

Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jak žáci střední školy řeší metrické úlohy ve stereometrii

How secondary school pupils solve metric problems in 3D geometry

Bc. Anna Jankovcová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní a střední školy – matematika

Odevzdáním této diplomové práce na téma Jak žáci střední školy řeší metrické úlohy ve stereometrii potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 4. 12. 2022

Ráda bych touto cestou poděkovala prof. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za vedení mé diplomové práce, za její ochotu, pomoc a podnětné připomínky. Velké poděkování patří také mé rodině a partnerovi za nekonečnou trpělivost a podporu, které se mi dostávalo v průběhu celého studia.

## **ABSTRAKT**

Hlavním cílem této práce je získat hlubší vhled, jakým způsobem řeší žáci střední školy metrické úlohy v prostoru. Všechny vybrané úlohy jsou řešitelné s využitím podobnosti. Protože to není jediný způsob, jak úlohy vyřešit, tak v práci také sleduji postupy a strategie, jaké žáci při řešení úloh volí.

Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část.

V teoretické části vymezuji základní pojmy a zabývám se problémy, které se mohou při řešení vybraných úloh objevit. Také popisuji očekávané výstupy výuky stereometrie v kurikulárních dokumentech.

V praktické části nejdříve analyzuji, jakým způsobem jsou v učebnicích pro střední školy řešeny vybrané metrické úlohy. Poté již popisuji průběh svého výzkumu, kterého se zúčastnilo 12 žáků. Jako výzkumnou metodu jsem zvolila rozhovor s žáky nad řešením vybraných úloh. Tuto metodu jsem zvolila proto, abych získala dostatečné informace o problémech, které žáci při řešení mají, a abych mohla lépe sledovat postupy, jakými úlohy řeší.

V závěru práce jsou shrnuty postupy, jakými žáci střední školy úlohy řeší, a také problémy, které se při řešení u žáků objevily. Výzkum ukázal, že žáci řeší úlohy různými způsoby s tím, že převažuje využití goniometrických funkcí. Někteří žáci měli problém si prostorovou situaci zakreslenou v obrázku představit. Některé chyby, které se při řešení úloh objevily, souvisely s formálními poznatky. Řada problémů vyplývala z nepřesně nakreslených obrázků. U úloh, které jsou zadány obecně, měli někteří žáci problémy s úpravou algebraických výrazů.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

metrické úlohy, stereometrie, představivost, analýza učebnic, chyby

## **ABSTRACT**

The aim of this thesis is to gain a deeper understanding of how high school students solve tasks in three-dimensional metric space. All of the selected tasks are solvable using similarity. Since this is not the only way to solve these problems, I also observe the procedures and strategies that students employ whilst solving them.

The thesis is divided into a theoretical and a practical part.

In the theoretical part I define the basic terms and deal with difficulties which might occur while solving the selected problems. I also describe the expected outcomes of stereometry teaching in curricular documents.

In the practical part, I firstly analyse the way certain metric problems are solved in high school textbooks. Then I describe how I did my research, in which 12 students participated. As my method for conducting the research I chose to interview the students about their solutions to the selected tasks in order to obtain enough information about the challenges that the students have in solving these problems and to observe the strategies they use.

In the closing section of this thesis, I summarize the procedures which high school students use to solve metric problems, as well as the difficulties that some students had. My research has shown that students use various techniques to solve metric problems amongst which the usage of trigonometric functions prevails. Some students have trouble with visualizing the context of the situation in which the problem takes place (in other words they struggle to see things in 3D space in their minds). Some mistakes which occurred were related to mechanical knowledge. A number of mistakes were caused by inaccurate drawings. Some students also had trouble with simplifying algebraic expressions if the problem was given in general terms.

## **KEYWORDS**

metric tasks, 3D geometry, imagination, textbook analysis, errors

## Obsah

Úvod .....	7
Teoretická část .....	9
1 Vymezení základních pojmů .....	9
2 Stereometrie v kurikulárních dokumentech .....	14
2.1 Rámcový vzdělávací program .....	14
2.2 Školní vzdělávací program školy .....	15
3 Matematické schopnosti a dovednosti .....	18
3.1 Představivost a geometrická představivost .....	19
3.2 Geometrické myšlení a utváření pojmů .....	21
3.3 Znalosti a formální znalosti .....	23
3.4 Chyba v matematice .....	24
4 Obrázky v geometrii .....	28
4.1 Problém vztahu mezi geometrickými objekty a jejich reprezentací .....	28
4.2 Volné rovnoběžné promítání .....	29
4.3 Prototypy v geometrii .....	30
5 Řešení matematické úlohy .....	32
5.1 Obecně zadané úlohy a problémy s algebraickými výrazy .....	34
6 Metrické úlohy ve státní maturitě .....	36
Praktická část .....	37
7 Řešené úlohy v učebnicích pro střední školu .....	37
7.1 Matematika pro gymnázia – Stereometrie (nakladatelství Prometheus), zpracovala Eva Pomykalová .....	37
7.2 Elektronická učebnice – Matematika pro střední školy, Stereometrie II (nakladatelství Fraus), zpracoval kolektiv autorů .....	39

7.3	Učebnice pro střední školy – Stereometrie – (nakladatelství Didaktis), zpracoval Jan Vondra .....	40
8	Popis výzkumu .....	42
8.1	Vybrané metrické úlohy řešitelné pomocí podobnosti .....	42
8.2	Výběr respondentů a průběh výzkumu .....	43
8.3	Pilotní část.....	44
8.4	Možné řešení úloh s využitím podobnosti .....	44
9	Výsledky výzkumu .....	51
9.1	Úloha 1a).....	51
9.2	Úloha 1b) .....	63
9.3	Úloha 2a).....	66
9.4	Úloha 2b) .....	69
10	Diskuse a závěr.....	72
	Použitá literatura.....	77

## Úvod

Metrické úlohy v prostoru mohou být pro některé žáky velmi obtížné, proto jsem se rozhodla získat hlubší vhled, jakým způsobem žáci tyto úlohy řeší. Zaměřila jsem se na metrické úlohy v prostoru, které se týkají vzdáleností. Nejen při řešení těchto úloh potřebujeme mít schopnost si celou situaci v prostoru představit, a právě nedostatečná představivost může být jedním z problémů, který mohou žáci při řešení takových úloh mít. Další problémy mohou být spojené například s nepřesnými obrázky nebo formálními znalostmi některých matematických pojmů. Pro řešení těchto úloh je potřeba mít určité schopnosti, dovednosti, ale také znalosti, proto mohou být tyto úlohy pro žáky obtížné a domnívám se, že je tedy vhodné se jimi více zabývat. Ve své práci zjišťuji, jaké obtíže žáci při řešení těchto úloh mají a jakých chyb se při řešení dopouštějí.

V teoretické části diplomové práce představím na základě studia literatury a vlastní zkušenosti základní obtíže, které se při řešení vybraných úloh mohou objevit, a strategie, které by mohli žáci při řešení těchto úloh využít. Teoretická část se skládá ze šesti kapitol.

V první kapitole se budu věnovat vymezení základních pojmů, které je nutné znát k pochopení problematiky vybraných úloh. V další kapitole se budu zabývat, jakým způsobem je stereometrie zakotvena v kurikulárních dokumentech. Zaměřím se především na očekávané výstupy, které se týkají metrických úloh v prostoru. Protože všechny úlohy, které jsem pro svůj výzkum vybrala, je možné vyřešit s využitím podobnosti, zmíním se také o tom, kdy se žáci podle těchto dokumentů s podobností poprvé setkávají. Ve třetí kapitole se zaměřím na matematické schopnosti a dovednosti, které je potřeba při řešení úloh v geometrii mít. Jednou z těchto schopností je již zmíněná představivost. V této kapitole se budu také zabývat chybami, které hrají nejen v matematice, ale i v našem životě důležitou roli.

Při řešení úloh, a to nejen v geometrii, nám mohou pomoci obrázky, proto se v další kapitole budu věnovat obrázkům v geometrii. V páté kapitole představím způsoby řešení matematických úloh, kterými mohou žáci úlohy řešit. V poslední kapitole teoretické části se podívám na to, jaké metrické úlohy se objevují ve společné části maturitní zkoušky z matematiky.

V praktické části nejdříve rozeberu, jakým způsobem jsou řešené metrické úlohy v prostoru v učebnicích pro střední školy. Následně se již budu věnovat samotnému výzkumu. Pro svůj výzkum jsem vybrala metrické úlohy v prostoru, které je možné vyřešit s využitím podobnosti. To samozřejmě není jediný způsob, jak tyto úlohy vyřešit, proto v práci popíšu i další způsoby, které žáci použili.

Výzkum jsem provedla na Gymnáziu Jaroslava Vrchlického v Klatovech. Rozhodla jsem se zvolit metodu rozhovoru, abych mohla co nejlépe sledovat postupy, jakými budou žáci úlohy řešit. Na závěr uvedu shrnutí jevů, které se objevily napříč všemi úlohami.

## **Teoretická část**

### **1 Vymezení základních pojmů**

Podle Kuřiny (2005) lze **geometrii** vnímat jakou soubor určitých dovedností. Tyto dovednosti nazývá umění a řadí mezi ně: umění vidět, umění sestrojovat a umění dokazovat. Všechny uvedené dovednosti nejsou čistě geometrické, ale souvisí i s dalšími lidskými činnostmi. Vidět můžeme nejen prostorový či rovinný geometrický útvar, ale také například nějaký přírodní útvar. Stejně tak sestrojít můžeme nejen trojúhelník nebo obdélník, ale i algebraický výraz nebo přímo stroj. Podobně můžeme dokazovat tvrzení nejen v geometrii, ale i v algebře nebo třeba u soudu. Dovednostem se budu více věnovat v kapitole „Matematické schopnosti a dovednosti“. Někdy Kuřina (2006) uvádí ještě čtvrté umění, a to umění počítat. Tato umění bychom se podle něj měli u žáků snažit co nejvíce rozvíjet.

Geometrie má své praktické využití nejen v technických oborech, jakými jsou například stavitelství nebo strojírenství, ale také například v architektuře nebo v malířství. Nakonec prostorovou představivost využíváme všichni, a to při každodenních činnostech, jakými jsou například parkování auta nebo skládání nákupu do tašky.

Ve školské praxi žáci zpravidla nejprve poznávají planimetrii čili geometrii v rovině, která se zabývá nejen rýsováním, ale i vlastnostmi rovinných útvarů a transformacemi v rovině. Později se seznamují se stereometrií čili geometrií v prostoru, která vyžaduje mj. schopnost zachytit prostorovou situaci v rovinném obrázku nebo naopak schopnost vidět rovinný obrázek prostorově. Žáci konstruují řezy, vytvářejí sítě těles či poznávají vlastnosti prostorových útvarů a transformace v prostoru.

Protože se ve svém výzkumu budu zabývat jen jednou z oblastí stereometrie, podíváme se nyní na její možnou klasifikaci podle Hejného a kolektivu z knihy *Teória vyučovania matematiky 2*. Autoři se původně pokoušeli o vytvoření tabulky, ve které by bylo možné uspořádat veškeré učivo stereometrie seřazené podle náročnosti učiva. Takovou tabulku se jim však sestavit nepodařilo, proto uvádí alespoň přehled učiva stereometrie podle obsahu (Hejný a kolektiv, 1987).

Autoři dělí stereometrii do tří základních oblastí: Rozvoj prostorové představivosti, Kalkulativní stereometrie a Teoretická stereometrie.

Rozvoj prostorové představivosti (spontánní stereometrie, ...)

- a) geometrické těleso (hry s kostkami, modelování těles podle předlohy nebo obrázku, kreslení těles, ...)
- b) síť těles (vytváření sítě těles, konstrukce tělesa ze sítě, ...)
- c) pohyby tělesa (odvalování tělesa, zápis tohoto pohybu, ...)
- d) geometrie povrchu tělesa (pohyb po hranách tělesa, pohyb po povrchu tělesa, ...)
- e) kombinatorická geometrie těles (vybarvování hran, stěn tělesa, kombinatorické hry, ...)
- f) prostorová bludiště
- g) řezy těles

Kalkulativní stereometrie

- a) tělesa a jejich vlastnosti
- b) měření objemů a povrchů těles
- c) měření vzdáleností a úhlů v tělese a na jeho povrchu

Teoretická stereometrie

- a) „rozšíření prostoru“ z těles na euklidovský trojrozměrný prostor
- b) prostorové transformace
- c) axiomatizace poznatků

Ve své práci se zaměřím na úlohy z druhé oblasti, tedy z kalkulativní stereometrie, a to konkrétně na metrické úlohy v prostoru.

**Metrické úlohy v prostoru** jsou úlohy, které se zaměřují na metrické vlastnosti. V *Přehledu středoškolské matematiky* (Polák, 2008) zjistíme, že sem patří odchylky přímek a kolmost přímek, kolmost přímky a roviny, vzdálenosti bodů, přímek a roviny, odchylky dvou roviny, kolmost dvou roviny, pravoúhlé promítání a odchylka přímky a roviny.

Metrické úlohy, které jsem pro svůj výzkum vybrala, se zabývají vzdáleností bodu od přímky a vzdáleností bodu od roviny, proto dále uvádím definice těchto pojmů.

**Vzdálenost bodu  $M$  od přímky  $p$  v prostoru** lze definovat jako vzdálenost bodu  $M$  od bodu  $P$ , který je průsečíkem přímky  $p$  a k ní kolmé roviny  $\tau$  vedené bodem  $M$ . Můžeme ji též vypočítat jako vzdálenost bodu  $M$  od přímky  $p$  v rovině jimi určené.

(Polák, 2008, s. 513)

Navážu na poslední větu definice, a to že vzdálenost bodu od přímky lze vypočítat jako vzdálenost bodu od přímky v rovině jimi určené. Takto totiž definují vzdálenost bodu od přímky v prostoru v učebnici *Stereometrie pro gymnázia* z nakladatelství Prometheus.

**Vzdálenost bodu od přímky** můžeme určit jako vzdálenost bodu od přímky v rovině, neboť bod a přímka v prostoru určují rovinu (pokud bod na přímce neleží).

Vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $p$  je nejmenší ze všech vzdáleností bodu  $A$  od jednotlivých bodů  $X$  přímky  $p$ . Je to délka úsečky  $AP$ , kde  $P$  je pata kolmice vedené v rovině  $Ap$  bodem  $A$  k přímce  $p$ . Vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $p$  značíme  $|Ap|$ . Je-li  $A \in p$ , je  $|Ap| = 0$ .

(Pomykalová, 1995, s. 84)

**Vzdáleností bodu  $M$  od roviny  $\rho$**  nazýváme vzdálenost bodu  $M$  od paty  $P$  kolmice vedené bodem  $M$  k rovině  $\rho$ .

(Polák, 2008, s. 513)

Všechny úlohy, které jsem pro svůj výzkum vybrala, se dají řešit s využitím podobnosti, popř. využitím goniometrických funkcí nebo pomocí obsahu trojúhelníku, proto zde ještě definuji i tyto pojmy.

Dva trojúhelníky  $ABC$  a  $A'B'C'$  se nazývají **podobné trojúhelníky**, právě když existuje takové kladné číslo  $k$  (zvané **koeficient podobnosti**), že platí  $|A'B'| = k \cdot |AB|$ ,  $|B'C'| = k \cdot |BC|$ ,  $|A'C'| = k \cdot |AC|$  čili

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k.$$

(Polák, 2008, s. 436)

Při řešení úlohy se může stát, že potřebujeme rozhodnout o tom, zda jsou dva trojúhelníky podobné. Nemusíme však vždy znát délky všech stran v trojúhelnících, proto při rozhodování stačí ověřit, zda je splněno jedno z následujících kritérií:

1. Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují ve dvou úhlech.
2. Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly jimi sevřené.
3. Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže jsou si rovny poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly proti větší z nich.

Goniometrické funkce můžeme definovat pomocí jednotkové kružnice. Při řešení úloh v trojúhelníku nám však postačí definice **goniometrických funkcí ostrého úhlu**. Takovou definici najdeme například v *Přehledu matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia* (Odvárko a Kadleček, 2004).

Poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu  $\alpha$  a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku se nazývá **sinus  $\alpha$** .

Poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu  $\alpha$  a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku se nazývá **kosinus  $\alpha$** .

Poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu  $\alpha$  a délky odvěsny přilehlé k úhlu  $\alpha$  se nazývá **tangens  $\alpha$** .

Poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu  $\alpha$  a délky odvěsny protilehlé k úhlu  $\alpha$  se nazývá **kotangens  $\alpha$** .

Tedy v pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$ , jehož odvěsny mají délky  $a, b$ , přepona délku  $c$  a velikost vnitřního úhlu při vrcholu  $A$  je  $\alpha$ , platí:  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ ,  $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$ .

Platí tvrzení: Všechny pravoúhlé trojúhelníky, které mají stejnou velikost ostrého úhlu, jsou podobné. Toto tvrzení vysvětluje, proč lze některé úlohy, které jsem pro svůj výzkum vybrala, řešit nejen s využitím podobnosti trojúhelníků, ale také s využitím goniometrických funkcí.

Výše jsem zmínila, že vybrané úlohy lze vyřešit i pomocí obsahu trojúhelníku. **Obsah trojúhelníku** se vypočte jako polovina součinu délky libovolné strany a k ní příslušné výšky. Toho můžeme využít například, pokud potřebujeme dopočítat výšku v trojúhelníku na stranu, jejíž délku známe. Potřebujeme k tomu znát ještě délku další strany a výšky na tuto stranu. Pokud si vyjádříme obsah trojúhelníku pomocí obou těchto stran a příslušných výšek, můžeme z rovnosti těchto obsahů dále vyjádřit hledanou výšku.

V průběhu řešení budou možná žáci potřebovat i znalost Pythagorovy věty, proto ji zde také uvádím.

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou **pravoúhlého** trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad jeho odvěsnami.

(Odvárko a Kadleček, 2004, s. 190)

## 2 Stereometrie v kurikulárních dokumentech

Jednu z prvních zkušeností se stereometrií získávají žáci již v předškolním věku. Například díky hře s kostkami mají skvělou příležitost poznávat základní vlastnosti těchto těles. Současně si tak o nich mohou utvářet lepší představu. Dále se podíváme, jak je stereometrie zakotvena v rámcových vzdělávacích programech pro základní vzdělávání a gymnázia. Rámcové vzdělávací programy tvoří v České republice obecně závazný rámec pro tvorbu školních vzdělávacích programů.

### 2.1 Rámcový vzdělávací program

Již na prvním stupni základní školy najdeme v RVP ZV (2021) tematický okruh Geometrie v rovině a v prostoru. Podle něho by žáci na prvním stupni měli rozlišovat základní útvary v prostoru, mezi které patří kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel a válec. Prostorovou představivost zde najdeme v tematickém okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy. Prostorové představivosti se více budu věnovat v kapitole „Představivost a geometrická představivost“.

Mezi očekávané výstupy na druhém stupni základní školy, které se týkají stereometrie, patří:

- Žák určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti.
- Žák odhaduje a vypočítá objem a povrch těles.
- Žák načrtne a sestrojí síť základních těles.
- Žák načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině, analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.

Jako další je zde uvedený výstup, který se týká podobnosti trojúhelníků, a to že žák užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků.

V tematickém okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy najdeme ještě mezi očekávanými výstupy:

- Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.

(Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, 2021)

Z výše uvedeného plyne, že žáci se s geometrií v prostoru seznamují již na základní škole. Učí se kreslit jednoduchá tělesa a analyzovat jejich vlastnosti. Současně by měli být schopni užívat při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků. Podíváme se na to, co by se měli naučit dále na gymnáziu.

V RVP G (2021) najdeme tematický celek Geometrie. Mezi očekávanými výstupy, které se týkají stereometrie, patří:

- Žák používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru.
- Žák určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky.
- Žák využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému.
- Žák v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů.
- Žák pracuje s proměnnými a iracionálními čísly.
- Žák zobrazí ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan, sestrojí a zobrazí rovinný řez těchto těles.
- Žák řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí.

Mezi učivem je dále uvedena mimo jiné i shodnost a podobnost trojúhelníků.

(Rámcový vzdělávací program pro gymnázia, 2021)

Domnívám se, že všechny tyto body potřebuje žák ovládat při řešení úloh v prostoru. Konkrétně při řešení metrických úloh potřebuje ovládat dokonce všech prvních pět bodů, což může být jeden z důvodů, proč mohou být tyto úlohy pro žáky obtížné. Vyžadují totiž poměrně dost předchozích znalostí a zkušeností.

## 2.2 Školní vzdělávací program školy

Školní vzdělávací program je kurikulární dokument, na jehož vzniku se podílejí pedagogičtí zaměstnanci školy. V rámci ŠVP je učivo dále uspořádáno do jednotlivých předmětů nebo ucelených částí. Dále se podíváme do ŠVP Gymnázia Jaroslava Vrchlického v Klatovech, kde jsem výzkum prováděla, a to konkrétně na výuku stereometrie a podobnosti trojúhelníků. Škola kromě toho, že poskytuje všeobecný rozhled, nabízí studentům možnost

přípravu podle konkrétního zaměření, a to rozsáhlou nabídkou volitelných předmětů. Mezi hlavní priority řadí využívání technologií ve výuce, širokou nabídku jazyků a všestrannost.

Na škole je otevíráno čtyřleté, šestileté a osmileté studium, proto jsou na škole realizovány dva vzdělávací programy: jeden pro nižší stupeň víceletého gymnázia a druhý pro čtyřleté gymnázium a vyšší stupeň víceletého gymnázia. V obou programech najdeme vzdělávací obsah předmětu Matematika rozdělený podle jednotlivých ročníků.

Podle *Školního vzdělávacího programu pro nižší stupeň víceletého gymnázia*, který je zpracovaný podle RVP ZV z roku 2022, patří mezi výstupy v sekundě:

- Žák užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků.
- Žák zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů.

V tercii najdeme mezi výstupy týkajícími se stereometrie a podobnosti:

- Žák načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině.
- Žák zdůvodňuje a využívá polohové metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku.
- Žák řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.

Mezi očekávanými výstupy školy najdeme:

- Žák analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu.
- Žák odhaduje, měří a počítá velikosti objektů v praktickém životě, počítá vzdálenosti, úhly, obvody, obsahy a objemy.
- Žák sestrojuje a črtá prostorové útvary ve volném rovnoběžném promítání.

V kvartě najdeme mezi očekávanými výstupy, že žák vyhledá podobné trojúhelníky, zdůvodní podobnost a určí poměr podobnosti. Mezi očekávanými výstupy školy je, že žák užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků.

Ve Školním vzdělávacím programu pro čtyřleté gymnázium a vyšší stupeň víceletého gymnázia z roku 2022 je planimetrii věnována část prvního a druhého ročníku. V prvním ročníku najdeme mezi učivem podobnost trojúhelníků. Stereometrii je věnován až třetí ročník.

Mezi výstupy, které se týkají metrických úloh najdeme:

- Žák určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky.
- Žák využívá náčrt při řešení prostorového problému.
- Žák v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů.
- Žák zobrazí ve volné rovnoběžné projekci hranol a jehlan, sestrojí a zobrazí rovinný řez těchto těles.

Mezi očekávanými výstupy školy je dále uvedeno:

- Žák definuje pojem odchylka a vzdálenost a umí je určit výpočtem.

Z očekávaných výstupů plyne, že žák by měl umět určit hledanou vzdálenost v prostoru, aplikovat funkční vztahy při početních úlohách a úpravy výrazů. Při řešení by měl využívat náčrt prostorového problému.

### 3 Matematické schopnosti a dovednosti

V psychologii je schopnost definována jako „soubor předpokladů nutných k úspěšnému vykonávání určité činnosti“ (Hartl, 2004, s. 243–244). Schopnosti jsou podmíněny vlohami, což jsou dědičné vlastnosti nervového systému. Ty jsou během života rozvíjeny a zároveň na ně může působit i vliv prostředí. Vlohy udávají mez, jak moc může být daná schopnost u člověka rozvinuta (Říčan, 1964). Pod matematickou schopností potom rozumíme schopnost řešit matematické úlohy, a to nejen ty, které žák řeší ve škole. Matematické schopnosti jsou také podmínkou úspěšného studia a uplatňování matematiky (Košč, 1972).

Košč (1972) dále dělí matematické schopnosti na jednotlivé faktory:

- Všeobecný faktor se v určité míře projevuje při řešení matematických úloh obecně.
- Číselný faktor se projevuje při řešení úloh, ve kterých se přímo manipuluje s číslicemi a čísly. Je to schopnost používat pravidla pro symboliku.
- Prostorový faktor se týká nejen schopnosti orientace v prostoru, ale i schopnosti vidět vlastnosti představovaných nebo konkrétních objektů. Někteří lidé zde mohou vykazovat jisté nedostatky.
- Slovní faktor se uplatňuje při řešení slovních matematických příkladů, ale i v rámci aritmetiky, geometrie nebo algebry.
- Usuzování se projevuje v úlohách, které vyžadují jisté odhalení vztahů, popřípadě pokud je potřeba vyvodit nějaké pravidlo.
- Školní faktor souvisí s tím, že čím je žák starší, tím více závisí úroveň jeho matematických schopností na vědomostech, které získal učením ve škole.

Z výše uvedeného plyne, že při řešení geometrické úlohy je potřeba nejedné matematické schopnosti. Konkrétně při řešení metrické úlohy v prostoru je potřeba nejdříve umět si situaci představit, k tomu potřebujeme prostorový faktor. Pokud je tato úloha zadána obecně, bude potřeba slovního faktoru při úpravě algebraického výrazu, pokud je úloha zadána konkrétně, bude potřeba uplatnit číselný faktor. A nakonec řešení úlohy nemusí být ihned zřejmé, a bude tedy potřeba usoudit, které vztahy potřebujeme a které ne.

S pojmem matematické schopnosti bývá často uváděn i pojem matematické dovednosti. Cígler (2018) uvádí, že dovednosti můžeme definovat jako konkrétní úroveň vývoje

matematických znalostí více závislou na učení. Zatímco matematické schopnosti mají přímý vliv na podávaný matematický výkon, matematické dovednosti jsou více spjaté se školním kurikulem a s celkově naučenými znalostmi. Význam těchto dvou pojmů se poměrně dost prolíná, proto autor tyto dva pojmy odděluje na základě jednoho důležitého rysu následovně. Pod matematickými schopnostmi rozumí kognitivní schopnosti, které vedou k vyřešení neznámých matematických problémů. Dovednosti se projevují jako konkrétní výkon v úkolech přiměřených kurikulu s tím, že při tomto procesu se zapojují matematické schopnosti.

### **3.1 Představivost a geometrická představivost**

Jednou ze schopností, kterou při řešení geometrických úloh v prostoru potřebujeme, je představivost.

V pedagogickém slovníku je představivost definována jako „vytváření myšlenek a obrazů bez přímé účasti smyslových podnětů; nejčastěji jde o spojování útržků předchozích smyslových zkušeností do nových celků“. Představu lze potom definovat jako „vybavený či přepracovaný minulý zážitek a vjem“ (Hartl, 2004, s. 205).

Podobně definují představivost i Půlpán, Kuřina a Kebza, kteří představivost vnímají jako funkci, která nám umožňuje zpřítomnění jevů, které nejsou zrovna přítomny. Toto zpřítomnění jevů může být jednak vyvolání již známých podnětů z minulosti, jednak vytváření nových, dosud neexistujících produktů (Půlpán et al., 1992).

Podle Kuřiny (1991) bývá představivost v matematice obvykle chápána velmi úzce a je spojována především s geometrickou představivostí.

Geometrickou představivostí rozumíme složku názorného myšlení, která nám umožňuje vybavovat si geometrické útvary a jejich vlastnosti. Obvykle můžeme používat, případně si vytvářet jedno, dvou nebo třídímní modely (Kuřina, 1987). Geometrická představivost bývá někdy spojována s pojmem prostorová představivost. Tu Molnár (2004) definuje jako soubor schopností, které se týkají reprodukčních i anticipačních, statistických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru.

Rozdíl mezi pojmy prostorová představivost a geometrická představivost blíže popisuje Dušek (1964). Podle autora můžeme prostorovou představivost využívat nejen v matematice, ale i v jiných předmětech. Pokud je však představivost vypěstována v jiném předmětu, pak nemusí být nutně zárukou představivosti v matematice. Proto v matematice raději používá pojem geometrická představivost jako představivost, která je spojena s geometrickým obsahem.

Říčan (2010) uvádí, že prostorová představivost zahrnuje tři důležité schopnosti. První z nich je prostorová orientace, ta umožňuje člověku určování jeho polohy v jeho okolí. Druhou schopností je vizualizace, ta nám umožňuje představit si, do jakých vzájemných vztahů se dostanou předměty mimo nás. Poslední, kinestetická představivost, nám umožňuje určit výsledný pohyb různých objektů.

Z předchozího vyplývá, že definice pojmů nejsou úplně jednotné a že hranice mezi jednotlivými pojmy nejsou úplně jasné. Většina úloh, se kterými se žáci ve stereometrii setkávají, se odehrávají v nějakém geometrickém tělese. Při řešení však nemáme vždy k dispozici model daného tělesa, a proto spoléháme na naši schopnost představit si nejen dané těleso, ale i jeho vlastnosti, ať už tuto schopnost nazýváme geometrická, nebo prostorová.

Představivost je důležitá schopnost, kterou využíváme při řešení každodenních úloh, ať už je to například orientace v přírodě nebo třeba orientace v obchodním domě při nakupování. Úroveň představivosti můžeme považovat za významný faktor úspěšnosti člověka ve společnosti. Jedním z problémů při řešení stereometrických úloh může být právě nízká úroveň představivosti.

Představivostí v matematice se ve svém výzkumu zabývali Půlpán, Kuřina a Kebza (1992). Výzkumu se účastnilo 140 studentů Gymnázia J. K. Tyla v Hradci Králové. Autoři v knize upozorňují na zajímavý jev, který tento výzkum ukázal. 17 % řešitelů uvedlo, že tělesové úhlopříčky v krychli jsou na sebe kolmé. Pokud by žáci měli lepší úroveň prostorové představivosti, pak by viděli, že dané tělesové úhlopříčky jsou úhlopříčky obdélníku, a ne čtverce. Autoři uvádí, že jednou z příčin, proč žáci toto tvrzení uvedli, může být, že krychle je jakýmsi reprezentantem kolmosti (kolmé hrany a stěny, kolmé stěnové úhlopříčky). Dalším zajímavým zjištěním tohoto výzkumu je, že ani představa o určenosti roviny třemi

nekolineárními body není pro žáky samozřejmá a musí být u nich pěstována. (Půlpán et al., 1992)

### **3.2 Geometrické myšlení a utváření pojmů**

Myšlení je kognitivní proces, při kterém dochází ke zpracování a využívání informací. Díky myšlení dokážeme odhalovat a nastolovat problémy a řešit je. Proto, abychom lépe mohli analyzovat řešení jednotlivých úloh žáků, je také potřeba porozumět jejich myšlení.

Z hlediska psychologie vnímá Atkinsonová (2003) myšlení jako „jazyk mysli“ a rozděluje ho na propoziční, imaginativní a motorické. Propoziční myšlení je jakýmsi proudem myšlenek, které „v duchu slyšíme“, imaginativní myšlení odpovídá zrakovým představám, které „v duchu vidíme“, a motorické myšlení jsou jakési „pohyby představ v mysli“.

Může se zdát, že v geometrii využíváme pouze imaginativní myšlení, ale není tomu tak. Jako příklad propozičního myšlení v geometrii si můžeme představit, že žák má naučený jakýsi obecný postup, jak danou úlohu řešit. Tento postup si v duchu přemítá a podle něho úlohu řeší. Příkladem imaginativního myšlení je, že žák úlohu vyřeší, ale nedokáže své řešení vysvětlit, jen řekne, že to tak prostě vidí (Fuchs a Zelendová, 2015). Motorické myšlení se uplatňuje, pokud žák potřebuje v duchu otáčet jednotlivými tělesy, které zrovna nemá fyzicky k dispozici.

Základní složkou myšlení je pojem. Ten je jakýmsi souhrnem vlastností, které spojujeme s určitou třídou objektů. Pokud bychom měli každý objekt, se kterým se setkáme, označovat rozdílným názvem, potom by naše slovní zásoba musela být opravdu gigantická, proto nám pojmy umožňují jistou kognitivní ekonomičnost (Atkinson, 2003).

Hejný a Rybářová (1984) uvádí, že utváření pojmů ve vědomí člověka je dlouhodobý a složitý proces. Jedná se o posloupnost kvalitativních změn, kdy s přibývajícím zkušeností postupně přecházíme ke stále více abstraktním pojmům. Autoři hovoří jednak o kvantitě pojmotvorného procesu, která vypovídá o množství zkušeností, které jedinec s daným pojmem získal a jednak o kvalitě pojmotvorného procesu, která značí hladinu abstrakce, na které je daný pojem ve vědomí jedince uložený. Pojmotvorný proces dělí autoři na čtyři etapy: synkretickou, předmětnou, intuitivně-abstraktní a strukturální.

1. Synkretická představa – v této etapě dochází k vytváření skupin životních zážitků, které jsou spojené s budoucím pojmem.
2. Předmětná představa – v této etapě se již pojem odlišuje od pojmů, které jsou mu příbuzné. Je však stále vázaný na konkrétní předměty.
3. Intuitivně-abstraktní představa – v této etapě se již pojem stává součástí vytvářejících se abstraktních představ.
4. Strukturální představa – v této etapě se abstraktní pojem stává prvkem matematické struktury.

Jak uvádí autoři, popsany pojmotvorný proces je časově velmi náročný, a proto se ve škole můžeme setkat s jeho zkracováním. Bez dostatečné předmětné představy jsou potom žáci často seznamováni s pojmy pouze na intuitivně-abstraktní úrovni. To může vést k několika problémům. Jedním z nich může být nedorozumění v komunikaci mezi žákem a učitelem. Pokud učitel při výkladu používá pojmy, o kterých nemá žák dostatečnou představu, může žákovi učitelova řeč připadat nesrozumitelná nebo příliš abstraktní. Je to podobné, jako by žák poslouchal výklad v jazyce, kterému dost dobře nerozumí. Dalším problémem je vznik formálních poznatků, kterým se budu více věnovat v kapitole „Znalosti a formální znalosti“ (Hejný a Rybárová, 1984). Právě takto vzniklé poznatky se mohou projevit při řešení vybraných úloh.

V souvislosti s rozvojem geometrického myšlení Budínová (2017) uvádí dva tradiční přístupy, a to Piagetův a van Hieleho. Piagetova teorie geometrického myšlení je spíše vývojovou teorií na rozdíl od van Hieleho, která je teorií vzdělávací. Podle Piageta probíhá rozvoj geometrického myšlení ve dvou fázích. V první fázi jsou děti schopny poznat známé geometrické útvary, a osvojují si tak topologické znalosti, které poznávají díky senzomotorickým aktivitám. V druhé fázi jsou děti schopné rozlišit rovinné útvary jako kruh, čtverec, trojúhelník, obdélník a dokážou je od sebe odlišit.

Na rozdíl od Piageta, který rozlišuje pouze dvě fáze, van Hiele rozlišuje pět oddělených úrovní:

Úroveň 0 – Vizualizace – rozpoznávání a pojmenovávání obrazců

Úroveň 1 – Analýza – popisování vlastností obrazce

Úroveň 2 – Neformální dedukce – klasifikace a třídění obrazců podle vlastností

Úroveň 3 – Dedukce – provádění důkazů za použití vět a definic

Úroveň 4 – Axiomatizace

První tři úrovně se objevují v průběhu základní školy, třetí a čtvrtá obvykle přichází až později. Žáci prochází jednotlivými úrovněmi postupně a úspěch na určité úrovni závisí na kvalitě geometrického myšlení v předchozí úrovni. Je důležité si uvědomit, že žáci v jedné třídě se mohou nacházet na různých úrovních geometrického myšlení.

### 3.3 Znalosti a formální znalosti

Hejný (2014, s. 54) definuje znalost jako „poznatek, který si člověk zkonstruoval sám vlastní intelektuální činností pomocí existujících izolovaných a generických modelů“. Izolované modely zde představují konkrétní zkušenost budoucí znalosti a generické modely mají spíše obecnější charakter. Generický model je tedy zástupce všech nebo skupiny izolovaných modelů.

Hejný (2004) rozděluje matematické poznatky do čtyř skupin:

1. objekty – ty jsou základními stavebními kameny poznatkové struktury (kružnice, trojúhelník, kolmost...)
2. vztahy – vzájemně propojují dva nebo více objektů nebo vztahů, můžeme je dále dělit na tvrzení (např. Pythagorova věta) a vzorce (např. vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku)
3. postupy – představují širokou třídu poznatků, sem můžeme řadit různé algoritmy, návody, řešitelské strategie, argumentace...
4. schémata – ucelené představy, které se ve vědomí člověka vytvářejí na základě mnohonásobně opakované zkušenosti.

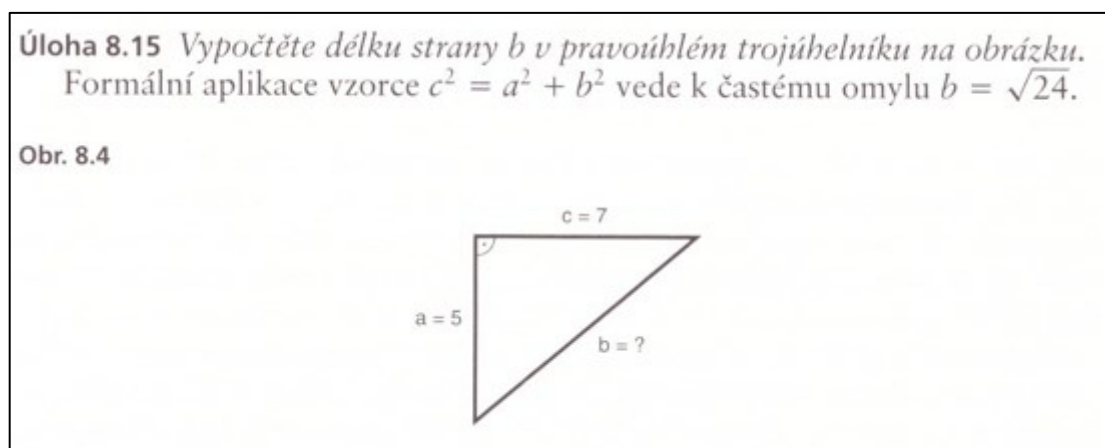
Mezi těmito poznatky mohou být i poznatky nepřesné nebo zcela chybné a hranice mezi jednotlivými třídami nemusí být vždy ostré. Často je pouze věcí názoru daného pozorovatele, zda daný poznatek zařadí to určité kategorie.

Za formální znalosti považujeme takové znalosti, které nejsou opřeny o žádné izolované ani generické modely. Takové znalosti u žáků většinou vznikají tak, že jsou žákovi předkládány

hotové poznatky, které si nemůže včlenit do sítě již připravených konkrétních poznatků. Žák je tak nucen uchopit novou znalost pouze jako izolovaně stojící paměťový údaj (Hejný a Kuřina, 2009). Takový poznatek není schopen žák dále rozvíjet. To samozřejmě vede k tomu, že tento poznatek snadno zapomene a již se k němu nemůže vrátit. Problémem formálních poznatků je, že nejsou propojené s životní zkušeností či jinými poznatky. Pro žáka může být tedy někdy obtížné poznat, že je daný poznatek chybný a většinou ho ani není schopen opravit. Také se může stát, že formální poznatek je správný, ale žák jej v dané situaci využije chybně. Formální poznatky mohou být například ve formě pouček, které jsou pouze uchované ve vědomí žáka (Hejný, 2014).

Pojmy formální a neformální znalosti označují dva krajní případy, proto se u žáků často bavíme o míře (ne)formálnosti dané znalosti (Hejný a Kuřina, 2009). Hejný někdy hovoří o formalismu jako o nemoci.

V geometrii se podle Hejného a Kuřiny (2009) objevuje formalismus nejčastěji v tom, že žák má o daném objektu jen chudou nebo deformovanou představu. Jako příklad uvádějí formální aplikaci vzorce  $c^2 = a^2 + b^2$ . Žáci se často naučí vzorec, aniž by si uvědomovali, co jednotlivé proměnné zastupují nebo vzorci porozuměli. Proto, když jim je předložena například úloha z obrázku 1, dosadí do vzorce špatně.



Obrázek 1: Formální aplikace vzorce (Hejný a Kuřina, 2009)

### 3.4 Chyba v matematice

Chyba hraje v našem životě důležitou roli. Jak praví české přísloví: Chybami se člověk učí. Bohužel v naší škole bývá chyba často vnímána jako jev nežádoucí, jako něco, čeho je

potřeba se vyvarovat. Udělat chybu se tak bojí nejen žáci, ale i učitelé. Dále se podíváme, o jaké chyby se jedná, jak je můžeme třídít, jak chyby poznat a jak je odstranit, ale také na to, jak by měl učitel na chybu reagovat.

Kuřina (2017) vnímá slova omyl a chyba jako synonyma. Podle autora tyto pojmy znamenají výsledek jednání, které nedosáhlo svého cíle, čili došlo k nějakému selhání. To může být způsobeno selháním nějakých psychických funkcí (např. pozornosti, paměti, myšlení, ...) nebo aktuální úrovní poznání. Matematika vyžaduje nejen znalost terminologie nebo zvládnutí jazyka vzorců, algebry, ale také porozumění neverbálnímu vyjadřování pomocí schémat a obrázků. Řada problémů tak může podle autora souviset i se snižující se úrovní jazykové kultury žáků a studentů.

Mezi příklady chyb z geometrie, které autor uvádí, najdeme například tato tvrzení:

„Tělesová úhlopříčka krychle se protíná s úhlopříčkou stěnovou. Vždyť jejich průsečík vidím na obrázku.“

„V rovnoramenném trojúhelníku s rameny  $r$ , základnou  $a$  a úhlem  $\alpha$  proti základně platí  $\sin \alpha = \frac{a}{r}$ . Vždyť přece  $\alpha$  je proti straně  $a$  a  $r$  je přepona.“ (Žák si nakreslil v rovnoramenném trojúhelníku výšku k základně.)

(Kuřina, 2017, s. 181)

Novotná (2014, s. 39) uvádí, že „chybou není např. špatný výsledek, ale že k chybě došlo někde v procesu řešení, kdy se řešitel odklonil od správného postupu“. K odstranění chyby je potřeba nejdříve ji najít a poté opravit. Autorka rozlišuje dva typy chyb: chyby jednorázové a chyby, které se mohou opakovat. Jednorázovým chybám se podle autorky není potřeba nějak mimořádně věnovat na rozdíl od těch, které se opakují. Těmi se myslí chyby, se kterými se učitel setkává opakovaně, a to nejen u jednoho žáka. Abychom mohli takové chyby odstranit, je potřeba najít jejich příčinu.

Hejný a Kuřina (2009) rozdělují chyby na čtyři třídy. Do první z nich řadí chyby, které vycházejí z formální znalosti žáka. Zbývající třídy nazývají autoři souhrnně jako chyby zdánlivé a popisují je jako chyby, jejichž příčinou není chybné myšlení, ale něco jiného. Do druhé třídy patří chyby, které nazývají interpretační nesoulad. Je to situace, kdy žák pochopí pojem, situaci nebo úlohu odlišně. Příkladem může být slovo „lichoběžník“, které žák

pochopí jako obdélník s lichým počtem stran. Do třetí třídy chyb řadí chyby, které nazývají neukončený vývoj. Takové chyby vznikají, pokud žák chápe problematiku jen částečně. Další třída chyb se týká komunikace. Příkladem může být, když žák řeší rovnici  $4x + 8 = 36$  řetězcem rovností:  $x = 36 - 8 = 28 : 4 = 7$ . Přestože je řešitelský postup i výsledek správný, zápis těchto rovností v pořádku není.

Hejný (2004) se zabýval procesem identifikace a odstraňování chyb, které mapoval na několika desítkách případů. Celý proces rozdělil do šesti dílčích činností žáka:

1. poznání přítomnosti chyby,
2. lokalizace chyby,
3. věcná analýza chyby (proč je daná myšlenka chybná, případně i s čím chybná představa souvisí a jaké případné chybné představy jsou s ní propojeny),
4. odstranění chyby,
5. procesní analýza chyby (jak k chybě došlo),
6. vyvození poučení.

Je důležité vědět, že každý proces poznávání chyby nemusí obsahovat všechny činnosti. Tato stupnice však může učiteli pomoci lépe reagovat na žakovu chybu. Proto vytvořil Hejný ještě jednu stupnici, která nám dává návod, jak žákovi pomoci, pokud potřebuje poradit:

1. Učitel může projevit nejistotu, tím upozorní žáka na přítomnost chyby.
2. Pokud žák již o přítomnosti chyby ví, ale nedovede ji najít, učitel mu může naznačit, kde se chyba asi nachází, popřípadě na ni přímo upozornit.
3. Pokud žák již ví, kde chybu udělal, ale nevidí ji, může učitel využít nějaké návazné úlohy, která mu poradí.
4. Pokud žák nedokáže sám chybu odstranit, potom je potíží v neznalosti. Tuto neznalost je potřeba diagnostikovat a poté přistoupit k reedukaci.
5. Poté, co žák chybu opraví, měl by být schopen určit příčinu této chyby.
6. Pokud žák správně popíše, jak k chybě došlo, je již na správné cestě, jak se chybě příště vyvarovat.

Jak žáci chybu vnímají, zjišťoval Hejný (2004) spolu s A. Michalcovou. Z jejich zjištění vyplynulo, že žádný žák nevnímal chybu jako něco užitečného a že žáci tolerují vlastní

chyby a chyby spolužáků, jen pokud se jich dopustí při probírání nové látky. Většina zkoumaných žáků byla ochotna tolerovat chybu učitele, obzvlášť pokud tuto chybu je ochoten připustit. Někteří žáci se obávali chyby (zejména dívky), protože se báli zesměšňování ze strany učitele.

Z výše uvedeného plyne, že je potřeba se chybám věnovat a že prvním krokem je odhalit především chyby, které se opakují. Proto považuji za důležité zabývat se žákovskými řešeními úloh, případné chyby odhalit a dále s nimi pracovat.

## 4 Obrázky v geometrii

Kuřina (1990) uvádí, že obrázky jsou na rozdíl od slovního vyjádření úlohy, kde jsou informace uspořádány v posloupnostech, které postupně čteme a také je tak vnímáme, více „komplexní“, a umožňují nám tak vnímat situaci jako celek.

Podle Mesquity (1998) mají obrázky v geometrii dvojí povahu. V případě, kdy obrázek ilustruje vlastnosti daného objektu, hovoří o obrázku jako o objektu. Na základě takového obrázku můžeme dále odvozovat další vlastnosti objektu, a může nám tedy často pomoci ke správnému vyřešení problému. Druhá povaha obrázku je ilustrativní. Takový obrázek je v podstatě jakýsi náčrtek, druh topologického schématu. Tato povaha obrázku však může být pro žáky často matoucí. Na nepřesné obrázky upozorňuje i Polya (2016). Nepřesný obrázek může někdy vnuknout i špatný závěr, proto je důležité si vždy uvědomit, že obrázek je pomocník, ale v žádném případě to není základ pro naše závěry. Při řešení úloh geometrie v prostoru se obvykle musíme spokojit pouze s nákresy. Současně pomáhá pro modelování situací využívat předměty každodenního života.

Mezi efektivní strategie při řešení úloh radí Bureš, Eisenmann a Příbyl (2016) tzv. řešitelský obrázek. Na začátku řešení úlohy si nakreslíme tzv. ilustrační obrázek. V takovém obrázku nejdříve vyznačíme, co známe, a popřípadě také to, co chceme získat. Někdy již při kreslení ilustračního obrázku nás může napadnout samotné řešení. Může se ale stát, že nám takový obrázek nestačí, a tak dokreslujeme další pomocné prvky, takovému obrázku pak říkáme řešitelský obrázek.

Z výše uvedeného plyne, že obrázky nám mohou při řešení úloh nejen geometrických velmi pomoci. Je však důležité si uvědomit, že obrázky nemusí být vždy přesné, a ne všechny informace, které nám přinesou, musí být správné.

### 4.1 Problém vztahu mezi geometrickými objekty a jejich reprezentací

Duval upozorňuje na problém, který se může v souvislosti s obrázky u žáků objevit (2006, s. 107):

Klíčový problém matematického porozumění žáků [...] spočívá v kognitivním konfliktu mezi dvěma proti sobě jdoucími požadavky: *jak mohou odlišit reprezentovaný objekt od použité sémiotické reprezentace, pokud nemohou získat*

*přístup k matematickému objektu jinak než díky těmto sémiotickým reprezentacím?*

A to se projevuje v tom, že schopnost přecházet mezi systémy reprezentací je často kritickou hranicí pro rozvoj učení a řešení problémů.<sup>1</sup>

Z uvedeného plyne, že obrázky mají v geometrii nejednoznačnou roli, což může způsobit potíže při řešení geometrické úlohy. Na jedné straně totiž může obrázek představovat abstraktní geometrický objekt, na druhé straně nějaký konkrétní případ tohoto objektu. Stupeň abstrakce daného obrázku souvisí vždy s konkrétní situací. Například přímku, o které víme, že je nekonečná, můžeme vždy reprezentovat pouze nějakou omezenou čarou.

Mesquita (1998) ve své práci uvádí, že Poincare (1902) proto rozlišuje mezi dvěma prostory, a to prostorem geometrickým a prostorem reprezentací. Tyto dva prostory mají odlišnou povahu. Když reprezentujeme nějaký geometrický objekt navenek například pomocí papíru, používáme spíše prostor reprezentací. Reprezentace jsou jakousi reprodukcí našich vjemů. Rozdíly mezi těmito prostory se žákům nemusí jevit jednoznačně. Jde především o to, že matematici a žáci používají prostor odlišným způsobem. Zatímco matematici pracují v geometrickém prostoru a automaticky kontrolují informace, které přicházející z prostoru reprezentací, žáci mohou oba tyto prostory zaměňovat, a často tak pracovat jen v prostoru reprezentací (Mesquita, 1998). Na tento problém narazili i Vondrová a kol. (2015a) ve svém výzkumu. Z rozhovorů, které vedli s žáky prvního i druhého stupně základních škol, vyplynulo, že problém s odlišením geometrického útvaru jako teoretického objektu a jeho reprezentace na papíře nemají pouze žáci na prvním stupni, ale i žáci starší.

## **4.2 Volné rovnoběžné promítání**

Zobrazovacími metodami v prostoru se zabývá deskriptivní geometrie. Jednou z takových metod je volné rovnoběžné promítání, které se ve školské matematice používá nejčastěji. Toto promítání využíváme zejména pro svou jednoduchost. Je dobré učit žáky kreslit tělesa

---

<sup>1</sup> „The crucial problem of mathematics comprehension for learners, at each stage of the curriculum, arises from the cognitive conflict between these two opposite requirements: *how can they distinguish the represented object from the semiotic representation used if they cannot get access to the mathematical object apart from the semiotic representations?* And that manifests itself in the fact that the ability to change from one representation system to another is very often the critical threshold for progress in learning and for problem solving.“

ve volném rovnoběžném promítání, protože jim tím napomáháme vytvářet cit pro jejich proporcionalitu.

Rovnoběžné promítání je určeno rovinou (zvanou průmětna), do které promítáme, a směrem promítání, který není rovnoběžný s danou rovinou. Body a jejich obrazy leží na přímkách rovnoběžných se směrem promítání.

Při konstrukci se držíme základních vlastností rovnoběžného promítání (Polák, 2008, s. 510):

1. Průmětem libovolné přímky je buď přímka, nebo bod.
2. Průměty libovolných dvou různých rovnoběžek jsou buď rovnoběžky (jež mohou případně splynout), nebo dva různé body.
3. Jestliže průměty rovnoběžek  $p, q$  jsou přímky, potom průměty úseček  $AB, CD$ , které leží po řadě na přímkách  $p, q$ , jsou úsečky  $A'B', C'D'$ , pro něž platí

$$|A'B'| : |C'D'| = |AB| : |CD|.$$

(Tato vlastnost platí i tehdy, když úsečky  $AB, CD$  leží na jedné přímce  $p$ .)

4. Průmětem každého geometrického útvaru  $U$ , který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou (tzv. **průčelné rovině**), je útvar  $U'$  shodný s útvarem  $U$ .

Rovnoběžné promítání, u něhož nezadáme obrazy průmětů os souřadnicové soustavy, se nazývá volné rovnoběžné promítání. Díky tomu můžeme přímo kreslit názorné obrázky jednoduchých těles. Tělesa zobrazujeme nejčastěji tak, aby některá jejich část ležela v průčelné rovině.

Důležité je zdůraznit, že toto zobrazení není vzájemně jednoznačné zobrazení. To znamená, že se obecně nezachovávají délky úseček, velikosti úhlů, a tedy ani kolmost.

### 4.3 Prototypy v geometrii

Prototypy jsou obecně definovány „jako nejlepší, nejjasnější či nejuvýstižnější příklady daného pojmu... Slouží jako užitečné vztažné body při rozhodování, zda daný určitý předmět či jev do dané pojmové kategorie patří, či nikoliv“. (Rosch, 1975, cit. Plháková, 2005, s. 266)

Prototypem geometrického objektu potom nazýváme objekt, který žáci nejčastěji vybírají jako reprezentanta dané kategorie jako jediný nebo jako první (Vondrová et al., 2015a). S prototypem se většinou setkáváme nejdříve a máme ho uložený jako jakýsi model daného objektu. Pokud bychom žáky požádali, aby nakreslili libovolný trojúhelník, bude tento trojúhelník s největší pravděpodobností buď rovnostranný, rovnoramenný nebo pravoúhlý. Uvažování v prototypích však může vést k nejrůznějším problémům, obzvláště když jsou přijímány jako reprezentanti dané kategorie bez nějakého dalšího odůvodnění. Další problémy mohou plynout i z toho, v jaké poloze si žáci objekt nakreslí a jak si ho označí.

Vondrová et al. (2015b) upozorňují na to, že pokud bude pravoúhlý trojúhelník často žákům znázorňován pouze s pravým úhlem v levém dolním rohu tak, že obě odvěšny budou rovnoběžné se stranami papíru, potom je pravděpodobné, že žáci budou mít problémy s rozpoznáním pravoúhlého trojúhelníku v jiné poloze. Nejen pravoúhlý trojúhelník, ale obecně trojúhelník bývá často znázorňován tak, že je jedna z jeho stran rovnoběžná se spodním okrajem papíru.

Při výzkumu, který Vondrová a Havlíčková (2015b) provedly, se ukázalo, že žáci často kreslí prototypický obrázek, který při řešení způsobuje žákům další problémy. Současně se ukázalo, že pokud měli žáci překreslit trojúhelník v „netypické poloze“, dokonce dvě třetiny žáků narýsovalo trojúhelník se základnou rovnoběžnou se spodním okrajem papíru, přitom si polovina z nich nebyla jistá, zda takto otočený trojúhelník je shodný s původním trojúhelníkem.

Jak autorky uvádí, prototypický obrázek může vést k dalším problémům při řešení úlohy v rovině. Předpokládám, že podobné problémy se mohou objevit i při řešení úloh v prostoru, protože, jak již bylo uvedeno, stereometrickou úlohu lze řešit převedením do roviny. Může se tedy stát, že žáci budou uvažovat v prototypích, což může vést k mylným závěrům.

## 5 Řešení matematické úlohy

Každý řešíme úlohu v závislosti na našich schopnostech a dovednostech. Podle Eisenmanna, Novotné a Příbyla (2015) tak většinou činíme jedním ze tří způsobů: pokusem, přímým způsobem nebo užitím heuristické strategie. Pokus je nejméně sofistikovaný způsob řešení. Přímý způsob je založený na nějaké naučené znalosti nebo předchozí zkušenosti. Heuristická strategie se uplatňuje, pokud nemáme naučený proces pro řešení úlohy nebo ho neumíme použít, tedy nemůžeme řešit úlohu přímým způsobem, ale jsme motivováni úlohu vyřešit.

Nejdříve se podíváme na řešení problémů z pohledu kognitivní psychologie. Sternberg (2002) uvádí následující kroky řešení problému: identifikace problému, definování a reprezentace problému, formulování strategie, organizace informací, rozdělení zdrojů, monitorování, zhodnocení. Tyto kroky lze podle potřeby měnit nebo dokonce přeskočit.

Řešením matematických úloh se blíže věnuje Polya (2016) ve své knize *Jak to řešit*. Uvádí čtyři fáze řešení matematické úlohy.

První fáze je jakási orientační. Nejdříve se s úlohou seznamujeme, a proto je v této fázi důležité úlohu dobře porozumět. Zjistit, co je neznámá, jaké jsou podmínky, zda jsou podmínky dostatečné pro vyřešení úlohy. Je vhodné si nakreslit obrázek a zavést vhodné označení.

Ve druhé fázi bychom se měli pokusit navrhnout plán řešení. Můžeme se zamyslet nad tím, zda jsme již viděli podobnou úlohu nebo zda neznáme nějakou větu, která by nám mohla být užitečná k vyřešení dané úlohy. Také by nám mohlo pomoci zavedení nějakého pomocného prvku.

Třetí fáze je fáze realizační. Zvolený plán realizujeme a při každém kroku bychom měli kontrolovat jeho správnost.

Čtvrtou fází je ohlédnutí se zpět. Zde bychom měli překontrolovat výsledek nebo, pokud to lze, získat výsledek jinak a získané výsledky porovnat.

Polya (2016) upozorňuje, že při řešení úlohy se může stát, že žák přeskočí všechny přípravné fáze a poskytne rovnou hotové řešení. Také se může stát, že se žák pustí do výpočtů bez toho, aniž by úlohu správně pochopil. Někdy může žák řešit zbytečné detaily, aniž by viděl

souvislosti nebo si vytvořil nějaký plán. Mnoha chybám se lze vyvarovat, pokud si žák jednotlivé kroky kontroluje. Tyto fáze můžeme obecně používat při řešení jakékoliv matematické úlohy.

Způsoby řešení stereometrických úloh se zabývali Hejný a kol. (1987), kteří uvádějí dva způsoby řešení.

První způsob spočívá v tzv. „planimetrizaci“ prostoru. To znamená, že úlohu převedeme na řešení obdobné úlohy v rovině. Tato metoda má v podstatě tři kroky:

1. Zvolíme rovinu, ve které se budeme pohybovat (kde se bude řešení naší úlohy odehrávat).
2. V této rovině zjistíme potřebné údaje.
3. V této rovině dořešíme úlohu planimetricky.

Druhá metoda je více stereometrická. Je založena na hledání souvislostí a vztahů v prostoru. Žák se dívá na problém jako na celek a pomocí myšlenkových operací hledá co nejefektivnější řešení, při tom mu může být užitečná analýza obrázku. Tato metoda je pro žáka kognitivně náročnější, ale může být časově úspornější.

První metoda je jednodušší, protože se úloha převede na planimetrickou. V planimetrii se žák již umí pohybovat.

Řešení složitějších úloh může být někdy poměrně namáhavé, proto občas využíváme při řešení tzv. heuristické strategie. Heuristickými strategiemi v matematice se zabývali ve svém výzkumu Novotná, Eisenmann a Příbyl (2015). Blíže zde uvedu pouze ty strategie, které by mohly pomoci i při řešení stereometrických úloh.

Jednou z metod je analogie čili hledání obdobného problému, jehož řešení známe nebo ho umíme vyřešit. Analogie nám může pomoci při řešení původního problému. Druhou metodou je systematické experimentování. Řešitel se snaží úlohu vyřešit pomocí systému v provádění pokusů. Další metoda je metoda zavedení pomocného prvku. Pomocný prvek je objekt, který se v úloze původně nevyskytuje. Zavedením tohoto prvku, by se úloha měla stát pro řešitele jednodušší. Nakonec uvedu metodu konkretizace a zobecnění. Tato metoda se využívá například při řešení úloh s parametrem. Zvolíme si nejprve nějaký konkrétní případ, úlohu vyřešíme a poté postup zobecníme.

## 5.1 Obecně zadané úlohy a problémy s algebraickými výrazy

Některé úlohy, které jsem pro svůj výzkum vybrala, jsou zadané obecně, proto budou muset žáci při řešení úlohy pracovat i s algebraickými výrazy.

**Algebraický výraz** je výraz (zápis) skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, popř. obsahuje též závorky, které určují pořadí provádění naznačených operací.

(Polák, 2008, s. 120)

V geometrických úlohách můžeme narazit na proměnnou také při obecném zadání délek stran nebo u konstrukčních úloh s parametrem. Při řešení těchto úloh je potřeba pracovat s algebraickými výrazy, a to je právě jedno z kritických míst matematiky (Vondrová et al., 2015b). Klasifikací chyb, které se objevují při úpravách algebraických výrazů, se zabýval také Hejný a kol. (1987), kteří je na základě vyhodnocení tisíců žákovských chyb klasifikují takto:

**Numerické chyby** mohou být způsobené tím, že se žák soustředí na nějaký vyšší úkon a tato chyba vznikne v podstatě nepozorností. Např.:  $6(x + 2) = 6x + 14$ , žák se soustředí na roznásobení závorky, které zvládne, ale udělá chybu při násobení.

**Úkonové chyby** jsou chyby v úkonu, který žák při úpravě algebraického výrazu provádí. Jejich příčinou je selhání paměťového záznamu. V podstatě plynou z nějakého formálního poznatku. Např.:  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3$

**Grafické chyby** (obrázek 2) jsou chyby, které plynou z nesrozumitelných či graficky nejasných symbolů.

**Chyb velkých skoků** se žák dopustí v případě úprav, které zahrnují více kroků najednou. Nejčastěji vznikají v časové tísní, popřípadě pokud žák přeceňuje svoje schopnosti.

**Strategické chyby** většinou plynou z neschopnosti žáka dívat se na problém komplexně. Žák se soustředí jen na tu část, kterou ovládá a další ignoruje.

**Bezradnost a bloudění**, žák neví, jak má pokračovat dál.

**Jiné chyby**

$$\begin{array}{l}
 d \rightarrow d \rightarrow a \\
 0 \rightarrow 0 \rightarrow 6 \\
 \sin \frac{x}{3} \rightarrow \sin \frac{x}{3} \rightarrow \frac{\sin x}{3} \\
 \sqrt{a+b} \rightarrow \sqrt{a+b} \rightarrow \sqrt{a} + b
 \end{array}$$

Obrázek 2: Ukázka grafických chyb (Hejný a kolektiv, 1987)

Vondrová et al. (2015a) uvádějí, že potřeba žáků pracovat s konkrétními číselnými hodnotami v geometrii je do jisté míry přirozená. Je to dáno tím, že obrázek bude vždy konkrétní, i když má reprezentovat abstraktní objekt.

Díky proměnné můžeme modelovat reálné situace nebo vyjadřovat vztahy a souvislosti. Některé problémy žáků plynou z proměnné. Proměnná má totiž v matematice několik rolí: proměnná jako zobecněné číslo, proměnná jako zástupce množiny hodnot, kterých může nabývat, proměnná jako neznámá, tedy hodnota, kterou hledáme, nebo proměnná jako součást systému, který podléhá pravidlům transformace a ekvivalence. Další problémy mohou plynout i z toho, že v průběhu řešení jedné úlohy se může význam naší proměnné měnit. (Vondrová et al., 2015b)

U metrické úlohy může být například délka hrany krychle zadaná obecně, v tomto případě zastupuje proměnná nějakou množinu hodnot, kterých může nabývat. Při řešení úlohy však můžeme s touto délkou provádět různé operace, a proto se stává proměnná součástí systému, který podléhá jistým pravidlům transformace a ekvivalence. Na závěr má žák interpretovat výsledek opět ve stejném významu, jako byla proměnná v zadání úlohy.


Dalším problémem může být tzv. algebraizace úlohy. Tedy převedení nějakého slovně vyjádřeného tvrzení do rovnice, která vyjadřuje vztah proměnných. Žáci, kteří jsou zvyklí pracovat pouze s aritmetickými úlohami, mají většinou potřebu práci s proměnnými nahradit aritmetickými výpočty na známých číslech. Hovoříme o tzv. „potřebě vypočítat“ úlohu (Vondrová et al., 2015b). Některé další chyby, které se mohou u žáků objevit při úpravě algebraických výrazů, mohou mít původ v nadměrném zobecňování matematických zákonitostí. Takovou chybou je například rovnost  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ , která může plynout ze zobecnění  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

## 6 Metrické úlohy ve státní maturitě

Mezi požadavky ke společné části maturitní zkoušky z matematiky najdeme mimo jiné, že žák dovede užít polohové a metrické vlastnosti v hranolu. Úlohy ze stereometrie by měly tvořit ve státní maturitě z matematiky 4–12 %. Zajímavou otázkou tedy je, jak jsou žáci v těchto úlohách úspěšní v maturitních testech. Na stránkách CERMATU najdeme zadání maturitních testů zpětně do roku 2016, ovšem ani v jednom z těchto testů není metrická úloha v prostoru. Většina úloh, které jsou ze stereometrie, se týkají objemů nebo povrchů těles. Úlohu jiného typu najdeme jen v *Souboru vzorových úloh z matematiky (2013)* (viz obrázek 3).

**VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 1–2**

Drátěný model pravidelného šestibokého hranolu s podstavou hranou délky  $a = 8$  cm má výšku  $v = 12$  cm.  
Těleso se přelepí papírem, podstavy tmavým a plášť bílým.



(CERMAT)

**1 Vypočtete v cm největší možnou přímou vzdálenost dvou vrcholů drátěného hranolu. (Tloušťku drátu zanedbáváme.)**

Obrázek 3: Vzorová úloha (Soubor vzorových úloh matematika, 2013)

## Praktická část

V této části se budu nejdříve věnovat řešeným metrickým úlohám v učebnicích pro střední školy, a to především úlohám, které se zabývají vzdáleností bodu od přímky a vzdáleností bodu od roviny. Dále popíšu přípravu, průběh a výsledky svého výzkumu.

### 7 Řešené úlohy v učebnicích pro střední školu

V současné době jsou u nás běžně dostupné tři řady učebnic určené (nejen) pro gymnázia.

#### 7.1 Matematika pro gymnázia – Stereometrie (nakladatelství Prometheus), zpracovala Eva Pomykalová

Učebnice je rozdělena do pěti kapitol, z nichž jedna je věnována metrickým vlastnostem. Kapitola má šest částí: odchylka přímek, kolmost přímek a rovin, odchylky přímek a rovin, vzdálenost bodu od přímky a od roviny, vzdálenost přímek a rovin, úlohy k opakování.

V části týkající se vzdálenosti bodu od přímky a od roviny jsou nejdříve definované pojmy, následně jsou vyřešené tři vzorové příklady a uvedena kritéria rovnoběžnosti přímky a roviny a rovnoběžnosti dvou rovin. V další části najdeme soubor neřešených úloh.

První z řešených příkladů se věnuje výpočtům vzdáleností bodů od přímky v pravidelném čtyřbokém hranolu  $ABCD A' B' C' D'$ , kde jsou zadané délky hran. Obsahuje šest podúloh (viz obrázek 4). Hledaná vzdálenost je vždy nejdříve vyjádřena obecně a poté je dosazením vypočtena přibližná hodnota s přesností na dvě desetinná místa. V jedné podúloze je využita Pythagorova věta. Dvě podúlohy jsou podobné úlohám, které jsem použila ve svém výzkumu. Obě úlohy jsou řešeny pomocí podobností trojúhelníků. Řešení úloh doplňuje vždy obrázek hranolu, ve kterém je řešená situace znázorněna. Všechny úlohy jsou řešeny převedením do roviny, tato rovina je vždy v obrázku vyznačená šrafováním.

#### Příklad 1

Je dán pravidelný čtyřboký hranol  $ABCD A' B' C' D'$ ;  $|AB| = a = 4 \text{ cm}$ ,  $|AA'| = v = 5,5 \text{ cm}$ . Bod  $M$  je střed hrany  $A'D'$ . Vypočítejte vzdálenost bodu  $B$  od přímky

- a)  $AD$ ,      b)  $AC$ ,      c)  $C'D'$ ,      d)  $A'C'$ ,      e)  $AC'$ ,      f)  $CM$ .

Obrázek 4: Příklad 1 (Pomykalová, 1995, s. 84)

Druhý z řešených příkladů (viz obrázek 5) se týká vzdálenosti bodu od přímky v pravidelném čtyřbokém jehlanu  $ABCDV$ . Tuto úlohu jsem vybrala do svého výzkumu. Délky hran jsou opět zadány přesně. V zadání je uvedeno, že úloha má být řešena konstrukčně i početně. Úloha je vyřešená pomocí obsahu trojúhelníku, ale je zde uvedena poznámka, že může být početně řešena i na základě podobnosti trojúhelníků. Hledaná vzdálenost je stejně jako u předchozí úlohy nejdříve vyjádřena obecně a následně je vypočtena s přesností na dvě desetinná místa. Na jednom z obrázků je řešená situace znázorněna v jehlanu, opět je úloha řešena převedením do roviny a tato rovina je v obrázku vyšrafována. Na druhém obrázku je úloha řešena konstrukčně.

### **Příklad 2**

Určete vzdálenost vrcholu  $A$  pravidelného čtyřbokého jehlanu  $ABCDV$  od přímky  $CV$ , je-li  $|AB| = a = 4$  cm,  $|AV| = b = 6$  cm. Řešte konstrukčně i početně.

Obrázek 5: Příklad 2 (Pomykalová, 1995, s. 86)

Třetí řešený příklad se odehrává v krychli  $ABCDEFGH$  (viz obrázek 6). Úloha je věnována vzdálenosti bodu  $E$  od roviny  $AFH$ . Opět je zde zadána délka hrany krychle. Stejně jako předchozí úloha má být i tato úloha řešena početně a konstrukčně. Úloha je řešena převedením do roviny. Autorka zvolila jeden z úhlů a vyjádřila ze dvou pravoúhlých trojúhelníků sinus tohoto úhlu. Následně oba siny úhlu dala do rovnosti a vyjádřila hledanou vzdálenost. Je zajímavé, že toto je v podstatě využití podobnosti těchto trojúhelníků, ale autorka zde jiné řešení nezmiňuje. Tentokrát v obrázku krychle není vyšrafována rovina, ve které je úloha řešena.

### **Příklad 3**

Je dána krychle  $ABCDEFGH$  s hranou délky  $a = 5$  cm. Určete vzdálenost bodu  $E$  od roviny  $AFH$ . Řešte početně i konstrukčně.

Obrázek 6: Příklad 3 (Pomykalová, 1995, s. 88)

Kladně hodnotím, že jsou všechny tři příklady vyřešené jiným způsobem, přestože se daly vyřešit jedním způsobem. Všechny vzorové příklady jsou zde sice zadané pomocí

konkrétních délek stran, ale jsou vždy nejdříve řešené obecně a až na závěr je uvedeno dosazení. Zajímavé je i konstrukční řešení daných úloh, které by mohlo některým žákům pomoci do řešení úlohy lépe nahlédnout.

## **7.2 Elektronická učebnice – Matematika pro střední školy, Stereometrie II (nakladatelství Fraus), zpracoval kolektiv autorů**

Kapitola Metrické vlastnosti se skládá z teorie, řešených úloh, cvičení a testů. Je v ní 15 řešených úloh, z nichž jedna je v anglickém jazyce. Za pozornost stojí, že v těchto úlohách značí hledanou vzdálenost vždy  $x$ . V učebnici mají úlohy vyšší obtížnosti speciální označení.

První úloha, která je věnována vzdálenosti bodu od přímky, je označena jako úloha vyšší obtížnosti. Zadání této úlohy se naprosto shoduje s příkladem 2 v učebnici nakladatelství Prometheus. Řešení úlohy je rozděleno do šesti kroků. Pokud je v některém kroku řešení potřeba např. Pythagorova věta, je na ni uveden odkaz. Úloha je řešena pomocí obsahu trojúhelníku. Opět je nejdříve hledaná vzdálenost vyjádřena obecně a poté je dosazením numericky vypočtena se zaokrouhlením na jedno desetinné místo. Pod úlohou je uvedena poznámka, že úloha se může řešit i jiným způsobem, a to pomocí podobných trojúhelníků, popřípadě vyjádřením sinu jednoho z úhlu trojúhelníku a jejich porovnáním. Jako druhá poznámka je zde uvedeno i grafické řešení úlohy. Úloha je doprovázena obrázkem jehlanu s vyšrafovanou rovinou, ve které je úloha řešena.

Druhá úloha, která je věnována vzdálenosti bodu od roviny, je označena jako úloha nejvyšší obtížnosti. Je v ní zadána krychle  $ABCDEFGH$  s hranou délky  $a$  a má být určena vzdálenost bodu  $F$  od roviny  $ACH$ . Úloha je řešena v několika krocích, a to prostřednictvím výpočtu obsahu trojúhelníku.

Ostatní úlohy nejsou věnované vzdálenosti bodu od přímky nebo vzdálenosti bodu od roviny.

Domnívám se, že je škoda, že jsou obě úlohy řešeny pomocí obsahu trojúhelníku, přestože je uvedeno, že je lze řešit i jinak. Překvapilo mě, že obě úlohy týkající se vzdálenosti bodu od přímky a vzdálenosti bodu od roviny, které jsou zde řešené, jsou obtížnější. Jako výhodu

této učebnice vidím to, že i úlohy v části cvičení jsou v učebnici řešené. Jejich řešení je skryté a lze je v případě potřeby otevřít.

### **7.3 Učebnice pro střední školy – Stereometrie – (nakladatelství Didaktis), zpracoval Jan Vondra**

Učebnice je rozdělena do čtyř kapitol, z nichž jedna je věnována metrickým vlastnostem. Tato kapitola je dále rozdělena na dvě podkapitoly: odchylky přímek a rovin; vzdálenosti bodů, přímek a rovin. Podkapitola věnovaná vzdálenostem začíná odstavcem, který uvádí jednu vstupní úlohu a informaci, kde se v praxi můžeme setkat s výpočty vzdáleností a k čemu nám v životě tyto výpočty jsou. Dále je zde uvedena definice vzdálenosti bodu od roviny a dva příklady na určení vzdálenosti bodu od roviny bez výpočtu. Současně je vysvětlený pojem kolmého průmětu do roviny. Další dvě definice se týkají vzdálenosti přímky od roviny a vzdálenosti dvou rovin.

Na rozdíl od předchozích dvou učebnic je zde uveden praktický postup výpočtu vzdálenosti bodu od roviny, který je rozdělen do pěti kroků:

- 1) Uvažujme pomocnou rovinu  $\omega$  kolmou k zadané rovině procházející zadaným bodem.
- 2) Určíme průsečnici  $r$  roviny  $\omega$  se zadanou rovinou.
- 3) Kolmý průmět zadaného bodu do dané roviny leží na průsečnici  $r$ .
- 4) Načrtneme si situaci v rovině  $\omega$ .
- 5) Hledanou vzdálenost určíme jako výšku (popř. stranu) ve vhodném trojúhelníku.

Dále je na příkladu v krychli ukázáno využití tohoto postupu. V průběhu řešení je využita Pythagorova věta, přičemž v poznámce pod řešením úlohy je zmíněno, že k řešení je možné kromě této věty využít obsah trojúhelníku, Euklidovy věty nebo podobnosti trojúhelníků.

Následně jsou řešené další dva příklady, oba s využitím obsahu trojúhelníku.

Výpočet vzdálenosti bodu od přímky je v učebnici řešen převedením úlohy do roviny. Je uveden tento postup:

- 1) Uvažujme pomocnou rovinu  $\omega$  kolmou k zadané přímce procházející zadaným bodem.

- 2) Určíme průsečík  $P$  roviny  $\omega$  se zadanou přímkou.
- 3) Načrtneme si situaci v rovině  $\omega$ .
- 4) Hledanou vzdálenost určíme jako výšku (popř. stranu) ve vhodném trojúhelníku.

Tento postup je ukázán na jednom konkrétním příkladu.

Každá strana učebnice kromě řešených příkladů a vysvětlení dané látky obsahuje různé odstavce nazvané „Vzpomeň si“ nebo „Víte, že?“. Zde jsou připomínány pojmy, které žák potřebuje k řešení úloh, nebo jsou zde uváděny zajímavosti z využití v běžné praxi.

Osobně hodnotím kladně uvedení tématu vstupní úlohou a povídáním o tom, kde se v životě setkáme s počítáním vzdáleností, stejně jako odstavce „Víte, že?“ a „Vzpomeň si“. Obecné řešení úloh uvedené v jednotlivých krocích se v předchozích učebnicích neobjevilo. Tento postup může žákům poskytnout vodítko, jak úlohy řešit, může však také svádět žáky k učení se postupu nazpaměť.

## 8 Popis výzkumu

Cílem mého výzkumu je identifikovat problémy a chyby při řešení vybraných metrických úloh v prostoru žáků střední školy. Všechny tyto úlohy je možné vyřešit pomocí podobnosti trojúhelníků. To však není jediný způsob řešení, současně tedy sleduji i další způsoby, jakými žáci úlohy řeší.

Abych získala co nejlepší informace o sledovaném jevu, rozhodla jsem se použít metodu rozhovoru. Hlavním důvodem bylo, že při samotném písemném řešení bych nemohla získat dostatečné informace o tom, jak žáci při řešení uvažují, a o problémech, které při řešení mají. Individuální rozhovory jsem s žáky vedla nad řešením vybraných metrických úloh. Všechny rozhovory byly zaznamenávány na kameru, následně přepsány a dále analyzovány.

### 8.1 Vybrané metrické úlohy řešitelné pomocí podobnosti

Pro výzkumnou část jsem vybrala pět dílčích úloh, seskupených do dvou úloh. Hlavním kritériem pro výběr úloh bylo to, aby byly všechny řešitelné využitím podobnosti. Všechny tyto úlohy patří mezi metrické úlohy v prostoru. Čtyři z nich se týkají výpočtu vzdálenosti bodu od přímky a jedna z nich se týká výpočtu vzdálenosti bodu od roviny. První dvě úlohy se odehrávají v krychli. Krychle je jedno z těles, se kterým se žáci setkávají již v předškolním věku, lze tedy předpokládat, že s tímto tělesem mají největší zkušenost. Další tři úlohy se odehrávají v pravidelném čtyřbokém jehlanu. Při výběru úloh jsem vycházela z výše uvedených učebnic, některé byly v učebnicích i vzorově řešeny.

**Úloha 1:** Je dána krychle  $ABCDEFGH$  s hranou délky  $a$ ; bod  $M$  je střed hrany  $AB$ .

- a) Vypočti vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $BH$ .
- b) Vypočti vzdálenost bodu  $G$  od přímky  $HM$ .

**Úloha 2:** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ;  $|AB| = a = 4$  cm,  $|AV| = b = 6$  cm.

- a) Urči vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $CV$ .

Bod  $N$  je středem hrany  $CV$ .

- b) Urči vzdálenost bodu  $N$  od roviny  $ABC$
- c) Urči vzdálenost bodu  $N$  od přímky  $AV$ .

## 8.2 Výběr respondentů a průběh výzkumu

Výzkum jsem se rozhodla realizovat na Gymnáziu Jaroslava Vrchlického v Klatovech. Jak již bylo zmíněno v teoretické části, stereometrii je na této škole věnována poměrně velká část třetího ročníku. Požádala jsem proto vyučující matematiky v těchto ročnících, zda by mi umožnili u nich ve třídách výzkum provést. Ve všech třídách je při výuce stereometrie využívána učebnice Matematika pro gymnázia – Stereometrie (nakladatelství Prometheus).

Výzkumu se zúčastnilo 12 žáků (6 dívek a 6 chlapců) ze dvou tříd čtyřletého studia a z jedné třídy šestiletého studia. Žáci se přihlásili k rozhovorům dobrovolně, což se pozitivně odrazilo na chuti rozhovor se mnou vést. Jeden z žáků, který se přihlásil, má rozšířenou výuku matematiky v rámci volitelného semináře, ostatní žáci mají základní výuku matematiky a dosahují v matematice průměrných výsledků. Na setkáních jsem se s žáky domlouvala individuálně, vždy podle jejich časových možností. Některé rozhovory jsme s časových důvodů byli nuceni rozdělit na dvě setkání.

Na začátku setkání jsem každému žákovi vysvětlila, jaký je cíl mého výzkumu, a požádala je proto, aby ostatním žákům nesdělovali, jaké úlohy zde budou řešit. Žákům jsem vysvětlila, že budu v průběhu rozhovoru nahrávat pouze papír, na kterém budou úlohu řešit. Dále, že nahrávky budou použity pouze pro potřeby výzkumu, především pro následný přepis, a nebudou nikde publikovány. Žáky jsem požádala, aby své myšlenky říkali nahlas.

Poté jsem již žákovi předložila první dvě úlohy, které bylo možné vyřešit pouze využitím podobnosti trojúhelníků. Po vyřešení prvních dvou úloh jsem mu podle času předložila další úlohy. Na začátku úlohy jsem vždy žákům nechala dostatek času, aby si úlohu promysleli. Poté jsme se většinou začali o řešení bavit, popřípadě začali žáci řešit úlohu nejdříve samostatně a poté mi vysvětlili své myšlenky, které je v průběhu napadly. V případě potřeby směli žáci využít drátěné modely jednotlivých těles a tabulky. Žákům trvalo vyřešit všechny úlohy v průměru 50 min.

Všechny rozhovory jsem následně přepsala, což bylo časově poměrně dost náročné. Přepisy rozhovorů mi však zjednodušily následnou analýzu dat. Následně jsem hledala v prepisech podobné jevy a chyby, které jsem odlišovala barevně, abych lépe viděla, jaká je jejich četnost. Při tomto procesu jsem vždy nahlížela i do žakovských řešení a zkoumala především obrázky, které žáci v průběhu řešení kreslili. U každé úlohy jsem se snažila nejdříve shrnout,

jakým způsobem žáci úlohu řešili, zda využili podobné trojúhelníky nebo jiný způsob, a poté jsem již rozebírala jednotlivé jevy, které se objevily, s důrazem na očekávané chyby a obtíže zmíněné v teoretické části práce. Žáky budu v textu označovat pseudonymy.

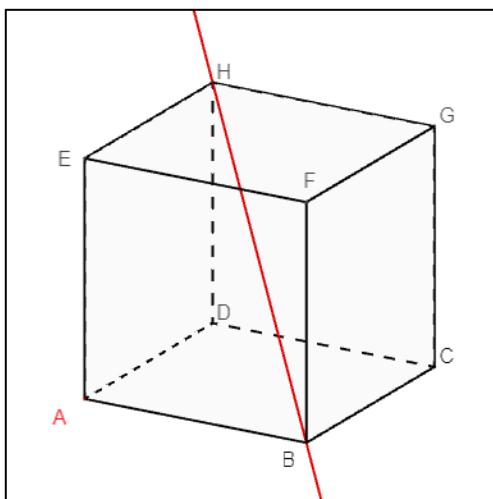
### 8.3 Pilotní část

Pilotní rozhovory jsem vedla se dvěma žáky. Pro oba tyto žáky byla velmi obtížná poslední úloha. Současně se ukázalo, že řešení všech pěti úloh je poměrně časově náročné, proto jsem se nakonec rozhodla úlohu 2c) z výzkumu vynechat. Respektive jsem ji žákům nabídla, pokud jim zbyl čas a měli chuť ji řešit. Jeden z žáků navrhoval přeznačit krychli  $ABCDEFGH$  na  $ABCD A'B'C'D'$ . Tady jsem se rozhodla značení ponechat podle učebnice Matematika pro gymnázia – Stereometrie (nakladatelství Prometheus), ze které byla tato úloha převzata.

### 8.4 Možné řešení úloh s využitím podobnosti

**Úloha 1:** Je dána krychle  $ABCDEFGH$  s hranou délky  $a$ ; bod  $M$  je střed hrany  $AB$ .

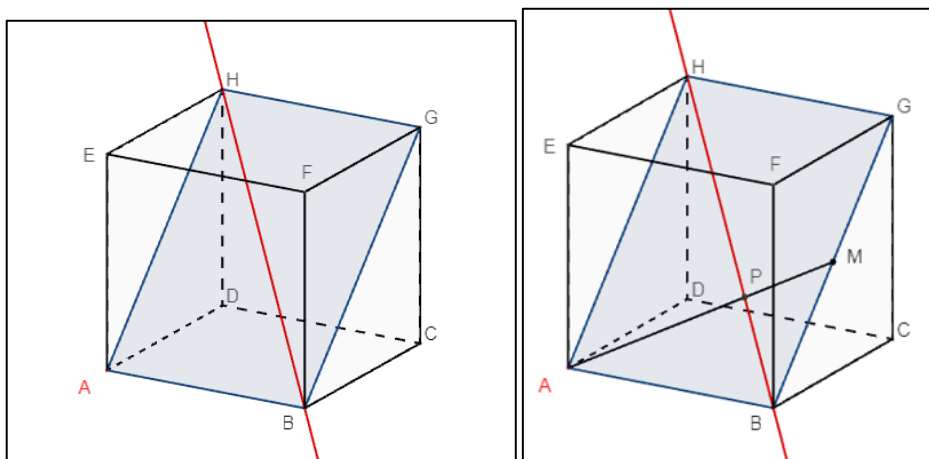
- a) Vypočti vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $BH$ .



Obrázek 7: Zadání úlohy 1a)

#### Řešení:

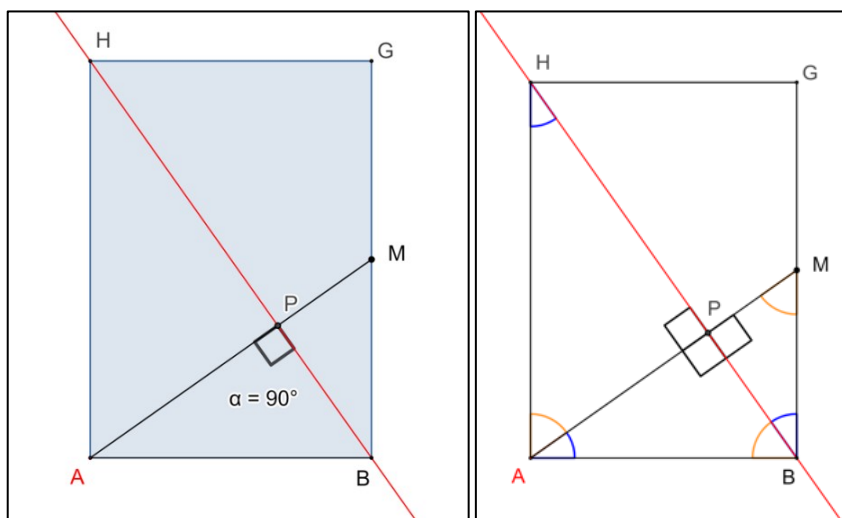
Úlohu můžeme převést na úlohu planimetrickou, kterou budeme řešit v rovině  $ABH$  (obrázek 8 vlevo).



Obrázek 8: Planimetrizace úlohy

Hledanou vzdáleností je vzdálenost bodu  $A$  od paty  $P$  kolmice vedené k přímce  $BH$  bodem  $A$  (obrázek 8 vpravo).

Průnikem roviny  $ABH$  a krychle je obdélník  $ABGH$  (obrázek 9 vlevo). Celou situaci tedy můžeme řešit pouze v tomto obdélníku.



Obrázek 9: Obdélník  $ABGH$

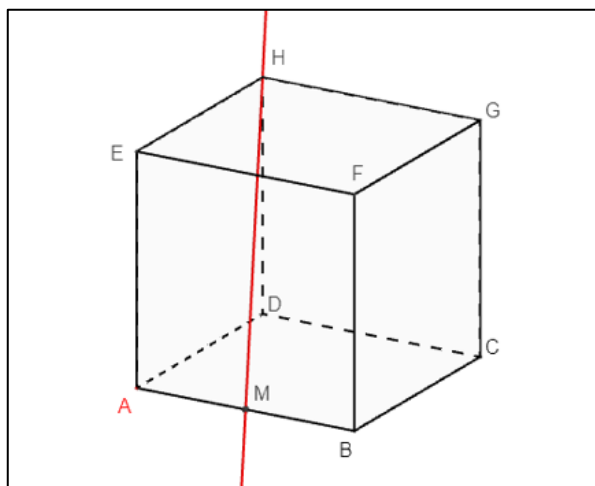
Pokud bychom si v obrázku vyznačili jednotlivé úhly (obrázek 9 vpravo), zjistíme, že trojúhelníky  $ABP$ ,  $BMP$ ,  $HAP$  a  $HBA$  jsou podobné podle kritéria 1 o podobnosti trojúhelníků, které jsem uvedla v kapitole „Vymezení základních pojmů“. Všechny tyto trojúhelníky se shodují ve velikosti všech vnitřních úhlů. Délka strany  $AB$  je  $a$ , délka

strany  $AH$  je  $a\sqrt{2}$  a délka strany  $BH$  je  $a\sqrt{3}$ . Zde vycházím ze základních znalostí o délkách úhlopříček v krychli, ale samozřejmě lze tyto délky dopočítat pomocí Pythagorovy věty.

Platí  $\triangle ABP \sim \triangle HBA$ , tedy  $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|HA|}{|HB|} \Rightarrow |AP| = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

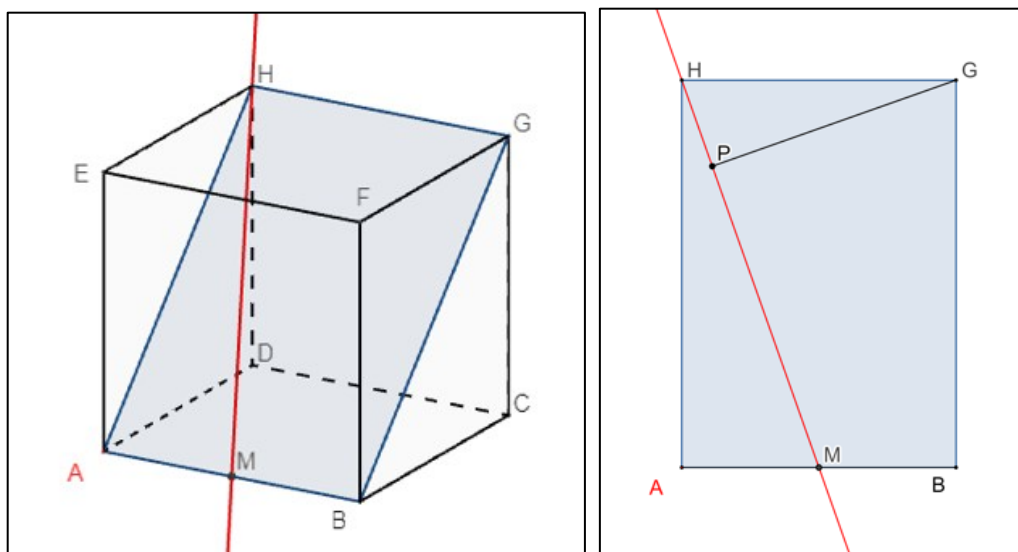
**Úloha 1:** Je dána krychle  $ABCDEFGH$  s hranou délky  $a$ ; bod  $M$  je střed hrany  $AB$ .

b) Vypočti vzdálenost bodu  $G$  od přímky  $HM$ .



Obrázek 10: Zadání úlohy 1b)

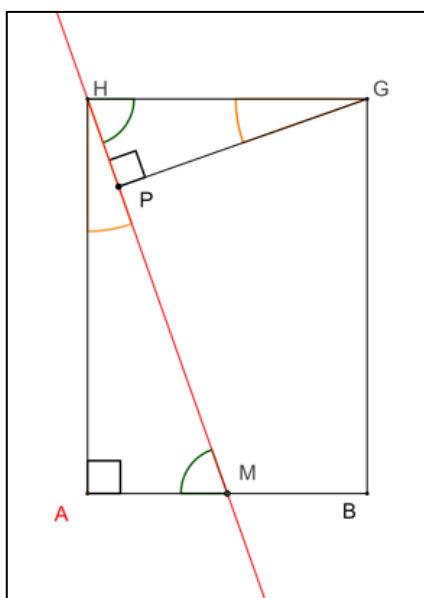
Celou úlohu můžeme opět řešit v rovině  $ABH$  (obrázek 11 vlevo).



Obrázek 11: Planimetrizace úlohy

Hledanou vzdáleností je vzdálenost bodu  $G$  od paty  $P$  kolmice vedené bodem  $G$  k přímce  $HM$  (obrázek 11 vpravo).

Když si opět vyznačíme úhly v trojúhelnících  $AMH$  a  $PHG$ , zjistíme, že se shodují ve všech těchto úhlech. Trojúhelníky jsou tedy podobné podle kritéria 1 o podobnosti trojúhelníků (viz kapitola „Vymezení základních pojmů“) a platí  $|AM| = \frac{a}{2}$ ,  $|AH| = a\sqrt{2}$  a  $|MH| = \sqrt{|AM|^2 + |AH|^2} = \frac{3a}{2}$ . Podle  $\triangle AMH \sim \triangle PHG$  platí  $\frac{|PG|}{|HG|} = \frac{|AH|}{|MH|}$  tedy  $|PG| = a \cdot \frac{\frac{a\sqrt{2}}{\frac{3a}{2}}}{\frac{3a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} a$ .



Obrázek 12: Podobné trojúhelníky

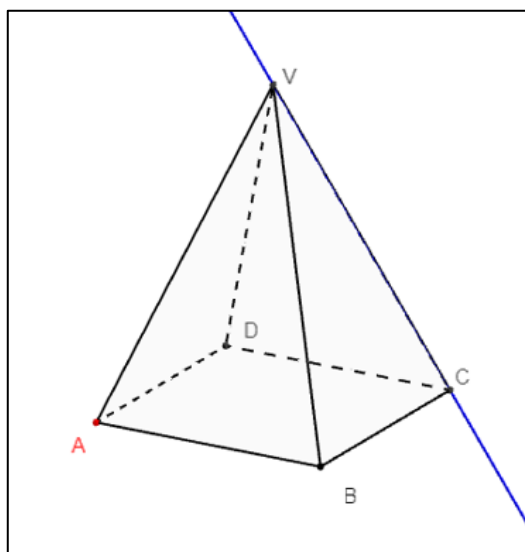
**Úloha 2:** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ;  $|AB| = a = 4$  cm,  $|AV| = b = 6$  cm.

- a) Urči vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $CV$ .

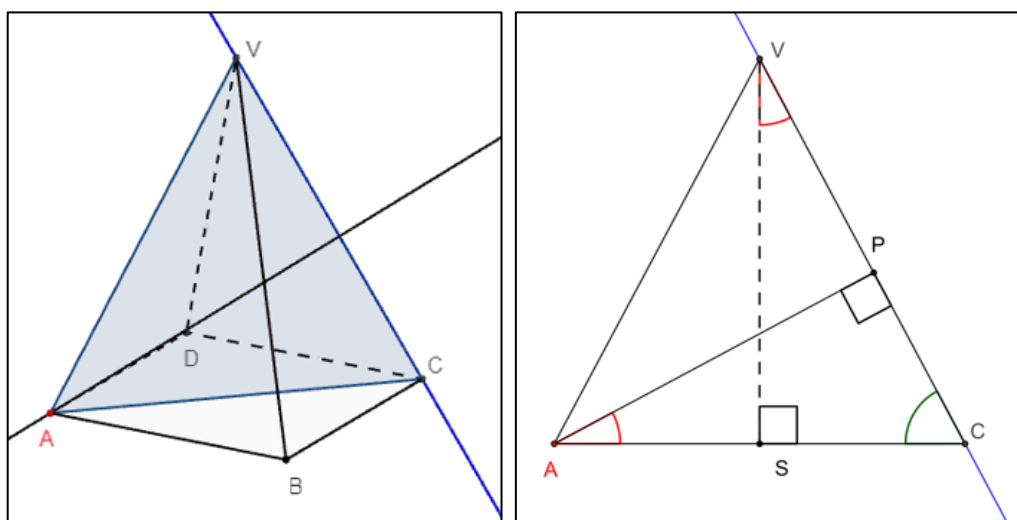
**Řešení:**

Při řešení této úlohy si stačí opět uvědomit, že úloha se dá převést do roviny  $ACV$  (obrázek 14 vlevo)

Hledanou vzdáleností je vzdálenost bodu  $A$  od paty  $P$  kolmice k přímce  $CV$  vedené bodem  $A$  (obrázek 14 vpravo). Průnikem roviny  $ACV$  a jehlanu je trojúhelník  $ACV$ , můžeme tedy úlohu řešit v tomto trojúhelníku.



Obrázek 13: Zadání úlohy 2a)



Obrázek 14: Planimetrizace úlohy

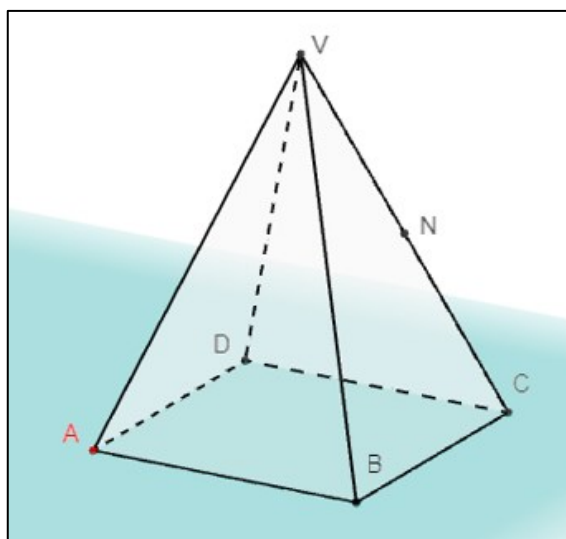
V trojúhelníku  $ACV$  si vyznačíme výšku jehlanu  $VS$  a další úhly. Z obrázku je vidět, že trojúhelníky  $SCV$  a  $PCA$  se shodují v úhlu  $VCA$  a oba trojúhelníky jsou pravoúhlé. To znamená, že se shodují ve dvou úhlech, a jsou tedy podobné podle kritéria 1 o podobnosti trojúhelníků (viz kapitola „Vymezení základních pojmů“).  $|AC| = 4\sqrt{2}$  cm,  $|CV| = |AV| = 6$  cm,  $|SV| = \sqrt{|CV|^2 - \left(\frac{|AC|}{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}$  cm. Z podobnosti  $\triangle SCV \sim \triangle PCA$  plyne  $\frac{|PA|}{|AC|} = \frac{|SV|}{|CV|}$ , tedy  $|PA| = 4\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{4\sqrt{14}}{3}$  cm.

**Úloha 2:** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ;  $|AB| = a = 4$  cm,  $|AV| = b = 6$  cm.

Bod  $N$  je středem hrany  $CV$ .

b) Urči vzdálenost bodu  $N$  od roviny  $ABC$

**Řešení:**



Obrázek 15: Zadání úlohy 2b)

Řešením úlohy je vzdálenost bodu  $N$  od jeho kolmého průmětu  $N'$  do roviny  $ABC$  (obrázek 16 vlevo). Celou situaci můžeme opět řešit v rovině  $ACV$ , která je k rovině  $ABC$  kolmá (obrázek 16 vpravo).

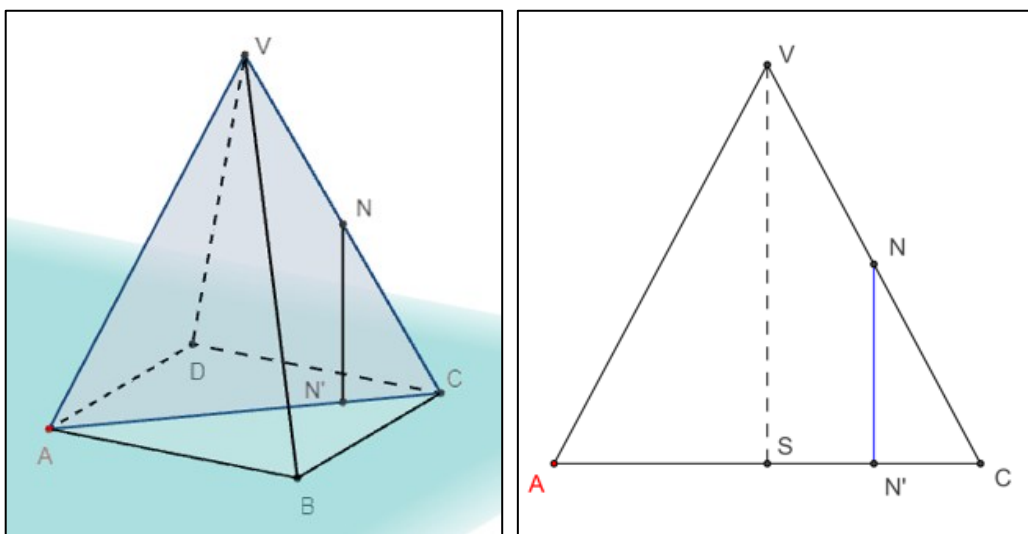
Trojúhelníky  $SCV$  a  $N'CN$  se shodují v úhlu  $VCS$  a oba jsou pravoúhlé. Podle kritéria 1 o podobnosti trojúhelníků (viz kapitola „Vymezení základních pojmů“) jsou tedy tyto trojúhelníky podobné. Jelikož bod  $N$  leží ve středu úsečky  $VC$ , koeficient podobnosti je  $\frac{1}{2}$ .

Hledanou vzdáleností je tedy polovina výšky jehlanu.  $|SV| = \sqrt{|CV|^2 - \left(\frac{|AC|}{2}\right)^2} = 2\sqrt{7}$  cm, tedy  $|NN'| = \sqrt{7}$  cm.

**Úloha 2:** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ;  $|AB| = a = 4$  cm,  $|AV| = b = 6$  cm.

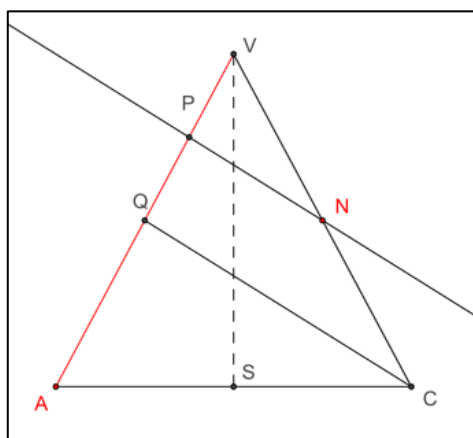
Bod  $N$  je středem hrany  $CV$ .

c) Urči vzdálenost bodu  $N$  od přímky  $AV$ .



Obrázek 16: Kolmý průmět bod  $N$  do roviny  $ABC$

Úlohu je možné opět řešit převedením do roviny  $ACV$ . Hledanou vzdáleností je vzdálenost bodu  $N$  od paty  $P$  kolmice vedené bodem  $N$  k přímce  $AV$ . Doplňme-li si do trojúhelníku kolmici k přímce  $AV$  vedenou bodem  $C$  a zjistíme, že trojúhelníky  $QCV$  a  $PNV$  jsou podobné podle kritéria 1 o podobnosti trojúhelníků (viz kapitola „Vymezení základních pojmů“). Oba trojúhelníky jsou pravoúhlé a shodují se v úhlu  $PVN$ . Jelikož bod  $N$  leží ve středu úsečky  $VC$ , je koeficient podobnosti  $\frac{1}{2}$ . Trojúhelník  $ACV$  je rovnoramenný s rameny  $AV$  a  $CV$ . To znamená, že vzdálenost bodu  $A$  od přímky  $CV$  je stejná jako vzdálenost bodu  $C$  od přímky  $AV$ . Hledanou vzdáleností je tedy polovina vzdálenosti bodu  $A$  od přímky  $CV$ , kterou jsme již počítali v úloze 2a).  $|PN| = \frac{2\sqrt{14}}{3}$  cm.



Obrázek 17: Řešení úlohy 2c)

## 9 Výsledky výzkumu

Na začátku každé úlohy nejdříve uvedu shrnutí postupů, jakými žáci úlohy řešili, a poté budu rozebírat jednotlivé jevy, které se při řešení úlohy objevily. Na konci kapitoly shrnu jevy, které se při řešení objevily napříč všemi úlohami.

### 9.1 Úloha 1a)

Na začátku rozhovoru jsem žáky požádala, aby začali řešit úlohu samostatně. Řekla jsem jim, že v případě potřeby můžou použít drátěný model krychle.

Všichni žáci začali tak, že si nakreslili ilustrační obrázek, ve kterém si vyznačili přímku  $BH$  a bod  $A$ . Dva žáci si krychli dokonce narýsovali, ale jen přibližně. Nedodržovali tedy žádná pravidla pro rýsování ve volném rovnoběžném promítání. Zdálo se mi, že rýsování při řešení úlohy dost zdržuje, což mě vedlo k otázce, zda by žákům nestačilo si obrázek pouze načrtnout. Žáci ale na rýsování trvali, protože tak prý lépe v obrázcích vidí danou situaci. Dle mého názoru měli žáci díky rýsování poměrně pěkné a přehledné obrázky, ale i přesto měli potřebu úlohu řešit s pomocí modelu krychle.

Žáci po nakreslení obrázku většinou vyslovili svou první myšlenku na řešení úlohy. Poté jsem je požádala, aby mi vysvětlili, co to vůbec je vzdálenost bodu od přímky. Přestože všichni žáci byli schopni vysvětlit, co je vzdálenost bodu od přímky v rovině a poté i v prostoru, jejich první nápad, jak úlohu řešit, většinou správný nebyl. To může být způsobeno tím, že žáci nejdříve volí cestu nejjednoduššího řešení, ale také tím, že žákům bývají často zadávány nejdříve jednodušší úlohy, jejichž obtížnost se postupně zvyšuje. Podobně tomu bylo i v učebnici Stereometrie nakladatelství Prometheus. Dalším důvodem může být neschopnost představit si situaci v prostoru, proto si žáci musí situaci nejdříve vymodelovat na modelu krychle.

Sedm žáků uvedlo jako svou první myšlenku, že by hledanou vzdáleností mohla být polovina tělesové úhlopříčky. To by však znamenalo, že jsou tělesové úhlopříčky v krychli na sebe kolmé.<sup>2</sup> Žáky jsem vyzvala, aby vysvětlili, zda jsou na sebe úhlopříčky v krychli kolmé. Žáci buď popsali, že tělesové úhlopříčky v krychli jsou současně úhlopříčkami obdélníku  $ABGH$ ,

---

<sup>2</sup> Na tento jev narazili i Půlpán, Kuřina a Kebza (1992) ve svém výzkumu, jak bylo uvedeno v teoretické části.

nebo situaci vymodelovali v krychli, kde v podstatě přímo viděli, že kolmé nejsou. Dva z těchto žáků ještě vyslovili myšlenku, že by hledanou vzdáleností mohla být délka hrany  $AB$ .

Pavel se rozhodl přesvědčit o kolmosti tělesových úhlopříček v krychli přeměření příslušných úseček ve svém obrázku. To může být způsobeno tím, že dobře nerozlišuje mezi geometrickým prostorem a prostorem reprezentací.

Pět žáků mělo problém některé vlastnosti ve svém obrázku vidět, a museli si proto situaci modelovat v krychli. Zatímco některým stačilo vymodelovat si pouze úsečky (pomocí tužek) a body, tak jiní museli modelovat i roviny<sup>3</sup> (pomocí papíru), nebo dokonce trojúhelníky, které si složili nebo vystřihli z papíru.

V dalším kroku se polovina žáků zaměřila pouze na pravoúhlý trojúhelník  $ABP$  (značení podle obrázku 8), ve kterém se hledaná vzdálenost nacházela. Někteří dokonce řekli, že by mohli použít Pythagorovu větu, aby hledanou vzdálenost dopočítali. Poté se ale ukázalo, že znají v trojúhelníku délku pouze jedné strany, takže Pythagorovu větu použít zatím nemohou. Vypadá to, že žáci mají pravoúhlý trojúhelník především spojený s Pythagorovou větou. Po nějaké době bylo potřeba žákům poradit, aby se nesoustředili jen na tento trojúhelník.

Druhá polovina žáků rovnou zvolila větší geometrický útvar, buď trojúhelník  $ABH$ , nebo obdélník  $ABGH$ .

Jeden ze způsobů, jak bylo možné úlohu dále vyřešit, bylo využití goniometrických funkcí. Pro toto řešení se rozhodla polovina žáků.

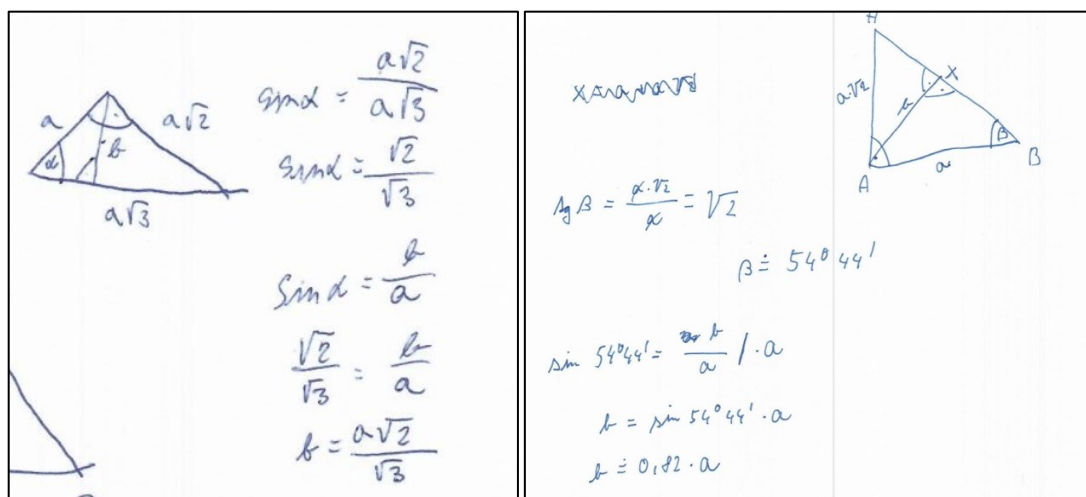
Na obrázku 18 (vlevo) uvádím Lukášovo řešení. Ten si vyjádřil sinus stejného úhlu ze dvou pravoúhlých trojúhelníků, poté dal oba siny do rovnosti a vyjádřil hledanou vzdálenost. Tímto způsobem byla řešena i jedna úloha v učebnici Matematika pro Gymnázia – Stereometrie nakladatelství Prometheus.

Protože v trojúhelníku  $ABH$  znali žáci délky všech tří stran, mohli se rozhodnout pro jakoukoliv z goniometrických funkcí. Pokud zvolili jinou funkci než sinus (obrázek 18

---

<sup>3</sup> Na podobný jev opět upozornili Půlpán, Kuřina a Kebza (Půlpán et al., 1992).

vpravo), museli nejdříve na kalkulačce vypočítat přibližnou hodnotu velikosti daného úhlu a poté dopočítat přibližně velikost hledané vzdálenosti. Žáky jsem nechala úlohu takto dořešit a poté jsme rozebírali, jak bylo možné se zaokrouhlování vyhnout. Většina z nich došla k tomu, že by v prvním kroku bylo možné použít funkci sinus.



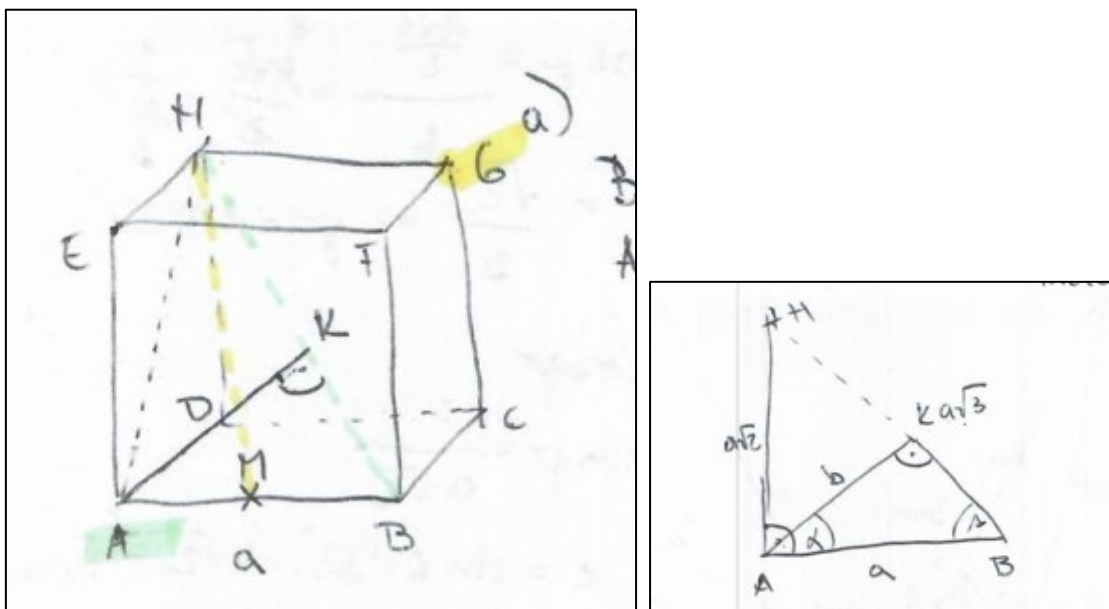
Obrázek 18: Ukázka žákovských řešení

Při užití goniometrických funkcí se objevily dvě věci hodné pozornosti. Jeden z žáků měl naučenou „básničku“: protilehlá ku přilehlé. Žák ji využil v pravoúhlém trojúhelníku  $ABH$  pro pravý úhel. Funkce tangens tedy podle jeho pravidla byla: protilehlá přepona ku přilehlé odvěsně. To je podle mého názoru jasný příklad formálního poznatku ve formě poučky. Kdyby si žák říkal pravidlo celé jako *protilehlá odvěsna ku přeponě*, mohl by si uvědomit, že pro pravý úhel jeho „básnička“ neplatí. Může to také plynout z nepochopení goniometrických funkcí.

Druhým jevem, který se objevil, je, že žáci používali goniometrické funkce pro pravý úhel. Například napsali:  $\cos 90^\circ = \frac{r}{a\sqrt{2}}$ . Jelikož je  $\cos 90^\circ = 0$ , vedlo je to samozřejmě k nezdaru. Toto je opět příklad formálního poznatku.

Jana (viz obrázek 19) se rozhodla pro vyřešení úlohy nejdříve využít funkci kosinus, aby vypočítala přibližnou velikost úhlu  $\beta$ . Poté si podle věty o součtu úhlů v trojúhelníku dopočítala i velikost úhlu  $\alpha$ . Místo, aby opět použila některou z goniometrických funkcí

v pravoúhlém trojúhelníku  $ABK$ , použila sinovou větu<sup>4</sup>, a zjistila tak přibližnou hodnotu hledané vzdálenosti. Toto řešení mě zaujalo především proto, že si žákyně musela vybavit další větu. Nakonec se ukázalo, že žákyně si myslí, že může použít goniometrické funkce pouze v případě, když v trojúhelníku zná dvě strany a potřebuje dopočítat velikost úhlu.



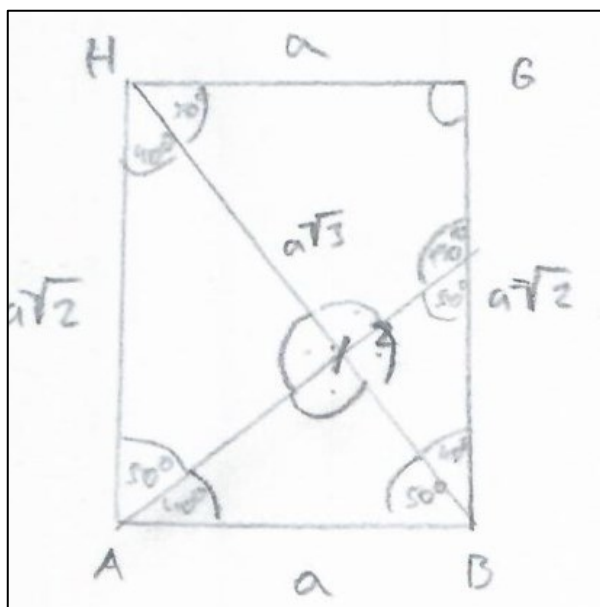
Obrázek 19: Jany řešení

Druhým způsobem, jak bylo možné úlohu vyřešit, bylo využití podobnosti trojúhelníků. Touto cestou se vydalo pět žáků.

Nejdříve žáci vyslovili fakt, že žádné jiné než pravé úhly v trojúhelnících neznají. Proto jsem se jich zeptala, zda by jim nějak pomohlo, kdyby jeden z úhlů znali. Tito žáci si proto doplnili jeden „vymyšlený“ úhel (viz obrázek 20) a další úhly doplnili na základě věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku. To je jedna z heuristických metod – metoda zavedení pomocného prvku. Díky tomu si žáci uvědomili, že jsou zde podobné trojúhelníky. Ne všichni si však na termín „podobné trojúhelníky“ vzpomněli. Jedna žákyně řekla, že jsou trojúhelníky „úhlově shodné“, jiná zase řekla, že jeden trojúhelník je zmenšením druhého

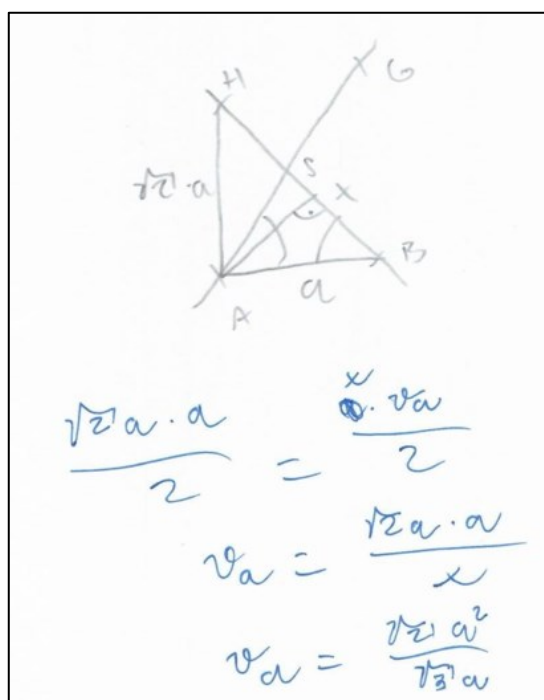
<sup>4</sup> **Věta sinová:** Pro každý trojúhelník  $ABC$ , jehož strany mají délky  $a, b, c$  a vnitřní úhly velikosti  $\alpha, \beta, \gamma$ , kde  $|\sphericalangle BAC| = \alpha, |\sphericalangle ABC| = \beta, |\sphericalangle ACB| = \gamma$ , platí  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

trojúhelníku. To mě vedlo k otázce, co to vůbec znamená a zda je informace, že jsou trojúhelníky podobné, žákům k něčemu užitečná. Magdaléna si nebyla jistá, co pro podobné trojúhelníky platí. Vzpomínala, že je tam něco s poměry stran, ale nemohla si vzpomenout co. Požádala jsem ji, aby si nějaké podobné pravoúhlé trojúhelníky vymodelovala z tužek. Díky modelování si uvědomila, že když se jedna strana zvětší dvakrát, tak i ostatní strany se zvětší dvakrát. Modelování pomocí tužek, popřípadě kreslení trojúhelníku do čtverečkováného papíru pro zjištění, co pro podobné trojúhelníky platí, využili ještě další dva žáci. Domnívala jsem se, že podobnost trojúhelníků bude pro žáky jednoduchá, protože se s ní setkávají již na základní škole. Tento můj předpoklad se nenaplnil.



Obrázek 20: Metoda doplnění úhlu

Třetím způsobem, jak bylo možné úlohu vyřešit, bylo s využitím obsahu trojúhelníku. Na obrázku 21 uvádím Filipovo postupu. Ten si pro výpočet vybral pravoúhlý trojúhelník  $ABH$ , ve kterém znal délky všech tří stran. Vyjádřil si tedy obsah trojúhelníku  $\frac{\sqrt{2} \cdot a \cdot a}{2}$ . Obsah tohoto trojúhelníku bylo možné vyjádřit také s využitím hledané vzdálenosti, protože je to výška na stranu  $HB$  čili  $\frac{a \cdot \sqrt{3} \cdot v_a}{2}$ , kde  $v_a$  značí žák hledanou vzdálenost. Oba výrazy stačí dát do rovnosti a vyjádřit neznámou.



Obrázek 21: Řešení s využitím obsahu trojúhelníku

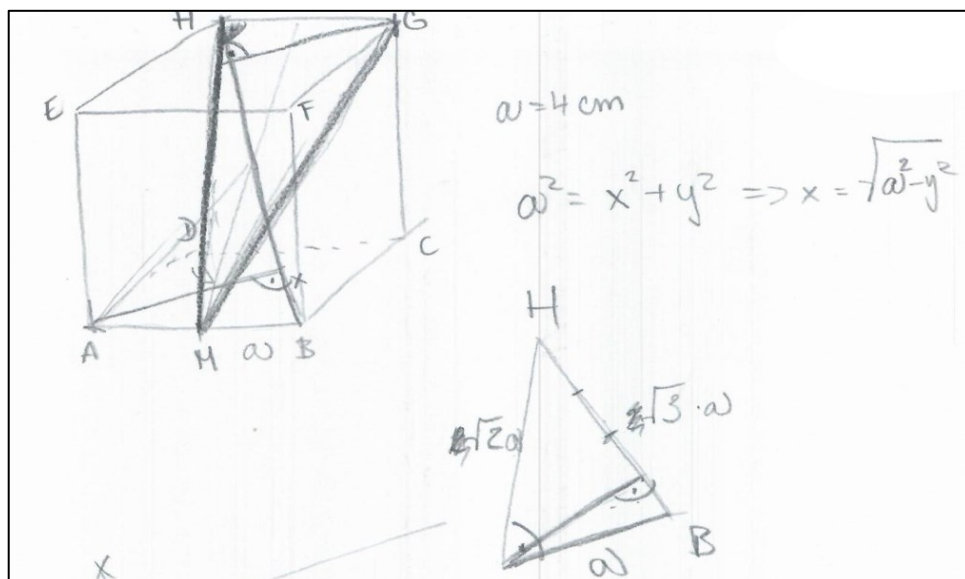
Tomáš se nad úlohou nejdříve zamýšlel konstrukčně. Řekl, že by hledanou patu kolmice dokázal najít pomocí Thaletovy kružnice.<sup>5</sup> Až po této myšlence začal přemýšlet nad numerickým řešením. Konstrukční řešení jsme mohli vidět i v učebnicích, jak jsem zmiňovala výše, což může některým žákům pomoci uvědomit si některé vztahy.

Dále se podíváme na další jevy, které se při řešení úlohy objevily.

Na obrázku 22 si můžeme všimnout, jak Eliška původně namalovala trojúhelník  $ABH$  jako rovnoramenný. Pravý úhel do obrázku doplnila až poté, co se v modelu krychle ujistila, že je trojúhelník pravoúhlý. Následně doplnila i délky všech stran, díky nimž by si také mohla ověřit, že pro ně platí Pythagorova věta, takže trojúhelník je opravdu pravoúhlý. Toto je příklad obrázku jako ilustrace. Přestože jsou v obrázku trojúhelníku uvedeny délky stran a pravý úhel, trojúhelník jako pravoúhlý nevypadá. Jak již bylo uvedeno v teoretické části,

<sup>5</sup> Množina všech vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma danými body  $A, B$  ( $A \neq B$ ), čili množina všech bodů, z nichž je vidět úsečku  $AB$  pod pravým úhlem, je kružnice sestavená nad průměrem  $AB$  s výjimkou bodů  $A, B$  (tzv. Thaletova kružnice).

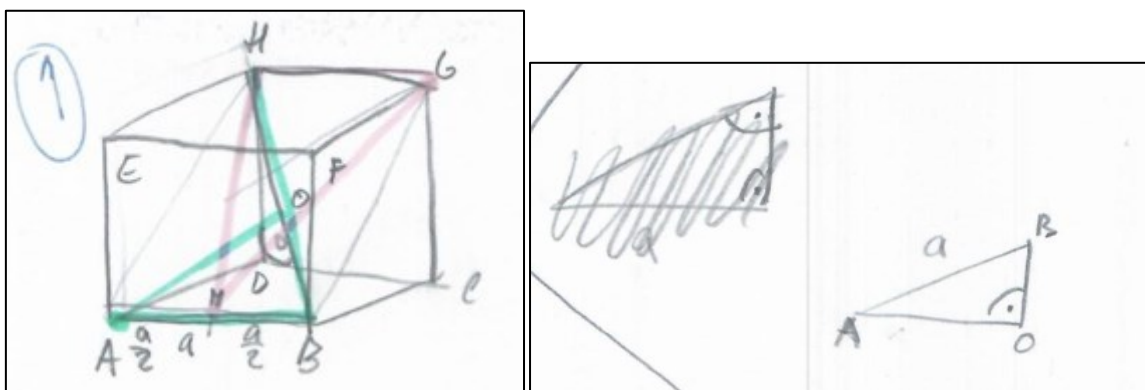
takový obrázek nemusí žákům dostatečně dobře posloužit pro vyřešení úlohy. Velmi mě proto překvapilo, když žákyně řekla, že trojúhelník  $ABX$  vypadá stejný jako trojúhelník  $ABH$ , jen v menším provedení. Zřejmě tuto podobnost spíše vypožorovala z modelování v krychli než z tohoto obrázku.



Obrázek 22: Pravoúhlý trojúhelník  $ABH$  jako rovnoramenný

Eliška se rozhodla řešit úlohu přes podobné trojúhelníky. Nejdříve správně řekla, že když jedna strana má délku  $a$  a v druhém trojúhelníku má odpovídající strana délku  $a\sqrt{3}$ , tato strana se zvětšila  $\sqrt{3}$ krát. Poté si vzala jinou stranu ve druhém trojúhelníku, která má délku  $a\sqrt{2}$ , a řekla, že tato strana se zvětšila  $\sqrt{2}$ krát. Tato chyba může plynout z nepochopení podobností trojúhelníků nebo také z toho, že délky stran jsou vyjádřené pomocí proměnné  $a$  odmocnin, což může žákům činit problémy.

Adéla si nejdříve nebyla jistá, v jaké rovině trojúhelník  $ABO$  leží (viz obrázek 23 vlevo). Nedokázala si tuto rovinu představit. Na obrázku 23 (vpravo) vidíme, že si Adéla nakreslila pravoúhlý trojúhelník  $ABO$  (na obrázku přeškrtnutý) a označila pravý úhel v trojúhelníku (horní úhel). Zde bych chtěla upozornit na to, že to nebylo způsobeno tím, že by si žákyně myslela, že takto pravý úhel vypadá. Spíše se ukázalo, že je žákyně zvyklá kreslit trojúhelník s pravým úhlem při dolní straně listu, ale pravoúhlý trojúhelník, který žákyně překreslovala z krychle, byl v jiné poloze. Proto vznikl tento nepřesný obrázek pravoúhlého trojúhelníku. Toto je příklad prototypického kreslení obrázků.



Obrázek 23: Prototypické kreslení trojúhelníku

V dalším obrázku 24 (vlevo) si můžeme všimnout, že si Adéla neoznačila žádné vrcholy. To ovšem vedlo k dalším problémům při řešení úlohy. Žákyně řešila úlohu pomocí podobných trojúhelníků. Překreslila si nejdříve tři podobné pravoúhlé trojúhelníky ve stejné poloze s pravým úhlem při dolní straně listu (viz obrázek 24 vpravo). Při doplňování délek jednotlivých stran však měla problém. To může plynout jednak z toho, že si nepojmenovala žádný vrchol, jednak neschopností představit si trojúhelníky v jiné poloze.

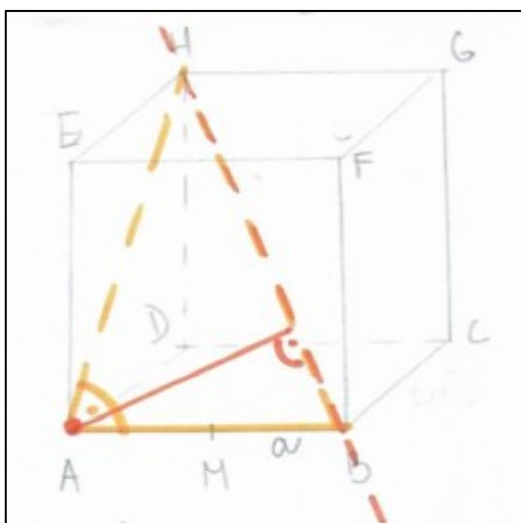
Dále žákyně řekla, že potřebuje zjistit, o kolik se jedna strana zvětšila, a na kalkulačce mačkala rozdíl hodnot  $4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$  místo podílu těchto hodnot. Zde je vidět nesprávné pochopení podobností, místo kolikrát se zvětší jedna strana, tolikrát se zvětší druhá strana, si žákyně myslela, že o kolik se zvětší jedna strana, o tolik se zvětší druhá strana trojúhelníku. Opět to může být jeden z formálních poznatků. U této žákyně je nutné podotknout, že potřebovala mít zadanou konkrétní délku hrany krychle, aby si mohla hodnoty přibližně počítat. K řešení využívala délku hrany krychle  $a = 4$  cm.

Na obrázku 25 je vidět, že Pavel si narýsoval hledanou kolmici na přímkou  $HG$  jako přímkou až za bod  $Z$ . To ho vedlo k myšlence, že kolmice protne hranu  $CG$ . Žák tedy nerozlišoval mezi prostorem reprezentací a geometrickým prostorem. Současně měl velký problém si situaci představit, proto si vše musel modelovat v krychli.

Na obrázku 26 vidíme, že Lukáš si jeden trojúhelník nakreslil dvakrát vedle sebe, pouze pootočený. Po nakreslení druhého obrázku byl schopen ihned vyslovit myšlenku na řešení této úlohy. To mě překvapilo, proto jsem se ho zeptala, proč nakreslil dvakrát stejný trojúhelník, jen pootočený. Jeho odpověď byla, že takhle to lépe vidí.



Magdaléna (obrázek 27) po narýsování krychle napsala k hraně  $BC$ , že má délku  $a\sqrt{2}$ . Za chvilku řekla, že to ale není úhlopříčka. Znamená to, že žákyně buď nerozlišuje mezi prostorem reprezentací a geometrickým prostorem, nebo si není schopná situaci představit v prostoru. Tato žákyně si také potom myslela, že trojúhelník  $ABP$  ( $P$  je pata hledané kolmice na úsečce  $BH$ ) leží v podstavě krychle. Nejlepší pro tuto žákyni bylo, když si mohla vše modelovat v modelu krychle.

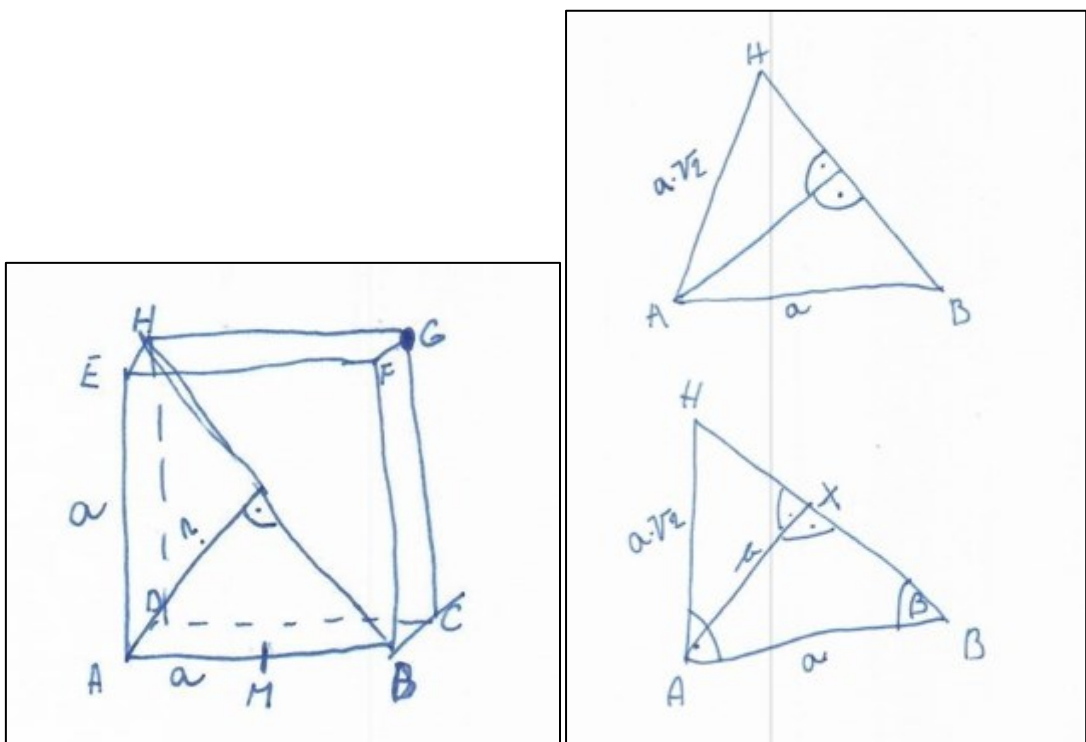


Obrázek 27: Řešení Magdalény

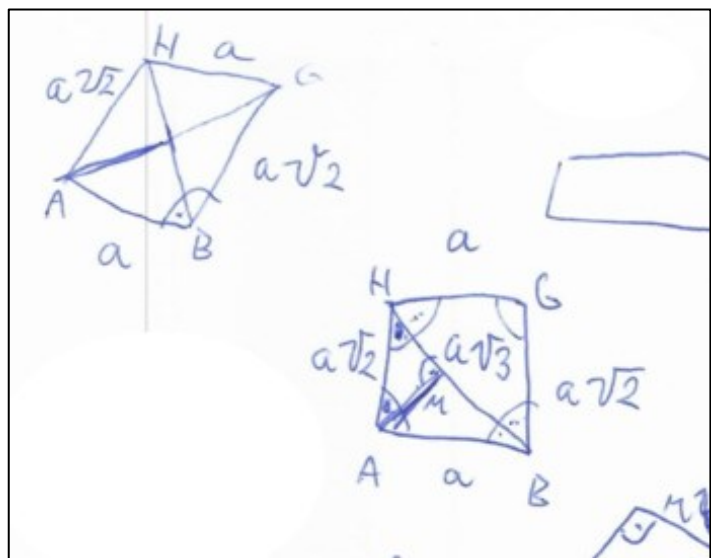
Na obrázku 28 vidíme, že Ondřej si nejdříve nakreslil trojúhelník  $ABH$  jako rovnostranný (vpravo nahoře). Poté řekl, že si není jistý, zda úhel u vrcholu  $B$  nemá  $45^\circ$ . To nejspíše vyplývalo z obrázku krychle (obrázek 28 vlevo), kde se mu tento úhel tak jevil. To je další ukázka nerozlišování mezi geometrickým prostorem a prostorem reprezentací.

Dále se Ondřej rozhodl dopočítat si délku přepony  $HB$  pomocí Pythagorovy věty. Napsal:  $x = a + a\sqrt{2}$ . Žák si žádné chyby nebyl vědom, požádala jsem ho, aby mi vysvětlil, co Pythagorova věta říká. Na to odpověděl, že neví. Žák tedy nebyl schopen svůj špatný formální poznatek identifikovat, a tedy ani následně opravit.

Petr nejdříve tvrdil, že je obdélník  $ABGH$  kosočtverec (viz obrázek 29), chtěla jsem proto, aby mi vysvětlil, co to je kosočtverec. Řekl, že je to čtyřúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé. Následně se tedy opravil a řekl, že to bude kosodélník. Opět jsem chtěla, aby mi vysvětlil, co je to kosodélník. Začali jsme se bavit o velikostech vnitřních úhlů v obdélníku  $ABGH$ , aby došel k tomu, že čtyřúhelník  $ABGH$  je obdélník.



Obrázek 28: Ukázka prototypického kreslení obrázků



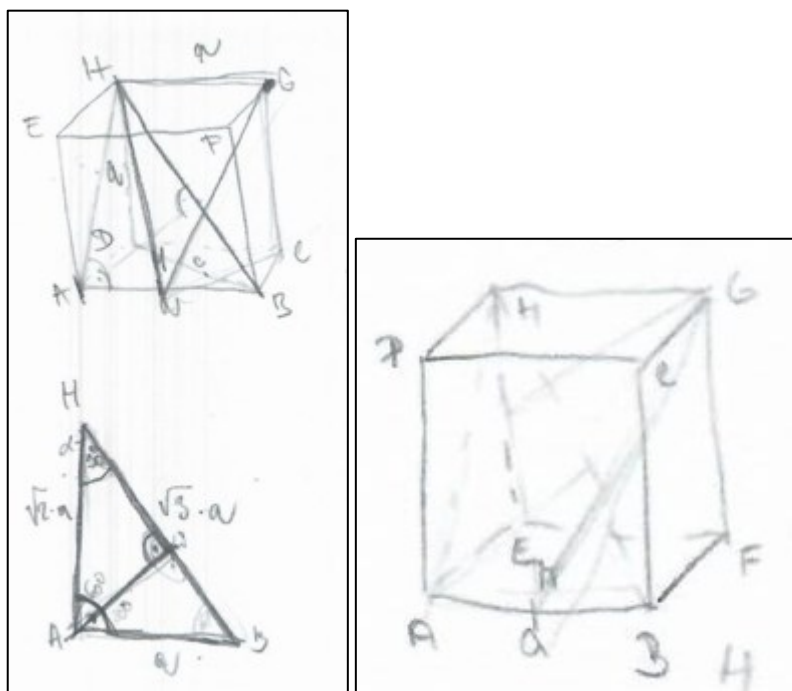
Obrázek 29: Ukázka původního nakreslení čtverce a nového obrázku

Další chybou, která se objevila, bylo nadměrné zobecňování vzorců, na které jsem také narazila již v teoretické části. Tereza podle Pythagorovy věty napsala rovnici:  $d^2 = a^2 + (\sqrt{2} \cdot a)^2$ . Následně ji odmocnila a napsala  $d = a + \sqrt{2} \cdot a$ .

Tereza si na začátku řešení této úlohy začala nejdříve vypočítávat délku tělesové úhlopříčky  $BH$  v trojúhelníku  $HDB$  s využitím Pythagorovy věty. K tomu ale potřebovala zjistit délku strany  $BD$ . Tu vypočítala pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku  $ABD$ . Poté ještě řekla, že si vypočítá úhlopříčku  $AH$ , a následně si uvědomila, že její délka je stejná jako úhlopříčka ve čtverci  $ABCD$ , kterou již počítala. Tereza neměla s výpočty problémy, ale přeci jenom jí zabraly nějaký čas, proto jsem se jí poté zeptala, k čemu jí tyto délky budou. Na to žákyně odpověděla, že to zatím neví, ale že takhle alespoň ukázala, že něco umí.

Poté si nakreslila trojúhelník  $ABH$  (obrázek 30 vlevo). Jak můžeme vidět, trojúhelník nakreslila pravoúhlý, přestože si nebyla jistá, zda tento trojúhelník pravoúhlý je, nebo není. To je další ukázka prototypického kreslení obrázků. K ověření toho, zda je trojúhelník pravoúhlý, by jí mohly pomoci délky stran, které si již vypočítala. Ale to žákyni nenapadlo.

Anežka si jako jediná nakreslila krychli přetočenou (viz obrázek 30 vpravo). Zajímalo mě, zda k tomu má nějaký důvod. Například, že by tak lépe viděla řešení dané úlohy. Žákyně odpověděla, že si nikdy nepamatovala, jak vrcholy krychle pojmenovávat, takže to dělá víceméně náhodně.



Obrázek 30: Terezy řešení (vlevo), přetočená krychle (vpravo)

## 9.2 Úloha 1b)

Pouze čtyři žáci si s další úlohou nakreslili nový obrázek krychle, všichni ostatní si pouze do původního obrázku krychle doplnili bod  $M$  a hledanou kolmici. Při řešení této úlohy si sedm žáků nejdříve nakreslilo trojúhelník  $HGM$  a tři žáci celý obdélník  $ABGH$ . Tři žáci měli stále potřebu si celou situaci modelovat v krychli.

Úlohu bylo možné opět řešit všemi třemi výše uvedenými způsoby, tedy přes podobné trojúhelníky, s využitím goniometrických funkcí nebo obsahu trojúhelníku. Šest žáků řešilo úlohu s využitím goniometrických funkcí, pět žáků řešilo úlohu přes podobné trojúhelníky a jeden žák přes obsah trojúhelníku. Všichni žáci tedy zvolili stejný způsob řešení jako u úlohy předchozí. Někteří žáci po předchozí zkušenosti s doplňováním vymyšleného úhlu se rozhodli využít stejnou metodu při řešení této úlohy.

U této úlohy jsem si všimla, že žáci, kteří neměli problém vidět danou situaci v prostoru, měli většinou nějaký problém s úpravou algebraických výrazů a rovnic. Naopak žáci, kteří měli problém si situaci představit, úpravu algebraických výrazů a rovnic řešili bez problémů.

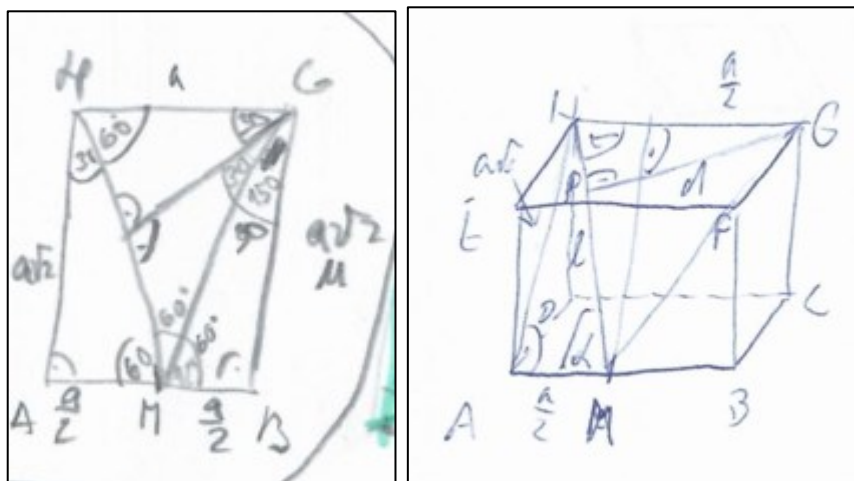
Níže opět uvedu jevy, které se u žáků při řešení této úlohy objevily.

Někteří žáci měli problém si uvědomit, že je trojúhelník  $HGM$  rovnoramenný. To se například projevilo tak, že si nejdříve vypočítali délku úsečky  $MG$  a poté řekli, že si ještě musí zjistit délku úsečky  $MH$ . Kdyby žáci viděli, že je trojúhelník rovnoramenný, nemuseli by již druhou délku počítat. Eliška si myslela, že je trojúhelník  $HGM$  pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu  $H$ . Musela si opět situaci vymodelovat v modelu krychle.

V obrázku 31 (vlevo) si můžeme všimnout, jak je nakreslená hledaná kolmice. Na řešení této úlohy to sice vliv nemělo, ale takový nepřesný obrázek může vést k mylným závěrům. Jak je vidět z obrázku, Adéla zvolila metodu doplnění úhlu a nakonec řešila úlohu pomocí podobných trojúhelníků. K tomu jí pouze stačilo zjistit, které strany si v jednotlivých trojúhelnících odpovídají. Kdyby si však obrázek nakreslila přesnější, mohla podobnost trojúhelníků z obrázku i vidět. Tento obrázek tedy můžeme opět považovat spíše za ilustraci.

Tomáš řešil celou úlohu pouze v jednom obrázku (obrázek 31 vpravo). Rozhodl se řešit úlohu pomocí goniometrických funkcí a k tomu potřeboval zjistit velikost úhlu  $\alpha$  (viz

obrázek 31 vpravo). Využil tedy větu o střídavých úhlech<sup>6</sup> a dopočítal tento úhel z trojúhelníku  $AMH$ .



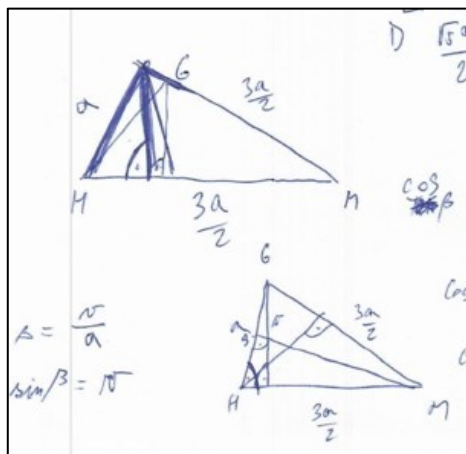
Obrázek 31: Ukázka nepřesného kreslení obrázků (vlevo), Tomášovo řešení (vpravo)

Lukáš podle Pythagorovy věty napsal rovnici  $|DM| = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$  a dále rovnici odmocnil takto:  $\sqrt{|DM|} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ . Zdá se, že Lukáš má naučený postup, že rovnici musí odmocnit, ale nerozumí tomu, co napsal. Tento žák si také třikrát nakreslil stejný trojúhelník. Poprvé si v trojúhelníku neoznačil žádný vrchol, takže když se k němu chtěl vrátit, již nevěděl, co to je za trojúhelník. Podruhé si nakreslil spíše obecný trojúhelník a až potřetí si nakreslil trojúhelník  $HGM$  jako rovnoramenný (obrázek 32). Stejně jako u předchozí úlohy kreslí tento žák trojúhelník tak, aby hledaná výška dopadla na stranu rovnoběžnou s dolním okrajem papíru. Dále při úpravě výrazů krátil  $\frac{2a}{6a}$  jako  $\frac{1}{3}a$ . Vypadá to, že tato chyba pramení z nějakého formálního poznatku. Lukáš čísla ve zlomku vykrátí, ale proměnnou ponechal. Podobně je tomu při odečítání dvou odpovídajících si členů mnohočlenu, kdy se jejich koeficienty odečtou, ale proměnná zůstává.

Magdaléna si nejdříve myslela, že hledaná kolmice leží v rovině zadní stěny krychle. Tato chyba vznikla z toho, že si situaci nedokázala představit v prostoru, proto si musela celou situaci opět modelovat v krychli. Tato žákyně také při odmocňování rovnice  $|GM|^2 =$

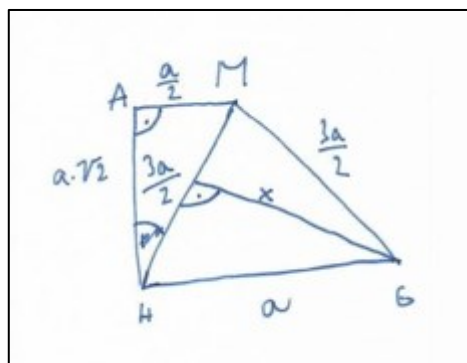
<sup>6</sup> Jsou-li přímky  $m$  a  $n$  rovnoběžné, mají dvojice střídavých úhlů, které vzniknou protnutím rovnoběžných přímek třetí přímkou, stejnou velikost.

$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2$  napsala  $|GM| = \frac{a}{2} + a\sqrt{2}$ . Tento jev se již objevil u Terezy při řešení předchozí úlohy. Chybu bychom asi opět zařadili mezi úkonovou, která plyne z nějakého formálního poznatku.



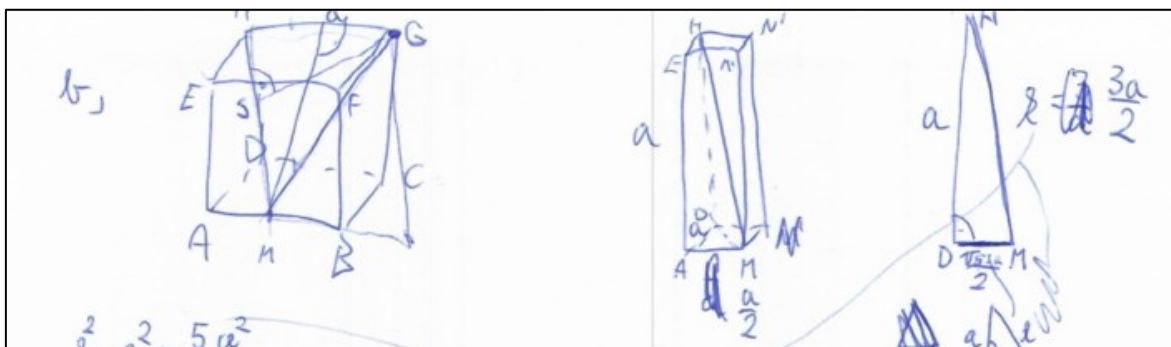
Obrázek 32: Ukázka prototypického kreslení trojúhelníků

Na dalším obrázku 33 můžeme vidět, že Ondřej si trojúhelník  $HGM$  nakreslil přetočený, prý se v tom tak lépe vyzná. Vypadá to na další příklad prototypického kreslení obrázků. Dále si vyjádřil sinus úhlu  $\beta$  (viz obrázek 33) z trojúhelníku  $AHM$  takto:  $\sin \beta = \frac{a}{\frac{3a}{2}}$ , takže  $\sin \beta = \frac{1}{3}$ . Poté řekl, že když úhel  $\beta$  je  $\frac{1}{3}$ , pak velikost úhlu  $GHM$  bude doplněk do  $90^\circ$ , takže  $\frac{2}{3}$  z  $90^\circ$ . Zde je vidět neporozumění goniometrickým funkcím.



Obrázek 33: Doplnění trojúhelníku

Petr využíval k řešení této úlohy polovinu krychle (viz obrázek 34). V jednom z výpočtů zkrátil lomený výraz takto:  $\frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{a} = \frac{a \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{1}$  (obrázek 35). Toto je podobná chyba, které se dopustil výše zmíněný Lukáš.



Obrázek 34: Řešení v polovině krychle

$$\begin{aligned} \text{Výška} &= a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{a} \\ \text{Výška} &= \frac{2 \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot 2}{a} \end{aligned}$$

Obrázek 35: Chybné krácení ve zlomku

Anežka nejdříve řekla, že si není jistá, zda může napsat Pythagorovu větu takto:  $b^2 = a^2 + c^2$ . Přestože neměla v trojúhelníku ani jednu ze stran takto pojmenovanou, nakonec si nejdříve napsala:  $c^2 = a^2 + b^2$ , poté  $a^2 = b^2 - c^2$ . Požádala jsem ji, aby mi vysvětlila, co s rovnicí udělala. Žákyně jen řekla „aha“. Rovnici vygumovala a napsala  $a^2 = c^2 - b^2$ , poté do rovnice dosadila délky stran správně. Toto je ukázka přesvědčení, že Pythagorova věta musí být ve tvaru  $c^2 = a^2 + b^2$ , což může vést ke vzniku formálního poznatku a neschopnosti tuto větu aplikovat.

### 9.3 Úloha 2a)

Tato úloha se na rozdíl od přechozích dvou odehrává v pravidelném čtyřbokém jehlanu a délky hran jsou zde zadané. Všichni žáci opět začali ilustračním obrázkem jehlanu. Poté všichni automaticky nakreslili do obrázku hledanou kolmici, ale lišili se v tom, kam pata

hledané kolmice dopadne. To se ukázalo jako největší problém této úlohy. Někteří žáci si nebyli jistí, zda nedopadne pata hledané kolmice do středu hrany  $CV$ .

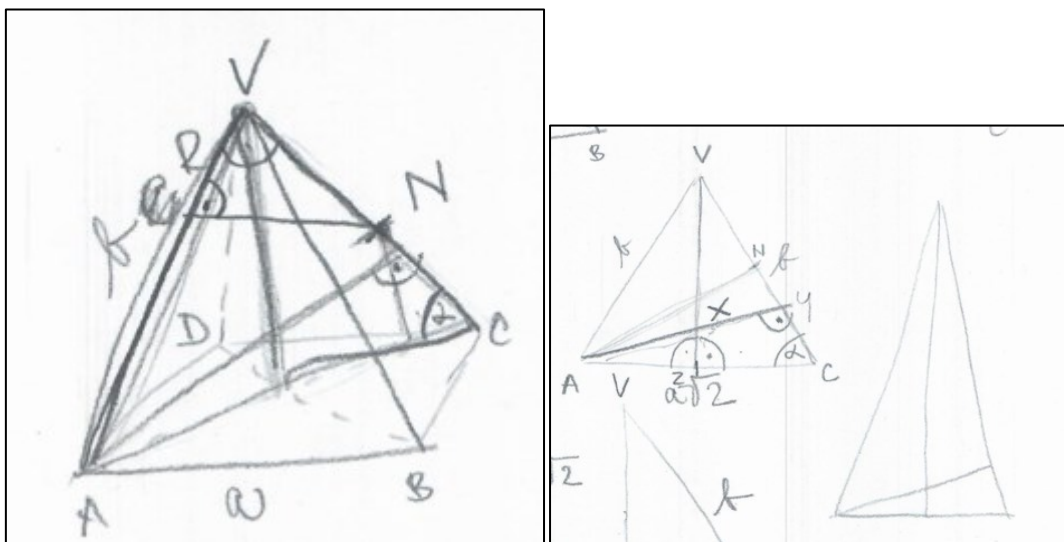
Tomáš opět řešil celou úlohu pouze v původním náčrtku jehlanu, nepotřeboval již další pomocné obrázky. Všichni ostatní žáci si po nakreslení obrázku jehlanu nakreslili ještě trojúhelník  $ACV$ . Pět žáků se rozhodlo řešit úlohu s využitím goniometrických funkcí, pět žáků řešilo úlohu s využitím podobností a dva žáci pomocí obsahu trojúhelníku  $ACV$ . Znamená to, že jeden z žáků, který řešil předchozí dvě úlohy s využitím goniometrických funkcí, změnil u této úlohy způsob řešení a řešil ji prostřednictvím obsahu trojúhelníku. Dva žáci stále používali metodu doplňování vymyšleného úhlu a dva žáci měli opět potřebu využívat k řešení úlohy model jehlanu.

Podívejme se blíže na některé chyby, které se při řešení této úlohy objevily. Většina z nich pramenila z nepřesného obrázku.

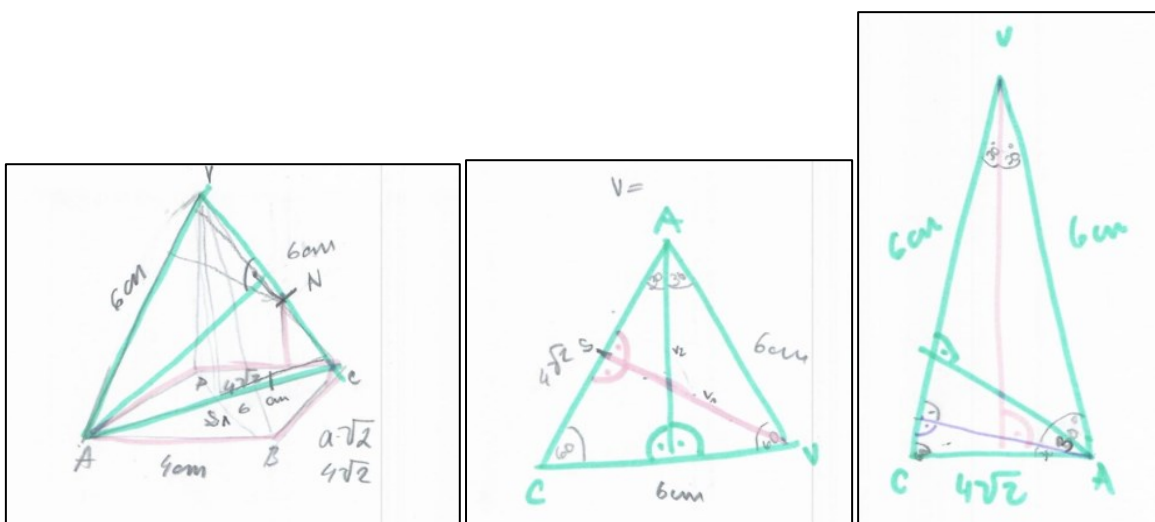
Eliška začala úlohu řešit slovy pana učitele, které zopakovala: Když nevíš, tak kresli. Na obrázku 36 můžeme vidět, že si nakreslila trojúhelník  $ACV$  jako rovnostranný, takže pata hledané kolmice v jejím náčrtku původně dopadla do středu strany  $VC$  (viz trojúhelník uprostřed). Po nakreslení obrázku jsme se začaly bavit o tom, jaký trojúhelník  $ACV$  je. Žákyně řekla, že je rovnoramenný, ale nebyla si stále jistá, zda hledaná kolmice nedopadne do středu strany  $VC$ . Proto jsem jí poradila, aby si nakreslila jiný rovnoramenný trojúhelník (obrázek 36 vpravo) a zkusila v něm udělat hledanou kolmici. Po nakreslení tohoto trojúhelníku řekla, že pata hledané kolmice nedopadne do středu strany  $VC$ . Je zajímavé, že místo toho, aby si žákyně nakreslila nový trojúhelník  $ACV$ , který by více připomínal rovnoramenný trojúhelník, tak jen v původním trojúhelníku  $ACV$  udělala hledanou kolmici níže. Tato kolmice samozřejmě moc jako kolmice nevypadá.

Podobně nakreslila trojúhelník  $ACV$  i Adéla (obrázek 37 uprostřed). Opět tento trojúhelník vypadá spíše jako rovnostranný. Oproti Elišce si Adéla nakreslila trojúhelník přetočený s vrcholem v pravém dolním rohu. Po nakreslení trojúhelníku řekla, že je trojúhelník rovnoramenný. Požádala jsem ji proto, aby mi ukázala ramena tohoto trojúhelníku. Žákyně ukázala na úhlopříčku  $AC$  a boční hranu  $AV$ . Zeptala jsem se, jak jsou tato ramena dlouhá. Adéla si musela do kalkulačky zadat číslo  $4\sqrt{2}$ , aby se ujistila, že to není 6. Nakreslila si

trojúhelník  $ACV$  znovu, ale tentokrát otočený se základnou rovnoběžnou s dolním okrajem papíru a více připomínající rovnoramenný trojúhelník (obrázek 37 vpravo).



Obrázek 36: Výška, která není kolmá



Obrázek 37: Ukázka překreslování trojúhelníku

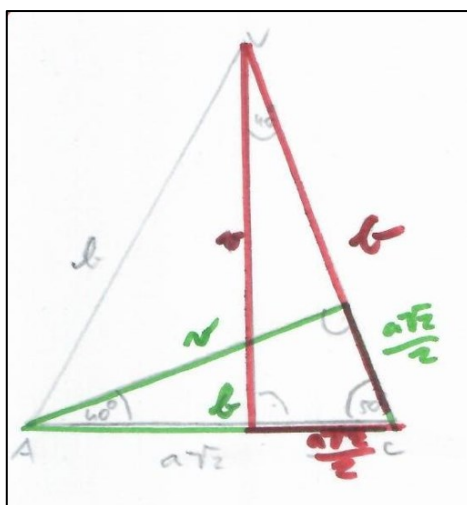
V obou trojúhelnících Adéla také nakreslila výšky (na obrázku růžová a zelená). V trojúhelníku uprostřed to samozřejmě vypadalo, že obě výšky dopadají do středu stran, ale když se podíváme na zelenou výšku ve druhém trojúhelníku, jako kolmice nevypadá. To mě vedlo k otázce, zda žákyně vůbec rozumí pojmu „výška v trojúhelníku“. Ukázalo se, že žákyně spojila dohromady pojmy „výška“ a „těžnice“. Myslela si, že výška musí spojit

vrchol a střed protilehlé strany a současně být kolmá. Nechala jsem ji tedy, aby si nějaký takový trojúhelník narýsovala. Propiskou potom žákyně dokreslila kolmici níže (obrázek 37 vpravo).

Anežka si při popisu podstavných vrcholů začala popisovat vrcholy křížem. Tedy místo jehlanu  $ABCDV$  měla jehlan  $ABDCV$ . Toto by ji samozřejmě vedlo k řešení úplně jiné úlohy.

Magdaléna měla problém si celou situaci představit. Nejdříve se zaměřovala na menší trojúhelník  $ACP$  (značení podle obrázku 14) a nebyla schopná si představit, v jakém větším útvaru leží. Musela si v jehlanu vymodelovat pomocí papíru rovinu, ve které přímka a bod leží, aby viděla, že tato rovina protne jehlan v trojúhelníku  $AC$ .

Pavel řešil úlohu pomocí podobnosti dvou trojúhelníků. Aby lépe viděl, které strany si v trojúhelnících odpovídají, začal si je značit stejně. V obrázku 38 jde o červené a zelené popisky stran. Značení mu sice pomohlo v tom, že si uvědomil, které strany si v trojúhelnících odpovídají, ale stejné značení dvou různých trojúhelníků bylo pro jeho další postup matoucí.



Obrázek 38: Ukázka nevhodného popisu délek stran podobných trojúhelníků

## 9.4 Úloha 2b)

Tato úloha se stejně jako předchozí odehrává v pravidelném čtyřbokém jehlanu. Nový obrázek jehlanu si nakreslili pouze dva žáci. Přestože se mi tato úloha jevila nejjednodušší, tak pro žáky úplně jednoduchá nebyla. Největším problémem bylo pro ně zjistit, kam

dopadne pata hledané kolmice v rovině  $ABC$ . Níže uvádím jejich první domněnky. Pouze dva žáci ihned dokázali říct, že pata kolmice dopadne na úhlopříčku  $AC$ , a to do  $\frac{1}{4}$ . Jeden z žáků nebyl schopen situaci ani správně vymodelovat v jehlanu. Při modelování tužku, která představovala hledanou kolmici, různě nakláněl, takže mu neustále dopadala mimo úhlopříčku  $AC$ . Ostatní žáci si právě díky modelování v jehlanu alespoň uvědomili, že pata hledané kolmice dopadne na úhlopříčku  $AC$ . Poté většinou již nebyl problém dopočítat hledanou vzdálenost. Zajímavé je, že přes podobnost určila hledanou vzdálenost jen polovina žáků.

Přestože žáci byli schopni vysvětlit, proč dopadne pata hledané kolmice do  $\frac{1}{4}$  úhlopříčky  $AC$ , čtyři z nich se dále rozhodli dopočítávat hledanou vzdálenost pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku  $NN'C$  (značení podle obrázku 16). Za pozornost stojí, že někteří z nich již měli výšku jehlanu vypočítanou, tedy stačilo si uvědomit, že hledaná vzdálenost je polovina této výšky, protože jsou si trojúhelníky podobné s koeficientem podobnosti  $\frac{1}{2}$ . Ondřej dokonce využil z přechodí úlohy vypočítanou velikost úhlu při vrcholu  $C$  a dopočítal hledanou vzdálenost pomocí goniometrických funkcí. Když jsem se zeptala Tomáše, proč dopadne pata hledané výšky právě do  $\frac{1}{4}$  úhlopříčky  $AC$ , začal mi vysvětlovat, že se musím podívat na jehlan shora. Slovem „podívat“ myslel „představit“, protože model jehlanu při řešení úlohy nevyužíval. Poté řekl, že to tak prostě vidí.

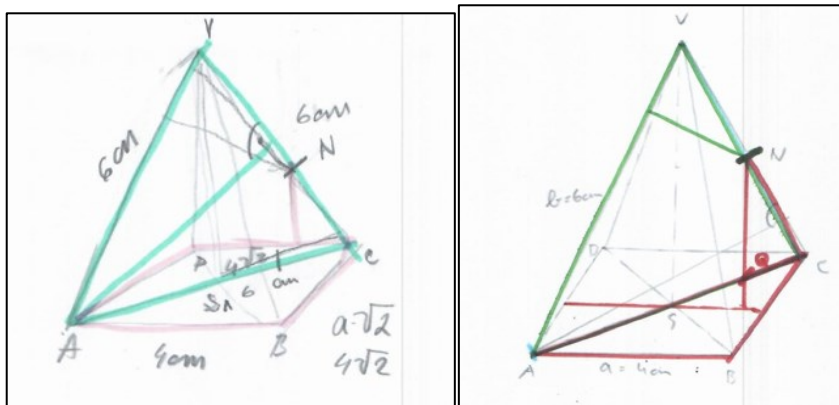
Podívejme se na některé další jevy, které se při řešení této úlohy objevily.

Adéla si myslela, že hledaná pata kolmice dopadne do hrany  $CD$ , jak je vidět na obrázku 39 (vlevo). To je nejspíše důsledkem nerozlišování mezi geometrickým prostorem a prostorem reprezentací nebo neschopnosti si situaci představit v prostoru.

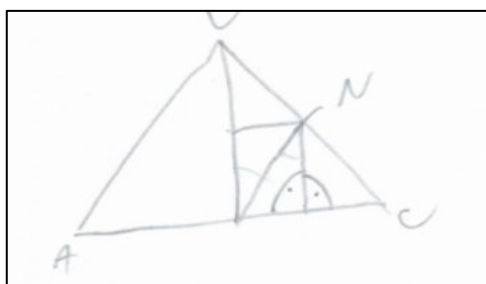
Podobný problém měl i Pavel. Původně si myslel, že pata hledané kolmice dopadne na spojnici středů hran  $BC$  a  $AD$  (viz obrázek 39 vpravo).

Vojta si nejdříve dokreslil do obrázku výšku jehlanu a poté řekl, že si není jistý, zda pata kolmice nedopadne přímo do středu (myslel tím  $\frac{1}{4}$  úhlopříčky  $AC$ ). Začal tedy do trojúhelníku kreslit různé kolmice (viz obrázek 40). Z jeho obrázku je zřetelné, že dva menší pravoúhlé

trojúhelníky s vrcholy  $VN^*$  a  $NC^*$  jsou shodné, tedy hledanou vzdáleností je přesně polovina výšky jehlanu.



Obrázek 39: Kam dopadne pata hledané kolmice



Obrázek 40: Hledání řešení

Petr si uvědomil, že jsou trojúhelníky  $VCS$  a  $NCN'$  podobné, a řekl, že hledanou vzdálenost dopočítá s využitím trojčlenky. Nejdříve jsem nerozuměla tomu, jak to myslí, poté napsal výpočet na obrázku 41. Tento postup mě zaujal, protože je to vlastně rovnice, kterou bylo možné vyjádřit pomocí poměru dvou odpovídajících stran podobných trojúhelníků. Žák mi vysvětlil, že takhle tomu lépe rozumí.

$$\begin{array}{l}
 6 \text{ cm} \dots 2\sqrt{7} \text{ cm} \\
 3 \text{ cm} \dots x \\
 \hline
 x = 2\sqrt{7} \cdot \frac{1}{2} \\
 x = \sqrt{7} \text{ cm}
 \end{array}$$

Obrázek 41: Použití trojčlenky při výpočtu délky strany v trojúhelníku

## 10 Diskuse a závěr

Geometrii lze vnímat jako soubor určitých dovedností. Má své praktické využití mimo jiné i v technických oborech, a proto je důležité se geometrií zabývat. Já jsem se zaměřila na metrické úlohy v prostoru.

Předně musím zdůraznit, že moje studie má kvalitativní charakter. Hlavním cílem bylo získat hlubší vhled, jakým způsobem žáci střední školy řeší vybrané metrické úlohy v prostoru, a zjistit, jaké obtíže při řešení vybraných úloh žáci mají a jakých chyb se dopouštějí. Všechny metrické úlohy v prostoru, které jsem pro svůj výzkum vybrala, se daly vyřešit s využitím podobnosti. Počet žáků, s nimiž jsem prováděla rozhovory, je malý, a výsledky tedy nelze zobecňovat. Přesto se domnívám, že opatrné závěry učinit můžeme. Níže shrnu ty podstatné a navrhu některá didaktická doporučení.

Většina žáků při řešení první zadané úlohy vyslovila řešení bez hlubšího zamyšlení. Je možné, že žáci očekávali, že první úloha bude nejjednodušší, což může být samozřejmě způsobeno i tím, že často bývají žákům nejdříve předkládány úlohy, jejichž obtížnost se postupně zvyšuje od jednoduchých k nejobtížnějším. Tak tomu je i v učebnici Matematika pro Gymnázia – Stereometrie nakladatelství Prometheus, kterou využívají při výuce stereometrie na škole, kde jsem výzkum prováděla.

Přestože se úlohy daly vyřešit pouze s využitím podobnosti, tak se pro toto řešení rozhodlo jen pět žáků z dvanácti. Dva žáci řešili úlohy prostřednictvím obsahu trojúhelníku a zbylí žáci využívali k řešení goniometrické funkce. Z rozhovorů po vyřešení všech úloh jsem zjistila, že žáci se vyhýbají podobnostem, protože jim prý nerozumí. Z řešení vyplývá, že žáci raději použijí v pravoúhlém trojúhelníku některou z goniometrických funkcí. Díky nim dostanou v podstatě stejnou rovnost, jakou by dostali, kdyby si napsali rovnost pro podobné trojúhelníky. Tento způsob je pro ně zřejmě jednodušší, než se zamýšlet nad tím, zda jsou trojúhelníky podobné a které strany si v jednotlivých trojúhelnících odpovídají.

Podle očekávání se u některých žáků projevila nedostatečná prostorová představivost. Někteří žáci měli problém vidět prostorové situace v rovinném obrázku, nedokázali si představit vlastnosti jednotlivých prostorových útvarů, a dokonce je ani nebyli schopni vidět v modelu tělesa. Proto, aby mohli některé vlastnosti poznat, potřebují mít možnost si

v modelu tělesa vymodelovat nejen přímky a body, ale také roviny. Domnívám se, že pro tyto žáky by bylo vhodné, aby měli ve výuce vždy k dispozici model tělesa, ve kterém by si mohli řešené situace modelovat. Podle mého názoru by bylo vhodné více se v hodinách věnovat rozvíjení prostorové představivosti. K rozvíjení prostorové představivosti je možné využívat různé aktivity. Jednou z takových aktivit je například „procházka“ v krychli, při které se žáci pouze ve své představě pohybují po hranách či úhlopříčkách krychle podle instrukcí učitele. Další zajímavou aktivitou je „převalování“ krychle, kdy žáci ve své představě podle instrukcí učitele krychli převalují.

Při rozhovorech se objevilo zajímavé tvrzení, že tělesové úhlopříčky v krychli jsou na sebe kolmé. To může být způsobeno tím, že je krychle vnímána jako jakýsi model kolmosti. V krychli jsou na sebe kolmé nejen hrany a stěny, ale i stěnové úhlopříčky. Dalším problémem spojeným s nedostatkem představivosti je schopnost vidět, kam dopadne pata hledané kolmice. Je zajímavé, že i žáci, kteří si obrázky rýsovali, aby si situaci dokázali lépe představit, měli problém prostorovou situaci v rovinném obrázku vidět.

Výše řečené potvrzuje fakt, že tři žáci prakticky vůbec nebyli schopni vyřešit žádnou z těchto úloh bez opory modelu daného tělesa. V drátěném modelu tělesa si potřebovali modelovat jak přímky, tak roviny. Některým žákům činilo problém si při řešení vybraných úloh představit rovinu určenou přímkou a bodem. Na podobný problém, konkrétně na neschopnost představit si rovinu určenou třemi body, upozorňovali Půlpán, Kebza a Kuřina (1992). Tato schopnost by se dala u žáků cvičeními s modely těles více rozvíjet.

Pouze jeden žák řešil všechny úlohy jen za pomoci jednoho obrázku, kde si vše dokázal představit. Ostatní si rozkreslili část řešení do zvláštního obrázku. Ukázalo se, že někteří žáci nerozlišují mezi prostorem reprezentací a geometrickým prostorem. Příkladem je žák, který ověřoval kolmost tělesových úhlopříček v krychli pomocí trojúhelníku s ryskou ve svém obrázku. Zde se potvrdily výsledky získané u žáků druhého stupně u úloh v rovinné geometrii (Vondrová et al., 2015a). Je vidět, že problémy v rozlišování obou prostorů mohou přetrvávat do období střední školy. Lze doporučit, aby se učitelé soustředili na explicitní rozlišování obou prostorů a vedli žáky k diskuzím o roli obrázků v geometrii.

Podobně jako u žáků na základní škole a v planimetrii (Vondrová et al., 2015b) se i u stereometrických úloh, které žáci řešili pomocí planimetrizace, projevil problém

s prototypickými obrázky. Ukázalo se, že žáci často kreslí prototypické obrázky geometrických útvarů. Zajímavé je, že ani poté, co žáci zjistí, že jimi nakreslený obrázek neodpovídá vlastnostem daného útvaru, si nový obrázek nenakreslí. Přitom nakreslení nového obrázku by jim pomohlo lépe vidět i další vlastnosti. Poměrně dost chyb vycházelo právě z takových nepřesných obrázků. Lze doporučit, aby se učitelé snažili vyvarovat přílišného důrazu na prototypy geometrických útvarů a diskutovali o této problematice s žáky při řešení úloh v planimetrii i stereometrii.

Dalším pozorovaným jevem je fakt, že pokud se při řešení objevil pravoúhlý trojúhelník, žáci měli ihned potřebu použít buď jednu z goniometrických funkcí, nebo Pythagorovu větu. Také jsem si všimla, že žáci často dopočítávají délky stran nebo úhly bez toho, aniž by dopředu měli promyšlené, zda dané hodnoty k něčemu využijí. Vypadá to, jako by chtěli ukázat, že něco umí, když už je přímo nenapadne samotné řešení úlohy. Na tento jev upozorňoval i Polya (2016), jak již bylo zmíněno v kapitole „Řešení matematické úlohy“. Nejvíce problémů se objevilo při řešení prvních dvou úloh, což může být způsobeno i tím, že tyto dvě úlohy byly zadané parametricky. S tím souvisí i chyby, které se zde objevily, a to při úpravě algebraických výrazů. Je vidět, že poslední dvě podúlohy byly pro žáky jednodušší.

Ve všech úlohách se objevily různé formální poznatky, ať už je to nepochopení Pythagorovy věty, goniometrických funkcí nebo nesprávné zobecnění úprav u algebraických výrazů. Příkladem je uvedení Pythagorovy věty ve tvaru  $a + b = c$  nebo formální poznatek ve formě poučky *protilehlá ku přilehlé*, kterou žák využil pro pravý úhel v pravoúhlém trojúhelníku či odmocnění rovnice  $d^2 = a^2 + (\sqrt{2} \cdot a)^2$  následujícím způsobem  $d = a + \sqrt{2}a$ . Na formální poznatky tohoto typu upozornil Hejný (2014).

Dalším nedostatkem, který se při řešení těchto úloh objevil, je práce s odmocninami. V případě trojúhelníků jejichž délky stran obsahovaly odmocninu, měli žáci problém určit koeficient podobnosti těchto trojúhelníků. Při řešení úloh v prostoru se odmocniny mohou objevit častěji, proto bych doporučovala, aby se učitelé ve výuce více věnovali úpravě výrazů s odmocninami.

Někteří žáci využili k řešení úlohy jednu z heuristických metod (doplnění pomocného prvku). O této metodě se zmiňuji v teoretické části v kapitole „Řešení matematické úlohy“. Žákům tato metoda pomohla při doplnění nějaké vymyšlené velikosti jednoho z úhlů v trojúhelníku, což poté vedlo k uvědomění si, že jsou trojúhelníky podobné. Žáci tedy byli schopni na základě jednoho izolovaného modelu usoudit na vlastnost, která bude platná pro další velikosti úhlů – tento izolovaný model se pro ně stal modelem generickým.

V této práci jsem se pokusila přiblížit žakovská řešení vybraných metrických úloh v prostoru a s nimi spojené obtíže, které mohou žáci při jejich řešení mít. Práce otevírá další zajímavé otázky. Jak těmto obtížím při řešení úloh předejít? Jaké jsou příčiny těchto chyb a obtíží? Kdybychom rozšířili počet žáků, došlo by k obohacení pozorovaných jevů? aj.

Díky této práci jsem si uvědomila, že schopností a dovedností, které žák při řešení metrických úloh potřebuje mít, je opravdu velké množství. Překvapilo mě hned několik věcí. Někteří žáci nejsou schopni vidět prostorovou situaci v rovinném obrázku, a dokonce ani v drátěném modelu krychle. Neočekávala jsem, že žáci středních škol budou mít takový problém rozlišovat mezi geometrickým prostorem a prostorem reprezentací. Překvapilo mě množství formálních poznatků, které se u žáků objevilo. Pro svou budoucí praxi si tak odnáším mnoho zajímavých poznatků. U žáků se budu snažit při výuce stereometrie rozvíjet prostorovou představivost a pokusím se co nejvíce využívat modely těles.

## **Seznam zkratk**

RVP – Rámcový vzdělávací program

ŠVP – Školní vzdělávací program

RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

RVP G – Rámcový vzdělávací program pro gymnázia

## Použitá literatura

ATKINSON, Rita L. *Psychologie*. Portál s.r.o., 2003. ISBN 80-7178-640-3.

BUDÍNOVÁ, Irena. Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy. *Učitel matematiky*. 2017, roč. 25, č. 2, s. 65–82. ISSN 1210-9037.

BUREŠ, Jiří, EISENMANN, Petr a PŘIBYL, Jiří. Řešitelský obrázek jako efektivní cesta řešení úloh. *Učitel matematiky*. 2016. 24(2), 80–90. <<http://eudml.org/doc/298085>>.

CÍGLER, Hynek. *Matematické schopnosti: Teoretický přehled a jejich měření*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2018. ISBN 978-80-210-9009-5.

DUŠEK, F. Rozvoj prostorové představivosti. *Matematika a fyzika ve škole*. 1964, 14(6), s. 313–318.

DUVAL, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 2006, s. 103–131. Dostupné z: doi:10.1007/s10649-006-0400-z

EISENMANN, Petr, NOVOTNÁ, Jarmila a PŘIBYL, Jiří. Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2015*. Praha: Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. 2015, s. 9–23. ISBN 978-80-7290-843-1.

FUCHS, Eduard a Eva ZELENDOVÁ. *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání*. 1. vyd. Praha: NÚV. 2015. ISBN 978-80-7481-140-1.

HARTL, Pavel. *Stručný psychologický slovník*. Vyd. 1. Praha: Portál. 2004. ISBN 80-7178-803-1.

HEJNÝ, Milan a kolektiv. *Teória vyučovania matematiky 2*. Prvé vydanie. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. 1987. ISBN 80-08-00014-7.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: Aritmetika 1. stupně*. Univerzita Karlova. 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2. aktualiz. vyd. Praha: Portál. 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, Milan. Mechanizmus poznávacího procesu. In HEJNÝ, Milan, NOVOTNÁ, Jarmila a STEHLÍKOVÁ, Naďa. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. 2004, s. 23–42. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, Milan, NOVOTNÁ, Jarmila a STEHLÍKOVÁ, Naďa. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. 2004. ISBN 80-7290-189-3.

HEJNÝ, Milan a RYBÁROVÁ, Jolana. Pojmotvorný proces vo vyučovaní matematiky. *Pedagogika*. 1984. **34**(5), s. 599–611.

KOŠČ, Ladislav. *Psychológia matematických schopností*. 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. 1972. Základné pedagogické a psychologické diela.

KUŘINA, František. Geometrická představivost a vyučování stereometrii. *Matematika a fyzika ve škole: časopis pro teorii a praxi vyučování matematice a fyzice*. 1987. **18**(3). s. 202–204

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. 1. vyd. Praha: SPN. 1990. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-23753-3.

KUŘINA, František. Představivost a vyučování matematice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 1991. **36**(2). s. 117–122

KUŘINA, František. Geometrie a geometrické vzdělávání. In *25. Konference o geometrii a počítačové grafice*. 2005. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, s. 15–22.

KUŘINA, František. Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu* 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. počet stran. CD ROM, ISBN 80-7015-097-1. ISBN 80-7015-085-8.

KUŘINA, František. Chyby, omyly a matematika. *Matematika – fyzika – informatika*. Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové. 2017. **3**(26), s. 174–184.

MESQUITA, Ana Lobo. On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of mathematical behavior*. 1998. **17**(2). s. 183–195. ISSN 0364-0213.

MOLNÁR, Josef. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého. 2004. ISBN 80-244-0927-5.

NOVOTNÁ, Jarmila. Chyby, překážky a výuka matematiky. In *Dva dny s didaktikou matematiky 2014*. Praha: Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. 2014, s. 38–43. ISBN 978-80-7290-801-1.

ODVÁRKO, Oldřich a KADLEČEK, Jiří. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus. 2004. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-7196-276-7.

PLHÁKOVÁ, Alena. *Učebnice obecné psychologie*. Academia. 2005. ISBN 80-200-1387-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Praha: Prometheus. 2008. ISBN 978-80-7196-356-1.

POLYA, George. *Jak to řešit?: Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. 1. vydání českého překladu. Přeložil Oldřich KOWALSKI. Praha: MatfyzPress. Popularizace. 2016. ISBN 978-80-7378-325-9.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Stereometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus. 1995. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 987-80-7196-389-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, KEBZA, Vladimír a KUŘINA, František. *O představivosti a její roli v matematice*. 1. vydání. Praha: Academia. 1992. ISBN 80-200-0444-0.

*Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Praha: MŠMT, 2021. [cit. 2022-09-18]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/#1-v-soucasnosti-platna-rvp-->

*Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online], Praha: MŠMT, 2021. [cit. 2022-09-18]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>

ŘÍČAN, Pavel. Matematické schopnosti. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 1964. (9), 361–369.

ŘÍČAN, Pavel. *Psychologie osobnosti: Obor v pohybu*. Grada. 2010. ISBN 978-80-247-3133-9.

*Soubor vzorových úloh matematika* [online]. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – CERMAT: CERMAT. 2013. [cit. 2022-11-30]. Dostupné z: <https://maturita.ceremat.cz/files/files/Matematika/intaktni-zaci/IT/soubor-vzorovych-uloh.pdf>

STERNBERG, Robert J. *Kognitivní psychologie*. Vyd. 1. Praha: Portál. 2002. ISBN 80-7178-376-5.

VONDROVÁ, Nad'a, HAVLÍČKOVÁ Radka, RENDL, Miroslav a ŽALSKÁ, Jana. *Kritická místa matematiky základní školy: metodický materiál pro učitele* [online]. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta [cit. 2022-11-30]. 2015a. Dostupné z: <http://mdisk.pedf.cuni.cz/Nada/Manuál%20Kritická%20místa%20matematiky%20na%20základní%20škole%20final.pdf>

VONDROVÁ, Nad'a, RENDL, Miroslav, HAVLÍČKOVÁ, Radka, HŘÍBKOVÁ, Lenka, PÁCHOVÁ, Anna a ŽALSKÁ, Jana. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Univerzita Karlova: Karolinum. 2015b. ISBN 978-80-246-3252-0.

VONDROVÁ, Nad'a a HAVLÍČKOVÁ, Radka. Konstrukční úlohy v řešeních žáků napříč ročníky základní školy. In VONDROVÁ, Nad'a, RENDL, Miroslav, HAVLÍČKOVÁ, Radka, HŘÍBKOVÁ, Lenka, PÁCHOVÁ, Anna a ŽALSKÁ, Jana. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Univerzita Karlova: Karolinum. 2015b. s. 133–179. ISBN 978-80-246-3252-0.

## Seznam obrázků

Obrázek 1: Formální aplikace vzorce (Hejný a Kuřina, 2009).....	24
Obrázek 2: Ukázka grafických chyb (Hejný a kolektiv, 1987).....	35
Obrázek 3: Vzorová úloha (Soubor vzorových úloh matematika, 2013).....	36
Obrázek 4: Příklad 1 (Pomykalová, 1995, s. 84).....	37
Obrázek 5: Příklad 2 (Pomykalová, 1995, s. 86).....	38
Obrázek 6: Příklad 3 (Pomykalová, 1995, s. 88).....	38
Obrázek 7: Zadání úlohy 1a).....	44
Obrázek 8: Planimetrizace úlohy.....	45
Obrázek 9: Obdélník $ABGH$ .....	45
Obrázek 10: Zadání úlohy 1b).....	46
Obrázek 11: Planimetrizace úlohy.....	46
Obrázek 12: Podobné trojúhelníky.....	47
Obrázek 13: Zadání úlohy 2a).....	48
Obrázek 14: Planimetrizace úlohy.....	48
Obrázek 15: Zadání úlohy 2b).....	49
Obrázek 16: Kolmý průmět bod $N$ do roviny $ABC$ .....	50
Obrázek 17: Řešení úlohy 2c).....	50
Obrázek 18: Ukázka žakovských řešení.....	53
Obrázek 19: Jany řešení.....	54
Obrázek 20: Metoda doplnění úhlu.....	55
Obrázek 21: Řešení s využitím obsahu trojúhelníku.....	56
Obrázek 22: Pravoúhlý trojúhelník $ABH$ jako rovnoramenný.....	57
Obrázek 23: Prototypické kreslení trojúhelníku.....	58
Obrázek 24: Obtíže spojené s nepojmenováním trojúhelníků.....	59
Obrázek 25: Problém s nerozlišováním dvou prostorů.....	59
Obrázek 26: Překreslení trojúhelníku do jiné polohy.....	59
Obrázek 27: Řešení Magdalény.....	60
Obrázek 28: Ukázka prototypického kreslení obrázků.....	61
Obrázek 29: Ukázka původního nakreslení čtverce a nového obrázku.....	61
Obrázek 30: Terezy řešení (vlevo), přetočená krychle (vpravo).....	62

Obrázek 31: Ukázka nepřesného kreslení obrázků (vlevo), Tomášovo řešení (vpravo).....	64
Obrázek 32: Ukázka prototypického kreslení trojúhelníků.....	65
Obrázek 33: Doplnění trojúhelníku .....	65
Obrázek 34: Řešení v polovině krychle .....	66
Obrázek 35: Chybné krácení ve zlomku.....	66
Obrázek 36: Výška, která není kolmá .....	68
Obrázek 37: Ukázka překreslování trojúhelníku .....	68
Obrázek 38: Ukázka nevhodného popisu délek stran podobných trojúhelníků .....	69
Obrázek 39: Kam dopadne pata hledané kolmice .....	71
Obrázek 40: Hledání řešení .....	71
Obrázek 41: Použití trojčlenky při výpočtu délky strany v trojúhelníku .....	71