

Během práce na modelovacích úlohách jsem také vyzkoušela hybridní organizaci, když jsem některé žáky jako vyslance pověřila samostatným úkolem během společné práce celé zbylé třídy (měření v úloze Dýchání). Viděla jsem motivační potenciál takového kroku, ale zároveň úskalí: Skupina vyslanců přinesla poznatek, který měla použít celá třída ve svém modelu, ale který byl zatížen velkou chybou měření. Učitel v tu chvíli musel být připraven improvizovat a změnit plán výuky.

Literaturu k výukovým formám uvádím už v kapitole Vhodné organizační formy v teoretických východiscích. Za prací ve skupinách stojí English (2010) a zdůrazňuje přínosy aktivity ve skupinách pro sociální dovednosti. Maaß (2011) tvrdí, že výuka matematického modelování má usilovat o co největší samostatnost žáků. S tímto záměrem – ve shodě s mým přístupem – taktéž doporučuje výuku organizovat především jako skupinovou práci.

Shodu s dalšími autory nacházím také v tom, že učitel může dobře mířenými otázkami a dalšími „strategickými intervencemi“ posílit efekt učení (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Naopak žádnou oporu v dosavadním výzkumu jsem nenašla pro hybridní organizaci, totiž určení žáka-vyslance pro zjištění některé z chybějících informací. Efekt metody „vyslance“ pro výuku matematického modelování zůstává zatím neprozkoumán.

Poslední výsledek, který jsem chtěla srovnat se zjištěními jiných autorů, byl pozorovaný přínos celotřídní diskuse mezi žáky. Jak píšu v kapitole *Jak učit matematické modelování*, výzkumy v didaktice modelování se věnují především sociálním dopadům debaty a přínosům intervence učitele, nikoli však přínosu sdílení nápadů mezi žáky samotnými. Určité srovnání s odbornou literaturou by snad mohl nabízet pojem Lipmanův *community of inquiry*⁴² (Lipman, 2003), který se zabývá nastavením prostředí tak, aby dialog ve třídě rozvíjel nosné myšlenky ke konkrétnímu problému nebo otázce.

4.6.5 Shrnutí výsledků

V podkapitole Výsledky jsem ve struktuře položených otázek shrnula zjištění svých didaktických experimentů. Zjistila jsem, že matematické modelování je možné zařadit do výuky na běžné české státní škole ve spojení s tématy přírodovědy, ale že spojení přináší další výzvy pro učitele. Vzniklé obtíže jsem podrobně popsala. Poukázala jsem také na to, že některé fáze modelovacího procesu (u mých úloh vytváření reálného modelu a validace) potřebují při realizaci větší prostor i za cenu toho, že žáci neprojdou samostatně celý postup modelování. Ohledně organizačních forem jsem v souladu s literaturou pozorovala jak pozitiva, tak úskalí práce ve skupinách, a nadto přínos celotřídní diskuse mezi žáky.

⁴² Česky obvykle *zkoumající společenství* nebo *bádající společenství*.

5 Vědecké a didaktické důsledky výzkumu

V podkapitole *Výsledky a jejich diskuse* uvádím ty výstupy svých výukových experimentů, které se přímo týkají položených otázek. Během analýzy zadání vytvořených úloh i práce žáků se ovšem objevovaly další myšlenky a nevyřešená témata, a to jak k teoretickému rámci, tak k realizaci ve třídě. Ty uvádím v této kapitole. Na rozdíl od podkapitoly *Výsledky a jejich diskuse* zde otázky spíše generuji a komentuji a rozhodně se nesnažím je s definitivní platností zodpovědět.

Základní členění kapitoly tvoří dvě podkapitoly: Dilemata a otazníky výzkumníka a Dilemata a otazníky učitele. „Dilemata a otazníky“ proto, že jsem nevyřešená témata vnímala jako volbu mezi dvěma nebo více možnostmi, neřešitelné balancování mezi dvěma požadavky na výuku nebo otázku bez odpovědi.

Do druhé části, tedy didaktických důsledků (kapitola 5.2), také zařazuji dva plánované výstupy své práce, totiž doporučení pro učitele pro výuku modelování a nápadník modelovacích úloh, sesbíraný ze zdrojů zpracovaných pro tuto práci. Nakonec nevynechávám ani omezení svého výzkumu a návrhy pro další práci v oblasti didaktiky matematického modelování (podkapitola Limitace a podněty k dalšímu výzkumu).

5.1 Dilemata a otazníky výzkumníka matematického modelování

Revize modelovacího cyklu: krok generalizace?

V kapitole 3.4.3 jsem představila vlastní schéma modelování. Při jeho vytváření jsem srovnávala výhody a nevýhody schématu Turner a Bluma a rozhodla se pro několik změn oproti jejich práci. Jednou z nich bylo, že jsem kroky generalizace a prezentace řešení vysunula mimo modelovací kruh. Argumentovala jsem, že generalizace není krok potřebný pro řešení jedné modelovací úlohy, a proto do vnitřního cyklu jako samostatná fáze nepatří. Schéma v současné podobě naznačuje, že generalizace je jakýsi volitelný krok navíc.

Pro použití v praktické části se mi vytvořené schéma osvědčilo. V průběhu analýzy úloh a didaktických experimentů jsem ale byla překvapená, jak často se generalizace vracela. Přímo o potenciálu zobecnit konkrétní poznání jsem psala u úlohy Dýchání a Ideální tepová frekvence. V analýze úlohy Dýchání jsem nastínila možnost, jak může učitel žáky ke

generalizaci dovést a rozvíjet tak jejich funkční myšlení. V didaktickém experimentu samotném na to ale nedošlo. Naopak u série úloh o tepové frekvenci byli všichni žáci vyzváni, aby souhrnně zapsali navazující postup několika úloh, a bylo na nich, jestli řešení zapíší jen v konkrétní podobě, v číslech, nebo se nějak pokusí naznačit obecný charakter postupu.

Změnilo by se něco, kdyby do modelovacího cyklu patřila i generalizace? A není matematický model vždy zobecňující?

Aplikační důsledky cyklického modelovacího schématu

Schéma modelování jsem od začátku zobrazovala jako kruh (ostatně se také nazývá „modelovací cyklus“). Má odrážet tu realitu z výuky modelování, že řešitelé vždy vyhodnocují, jestli jejich proces řešení i výsledek odpovídá realitě (fáze 5 – Validate), a v případě, že ne, cyklem procházejí znovu od začátku (Maaß, 2006, str. 115). V kontrastu s tím stojí například schéma Šímy (viz Schéma 7), které zobrazuje matematizaci slovních úloh. Je velmi podobné našemu schématu,⁴³ v čem se ale liší, je právě chybějící uzavření cyklu.

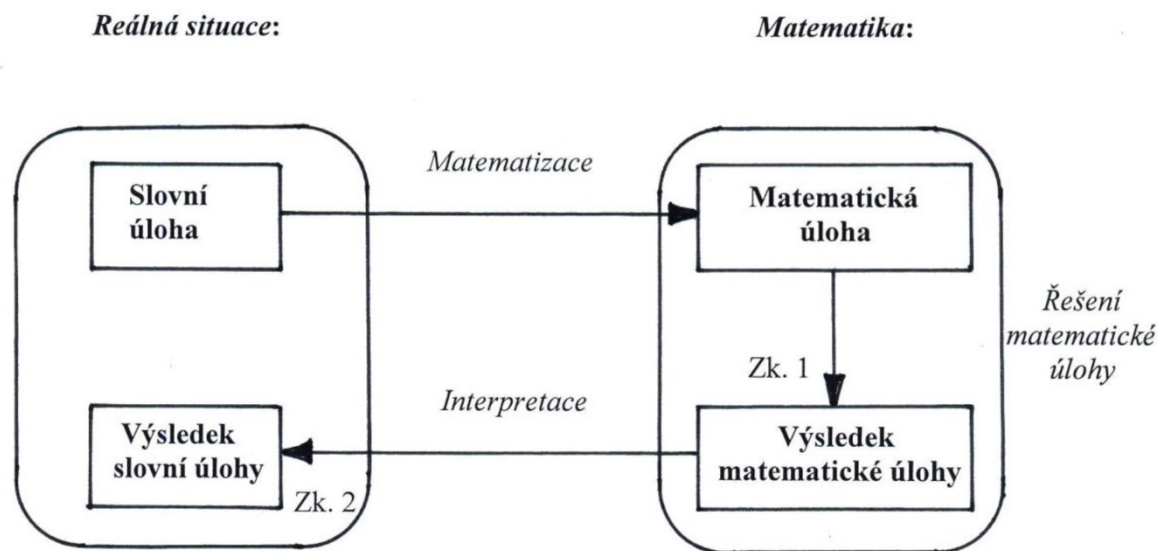


Schéma 7 – Proces řešení slovní úlohy podle Šímy (2013, str. 13).

⁴³ Šíma ostatně také mluví o „matematickém modelování“ (2013, str. 12), výraz ale používá úžeji: jen pro tu fázi, kterou my nazýváme „matematizace“.

Po tom, co jsem se seznámila s množstvím modelovacích úloh, dokumentovaných v literatuře, a pokusila se vytvořit vlastní úlohy, mám pochybovačnou otázku: Opravdu se autoři domnívají, že zásadní vlastností modelování je jeho cyklický charakter? To by mělo znamenat, že aktivity pro žáky by měly být designované tak, aby žáci procesem v ideálním případě procházeli cyklicky a své řešení postupně v každé iteraci zlepšovali.

Zkušenost se zadanými úlohami tomu bohužel neodpovídá. V úloze Školní věk by se nabízelo začít od nepříliš přesného modelu, dopočítat se podle něj k výsledku a pak zkusit na řešení navázat a model zpřesnit. U ostatních úloh je ale očekávaným výstupem jedno jasné řešení a opakovaný průchod cyklem nastane jen v případě, že je výsledek chybný. I u úloh z jiných zdrojů (Maaß, 2006, str. 123; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Schukajlow, Kolter & Blum, 2015) tuším totéž: Od žáků se v ideálním případě čeká, že cyklem projdou na první pokus a doberou se odpovídajícího výsledku. Tak jako to naznačuje Šimovo schéma (2013).

Jedna z mála úloh, kde je dokumentovaný opakovaný průchod cyklem, je úloha o výběru sportovců reprezentace podle dosaženého skóre v různých soutěžích (English, 2010). Žáci navrhovali kritéria výběru (tj. model), podle nichž pak vybírali (totiž došli k řešení) a pokoušeli se svá kritéria zlepšit (cyklení). English v závěru tvrdí, že i právě díky takovým iteracím žáci čím dál lépe popisují a vysvětlují modelované jevy.

Otazník zůstává: Má opravdová modelovací úloha vést řešitele k opakovanému průchodu modelovacím cyklem, aniž by to znamenalo, že byl první pokus o řešení chybný? Nebo by naopak schéma mělo reflektovat žitou praxi a nějak zobrazovat, že opakování cyklu je spíše nechtěný, okrajový scénář, jen oprava chyby?

Otázka validace řešení

Vzhledem k nízkému počtu provedených výukových experimentů jsem některé fáze procesu modelování nemohla detailně pozorovat. Jednou takovou fází je validace reálného řešení. V možnostech diplomové práce zároveň nebylo možné se podrobně zabývat teoretickými podklady k validaci, proto zde eviduji jen nesoulad mezi pojmem a jevy, které má označovat:

Validace je uváděna pod různými názvy (kontrola, zkouška, evaluace) a naopak se tímto názvem míní více různých procesů. Může obsahovat vnitřněmatematickou kontrolu pomocí formálních matematických postupů (Šíma, 2013; Carlson, 2021), kontrolu celého postupu práce s úlohou (Šíma, 2013), zhodnocení výhod a nevýhod postupu (Carlson, 2021) a konečně srovnání výsledku s reálnou situací, respektive její mentální reprezentací (MRS) (Borromeo Ferri, 2006).

Validaci vidím jako zásadní krok, který vychází z cyklického a vědeckého charakteru modelování. Zaprvé uzavírá cyklus zpět ve světě reality, když je validovaný výsledek srovnávám s MRS (cyklický charakter). Zadruhé vede ke kritickému zhodnocení použité metody a konstatování limitů postupu (vědecký charakter). To jsou důvody, proč je plnohodnotná validace v procesu žádoucí.

Na více místech je ale dokumentováno, že žáci při validaci provádějí jen některé výše vyjmenované procesy, např. pouze numerickou kontrolu, nebo pojmu vůbec nerozumí (Maaß, 2006; Carlson, 2021), nebo očekávají, že řešení zkontroluje učitel (Blum & Borromeo Ferri, 2009, str. 48). Nepochybně tedy nesplňují indikátory kompetence validovat (viz kapitola Kompetence validovat reálné výsledky). Zůstávají tedy otázky: Jak definovat pojem validace v kontextu matematického modelování? Měl by se odlišit od prosté vnitřněmatematické kontroly – a pokud ano, jak? Věřím, že přesnější uchopení pojmu a utříděná terminologie by pomohla učitelům a potažmo i žákům.

(Matematické) modelování jako cesta k vědeckému bádání?

Ve Výsledky a jejich diskuse jsem popsala místa, kde se ve výukových experimentech protínala přírodovědná témata s matematikou a kde mohli žáci těžit na obě strany. Překryv v učivu jsem našla v činnosti měření a oblasti práce s veličinami a jednotkami.

Jádro propojení výuky matematického modelování s přírodovědou ale vidím v samotné metodě matematického modelování, které jsem už v kapitole 3.2 uvedla jako „nástroj pro jiné vědní obory“. Dovedla mě k tomu zkušenost s pracovním listem,⁴⁴ který jsem také zadávala v experimentální třídě a jenž obsahoval slovní úlohu s reálným kontextem.

⁴⁴ Pracovní list je zařazen v příloze, viz Příloha 5 – Vzduch v nose (původní pracovní list).

Využíval výsledky empirického výzkumu o oteplení vzduchu v dýchacích cestách. Žáci 5. ročníku, kteří mj. prošli výukovým experimentem s matematickým modelováním, mi začali spontánně klást vědecky hodnotné otázky: „Kolik let bylo lidem (*myšleno účastníkům*) v experimentu?“ „Jak to měřili?“ „Jaké máte zdroje?“

S metodami vědy sdílí matematické modelování různé charakteristiky: vyžaduje přesné vymezení problému, vytrvalost, spolupráci ve skupině badatelů, postupné zlepšování metody a zpřesňování výsledků, důkladné zhodnocení postupu i konstatování jeho slabin. Pro spojení vědeckého uvažování a matematického modelování jsem ale v dostupné literatuře nenašla žádné podklady, a proto jsem podobné hodnoty hledala v dalších pedagogických přístupech: V českém prostředí je v didaktice přírodovědy etablovaná Badatelská výuka, která činnostním učením usiluje o porozumění krokům vědeckého výzkumu, totiž „badatelskému cyklu“ (Badatelé.cz, 2013). Americký filozof Lipman (2003) zase používá pojem *community of inquiry*⁴⁵, původně popisující vědecké zkoumání, pro společenství žáků, kteří v rozhovoru postupně zpřesňují své poznání.

Nejlepší odrazový můstek pro další zkoumání jsem ale našla ve studii kyperského týmu, která se zabývala souvislostí argumentace a (vědeckého) modelování (Evagorou, Nicolaou & Lymbouridou, 2020). Tvrdí, že modelování i argumentace jsou procesy zásadní pro tvorbu nových vědeckých poznatků (str. 60), a jejich výzkum potvrzuje, že zvláště fáze vyhodnocování modelů může podpořit žáky v argumentaci (str. 70).

Všechny zmíněné směry znám jen velmi málo. Lákají mě však k dalšímu zkoumání otázek: Jaký je vztah mezi (vědeckým) modelováním a matematickým modelováním? Můžeme od modelovacích úloh čekat, že podpoří vědecké myšlení žáků?

5.2 Dilemata a otazníky učitele matematického modelování

Dilema výchozího bodu pro nové úlohy: kontext, nebo matematický obsah?

Možnost práce s reálným kontextem a skrze něj i využití mezipředmětových vztahů bylo to, co mě na matematickém modelování lákalo. Domnívala jsem se, že proces bude podobný,

⁴⁵ Česky obvykle *zkoumající společenství* nebo *bádající společenství*.

jako kdybych vytvářela jakoukoli slovní úlohu se zajímavým tématem. Už ve *Výsledcích a diskusi* ovšem konstatuji, že omezení kontextu na právě probírané učivo v přírodovědě tvorbu úloh nijak neulehčilo. Zajímavých problémů ke zkoumání je u lidského těla dost, ale nebylo jednoduché najít takové, které by nabízely více cest k řešení než jen výpočet směřující k jednomu správnému numerickému výsledku a zároveň byly adekvátně obtížné.

Jako jednodušší cesta pro učitele modelování-začátečníka se zdá vycházet od učiva matematiky a k němu teprve hledat kontext. Podobně ostatně postupují i některé výzkumy (Schukajlow, Kolter & Blum, 2015, str. 1243). Další možností je adaptovat již dokumentovanou úlohu pro použití ve vlastní třídě, díky čemuž bude jednodušší předvídat průběh realizace a časovou náročnost jednotlivých aktivit.

A přece je („vědeckému“) matematickému modelování vlastní, že matematickými prostředky hledá odpovědi na reálné problémy a autentické otázky. Jedním z cílů výuky modelování má být právě budování obrazu matematiky, která má co do činění s realitou (viz kapitola 3.3). Není pak pokrytecké při vytváření úloh přiřazovat „výchozí autentické otázky“ a „reálný kontext“ k určenému matematickému obsahu?

Někteří autoři dokonce mapují prvně zájem žáků a problém k modelování formulují přímo ve spolupráci s nimi (Carlson, 2021). I oni ovšem přiznávají, že takový postup je obtížný pro učitele, který najednou nepracuje jen s úlohou s otevřeným koncem (*open-ended*), ale i s otevřeným začátkem (Carlson, 2021, str. 149).

Odkud tedy začít? Od kontextu, nebo od ideálního matematického obsahu?

Dilema vedení a samostatnosti

V teoretické části jsem se stylu vedení třídy věnovala v kapitole *Role učitele*. Panuje shoda, že modelovací aktivity mají jedinečný přínos mimo jiné v tom, že umožňují variabilitu postupů řešení a vedou žáky k samostatnosti (Maaß, 2011; English, 2010). To ovšem není jednoduché pro učitele, protože ten pak ztrácí vedoucí pozici a musí se vypořádávat s nečekanými situacemi (v mém experimentu například v úloze Dýchání; podobně také (Carlson, 2021, str. 151)). V praxi jsem také narážela na úskalí mnou neřízené práce ve skupinách: žáci ztráceli orientaci, soustředění i motivaci; ne že by našli jiný postup, ale zasekli se v procesu řešení.

Otázka tedy zůstává: Jak najít balanc mezi maximální samostatností žáků a nutnou podporou a vedením ze strany učitele?

5.2.1 Nápadník úloh

V diskusi jsem již zmínila, že pro stejné začátečníky, jako jsem v modelování já, je přínosné se při vytváření modelovacích úloh inspirovat dostupnými zdroji. Zde proto uvádím krátký seznam úloh z literatury, které by bylo možné adaptovat pro 5. ročník české základní školy. Přesná bibliografická citace ke všem uvedeným studiím je v seznamu literatury na konci diplomové práce.

- Z mé práce stojí za pozornost úlohy Dýchání a Školní věk. Jejich zadání uvádím v příslušných kapitolách a celé pracovní listy pak v příloze. U úlohy Školní věk bych doporučila alternativní formulaci: Kolikrát za dobu povinné školní docházky jde asi tak člověk do školy?
- Americký projekt pro 3. a 4. třídy: plánování třídního výletu (Carlson, 2021). Německá varianta téhož v (Maaß, 2011, str. 8).
- Americký projekt pro 3. a 5. třídy: recyklace plastových tašek na švihadla (Turner et al., 2021, str. 243).
- Singapurská úloha pro 5. třídu: výběr nejlepšího autobusového spojení do školy (Seto, Mary Magdelene, Ee, Ming & Widjaja, 2012, str. 679).
- Německé úlohy o cestujících v koloně a o místech k sezení u piknikového stolu (Maaß, 2011).
- Australské úlohy na výběr nejlepšího auta (English, 2006, str. 213) nebo závodníka (English, 2010) na základě komplexních dat a několika kritérií.
- Italské zadání modelování skrz práci s jídelními lístky nebo ceníky (Bonotto, 2013).

5.2.2 Doporučení pro učitele

Kromě nápadník úloh také pro začátečníky v modelování shrnuji základní doporučení pro tvorbu úloh i zadávání ve třídě. Pro lepší přehlednost už na tomto místě znovu neuvádím prameny pro každé doporučení zvlášť. Všechny ale vycházejí ze zjištění jiných výzkumů, z mých výsledků, nebo dokonce kombinace obojího.

Doporučení k výběru úloh:

- Modelovací úloha musí vycházet z reálného kontextu. Všímejte si situací a problémů z přírody, přírodních věd, specifických zájmů a her dětí nebo jakékoli jiné oblasti lidské činnosti. Sbírejte nápady.
- Inspirujte se úlohami z dostupných zdrojů (viz například nápadník v této práci).
- Matematické modelování je komplexní činnost a žáci se musí potýkat s jinými výzvami, než jsou běžně zvyklí. Proto se zaměřte na učivo matematiky, které už žáci dobře ovládají.
- Modelovací úlohy nemusejí vyžadovat jen jednu číselnou odpověď. Otázka může směřovat k řešení situace nebo rozhodnutí, podložené daty a matematickým modelem. Vhodné jsou otázky typu: „Jak byste optimálně rozdělili...“ „Podle jakých kritérií vybrat...“ „Jaký postup byste navrhli...“ „Vyplatí se podle vás...“.

Doporučení k přípravě výuky:

- Prostudujte si schéma modelování (v této práci v kapitole 3.4.3) a fáze uchopení situace, tvorby reálného modelu, matematizace modelu, matematických operací, interpretace výsledku a validace.
- Součástí modelování je také, že žáci získávají chybějící informace pro řešení, měří, odhadují, formulují domněnky, pracují s autentickými daty v textu nebo tabulce. Neberte jim tuto část!
- Rozmyslete si, které kroky budou dělat žáci zcela samostatně, a kde naopak předpokládáte společnou debatu a direktivnější přístup.

Doporučení k průběhu hodin:

- Modelování je časově náročná aktivita. Nepochybně budete potřebovat více než jednu vyučovací hodinu.
- Usilujte o co největší samostatnost žáků. Skupinová práce (3–4 žáci) podporuje jejich komunikační schopnosti, hledání různých cest k řešení a smysluplnou argumentaci. Není ale špatně ji dle situace střídat s jinými formami práce.

- Během práce skupin podporujte jejich metakognici a řízení činností. Takové „strategické intervence“ mohou znít: „Co ještě chybí?“ „O co se teď snažíš?“ „Co potřebuješ, aby ses posunul(a) v řešení?“.
- Validace výsledku není jen zkouška. Chtějte po žácích, aby výsledek také ověřili v reálném kontextu a aby zhodnotili výhody a limity svého postupu. Dobrý nápad je závěrečná prezentace řešení z jednotlivých skupin.

5.3 Limitace a podněty k dalšímu výzkumu

Můj výzkum má samozřejmě zřejmé nedostatky a limitace. Didaktické experimenty v jedné třídě umožnily dobře zkoumat otázky, které se týkaly propojení dvou vzdělávacích oblastí a konkrétní realizace aktivit ve třídě. Pro srovnání obtížnosti jednotlivých fází modelovacího procesu by ale bylo užitečné jednak provést podobné experimenty ve více třídách a jednak se zaměřit na volbu adekvátně obtížných úloh vzhledem k věku a matematickým dovednostem účastníků výzkumu. V mém výzkumu byly výběr a formulace úloh omezeny nárokem na kontext aktuálního učiva přírodovědy. Příliš vysoká obtížnost některých úloh mohla ovlivnit řešitelský proces i přístup žáků k úlohám, a tedy i výsledky výzkumu.

V rámci vybrané výzkumné strategie jsem si vědoma nedostatků ve sběru dat. Pozorování byla omezena tím, čeho si mohl všimnout učitel a výzkumník v jedné osobě. Nemohla jsem detailně zachytit paralelní děje v jednotlivých skupinách žáků a na myšlenkové procesy jednotlivých žáků jsem mohla usuzovat jen z toho, co verbalizovali. Moje pozornost se tak přirozeně zaměřila spíše na přirozeně komunikativní a aktivní žáky a mnohé zajímavé momenty jsem mohla nechat nepovšimnuté nebo prostě zapomenout. Možností by bylo do pracovních listů včlenit otázky, ze kterých by bylo možné co nejlépe usuzovat na řešitelský proces, a především žakovské artefakty systematicky sbírat.

Protože téma modelování není v českém prostředí zpracováváno, nabízí se mnoho aspektů k dalšímu výzkumu. Například by byl přínosný podrobnější vhled do výuky jedné celé modelovací úlohy se všemi fázemi, a to jak do žakovské práce (např. skrz analýzu žakovských artefaktů), tak do plánování a činnosti učitele. Někteří autoři pracují se schématem modelování (Borromeo Ferri, 2006, str. 90; Blum & Borromeo Ferri, 2009, str. 54) nebo „plánem řešení“ (*solution plan*) (Schukajlow, Kolter & Blum, 2015) speciálně

přizpůsobeným pro didaktické účely. Předkládají jej žákům jako pomůcku pro orientaci v celém procesu. Převedení takového schématu a dokumentace jeho použití v praxi by bylo nejen přínosné pro český výzkum matematického modelování, ale především pro učitele, kteří by se rozhodli modelování zařadit do hodin matematiky.

Didaktické experimenty jsem prováděla v heterogenní třídě s žáky nadanými i žáky s podpůrnými opatřeními 3. stupně. Střípky z jejich přístupu k úlohám se objevily také v podkapitolách *Pozorování* (Dýchání, Školní věk). Protože je modelování navázáno na další dovednosti (čtení s porozuměním, sebeřízení, kooperace...) a zároveň předpokládá využití znalostí mimo matematiku, nabízí se zkoumat právě individuální odchylky v procesu řešení u žáků s různými znevýhodněními, nadáním, ale třeba i specifickými zájmy.

6 Závěr

Diplomová práce se věnovala tématu matematického modelování a využití modelovacích úloh ve výuce matematiky v 5. ročníku ZŠ. Modelovací úlohy (problémy) jsou komplexní a autentické úlohy, které vycházejí z reálné situace. Kromě matematických operací musí při jejich řešení žáci využívat mimomatematické znalosti, argumentovat, spolupracovat ve skupině, vyhledávat nebo odhadovat chybějící data, volit vlastní postup a také míru zjednodušení výchozí situace. Matematické modelování tak vytváří nárok na autonomii žáků během celého procesu řešení a zároveň příležitost k přirozené vnitřní diferenciaci.

Téma jsem zvolila s ohledem na to, že podle Rámcového vzdělávacího programu pro základní školy mají žáci získávat zkušenost s matematickým modelováním a s modely reálné situace. Přesto je tato problematika v českém výzkumu, a pravděpodobně i ve vzdělávací praxi, téměř opomíjena.

Cíle práce byly dva: vyložit českým čtenářům v základech vyložit problematiku matematického modelování, a poté ve výzkumné části vyzkoušet realizaci v běžné třídě 5. ročníku ZŠ. Jako kontext pro modelovací úlohy jsem zvolila témata probíraná v přírodovědě.

První stanovený cíl splnil výklad v teoretické části diplomové práce, doplněný navíc o nápadník úloh. V rámci teoretické části jsem také pro potřeby výzkumu detailně specifikovala kompetence k modelování a vymezila několik pojmů: *modelovací úloha*, *úloha s prvky modelování* a *strategické intervence učitele*. Pro český kontext mohou být zajímavá zjištění o částečném překryvu pojmu *slovní úloha* a *modelovací úloha*. Aplikovaná matematika a zahraniční pedagogický výzkum matematické modelování vysvětluje jako obousměrný překlad mezi světem matematiky a ostatním světem. V perspektivě slovních úloh, která v Česku běžná, je možné matematické modelování popsat také jako takový proces řešení slovní úlohy s reálným kontextem, který vychází opravdu z analýzy situace, a nikoliv jen z povrchní kombinace obsažených číselných údajů (tzv. povrchové řešení).

Cíl výzkumné části dále upřesnily čtyři otázky (na holistický a analytický přístup k výuce, na obtížné dílčí kroky v modelování, na možnost rozvíjení mezipředmětových vztahů, na organizační formy výuky). Výzkum proběhl jako série tří didaktických experimentů,

realizovaných v jedné třídě 5. ročníku základní školy. Výsledky pro každou otázku jsem rovnou srovnávala se zjištěními jiných výzkumů.

Hlavním závěrem výzkumu je, že je možné už pro 5. třídu sestavit a zadat modelovací úlohu (tj. holistický přístup), která bude zároveň využívat kontext přírodovědného učiva. Žáci z takového propojení mohou těžit. Na druhou stranu výzkum poukázal na úskalí takového přístupu: na omezený výběr kontextů, s tím související neadekvátní obtížnost úloh a také časovou náročnost realizace všech kroků modelování. Začínat tvorbu modelovacích úloh ne od matematického obsahu, ale od reality není jednoduché. Navíc tak jako tak hrozí, že vzniklá úloha sice bude založena na reálných datech, ale problém bude zcela mimo žitou realitu žáků.

Odkud by se mělo začínat při tvorbě modelovacích úloh – to je jedna z nezodpovězených otázek, které mi zůstávají i po vyhodnocení experimentů. Podobně delikátní je hledání rovnováhy mezi vedením žáků a jejich samostatností; další podobné otázky jsem popsala v kapitole *Vědecké a didaktické důsledky výzkumu*.

Zpracovávání diplomové práce bylo inspirativní. Uvědomovala jsem si, jak se v průběhu úvodní rešerše, realizace experimentů, analýze zkušeností i při opětovném studiu pramenů při sepisování textu samotného čím dál více prohlubuje moje porozumění modelování. Jako bych původně neznámý pojem postupně vnímala plastičtěji. Nejkrásnější ale byly chvíle, kdy jsme během aktivit ve třídě s žáky narazili na povahu vědecké práce a vědeckého způsobu poznávání světa. Pokud bych proto chtěla své bádání dále rozvíjet, tak nejspíše tímto směrem. To by pravděpodobně znamenalo zkoumat koncept vědeckého myšlení a v učitelské praxi využívat badatelskou výuku.

7 Literatura

- Badatelé.cz. (2013). *Průvodce pro učitele badatelsky orientovaným vyučováním*. D. Votápková, R. Vašíčková, H. Svobodová, & B. Semeráková, (Ed.) Praha: Sdružení TEREZA.
- Blomhøj, M., & Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123–139.
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (73–96). Cham: Springer.
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Boaler, J. (1993). The role of contexts in the mathematics classroom: Do they make mathematics more “real”? *For the Learning of Mathematics*, 13(2), 12–17.
- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 37–55.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86–95.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Ed.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (2080–2089). Larnaca: CERME 5.
- Carlson, M. A. (2021). Teaching Practices to Support Early Mathematical Modeling. In J. M. Suh, *Early Mathematics Learning and Development* (147–167). Springer.
- Cimbálník, T. (2017). Pojetí polytechnického vzdělávání v rámci projektu P-KAP. In J. Novotná (Ed.), *Podpora polytechnického vzdělávání a podnikavosti ve středoškolském vzdělávání: sborník příspěvků z odborné konference* (34–40). Praha: Národní ústav pro vzdělávání.

- Elledorová, E. (2017). Konstrukční výzkum ve vzdělávání. *Pedagogická orientace*, 27(3), 419–448.
- English, L. D. (2006). Mathematical Modelling in the Primary School. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Ed.), *Mathematical Modelling in the Primary School* (207–214). James Cook University, Mathematics Education Research Group of Australasia.
- English, L. D. (2010). Modeling with Complex Data in the Primary School. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Ed.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (287–299). Boston: Springer.
- English, L. D. (2022). Fifth-grade Students' Quantitative Modeling in a STEM Investigation. *Journal for STEM Education Research*, 5(2), 134–162.
- English, L. D., & Watters, J. (2005). Mathematical Modelling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*, 16(3), 58–79.
- Evagorou, M., Nicolaou, C., & Lymbouridou, C. (2020). Modelling and Argumentation with Elementary School Students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* (20), 58–73.
- Fiala, J. (2004). *Kompendium matematického modelování II. - pedagogické a psychologické poznámky (Compendium of Mathematical modelling II. - pedagogical and psychological notes)*. Vyškov: XXII. mezinárodní kolokvium.
- Gilbert, A., & Suh, J. (2021). Convergent Nature of Modeling Principles Across the STEM Fields: A Case Study of Preservice Teacher Engagement. In J. M. Suh (Ed.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (345–371). Springer.
- Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In G. Greefrath, G. Kaiser, & R. Borromeo Ferri (Ed.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* (11–37). Springer.

- Havlíčková, R. (2020). Vliv atraktivity kontextu matematické slovní úlohy na řešitelský proces. *Scientia in educatione*, 11(1), 2–21.
- Hošpesová, A. (2014). *Metody práce v geometrii na 1. stupni ZŠ: Modelování*. Online. URL <https://clanky.rvp.cz/clanek/r/ZBAACBE/19001/METODY-PRACE-V-GEOMETRII-NA-1-STUPNI-ZS-MODELOVANI.html>. [cit. 2023-08-01]
- Hřebíček, J., & Škrdla, M. (2006). *Úvod do matemtického modelování – skripta*. Online. URL <http://is.muni.cz/el/1431/podzim2007/bi3101/um/skripta.pdf>. [cit. 30. 11 2023]
- Kaiser, G., & Brand, S. (2015). Modelling Competencies: Past Development and Further Perspectives. In G. Stillman, W. Blum, & M. Salett Biembengut (Ed.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (stránky 129–150). Springer.
- Klock, H. (2020). *Adaptive Interventionskompetenz in Mathematischen Modellierungsprozessen: Konzeptualisierung, Operationalisierung und Förderung*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-31432-3>
- KMK [Kultusministerkonferenz]. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. München: Luchterland.
- Krykorková, H., & Chvál, M. (2001). Rozvoj metakognice - cesta k hodnotnějšímu poznání. *Pedagogika*, 51(2), 185–196.
- Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN. ISBN 80-04-23753-3.
- Kuřina, F. (2013). Jazyky a reprezentace ve vyučování matematice. *Matematika, fyzika, informatika: časopis pro výuku na základních a středních školách*, 22(1), 2–16.
- Lipman, M. (2003). *Thinking in Education (2nd ed.)*. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 9780511840272.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113–142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>

- Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik* (31), 285–311. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2>
- Maaß, K. (2011). *Mathematisches Modellieren in der Grundschule*. Kiel: IPN.
- MŠMT. (2023). *Upravený rámcový vzdělávací program (RVP) pro základní vzdělávání (ZŠ) – 2023*. Online. URL <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/> [cit. 2023-09-09]
- Maňák, J. (2007). Modelování kurikula. *Orbis scholae*, 2(1), 40–53.
- Meyer, M. R., Dekker, T., & Querelle, N. (2001). Context in mathematics curricula. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(9), 522–527.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(2), 9–28.
- Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Ed.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer.
- Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37–58.
- Pelikán, J. (2011). *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů* (2. vyd.). Praha: Karolinum.
- Phong, B. T. (1975). Illumination for computer-generated pictures. *Communications of the ACM*, 18(6), 311–317.
- Pollak, H. (1977). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (255–264). Karlsruhe: Organising Committee of the ICME-3.
- Schukajlow, S., Kolter, J., & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM Mathematics Education* (47), 1241–1254.

- Seto, C., Mary Magdelene, T., Ee, D. N., Ming, E. C., & Widjaja, W. (2012). Mathematical modelling for Singapore primary classrooms: From a teacher's lens. In J. Dindyal, L. P. Cheng, & S. F. Ng (Ed.), *Mathematics education: Expanding horizons (Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)* (672–679). Singapore: MERGA.
- Silbernagl, S., & Despopoulos, A. (1984). *Atlas fyziologie člověka*. Praha: Avicenum.
- Smetáčková, I. (2017). Reality In Math: Barrier Or Help? In Z. Bekirogullari, M. Y. Minas, & R. X. Thambusamy (Ed.), *ICEEPSY 2017: Education and Educational Psychology* (31), 430–439. Future Academy.
- Suh, J. M., Wickstrom, M. H., & English, L. D. (2021). *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners*. Cham: Springer.
- Šafránková, K. (2009). Jak modelovat čtenářské strategie. *Kritické listy* (36), 28–31.
- Šíma, F. (2013). *Matematizace reálných situací a slovní úlohy*. [Disertační práce. Vedoucí práce S. Trávníček.] Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta.
- Švaříček, R., Šed'ová, K., Janík, T., Kaščák, O., Miková, M., Nedbálková, K., Novotný, P., & Sedláček, M. (2014). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách* (2. vyd.). Praha: Portál.
- Turner, E. E., McDuffie, A., Aguirre, J., Foote, M., Chappelle, C., Bennett, A., Granillo, M., & Ponnuru, N. (2021). Upcycling Plastic Bags to Make Jump Ropes: Elementary Students Leverage Experiences and Knowledge as They Engage in a Relevant, Community-Oriented Mathematical Modeling Task. In J. M. Suh, M. H. Wickstrom, & L. D. English (Ed.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (235–266). Cham: Springer.
- Ulu, M. (2017). Examining the Mathematical Modeling Processes of Primary School 4th-Grade Students: Shopping Problem. *Universal Journal of Educational Research*, 5(4), 561–580.

- University of Louisville. (n.d.). *Modeling - Elementary School*. URL <https://louisville.edu/education/abri/primarylevel/modeling/elementary>. [cit 2023-08-08]
- Vališová, A., & Kasíková, H. (2007). *Pedagogika pro učitele*. Praha: Grada. ISBN 978-80-247-1734-0.
- Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising Word Problems as Exercises in Mathematical Modelling. *Journal für Mathematik–Didaktik* (31), 9–29.
- Vollrath, H.–J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* (10), 3–37.
- Vondrová, N. (2020). Příčiny používání povrchových strategií řešení slovních úloh a jak jim předcházet. *Učitel matematiky*, 28(2), 66–93.
- Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2022). *Matematická slovní úloha. Mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Praha: Karolinum.
- Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2017). *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků*. Praha: Karolinum.
- Vorhölter, K., Greefrath, G., Borromeo Ferri, R., Leiß, D., & Schukajlow, S. (2019). Mathematical Modelling. In H. N. Jahnke, & L. Hefendehl-Hebeker (Ed.), *Traditions in German-Speaking Mathematics Education Research* (91–114). Springer.
- Vorhölter, K., Krüger, A., & Wendt, L. (2019). Metacognition in mathematical modeling – an overview. In S. A. Chamberlin, & B. Sriraman, *Affect in Mathematical Modeling* (29–51). Springer.
- Wei, Y., Zhang, Q., & Guo, J. (2022). Can Mathematical Modelling Be Taught and Learned in Primary Mathematics Classrooms: A Systematic Review of Empirical Studies. *Education sciences*, 12(12). (923) <https://doi.org/10.3390/educsci12120923>.

White, D. W. (2014). What Is STEM Education and Why Is It Important? *Florida Association of Teacher Educators Journal*, 1(14), 1–9.

9 Seznam příloh

Příloha 1 – Dýchání myši, slona a člověka (původní pracovní list)

Příloha 2 – Ideální tepová frekvence (původní pracovní list)

Příloha 3 – Školní věk (původní pracovní list)

Příloha 4 – Školní věk (upravený pracovní list)

Příloha 5 – Vzduch v nose (původní pracovní list)

Příloha 1 – Dýchání myši, slona a člověka (původní pracovní list)

SPOLEČNÉ ZNAKY ŽIVOČICHŮ

Vyber správné možnosti. Dopiš odpovědi podle toho, co si řeknete ve třídě.

Myš, slon i člověk patří mezi živočichy. Náleží ke skupině *obojživelníků–savců–ptáků* a jejich mláďata proto žijou ve vodě–se rodí živá–sají mateřské mléko. Jako všichni živočichové mají společně to, že dýchají–pracují–rostou–mluví.

V čem se od sebe slon, myš a člověk liší?

Myš je v dospělosti _____ než slon.

Podívej se na tabulku dole a vymysli podobné srovnání.

Kdo za život nejvíce vyroste? Argumentuj.

Kdo se za život nadechne vícekrát? Myš, člověk nebo slon?

	myš domácí	slon indický	a co člověk?
hmotnost při narození	0,5 až 1,5 gramů	80 až 100 kg	
hmotnost v dospělosti	40 až 45 gramů	4,5 až 6 tun	
kolik vyrostli...?			
počet nádechů	80 až 200 za minutu	5 až 6 za minutu	
délka dožití	2 roky	70 let	
kolikrát se nadechli?			

Příloha 2 – Ideální tepová frekvence (původní pracovní list)

Srdce a jeho tep

Tepová frekvence (tzv. „tepovka“) udává počet tepů srdce za minutu. Liší se podle věku člověka.

Můj odhad:

Naměřil jsem si:

Technika měření (jak jsme měřili):

Kde můžou být chyby v měření:

Rozlišujeme tepovou frekvenci klidovou, když je tělo v klidu. Když se tělo namáhá nebo je člověk ve stresu, tep se zvýší, protože _____.

Vyšší tep je při sportu zdravý. Trénuje se tak vytrvalost a spalují tuky. Příliš intenzivní trénink ale už zdravý není. Buňky nemají dost kyslíku a nemohou zdravě fungovat.

Pro každý věk člověka se stanovuje **maximální tepová frekvence**.

To znamená _____.
klok jvícen mžue hoje srdec tpate za munitu

Maximální tepová frekvence (tzv. „maximálka“, značka M) se počítá takto:

$$M = 220 - (\text{věk člověka})$$

- 1) Jaká je tvoje maximálka?

Výpočet:

Slovní odpověď:

- 2) Při zdravém sportu by mělo srdce tepat zhruba tolikrát, kolik je 6/10 z maximální tepové frekvence. Kolik by mělo tepat tvé srdce při zdravém sportu?

Výpočet:

Slovní odpověď:

- 3) BONUS: Zlomky se dají zapsat jako procenta. Kolik procent je 6/10?
4) BONUS: Zapiš v hadovi postup celého výpočtu ideální tepové frekvence při sportu.

Příloha 3 – Školní věk (původní pracovní list)

UPRAVUJEME TEXT, ABY BYL SROZUMITELNÝ. POZNÁVÁME OBDOBÍ LIDSKÉHO ŽIVOTA. POČÍTÁME.

→ V následujícím textu nejsou žádné věcné chyby. Jen je neúplný a některé údaje jsou uvedené v nevhodných jednotkách.

→ Doplň prázdná místa. Napiš podivné údaje jinak, aby textu rozuměli i běžní smrtelníci, nejen zběhlí počtáři.

Jako novorozenec se označuje človíček od _____ do **40 320 minut**.

Jako kojeneček se označuje človíček od _____ do **365,25 dne** svého života.

Jako batole se označuje človíček od _____ do **36 měsíců**.

Jako předškolní věk se označuje od **0,3 desetiletí** do chvíle, kdy dítě vstoupí do školy. V té době je mu v Česku obvykle _____ nebo _____.

Jako školní věk se označuje období od _____ do **5475 dní**. Další období se nazývají dospívání, dospělost a stáří.

→ Spoj období lidského života podle správného pořadí.

PLOD V TĚLE MATKY

KOJENEC

NOVOROZENEC

BATOLE

PŘEDŠKOLNÍ OBDOBÍ

ŠKOLNÍ VĚK

DOSPĚLOST

DOSPÍVÁNÍ (PUBERTA)

→ Úkoly pro hlavičky:

Kolikrát za tu dobu, co je člověk **novorozenec**, se narodí?

Kolikrát za tu dobu, co je člověk **ve školním věku**, jde do školy?

Kolikrát za tu dobu, co je člověk **kojenec**, ho přibližně matka nakojí?

Příloha 4 – Dýchání myši, slona a člověka (upravený pracovní list)

SPOLEČNÉ ZNAKY ŽIVOČICHŮ

Vyber správné možnosti. Dopiš odpovědi podle toho, co si řeknete ve třídě.

Myš, slon i člověk patří mezi živočichy. Náleží ke skupině *obojživelníků–savců–ptáků* a jejich mláďata proto *žijou ve vodě–se rodí živá–sají mateřské mléko*. Jako všichni živočichové mají společné to, že *dýchají–pracují–rostou–mluví*.

V čem se od sebe slon, myš a člověk liší?

Myš je v dospělosti _____ než slon.

	myš domácí	slon indický	a co člověk?
hmotnost při narození	0,5 až 1,5 gramů	80 až 100 kg	
hmotnost v dospělosti	40 až 45 gramů	4,5 až 6 tun	
kolik vyrostli...?			
počet nádechů	80 až 200 za minutu	5 až 6 za minutu	
délka dožití	2 roky	70 let	
kolikrát se nadechli?			

- 1) Jsou údaje v tabulce přesné? Proč?
- 2) Které další údaje můžeme zjistit tak, že je sami změříme?
Nebo odhadneme?

Které musíme najít?
- 3) Které další srovnání tě zajímá?
- 4) Co bychom uměli vypočítat a jak?

Příloha 5 – Vzduch v nose (původní pracovní list)

EXPERIMENT – JAK MOC SE OTEPLÍ VZDUCH V NOSE?

Počet zkoumaných osob: 50 dospělých

Metoda: Každé osobě byla zavedena teplotní čidla na různá místa v dýchací soustavě. Čidla měřila teplotu a také vlhkost procházejícího vzduchu. Všechny osoby vdechovaly vzduch pokojové teploty (25 stupňů Celsia).

Výsledky:

Mezi vstupem do dutiny nosní a nosohltanem se vzduch ohřál průměrně o 9 stupňů Celsia. Naměřená teplota v průdušnici byla ještě o 3 stupně vyšší než teplota, kterou vědci naměřili v nosohltanu.

ÚKOLY:

- 1) V pracovním sešitě doplň názvy jednotlivých částí dýchací soustavy.
- 2) Zapiš do obrázku v PS, kolik stupňů má podle experimentu vzduch v nosohltanu a v průdušnici.