Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Román Plochozemě a žákovo uchopení čtvrté dimenze

Flatland and student's perception of the fourth dimension

Bc. Kateřina Bouchalová

vedoucí práce: Mgr. Michal Zamboj, Ph.D.
studijní program: Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy a střední školy
studijní obor: N M-AJ 20

Praha, 2023

Odevzdáním této diplomové práce na téma *Román Plochozemě a žákovo uchopení čtvrté dimenze* potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 4. prosince 2023 Bc. Kateřina Bouchalová

Ráda bych poděkovala Mgr. Michalu Zambojovi Ph. D., za obrovskou trpělivost, pomoc a vedení této diplomové práce. Dále děkuji své rodině za naprostou podporu, oporu, rady, opravy, pomoc a mnoho dalšího, jelikož vím, že bez nich by to nešlo.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá propojením dvou na první pohled sobě vzdálených disciplín, kterými jsou matematika a literatura. Cílem práce je analyzovat, zda jsou vybraní žáci schopni zlepšit své uchopení čtvrté dimenze pomocí analogie představené v ukázce z románu Edwina Abbotta Abbotta s názvem *Plochozemě*. Práce začíná kapitolou zaměřenou na historii čtvrté dimenze a úvah s ní spojených. V další části je představen autor a jeho dílo *Plochozemě*. Dále je popsán výskyt analogie, literatury a čtvrté dimenze v Rámcově vzdělávacím programu pro gymnázia a dalších zdrojích týkajících se výuky matematiky. Následně je představena teorie generických modelů od Hejného a van Hiele model geometrického myšlení. V poslední podkapitole teoretické části je nastíněn problém s představou čtvrté dimenze, který souvisí s tím, že žijeme ve trojrozměrném světě. Teoretická část slouží jako podklad k praktické části práce, kde je představena kvalitativní případová studie. Ta spočívala v tom, že žáci pátých ročníků šestiletého gymnázia dostali k vypracování dva pracovní listy, mezi nimiž byl odstup jednoho týdne. Tyto dva pracovní listy byly pak porovnány a vyhodnoceny, podle toho, jak se odpovědi žáku od prvního k druhému pracovnímu listu změnily, v závislosti na tom, zda mezitím ukázku z románu *Plochozemě* přečetli, či nikoli. Na základě tohoto vyhodnocení byla provedena diskuze, která ukázala, že žáci jsou schopni dosáhnout analogického myšlení, díky kterému po přečtení ukázky přichází s novými myšlenkami a koncepty v rámci čtvrté dimenze.

Klíčová slova

čtvrtá dimenze, matematika, analogie, literatura, Edwin Abbott Abbott, Plochozemě

Abstract

This diploma thesis deals with the connection between mathematics and literature, two disciplines that may seem distant from each other. The aim of this work is to analyze whether selected students are able to improve their perception of the fourth dimension with the help of the analogy introduced in an excerpt from Edwin Abbott Abbott's book called *Flatland*. This thesis begins by introducing firstly, the history of the fourth dimension and the way it is conceptualized, and secondly, the author and the book *Flatland*. The theoretical part continues by providing a description of the occurrence of analogy, literature, and the fourth dimension in the Framework Education Programme for Secondary General Education as well as other sources focused on teaching mathematics. Next, the theory of the general models introduced by Hejný is summarized, followed by the van Hiele model of geometric thinking. The theoretical part of the thesis ends with a description of our limitations regarding the representations of the fourth dimension. This first part of the work stands as the basis for the practical part of the thesis that introduces a quantitative case study which was realized in the following way. Two tests were given a week apart to the fifth-year students of a sixth-year grammar school. The aim was to compare and analyze the two tests, focusing on the changes in answers from one test to another, and on the difference in answers of those students who did and those who did not read the book *Flatland* in the time between the tests. Based on this evaluation, a discussion was carried out, thanks to which this work showed that students are capable of acquiring analogical reasoning after reading the extract from *Flatland* and that it provides the students with new ideas and concepts relating to the fourth dimension.

Keywords

fourth dimension, mathematics, analogy, literature, Edwin Abbott Abbott, Flatland

Obsah

Úvod

Čtvrtá dimenze je fenomén, který si své místo hledá už několik století. Velký úspěch toto téma zaznamenalo v devatenáctém století, kdy se také objevuje kniha s názvem *Plochozemě*, napsaná matematikem, ředitelem londýnské střední školy a farářem Edwinem Abbottem Abbottem. I přes to, že téma čtvrté dimenze našlo své místo v povědomí veřejnosti, není pravděpodobné, že by se s ní žáci českých základních a středních škol setkali. Toto téma však přináší možnost skloubit literaturu a matematiku a pomocí analogie, představené ve výše zmíněném románu, přiblížit žákům téma čtvrté dimenze.

Tato diplomová práce s názvem *Román Plochozemě a žákovo uchopení čtvrté dimenze* se zabývá propojením dvou na první pohled sobě vzdálených disciplín, kterými jsou literatura a matematika. Konkrétně si dává za cíl analyzovat, jestli vybraní žáci jsou schopni zlepšit své uchopení čtvrté dimenze pomocí analogie představené v ukázce z románu *Plochozemě*, kde budou seznámeni s přechodem mezi druhou a třetí dimenzí.

Práce je členěna do dvou částí. První část se zaměřuje na teoretickou stránku a je rozdělená na šest hlavních celků. V první podkapitole 1.1 bude představen krátký úvod do historie čtvrté dimenze a vývoje úvah s ní spojených.

Druhá podkapitola nahlédne do života Edwina Abbotta Abbotta, jakožto autora jednoho z nejznámějších románů představujících možnosti čtvrté dimenze.

Část třetí se zabývá výskytem analogie, literatury a čtvrté dimenze v hodinách matematiky. V první řadě bude představen Rámcový vzdělávací program pro gymnázia a jeho spojitost s danými tématy, a následně bude uvedeno několik dalších zdrojů, které s analogií, literaturou a čtvrtou dimenzí v hodinách matematiky souvisí.

Ve čtvrté části bude představena Hejného teorie generických modelů, která bude sloužit jako jeden z podkladů pro rozbor praktické části.

Pátá část představí van Hiele model geometrického myšlení, který doplní teorii generických modelů.

V posledním celku teoretické části práce bude rozebírána problematika týkající se naší limitace s představou čtvrté dimenze. Budou představeny dva zahraniční zdroje, které se zabývají právě tímto tématem a složitostí s interpretací výsledků některých studií, které se s představou čtvrté dimenze zabývají.

Praktická část této diplomové práce je členěná do čtyř hlavních celků. První se věnuje metodologii a konkrétním výzkumným otázkám.

Ve druhé podkapitole bude rozebrána tvorba pracovního listu, který slouží k analyzování uchopení čtvrté dimenze žáky, na jehož základě následně bude představeno pilotní testování.

Další celek praktické části práce je samotná hlavní studie, kde bude podrobně popsán výzkumný experiment spolu s jeho výsledky, které se rozdělují do první části (před četbou ukázky z románu *Plochozemě*) a do druhé části (po četbě).

Závěrečná část práce, kterou je diskuze, se zabývá nahlédnutím do konkrétních výsledků a odpovídá na předem položené výzkumné otázky.

V práci se objevuje několik obrázků s žákovským řešením úloh a na závěr jsou přiloženy dva pracovní listy, které byly žákům v rámci hlavní studie zadány. Pokud v práci není uvedený zdroj v českém jazyce, jsou citace překladem autorky.

Kapitola 1

Teoretická část

1.1 Historie čtvrté dimenze

Tato podkapitola krátce představí úvod do historie. Při pohlédnutí do minulosti jsou důležitá dvě hlavní témata. Prvním z nich je představa dvojrozměrného světa, neboť to je právě klíčem k poznání analogie, která nám může přiblížit čtvrtou dimenzi. A samozřejmě samotné téma čtvrté dimenze. Kapitola vychází hlavně ze zdrojů Floriana Cajori (Cajori, 1926), Raúla Ibáñeze (Ibáñez, 2017) a Henryho Parkera Manninga (Manning, 1914).

V knize *Čtvrtý rozměr: Je náš svět jen stínem jiného světa?* autor zmiňuje jedno z prvních zamyšlení, kde se pracuje právě s představou jakéhosi dvojrozměrného světa (Ibáñez, 2017, s. 20). Jedná se o *Obraz jeskyně* od řeckého filozofa Platóna, působícího v 5. století př. n.l. (Novotný, 2013). V tomto krátkém dialogu se pojednává o zajatcích, kteří jsou od dětství připoutáni a donuceni hledět pouze na stěnu jeskyně, kde jejich věznitelé vrhají stíny různých předmětů (figurky lidí, zvířat a jiných výrobků) (Platón, 1993). Dialog sice slouží hlavně k představení Platónových idejí a zamyšlení nad složitostí toho, co vnímáme jako realitu, zároveň ale představuje jakousi první představu dvojrozměrného světa, neboť to, co zajatci vidí, je právě středové promítání prostoru na dvojrozměrnou plochu. Zajatci tak tedy nabývají dojmu, že jejich svět je dvojrozměrný. Platónův *Obraz jeskyně* je pro nás důležitým úvodem, jelikož nabízí jednu z možností matematických modelů, jak přistupovat k představě prostoru vyšší dimenze pomocí prostoru dimenze nižší a jak se dle Tonyho Robbina tedy lidé mohou vyrovnávat právě s uchopením čtvrté dimenze (Robbin, 2006). Robbin představuje dvě možnosti, jedna z nich je pomocí řezů (tak jak je představeno v románu *Plochozemě*) a druhá je právě za pomocí stínů (projekce), jak je tomu u Platóna (Robbin, 2006).

Další velmi krátká zamyšlení se týkají filozofů, matematiků a fyziků, kteří se v průběhu skoro dvou tisíců let k myšlence čtvrté dimenze přibližovali, ale odmítali ji. Představeno bude pár jmen a jejich komentáře, tak jak je uváděno ve článku „Původ konceptů čtvrté dimenze“[1] (Cajori, 1926). První z nich, Aristotelés, ve své knize *O nebi*, píše:

> Velikost, pokud je dělitelná jedním směrem je přímka, pokud dvěma směry plocha a pokud třemi, jedná se o těleso. Dále už neexistuje žádná další velikost, jelikož tyto tři dimenze jsou to jediné, a to, co je dělitelné třemi směry je dělitelné ve všech (Aristotelés, 2018, s. 2).

Aristotelés dále vysvětluje, že číslo tři je pro náš svět charakterizující. Popisuje, že když lidé mluví o dvou věcech, říkají „obě,“ ale když popisují tři, používají termín „všechny“[2] (Aristotelés, 2018). Jak popisuje Manning, dále než Aristotelés došel podle Simplicia Ptolemaios, který „dokázal,“ že více než tři „vzdálenosti“ být nemohou, jelikož v našem prostoru nemohou být víc než tři na sebe kolmé přímky. Menší změna v přístupu k dalším dimenzím přišla s algebrou a Diofantem z Alexandrie, při řešení rovnic vyššího než třetího stupně. Geometrie a geometrická reprezentace těchto řešení ovšem bránila jejich vzestupu a rovnice vyššího než třetího stupně se považovaly za nereálné (Manning, 1914).

Další filozof, který by měl být zmíněn je Mikuláše Oresme, který se, jak píše Mumford, snažil vytvořit graf funkce se třemi proměnnými. Stejně jako jeho předchůdci však tento problém zavrhl s tím, že čtvrtá dimenze neexistuje (Mumford, 2006). K podobnému závěru, podle Cajoriho, došel i Gerolamo Cardano, když reprezentoval mocniny čísel jako přímku, plochu a těleso, ale dál už nešel, jelikož by tím údajně šel proti přírodě (Cajori, 1926).

[1] V originále „Origins of Fourth Dimension Concepts.“
[2] V angličtině „both“ a „all.“

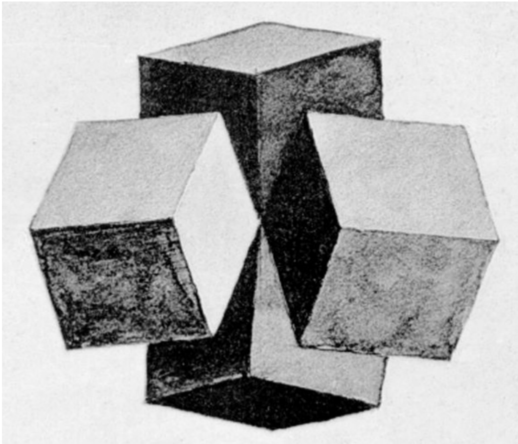
Podobně na problematiku nahlížel i matematik John Wallis, který ve své knize Algebra píše:

> Neboť Příroda, ve vlastnictví řeči, nedovoluje více než Tři (lokální) Dimenze (Délka, Šířka a Tloušťka, v Přímkách, Plochách a Tělesech;) oprávněně se může zdát velmi nevhodné mluvit o Tělesech (o třech Dimenzích) nakreslených do Čtvrté, Páté, Šesté, nebo další Dimenze. Přímka nakreslená do Přímky vytvoří Plochu nebo Povrch; ten nakreslený do Přímky vytvoří Těleso: Ale kdyby toto Těleso bylo nakreslené do Přímky nebo Plocha do Plochy, co vytvoří? Plocho-plochu? To je Monstrum v Přírodě, navíc méně pravděpodobné než Chiméra nebo Kentaur. Neboť Délka, Šířka a Tloušťka zabírají celý Prostor. Nejde si představit Čtvrtou Lokální Dimenzi nad těmito třemi. (Wallis, 1685, s. 126)

Když se čtvrtá dimenze dostala do podvědomí široké veřejnosti, začali se objevovat snahy pomocí ní popsat jakési duchovno a nadpřirozeno. Zmíněná zde mohou být jména jako je Henry More, představený v článku „Původ konceptů čtvrté dimenze," který připisoval čtvrtou dimenzi prostoru lidské duše (Cajori, 1926), nebo Charles B. Patterson, který čtvrtou dimenzi představoval jako prostor pro mrtvé, se kterými se časem naučíme komunikovat, jak se dočteme v knize *Čtvrtý rozměr: Je náš svět jen stínem jiného světa?* (Ibáñez, 2017).

Další zlom přišel v osmnáctém století, kdy někteří vědci začali považovat mechaniku geometrií čtvrtých dimenzí. Jak popisuje Manning, tento nápad se většinou připisuje Josephu-Louisovi Lagrangeovi, který ho publikoval v roce 1797. Stejnou úvahu ovšem vyjádřil už Jean le Rond d'Alembert ve svém článku „Dimenze" v roce 1754 (Manning, 1914, s. 4). Tito autoři, jak říká Cajori, jako první představili myšlenku, že čtvrtou dimenzi tvoří čas (Cajori, 1926).

V devatenáctém století se už matematici začínají oprošťovat od reálného světa vnímaného našimi smysly a dovolují si tak volně přemýšlet nad čtvrtou až n-tou dimenzí. Manning zde zmiňuje jména, kterými jsou August Ferdinand Möbius, Arthur Cayley a James Joseph Sylvester. Dále jmenuje matematiky, kteří ke čtvrté dimenzi přistupovali oproti syntetické



Obrázek 1.1: Stringhamova hyperkrychle (Stringham, 1880, s. 15)

geometrie analyticky, jako například George Green, Augustin Louis Cauchy a Bernhard Riemann (Manning, 1914).

Další dvě důležitá jména devatenáctého století jsou Hermann Grassmann a Washington Irving Stringham. Robbin představuje Grassmanna jako profesora německého gymnázia, jehož matematické úvahy šly mimo myšlenky většiny společnosti (Robbin, 2006, s. 3). V jeho knize *Die lineale Ausdehnungslehre* (ve volném překladu *Teorie lineárního rozšíření*) jako první představuje systém, kde prostor a jeho geometrické vlastnosti mohou být lineárně rozšířeny do dalších dimenzí (Grassmann, 1844). Jak popisuje Fearnley-Sander, Grassmannovy myšlenky v knize připomínají koncept vektorového prostoru, když popisuje lineární nezávislost vektorů a jejich lineární kombinace, které následně propojí s termíny báze a dimenze (Fearnley-Sander, 1979, s. 811).

O pár desítek let později, v roce 1880, Washington Irving Stringham publikuje článek „Pravidelná tělesa v n-dimenzionálním prostoru“[3] (Stringham, 1880). V tomto článku rozebírá vlastnosti n-dimenzionálních těles, spolu s kombinatorickými výpočty, které se k vlastnostem pojí[4]. Jak píše Robbin, Stringhamův článek je důležitý, protože jako první představuje ilustrace čtyřrozměrných těles (Robbin, 2006, s. 5). Jeho vizualizace hyperkrychle je ukázána na Obrázku 1.1.

[3] V originále „Regular Figures in n-dimensional Space.“

[4] V článku například představuje výpočet vrcholů, hran, stěn a nadstěn čtyřrozměrných těles (Stringham, 1880, s. 5).

Právě v devatenáctém století se také začínají objevovat zamyšlení nad čtvrtou dimenzí v literatuře[5]. Jedny z hlavních jmen jsou Hermann von Helmholtz, Lewis Carroll, Edwin Abbott Abbott, Charles Howard Hinton a Herbert George Wells. Hermann von Helmholtz byl německý matematik narozený v roce 1821, který se mimo jiné zabýval „představou inteligentních dvourozměrných bytostí žijící na sféře nebo jiných plochách.“ (Ibáñez, 2017). Helmholtz ve svém článku „O původu a významu geometrických axiomů“[6] popisuje, jak by pro bytosti žijící ve dvojrozměrném světě byla představa třetí dimenze stejně nemožná, jako je pro nás představa dimenze čtvrté - podobně jako pro člověka, který se narodil nevidomý, představa barev (Helmholtz, 1876). Více k tématu, jak je možné či nemožné si čtvrtý rozměr představit, bude nastíněno v části práce zabývající se naší limitací s představou čtvrté dimenze 1.6.

Charles Lutwidge Dodgson, známější pod svým pseudonymem Lewis Carroll, se proslavil díky svému dílu *Alenka v kraji divů a za zrcadlem,* vydaném poprvé v roce 1865 (Carroll, 2007). Dodgson byl spisovatelem, členem Anglikánské církve, ale hlavně také matematikem a přednášejícím na Oxfordské univerzitě (Greenblatt & Abrams, 2006). Jak popisuje Ibáñez, podobně jak tomu bude u Herberta George Wellse, i Dodgson se zajímal o koncept cestování v čase, který může být se čtvrtou dimenzí velmi spjatý (Ibáñez, 2017). Kromě cestování v čase je u Dodgsona spojitost se čtvrtou dimenzí vidět právě v *Alence v kraji divů a za zrcadlem*, kde Alenka, po průchodu skrz zrcadlo, změní orientaci (Carroll, 2007). Podobné otočení popsal ve své knize *Jak funguje mysl*[7] Steven Pinker, který píše:

> Studoval jsem tří dimenzionální zrcadlové obrazy dvacet let, a i když matematicky vím, že je možné změnit levou botu na pravou, pokud ji obrátíme ve čtvrté dimenzi, nebyl jsem schopný si vytvořit prostor v hlavě, kde bych si otočení představil (Pinker, 1998, s. 207).

K problematice představy, kterou popisuje, se vrátí část práce 1.6.

S touto myšlenkou otočení tělesa ve čtvrté dimenzi, jak píše Zamboj (2020), přichází první Möbius, který představuje problém otáčení simplexu na svůj vlastní obraz (Möbius,

[5]Mimo odbornou literaturu, ve které se objevuje už po několik staletí.
[6]V originále „The Origin and Meaning of Geometrical Axioms.“
[7]V originále *How the Mind Works.*

1827). Je tedy možné si představit, že při průchodu přes zrcadlo se Alenka otočila ve čtvrté dimenzi, jelikož toto otočení by ve tří dimenzionálním světě nebylo možné.

Edwinu Abbottovi Abbottovi, který je pro tuto práci zásadní, se věnuje samostatná část 1.2.

Charles Howard Hinton byl matematik, učitel a spisovatel. Narodil se v roce 1853 v Londýně a je jeden z těch, kteří se zasloužili o „propagaci“ čtvrtého rozměru (Ibáñez, 2017). Dle záznamů *Oxford English Dictionary* (2023) je první, kdo použil název „teserakt“ k označení čtyřrozměrné krychle. Ve svém článku „Co je to čtvrtá dimenze?“[8], který vyšel v roce 1880, představuje podobnou analogii jako sám Edwin Abbott Abbott (Abbott, 1884). Zde se k představě čtvrté dimenze dostává pomocí analogie mezi jednorozměrným, dvojrozměrným, trojrozměrným až čtyřrozměrným světem (Hinton, 1880). Hinton také ukazuje, jak by se čtyřrozměrná bytost mohla ukázat nám ve trojrozměrném světě (podobně jako je tomu v románu *Plochozemě*). Ve svém článku zároveň upozorňuje, že pokud bychom opravdu žili ve čtyřrozměrném prostoru, máme tyto dvě možnosti: buď jsme čtyřrozměrné bytosti a nevíme o tom, anebo máme rozměry jenom tři, což v důsledku znamená, že jsme pouhou abstraktní představou čtyřrozměrných bytostí (tak jako pro nás jsou například přímky a čtverce) (Hinton, 1880).

Poslední, koho je nutné zmínit, je Herbert George Wells, anglický spisovatel narozený v roce 1866 (Parrinder, 2023). Pro tuto práci je zajímavé jeho dílo *Stroj času* z roku 1895. Hlavní hrdina je vynálezce, který sestavil stroj času, který mu umožňuje cestovat v čase stejně, jako by se jednalo o prostor. Wells zde tedy představuje nový pohled na čas jako na něco, s čím zvládneme manipulovat, něco co neplyne pouze lineárně dopředu (Wells, 1895). Čtvrtá dimenze zde ovšem není jen poznámka pod čarou, je to i způsob, kterým hlavní postava vysvětluje náš svět. Wells ve *Stroji času* píše:

> Jakékoliv reálné tělo musí mít prodloužení ve *čtyřech* směrech: musí mít Délku, Šířku, Tloušťku, a Trvání. (...) Jsou doopravdy čtyři dimenze, tři, které nazýváme tři roviny Prostoru, a čtvrtá, Čas. Nicméně existuje sklon k nepřirozenému rozlišování mezi prvními třemi zmíněnými dimenzemi a později zmíněnou čtvrtou, protože naše

[8] V originále „What is the Fourth Dimension?“

vědomí se ve čtvrté dimenzi pohybuje jedním směrem od počátku do konce našich životů. (Wells, 1895)

H. G. Wells zde tedy popisuje čtvrtou dimenzi podobně jako fyzikové minulých let, a to jako čas. Uvažuje zde však nad časem jako nad dalším rozměrem, který je možno libovolně navštěvovat, a právě v tom je ukázán nový pohled na danou problematiku.

1.2 Edwin Abbott Abbott a Plochozemě

Tato diplomová práce si dává za cíl analyzovat, zda vybraní žáci jsou schopni zlepšit své uchopení čtvrté dimenze pomocí analogie představené v ukázce z románu *Plochozemě*. Tato podkapitola se zaměří na autora zmíněného románu, kontext díla a jeho dopad. Vycházet bude z článků Rosemary Jann (Jann, 1985) a Thomase F. Banchoffa (Banchoff, 1990) a z výše zmíněné knihy *Čtvrtý rozměr: Je náš svět jen stínem jiného světa?* (Ibáñez, 2017).

Edwin Abbott Abbott se narodil v roce 1838. Byl to učitel, matematik, farář a od svých dvaceti šesti let i ředitel City of London School (Ibáñez, 2017). Jak píše Thomas F. Banchoff: „Edwin Abbott Abbott nebyl první, kdo představil dvojrozměrný vesmír obydlený plochými bytostmi, byl ovšem první, kdo prozkoumával, co by pro tyto bytosti znamenalo, kdyby interagovaly s úkazy z dimenze vyšší než je ta jejich“ (Banchoff, 1990). Popsáním této interakce a složitost pochopení výše dimenzionálního světa je jeden z důvodů, proč je Abbottova kniha *Plochozemě* tak významná.

Plochozemě vyšla poprvé v roce 1884, tehdy se autor Edwin Abbott Abbott prezentoval pod pseudonymem „Čtverec,“ což je také vypravěč a hlavní postava románu (Abbott, 1884). *Plochozěmě*, jak popisuje Rosemary Jann, „se rozděluje na společenskou satiru a lekce geometrie“(Jann, 1985, s. 474). Hlavní postava v prvních několika kapitolách popisuje, jak jejich svět, Plochozemě, funguje. Čtverec představuje obyvatele a jejich postavení ve společnosti, kde se odráží tehdejší viktoriánská společnost. Nejprimitivnější jsou ženy, které v knize nabývají podob úseček, dalšími jsou rovnoramenné trojúhelníky, které tvoří vrstvu dělníků a vojáků. Dále pak rovnostranné trojúhelníky, čtverce, pětiúhelníky, šestiúhelníky, až jak popisuje sám Čtverec:

> S rostoucím počtem stran pak vzrůstá i míra urozenosti, dokud se šlechtici nedostane čestného titulu mnohostranného obrazce čili mnohoúhelníku. A konečně, když počet stran překročí určitou mez a jejich délka se tak zkrátí, že šlechtice nelze rozeznat od kruhu, je přijat do vrstvy kruhových občanů, kteří působí jako kněží. (Abbott, 2014, s. 25)

Plochozemě tak nepředstavuje „pouze“ brilantní náhled do světa dimenzí či infinitesimálního počtu [9], ale ukazuje také pohled do tehdejší společnosti a jejího vnímání světa. Jak popisuje Banchoff, v románu je možné spatřit i kritiku společnosti, co se týče křesťanství, kdy obyvatelé nechtějí slyšet o ničem „novém“ a „neznámém,“ či „zázračném“ (Banchoff, 1990). Různorodost románu zachycuje také Henderson, která píše, že *Plochozemě* se dá číst jako společenská satira i jako lekce matematiky, kdy obě tyto možnosti propojuje potřeba reprezentace (Henderson, 2009, s. 461).

Hlavní dopad románu je ale výše zmíněné přiblížení čtvrté dimenze. Román jednoduchým jazykem velmi nadčasově vysvětlí analogii, která čtenáři může objasnit a zlepšit uchopení čtvrté dimenze. Což je právě něco, co se bude snažit ukázat praktická část této práce.

1.3 Analogie a čtvrtá dimenze ve vzdělávání

Tato podkapitola se zaměří na čtvrtou dimenzi, analogii a použití literatury v hodinách matematiky. Nejdříve bude rozebráno, kde se s těmito tématy je možné setkat v Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia a dále budou představeny některé zdroje, které s danou problematikou souvisí.

[9] Infinitesimální počet je naznačen u limity, která vychází z právě představené ukázky, kde Čtverec popisuje mnohoúhelník s tak vysokým počtem stran, že se blíží kruhu.

1.3.1 Rámcový vzdělávací program

V rámci aktuálně platného Rámcově vzdělávacího programu pro gymnázia (RVP G) revidovaného v roce 2021 (MŠMT, 2021), konkrétně v rámci jeho vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, se čtvrtá dimenze neobjeví ani jednou. Na druhou stranu, RVP G zahrnuje prostorovou představivost a geometrii v rovině a v prostoru. Hned v první větě se píše: „Výuka matematiky na gymnáziu rozvíjí a prohlubuje pochopení kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa, utváří kvantitativní gramotnost žáků a schopnost geometrického vhledu"(MŠMT, 2021, s. 21). V rámci cílového zaměření vzdělávací oblasti se objevuje „rozvíjení dovednosti pracovat s různými reprezentacemi" a „rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti" (MŠMT, 2021, s. 21). U vzdělávacího obsahu se pod Geometrií se objevují následující relevantní očekávané výstupy:

žák

- používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, na základě vlastností třídí útvary
- využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému
- zobrazí ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan, sestrojí a zobrazí rovinný řez těchto těles
- řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí (MŠMT, 2021, s. 23-24)

Zároveň RVP G zahrnuje geometrii v rovině a v prostoru v rámci konkrétního učiva, které se má na gymnáziu probrat.

Co se týče použití analogie v hodinách matematiky, v RVP G nenajdeme ani jeden výskyt tohoto slova. Hledání souvislostí a všímání si podobných vlastností je ovšem podstatnou částí matematiky, kterou lze v RVP G najít například v těch zaměřeních vzdělávací oblasti, které vedou žáka k „osvojování základních matematických pojmů a vztahů postupnou abstrakcí a zobecňováním na základě poznávání jejich charakteristických vlastností" a „rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu, k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů" (MŠMT, 2021, s. 21).

Použití literatury v hodinách matematiky se přímo v RVP G také neobjevuje. Jako poslední z cílů zaměření vzdělávací oblasti se ovšem vyskytuje vedení žáka k „pochopení matematiky jako součásti kulturního dědictví a nezaměnitelného způsobu uchopení světa“ (MŠMT, 2021, s. 21) a literatura je něco, co by mohlo k dosažení tohoto cíle sloužit.

Po prostudování vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace ze současně platného RVP G (MŠMT, 2021, s. 21-24) je možné říct, že i když se o čtvrté dimenzi, analogii a použití literatury přímo nezmiňují, je několik částí této oblasti, kde by se daná témata mohla objevit. Co se týká samotné čtvrté dimenze, pokud se konkrétní učitel matematiky nebude chtít o tématu zmínit, žáci se s ní ve výuce nesetkají. Je ale možné téma představit nadaným žákům v samostatném kroužku, či jako doporučenou četbu, nebo v semináři deskriptivní geometrie, kde se s tématem žáci mohou setkat z pohledu zobrazení.

1.3.2 Analogie v hodinách matematiky

Jak definuje Josef Polák ve svém článku „Analogie v matematice a jejich didaktické využití“: „Pojmem *analogie* (z řec. analogia = obdoba, podobnost) různých (netotožných) objektů, popř. jevů či situací se rozumí nalezení jejich podobných (spec. stejných) vlastností“(Polák, 2018, s. 321). V této práci se objevuje jak analogie mezi různě dimenzionálními prostory a tělesy, tak analogie přechodů mezi nimi. Polák charakterizuje matematické útvary, mezi kterými se objevuje tato podobnost, jako „analogické matematické objekty“ (Polák, 2018, s. 321), zároveň představuje příklady u dvojic planimetrických a stereometrických útvarů, jakou jsou například: „čtverec - krychle, obdélník - kvádr, rovnoběžník - rovnoběžnostěn, trojúhelník - čtyřstěn, mnohoúhelník - mnohostěn, kruh - koule“ (Polák, 2018, s.321). Dle této charakterizace je možné nahlédnout do čtvrté dimenze pomocí analogie, když se teserakt přidá jako další *analogický matematický objekt* a vytvoří tak trojici: čtverec - krychle - teserakt[10], kterými se bude více zabývat praktická část práce. Polák dále popisuje, že obdobně se definují pojmy „analogie matematických systémů“ a „analogie matematických situací“ (Polák, 2018, s. 321). Přechod mezi druhou a třetí dimenzí a přechod

[10] A podobně u dalších čtyřrozměrných těles.

mezi třetí a čtvrtou by se tedy daly charakterizovat právě jako *analogie matematických situací*. Na podobné analogii je také založen „dimenzionální žebřík," představený v *Úvodu do studia analytické geometrie* (Stehlíková et al., 2005). Autoři zde nabízejí exkurzi do čtvrtého rozměru, kde píší, že „do čtyřrozměrného prostoru E^4 nelze nahlédnout. Pronikáme do něj po „dimenzionálním žebříku": bod → přímka → rovina → trojrozměrný prostor → čtyřrozměrný prostor" (Stehlíková et al., 2005, s. 77). Autoři sice „dimenzionální žebřík" nespojují se slovem *analogie*, postupují však na bázi podobnosti mezi danými dimenzemi a pomocí této analogie dále pracují se čtvrtou dimenzí.

Co se týká analogie v hodinách matematiky, dle Poláka je z didaktického hlediska vhodné používat analogii v matematice hlavně v těchto případech:

- při analogické formulaci matematických definic a vět,
- při objevování a vyšetřování nových matematických vlastností,
- při řešení analogických matematických úloh
- k snadnějšímu a trvalejšímu zapamatování určitých analogických matematických poznatků (Polák, 2018, s. 323).

Žáci účastnící se výzkumu této práce využívají analogie hlavně v rámci druhého a čtvrtého představeného bodu.

Analogie v hodinách matematiky tedy zcela jistě má své místo, jak dodávají autoři knihy *Metafora a analogie ve výuce přírodních věd*[11]: „V každodenním životě se učíme mnoho věcí tím, že hledáme podobnosti a rozdíly. Použití analogií a metafor je důležité ve vědě samotné a jejich použití ve výuce těchto oborů se zdá proto přirozené" (Aubusson et al., 2006, s. v). Kniha ovšem také upozorňuje, že i když analogie mohou být ve výuce velmi přínosné, učitelé si musí dávat pozor na to, aby žáci pochopili, v čem si jsou dané objekty či jevy podobné a nedocházeli ke špatným závěrům (Aubusson et al., 2006). Co se týká analogie propojené s představou dimenzí, autoři představují úspěch použití dvojrozměrných modelů ke zlepšení představ žáků v oblasti trojrozměrných molekulárních struktur v hodinách chemie (Aubusson et al., 2006, s. 120). Autoři také zdůrazňují, že analogie jsou

[11]V originále *Metaphor and Analogy in Science Education.*

pro žáky zajímavé a motivující, pokud učitel představuje podobnost na něčem, co žáci dobře znají, v druhém případě by mohla být analogie pro žáky nedůležitá, až frustrující (Aubusson et al., 2006, s. 52).

Na téma použití analogie v matematice píše také Polya, který v knize *Matematické objevy*[12] představuje použití metafory a hledání podobností k řešení náročnějších úloh (Polya, 1981, část 7.1.). Polya píše: „Objevování řešení je hledání spojitosti mezi původně oddělenými věcmi či nápady (věcmi, které máme a věcmi, které chceme)“ (Polya, 1981, s. 2). Popisuje zde propojení něčeho známého s něčím, co se snažíme poznat/čemu se snažíme porozumět. Tuto metodu zároveň ukazuje na úlohách, kde za pomoci této podobnosti řeší stereometrické úlohy (Polya, 1981, s. 2).

Přímo k pojmenování analogie se Polya dostává ve své knize *Matematika a přijatelné odůvodňování*[13], kde popisuje, že „dva systémy jsou analogické, pokud si odpovídají v jasně definovaných vztazích svých daných částí“ (Polya, 1954, s. 13). U tohoto popisu udává také příklad, že trojúhelník je analogický s čtyřstěnem. Je zde tedy také představena myšlenka *analogických matematických objektů* různých dimenzí.

Na základě představených publikací je zřejmé, že analogie má v hodinách matematiky své místo. A to jak při objevování nových myšlenek, při pochopení nového tématu, tak při hledání řešení úloh.

1.3.3 Literatura v hodinách matematiky

Literatura[14] a matematika se mohou zdát jako dvě docela vzdálené disciplíny. Jak ale upozorňuje Sriraman, „matematika a literatura mají jeden aspekt společný, konkrétně se jedná o kritické myšlení, proces vytváření objektivně platných závěrů“(Sriraman, 2003, s. 26). Ve svém článku představuje výukový experiment, ve kterém v průběhu čtyř týdnu začlenil knihu *Plochozemě* do výuky algebry pro začátečníky (žáky ve věku třinácti a čtrnácti let) (Sriraman, 2003). Autor se tímto experimentem mimo jiné snažil odpovědět na otázku,

[12] V originále *Mathematical Discovery*.
[13] V originále *Mathematics and Plausible Reasoning*.
[14] Termínem „literatura“ je myšlena beletrie.

zda může literatura sloužit i k „představení nových matematických myšlenek“ (Sriraman, 2003, s. 26). Ve svém kurzu narazil na několik zajímavých témat, kterými jsou například limity, polygony, společnost nebo například právě dimenze. Podobně jako praktická část práce ukazuje, Sriramanovi žáci se pomocí románu *Plochozemě* seznamovali s existencí čtvrté dimenze a vztahy mezi *analogicky matematickými objekty*. Žáci se pod vedením Sriramana dostali dokonce nejen k samotné čtvrté dimenzi, ale i k fraktálům a „necelým“ dimenzím. Na závěr svého článku Sriraman píše: „Studenti odůvodňovali analogií, i jejich představivostí. Myšlenky z románu *Plochozemě* také představily žákům některé pokročilé matematické koncepty, jako jsou například dimenze“ (Sriraman, 2003, s.30). Sriraman s využitím literatury v hodinách matematiky pokračoval i v následujícím roce, jak představuje ve svém dalším článku „Matematika a literatura (pokračování)“[15] (Sriraman, 2004). Tam zároveň zmiňuje, že se kurzem zvedla popularita matematiky a několik žáků se rozhodlo s matematikou dále pokračovat[16] (Sriraman, 2004).

Další, kdo se rozhodl využít literaturu ve výuce matematiky je Alex Kasman, který v rámci jednoho předmětu na vysoké škole propojil čtení literárních děl s diskuzí nad matematickými koncepty, které díla provází (Kasman, 2003). Standardní lekci popisoval tak, že na začátku studenty rozmluvil pomocí shrnutí děje díla, v další části hodiny pak začala diskuze na dané matematické téma. Kasman popisuje pro něj těžší situace, kdy oproti jeho klasickým hodinám zde nebylo vždy jasné, které myšlenky jsou správné a které nikoli. Ve svém článku mimo jiné uvádí, že díky tomuto propojení četby s matematikou si několik studentů uvědomilo, že matematika je pro matematiky krásná, a ne jen užitečná (Kasman, 2003, s. 10). Jako náročné vidí volbu děl, které v kurzu četli. Popisuje, že některá díla byla z hlediska matematiky pro pár studentů náročná, a tudíž frustrující. Na závěr však vyzývá, ať i ostatní školy začlení tento kurz (nebo jemu podobný) do výuky, jelikož se domnívá, že použití literatury dokáže obohatit výuku matematiky tak, jak to tradiční kurzy nedovedou (Kasman, 2003, s. 14).

[15] V originále „Mathematics and Literature (the sequel).“

[16] Někteří žáci se zúčastnili matematického tábora a několik se začalo zamýšlet nad kariérou propojenou s matematikou.

Jak vyplývá z právě zmíněných článků, propojení literatury s matematikou nabízí několik zajímavých a užitečných aspektů. Žáci jsou nenásilnou formou nuceni ke kritickému myšlení, přemýšlí nad novými matematickými koncepty, objevují krásu matematiky, sami nachází propojení matematiky s reálným světem, a hlavně, jsou motivováni k dalšímu studiu matematiky.

1.3.4 Čtvrtá dimenze v hodinách matematiky

Jak bylo zmíněno v podkapitole představující RVP G, se čtvrtou dimenzí se žáci nemusí v hodinách matematiky dostat do kontaktu. V zahraničních zdrojích se objevuje článek Snezany Lawrence s názvem „Historie čtvrté dimenze: Způsob upoutání žáků na druhém stupni základní školy“[17]. V tomto článku Lawrence popisuje historický přehled čtvrté dimenze a nabízí, jak by se toto neobvyklé téma dalo zapojit do hodin matematiky (Lawrence, 2015). Článek uvádí také kapitolu, kde představuje právě román *Plochozemě* a zamyšlení, která žákům román může představit. Jedná se o otázky, kterými se bude zabývat praktická část této práce, jako například: „Co kdyby [žáci] žili ve dvojrozměrném světě? Jak by viděli kamaráda sedícího vedle nich? Co kdyby žili ve čtyřrozměrném světě? Jak by oni a jejich kamarádi vypadali?“ (Lawrence, 2015, s. 1849). Lawrence zde zapojuje jak použití čtvrté dimenze v hodinách matematiky, tak použití analogie a literatury, tak jak bylo představeno v předchozích částech této práce. Článek se dále zamýšlí nad tím, že by tento nový přístup k výuce mohl pomoct žákům, kteří nemají tak dobrý vztah k matematice, i žákům, kteří v ní naopak mají oblibu. A to hlavně právě díky představení složitějších matematických otázek o „povaze prostoru a času, kterými byli matematici v minulosti tak okouzleni“ (Lawrence, 2015, s. 1852).

[17] V originále „The history of the fourth dimension: A way of engaging pupils in secondary classrooms.“

1.4 Teorie generických modelů

Tato podkapitola se zabývá teorií představenou profesorem Hejným, která popisuje „proces zrození a budování matematického poznatku“ (Hejný, 2004, s. 27). Jedná se o teorii generických modelů. Popis této teorie vychází z publikací *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (Hejný, 2004) a *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně* (Hejný, 2014).

Teorie generických modelů rozděluje poznávací procesy žáků do pěti fází, kterými jsou: motivace, izolované modely, generický model, abstraktní poznatek a krystalizace, které doprovází dva kognitivní posuny, které Hejný nazývá „zdvihy“ (Hejný, 2014, s. 40).

První hladinou „mechanizmu nabývání (matematického) poznání“ (Hejný, 2004, s. 27) je motivace. Tato fáze hraje klíčovou roli v žákově učení. Jak píše Hejný, žák, „který má vnitřní potřebu poznávat, poznává intenzivněji, hlouběji a komplexněji než ten, který je k poznávání nucen“ (Hejný, 2014, s. 42). V rámci praktické části práce žáci budou odpovídat na otázky, které by je mohly motivovat k intenzivnějšímu dalšímu poznávání.

Druhou fází teorie generických modelů jsou izolované modely, které Hejný popisuje jako „konkrétní případ příští znalosti“ (Hejný, 2014, s. 47). V této fázi je důležité, aby se objevilo velké množství různých izolovaných modelů, aby žákovo poznání bylo co nejpevnější. Nejde zde však jen o množství daných modelů, ale i o jejich roli. Aby byl proces poznání co nejzdařilejší, je potřeba do této fáze zahrnout modely překvapivé, zdánlivé a ne-modely. Překvapivé modely jsou objekty, které bychom za daný pojem na první pohled nepovažovali, ale ve skutečnosti jimi jsou. Zdánlivé modely naopak modelem daného objektu nejsou, ale mohou se tak zdát. Ne-model je pak „takový jev, který ilustruje komplement zkoumaného objektu“ (Hejný, 2004, s. 28).

Jako další fází poznávacího procesu je generický model, ke kterému žák dojde pomocí prvního zdvihu, kterým je zobecnění izolovaných modelů představených v předchozí fázi. Tento proces je často doprovázen AHA-efektem, během kterého žák náhle nahlédne do podstaty daného objektu. Generický model je „jádrem skutečného poznání“ (Hejný, 2014, s. 51), jak už vypovídá název samotné teorie. Jedná se o prototyp „buď všech, nebo jisté skupiny separovaných modelů“ (Hejný, 2004, s. 28). Jak popisuje Hejný, je možné, že si žák vytvoří více generických modelů, pak je ale důležité „jejich vzájemné uspořádání“ (Hejný, 2004, s. 28).

Předposlední fází je takzvané abstraktní poznání. K němu se žák dostane pomocí druhého kognitivního posunu, kterým je právě abstrakční zdvih. V této fázi je soubor izolovaných a generických modelů „restrukturován a nový vhled má abstraktnější charakter - je často provázen symbolickým záznamem, který novou strukturu reprezentuje“ (Hejný, 2004, s. 28).

Pátou fází je hladina krystalizace. Jedná se etapu, kde se nové poznání propojuje s předchozími vědomostmi. Tato fáze je poslední a obvykle se jedná o dlouhodobý proces.

Teorie generických modelů umožňuje nahlížet na různé fáze poznávacích procesů žáků, diagnostikovat jejich odpovědi a úroveň poznání a s těmito informacemi pak počítat u plánování výuky nebo výukových experimentů. Krátké trvání experimentu v této práci a neznalost žáků vylučuje možnost s jasností spatřit a pojmenovat posun ve fázích poznávacího procesu. Při popisu výsledků však bude tato teorie brána v potaz při analýze možné dosavadní dosažené fáze žáků v rámci témat jako jsou dimenze a geometrické objekty.

1.5 Model geometrického myšlení

V této podkapitole bude představen model geometrického myšlení, publikovaný manželi van Hiele (1986). Tento model je rozdělen do pěti fází geometrického myšlení. Popis modelu bude vycházet z knihy *Geometrie a prostorové uvažování*[18] (Clements & Battista, 1992, s. 426-428).

První fáze je *vizuální*. Na této úrovni žáci rozpoznávají tvary na základě vzhledu. Nejsou zde důležité vlastnosti daných objektů, jde pouze o to, jestli daná věc jako objekt vypadá. V okamžiku, kdy si žáci začínají uvědomovat charakteristické vlastnosti, dostávají se do další fáze.

Druhá úroveň je *popisná/analytická*. Žáci v této fázi rozpoznávají dané tvary na zá-

[18] V originále *Geometry and Spatial Reasoning*.

kladě vlastností. Nekategorizují útvary na základě vzhledu, ale na základě jejich typických charakteristik.

V rámci třetí fáze, která je *abstraktní/vztahová*, žáci zvládají formulovat abstraktní definice, jsou schopni rozlišit podstatné vlastnosti k definování těles a chápou, a někdy i sami zdůvodňují, tvrzení v geometrii. V této fázi také dochází k potřebě organizovat objekty do tříd na základě společných vlastností.

Čtvrtá fáze je *formální dedukce*. Žáci jsou v této fázi schopni tvořit hypotézy, dokazovat tvrzení, či rozlišovat mezi definicemi, axiomy a větami. Na této úrovni si žáci všímají vztahů mezi vlastnostmi tříd různých objektů.

Poslední fází je fáze *rigorózní*. Na této páté úrovni jsou žáci schopni přesně matematicky argumentovat. Zvládají poznávat geometrii bez její vizuální reprezentace a jsou schopni odůvodňovat pouze na základě geometrických tvrzení jako jsou axiomy, definice a matematické věty. Produktem jejich úvah je zavedení, zpracování a porovnání axiomatických systémů v geometrii.

Analýza odpovědí v rámci praktické části této práce bude částečně probíhat na základě tohoto modelu geometrického myšlení.

1.6 Naše limitace s představou čtvrté dimenze

Tato diplomová práce nese název *Román Plochozemě a žákovo uchopení čtvrté dimenze*. Důležitá je zde volba slova „uchopení“ místo častěji používaného slova „představa.“ Naráží se totiž na problém, jestli je vůbec možné si čtvrtý rozměr vizuálně představit. K této problematice budou zmíněny dva vědecké články. První z roku 2020, jehož autory jsou Haluk Ogmen, Kazuhisa Shibata a Arash Yazdanbakhsh, který představuje dosavadní studie týkající se právě představy čtvrté dimenze (Ogmen et al., 2020). Druhý vyšel v roce 2023, jeho autory jsou Dongcheng He, Dat-Thanh Nguyen, Haluk Ogmen, Shigeaki Nishina a Arash Yazdanbakhsh. Jedná se o výzkum, kde autoři zkoumají schopnost mozku adaptovat se na hyperprostory (He et al., 2023).

V prvním ze dvou zmíněných článků autoři shrnují objevy čtyř výzkumů[19] a hodnotí problémy, se kterými se studie musí popasovat.

Hlavní otázka, která článek provází, je: „zda je náš mozek neodmyslitelně limitovaný na trojrozměrnou představu okolí, protože žijeme ve trojrozměrném světě, nebo zda má schopnost si představit libovolné dimenze“ (Ogmen et al., 2020, s.2). Každá práce, kterou autoři rozebírají, se zaměřuje na jiný aspekt dané problematiky. Dohromady studie ukázaly, že lidé, kteří se jejich výzkumu účastnili, jsou schopni čtyřrozměrného prostorového uvažování, zvládnou určit vzdálenosti a orientaci čtyřrozměrných těles, dokáží odhadnout vlastnosti těchto těles (jako například „hyper-objem“) a jsou schopni naučit se reprezentaci čtyřrozměrného prostoru.

Tyto výsledky však nelze analyzovat jako schopnost představy čtvrté dimenze, jelikož se naráží na problém projekce. Při tvorbě trojrozměrné představy světa, se náš mozek opírá o několik vjemů, které mu pomáhají vytvořit si přesný obrázek toho, co vidíme. Když si ale budeme chtít vytvořit představu čtvrtého rozměru, narazíme na problém, jelikož nemáme moc dalších indícií, které by nám rozklíčovaly daný typ projekce a nemáme tedy celý obrázek daného hyper-tělesa (Ogmen et al., 2020).

Další představené problémy zahrnují nutnost pečlivého zvážení korelace a kauzality, nastavení motivace a úroveň poskytované zpětné vazby, výběr výzkumného vzorku a vyhodnocení, zda se opravdu jednalo o zlepšení představy čtvrté dimenze. Tento závěrečný problém s vyhodnocením hraje velkou roli, jelikož zatím není jasné, jak ověřit, že zlepšení jejich zaznamenaných výsledků v orientaci ve čtvrté dimenzi opravdu souvisí s představou čtvrté dimenze. Je totiž možné, že se lidé naučili pouze pracovat s projekcí ve třetí, popřípadě druhé, dimenzi (Ogmen et al., 2020). Autoři na závěr nabízí, že podobně jako zkoumání 3D prostorové představivosti, se mohou studie ve svých závěrech opírat o výsledky a změny v magnetické rezonanci zkoumaných lidí, které by mohly objasnit, zda se opravdu dá mluvit, o 4D prostorové představivosti.

[19] Jedná se o tyto konkrétní výzkumy: „Four-dimensional spatial reasoning in humans“ (Aflalo & Graziano, 2008), „Human four-dimensional spatial intuition in virtual reality“ (Ambinder et al., 2009), „Human four-dimensional spatial judgments of hyper-volume“ (Wang, 2014) a „Learning 4-D spatial representations through perceptual experience with hypercubes“ (Miwa et al., 2017).

Druhý článek, jehož autoři jsou výše zmínění Dongcheng He, Dat-Thanh Nguyen, Haluk Ogmen, Shigeaki Nishna a Arash Yazdanbakhsh, představuje experiment, který se snaží ukázat, jestli jsou lidé schopni u čtyřrozměrných těles rozlišit mezi pohybem, který zachovává tvar a velikost těles a pohybem, který naopak tyto vlastnosti nezachovává. Tento experiment provádí za pomoci virtuální reality v trojrozměrném prostoru (He et al., 2023).

Výsledky experimentu ukazují, že lidé jsou schopni o čtyřrozměrných tělesech rozhodovat srovnatelně jako u těles trojrozměrných. Vzhledem k problému, který byl zmíněný už v předchozím článku, autoři v závěru nemluví o schopnosti 4D představy, ale o „$3\frac{1}{2}$D představy“ (He et al., 2023, s. 11). Obešli tím tak nejasnost týkající se zařazení dané schopnosti.

Co se týče uchopení čtvrté dimenze za pomoci analogie, autoři se o ní přímo nezmiňují, objevuje se zde však při vizualizaci. Autoři musí čtvrtou dimenzi v experimentech lidem nějak graficky reprezentovat, a dát tak do souvislostí dvě podobné situace a jevy, které čtvrtou dimenzi pomocí analogie znázorní.

Dle výše zmíněných zdrojů je patrné, že učinit jakékoli závěry o představování čtvrté dimenze je velmi složité. V rámci praktické části této práce proto není vyhodnocováno, zda si žáci umí čtvrtou dimenzi „představit,“ bude však důležité, jestli chápou analogii mezi ní a jejími grafickými reprezentanty. A také, jestli jsou schopni na základě této analogie popsat další vlastnosti čtvrté dimenze.

Kapitola 2

Praktická část

Tato část práce se věnuje experimentu, zaměřenému na vliv čtení ukázky z románu *Plochozemě* na žákovo „uchopení“ čtvrté dimenze.

2.1 Metodologie

K dosažení cíle této diplomové práce byl zvolen kvalitativní výzkum, a to konkrétně kolektivní případové studie, která je v knize *Kvalitativní výzkum: Základní metody a aplikace* popsána jako „hloubkové zkoumání více instrumentálních případů“ (Hendl, 2005, s. 107).

Výzkum bude členěn do několika částí, v první části budou položeny výzkumné otázky, ve druhé části bude dle těchto otázek vytvořen pracovní list, který následně projde pilotním testováním a na základě získaných údajů potřebnými úpravami. Dále bude pracovní list zadán žákům šestiletého gymnázia a po vyplnění testu část žáků dostane ukázku z románu *Plochozemě*, na jejíž četbu budou mít týden. Po uplynulém týdnu se žákům zadá skoro identický test znova. Analýza a vyhodnocení výzkumných otázek bude probíhat na základě porovnání jednotlivých odpovědí v pracovních listech. Hlavní důraz bude kladen na porovnání rozdílu v odpovědích daných jednotlivců a rozdílů změn mezi žáky, kteří ukázku přečetli a těmi, kteří ne.

2.1.1 Výzkumné otázky

Plánovaný experiment bude sloužit k zodpovězení následujících výzkumných otázek:

1. (a) ***Změní se žákovo uchopení čtvrté dimenze po přečtení ukázky z románu Plochozemě?***

   (b) *Dojde ke změně žákova uchopení čtvrté dimenze pouze na základě pracovního listu?*

2. *Vzbudí pracovní list v žácích zájem si vyhledat další informace o čtvrté dimenzi?*

3. *K jakým úvahám ohledně čtvrté dimenze jsou vybraní žáci schopni dojít?*

4. (a) *Změní se žákovo uchopení druhé a třetí dimenze po přečtení ukázky z románu Plochozemě?*

   (b) *Dojde ke změně žákova uchopení druhé a třetí dimenze pouze na základě pracovního listu?*

První otázka 1. (a) se týká přímo hlavního cíle této diplomové práce, a tím je analyzovat, zda vybraní žáci jsou schopni zlepšit své uchopení čtvrté dimenze na základě dané četby. Je dobré si předem říct, co je myšleno výrazem „uchopení," o kterém se krátce zmiňuje část práce 1.6, týkající se naší limitace s představou čtvrté dimenze. Slovo „uchopit" v této práci zahrnuje nejenom, zda si žáci čtvrtou dimenzi umí nějak vizualizovat, ale souvisí také se schopnostmi přemýšlet nad možnostmi čtvrté dimenze, rozmyslet si vlastnosti čtyřrozměrných těles a zvládnout analogii přechodu mezi dimenzemi, která jim umožní se v myšlenkách více zorientovat. Pro zodpovězení této otázky tedy nestačí pouze aby žák nakreslil „obrázek" čtvrté dimenze, ale důležité je také analyzovat úvahy a vlastnosti, které žáci v rámci čtvrté dimenze objeví a popíšou. Otázka 1. (b) s první otázkou velmi souvisí, zde bude cílem odpovědět, zda žákům nahlédnutí do úvah o čtvrté dimenzi, představených v první pracovním listu, a následný týden, kdy nad tématem mohou přemýšlet a informace si dohledat, pomůže k lepšímu uchopení tématu. Zároveň bude důležité jak se odpovědi na otázky 1. (a) a (b) budou lišit.

Druhá otázka naráží na první fázi teorie generických modelů, kterou je motivace. Konkrétně se studie pokusí odpovědět na to, zda žáci byli pracovním listem motivovaní zjistit o daném tématu více informací.

Zaměření třetí výzkumné otázky směřuje na úroveň geometrického myšlení žáků. Konkrétně bude pozorováno, k jak složitým úvahám jsou žáci schopni se ve svých odpovědích dostat, a zda využijí analogického myšlení při tvorbě hypotéz. Budou sledovány žákovské úvahy ohledně druhé a třetí dimenze a zvládnutí analogie, která s dimenzí souvisí.

Poslední 4. otázka je, stejně jako první, rozdělaná na dvě části. V odpovědích žáků budou pozorovány rozdíly, které se vyskytnou mezi odpověďmi na první a druhý pracovní list.

Odpovědi na výzkumné otázky budou vycházet z detailní analýzy odpovědí žáků na první a druhý pracovní list, na jehož tvorbu se zaměří následující část práce.

2.2 Příprava pracovního listu a pilotní testování

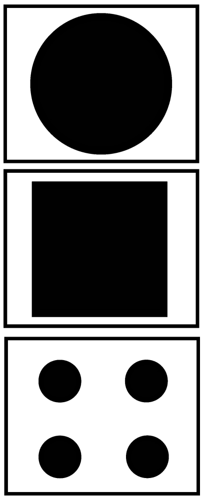
Při přípravě pracovního listu je nutné brát ohled na předem položené výzkumné otázky a na úroveň žáků v matematice. Úlohy v pracovním listě nesmějí být moc těžké, aby žáci neztráceli motivaci, která, jak bylo popsáno v podkapitole 1.4, zabývající se teorií generických modelů, je předpokladem k poznávacímu procesu. Zároveň ale musí být úlohy dostatečně náročné, aby byl prostor pro zlepšení a následnou analýzu změn.

Při snaze splnit tyto podmínky byl sestaven následující test.

2.2.1 Otázky z pilotní verze pracovního listu

1. Setkali jste se už někdy s představou čtvrté dimenze?
   ANO x NE (Zakroužkujte)
   Pokud ano, stručně napište kde/při jaké příležitosti:
2. Ke každému pojmu zkuste napsat, kolika rozměrný (dimenzionální) je to útvar/objekt:
   - bod, přímka, čtverec, kruh, úsečka, člověk, krychle, trojúhelník, papír, stůl, monitor a koule

3. Představte si trojrozměrný objekt a jeho řez rovinou (průnik objektu s rovinou). Napište, jaké 3D objekty by mohly mít tyto řezy: (V každém rámečku je jeden řez.)



4. Zkuste nakreslit různé rovinné řezy kužele (průnik kužele s rovinou).
5. Zkuste načrtnout svou představu čtverce, krychle a čtyřrozměrné krychle (hyperkrychle/teseraktu):
6. Napište, co si myslíte o čtyřrozměrné krychli. Kolik bude mít vrcholů, hran, stěn, nadstěn... Napadnou vás nějaké další vlastnosti, které může mít? Napište jaké.
7. Co by se změnilo, kdybychom byli dvojrozměrné bytosti žijící ve dvojrozměrném světě? (Zkuste popsat.)
8. Představte si, že žijete ve dvojrozměrném světě, nakreslete, jak byste viděli svého kamaráda:
9. Představte si, že nás pozoruje čtyřrozměrná bytost. Jaké rozdíly by spatřila mezi naším a čtyřrozměrným světem? (Zkuste popsat.)

První otázku bylo důležité zahrnout, jelikož si čtvrtá dimenze (jak už bylo diskutováno v kapitole 1.1 o historii) našla cestu i k široké veřejnosti a je velmi pravděpodobné, že alespoň někteří žáci se s představou[1] čtvrté dimenze setkali, a to ať už na internetu v rámci populárně naučných videí nebo v seriálech a filmech. Pokud tedy žáci odpoví

[1] Jak už bylo zmíněno v části 1.6 této práce, je slovní spojení „představa čtvrté dimenze" mírně zavádějící. Zvoleno zde bylo ovšem proto, že je běžně používané a lze tak předpokládat, že žáky nijak nepřekvapí.

kladně, můžeme předpokládat, že na některé otázky budou odpovídat zprostředkovanou formou (například na otázku číslo pět).

Druhá otázka je zaměřená na charakterizaci útvarů/objektů pomocí rozměrů. Tato otázka slouží k detekci toho, jak žáci vnímají dimenzi a její vlastnosti. Neboli, v jaké jsou fázi poznávacího procesu, co se týká pojmu dimenze, a jaká je jejich úroveň geometrického myšlení, konkrétně, zda dosáhli *abstraktní* fáze a jsou schopni organizovat dané objekty do tříd na základě společných vlastností. Očekávané odpovědi typu přímka, čtverec a krychle se očekává, že budou pro žáky jednoduché k určení. Naopak problém by mohl dělat například bod, kdy pro žáky možná nebude dávat smysl nulový rozměr. Stejně tak papír a monitor, které mohou na žáky působit dvojrozměrně.

Třetí otázka směřuje na zobrazení trojrozměrných objektů do roviny pomocí řezů těles. Tato úloha slouží ke třem různým cílům. Za prvé ke snaze zjistit, jak žáci ovládají představu řezů. Za druhé, jestli jsou schopni představit si těleso, které má řez, který není spojitý (třetí řez) a za třetí, tato úloha slouží i jako jakási propedeutika k zacházení s představou a uchopením čtvrté dimenze, jelikož ukazuje možnost pozorovat tělesa vyšší dimenze pomocí jeho řezů v dimenzi nižší. Podobný pohled na problematiku byl představen už v kapitole 1.1 historie, kde byl zmíněn autor Robbin a jeho dvě možnosti uchopení čtvrté dimenze (Robbin, 2006).

Čtvrtá úloha naváže na třetí a bude po žácích chtít, aby nakreslili různé řezy kužele rovinou. Je zde snaha o to, aby žáci ukázali, že tyto řezy mohou mít různé tvary a velikosti, a aby si uvědomili, že i když má těleso různé řezy, patří stále k jednomu tělesu. Kdyby žáci na tuto otázku neodpovídali správně, mohl by to být ukazatel, že tuto techniku (ještě) neovládají.

Pátá a šestá otázka se konečně dostávají k samotné čtvrté dimenzi. Žáci mají za úkol se k čtyřrozměrné krychli dostat pomocí analogie, konkrétně za pomoci *analogických matematických objektů*, kdy první kreslí vizualizaci čtverce a krychle, které by v tuto dobu svého studia měli mít už pořádně zažité. Následně mají za úkol nakreslit teserakt, pokud se s jeho vizualizací žáci nesetkali, lze předpokládat, že pro ně bude velmi těžké (ne-li nemožné) teserakt nakreslit. Na druhou stranu, je možné, že když žáci nakreslí čtverec a krychli, zkusí se podobným způsobem dostat i ke čtyřrozměrné krychli. A to hlavně po samotné četbě, kde se s analogií setkají podrobněji. Šestá otázka je už velmi náročná a pravděpodobně se k její odpovědi dostane jen pár žáků. V této otázce žáci mohou projevit fázi *formální dedukce*, kdy budou tvořit vlastní tvrzení a všímat si vztahů mezi třídami objektů. Je to také jedna z hlavních otázek, u které bude očekávaná změna odpovědi po četbě ukázky z románu *Plochozemě*, a to proto, že v ukázce žáci nahlédnou mezi *analogické matematické objekty* jako jsou kruh a koule, nebo čtverec a krychle. Bude jim také nastíněna možnost i dimenzí vyšších, které s sebou nesou další *analogické matematické objekty*, jako je například teserakt.

Sedmá otázka žáky přivede k zamyšlení se nad fiktivním světem ve druhé dimenzi. Tato otázka jednak naráží na samotnou četbu, zároveň ale nabízí zamyšlení mimo geometrické tvary na které jsou žáci zvyklí v hodinách matematiky a donutí žáky přemýšlet nad našim světem a jeho pravidly. Analýza odpovědí na tuto otázku (a rozdílů mezi nimi) může pomoct při zodpovězení výzkumných otázek 4. (a) a (b), jelikož naráží na schopnost přemýšlet nad světem ve druhé dimenzi i nad analogií mezi dvojrozměrným a trojrozměrným světem.

Osmá otázka se dostává k pochopení toho, jak funguje analogie a vnímání prostoru. Bude zajímavé pozorovat, zda žákům „dojde," že by v dvojrozměrném světě viděli svého kamaráda na základě analogie pouze jako úsečku, nebo jestli pod otázku nakreslí svého kamaráda dvojrozměrně. Zároveň lze očekávat, že všichni kdo ukázku budou číst, nakonec nakreslí vodorovnou úsečku (tak jak je popsáno v knize). U žáků, kteří ukázku číst nebudou, bude pozorováno, zda dojde k nějakému posunu v rámci poznávacího procesu, i když nebudou ovlivněni četbou.

Na závěr, poslední otázka se dostává nejdál. Propojuje analogii mezi prostory, čtvrtou dimenzí a fantazií toho, jak by daný svět fungoval. Dá se očekávat, že na závěr by tato otázka (a její odpovědi) měli nejvíce poukázat na to, jestli četba ukázky z románu *Plochozemě* žákům pomohla k lepšímu uchopení čtvrté dimenze.

2.2.2 Pilotní testování

V rámci hlavního testování byla vybrána skupina pátých ročníků šestiletého gymnázia. Konkrétně jde o žáky docházející na seminář deskriptivní geometrie. K pilotnímu testování byl vybrán kroužek nadaných dětí na matematiku ze stejného gymnázia. Pracovní list v pilotním testování nakonec vyplnil pouze jeden žák[2], který studuje na gymnáziu ve druhém ročníku. Žák má o matematiku zájem a test mu trval pouze dvacet minut. Na první otázku odpověděl, že se s představou čtvrté dimenze už setkal.

Na druhou otázku odpověděl u každého objektu správně. Nulu napsal u bodu, jedničku u úsečky a přímky, dvojku u čtverce, kruhu a trojúhelníku a trojku u papíru, člověka, stolu, krychle, monitoru a koule.

Ve třetí otázce došlo pravděpodobně ke dvěma nepochopením zadání. Šlo o řezy těles, které byly pro lepší přehlednost znázorněny v rámečku. Žák rámeček ovšem bral jako součást řezu, odpovídal tak vždy s přídavkem „v krychli." Druhé nedorozumění se objevilo ve třetím řezu, kdy žák napsal koule, elipsoidy a jehlany (vše v krychli). Místo toho, aby se snažil najít jedno těleso, které má tento řez, odpověděl stejně jako u prvního řezu, jen v množném čísle. Navzdory těmto dvěma odchylkám, žák odpovídal velmi dobře a u každého řezu uvedl až tři (správné) možnosti.

Ve čtvrté otázce měl žák zkusit nakreslit různé rovinné řezy kužele. Uvedl čtyři možnosti, a to kruh, elipsu, parabolu a hyperboly. V obrázcích zkrátka nakreslil různé kuželosečky. Řezy vypadají na první pohled správně, avšak u paraboly a hyperbol začne být jasné, že žák automaticky nakreslil kuželosečky, i když jde o řez kuželem, nikoli dvěma neukončenými kuželovými plochami.

Pátá a šestá otázka jsou pravděpodobně jedny z nejnáročnějších. Žák měl nakreslit čtverec, krychli a čtyřrozměrnou krychli, jakožto *analogické matematické objekty.* První dva útvary zvládl bez problému, u třetího ovšem nakreslil otazník a napsal nevím. Když měl napsat, co si myslí o čtyřrozměrné krychli (konkrétně kolik bude mít vrcholů, hran, stěn a nadstěn) odpověděl: „Myslím si že bude mít 16 vrcholů 8 stěn, nevím co je nadstěna. Další

[2]Na daný kroužek kvůli časovým možnostem přestalo chodit více žáků.

vlastnost by mě napadla: My vnímáme čtvrtou dimenzi jako čas, kdyby naším 3D světem pronikla 4D krychle viděli bychom pouhou krychli dokud by nezmizela." V této odpovědi se nachází několik zajímavých informací. Žák správně určil počet vrcholů, počet stěn ovšem správně neměl. I když osm stěn mít teserakt nebude, je to počet jeho nadstěn. Tento pojem žák ale nezná, nepoužil však ani princip analogie, aby se ke správné odpovědi dobral. Další zajímavost vychází z žákovy odpovědi na další vlastnosti teseraktu. Zamýšlí se nad tím, že naše vnímání čtvrté dimenze souvisí s časem, což vzhledem k historii uvažování o čtvrté dimenzi (viz 1.1) není daleko od pravdy. Tato myšlenka zároveň představuje geometrickou analogii, kde na objekty nižší dimenze je možné nahlížet jako na řezy výše dimenzionálního objektu v čase.

Sedmá otázka se ptá, co by se změnilo, kdybychom byli dvojrozměrné bytosti žijící ve dvojrozměrném světě. Žák na tuto otázku odpověděl následovně: „Vše bychom viděli na přímce (v jedné dimenzi), pokud by našim světem pronikla více než 2 rozměrná bytost viděli bychom v čase přímku měnící délku." Žákova odpověď je v souvislosti s analogií přechodu mezi dimenzemi až překvapivě správná (samozřejmě až na problém s formulací, kdy místo pojmu „úsečka" používá „přímka" a mluví o „přímce měnící délku"), a zároveň zde používá stejnou analogii jako u předchozí otázky mezi krychlí a čtvercem.

U osmé otázky si měl žák představit, že žije ve dvojrozměrném světě a měl nakreslit to, jak by viděl svého kamaráda. Žák nakreslil úsečku a napsal k ní: „můj kamarád, viděl bych ho jako přímku či úsečku."

Poslední otázka spojuje čtvrtou dimenzi a představivost/fantazii, kdy si má žák představit, že nás pozoruje čtyřrozměrná bytost. Měl napsat, jaké rozdíly by spatřila mezi našimi světy. Žák odpověděl následovně (text je přepsaný i s překlepy doslovně): „Nápodobně jako by 3D bytosti pozorovali třetí dimenzi jako čas, 4D bytosti mají čtvrtou dimenzi „hmotnou." 4D bytosti by měly čas jako „hmotnou," stejně tak jako my můžeme oproti 2D bytostem vidět objem 4D bytosti mohou vidět čas." Žák ve své odpovědi přichází se zajímavým pohledem, kde dokončuje svou představu toho, jak další rozměr funguje. Formuluje zde nápad, že čtyřrozměrné bytosti jsou schopné vidět čas.

Pilotní testování bylo prováděno na žákovi druhého ročníku šestiletého gymnázia (odpovídající devátému ročníku základní školy) v kroužku matematiky. Žák na většinu otázek odpověděl více než obdivuhodně. Jeho odpovědi ukazují, že v rámci tématu čtvrté dimenze vycházel z nějakých základů, které dle jeho odpovědí pravděpodobně souvisejí s uchopením čtvrté dimenze jakožto časoprostoru a schopnosti práce s řezy. Žák byl následně schopen tyto své vstupní znalosti na základě analogie použít a prokázat tak abstraktní porozumění pojmu čtvrtá dimenze. Co se týká jeho geometrického myšlení, prokazoval schopnost tvořit hypotézy a všímat si vztahů mezi vlastnostmi tříd různých objektů, dá se zde tedy mluvit o čtvrté fázi *formální dedukce*.

Jelikož se na matematický kroužek dostavil pouze tento zmiňovaný žák, byl pracovní list zadaný i dalším dvěma studentům učitelství matematiky, aby se vyjádřili ke správnosti a jasnosti formulací. K testu žádné připomínky neměli a jejich odpovědi nebudou v rámci práce analyzovány.

Po analýze odpovědí z pilotního testování došlo k úpravě pouze některých formulací otázek, test však vypadá skoro identicky.

2.3 Hlavní studie

Hlavní studie probíhala s žáky pátých ročníků šestiletého gymnázia (předposlední ročník střední školy), a to ve dvou skupinách semináře deskriptivní geometrie, oba vedené stejnou učitelkou. První testování probíhalo v rámci jednoho týdne, kdy zadavatelka (autorka této diplomové práce) během jednoho týdne navštívila dvě skupiny žáků a zadala jim první ze dvou pracovních listů. V první skupině (dále skupina A) bylo celkem 16 žáků. Ve druhé skupině (dále skupina B) bylo žáků 9. Po ukončení testování zhruba polovina žáků z každé skupiny dostala ukázku z románu *Plochozemě*, na kterou měli čas do dalšího týdne (vybráni byli žáci, kteří byli ochotni si ukázku přečíst). V následujícím týdnu byly semináře navštíveny znova a byl jim zadán druhý pracovní list. Ze skupiny A si ukázku nakonec přečetlo šest lidí a ze skupiny B čtyři. Nyní budou podrobně rozebrány jednotlivé části studie spolu s odpověďmi žáků.

2.3.1 První část (pracovní list před četbou)

Po provedení pilotní studie bylo pár otázek mírně pozměněno. Přepracované otázky prvního pracovního listu vypadají následovně (pozměněné části jsou vyznačeny kurzívou)[3].

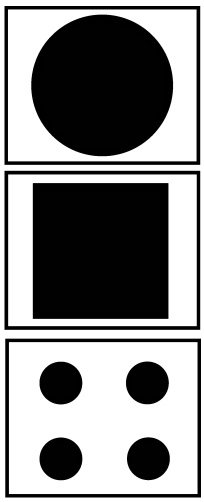
1. Setkali jste se už někdy s představou čtvrté dimenze?

   ANO x NE (Zakroužkujte)

   Pokud ano, stručně napište kde/při jaké příležitosti:

2. Ke každému pojmu zkuste napsat, kolika rozměrný (dimenzionální) je to útvar/objekt: bod, přímka, čtverec, kruh, úsečka, člověk, krychle, trojúhelník, papír, stůl, monitor, koule.

3. Představte si trojrozměrný objekt a jeho řez rovinou (průnik objektu s rovinou). Napište, jaké 3D objekty by mohly mít tyto řezy: *(V každém rámečku je řez jednoho objektu.)*



4. Zkuste nakreslit různé rovinné řezy *válce (průnik válce s rovinou).*

[3]Pracovní listy, tak jak byly zadané žákům, jsou součástí přílohy 2.4.

5. Zkuste načrtnout svou představu čtverce, krychle a čtyřrozměrné krychle (hyperkrychle/teseraktu):

6. Napište, co si myslíte o čtyřrozměrné krychli. Kolik bude mít vrcholů, hran, stěn, nadstěn... Napadnou vás nějaké další vlastnosti, které může mít? Napište jaké.

7. Co by se změnilo, kdybychom byli dvojrozměrné bytosti žijící ve dvojrozměrném světě? (Zkuste popsat.)

8. Představte si, že žijete ve dvojrozměrném světě, nakreslete, jak byste viděli svého kamaráda:

9. Představte si, že nás pozoruje čtyřrozměrná bytost. Jaké rozdíly by spatřila mezi naším a čtyřrozměrným světem? (Zkuste popsat.)

Upravené jsou dvě otázky. U otázky tři je v závorce místo „V každém rámečku je jeden řez.“ napsáno „V každém rámečku je řez jednoho objektu.“ Tato změna nastala kvůli pilotní studie, kdy žák u třetího objektu mluvil o více tělesech místo jednoho konkrétního, který by mohl mít daný řez. Další změna se objevila u otázky číslo čtyři, kde místo řezu kužele jsou nyní řezy válce. Hlavním důvodem změny byla velká spojitost s kuželosečkami, kdy žáci už mají řezy zažité a odpovědi by tedy nevypovídaly o schopnostech žáků si řezy představit, ale o tom, do jaké míry se s vizualizací už setkali. Kromě drobných gramatických korekcí už k žádné další změně pracovního listu nedošlo.

První testování se skupinou A probíhalo v odpoledních hodinách (samotné vyplňování testu začalo v 14:45). Když zadavatelka vešla do třídy, byla představena paní učitelkou, která poté odešla. Žákům byla na začátek vysvětlena náplň práce a výzkumu, kdy bylo popsáno, že je čeká pracovní list zaměřený na čtvrtou dimenzi. Následně, že bude požádáno osm z nich, aby si přečetli ukázku z románu *Plochozemě*, a pak jim bylo řečeno, že je další týden čeká skoro identický pracovní list znova. Zadavatelka žákům řekla, že test se netýká témat, které by museli znát a je možné, že na některé otázky nebudou schopni odpovědět. Poprosila je, aby se nebáli napsat i své odhady nebo nápady a ať jakékoliv myšlenky popíší.

Na test měli žáci 25 minut[4].

Po rozdání testu se všichni pustili do jeho vyplňování. Někteří žáci odevzdali před uplynulým časovým limitem. Pouze jeden žák řekl, že by možná ocenil více času, ale test i tak odevzdal v čas a s každou otázkou zodpovězenou.

Ve skupině B vše probíhalo obdobně. Testování probíhalo o den později než ve skupině A. Žáků bylo ve třídě devět a test psali od 13:47. Přestože na test měli stejně jako skupina A 25 minut, většina žáků se rozhodla vyplněný test odevzdat už kolem dvacáté minuty.

Výsledky prvního testu budou nyní podrobně rozebrány po jednotlivých otázkách. Mezi skupinami A a B nebyly zaznamenané žádné pozorovatelné rozdíly, výsledky proto budou vyhodnocovány bez ohledu na tuto skupinu.

Výsledky první části studie

Na otázku zda se žáci už setkali s představou čtvrté dimenze odpověděla většina kladně, konkrétně 19 žáků z 25 celkem. Osm z nich řeklo, že se s čtvrtou dimenzí setkali na YouTube nebo obecně na videu. Tři odpověděli, že se s představou setkali ve filmu Interstellar. Další odpovědi byly už zmíněny vždy jen jednou, zazněly místa jako: kniha, hra ve 4D, debata s tátou, přednáška nebo například sociální síť TikTok. V průběhu rozboru dalších otázek budou žáci zařazeni do dvou skupin, podle toho, zda něco o čtvrté dimenzi předem viděli (V), či nikoli (0).

Výsledky druhé otázky jsou znázorněny v Tabulce 2.1[5]. To, že bod je bezrozměrný napsalo správně pouze pět žáků (všichni ze skupiny V). Většina odpovídala, že bod má jednu dimenzi a jeden žák (V) napsal 2, 3, 4. U přímky 14 lidí napsalo, že se jedná o dvojrozměrný objekt. 11 žáků odpovědělo, že je jednorozměrný (tito také ze skupiny V). Čtverec, kruh a trojúhelník jako dvojrozměrné objekty správně zařadili všichni až na jednoho žáka (V), který napsal, že mají rozměr pouze jeden. Další větší odchylka se objevila u zařazení úsečky, kde devět lidí (ze skupiny V) odpovědělo správně, že úsečka má pouze jeden

[4] Tento časový limit byl odhadnut v rámci pilotní studie.

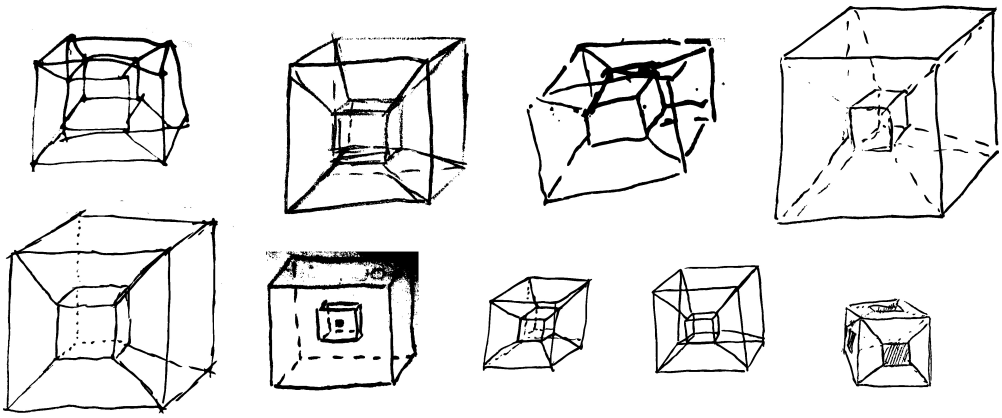
[5] Útvary, které mají celkový počet odpovědí větší než 25 jsou bod, přímka, úsečka a papír, je tomu tak proto, že byli jedním žákem zařazeny k více odpovědím.

Skupina žáků:			V					0		
Útvar/objekt	0D	1D	2D	3D	4D	0D	1D	2D	3D	4D
bod	5	12	2	1	1	0	5	1	0	0
přímka	0	11	8	1	0	0	0	6	0	0
čtverec	0	1	18	0	0	0	0	6	0	0
kruh	0	1	18	0	0	0	0	6	0	0
úsečka	0	9	10	1	0	0	0	6	0	0
člověk	0	0	0	19	0	0	0	0	6	0
krychle	0	0	0	19	0	0	0	0	6	0
trojúhelník	0	1	18	0	0	0	0	6	0	0
papír	0	0	6	16	0	0	0	1	5	0
stůl	0	0	0	19	0	0	0	0	6	0
monitor	0	0	0	19	0	0	0	0	6	0
koule	0	0	0	19	0	0	0	0	6	0

Tabulka 2.1: Pracovní list 1, Úloha 2, Odpovědi

rozměr. Všichni ostatní žáci odpověděli, že rozměry má dva. Trojrozměrné objekty žákům problém nedělaly, u slov: člověk, krychle, stůl, monitor a koule všichni napsali 3. Odpovědi se lišily pouze u papíru, kdy čtyři žáci napsali, že se jedná o dvojrozměrný útvar, tři žáci napsali k pojmu obě možnosti (2D i 3D) a zbytek napsal, že se jedná o trojrozměrné těleso. Zajímavé zamyšlení přidal žák D. (ze skupiny V), který k tělesům člověk, papír, stůl a monitor napsal: „3 ale záleží možná že třeba rychlost by mohla být 4. dimenze," přidává zde k reálným objektům časoprostorové vlastnosti, dá se tedy předpokládat, že žák dosahuje abstraktního poznání v oblasti geometrických těles, když rozlišuje reálné předměty typu stůl a monitor, od matematických modelů typu koule a krychle.

U třetí otázky měli žáci za úkol napsat trojrozměrné objekty tvořící dané řezy. Kromě jedné žačky (ze skupiny V) poskytli všichni vhodné odpovědi na první dva řezy. U prvního řezu žáci poskytovali tyto nápady: koule, kužel, válec, láhev na vodu, roura, trubka, glóbus, vejce, cylindr, kuželka, klobouk čaroděje, jehlan s nekonečno množstvím stran, palačinka, vlas, tobogán, míč, kelímek a další. U druhého řezu se pak objevovaly pojmy: krychle, válec, hranol, jehlan, kvádr, guma, deska stolu, komín, kniha ve tvaru čtverce zespoda, krabice, kostka cukru, pyramida, monitor, papír a židle. U třetího řezu žáci často odpovídali



Obrázek 2.1: Pracovní list 1, Úloha 5, Teserakt 1

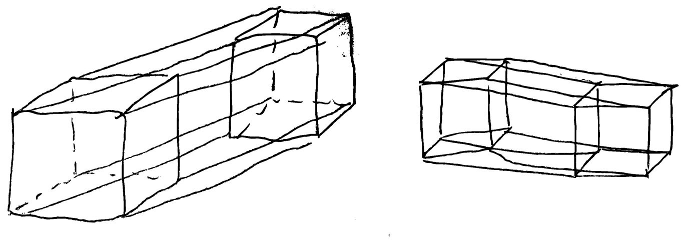
podobně jako u prvního, ale připsali, že se jedná místo jednoho tělesa o čtyři[6]. Další žáci odpověděli například: špagety, stůl, bodce, spojené provázky, imaginární pes, lego kostka, nohy Žižkovské věže, kdyby měla čtyři, a židle. Dva žáci (V) nenapsali nic a dva (V) položili otázku, zda se nejedná o nějaké to čtyřrozměrné těleso. U této otázky se neprojevil rozdíl mezi žáky, kteří se se čtvrtou dimenzí předem setkali a žáky, kteří ne.

Čtvrtá otázka vyzývala žáky, aby zkusili nakreslit různé rovinné řezy válce. 23 žáků nakreslilo kruh, 23 žáků nakreslilo rovnoběžník, 18 nakreslilo elipsu, useknutou část elipsy nakreslilo 6 žáků. Všichni žáci nakreslili alespoň dva řezy, nikdo nezakreslil úsečku a bod.

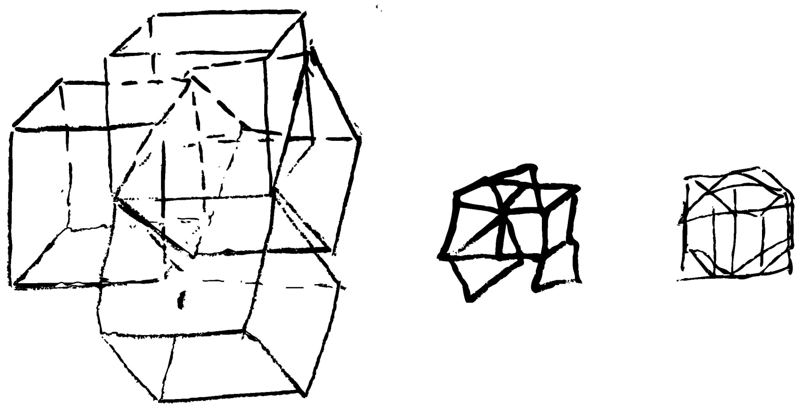
V páté úloze měli žáci nakreslit svou představu *analogických matematických objektů*, a to čtverce, krychle a čtyřrozměrné krychle, neboli teseraktu. Žádný žák neměl se čtvercem ani krychlí problém. Všichni žáci nakreslili krychli v tradičním pravém nadhledu, a to i přes to, že to jsou žáci semináře deskriptivní geometrie, odkud mají zkušenosti i s dalšími typy náhledů. Co se týká teseraktu, ukazovali se větší rozdíly mezi žáky podle předchozí zkušenosti se čtvrtou dimenzí. Devět žáků, kteří uvedli, že se se čtvrtou dimenzí už setkali, nakreslili svou představu hyperkrychle jako dvě spojené do sebe vnořené krychle (Obrázek 2.1). Dva žáci, kteří rovněž uvedli, že se s představou čtvrté dimenze už setkali, nakreslili čtyřrozměrnou krychli jako dvě spojené krychle (Obrázek 2.2).

Obě tyto možnosti znázornění teseraktu se běžně používají. Další tři žáci, kteří na-

[6]Zde se naráží na podobný problém jako u pilotního testování. Je otázka, zda šlo o nepochopení zadání, nebo žáky dané těleso nenapadlo.



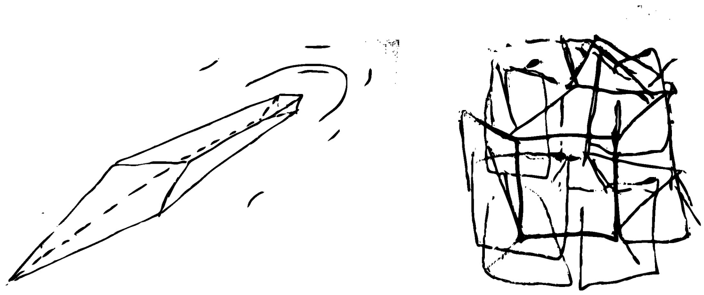
Obrázek 2.2: Pracovní list 1, Úloha 5, Teserakt 2



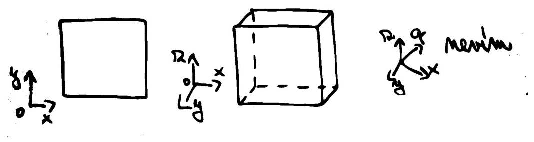
Obrázek 2.3: Pracovní list 1, Úloha 5, Teserakt 3

psali, že se se čtvrtou dimenzí už někde setkali, nakreslili svou představu teseraktu tak, jak je znázorněno na Obrázku 2.3. U každého z nich jde vidět, že vycházeli z krychle, se kterou následně nějak „manipulovali," u prvního z nich je viditelné, že se jedná o pohled, představený Stringhamem (Obrázek 1.1). Posledních pět žáků, kteří také napsali, že se se čtvrtou dimenzí už setkali, napsali, že neví, jak by teserakt nakreslili.

Ze zbývajících šesti žáků, kteří se se čtvrtou dimenzí nesetkali, dva napsali, že neví, jak bude vypadat. Jedna žačka nakreslila teserakt stejně jako krychli. Dva další žáci nakreslili svou představu jak je ukázáno na Obrázku 2.4. Poslední žáčka, která napsala, že se s představou předem nesetkala, nakreslila čtverec a krychli včetně naznačených kolmých vektorů. Teserakt následně sice nenakreslila, znázornila však vektory, které při jeho sestrojení budou hrát roli (Obrázek 2.5) je tak patrné, že vnímala, že se jedná o *analogické matematické objekty* a zaznamenala dimenzionální analogii, rozeznatelnou z objevu dalšího kolmého vektoru. Jedná se o myšlenku podobnou Grassmannově, představené v podkapi-



Obrázek 2.4: Pracovní list 1, Úloha 5, Teserakt 4



Obrázek 2.5: Pracovní list 1, Úloha 5, Teserakt 5

tole historie 1.1.

V šesté otázce pracovního listu měli žáci napsat, co za vlastnosti má čtyřrozměrná krychle. Konkrétně byli tázáni na počet vrcholů, hran, stěn, nadstěn a další vlastnosti, které by je napadly. Počet správných odpovědí je shrnutý v Tabulce 2.2. Co se týká počtu vrcholů, odpovědět se pokusilo 21 žáků. Jedenáct odpovědělo správně 16 vrcholů, z toho 10 ze skupiny V a jedna ze skupiny 0. Další odpovědi zahrnovaly 12, 62, 64 nebo nekonečno vrcholů. Šest žáků (z toho dva 0) odpovědělo, že se teserakt nijak nebude lišit od krychle, jelikož další rozměr souvisí s časem, takže se těleso nijak nezmění. Jedna žačka (0) napsala, že „je stejná jako normální 3-rozměrná, ale mohu ji cítit, slyšet, vnímat, že je někde v prostoru.“ Napsala, že si čtvrtou dimenzi spojuje s 4DX kinem, kde kromě zraku zapojuje i ostatní smysly. U této odpovědi je vhodné připomenout si upozornění, které bylo zmiňováno v podkapitole 1.3.2, a to, že by se s analogií mělo zacházet opatrně, aby si žáci nespojili dvě věci vlastnostmi, které sobě podobné nejsou. Počet 32 hran správně určilo pět žáků (z toho jedna ze skupiny 0), mezi dalšími odpověďmi se objevily čísla 24, 36, 64, 84 a 96. Teserakt má 24 stěn, což se podařilo zapsat čtyřem žákům (všichni V), další nápady byly 6, 12, 14, 36 a 48. Na závěr to, že teserakt bude mít 8 nadstěn určili dva žáci (V), další dva napsali 6 a 36. Další vlastnosti se objevovaly, jak už bylo zmíněno, se spojitostí s časem, popřípadě vnímání dalšími smysly. Jeden žák (V) napsal, že „vstupuje

	Počet správných odpovědí
Vrcholů	11 (z toho 1 ze skupiny 0)
Hran	5 (z toho 1 ze skupiny 0)
Stěn	4 (pouze skupina V)
Nadstěn	2 (pouze skupina V)

Tabulka 2.2: Pracovní list 1, Úloha 6, Správné odpovědi

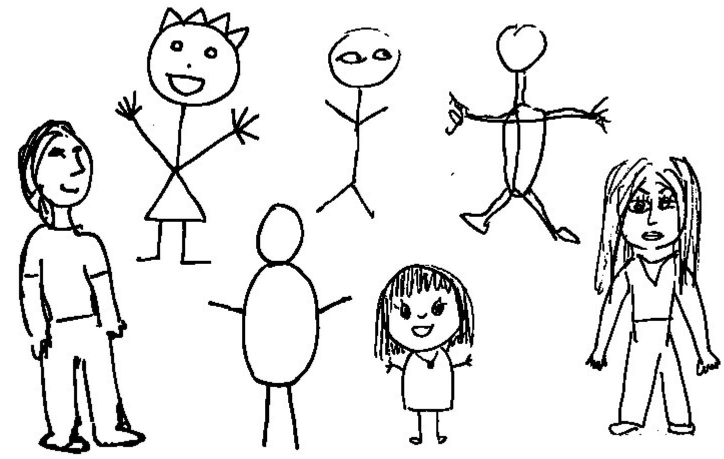
sama do sebe bez jakéhokoliv průniku." V odpovědi na tuto otázku se více rozepsal předem zmiňovaný žák D., který provedl celý výpočet. Žák popsal svůj postup následovně:

> Já jsem viděl jeden příklad s 100 dimenzionální krychlí, jejíž vrcholy byly vyjádřeny jako storozměrný vektor, takže hádám, že čtyřrozměrná krychle bude mít $2^n; n = 4 \rightarrow 16$. Hrany propojují vrcholy, které jsou vzdálené právě jednu dimenzi, což znamená každý vrchol má n sousedů $\frac{2^n \cdot n}{2} = \frac{16 \cdot 4}{2}$ hran $= 32$ hran. Stěna je komplikovanější, ale řekl bych, že jí nezvládnu. Ale ještě tady měla být jedna věc, protože stěna je u krychle nová oproti čtverci. Stěna spojuje body, které se liší o maximálně dvě dimenze, což znamená, že ve čtyřech dimenzích přibydou tvary (něco jako stěny), které mají různé maximálně tři dimenze možná. Těch by mělo být $2 \cdot 4 = 8$. A stěn by mělo být $\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 \cdot 2$ asi.

Z výpovědi žáka je možné usoudit, že jeho úroveň abstraktního myšlení bude velmi vysoká, navíc využívá analogie k vytvoření kombinatorického výpočtu, který je představený také v článku Stringhama (Stringham, 1880) (viz kapitola historie 1.1), a prokazuje tak, že došel do fáze *formální dedukce* v rámci modelu geometrického myšlení, jelikož dokáže použít vztahy mezi různými vlastnostmi těles a na základě nich provádět výpočty.

V sedmé otázce měli žáci napsat, co by se změnilo, kdybychom byli dvojrozměrné bytosti žijící ve dvojrozměrném světě. Šest žáků (z toho dva 0) se zamýšlelo nad tím, že by bylo složitější překonávat překážky, jelikož bychom je nemohli jednoduše překročit. Sedm žáků (z nich jeden 0) přidalo myšlenku, že bychom pravděpodobně viděli pouze jednorozměrně. Čtyři žáci napsali (z nich dva 0), že by byl problém s trávicí soustavou, buď že bychom nemohli existovat, nebo by příjem potravy musel fungovat jinak.

Podobný postřeh popsal už Stephen Hawking ve své knize Stručná historie času, kde



Obrázek 2.6: Pracovní list 1, Úloha 8, obrázek 2D kamaráda

poskytl obrázek psa, který byl svou trávicí soustavou rozdělen na půl (Hawking, 1998). Žáci dále komentovali omezenost našeho pohybu, pravděpodobnou změnu fyzikálních zákonů nebo například neexistenci „hloubky,“ popřípadě „výšky.“

V předposlední otázce si žáci měli představit, že žijí ve dvojrozměrném světě a měli se pokusit nakreslit, jak by viděli svého kamaráda. Hlavní zde bylo především to, jestli se zamyslí nad analogií přechodu mezi dimenzemi a zda nakreslí dvojrozměrný obrázek, nebo zda nakreslí pouhou úsečku. Patnáct žáků (z toho dva ze skupiny 0) nakreslilo úsečku vertikálně. Jeden žák nakreslil úsečku horizontálně[7]. Tři žáci (z toho dva ze skupiny 0) dokonce prokázali hlubokou znalost pojmu dimenze, když napsali, že by kamaráda neviděli nijak, jelikož nemá žádnou šířku. Tato odpověď poukazuje na pokročilou fázi poznávacího procesu, kdy žáci mají abstraktnější povědomí o pojmu dimenze a jejích vlastností. Zbývajících sedm žáků (dva z nich ze skupiny 0) nakreslilo dvojrozměrnou postavičku (Obrázek 2.6) zepředu. Postavy sice na papíře jsou dvojrozměrné, ale dle analogie přechodu mezi dimenzemi a našeho pozorování trojrozměrného světa, by je viděli jednorozměrně.

Poslední úloha po žácích chce, aby si představili, že nás pozoruje čtyřrozměrná bytost. Následně měli napsat, jaké rozdíly by spatřila mezi naším a čtyřrozměrným světem. Žáci se ve svých odpovědích poměrně liší, je ovšem možné je organizovat dle typu vhledu na

[7]Umístění/orientace úsečky závisí na tom, z jakého pohledu se na kamaráda dívá, jestli zepředu, ze strany, či z vrchu. Důraz na tento pohled je zde proto, že bude hrát roli v další části studie.

danou problematiku. Někteří žáci popisovali rozdíly na základě analogie, jiní popisovali geometrické vlastnosti a někteří se zabývali myšlenkou, že čtvrtá dimenze souvisí s časem. Některé význačné odpovědi žáků budou nyní představeny a organizovány podle toho, zda se žáci se čtvrtou dimenzí už setkali, či nikoli, a podle hlavní použité úvahy při odpovědi.

V odpovědích žáků, kteří napsali, že se se čtvrtou dimenzí nesetkali, se neobjevovaly myšlenky spojené s analogií, ani popis jiných geometrických vlastností. Výpověď související s časem se objevila pouze jedna:

- „Řekla bych, že čtyřrozměrná bytost by dokázala číst myšlenky, vědět jak se cítíme, co jsme si prožili, a co ještě zažijeme. Čtyřrozměrná bytost by čas považovala jako další jednotku jako výšku nebo délku a mohla by s ní hýbat jak chce a nic by jí v tom nezabraňovalo např. by jen tak skočila do včerejška a prošla se do příštího pondělí."

Další odpovědi žáků, kteří se se čtvrtou dimenzí nesetkali, nelze zařadit ani do jedné předem zmíněné kategorie. Žáci odpovídali například takto:

- „Chyběla by jí poslední dimenze, ale jak přesně si to představit nevím."
- „Že máme omezené vnímání."
- „Možná nějaký časový rozdíl → vůbec nevím."
- „Nějak bych je cítila, nějakou energii z nich, i když by se mě nedotýkali."

V těchto odpovědích se neobjevuje spojitost s vnímáním druhé či třetí dimenze, nelze proto mluvit o analogii. Žáci také nepředstavují zamyšlení nad konkrétními vlastnostmi čtvrté dimenze.

Odpovědi žáků, kteří se se čtvrtou dimenzí setkali budou nyní představeny ve třech kategoriích: použití analogie, popis jiných geometrických vlastností bez uvedení analogie a propojení s časem.

Odpovědi žáků, kteří použili náhled do druhé nebo třetí dimenze a použili tak ve svých myšlenkách analogii, jsou například tyto:

- „Záleží, co vlastně znamená čtvrtá dimenze. Jestli je náš svět z nekonečna dvojrozměrných je čtyřrozměrný z nekonečna našich? Asi by viděli náš svět najednou ve všech rozměrech (viděli by skutečně trojrozměrně). Viděli by najednou jak za zeď, tak to co se děje za ní."

- „Myslím, že by to bylo podobné, jako kdybychom my viděli v našem světě čtverec. My bychom se ale ve 4. dimenzi nemohli pohybovat, takže jako kdyby byl čtverec, který by se mohl pohybovat pouze v těch směrech, kam míří jeho strany."

- „Tělesa, která žijí ve 2D nevidí zakřivení geometrie jejich prostoru. Například, když vezmu $\mathbb{R}^2$ prostor a celý ho zkřivím pozitivně ve 3D, takže do koule (prázdné), tak když se v tom prostoru bude pohybovat nějaký 2D tvor, může se vrátit na stejné místo kde začal, ale sám nevidí ten prostor na rozdíl ode mě, který ho zakřivil. Podobně by 4D bytost mohla vidět zakřivení našeho vesmíru a mohl by třeba vyndávat věci ze zavřených krabic bez toho, aby je otevřel."

- „Nejspíš by na nás nahlížela podobně jako my na dvou dimenzionální prostor a objekty. Myslela by si, že jsme velmi limitovaní. Možná, že ten svět by jí připadal extrémně simplistický a jednoduchý. Snazší na navigování a orientování by náš svět shledávala."

- „Chybí změna otočení/pohledu. Vůči sobě se 2 3D postavy vidí jen v jednom samém otočení. Není možné přesně popsat 4D a neskutečně obtížné si ho vůbec představit. Je to stejné jako kdyby se snažila 2D postava pochopit náš 3D svět a naši percepci něho."

Odpovědi, které popisují některé geometrické vlastnosti bez uvedení analogie:

- „Lze vidět za stěny, které nejsou průchozí ve 3D."

- „Viděla by skrz stěny (obecně skrz všechno, třeba i orgány)."

- „Vnímala by obtížnější způsob pohybování, co by pro nás bylo 100m by mohlo být ve 4D hned vedle. Fyzikální zákony by fungovaly zcela jinak, s dimenzí navíc se zvětší zápis a výpočty v kartézském systému souřadnic. Gravitace a aerodynamika by fungovala u nás až příliš jednoduše pro ně.“

A nakonec, odpovědi, které zahrnují do úvah o čtvrté dimenzi čas.

- „Myslím, že tím čtvrtým rozměrem může být třeba čas, takže by nás bytost viděla zároveň jako malé dítě i jako dospěláka nebo kdyby třeba sledovala určité místo, třeba když sedím na lavičce, tak osoba by viděla mě, ale zároveň i člověka, který na té lavičce seděl o dvě hodiny dříve.“
- „Nechápala by, proč nevyužíváme čtvrtého rozměru. Myslím, že 4. rozměr je čas?? Takže by mohla pozorovat nás v mnoha různých okamžicích najednou.“

Odpovědi žáků ukazují, že jejich představa fungování čtvrté dimenze většinou dodržuje princip analogie. Někteří žáci ukazují pochopení náročnějších konceptů spojených se čtvrtou dimenzí, jako například: zakřivení prostoru, vzdálenosti, schopnost „vidět přes stěnu.“ Je zajímavá také představa času jako dalšího rozměru a spolu s ní schopnost čtyřrozměrné bytosti pohybovat se jak mezi dvěma místy, tak mezi dvěma časy. (Podobně jak tomu je v H. G. Wellsově knize *Stroj času* (Wells, 1895).)

Vyhodnocení první části studie

V rámci představených odpovědí na první pracovní list budou výsledky shrnuty a analyzovány.

Z 25 testovaných žáků pouhých šest napsalo, že se s „představou“ čtvrté dimenze předem nesetkali. Vzhledem k absenci tohoto tématu v RVP G (viz 1.3.2), je tento poměr překvapivý. Další otázky byly představeny na základě zařazení žáků do skupin podle odpovědi na tuto první otázku. Je však pravděpodobné, že to, že se žáci se čtvrtou dimenzí setkali má spojitost s jejich zájmem o matematiku, a tak možnou větší znalostí některých témat. Je proto ke zvážení přesný důvod některých rozdílů mezi skupinami V a 0.

Druhá otázka se týkala přiřazení dimenze k objektům. V rámci této otázky se objevovaly velké rozdíly mezi žáky ze skupiny V a 0. Žádný žák, který se se čtvrtou dimenzí předem nesetkal, nezařadil správně bod, přímku a úsečku. Je možné se na základě těchto výsledků zamyslet, zda pojem „dimenze“ není pro žáky příliš intuitivní záležitostí. Žáci (až na výjimky) zvládli dobře zařadit dvojrozměrné a trojrozměrné útvary, které jsou ve výuce organizované podle geometrie v rovině a v prostoru, působí to tedy, že žáci nemají problém s konkrétními tělesy, ale s konceptem dimenze jako takové.

U řezů (tedy u třetí a čtvrté otázky), nelze spatřit rozdíl mezi žáky V a žáky 0. Žáci v rámci třetí otázky odpovídali podle předem stanovených očekávání, kdy někteří těleso u třetího řezu vymysleli a někteří ho obešli pomocí prvního řezu. U řezů válce žáci ukazovali, že jsou v rámci geometrického myšlení alespoň ve fázi *abstraktní/vztahové*, kdy zvládají vizualizovat několik typů řezů tělesa.

U páté otázky se dle očekávání objevoval velký rozdíl mezi žáky V a 0. První dva *analogické objekty* žáci neměli problém znázornit, u hyperkrychle však záleželo, zda mají předchozí zkušenost. U odpovědí na tuto otázku se vyskytlo několik modelů teseraktu (viz Obrázky 2.1 - 2.5), mezi kterými se objevila znázornění 2.2, připomínající model představený Stringhamem (1880), a analogie používající vektory 2.5, která připomíná Grassmannův přístup (1844).

V šesté otázce lze také spatřit rozdíl mezi žáky V a žáky 0. Zde, kromě jedné žačky, se ke správným odpovědím dostávají pouze žáci, kteří se s „představou“ čtvrté dimenze už setkali. V rámci této otázky je překvapivá úroveň geometrického myšlení u žáka D. (V), který na základě kombinatorických výpočtů (představených Stringhamem (1880)) dospěl ke správnému určení všech vlastností teseraktu, na které byl tázán. Prokazuje tak alespoň schopnost *formální dedukce*, a možná dokonce dosahuje *rigorózní* fáze modelu geometrického myšlení, jelikož je pravděpodobné, že k těmto daným výpočtům a vztahům došel bez nahlédnutí do vizualizace hyperkrychle.

V rámci sedmé otázky nebyl objeven rozdíl mezi typem odpovědí žáků V a 0. Žáci ve svých výpovědích prokazovali *abstraktní* myšlení, i *formální dedukci*, když napsali několik úvah o dvojrozměrném světě, které vyžadují schopnost nacházet vztahy mezi dimenzemi a jejích geometrickými vlastnostmi. Tyto úvahy mohou prokazovat také úroveň analogického myšlení žáků, kteří aby dospěli k těmto myšlenkám musí najít souvislosti mezi danými světy.

Ani u osmé otázky nejsou pozorovatelné rozdíly mezi žáky V a 0. Většina žáků prokázala analogické myšlení, když nakreslili svého kamaráda jako úsečku. U tří žáků se projevila abstraktní znalost pojmu úsečka, kdy si uvědomili neexistenci její hloubky. Zbývajících sedm žáků nakreslilo kamaráda dvojrozměrně, nedošlo tak u nich k objevení analogie mezi různě dimenzionálními prostory.

V rámci poslední deváté otázky se objevovaly větší rozdíly mezi žáky, kteří se se čtvrtou dimenzí setkali, a těmi, kteří ne. Žáci ze skupiny 0 ve svých odpovědích neprojevili analogické myšlení, ani nepopsali geometrické vlastnosti čtvrté dimenze. U jedné odpovědi se vyskytuje představa časoprostoru. Další myšlenky žáků se nepodařilo kategorizovat.

V rámci skupiny V, pět žáků explicitně zmínilo porovnání mezi přechodem z druhé do třetí dimenze. Projevili tak analogické myšlení na základě kterého formulovali několik myšlenek spojených se čtvrtou dimenzí. Další žáci skupiny V také došli k objevu několika vlastností čtvrté dimenze, nezmínili zde však explicitně podobnost mezi dimenzemi. U dvou posledních žáků skupiny V došlo k popisu čtvrté dimenze v rámci časoprostoru, na základě kterého popsali některé možné vlastnosti.

V rámci prvního pracovního listu žáci projevovali *abstraktní* znalost dvojrozměrných a trojrozměrných těles. Zároveň prokazovali známky *formální dedukce*, a u jednoho žáka je možné pozorovat pravděpodobnou *rigorózní* fázi modelu geometrického myšlení, kdy pomocí kombinatorických výpočtů spočítá některé vlastnosti teseraktu.

První pracovní list, který byl zadaný žákům pátého ročníku šestiletého gymnázia docházejících na seminář deskriptivní geometrie, dopadl nad předem stanovená očekávání. Většina žáků se v úlohách orientovala a u několika otázek zvládli přijít na zajímavé myšlenky, se kterými se doposud ve výuce nesetkali.

2.3.2 Výběr ukázky

Po vyplnění prvního pracovního listu dostala zhruba polovina žáků ukázku z románu *Plochozemě* v rozsahu čtyř listů textu na přečtení do příštího týdne. Ukázka musela být vybrána tak, aby se v ní někdo, kdo knihu nezná, neztratil a pochopil kontext. Zároveň bylo důležité, aby se v ukázce objevila analogie přechodu mezi dimenzemi a náznak nakročení do čtvrté dimenze. Žáci na četbu dostali týden a tato četba pro ně nebyla prioritou, ukázka tedy nesměla být dlouhá a musela být pro žáky dostatečně zajímavá. Po několika úpravách byla vybrána ukázka dlouhá osm stran, která zahrnuje několik různých částí knihy *Plochozemě*[8] od Edwina Abbotta Abbotta (Abbott, 2014).

Text začíná úvodní kapitolou (Abbott, 2014, s. 19-21), která nese název „O Podstatě Plochozemí," kde hlavní postava, Čtverec, vypráví, jací obyvatelé se v Plochozemi vyskytují. Zároveň popisuje, že obyvatelé nemohou vidět více než úsečky, což demonstruje na příkladu, kde by se lidé z prostoru snažili podívat na minci na stole ze strany:

> Na některý ze stolů, jež v prostoru míváte, položte minci. Skloňte se nad ni a shora se na ni podívejte bude se vám jevit jako kruh. Nyní couvněte ke kraji stolu a celým tělem postupně klesejte k zemi (tím se bude váš pohled stále více přibližovat situaci, v níž se nacházejí obyvatelé Plochozemí). Přitom zjistíte, že z vašeho pohledu vypadá mince čím dál tím více jako ovál, a nakonec, až se vaše oči ocitnou přesně na úrovni stolu (takže se vlastně budete nacházet v poloze Plochozemce), nebude se již mince ani v nejmenším podobat oválu a vašim zrakům se bude jevit jako úsečka (Abbott, 2014, s. 19-20).

Další část knihy, která je v ukázce zahrnuta je až v patnácté kapitole (Abbott, 2014, s. 89-91), kde Čtverec popisuje svému vnukovi, jak se dají geometricky znázornit mocniny[9], dochází zde k popisu zobecnění míry, kdy Čtverec představuje analogii u délky - obsahu - objemu u *analogických matematických objektů*. Konkrétně Čtverec mu vysvětluje, že

> bod, jenž urazí vzdálenost tří palců, vytvoří úsečku o délce tří palců, kterou lze vyjádřit číslem 3; a že úsečka o délce tří palců, která se v kolmém směru posune

[8] V ukázce, se kterou žáci pracovali, se objevuje překlad „Plochozemí" nikoli „Plochozemě."
[9] Jak představil už Cardano (viz 1.1).

o vzdálenost tří palců, vytvoří čtverec se stranou dlouhou tři palce, vyjádřený číslem 3^2. (Abbott, 2014, s. 89)

Jeho vnuk následně přijde s otázkou, zda něco geometricky neznamená třetí mocnina, s čímž se Čtverec nedokáže smířit a pošle svého vnuka spát.

Dále je žákům ukázána část, kde Čtverec je navštíven Koulí, obyvatelem Prostorozemí. Čtverec s Koulí vedou dlouhý rozhovor, kde se Koule snaží Čtverci vysvětlit omezenost jeho světa. Koule mu také předvede, jak prostupuje Plochozemí a tvoří tak různé kruhové řezy (Abbott, 2014, s. 92-102). Část této konverzace obsahuje snahu Koule Čtverci vysvětlit princip analogie:

KOULE: „Mistře matematiku, povězte mi toto: Jestliže se bod pohybuje severním směrem a zanechává za sebou světelnou brázdu, jak byste tuto brázdu pojmenoval?"
JÁ: „Nazval bych ji úsečkou."
KOULE: „A kolik má taková úsečka krajních bodů?"
JÁ: „Dva."
KOULE: „Nyní si představte, že se tato na sever mířící úsečka posune v kolmém směru na východ či na západ, takže každý bod v ní obsažený za sebou zanechá brázdu ve tvaru úsečky. Jaký název byste přiznal obrazci, jenž takto vznikne? Předpokládejme, že daná úsečka se posune o vzdálenost rovnou její délce. Jak byste tedy onu věc pojmenoval?"
JÁ: „Čtverec."
KOULE: „Kolik stran má čtverec? A kolik úhlů?"
JÁ: „Čtyři strany a čtyři úhly."
KOULE: „Nyní zkuste zapojit obrazotvornost a představte si čtverec v Plochozemí, který se posune nahoru ve směru kolmém na své tělo."
JÁ: „Cože? Tedy na sever?"
KOULE: „Ne, na sever ne, ale nahoru, zcela mimo Plochozemí. Kdyby se posunul na sever, jižně položené body čtverce by musely projít místy, jež předtím zaujímaly severnější body. To však nemám na mysli. Myslím tím, že každý bod ve vašem těle neboť vy jste čtverec a posloužíte mi jako příklad -, tedy každý bod ve vás a v tom, co

nazýváte svými útrobami, musí prostorem vystoupit vzhůru tak, aby žádný z těchto bodů neprošel místem, které předtím zaujímal nějaký jiný bod, a každý tak vyznačí vlastní úsečku. Doufám, že je vám vše jasné, neboť můj výklad se drží pravidel analogie.“ (Abbott, 2014, s. 99-100)

V závěrečném vyvrcholení příběhu se Čtverec poddá analogii a chce, ať ho Koule vezme do světa čtvrté (a vyšší) dimenze. Koule ale nechce věřit, že by mohl existovat svět s více než třemi dimenzemi, a tak nastává podobná konverzace jako předtím, kdy se tentokrát Čtverec snaží popsat analogii Kouli (Abbott, 2014, s. 115-122):

V jednom rozměru přece pohybující se bod vytvoří úsečku se dvěma krajními body. Ve dvou rozměrech pohybující se úsečka stvoří čtverec se čtyřmi krajními body. Ve třech rozměrech zase pohybující se čtverec – spatřil jsem to na vlastní oko – dá vzniknout požehnané bytosti, krychli, s osmi krajními body. A já se tážu, proč by ve čtyřech rozměrech ona úchvatná krychle – běda analogii a odhalování pravdy, jestliže tomu tak není – nemohla svým pohybem stvořit ještě úchvatnější bytost se šestnácti krajními body? (Abbott, 2014, s. s. 119)

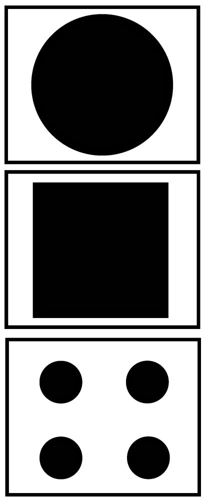
Čtenáři ukázky by tedy měli dostat vhled do toho, jak by vypadal život ve dvojrozměrném světě a jak by viděli ostatní obyvatele. Zároveň by si měli přečíst o zamyšlení nad tím, jak se dá první, druhá a třetí mocnina vyjádřit geometricky, a jak tedy souvisí s naším světem a dimenzemi. Na závěr dostanou malou ochutnávku toho, že není třeba se (dle analogie) zastavit u třetího rozměru, nýbrž je možné se podívat za něj až do dimenze čtvrté.

2.3.3 Druhá část studie (pracovní list po četbě)

Druhé testování, které studie zahrnovala, se konalo týden po prvním kole. Vybraní žáci měli tedy sedm dní na četbu ukázky z románu *Plochozemě*. Seminář zadavatelka navštívila tentokrát v druhé ze dvou hodin věnovaných semináři. Se skupinou A testování probíhalo ve čtvrtek od půl čtvrté odpoledne. Se skupinou B v pátek o půl třetí. Ve skupině A bylo tentokrát oproti minulému týdnu 15 žáků, s tím, že jeden z nich se předchozí týden hodiny nezúčastnil, což znamená, že ze skupiny A se sestavilo 14 párů testů. Ve skupině B dorazilo 8 žáků, ze kterých se všichni účastnili předchozího testování. Dohromady se tedy podařilo sestavit 22 párů pracovních listů.

Druhý pracovní list se jen velmi málo liší od prvního, jeho otázky jsou následující (změny od předchozího testu jsou napsané kurzívou):

1. *Četli jste ukázku z Plochozemě? (Zakroužkujte.)*
   - *ANO (Přečetl/a jsem celou ukázku.)*
   - *NE (Nepřečetl/a jsem ukázku vůbec.)*
   - *Jiná odpověď:*
2. *Setkali jste se od posledního setkání s nějakou představou čtvrté dimenze? (Mimo doporučenou četbu.) Pokud ano, u jaké příležitosti? (Napište dvě věty.)*
3. Představte si trojrozměrný objekt a jeho řez rovinou (průnik objektu s rovinou). Napište, jaké 3D objekty by mohly mít tyto řezy: (V každém rámečku je řez jednoho objektu.)



4. Zkuste nakreslit různé rovinné řezy válce (průnik válce s rovinou).

5. Zkuste načrtnout svou představu čtverce, krychle a čtyřrozměrné krychle (hyperkrychle/teseraktu):
6. Napište, co si myslíte o čtyřrozměrné krychli. Kolik bude mít vrcholů, hran, stěn, nadstěn... Napadnou vás nějaké další vlastnosti, které může mít? Napište jaké.
7. Co by se změnilo, kdybychom byli dvojrozměrné bytosti žijící ve dvojrozměrném světě? (Zkuste popsat.)
8. Představte si, že žijete ve dvojrozměrném světě, nakreslete, jak byste viděli svého kamaráda:
9. Představte si, že nás pozoruje čtyřrozměrná bytost. Jaké rozdíly by spatřila mezi naším a čtyřrozměrným světem? (Zkuste popsat.)

Očekávané odpovědi

Po vyhodnocení prvního pracovního listu lze očekávat následující odpovědi a změny. Z vybraných čtrnácti žáků, kteří dostali ukázku na doma, budou někteří, kteří úryvek nepřečtou vůbec a několik, kteří ho nedočtou. Na otázku, zda se od posledního setkání s nějakou představou setkali, lze očekávat, že bude pár jedinců, kteří se podívají na některé informace ohledně čtvrté dimenze na internet. U třetí otázky je možné očekávat, že někteří z těch, co si u prvního testu neuměli představit jedno těleso, které má třetí řez si po četbě zvládnou lépe uvědomit, že některá taková tělesa mají kolem sebe v každodenním životě. Ve čtvrté otázce se žákům dařilo i v prvním pracovním listě, neočekávají se tady tedy žádné větší změny oproti minulému týdnu.

V páté otázce, kde mají žáci nakreslit své představy *analogických matematických objektů* čtverce, krychle a hyperkrychle je několik faktorů, které jejich odpovědi může ovlivnit. Pokud čtyřrozměrnou krychli v prvním testu nenakreslili a rozhodnout se se na obrázek teseraktu doma podívat, je velmi pravděpodobné, že ho tentokrát nakreslí. Dále je možné, že čtenářům pomůže ve vizualizaci analogie představená v ukázce. Zároveň není vyloučené, že žákům k lepšímu zobrazení bude stačit přemýšlení o dané problematice vyvolané prvním pracovním listem.

V šesté otázce mají napsat vlastnosti čtyřrozměrné krychle, protože se některé tyto informace v ukázce nachází (konkrétně počet vrcholů a nadstěn[10]), lze očekávat, že odpovědi budou přesnější.

Sedmá a osmá otázka naráží přímo na dvojrozměrný svět, o kterém v ukázce četli, lze proto očekávat velký posun u těch žáků, kteří ji přečetli. Dále bude pozorováno, zda u otázky osm ti, kteří v prvním testu kreslili kamaráda dvojrozměrně a četli ukázku, ho nyní nakreslí jako úsečku. Je pravděpodobné, že ze čtenářů nebude nikdo, kdo by ho nakreslil dvojrozměrně. U nečtenářů bude zajímavé shledat, jestli se po uplynulém týdnu, kdy měli nad tématem možnost přemýšlet či si o něm vyhledat další informace, dojde k podobné, zaznamenatelné změně, jaká je očekávána u čtenářů.

V poslední otázce jsou žáci tázáni na rozdíly mezi třetí a čtvrtou dimenzí a jaké rozdíly by mezi námi spatřila osoba ze čtyřrozměrného světa. V ukázce se sice analogie popisuje, ale do čtvrté dimenze se nakročí pouze v krátkém zamyšlení o existenci čtyřrozměrné krychle. Je možné, že některým žákům tato ukázka pomůže k lepšímu analogickému myšlení a dovedou si následně sami další vlastnosti domyslet. Někteří žáci pak možná popíšou analogii, která jim byla představena a nepokusí se ji použít i na další vlastnosti. U nečtenářů může hrát roli vyhledání informací v týdnu mezi testy, nebo přemýšlení či konverzace o daném tématu. Je proto možné, že se jim podaří k analogickému myšlení dospět i bez ukázky.

V rámci výsledků druhého pracovního listu bude zásadní pohlížet na rozdíly mezi čtenáři a nečtenáři, jelikož tyto odchylky pomohou k určení významu samotné ukázky na schopnost žáků zvýšit svou úroveň poznávacího procesu a geometrického myšlení v rámci analogie a dimenzí.

[10] Přestože v ukázce o nich Čtverec mluví jako o „krychlích“(Abbott, 2014, s. 120).

0	V	H	VH	VPH	VC	VČ	VČP	VČH	ČH
2	3	1	2	2	2	6	2	1	1

Tabulka 2.3: Rozdělení žáků

Výsledky druhé části studie

V této části budou na začátku okomentovány odpovědi na první dvě otázky, které se týkají toho, zda žáci ukázku četli a jestli se od posledního testu setkali s jinou představou čtvrté dimenze. Další otázky pak budou analyzované podle skupin vytvořených na základě těchto odpovědí.

Na první otázku (zdali ukázku z *Plochozemě* četli) odpovědělo deset žáků kladně, deset záporně a dva odpověděli, že ukázku přečetli z části.

Ve druhé otázce byli žáci tázáni, zda se od posledního setkání s nějakou „představou“ čtvrté dimenze (mimo doporučenou četbu) setkali. Ze skupiny čtenářů osm napsalo, že ne, z nich dva ovšem dopsali, že nad tématem ale dost přemýšleli sami. Jedna žačka napsala, že si o tématu od posledního setkání našla něco na internetu. Ze dvou žáků, kteří ukázku nepřečetli celou, oba napsali, že se s ničím jiným nesetkali. Ze zbývajících deseti žáků, kteří ukázku nečetli, pět napsalo, že se s ničím nesetkali. Čtyři žáci napsali, že si vyhledali, jak vypadá teserakt, a z nich dva, že nad tématem přemýšleli. Jeden z nich dodal, že o tématu diskutoval se svým tátou. Poslední z řad nečtenářů napsal, že viděl jedno video, kde popisovali, že minulost, přítomnost a budoucnost se odehrává naráz právě v různých částech čtvrté dimenze.

Podle odpovědí na první dvě otázky byli žáci rozděleni do deseti skupin podle toho, jestli něco ke čtvrté dimenzi viděli už před prvním testem (označení V), do jaké míry ukázku přečetli (Č pro čtenáře a C pro žáky, kteří ukázku nepřečetli celou), jestli si k tématu dohledali nějaké informace v průběhu testování (označení H) a zda napsali, že o tématu přemýšleli (P). Dva žáci, nespadající do žádné kategorie, dostanou označení 0. Toto uspořádání s počty žáků je znázorněno v Tabulce 2.3.

Kategorie jsou tedy jmenovitě ČH (čtenář a hledač), VČH (viděl, čtenář a hledač), VČP (viděl, čtenář a přemýšleč), VČ (viděl a čtenář), VC (viděl a přečetl část), VPH (viděl, přemýšleč a hledač), VH (viděl a hledač), H (hledač), V (viděl) a 0 (neviděl, nečetl, nehledal, nepřemýšlel).

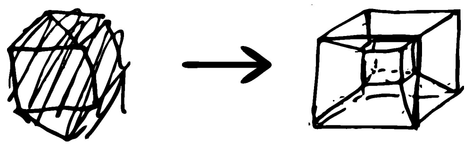
Z rozdělení vyplývá, že největší počet žáků je ve skupině VČ, což jsou žáci, kteří se se čtvrtou dimenzí setkali už před testováním a ukázku celou přečetli. Důležité je také zmínit, že se v testování objevuje pouze jeden žák, který se se čtvrtou dimenzí předem nesetkal a ukázku četl, navíc jde o žáka, který si v průběhu týdne nějaké informace vyhledal. Ve výzkumu se tak tedy neobjevuje ani jeden žák, který by své znalosti čtvrté dimenze stavěl pouze na pracovním listě a představené ukázce.

Nyní budou rozebrány odpovědi jednotlivých žáků, podle kategorie, ve které se nachází.

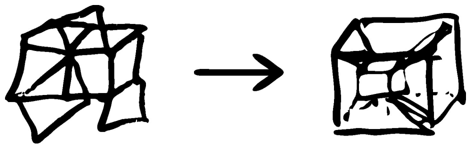
Ve třetí úloze, stejně jako u prvního pracovního listu, měli žáci za úkol napsat těleso, které by mohlo tvořit daný řez rovinnou. U čtenářů kategorií ČH a VČH nedošlo k žádnému rozdílu v odpovědích mezi prvním a druhým pracovním listem. U žáků VČP u jednoho nenastal rozdíl a u druhého, který napoprvé napsal ke třetímu řezu otazník nyní napsal, že se může jednat například o žirafu, psa nebo kočku. Ze šesti VČ došlo ke změně u dvou žáků. Žák, který před četbou debatoval, jestli se u třetího řezu nejedná o 4D těleso nebo teserakt, napsal, že se jedná o nohy stolu a druhý u třetího řezu napsal napoprvé trubky, u druhého pracovního listu napsal nohy židle/stolu. Je zde vidět posun v tom, že dokázal vymyslet opravdu jedno těleso, které může mít tento řez, oproti trubkám, které by pravděpodobně tvořily čtyři tělesa.

U žáků (VC), kteří četli pouze část, se odpověď změnila pouze u jednoho z nich. Ten v prvním listu u třetího řezu napsal, že se jedná o čtyři válce. U druhého listu ovšem napsal „ježek v kleci bez ježka a s jenom čtyřmi zabradly.“ Znova se zde tedy objevil posun, kdy místo čtyř těles byl žák schopen přijít na jedno jediné, které splňuje zadání.

U žáků, kteří ukázku nečetli, nedošlo u žádného z nich ke změně odpovědi. Nutno podotknout, že čtyři z nich už v prvním pracovním listě odpověděli u třetího řezu „správně.“ U zbývajících šesti se ale žádná změna neobjevila. Žáci dále odpovídali například, že se jedná o 4 koule, 4, válce, 4 kruhy, nebo jiné čtyři tělesa u sebe. Dva žáci z nich u tohoto řezu nenapsali žádnou odpověď.



Obrázek 2.7: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 1 (VČH)

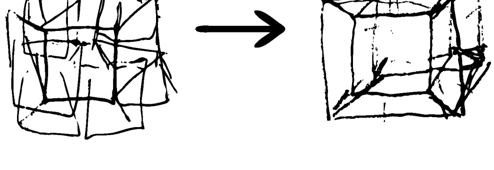


Obrázek 2.8: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 2 (VČ)

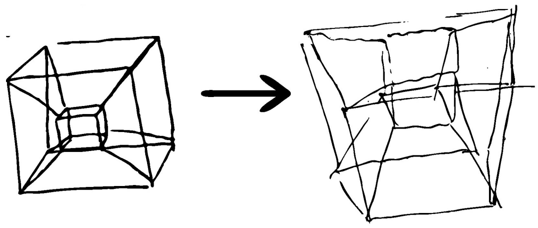
U čtvrté otázky nedošlo u žádného žáka k posunu, což odpovídá předem stanoveným očekáváním, žáci si vedli velmi dobře už u prvního pracovního listu, není proto velmi překvapivé, že se výsledky nijak nezměnily.

V páté otázce měli žáci nakreslit své představy *analogických matematických objektů*, a to čtverce, krychle a teseraktu. Popisovat se zde bude pouze teserakt, jelikož čtverec a krychle nedělaly nikomu problém a k žádné změně nedošlo. Z deseti čtenářů všichni teserakt nakreslili. Ke změně došlo u čtyř z nich, jak je ukázáno na Obrázcích 2.7 (žák VČH), 2.8 (žák VČ), 2.9 (žák ČH) a 2.10 (žák VČP).

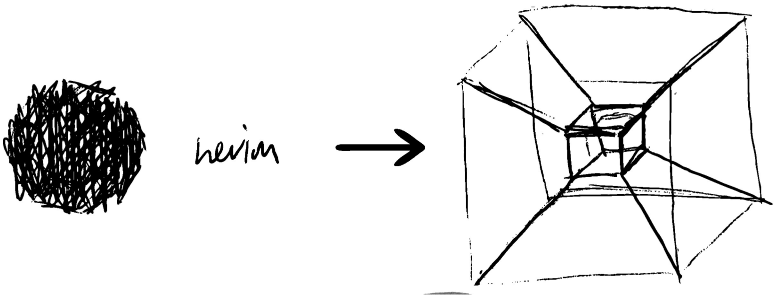
U žáků s Obrázky 2.7 (VČH), 2.8 (VČ) a 2.9 (ČH) je změna stejným směrem, kdy průběhu prvního pracovního listu žáci neměli úplně představu, jak teserakt nakreslit. Žáci s Obrázkem 2.7 a 2.9 řekli, že se na teserakt doma podívali. Žačka s Obrázkem 2.9 napsala, že se od posledního setkání mimo ukázku s představou čtvrté dimenze nesetkala. Je potom na zvážení čtenáře, jak došlo k tomuto posunu. Co se týká posledního žáka (VČP), u kterého došlo ke změně znázorněné na Obrázku 2.10, ten napsal, že se s představou čtvrté dimenze



Obrázek 2.9: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 3 (ČH)



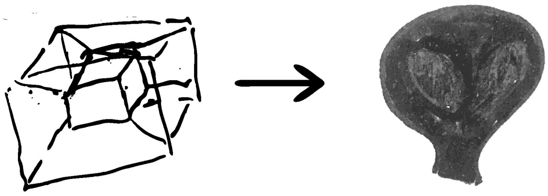
Obrázek 2.10: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 4 (VČP)



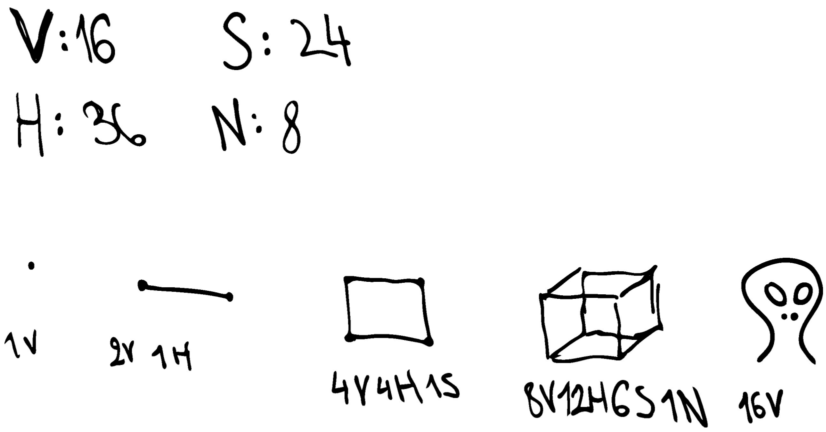
Obrázek 2.11: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 5 (VC)

od posledního setkání setkal a že nad daným tématem přemýšlel. V prvním listu byl jeden z těch, kteří teserakt nakreslili jako dvě spojené do sebe vnořené soustředné krychle. Při další příležitosti u druhého pracovního listu ovšem nakreslil teserakt z jiného, složitějšího, pohledu, ke kterému se žádný další žák nedostal. Nabízí se zde vysvětlení, že díky různým izolovaným modelům a analogii dosáhl zobecnění a došel ke generickému modelu teseraktu.

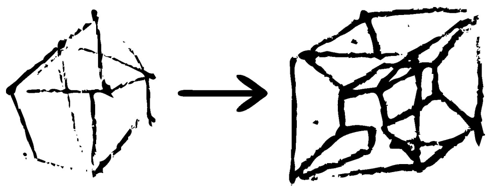
Co se týká žáků, kteří přečetli pouze část ukázky (VC). Jejich posun bude ukázán na Obrázcích 2.11 a 2.12. Oba žáci napsali, že se mimo ukázku v předchozím týdnu se čtvrtou dimenzí nesetkali. U žáčky s Obrázkem 2.11 je je ke zvážení, jak došlo k danému posunu a zda tuto vizualizaci teseraktu vymyslela, nebo zda se s ní setkala třeba u spolužáků. Druhý žák nakreslil klasický pohled na teserakt už v minulém týdnu, ve svém druhém



Obrázek 2.12: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 6 (VC)



Obrázek 2.13: Pracovní list 2, Úloha 6, Řešení 1 (VC)



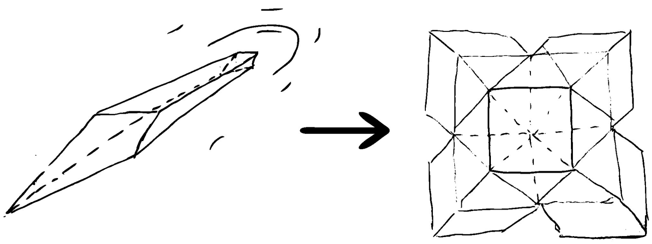
Obrázek 2.14: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 7 (V)

pracovním listě však místo čtyřrozměrné krychle poskytl obrázek mimozemšťana. A to i u jeho řešení u úlohy šest (Obrázek 2.13).

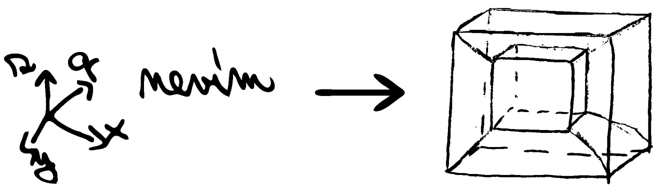
Z deseti nečtenářů u čtyř nenastal žádný posun. Jeden (VH) nakreslil teserakt v obou případech podobně, tak jak je na Obrázku 2.1. Zbývající tři (dva z kategorie V a jeden z 0) nakreslili svou představu stejně jako v předchozím listu, podobně jako je tomu na Obrázcích 2.3 a 2.4. Změny, které nastaly u dalších šesti žáků jsou k vidění (u všech kromě jednoho) na Obrázcích 2.14 (žák V), 2.15 (žák H), 2.16 (žák VH), 2.17 (žák 0) a 2.18(žák VPH). Žačka s Obrázkem 2.16 jediná napsala, že se s představou čtvrté dimenze za poslední týden nesetkala. Ostatní napsali, že se podívali jak teserakt vypadá.

Překvapivé je znázornění žačky (H), u které se objevil posun na Obrázku 2.15. Ta napsala, že se v průběhu týdne podívala, jak teserakt vypadá. Tento způsob znázornění však není nikterak tradiční, dá se na něm však spatřit osm krychlí, které teserakt doopravdy má, může se tedy jednat o vizualizaci nadstěn čtyřrozměrné krychle.

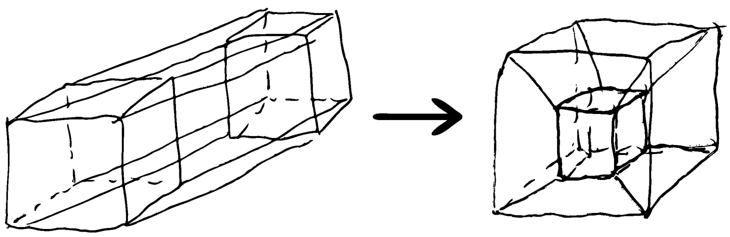
U posledního žáka (VPH), u kterého se objevil posun, obrázek nebyl důležitý, jelikož



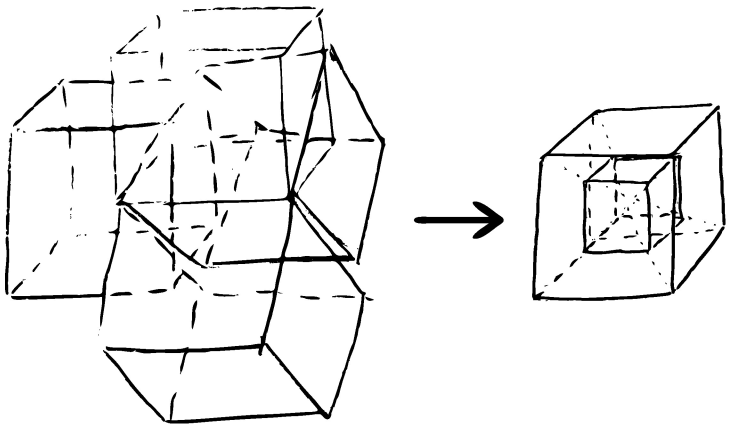
Obrázek 2.15: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 8 (H)



Obrázek 2.16: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 9 (VH)



Obrázek 2.17: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 10 (0)



Obrázek 2.18: Pracovní list 2, Úloha 5, Teserakt 11 (VPH)

posun nenastal v kresbě, ale v jejím popisu. Žák zároveň na začátek napsal, že se o tématu bavil s tátou a obrázek teseraktu si vyhledal. Už předem zmiňovaný žák D. v obou případech nakreslil teserakt způsobem jako je na Obrázku 2.1. Ve druhém pracovním listě k němu navíc dodal následující zamyšlení:

> Tady po diskuzi se spolužákem mám jisté pochybnosti ohledně myšlenky, že by hyperkrychle šla znázornit jako čtverec, říkám si, jestli se spíš vždy nedokážu zbavit jedné dimenze. Přímka → bod. Čtverec → přímka. Krychle → čtverec. Tedy by se dalo říct, že bychom mohli odečíst jeden rozměr z hyperkrychle a vidět ji jako krychli (asi).

Podobně jako v předchozím pracovním listě, žák popisuje velmi rozvinuté matematické úvahy, projevuje analogické myšlení a díky němu i zobecňování. Uvědomuje si analogii mezi jednotlivými dimenzemi a jejich znázorněním, které je také schopen velmi pěkně a srozumitelně popsat. Oproti obrázku z minulého týdne se tady zamýšlí i nad dalšími vizualizacemi teseraktu. Dochází zde tedy k představám dalších izolovaných modelů a možná i k tvorbě samotného generického modelu.

V úloze šest došlo k několika změnám v odpovědích, které jsou znázorněné v Tabulce 2.4. V každém sloupci je znázorněn počet správných odpovědí u dané kategorie žáků. Změny, které nastaly, jsou znázorněny početní operací.[11] Tabulka ukazuje, že ke zhoršení došlo ve třech případech, a to u žáka ČH, který v druhém pracovním listě neodpověděl správně jako v první pracovním listě, u počtu vrcholů u žáka VH a u počtu stěn u žáka VPH. Ke zlepšení došlo v patnácti případech, a to v naprosté většině u čtenářů. Zároveň ke zlepšení nedošlo pouze u počtu vrcholů a nadstěn, které byly v ukázce explicitně uvedeny, ale i u počtu hran a stěn, ke kterým se žáci museli dostat analogickým myšlením, nikoli zprostředkovanou informací.

V rámci druhého pracovního listu také došlo k těmto rozvinutí odpovědí zaměřujících se na další myšlenky a vlastnosti:

1. „bude ve 4 dimenzi; není častá“ → „nevidíme ji; je to vnitřek věcí, těles; jde na

[11] V řádku „Vrcholů“ je ve sloupci „VČ“ uvedeno „5 + 1“, což znamená, že ze skupiny VČ v prvním pracovním listě správný počet vrcholů určilo pět žáků a ve druhém pracovním listě šest.

	0	V	H	VH	VPH	VC	VČ	VČP	VČH	ČH
Vrcholů	0 + 2	1 + 1	0	1 - 1	2	2	5 + 1	0 + 2	0 + 1	1
Hran	0 + 1	1	0	1	1	0 + 1	1 + 2	0	0 + 1	1 - 1
Stěn	0	0	0	0	2 - 1	1	1 + 2	0	0	0
Nadstěn	0	0	0	0	1	1	0	0 + 1	0	0

Tabulka 2.4: Pracovní list 2, Úloha 6, Správné odpovědi

všechny strany“ (VČH)

2. „Opravdu nevím, ale kdybych měl odhadnout tak hran 36 (čtverec: 4 → krychle: 12 → hyperkrychle: 12·3) apod... i s ostatními vlastnostmi.“ → „Vrcholů: 4→8→16; Hran: 4→12→36; Stěn: 1→6→?; Další vlastností asi bude, že stejně jako ve Plochozemi → kdybychom hyperkrychli viděli, tak bychom ji našimi smysly (specificky převážně zrakem) nebyli schopni zpracovat. A pochopit její komplexnost bez pomoci matematiky, či analogie.“ (VČP)

3. „Logicky by se dalo usuzovat o tom, že když v 2 rozměrném prostoru má čtverec 4 vrcholy, v 3D 8, tak ve 4 rozměrném bude mít 12. Nicméně o tom tématu nevím a nepamatuju si dostatek, abych si tipla.“ → „Krychle bude mít pravděpodobně 16 vrcholů, což vyplývá z logiky, že čtverec má 4, krychle 8. Všechny ostatní vlastnosti budou vyplývat ze stejného principu.“ (VČ)

4. „Vrcholů - 16, hran - 36 nebo 72, stěn - 36, nevím co je nadstěna.“ → „Vrcholů - 16, hran - 30, stěn - 24 ← nejsem si jistá, ale matematicky v tom je souvislost.“ (VČ)

5. „16 vrcholů, 64 hran, 24 stěn“ → „16 vrcholů, 24 hran, 12 stěn, 6 nadstěn (Spočítala jsem je v mém krásném obrázku, ale nejsem si jistá, jestli jsem ho nakreslila dobře.“ (VPH)

6. „Vůbec nevím → bude stejná jako 3D krychle → akorát nějak spojená s časem.“ → „Možná dvojnásobek vrcholů, zbytek mě nenapadá.“ (0)

U prvního žáka (VČH) se objevuje nový popis, a to, že čtyřrozměrnou bytost bychom neviděli, je vnitřek věcí a těles a jde na všechny strany. V ukázce, kterou měli žáci zadanou se tyto myšlenky objevují, lze tedy předpokládat, že žák zde projevuje porozumění dané analogie, nikoli jejího využití a následného použití u popisu nových vlastností.

Druhý posun v odpovědi, byl u žáka VČP, který už při prvním pracovním listě projevil schopnost analogického myšlení, i když se k správným počtům nedostal. U druhého pracovního listu se dostal k přesnému počtu vrcholů, a to za pomocí analogie. Dále nabízí zamyšlení, že kdybychom teserakt viděli, tak bychom ho nebyli schopni zpracovat. Používá zde analogii přechodu mezi různými dimenzemi.

Podobně je tomu u třetí ukázce odpovědi, kdy žák VČ v obou případech využívá analogie, ve druhém pracovním listě však dojde ke správnému výsledku.

U čtvrté odpovědi vyplývá, že se v průběhu prvního testování u žáka (VČ), alespoň v zápise, neobjevuje myšlenka analogie. Ve druhém testu však souvislost popisuje a správně navíc určuje počet stěn, který v ukázce není. Lze proto říct, že se u žáka zlepšilo jeho analogické myšlení, které následně využil u určení počtu stěn. Ke správnému počtu hran se však pomocí analogie nedostal.

Výsledky žačky (VPH) u páté odpovědi jsou překvapivé, jelikož zde dochází ke zhoršení, a to pravděpodobně právě na základě hledání informací. Žačka u druhého pracovního listu odpověděla na rozdíl od první výpovědi špatně na počet stěn, a to (jak sama popisuje) v důsledku vlastního obrázku teseraktu, který si předem našla.

U posledních představených výpovědí u žáka (0) dochází k mírnému posunu s počtem vrcholů, není zde však řečeno, jak k úvaze došel a žák se se čtvrtou dimenzí mimo první pracovní list nikde nesetkal.

Z žáků (VC), kteří ukázku nedočetli, jeden v obou pracovních listech správně určil počet vrcholů, stěn a nadstěn (viz Obrázek 2.13) a druhý v obou případech určil správně pouze počet vrcholů. U žádného z nich tedy k žádné změně nedošlo.

Nyní bude analyzována otázka číslo sedm, kde měli žáci napsat, co by se změnilo, kdybychom byli dvojrozměrné bytosti žijící ve dvojrozměrném světě.

První budou rozebrány rozdíly v odpovědích žáků, kteří ukázku četli. V jednotlivých výpovědích došlo k jen jedné větší změně, a to, že žáci nyní psali, že bychom neměli žádnou hloubku a viděli bychom se jako pouhé úsečky, tudíž bychom se ani nedokázali mezi sebou rozeznat. Tento posun nastal u pěti žáků VČ, jednoho VČP a jednoho VČH. V rámci této odpovědi navíc dva VČ připsali (tak, jak bylo zmíněno v ukázce z románu *Plochozemě* (Abbott, 2014)), že bychom měli nekonečně malou hloubku, jinak že bychom zanikli. Tyto odpovědi vychází přímo z ukázky, v odpovědích žáků se tedy sice objevily nové postřehy, šlo ale „pouze“ o popis první části textu. Lze ale okomentovat, že žáci nevynechali žádnou podstatnou část, která ukázka nabízí.

U žáků, kteří přečetli pouze část ukázky (VC) se objevil podobný posun jako u čtenářů. Možný důvod by mohl být ten, že popis Plochozemě se objevuje právě na začátku ukázky (Abbott, 2014).

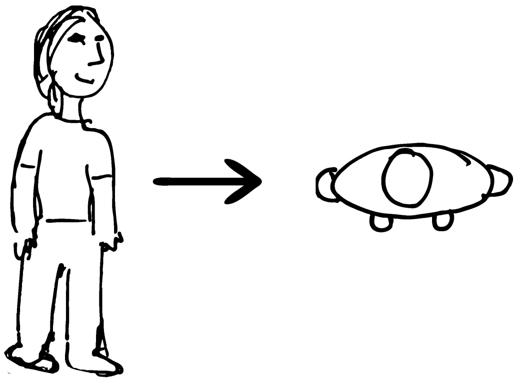
U nečtenářů k žádné změně nedošlo. Žáci popsali stejné fenomény jako v prvním pracovním listě (někdy dokonce úplně stejnými slovy).

U předposlední úlohy si žáci měli představit, že žijí ve dvojrozměrném světě, a měli nakreslit, jak by viděli svého kamaráda.

Žádný posun nenastal u tří žáků (VČP a dva VČ), kteří v obou případech nakreslili vertikální úsečku. Tři žáci (ČH a dva VČ) sice nakreslili podobně jako předchozí v obou případech úsečku jdoucí vertikálně, ale v druhém pracovním listě přidali poznámku týkající se toho, že úsečka je nekonečně tenká, takže by možná nešla vidět vůbec. Jde zde pozorovat abstraktnější porozumění a krystalizaci pojmu úsečka (pojem krystalizace vychází z teorie generických modelů představené profesorem Hejným (Hejný, 2004), více v kapitole o teorii generických modelů 1.4). Žáci oproti prvnímu pracovnímu listu došli k závěru, že to, že úsečku jsme schopni vidět znamená, že musí mít nějakou šířku, tudíž její znázornění není pouze jednorozměrné. (Jde o úvahu podobnou úvaze Charlese H. Hintona o čtvrté dimenzi, kterou jsme zmínili v kapitole 1.1 o historii (Hinton, 1880).)

Další žák (VČP), u kterého se objevila změna v odpovědi, na tuto otázku, sice stejně jako předchozí žáci i v prvním pracovním listě poskytl obrázek úsečky, ale v druhém přikreslil různé délky a napsal, že záleží na tom, jak daleko jeho kamarád stojí. Přidal zde tedy další úvahu představenou v ukázce (Abbott, 2014, s. 20-21).

Mezi čtenáři se objevila také jedna žačka (VČH), která v prvním pracovním listě nakreslila kamaráda jako dvojrozměrnou postavičku (Obrázek 2.19). Oproti předem zmíně-



Obrázek 2.19: Pracovní list 2, Úloha 8, obrázek 2D kamaráda 1 (VČH)

nému očekávání, i přesto, že ukázku četla, úsečku nenakreslila. V její kresbě však k jistému posunu došlo, můžeme ho vidět na Obrázku 2.19, kde je použitá vizualizace stále dvojrozměrná a pozorovatel i kamarád by byli pořád trojrozměrní, ke změně zde však došlo v rámci projekce.

U posledních dvou čtenářů (oba ze skupiny VČ) došlo k následující změně. Tito žáci oba nakreslili v obou pracovních listech představu kamaráda jako úsečku. Změna, která se u nich ale objevila, se týkala natočení úsečky. V prvním pracovním listě oba úsečku nakreslili vertikálně. Po přečtení ukázky však úsečku nakreslili horizontální. Projevil se zde tedy vliv ukázky, kde je pohled na ostatní obyvatele Plochozemě představen jako tato horizontální úsečka (Abbott, 2014). Je zajímavé, že se žákům díky této ukázce změnila představa, i přesto, že jejich byla v souladu s analogií v ukázce představené. Je možné, že touto představou žáci získali další izolovaný model pohledu a dochází k zobecňování. Na druhou stranu je také možné, že si izolované modely nespojují a jiný pohled nakreslili v důsledku nejistoty, zda jejich řešení je také správné, což by se dalo zařadit jako negativní efekt ukázky.

U žáků, kteří si přečetli pouze část (VC), nedošlo k žádnému posunu. Oba v obou případech nakreslili vertikálně umístěnou úsečku.

U osmi z deseti nečtenářů k žádnému posunu nedošlo. Čtyři z nich nakreslili úsečky v obou případech, jednalo se o dva VH žáky, jednoho V a žáka D. ze skupiny VHP, který v obou případech k obrázku napsal, že se jedná o nekonečně tenkou úsečku. Lze tedy říci, že pojmy úsečka a dimenze u něj dosáhly zobecnění.

Dva žáci (H, 0) v obou pracovních listech napsali, že bychom neviděli nic, je tedy možné zde také mluvit o abstraktní znalosti pojmu úsečky.

Zbývající dva žáci (oba ze skupiny V), u kterých nedošlo ke změně, v obou případech nakreslili svého kamaráda dvojrozměrně (jak tomu je na Obrázku 2.6).

K posunu došlo u dvou posledních žáků nečtenářů. Šlo o žačky (VHP, 0), které obě v rámci prvního pracovního listu nakreslily svého kamaráda dvourozměrně (viz Obrázek 2.6). U druhého pracovního listu pak obě nakreslily vertikálně umístěnou úsečku. Žačka (VHP) ke svému posunu napsala následující:

> Nad touto otázkou jsem se zamýšlela a myslím si, že by naše oči nemohli ve 2D fungovat. Ale kdybychom měli nějaké jiné, přizpůsobené oči, viděli bychom své kamarády jako čáry.

Tyto posuny ukazují na fakt, že aby mezi žáky došlo k posunu uvědomění, jak funguje analogie ve vnímání světa nižší dimenze, nebylo nutné, aby četli ukázku z románu *Plochozemě*.

U poslední otázky mezi čtenáři u dvou žáků (VČP a VČ) nedošlo k žádné změně v odpovědi. U dalších osmi vždy došlo alespoň k menšímu posunu, které budou nyní představeny (je zde vždy uvedena jejich původní a nová odpověď).

1. „Chyběla by jí poslední dimenze. Ale jak přesně si to představit nevím.“ → „Dokázala by nás vidět z úhlu, který my nedokážeme. Viděla by v podstatě do nás.“ (ČH)

2. „Náš svět by byl jednodušší, jejich komplikovanější. Možná že by světy byli jinak stabilní. Věci by mohli mít jinou formu/tvar, nevypadali by asi stejně.“ → „Lidé nevidí 4rozměrný svět. Viděla by dovnitř věcí, skrz ně a dívala by se z úrovně našeho břicha.“ (VČH)

3. „Neměli bychom dimenzi, pohybovali bychom se ve třech směrech namísto čtyř (minimálně bychom druhý pohyb nevnímali), neviděli bychom ji.“ → „Nemáme jednu

dimenzi, mohla by mizet a měnit tvar pro nás iracionálně. Cestovali bychom nesmyslně dlouho.“ (VČP)

4. „Vnímala by obtížnější způsob pohybování, co by pro nás bylo 100m by mohlo být ve 4D hned vedle. Fyzikální zákony by fungovaly zcela jinak, s dimenzí navíc se zvětší zápis a výpočty v kartézském systému souřadnic. Gravitace a aerodynamika by fungovala u nás až příliš jednoduše pro ně.“ → „Omezenost pohybu do čtvrtého směru. Jejich „čtvrtý směr“ by pro nás v našem světě znamenal něco jiného než směr (rozměr, souřadnice). Jejich oči by projektovaly obraz trojrozměrně.“ (VČ)

5. „Nechápala by, proč nevyužíváme čtvrtého rozměru. Myslím, že 4. rozměrem je čas?? Takže by mohla pozorovat nás v mnoha různých okamžicích najednou.“ → „Nechápala by, proč nepoužíváme 4 dimenzi. Jakékoliv snahy o vysvětlení nám 4 dimenze by byly složité. My bychom 4rozměrnou bytost viděli 3rozměrně.“ (VČ)

6. „Chybí změna otočení/pohledu. Vůči sobě se 2 3D postavy vidí jen v jednom samém otočení. Není možné přesně popsat 4D a neskutečně obtížné si ho vůbec představit. Je to stejné jako kdyby se snažila 2D postava pochopit náš 3D svět a naši percepci něho.“ → „Jednoduchost našeho prostoru a vnímání. Chybí nám jeden rozměr (tzv. budeme jí schopni spatřit pouze, pokud se nám přizpůsobí, ale i tak ji neuvidíme celou). Osoba bude schopna vidět náš celý svět jedním pohledem.“ (VČ)

7. „Připadali bychom jí moc jednoduchý (vzhledově).“ → „Připadali bychom ji neúplní, chyběl by jí tam ten 1 rozměr, to další někam kam ona vstoupit může a co vidí a bere jako běžnou věc.“ (VČ)

V první změně v odpovědi se ukazuje myšlenka, že by bytost čtvrté dimenze viděla do nás. Tato představa se objevuje už v samotné ukázce. U žáka ČH zde tedy došlo k rozdílu v odpovědi, nelze ale tvrdit, že by projevil analogické myšlení při tvorbě vlastních hypotéz.

V druhé výpovědi, u žáka (VČH), dochází ke stejnému posunu, který je v první dvojici odpovědí.

U třetí odpovědí žáka (VČP) lze mluvit o analogickém myšlení, jelikož žák představuje úvahy, že by bytost mohla měnit tvar pro nás iracionálně, a že bychom cestovali nesmyslně dlouho. Obě tyto myšlenky byly v ukázce představeny v rámci přechodu mezi druhou a třetí dimenzí, nikoli v rámci dimenze čtvrté. Žák se tedy musel k myšlence dobrat sám na základě podobností.

U čtvrté odpovědi žáka VČ je nová myšlenka toho, že by oči čtyřrozměrné bytosti projektovaly obraz trojrozměrně. Tato úvaha v ukázce nezazněla. Žák proto sám dle analogie vymyslel způsob fungování zraku výše rozměrné bytosti.

Pátá dvojice odpovědí představuje změnu v nahlédnutí do vizualizace čtyřrozměrné bytosti. Žák (VČ) zde popisuje fakt, který v ukázce není explicitně zmíněn, a to, že kdyby nás navštívila čtyřrozměrná osoba, my bychom ji viděli jako její trojrozměrný řez.

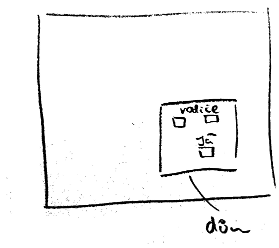
U šesté odpovědi lze v první odpovědi u žáka VČ zaznamenat objevenou analogii, když žák popisuje, že by situace byla stejná mezi druhou a třetí dimenzí. Po zadané četbě k úvaze přidává myšlenku, která v ukázce nezazněla, a to, že by se nám osoba ze čtvrté dimenze musela ukázat, a i tak bychom ji neviděli celou. Zároveň by tato osoba viděla náš trojrozměrný svět jedním pohledem. Tyto myšlenky byly v ukázce představeny o dimenzi nižší, žák tak musel použít analogické myšlení, aby se dobral ke zmíněným závěrům.

Sedmý čtenář VČ představuje myšlenku, kdy osoba čtvrté dimenze má možnost vstoupit někam, kam my nemůžeme. Tato myšlenka v ukázce zazněla, jednalo se ale také o situaci o dimenzi níž. Je tedy možné říct, že žák prokazuje analogické myšlení, díky kterému objevuje nové souvislosti.

Poslední čtenář (VČ), u kterého nastala změna, v prvním pracovním listě nenapsal u otázky nic. Ve druhém pracovním listu odpověděl, že by náš svět čtyřrozměrná bytost viděla z „ptačí perspektivy“ a přidal k odpovědi obrázek (Obrázek 2.20).

Představuje zde nahlédnutí do analogie, kdy čtyřrozměrná bytost má možnost sledovat náš trojrozměrný svět z místa mimo něj, podobně, jako by trojrozměrná bytost mohla pozorovat svět druhé dimenze.

Po zhlédnutí odpovědí žáků, kteří ukázku četli, je jasné, že u nich došlo k nějakému posunu v přemýšlení o čtvrté dimenzi. U dvou z nich se objevily oproti prvnímu pracovnímu



Obrázek 2.20: Pracovní list 2, Úloha 9, pohled čtyřrozměrné bytosti 1 (VČ)

listu nové myšlenky, jedná se však o úvahy představené v ukázce, nelze tedy říct, že by žáci projevovali vlastní analogické myšlení. U zbývajících šesti žáků, u kterých došlo k posunu, se rozdíl váže k zapojení vlastních myšlenek vytvořených analogickým myšlením. Je možné říci, že se jedná o vlastní myšlenky, jelikož tito žáci uvedli, že se během týdne mezi testy s „představou“ čtvrté dimenze nesetkali (pouze jeden žák z nich napsal, že nad tématem přemýšlel).

U žáků, kteří přečetli pouze část ukázky nedošlo k žádnému pozorovanému posunu.

U žáků, kteří ukázku nečetli, se rozdíl v odpovědích objevil pouze u jednoho žáka (V), který v prvním listě napsal: „Bude určitě více rozvinutější, možná jsme jenom v simulaci :(Možná bude vnímat jinak čas.“ A v druhém testu odpověděl: „Asi nás budou vnímat jinak než my, jelikož budou mít celé tělo z 4D. Možná budou mít mnohem více smyslů než my. Budou si o nás myslet, že jsme jednoduché bytosti.“ Tato odpověď může souviset s analogií, pokud by žák přemýšlel o tom, co by si on myslel o dvojrozměrné bytosti. Tuto souvislost však nepopisuje. Co je v druhém pracovním listě nového je úvaha o nových smyslech, které čtyřrozměrné bytosti na rozdíl od nás budou mít. Ostatní odpovědi nečtenářů se obsahově nelišily od svých protějšků v předchozím testu.

Vyhodnocení druhé části studie

V rámci výsledků druhého pracovního listu byli žáci na základě odpovědí na první dvě otázky rozděleni do deseti skupin podle toho, zda se se čtvrtou dimenzí setkali už před prvním pracovním listem, zda četli ukázku, jestli si vyhledali některé informace a zda o tématu přemýšleli.

Podle těchto skupin lze debatovat nad možnými závislostmi mezi zkušenostmi žáků a jejich odpověďmi. V rozdělení skupin se neobjevuje ani jeden žák typu Č (popřípadě ČP), což znamená, že v rámci této studie není ani jeden subjekt, o kterém by se dalo říci, že jeho znalost je pouze na základě pracovního listu a četby, což bude hrát roli v rámci závěrečné diskuze.

Ve třetí otázce, konkrétně u třetího řezu, byla pozorována změna v odpovědi pouze u tří čtenářů a jednoho žáka, který přečetl pouze část ukázky. V daném textu z románu *Plochozemě* jsou řezy představené v části, kdy se Koule ukazuje Čtverci a ukazuje mu tak různé řezy koule rovinou. Vzhledem ke změnám v odpovědích, je možné, že tato představa čtenářům pomohla k vymyšlení vhodného řezu v úloze tři.

V rámci páté otázky měli žáci nakreslit vizualizaci čtverce, krychle a teseraktu. Ke změně došlo u čtyř čtenářů, konkrétně u žáků VČH, VČ, ČH a VČP. Kromě třetího žáka všichni napsali, že se v době mezi testy na teserakt podívali, nebo o něm přemýšleli. Test, popřípadě četba, je tedy motivovaly k tomu si vizualizaci najít. Žačka ČH neuvedla, že by se s obrázkem v průběhu týdne setkala, je tak na zvážení, jak se k vizualizaci dostala. O představě teseraktu se ukázka přímo nezmiňuje, žáci by proto museli k jejímu zobrazeni sami dojít. U žáků VC ke změně odpovědi došlo u obou žáků. U prvního z nich k podobnému posunu jako u žačky ČH. U druhého žáka naopak došlo ke změně od vizualizace teseraktu k obrázku „mimozemšťana.[12]“ Z řad nečtenářů ke změně došlo u šesti z nich, jedná se o podobné posuny jako u čtenářů. Dá se tedy předpokládat, že schopnost nakreslit vizualizaci teseraktu souvisí hlavně s vyhledáním obrázku na internetu.

U šesté otázky byla představena Tabulka 2.4. Ke změně v odpovědích došlo u osmnácti případů, z toho ve třech ke zhoršení (ČH, VH, VPH), žáci ČH a VH nenapsali kromě počtu vrcholů, hran, stěn a nadstěn nic, není tak jasné, proč se jejich odpověď změnila. U žákyně VPH došlo překvapivě ke zhoršení, kvůli propojení s vizualizací teseraktu. Ze svého obrázku se snažila počet stěn spočítat, ale dopočítala se ke špatnému výsledku.

Co se týká změn k lepšímu, u nečtenářů došlo ke čtyřem a u čtenářů k deseti. Počet

[12]Na vyhodnocení této změny není dost informací o daném žákovi, a změna pravděpodobně nesouvisí s cílem této práce.

vrcholů tedy v druhém pracovním listě určili správně všichni čtenáři. Což není tak překvapivé, vzhledem k tomu, že tuto vlastnost ukázka explicitně popisuje. Počet nadstěn, které se v ukázce také popisují (i když pod pojmem počet „krychlí“), určil však ze čtenářů jen jeden žák (VČP). K pěti změnám došlo u žáků, kteří ukázku přečetli, ještě v rámci hran a stěn. Tyto vlastnosti v ukázce explicitně napsané nejsou, žáci se k jejich určení tak museli dostat pomocí analogického myšlení.

V rámci určení dalších vlastností teseraktu, žáci, kteří ukázku četli, prokazovali porozumění analogie představené v textu, když zprostředkovali informace, které si mohli načíst v rámci ukázky, zároveň ale projevili analogické myšlení, když vydedukovali vlastnosti, které v ukázce představené nebyly, a to na základě podobnosti a informací o druhé a třetí dimenzi.

U otázky číslo sedm se u čtenářů a žáků, kteří přečetli pouze část, objevovalo několik nových odpovědí, všechny však vychází z myšlenek představených v ukázce. U nečtenářů nebyly žádné nové myšlenky.

U úlohy, kdy žáci měli nakreslit představu, jak by viděli svého kamaráda, kdyby žili ve dvojrozměrném světě, došlo k posunu u většiny žáků. Někteří žáci nyní nakreslili místo dvojrozměrného obrázku úsečku, někteří přidali myšlenku, že se jedná o nekonečně tenkou úsečku, a neviděli bychom tedy nic. Překvapivá zde byla změna, kdy žáci místo vertikální úsečky v druhém pracovním listě nakreslili úsečku horizontálně. Je otázkou, zda žáci změnili svou odpověď, protože si mysleli, že jejich původní odpověď je špatná, anebo protože si první vybavili obrázek, který viděli v ukázce. Zajímavý posun se objevil u žačky VHP, která napsala, že se nad tématem zamýšlela a místo dvojrozměrného obrázku kamaráda tentokrát nakreslila úsečku. Nebyla zde tedy potřeba ukázky z románu, aby pomocí analogického myšlení došla k této úvaze.

Největší rozdíl mezi čtenáři a nečtenáři se objevil v poslední otázce. V rámci těchto odpovědí se objevuje posun v analogickém myšlení a schopnosti popisovat vlastnosti čtvrté dimenze. Někteří čtenáři popisují „pouze“ myšlenky představené v ukázce. Část z nich však zároveň propojuje informace, které se dozvěděli o druhé a třetí dimenzi (a přechodu mezi nimi), a na základě těchto informací a naučené analogie vymýšlí další souvislosti a podobnosti v rámci čtvrté dimenze, lze zde tedy pozorovat analogické myšlení žáků. Vzhledem k tomu, že k těmto posunům dochází u většiny čtenářů a u žádných nečtenářů, je možné, že k analogii napomohla právě tato ukázka, nikoli hledání na internetu, či samotné přemýšlení o tématu.

2.4 Diskuze

Tato část diplomové práce se podívá na výsledky a vyhodnocení prvního a druhého pracovního listu, a na základě těchto informací se provede diskuze nad předem položenými výzkumnými otázkami.

První část první otázky 1. (a) se ptá, zda se změní žákovo uchopení čtvrté dimenze po přečtení ukázky z románu *Plochozemě*. Vzhledem k tomu, že se ve studii neobjevili žáci, kteří ukázku četli, neměli počáteční znalost a nedohledávali informace, nejde s jistotou určit, které změny v žákovských odpovědích souvisí s četbou a které s jinými faktory (předešlé znalosti, dohledávání informací, či přemýšlení nad tématem). U odpovědí žáků, kteří ukázku četli, se však oproti nečtenářů objevuje více myšlenek spojených s analogií představenou v ukázce, a to nejenom jako reprodukce úvahy z ukázky, ale také pochopení systému přechodu z třetí do druhé dimenze a použití analogického myšlení na nalezení podobných vlastností v přechodu mezi čtvrtou a třetí dimenzí. S ohledem na schopnosti nakreslit vizualizaci teseraktu, se dá říci, že dovednost hyperkrychli znázornit souvisela spíše s vyhledáním pro ně izolovaného modelu vizualizace na internetu, než s originálním nápadem souvisejícím s ukázkou, či vlastním přemýšlením. Pouze u jednoho žáka (VČP) vizualizace působila, že dochází k postupnému zobecňování, kdy představil další netradiční pohled na znázornění čtyřrozměrné krychle 2.10. Nabízí se zde vysvětlení, že díky různým izolovaným modelům a analogii dosáhl zobecnění a došel ke generickému modelu vizualizace teseraktu.

U určení vlastností čtyřrozměrné krychle čtenáři prokázali mírně lepší změny v odpovědích, na které je možné nahlížet jako na důsledek četby, kde je část těchto úvah explicitně představena analogií. Největší změna uchopení čtvrté dimenze u žáků, kteří ukázku četli, oproti nečtenářům, je právě ve schopnosti propojit na základě analogie nahlédnutí do přechodu mezi druhou a třetí dimenzí a přechodu mezi třetí a čtvrtou dimenzí. A následně, na základě této analogie, určit další vlastnosti čtvrté dimenze. Žáci tímto propojením ukazují, že se nachází v rámci modelu geometrického myšlení ve fázi *formální dedukce*, jelikož jsou schopni tvořit hypotézy na základě vztahů mezi vlastnostmi tříd různých objektů.

Druhá část první otázky 1. (b) se ptá podobně jako část první, nahlíží zde však na žáky, kteří ukázku nečetli. Vzhledem k tomu, že dle popisu mohlo žáky v úvahách ovlivnit několik faktorů a nejen samotný test, je těžké na tuto otázku odpovědět. V rámci představených změn mezi výsledky prvního pracovního listu a druhého pracovního listu, se změny objevovaly hlavně v rámci vizualizace teseraktu, a to především u žáků, kteří si zobrazení vyhledali na internetu. Dále se objevily změny v představě dvourozměrného kamaráda, kdy jedna žačka uvedla, že po přemýšlení o dané problematice vyhodnotila, že kamaráda uvidí pouze jako úsečku. Na základě pozorovaných změn lze konstatovat, že došlo k mírné zaznamenané změně v žákovských uchopeních čtvrté dimenze, které (alespoň za pomoci motivace si údaje vyhledat) ovlivnil první pracovní list.

Druhá otázka pozoruje právě tuto motivaci. Na otázku, zda se s tématem mezi prvním a druhým pracovním listem setkali, odpovědělo sedm žáků, že si nějaké informace vyhledali (nejčastěji odpovídali, že se podívali, jak vypadá teserakt). V rámci čtenářů šlo o dva žáky, z řad nečtenářů o pět žáků a žáci, kteří přečetli pouze část, odpověděli, že se mimo ukázku v týdnu se čtvrtou dimenzí nesetkali. V některých žácích tedy pracovní list vzbudil zájem vyhledat si další informace, a to navíc hlavně u nečtenářů, což znamená, že z 22 žáků, kteří se účastnili obou kol studie, 15 trávilo čas čtvrtou dimenzí i mimo samotné vyplňování pracovního listu (buď četbou ukázky nebo vyhledáváním informací).

Třetí otázka se ptá, k jakým úvahám jsou žáci v rámci čtvrté dimenze schopni dojít. Dle fází modelu geometrického myšlení je paradoxně nejtěžší první fáze, a to ta *vizuální*. Žáci by v této fázi měli tělesa pojmenovávat pouze na základě toho, že tak „prostě vypadají," a to v rámci čtvrté dimenze není možné, jak bylo uvedeno v článku zabývajícím se „představou" čtvrté dimenze (Ogmen et al., 2020) v podkapitole 1.6. Druhá fáze je *popisná/analytická*. V této fázi žáci rozpoznávají dané útvary na základě vlastností. Ani tato schopnost se v rámci pracovních listů neobjevuje. Důležitá je však fáze třetí, a to *abstraktní/vztahová*. V této fázi žáci zvládají rozlišit podstatné vlastnosti a organizují objekty do tříd na základě společných charakteristik. V prvním pracovním listě někteří žáci předvedli tuto schopnost na správném určení počtu dimenzí u jednotlivých útvarů. Zároveň několik žáků dobře určilo počet vrcholů, hran, stěn i nadstěn čtyřrozměrné hyperkrychle. Ve čtvrté fázi modelu, kterou je *formální dedukce*, jsou žáci schopni tvořit hypotézy a všímat si vztahů mezi vlastnostmi tříd různých objektů. Jak bylo zmíněno u předchozí výzkumné otázky, této fáze dosahovalo několik žáků, když tvořili úvahy o čtvrté dimenzi v rámci poslední otázky. Zároveň jsme narazili na žáka (předem zmiňovaný žák D.), který na základě odvozených kombinatorických výpočtů zvládl přijít na několik podstatných vlastností teseraktu. Prokázal zde tak poslední fázi modelu geometrického myšlení, kterou je fáze *rigorózní*.

Cílem posledních dvou otázek, kterými jsou 4. (a) a (b), je snaha zodpovědět, jak se v průběhu experimentu změnilo žákovo uchopení druhé a třetí dimenze. U změn v odpovědích u řezů těles došlo k posunu u čtyř čtenářů a žádného nečtenáře. V této otázce jde vidět největší rozdíl, kdy žáci, kteří ukázku četli, byli schopni lepší představy v oblasti řezů trojrozměrných těles. U otázky sedm, která se žáků ptá, co by se změnilo, kdybychom žili ve dvojrozměrném světě, se v rámci čtenářů objevila jediná změna, a to myšlenka, že bychom neměli hloubku a viděli bychom se pouze jako úsečky. U nečtenářů k žádné změně nedošlo. Objevila se zde také možná krystalizace, vycházející z teorie generických modelů, kdy u některých žáků došlo k uvědomění, že to, že úsečka je jednorozměrný útvar, znamená, že ji není možné spatřit. V rámci otázky týkající se kresby kamaráda došlo k podobným změnám mezi čtenáři i nečtenáři, kdy několik žáků změnilo svůj pohled pomocí analogie. Podobně jak je tomu u prvních dvou otázek je i zde nemožné určit přesné faktory změn, které u žáků nastaly. Na základě výsledků a vyhodnocení pracovních listů však je možné konstatovat, že ke změnám došlo a u některých otázek se objevily mírné rozdíly mezi čtenáři a nečtenáři.

Závěr

Cílem této diplomové práce bylo analyzovat, zda jsou vybraní žáci schopni zlepšit své uchopení čtvrté dimenze pomocí analogie představené v ukázce z románu *Plochozemě*.

Práce byla členěna do dvou hlavních celků, kterými jsou teoretická část a praktická část.

Teoretická část začala krátkým úvodem do historie čtvrté dimenze a úvah s ní spojených. V další části byl představen Edwin Abbott Abbott a jeho dílo *Plochozemě*. Dále byly rozebrány témata analogie, literatura a čtvrtá dimenze v hodinách matematiky. Také zde byla popsána teorie generických modelů a model geometrického myšlení a na závěr byly představeny dva články týkající se naší limitace s představou čtvrté dimenze. Tato teoretická část sloužila jako příprava pro následnou praktickou část práce.

Praktická část práce se věnovala kvalitativní případové studii, vybrané a vytvořené na základě výzkumných otázek vycházejících z výše zmíněného cíle diplomové práce.

Výzkum probíhal ve dvou kolech, kdy žáci pátých ročníků šestiletého gymnázia dostali test týkající se čtvrté dimenze. Následně polovina z nich dostala četbu a po uplynulém týdnu žáci plnili test znova. Na základě analýzy odpovědí, porovnání a charakterizaci změn mezi pracovními listy a modelů poznávacího procesu žáků a jejich geometrického myšlení představených v teoretické části byla provedena diskuze nad výzkumnými otázkami.

Tato diplomová práce ukázala, že žáci jsou schopni dosáhnout analogického myšlení, a že po přečtení ukázky z románu *Plochozemě* přichází s novými myšlenkami a koncepty v rámci čtvrté dimenze.

Seznam použitých zkratek

V této diplomové práci se objevují následující zkratky:

0 Žák, který: nic o čtvrté dimenzi neviděl.

H Žák, který: si něco mezi prvním a druhým pracovním listem vy**H**ledal.

RVP G Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

V Žák, který: něco o čtvrté dimenzi před samotným testováním **V**iděl.

VC Žák, který: něco o čtvrté dimenzi před samotným testováním **V**iděl, ukázku z románu *Plochozemě* nepřečetl **C**elou.

VH Žák, který: něco o čtvrté dimenzi před samotným testováním **V**iděl a něco si mezi prvním a druhým pracovním listem vy**H**ledal.

VH Žák, který: něco o čtvrté dimenzi před samotným testováním **V**iděl, nad čtvrtou dimenzí mezi prvním a druhým testem **P**řemýšlel a něco si mezi prvním a druhým pracovním listem vy**H**ledal.

VČ Žák, který: něco o čtvrté dimenzi před samotným testováním **V**iděl a ukázku z románu *Plochozemě* **Č**etl.

VČH Žák, který: něco o čtvrté dimenzi před samotným testováním **V**iděl, ukázku z románu *Plochozemě* **Č**etl a něco si mezi prvním a druhým pracovním listem vy**H**ledal.

VČP Žák, který: něco o čtvrté dimenzi před samotným testováním **V**iděl, ukázku z románu *Plochozemě* **Č**etl a nad čtvrtou dimenzí mezi prvním a druhým testem **P**řemýšlel

ČH Žák, který: ukázku z románu *Plochozemě* **Č**etl a něco si mezi prvním a druhým pracovním listem vy**H**ledal.

Seznam literatury

Abbott, E. A. (1884). *Flatland: A Romance in Many Dimensions.* Seeley & Co. of London.

Abbott, E. A. (2014). *Plochozemí* (E. Maršíková, Překl.). Argo.

Aflalo, T. N., & Graziano, M. S. (2008). „Four-dimensional spatial reasoning in humans.“ *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *34*(5), 1066.

Ambinder, M. S., Wang, R. F., Crowell, J. A., Francis, G. K., & Brinkmann, P. (2009). „Human four-dimensional spatial intuition in virtual reality“. *Psychonomic bulletin & review*, *16*, 818–823.

Aristotle. (2018). *On the Heavens* (J. L. Stocks, Překl.). Global Grey.

Aubusson, P., Harrison, A., & Ritchie, S. (2006). *Metaphor and Analogy in Science Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-3830-5

Banchoff, T. F. (1990). *From Flatland to Hypergraphics: Interacting with Higher Dimensions.* https://www.math.brown.edu/tbanchof/abbott/Flatland/ISR/

Cajori, F. (1926). „Origins of Fourth Dimension Concepts“. *The American Mathematical Monthly*, *33*(8), 397–406. http://www.jstor.org/stable/2298325

Carroll, L. (2007). *Alenka v kraji divů a za zrcadlem* (H. Skoumalová & A. Skoumal, Překl.). Levné knihy.

Clements, D., & Battista, M. (1992). *Geometry and Spatial Reasoning.*

Fearnley-Sander, D. (1979). „Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra“. *The American Mathematical Monthly*, *86*(10), 809–817. http://www.jstor.org/stable/2320145

Grassmann, H. (1844). *Die Lineale Ausdehnungslehre Ein Neuer Zweig Der Mathematik*. Cambridge University Press.

Greenblatt, S., & Abrams, M. H. (2006). *The Norton Anthology of English Literature*. W.W. Norton.

Hawking, S. W. (1998). *A Brief History of Time*. Bantam Books.

He, D., Nguyen, D.-T., Ogmen, H., Nishina, S., & Yazdanbakhsh, A. (2023). „Perception of rigidity in three- and four-dimensional spaces“. *Frontiers in Psychology*, *14*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1180561

Hejný, M. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky* (M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková, Ed.). Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Helmholtz, H. (1876). „The Origin and Meaning of Geometrical Axioms“. *Mind*, *1*(3), 301–321.

Henderson, A. (2009). *PMLA*, *124*(2), 455–471. http://www.jstor.org/stable/25614286

Hendl, J. (2005). *Kvalitativní výzkum: Základní metody a aplikace*. Portál.

Hinton, C. H. (1880). „What Is the Fourth Dimension?“ *Dublin University Magazine*, *96*, 15–34.

Ibáñez, R. (2017). *Čtvrtý rozměr: Je náš svět jen stínem jiného světa?* (M. Rákosníková, Překl.). Dokořán.

Jann, R. (1985). „Abbott's "Flatland": Scientific Imagination and "Natural Christianity"“. *Victorian Studies*, *28*(3), 473–490. http://www.jstor.org/stable/3827305

Kasman, A. (2003). „Mathematics in fiction: An interdisciplinary course“. *Problems, Resources*, 1–16. https://doi.org/10.1080/10511970308984042

Lawrence, S. (2015). „The history of the fourth dimension: A way of engaging pupils in secondary classrooms“. In K. Krainer & N. Vondrová (Ed.), *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 1846–1852). https://hal.science/hal-01288395

Manning, H. P. (1914). *Geometry of Four Dimensions*. The Macmillan Company.

Miwa, T., Sakai, Y., & Hashimoto, S. (2017). „Learning 4-D spatial representations through perceptual experience with hypercubes“. *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*, *10*(2), 250–266.

Möbius, A. (1827). *Der barycentrische Calcul*. Johann Ambrosius Barth.

MŠMT. (2021). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G*. https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/

Mumford, D. (2006). *Chapter Three: Oresme and the Invention of Graphing*. Brown Univerity. https://www.dam.brown.edu/people/mumford/beyond/coursenotes/2006PartIb.pdf

Novotný, F. (2013). *O Platonovi, díl první, Život*. Nová Akropolis.

Ogmen, H., Shibata, K., & Yazdanbakhsh, A. (2020). „Perception, Cognition, and Action in Hyperspaces: Implications on Brain Plasticity, Learning, and Cognition“. *Frontiers in Psychology*, *10*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.03000

Parrinder, P. (2023, leden). Wells, Herbert George [H. G. Wells] (1866–1946). https://doi.org/10.1093/ref:odnb/36831

Pinker, S. (1998). *How the Mind Works*. Penguin Books.

Platón. (1993). *Ústava* (R. Hošek, Překl.). Svoboda-Libertas.

Polák, J. (2018). Analogie v matematice a jejich didaktické využití. *Matematika–Fyzika–Informatika*, *27*(5), 321–333. https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/424

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanging, Learning, and Teaching Problem Solving*. John Wiley; Sons.

Robbin, T. (2006). *Shadows of Reality: The Fourth Dimension in Relativity, Cubism, and Modern Thought*. Yale University Press.

Sriraman, B. (2003). Mathematics and Literature: Synonyms, Antonyms or the Perfect Amalgam? *Australian Mathematics Teacher*, *59*(4), 26–31. https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&AuthType=ip,shib&db=asn&AN=11552523&lang=cs&site=ehost-live&scope=site

Sriraman, B. (2004). „Mathematics and Literature (the sequel): Imagination as a pathway to advanced mathematical ideas and philosophy“. *Australian Mathematics Teacher*, *60*(1), 17–23. https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&AuthType=ip,shib&db=asn&AN=12644474&lang=cs&site=ehost-live&scope=site

Stehlíková, N., Hejný, M., & Jirotková, D. (2005). *Úvod do studia analytické geometrie.* Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.

Stringham, W. I. (1880). „Regular Figures in n-Dimensional Space“. *American Journal of Mathematics*, *3*(1), 1–14. http://www.jstor.org/stable/2369441

„tesseract, n.“ (2023). In *Oxford English Dictionary.* Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/OED/1084602234

van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* Academic Press.

Wallis, J. (1685). *A treatise of algebra, both historical and practical : shewing the original, progress, and advancement thereof, from time to time, and by what steps it hath attained to the heighth at which now it is ; with some additional treatises.* Richard Davis. http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/MPIWG:GK8U243K

Wang, R. F. (2014). „Human four-dimensional spatial judgments of hyper-volume“. *Spatial Cognition & Computation*, *14*(2), 91–113.

Wells, H. G. (1895). *The Time Machine.* William Heinemann.

Zamboj, M. (2020). „Visualizing Objects of Four-Dimensional Space: From Flatland to the Hopf Fibration (preprint)“.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam příloh

Pracovní list 1

Jméno:
Třída:
Datum:

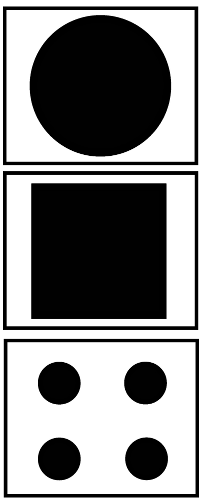
Pokuste se odpovědět na následující otázky. Jedná se o témata, se kterými jste se pravděpodobně ve výuce nesetkali, pokud si tedy nejste jistí odpovědí, nic se neděje, nebojte se odpověď odhadnout nebo napsat „nevím“.

1. Setkali jste se už někdy s představou čtvrté dimenze?
   ANO x NE (Zakroužkujte)
   Pokud ano, stručně napište kde/při jaké příležitosti:

2. Ke každému pojmu zkuste napsat, kolika rozměrný (dimenzionální) je to útvar/objekt:

   - bod
   - úsečka
   - papír
   - přímka
   - člověk
   - stůl
   - čtverec
   - krychle
   - monitor
   - kruh
   - trojúhelník
   - koule

3. Představte si trojrozměrný objekt a jeho řez rovinou (průnik objektu s rovinou). Napište, jaké 3D objekty by mohly mít tyto řezy: (V každém rámečku je řez jednoho objektu.)



4. Zkuste nakreslit různé rovinné řezy válce (průnik válce s rovinou).

5. Zkuste načrtnout svou představu čtverce, krychle a čtyřrozměrné krychle (hyper-krychle/teseraktu):

6. Napište, co si myslíte o čtyřrozměrné krychli. Kolik bude mít vrcholů, hran, stěn, nadstěn... Napadnou vás nějaké další vlastnosti, které může mít? Napište jaké.

7. Co by se změnilo, kdybychom byli dvojrozměrné bytosti žijící ve dvojrozměrném světě? (Zkuste popsat.)

8. Představte si, že žijete ve dvojrozměrném světě, nakreslete, jak byste viděli svého kamaráda:

9. Představte si, že nás pozoruje čtyřrozměrná bytost. Jaké rozdíly by spatřila mezi naším a čtyřrozměrným světem? (Zkuste popsat.)

Pracovní list 2

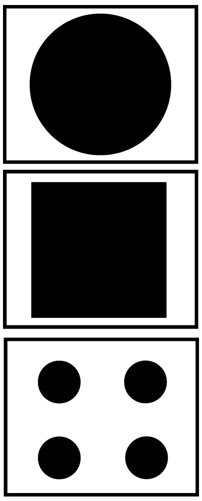
Jméno:
Třída:
Datum:

Pokuste se odpovědět na následující otázky. Jedná se o témata, se kterými jste se pravděpodobně ve výuce nesetkali, pokud si tedy nejste jistí odpovědí, nic se neděje, nebojte se odpověď odhadnout nebo napsat „nevím“.

1. Četli jste ukázku z Plochozemě? (Zakroužkujte.)
   - ANO (Přečetl/a jsem celou ukázku.)
   - NE (Nepřečetl/a jsem ukázku vůbec.)
   - Jiná odpověď:

2. Setkali jste se od posledního setkání s nějakou představou čtvrté dimenze? (Mimo doporučenou četbu.) Pokud ano, u jaké příležitosti? (Napište dvě věty.)

3. Představte si trojrozměrný objekt a jeho řez rovinou (průnik objektu s rovinou). Napište, jaké 3D objekty by mohly mít tyto řezy: (V každém rámečku je řez jednoho objektu.)



4. Zkuste nakreslit různé rovinné řezy válce (průnik válce s rovinou).

5. Zkuste načrtnout svou představu čtverce, krychle a čtyřrozměrné krychle (hyper-krychle/teseraktu):

6. Napište, co si myslíte o čtyřrozměrné krychli. Kolik bude mít vrcholů, hran, stěn, nadstěn... Napadnou vás nějaké další vlastnosti, které může mít? Napište jaké.

7. Co by se změnilo, kdybychom byli dvojrozměrné bytosti žijící ve dvojrozměrném světě? (Zkuste popsat.)

8. Představte si, že žijete ve dvojrozměrném světě, nakreslete, jak byste viděli svého kamaráda:

9. Představte si, že nás pozoruje čtyřrozměrná bytost. Jaké rozdíly by spatřila mezi naším a čtyřrozměrným světem? (Zkuste popsat.)