

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Analýza řešení a oblíbenosti úloh ze soutěže Pangea

Analysis of solutions and popularity of tasks from the Pangea competition

Milan Vratislav

Vedoucí práce: PhDr. Michaela Kaslová

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání – Pedagogika

2022

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Analýza řešení a oblíbenosti úloh ze soutěže Pangea potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 2022

Rád bych na tomto místě poděkoval především PhDr. Michaele Kaslové za vedení této bakalářské práce. Také bych chtěl poděkovat škole Meridian International School, hlavnímu organizátorovi a generálnímu partnerovi matematické soutěže Pangea v České republice za poskytnutí zadání úloh a statistik, bez kterých by tato práce nemohla vzniknout. Rovněž bych rád poděkoval své rodině, za podporu při psaní této bakalářské práce i po celou dobu studia.

ABSTRAKT

Předložená bakalářská práce se zabývá vztahy mezi matematickým zaměřením úloh, mírou úspěšnosti, oblíbenosti a bodovým ohodnocením úloh z matematické soutěže Pangea. Analýza se týká úloh pro 9. ročník základní školy soutěže Pangea z finálového kola ve školním roce 2019/2020, které proběhlo z důvodu pandemie koronaviru o rok později, ve školním roce 2020/2021. Určení vztahů mezi zkoumanými veličinami se opírá o kvantitativní výzkum na řešitelích úloh.

Data o míře úspěšnosti úloh byla poskytnuta vedením soutěže Pangea. Míra oblíbenosti úloh byla zjišťována na základě dat z dotazníku, který je každoročně vyplňován řešiteli úloh bezprostředně po odevzdání řešení. Charakteristiku a hlavní zaměření úloh popsal autor této práce. Bodové ohodnocení úloh je určeno autory úloh.

Analýza úloh se týká jejich zadání, předpokládaného postupu řešení, předpokládaných úskalí v řešení a komentáře k nabídce odpovědí.

V práci jsou vymezeny pojmy talentovaný žák, matematická soutěž a slovní úloha a jsou vymezena specifika a poslání soutěže Pangea.

Výsledky práce lze využít při tvorbě a nastavování obtížnosti úloh do matematických soutěží, do běžné výuky i testování žáků.

KLÍČOVÁ SLOVA

matematická soutěž; matematická úloha; metody řešení; oblíbenost úloh; parametry oblíbenosti

ABSTRACT

The submitted bachelor's thesis deals with the relationship between the mathematical focus of tasks, success rate, popularity and point evaluation of tasks from the Pangea mathematical competition. The analysis refers to tasks for the 9th grade of the Pangea competition from the final round in the 2019/2020 school year, which took place a year later, in the 2020/2021 school year, due to the coronavirus pandemic. Determining the relationships between the investigated variables is based on quantitative research on problem solvers.

Task success rate data was provided by Pangea competition management. The level of popularity of the tasks was determined based on data from the questionnaire, which is filled out annually by the solvers of the tasks immediately after submitting the solution. The characteristics and main focus of the tasks were described by the author of this work. The point evaluation of the tasks is determined by the authors of the tasks.

The analysis of the tasks refers to their assignment, the expected solution procedure, the expected difficulties in the solution and comments on the answer menu.

The thesis defines the terms gifted student, mathematical competition and word problem, and defines the specifics and mission of the Pangea competition.

The results of the work can be used when creating and setting the difficulty of tasks for mathematical competitions, for regular teaching and testing of pupils.

KEYWORDS

mathematical competition; mathematical problem; solution methods; popularity of tasks; popularity parameters

Obsah

Úvod.....	11
1. Teoretická část.....	13
1.1. Vymezení pojmů.....	13
1.1.1. Patnáctiletý žák - charakteristika	13
1.1.2. Talentovaný žák - charakteristika.....	13
1.1.3. Otázka genderu.....	15
1.1.4. Matematická soutěž.....	15
1.1.5. Postoj učitele k matematickým soutěžím	16
1.1.6. Slovní úlohy	17
1.2. Co je to Pangea	19
1.2.1. Motivace a poslání	19
1.2.2. Historie a vznik soutěže	19
1.2.3. Proč se soutěž jmenuje Pangea	20
1.2.4. Specifika matematické soutěže Pangea.....	20
1.2.5. Průběh a pravidla.....	21
1.2.6. Úlohy.....	22
2. Praktická část	23
2.1. Analýza soutěžních úloh vybraného ročníku z pohledu matematiky	23
2.2. Porovnání dat z rozboru úloh a rozboru oblíbenosti a úspěšnosti řešení	98
2.2.1. Porovnání úspěšností chlapců a dívek.....	98
2.2.2. Vztah mezi bodovým ohodnocením úlohy a její obtížností.....	98
2.2.3. Vztah mezi mírou úspěšnosti a oblíbeností úloh.....	101
2.2.4. Vztah mezi zaměřením úlohy a její mírou oblíbenosti a úspěšnosti	102
Závěr	104

Seznam použitých informačních zdrojů	105
Seznam příloh	107

Úvod

Už jako žák základní školy jsem měl v oblibě matematické soutěže. Líbily se mi na nich zajímavé, netradiční úlohy, na které se nedalo dopředu připravit, a právě proto výborně ověřovaly úroveň matematických dovedností řešitelů. Nestačilo se dopředu naučit postup jako na test, ale bylo potřeba správný postup vymyslet.

A o tom by podle mě přesně měla být matematika. O hledání způsobů řešení problémů, o logickém uvažování a chytrém využívání matematických nástrojů. Schopnost jasně a správně myslet zaujímá ústřední postavení ve vzdělávání dítěte.

Zajímavé a netradiční úlohy mám rád dodnes a to je důvod, proč jsem se vybral právě toto téma bakalářské práce. Vybral jsem si matematickou soutěž Pangea, protože mě zaujala svými nádherně zpracovanými úlohami, které se dotýkají témat z reálného světa.

Hlavním cílem práce je porovnat míru úspěšnosti řešení úloh s jejich mírou oblíbenosti. Vybral jsem si úlohy z finálového kola soutěže Pangea, školní rok 2019/20, devátý ročník ZŠ a čtvrtý ročník nižších gymnázií.

Z cíle práce plynou následující úkoly:

- 1) Analýza úloh z pohledu matematického obsahu a formy zadání
- 2) Porovnat graf oblíbenosti úloh s jejich charakteristikou a mírou úspěšnosti.

V souvislosti s cílem a úkoly práce si pokládám následující otázky:

- 1) Jsou úspěšnějšími řešiteli chlapci nebo dívky?
- 2) Odpovídá bodové ohodnocení úloh jejich obtížnosti?
- 3) Jsou úlohy s vyšší úspěšností také oblíbenější?
- 4) Existuje souvislost mezi matematickým zaměřením úlohy a její úspěšností a oblíbeností?

Na tyto otázky se pokusím v této práci odpovědět. Očekávám, že nejoblíbenější úlohy budou ty s největší úspěšností a úlohy s největší úspěšností budou ty za nejméně bodů.

Sledovaným vzorkem jsou žáci devátého ročníku ZŠ a čtvrtého ročníku nižších gymnázií, úspěšní řešitelé školního kola Pangei. Řešitelé jsou ze škol po celé České Republice, zastoupeny jsou všechny kraje.

Během provádění analýzy úloh jsem se rozmýšlel mezi různými způsoby zápisu postupu řešení. Nakonec jsem zvolil kombinaci textu a matematických znaků, protože si myslím, že je to způsob nejpříjemnější pro čtenáře a zároveň nejvíce připomíná diskuzi o řešení s žáky.

1. Teoretická část

1.1. Vymezení pojmů

1.1.1. Patnáctiletý žák - charakteristika

Uvádím krátkou charakteristiku žáka staršího školního věku z hlediska dospívání a změn, které přináší.

V tomto věku dochází ke změnám postojů k roli žáka. *Pubescent uvažuje o jejím obsahu a smyslu. V závislosti na rozvoji poznávacích procesů chápe její význam pro budoucnost, pro svou profesní roli. Aktuálně má uspokojivé zvládnutí této role, vymezené požadavky dobrého výkonu a přijatelného chování, smysl především jako prostředek k dosažení žádoucího budoucího cíle nebo se stává nevýznamnou nutností.* Vágnerová (2001, str. 244)

Mění se motivace k plnění požadavků školy. *Starší žák se většinou neučí proto, aby obohatil svoje znalosti a dovednosti. Pokud je ochoten pracovat, činí tak z toho důvodu, aby dosáhl konkrétního a osobně zvoleného cíle, např. přijetí na vybraný obor.*

Dospívající se stává kritičtější k požadavkům učitele i ke školním normám. To se projeví ve vztahu k školní práci i v chování. Starší žák už není ochoten akceptovat názory či rozhodnutí učitelů zcela automaticky, bez ohledu na jejich obsah. Žáci v tomto věku mění i svůj postoj přímo k učiteli. Starší žák má tendenci hodnotit chování učitelů kriticky, má tendenci s učitelem polemizovat a v krajním případě negativisticky odmítat veškeré jeho požadavky. Starší žáci jsou k učitelům netolerantní. Někdy jde pouze o potřebu demonstrovat kritičnost než o skutečné zhoršení vztahu k učiteli. Vágnerová (2001, str. 245)

Žákův postoj k učiteli je důležitý, z hlediska matematických (i jiných) soutěží, protože žák se soutěže nemusí zúčastnit dobrovolně, ale může mu to být nařízeno. V tom případě žákův výkon v soutěži může být ovlivněn jeho postojem k učiteli. Pokud žák není přesvědčen o smysluplnosti své účasti v soutěži, bude to mít negativní dopad na jeho výkon.

1.1.2. Talentovaný žák - charakteristika

Soutěžící ve finálovém kole matematické soutěže Pangea jsou talentovaní žáci, proto považují za vhodné uvést jejich charakteristiku.

Renzulli (1978) uvádí, že talentované chování nastává při interakci tří základních skupin lidských rysů: nadprůměrných obecných a/nebo specifických schopností, vysoké angažovanosti k úkolu (motivaci) a vysoké kreativity. Nadané a talentované děti jsou ty, které mají, nebo jsou schopny vytvořit takové složení rysů a použít ho na jakoukoliv potenciálně hodnotnou oblast lidské činnosti. Talentované chování může být nalezeno u určitých lidí (ne u všech lidí) v určitý okamžik (ne pořád) a při určitých okolnostech (ne při všech okolnostech).

Podle Kaslové (2011) můžeme registrovat pestrost typů osobností nadprůměrných žáků, kteří zastávají níže uvedené role při řešení matematických úloh:

- a) **řešitel matematik-kolega** rád řeší, zejména plyne-li z toho, že bude moct řešení diskutovat s dospělým, nebo se stejně inteligentním spolužákem;
- b) **sólista** nebo také **izolant/poustevník/vědec** nepotřebuje spolužáky, ani učitele, je zaměřen na zajímavé úlohy, ale nepotřebuje ocenění za jejich vyřešení. Pokud ho úloha nezaujme, tak ji neřeší, nebo její řešení odflákne. Negativní hodnocení za nevyřešenou, nebo ledabyly vyřešenou úlohu ho také nezajímá;
- c) **herec** je žák vyžadující k řešení diváky, rád řeší u tabule. Při samostatné práci v lavici podává slabší výkony. Potřebuje slyšet svůj hlas, během řešení si šeptá;
- d) **samaritán** je žák, který podává maximální výkon (co do přesnosti a úplnosti vyjadřování, systematičnosti a užívání alternace), pokud vidí smysl takové komunikace, například pomoci někomu nebo zkontrolovat výsledky i postup;
- e) **koordinátor** je žák, který si rychle promyslí strukturu řešení a práci potom rozdělí mezi ostatní. Pokud pracuje sám, nerad dotahuje řešení do konce;
- f) **vzor/hráč, konkurent** potřebuje následníky, nebo soupeře. Pokud cítí, že má silnou konkurenci, která zvládne řešení dříve nebo lépe, tak úlohu ani neřeší. Potřebuje ocenění ze všech stran (učitel, spolužáci, rodiče). Své výsledky má rád zveřejněny (žakovská knížka, nástěnka, školní web);
- g) **gurmán/estét** rád hodnotí úlohy, které řeší a s nadšením řeší nestandardní úlohy, slovní úlohy zajímavé jak kontextem, tak matematickou podstatou. Rád vymýšlí podobné úlohy;

h) smíšené/jiné

Talentovaní žáci mají potřebu dozvědět se něco nového, neobvyklého nebo řešit přiměřeně/dostatečně obtížný problém, proto jim vyhovují a motivují je komplexní úlohy. Komplexní úlohou rozumíme takovou úlohu, která zasahuje do více matematických témat a má přesahy do dalších oborů. Tyto komplexní úlohy jsou pro řešitele náročné a často vyžadují dohledání další informace, právě proto jsou výzvou pro talentované žáky a působí na ně silně motivačně. (Kaslová, 2018)

1.1.3. Otázka genderu

Z dat získaných z finálového kola Pangey 2020 je možné porovnávat výkony chlapců a dívek, z toho důvodu považuji za vhodné, podívat se na rozdíly mezi chlapci a dívkami v matematických schopnostech. *Velké množství výzkumů zjišťuje genderové rozdíly v přístupu a úspěšnosti v matematice. Genderové nuance při řešení matematických úloh naznačují, že chlapci řeší matematické úlohy úspěšněji než dívky. Dívky tendují připisovat svůj úspěch v matematice vnějším faktorům (štěstí, přístup učitele) více než chlapci, kteří mají obecně lepší sebepojetí v matematice. Z toho důvodu je nezbytné (ale ne nutně dostatečné), aby žáci měli pozitivní sebepojetí. Podobně ve strašických studiích bylo odhaleno, že chlapci se učí matematiku efektivněji, i kvůli vyšší jistotě v sebe sama. Říčan (2014, str. 57)*

Avšak Říčan se nevyjadřuje k talentovaným dívkám a chlapcům, kteří se zúčastní matematických soutěží. Podle mého názoru nemusí být mezi talentovanými dívkami a chlapci velký rozdíl z hlediska výkonů v matematice.

1.1.4. Matematická soutěž

Jak uvádí řada zdrojů (Marek, 2017), soutěže ve většině kultur plnily dvě základní role. První z nich byl trénink v činnostech, které zaručovaly přežití (opatřování potravy a území). Druhou neméně důležitou rolí bylo zařazení soutěže do rituálů dané kultury. Úspěch v takové soutěži znamenal překonání dosavadních sociálních hranic postavení jedince. Smyslem obou typů soutěží bylo překonání určité překážky, překonání sama sebe a prokázání určitých schopností, ne nutně fyzických.

Cílem prvních matematických soutěží v Evropě bylo vyhledávání a podpora talentů. Teprve následně vznikaly soutěže, jejichž cílem bylo vzbudit v soutěžících zájem o matematiku.

1.1.5. Postoj učitele k matematickým soutěžím

Kaslová (2018) uvádí několik možných postojů, které může učitel - organizátor soutěže zaujmout vůči matematickým soutěžím.

Může je chápat jako **nutnost**. Má organizaci soutěže nařízenou vedením, nebo ho o to žádají rodiče. Je to pro něj nedoceněná práce navíc.

Soutěž může sloužit k **hledání talentů**. Talentované žáky, kteří se z různých důvodů neprojeví během výuky, může soutěž zaujmout a probudit v nich zájem o matematiku.

Testování dětí. Výsledky žáka v soutěži lze porovnat se školními výsledky žáka, porovnat s výsledky žáků z jiných tříd, někdy i z jiných škol. Někteří učitelé přehodnocují pohled na žáka na základě jeho výsledků v soutěži.

Soutěž je **motivací** pro žáka i učitele. Někteří žáci jsou soutěživí, rádi ukážou ostatním, že jsou v něčem lepší než oni a matematická soutěž je pro ně vhodnou příležitostí. V případě úspěchu v soutěži si žák zvýší sebevědomí, reprezentuje školu, může být oceněn ze strany spolužáků, učitelů, nebo i vedení školy. Učitele mohou inspirovat úlohy ze soutěže, takové v učebnici nenajde, může je později použít k obohacení vlastní výuky. Učitel uvidí žáky v nové situaci, pokud pojedje s žáky na nějaké krajské/finálové kolo, může to využít k zlepšení vztahů s žáky.

Matematické soutěže lze brát jako **trénink** či psychotrénink na přijímací zkoušky nebo maturitu. Je to příprava nejen z hlediska řešení úloh, ale i z hlediska toho, že soutěže mají podobnou strukturu, pravidla a atmosféru jako dané zkoušky. Některé školy dávají za účast, nebo dobré umístění v soutěžích bonusové body k přijímacímu řízení.

Já sám jsem několik měsíců pracoval jako učitel matematiky a organizoval jsem na naší škole Pythagoriádu. Byla to vlastně nutnost, protože naše škola se zúčastnila Pythagoriády každoročně a ode mě se očekávalo, že na tuto tradici navážu, byl jsem za to alespoň ohodnocen v podobě odměn. Ale dělal bych to, i kdyby to nutnost nebyla, protože si myslím, matematické soutěže jsou skvělá motivace jak pro žáky, tak pro učitele. Byla to

sice práce navíc, ale stálo to za to, a nezúčastnit se soutěží by byla podle mě promarněná příležitost.

1.1.6. Slovní úlohy

Soutěžní úlohy v matematických soutěžích jsou většinou slovními úlohami. V této části textu se pokusím tento pojem vymežit. *Chceme-li vymežit pojem slovní úloha, musíme si nejprve vyjasnit, co si budeme představovat pod pojmem úloha v matematice. Ve (Webster's, 1979, s. 1434) jsou uvedeny tyto dvě definice úlohy v matematice:*

Definice 1: “ V matematice cokoli, co vyžaduje být uděláno, nebo vyžaduje, aby něco bylo uděláno.”

Definice 2: “ Otázka ...která je komplikovaná nebo obtížná.”

Fridman při vymezení pojmu úloha vychází z problémové situace. Problémová situace vzniká, když se subjekt ve své činnosti (zaměřené na určitý objekt) setkává s určitou obtíží, překážkou. Tuto obtíž si uvědomí a hledá způsob jak ji odstranit. Jakmile situaci navodíme záměrně, “uměle”, rodí se úloha. Úloha je model problémové situace fixovaný v jistém jazyce. Podle Fridmana každá úloha obsahuje čtyři základní složky: předmětnou oblast, tj. objekty, o nichž se v úloze mluví, vztahy, které objekty navzájem spojují, požadavek, tj. instrukci o cíli, kterého je třeba dosáhnout a operátor, tj. soubor operací, jež se mají vykonat s podmínkami úlohy, aby byl splněn její požadavek. Na základě uvedených složek pak Fridman vymezuje úlohu jako požadavek (přednesený v přirozeném či umělém jazyce) na provedení určitého explicitně či implicitně uvedeného operátoru (tj. posloupnosti operací) vzhledem k zadané podmínce. (Fridmanova teorie nebere v úvahu psychologické zvláštnosti člověka jako řešitele úlohy, nepřihlíží k jeho věkovým a individuálním zvláštnostem. To, že úloha by měla řešitele zaujmout, vyprovokovat, aby sám chtěl řešení zahájit a dospět až k výsledku, není bráno v úvahu.)

V publikaci (Vyšín, 1972, str. 11) je uvedeno toto vymezení úlohy: Je dána množina M matematických objektů a je dána výroková forma f o jedné nebo více proměnných. Úkolem je nalézt a udat (způsobem prozatím blíže neurčeným) obor pravdivosti P formy f v množině M , tj. množinu všech objektů z M , pro něž dává f pravdivý výrok.

Najít v rozsáhlé literatuře věnované slovním úlohám přesnou a vyčerpávající odpověď na otázku Co je slovní úloha? se nepodaří. Odvárko uvádí (Odvárko, 1995) toto vymezení: Slovními úlohami rozumíme ve školské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace (se svými rozmanitými vlastnostmi a vztahy) z nejrůznějších mimomatematických oblastí. V (Kuřina, 1989, str. 61) je slovní úloha charakterizována jako úloha, kde je obvykle popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky. Novotná (2000, str. 7-10)

Slovní úlohu lze také chápat širěji jako speciální typ úlohy, která je zadána slovně. Mezi odborníky panuje diskuze o tom, zda jejich zasazení musejí být realistická. Argument proti nutnosti reálných situací by byl například ten, že nereálné úlohy mohou přinášet zajímavější a podnětější matematické problémy a lépe rozvíjet abstraktní myšlení. Opravdové úlohy ze života často ani nebývají možné, protože problémy ze života bývají příliš komplexní na to, aby šly adaptovat do slovní úlohy v celé své šíři. (A. Toom, 1999)

Řešení slovní úlohy probíhá v několika fázích, které různí autoři rozpracovávají do různého stupně podrobnosti. (Vondrová, Rendl a kol., 2015, str. 28) V této práci vymezíme čtyři fáze.

- 1) Žák nejprve úlohu vnitřně přijme a uvědomí si co je zadáno a co je potřeba zjistit/ vykonat.
- 2) Další fází je matematizace úlohy, kdy žák formuluje požadavek úlohy v matematickém jazyce, tj. aritmetický výpočet, algebraická rovnice, náčrt situace, graf,....
- 3) Matematickou úlohu potom vyřeší, což je třetí fáze.
- 4) Poslední fází je ověření výsledku, žák posoudí zda výsledek odpovídá kontextu zadání slovní úlohy. (Vondrová, Rendl a kol., 2015)

Toto platí především pro otevřené úlohy. Pokud má úloha nabídku odpovědí, nemusí být odpověď výstupem těchto čtyř fází. K řešení může vést postupné vyřazování dostupných odpovědí, kvalifikovaný odhad, ...

Slovní úlohy se dají kategorizovat mnoha způsoby. Například na jednoduché (k vyřešení stačí jeden početní úkon) a složené (k vyřešení je zapotřebí dva nebo více početních úkonů). (Vondrová, Rendl a kol., 2015) Existují také úlohy, které nejsou ani jednoduché,

ani složené, protože k jejich vyřešení není potřeba ani jedna početní operace. Příkladem mohou být úloha 5. OBLIBA TELEVIZNÍCH STANIC nebo úloha 13. ZÁCHRANNÉ SBORY z této práce. Dále můžeme rozlišovat úlohy přímé (text úlohy naznačuje způsob, kterým ji vyřešíme) a nepřímé (text úlohy naznačuje inverzní operaci k té, kterou bychom úlohu vyřešili).

V této práci budu k úlohám přiřazovat následující matematická zaměření, přičemž jednotlivé úlohy mohou mít více zaměření najednou. Zaměření jsou: práce s aritmeticko-algebraickými symboly, čtení informací z obrázku, čtení z grafu/diagramu, funkce/funkční myšlení, text/vztahy mezi informacemi, podmínky v zadání (pokud, kdyby), prostorová představivost, čas, jednotky měření, pravděpodobnost, kombinatorika, finanční matematika. Tyto matematická zaměření byla vybrána tak, aby byla dostatečně obecná a abych mohl mezi sebou porovnávat úlohy daných zaměření z hlediska jejich míry úspěšnosti a oblíbenosti.

1.2. Co je to Pangea

1.2.1. Motivace a poslání

Matematická soutěž Pangea je určena pro všechny žáky, kteří rádi řeší matematické úlohy.

Píše se na oficiálních stránkách soutěže. Poslání Pangey je stejné jako poslání většiny matematických soutěží: vzbuzení zájmu o matematiku, dlouhodobá motivace žáků k matematice, rozvoj matematických dovedností a logického myšlení, podpora a rozvíjení nadaných žáků, vyhledávání nadaných žáků, příprava žáků na další studium, nabídka matematických úloh pro učitele k použití při hodinách.

1.2.2. Historie a vznik soutěže

Matematická soutěž Pangea je mezinárodní soutěž, která vznikla v roce 2007 v Německu, které je jejím sídlem. Myšlenka, která stála za vznikem spolku je tato: mnoho žáků má neoprávněný strach z matematiky, hlavně dívky. Tyto strachy lze odbourat pozitivními

zážitky. Proto jsou matematické úlohy do školního kola připravovány tak, aby byly zvládnutelné všemi bez rozdílu.

Čeští žáci si mohli poprvé s Pangeou zasoutěžit v roce 2013, kdy u nás proběhl první ročník soutěže. V roce 2020 se soutěž rozšířila do 22 (pravidla) evropských zemí a celkem se do ní zaregistrovalo 296 000 žáků. Česká republika zaujímá druhé místo v počtu zúčastněných s 50 000 zaregistrovanými žáky. Vzhledem k tomu, že různé země mají různé osnovy, různé typy škol a různou úroveň znalostí žáků, vede každá země soutěž podle místních podmínek, ale musí splňovat kvalitativní kritéria Pangea. Od roku 2016 se česká Pangea odlišuje také tím, že v každém ročníku se všechny úlohy týkají jednoho či dvou témat. To pomáhá soutěžícím při řešení, protože nemusí u každé úlohy přemýšlet o novém kontextu.

Soutěž pořádá Meridian matematický spolek, což je nezisková organizace, soutěž je financována partnerskými osobami, organizacemi, či společnostmi. Hlavním partnerem je Meridian International School s.r.o., dalšími partnery soutěže jsou například Časopis ABC, Jednota Českých matematiků a fyziků, Casio, Jakub Vágner nebo Národní muzeum. Pangea dosud není finančně podporována státem.

1.2.3. Proč se soutěž jmenuje Pangea

„V dávných dobách prvohor a druhohor, tedy přibližně před 300 miliony let, nebyly jednotlivé kontinenty na naší planetě ještě rozdělené, ale existovaly jako jeden celek nazývaný Pangea. Ten se asi před 250 miliony let začal postupně rozdělovat a tvořit kontinenty až do podoby, v jaké je známe dnes. Matematická soutěž Pangea se tímto historickým vývojem naší planety nechala inspirovat a stanovila na jeho základě svůj cíl – znovusjednocení kontinentů. Jedná se o sjednocení a propojení milovníků matematiky, kteří v ní našli nejen užitek, ale především potěšení ze zkoumání a řešení různých matematických problémů.“ (www.pangeasoutez.cz)

1.2.4. Specifika matematické soutěže Pangea

Matematická soutěž Pangea má s ostatními matematickými soutěžemi společnou organizaci prvního kola (probíhá ve třídě, ve vymezeném termínu a čase), ale liší se ve způsobu kontroly výsledků. Škola, která se chce soutěže zúčastnit si může vybrat, zda si

sama bezplatně vytiskne brožurky se zadáním a odpovědní lístky, nebo si vše nechá poslat od organizátora soutěže (20 Kč za účastníka). Nebo je také možné soutěžit online a netisknout vůbec nic. Žáci své odpovědi zaznamenávají na odpovědní lístky, které potom nekontroluje sám učitel, ale posílá je zpět organizátorům soutěže Pangea (poštou nebo emailem naskenované), kteří lístky ale také nekontrolují, ale mají na to program, který to automaticky zkontroluje. Tento způsob kontroly je nejen méně pracný, ale zároveň odstraňuje lidský faktor z procesu kontroly.

Dalším specifikem a zajímavostí, a to nejen soutěže Pangea jako takové, ale pouze české verze soutěže Pangea je to, že zadání v jednotlivých ročnících soutěže jsou tematicky odlišná. Například tento rok (2021) je téma „věda a výtvarné umění“, a v minulých letech se objevila témata architektura, medicína, sport, doprava, stravování, ... Tématem úloh, které jsou analyzovány v této práci jsou „záchranářské týmy a média“. Soutěž pracuje s reálnými příklady „ze života“. Starší zadání je potom možné dohledat na internetových stránkách Pangey a použít je například při výuce.

1.2.5. Průběh a pravidla

Soutěž probíhá ve dvou kolech – školní a finálové (ústřední) kolo. Ti nejlepší ze školního kola jsou pozváni na finále do Prahy, kde soutěží o hodnotné ceny. Soutěž je rozdělena do kategorií podle ročníku žáka. Zúčastnit se mohou žáci 4., 5., 6., 7., 8. a 9. ročníku a odpovídajících ročníků na víceletých gymnáziích. Je možnost soutěžit s použitím tištěných zadání a zapisovat odpovědi to tištěných odpovědních lístků, nebo „online“, kdy žáci zapisují odpovědi do školních počítačů. Soutěže se mohou účastnit také žáci na vybraných odděleních v českých nemocnicích. Není však možné, aby soutěžící soutěžil z domova (s jedinou výjimkou při distanční výuce) a vždy musí být zajištěn pedagogický dozor od nějakého zástupce školy (pedagoga, asistenta,...). Žáci řeší za následujících podmínek: používají zadání, odpovědní list, bílý papír, tužku, gumu a nic jiného. Školní kolo trvá 45 minut.

Za 14 dní od skončení školního kola jsou školám a žákům poskytnuty výsledky. Zúčastnění žáci se dozví, zda postupují do finálového kola, kolik bylo potřeba bodů na postup do finálového kola, kolik oni získali bodů, konkrétní výčet správných a chybných

odpovědí a své umístění ve škole, kraji i celé republice. Tyto statistiky poskytují webové stránky soutěže.

Do finálového kola postupuje vždy nejlepší řešitel z kraje (14 krajů – 14 lidí) a poté republikově nejlepší účastníci nezávisle na krajské příslušnosti (maximálně však 46 soutěžících bez krajské příslušnosti). Celkem tedy postupuje 50–60 nejúspěšnějších řešitelů z každé kategorie. Finálové kolo se koná v Nové budově Národního muzea v Praze a trvá 60 minut. Ve finálovém kole je potřeba pouze obyčejná tužka a je povolena guma.

Kalkulačka či jiné přístroje jsou zakázány. *Kromě soutěžení se žáci i jejich doprovod mohou těšit na honosné vyhlášení výsledků za přítomnosti vážených a známých osobností nejen ze světa matematiky.* (www.pangeasoutez.cz)

1.2.6. Úlohy

Školní kolo obsahuje 15 uzavřených úloh, finálové kolo obsahuje 20 uzavřených úloh. Ve finálovém kole 2020 bylo zařazeno o tři úlohy navíc, protože probíhalo o rok později a řešitelé už byli na středních školách. Úlohy jsou různě bodově ohodnocené podle náročnosti. Náročnost úloh spočívá nejen v náročnosti z matematického hlediska, ale i ve formulaci otázek, délce textu a neobvyklosti úloh v porovnání s úlohami ve většině učebnic. V každé sérii úloh jsou vždy zařazeny úlohy opírající se o kombinační schopnosti, prostorovou představivost, logické myšlení, o funkční myšlení, znalosti vlastností čísel, schopnosti zobecňovat, pracovat s písmeny, obrázky a grafy, alespoň jedna úloha staví na hlubším pochopení školského učiva. Úlohy jsou prezentovány buď v „knížečkách“, nebo v počítači. Pro lepší přehlednost není žádná úloha přes více stránek a na každé straně jsou prezentovány maximálně dvě úlohy. Odpovědi jsou vytištěny tučně. Většina úloh je doplněna o fotografii, obrázek, diagram nebo graf.

2. Praktická část

2.1. Analýza soutěžních úloh vybraného ročníku z pohledu matematiky

V této sekci se podíváme na jednotlivé úlohy, na jejich správná i chybná řešení, dominantní postupy řešení a úspěšnost žáků při řešení těchto úloh. U každé úlohy budeme sledovat její oblíbenost u žáků. Budeme vycházet z dat z dotazníku.

Úlohy pocházejí z finálového kola 2020 (9. ročník), které ale proběhlo náhradně až v roce 2021 z důvodu pandemie koronaviru. Tohoto kola se zúčastnilo 77 žáků 9. ročníku z 44 různých škol, z toho 61 chlapců a 16 dívek.

U každé úlohy jsou znázorněna data o její míře úspěšnosti, četnosti voleb jednotlivých odpovědí a míře oblíbenosti úlohy. U četnosti voleb odpovědí nás zajímá pouze výstup, práce se nezabývá postupy řešitelů. V dotazníku oblíbenosti měl řešitel u každé úlohy na výběr ze čtyř možností, přičemž mohl zvolit i více než jednu možnost. Možnosti byly:

- 1) 5 nejlehčích úloh,
- 2) 5 nejtěžších úloh,
- 3) Všechny úlohy, které Tě zaujaly.
- 4) Úlohu jsem tipoval, neřešil jsem.

Dotazník lze nalézt v přílohách této práce.

Nejpravděpodobnější příčiny chybných odpovědí

- Řešitel nepochopil zadání úlohy
- Řešitel pochopil zadání úlohy, ale neví jak jí vyřešit
- Novost typu úlohy
- Tipování v důsledku nedostatku času
- Řešiteli chybí znalost matematického pojmu v zadání úlohy
- Numerická chyba

Struktura charakteristiky úloh

- 1) **Analýza zadání - zaměření úlohy**

- 2) Předpokládaný postup řešení
- 3) Dominantní metoda řešení
- 4) Úskalí řešení
- 5) Komentář k nabídce odpovědí
- 6) Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy
- 7) Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí
- 8) Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh

1. VRTULNÍK

3 body

Vrtulník letecké záchranné služby Eurocopter EC135 spotřebuje 3,5 litru paliva za minutu letu. Cestou k nehodě vzdálené 48 km letěl rychlostí 200 km/h. Cestu zpět zkomplikoval protivítr, takže rychlost vrtulníku se snížila o 20 %.

Kolik litrů paliva vrtulník celkem spotřebuje?



- a) méně než 110 litrů b) 110–130 litrů c) 130–150 litrů
- d) 150–170 litrů e) více než 170 litrů

Analýza zadání: úloha se zaměřuje na porozumění textu a vztahům mezi informacemi. Obsahuje jednotky měření, čas a procenta, výpočet času cesty ze vzdálenosti a rychlosti, komplikace v podobě zpomalení vrtulníku na zpáteční cestě. Čas cesty vychází v necelých

číslech, práce se zlomky nebo desetinnými čísly. V zadání úlohy není uvedeno, že rychlost vrtulníku je myšlena jako průměrná.

Předpokládaný postup řešení: prvním krokem by měl být výpočet času letu. Cesta tam trvala $\frac{48}{200}$ hodin, což je po zkrácení zlomku $\frac{6}{25}$ hodin, cesta zpátky byla o 20 % pomalejší, takže rychlost vrtulníku byla 160 km/h, takže trvala $\frac{48}{160}$ hodin, což je po zkrácení zlomku $\frac{3}{10}$ hodin. Pro výpočet času cesty tam i zpátky jednotlivé časy sečteme:

$\frac{6}{25} + \frac{3}{10} = \frac{27}{50}$, celková cesta trvala $\frac{27}{50}$ hodin. Spotřebu vrtulníku máme zadanou

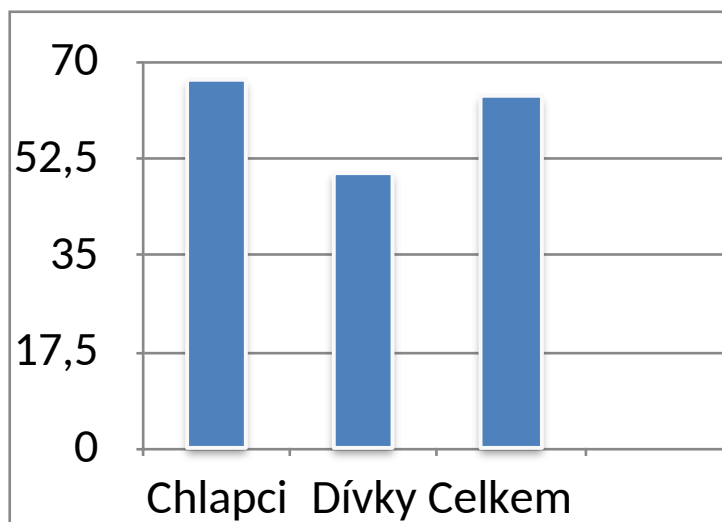
v litrech za minutu, čas letu tedy převedeme na minuty, to je $\frac{162}{5}$ minut. Tento čas vynásobíme číslem 3,5, protože spotřeba vrtulníku je 3,5 litrů za minutu a vyjde nám spotřeba 113,4 litrů paliva, což odpovídá odpovědi b.

Dominantní metoda řešení: výpočet

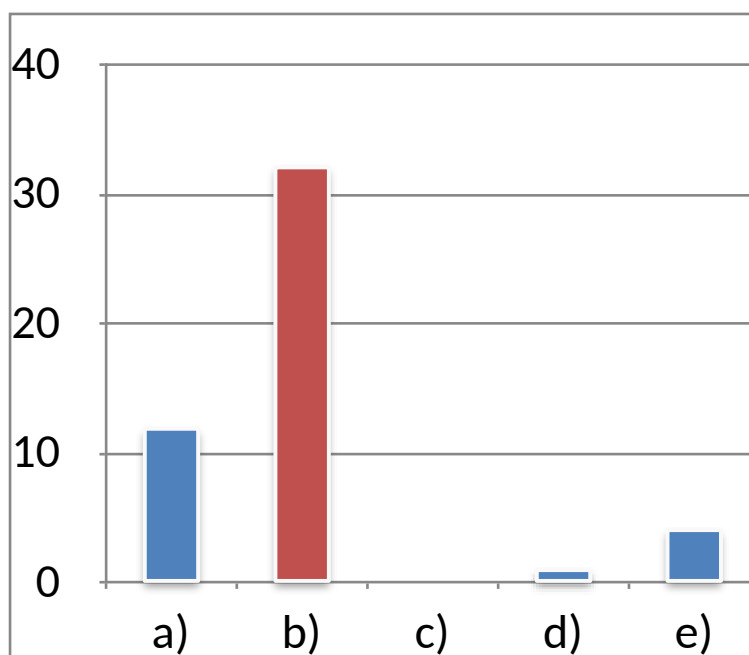
Úskalí řešení: Rychlost vrtulníku v km/h “je větší” než vzdálenost k nehodě, to může řešitele svést k nesprávnému postupu vydělení rychlosti vzdáleností. Nutnost uvědomit si, že vrtulník letí dvě cesty, tam a zpátky.

Komentář k nabídce odpovědí: nabízené odpovědi se nezdají být volené nějak speciálně, mají spíše nabídnout rozpětí spotřeb, do kterých se potom řešitel „trefí“ se svým výsledkem. Některé spotřeby jsou uvedeny ve více odpovědích, spotřeba 130 litrů je uvedena v odpovědích b) a c) a spotřeba 150 litrů je uvedena v odpovědích c) a d).

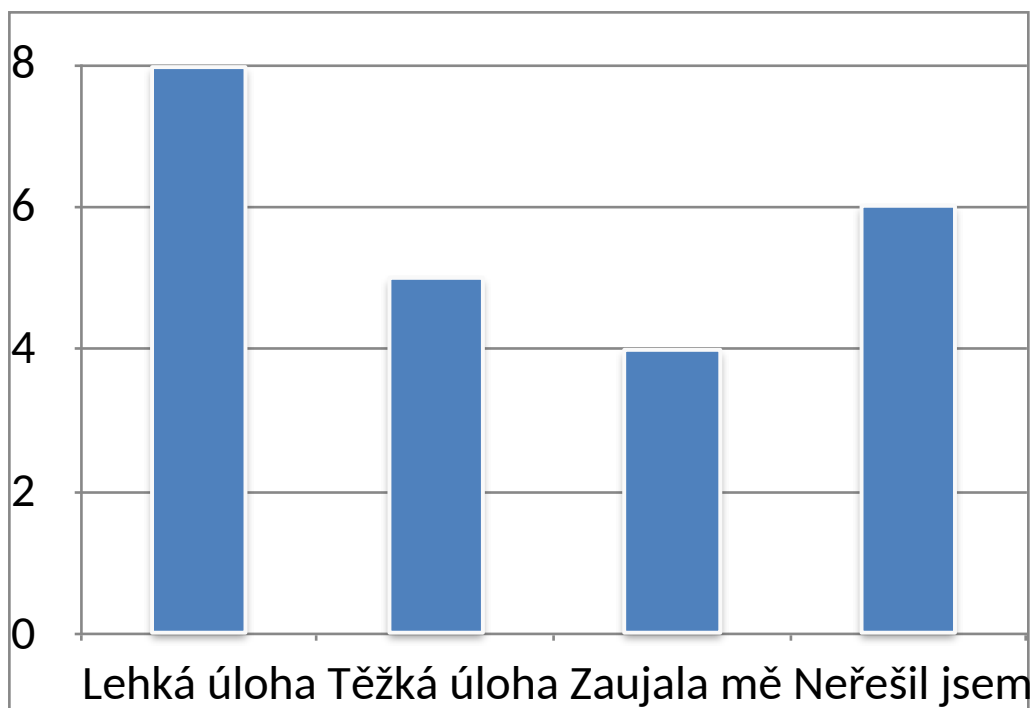
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



2. RADAR

3 body

Policejní radar pracuje - jako každé měřicí zařízení - s jistou odchylkou. U rychlostí do 100 km/h jsou to ± 3 km/h, u rychlostí nad 100 km/h jsou to ± 3 % z naměřené rychlosti. Z tabulky zjistí, v kolika případech měření bylo spolehlivě prokázáno překročení maximální povolené rychlosti.



Zdroj: <https://bit.ly/3dbJaJo>

Úsek měření	Maximální povolená rychlost	Naměřená rychlost
v obci	50 km/h	46,7 km/h
dálnice	130 km/h	133,2 km/h
modernizace D1	80 km/h	96,4 km/h
rychlostní silnice	110 km/h	114,0 km/h
tunel	100 km/h	103,0 km/h

- a) v žádném případě
- b) v jednom případě
- c) **ve dvou případech**
- d) v třech případech
- e) ve čtyřech případech

Analýza zadání: úloha vyžaduje orientaci v tabulce. Obsahuje jednotky měření a procenta. Opírá se o porovnávání čísel a práci s desetinnými čísly. Znak \pm , většinou v matematice značí, že výraz má dvě instance, jednu s +, druhou s – místo znaku \pm . Tady ale naznačuje, že odchylka může být kladná, i záporná, což mi ale přijde zřejmé i bez použití znaku \pm . Pojem odchylka není obsažen v RVP ZV, řešitel s ním nemusí být seznámen, možná proto se v zadání vyskytuje znak \pm .

Předpokládaný postup řešení: řešitel bude sledovat jednotlivé řádky tabulky a počítat, zda bylo spolehlivě prokázáno překročení maximální povolené rychlosti.

První řádek, v obci: naměřená rychlost je nižší než 100 km/h, maximální odchylka je ± 3 km/h. Rychlost tedy mohla být 43,7 km/h až 49,7 km/h, maximální povolená rychlost tedy určitě nebyla překročena. Že nebylo spolehlivě prokázáno překročení maximální povolené rychlosti, bylo navíc jasné už z toho, že naměřená rychlost je nižší než maximální povolená.

Druhý řádek, dálnice: naměřená rychlost je vyšší než 100 km/h, maximální odchylka je ± 3 %. 1 % je 1,332 km/h, 3 % jsou 3,996 km/h, minimální rychlost je 133,2–3,996 km/h, což je méně než 130 km/h, takže překročení maximální povolené rychlosti nebylo spolehlivě prokázáno.

Třetí řádek, modernizace D1: naměřená rychlost je nižší než 100 km/h, maximální odchylka je ± 3 km/h. Minimální rychlost je 93,4 km/h, takže překročení maximální povolené rychlosti bylo spolehlivě prokázáno.

Čtvrtý řádek, rychlostní silnice: naměřená rychlost je vyšší než 100 km/h, maximální odchylka je ± 3 %. 1 % je 1,14 km/h, 3 % jsou 3,42 km/h, minimální rychlost je 114–3,42 km/h, což je více než 110 km/h, takže překročení maximální povolené rychlosti bylo spolehlivě prokázáno.

Pátý řádek, tunel: naměřená rychlost je vyšší než 100 km/h, maximální odchylka je ± 3 %. 1 % je 1,03 km/h, 3 % jsou 3,09 km/h, minimální rychlost je 103–3,09 km/h, což je méně než 100 km/h, takže překročení maximální povolené rychlosti nebylo spolehlivě prokázáno.

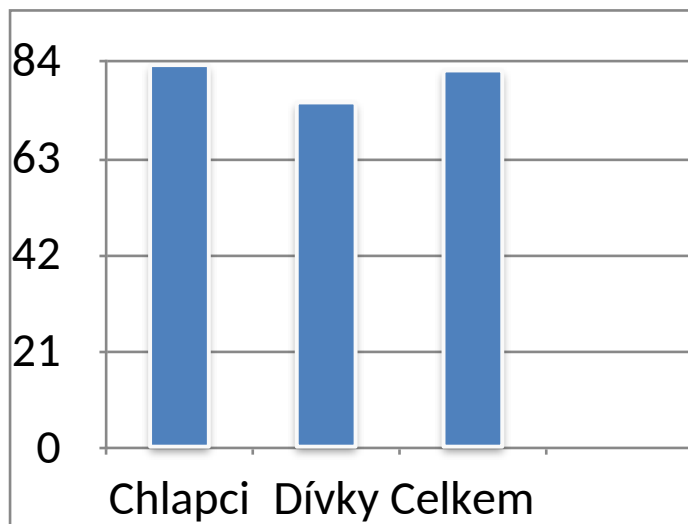
Překročení maximální povolené rychlosti bylo spolehlivě prokázáno dvakrát, správná odpověď je tedy b).

Dominantní metoda řešení: výpočet

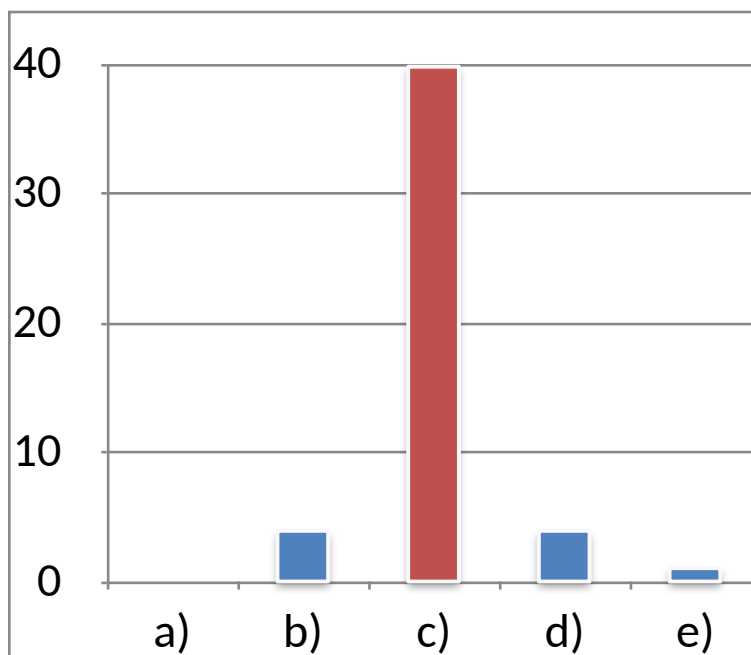
Úskalí řešení: Kladná odchylka nemá při řešení úlohy význam, protože nás zajímá vždy minimální rychlost, to může zmást řešitele. Opomenutí podmínky, že překročení rychlosti má být **spolehlivě prokázáno**.

Komentář k nabídce odpovědí: odpovědi nejsou v ničem zvláštní, jsou to jen počty případů spolehlivě prokázaného překročení maximální povolené rychlosti.

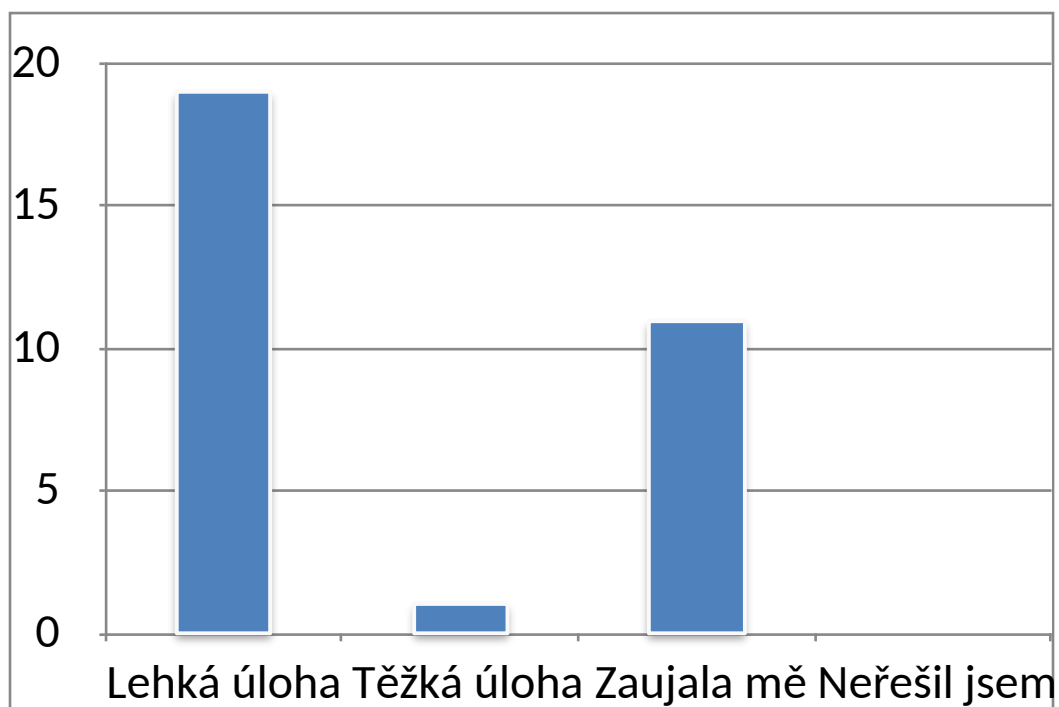
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:

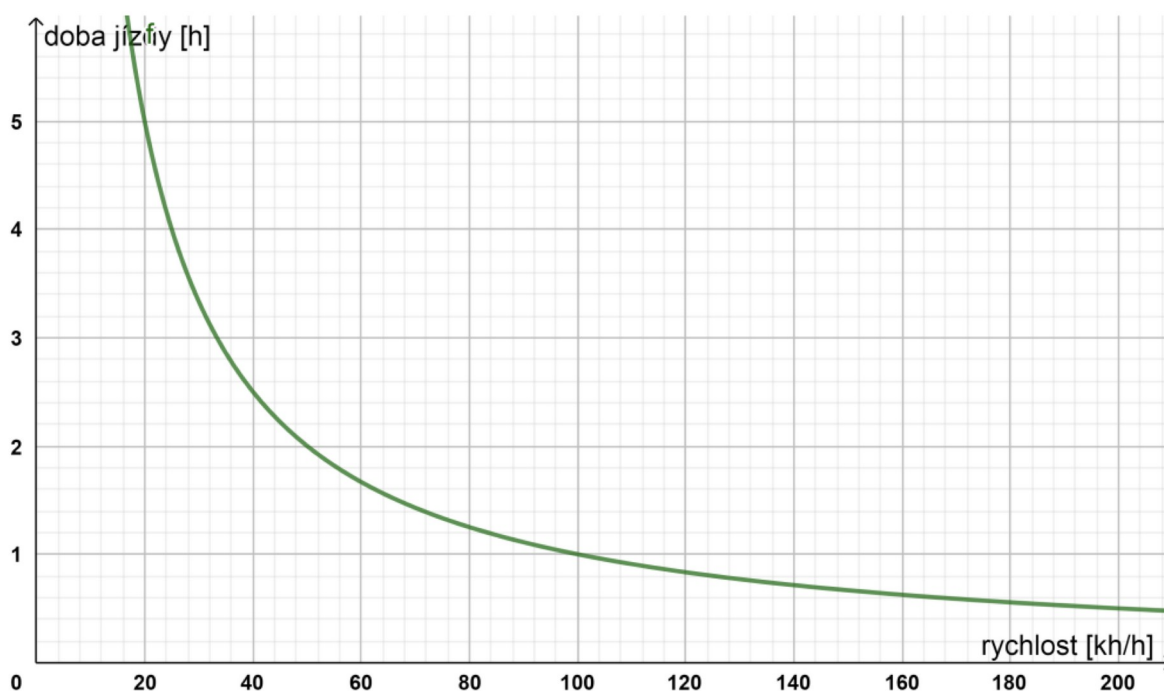


3. SPĚCHEJ POMALU

3 body

Stejnomený graf prezentuje na svých stránkách BESIP - organizace, která se snaží vzdělávat účastníky silničního provozu v pravidlech bezpečnosti. Graf ukazuje závislost doby jízdy (svislá osa, h) na rychlosti (vodorovná osa, km/h) při konstantní vzdálenosti 100 km.

Které z uvedených tvrzení z grafu nevyplývá?



- a) Při rychlosti 40 km/h by cesta trvala 2,5 hodiny.
- b) Při rychlosti 80 km/h by cesta trvala 1 hodinu a 15 minut.
- c) Zvýšení rychlosti o 10 km/h z původních 40 km/h ušetří 30 minut z celkového času jízdy.
- d) Zvýšení rychlosti o 10 km/h z 80 km/h ušetří jen asi 8 minut z celkového času jízdy.
- e) **Čím vyšší rychlostí jedeme, tím větší vliv má další zvýšení rychlosti na celkový čas jízdy.**

Analýza zadání: Úloha se zaměřuje na čtení informací z grafu nepřímé úměrnosti. Obsahuje jednotky času a rychlosti. Úloha se týká možných situací, které zatím nenastaly. Zadání obsahuje nadbytečný údaj, konstantní vzdálenost 100 km, není vůbec potřeba k vyřešení úlohy.

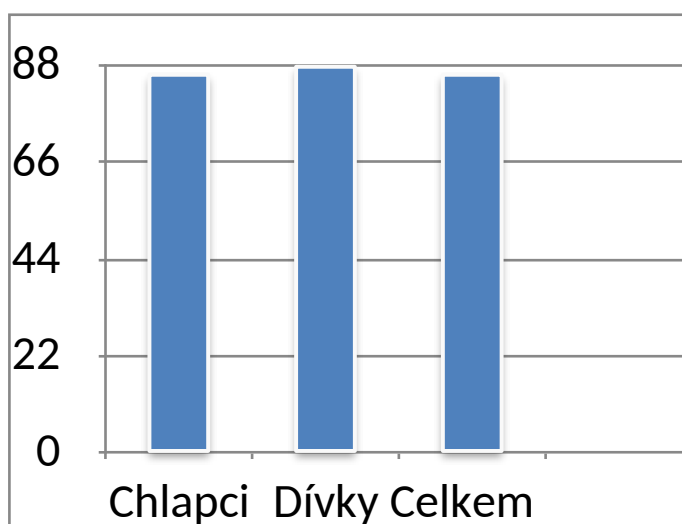
Předpokládaný postup řešení: řešitel si přečte jednotlivá tvrzení v odpovědích a bude určovat, zda jsou to pravdivá tvrzení. Odpovědi a) a b) jsou evidentně pravdivé. Odpověď c) je pravdivá, protože při rychlosti 40 km/h trvá cesta 2,5 hodiny a při rychlosti 50 km/h trvá cesta jen 2 hodiny, takže bylo ušetřeno 30 minut. Odpověď d) vypadá pravdivě, protože 8 minut je $\frac{2}{15}$ hodiny a rozdíl v hodnotách grafu v 80 km/h a 90 km/h by mohl být $\frac{2}{15}$ délky strany velkého čtverce. Odpověď e) není pravdivá, protože čím vyšší rychlostí jedeme, tím menší vliv má další zvýšení rychlosti na celkový čas jízdy, což je vidět z toho, že klesání grafu zpomaluje. Správná odpověď je tedy e).

Dominantní metoda řešení: řešení v modelu

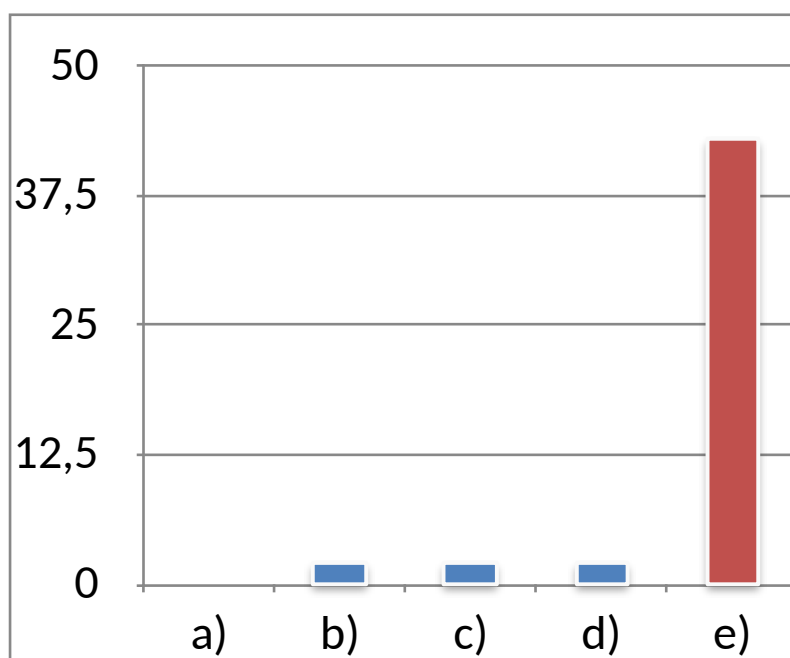
Úskalí řešení: zápor v otázce, slovo nevyplývá, ale ne je podtržené, aby se tomuto úskalí předešlo.

Komentář k nabídce odpovědí: odpovědi jsou voleny tak, aby správná odpověď byla poslední. Tvrzení v odpovědi e) jako jediné není tak snadno vykukatelné z grafu.

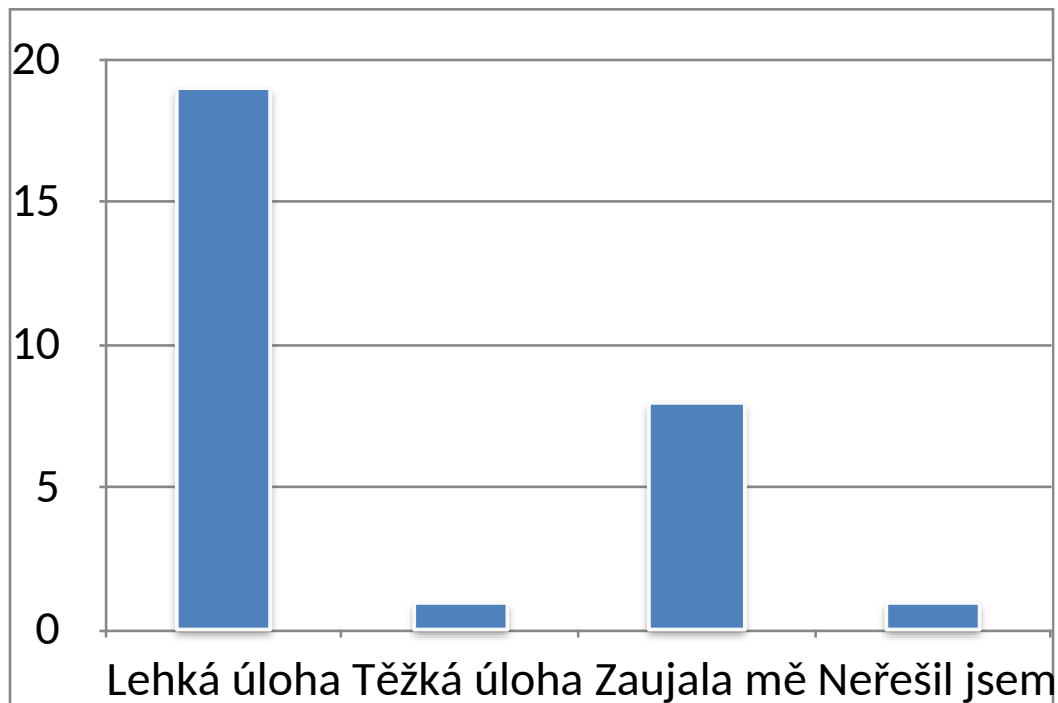
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



4. PODLE PRAVIDEL

3 body

Pro čísla uvedená v tabulce mají platit tato dvě pravidla:

- *Pokud je číslo sudé, musí být číslo vlevo od něj dělitelné třemi.*
- *Pokud je číslo liché, musí být číslo pod ním s ním nesoudělné.*

Vyber pravdivé tvrzení.

18	12	7
24	36	10
5	21	20
9	16	27
8	41	49

- a) Nejméně jedno z uvedených pravidel je porušeno číslem 7.
- b) Nejméně jedno z uvedených pravidel je porušeno číslem 24.
- c) Nejméně jedno z uvedených pravidel je porušeno číslem 41.
- d) Nejméně jedno z uvedených pravidel je porušeno více než dvěma čísly v tabulce.
- e) **Ani jedno z pravidel není v tabulce porušeno.**

Analýza zadání: úloha obsahuje pojmy sudé a liché číslo, nesoudělnost. Vyžaduje orientaci v tabulce. Práce s podmínkou nejméně, podmínky pokud je číslo sudé/liché.

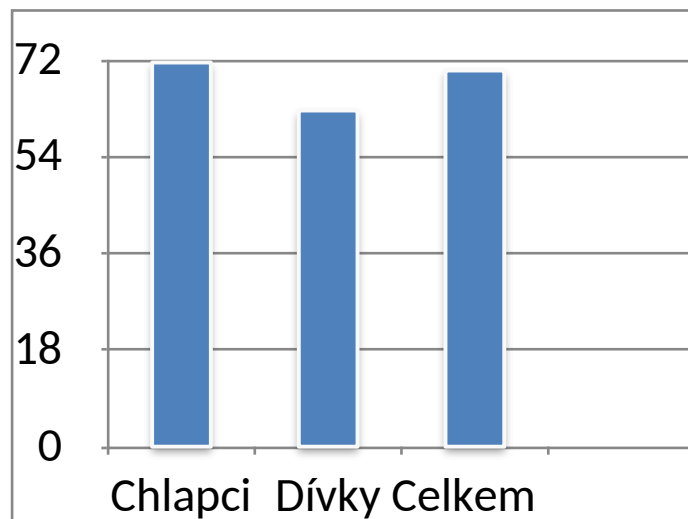
Předpokládaný postup řešení: řešitel se bude dívat na jednotlivé odpovědi a posuzovat, zda jsou tvrzení v nich pravdivá. Čísla 7, 24 a 41 splňují obě podmínky. Po zkontrolování všech čísel v tabulce vyjde najevo, že všechna splňují všechny podmínky, takže správná odpověď je e).

Dominantní metoda řešení: řešení v modelu

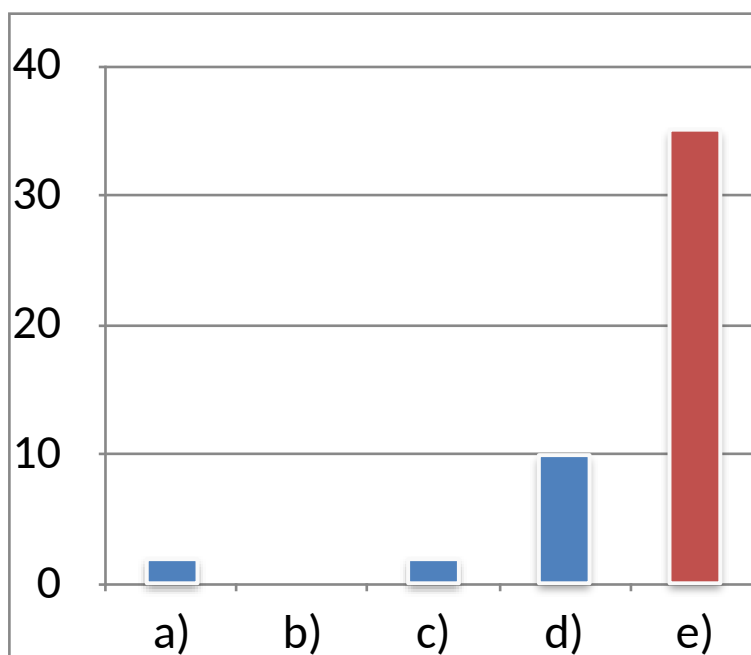
Úskalí řešení: je třeba znát pojmy sudost, lichost a nesoudělnost. Některá čísla v tabulce nemají vlevo od sebe žádné číslo a některá nemají pod sebou žádné číslo. Někdo si možná neuvědomí, že v takovém případě je pravidlo automaticky splněno.

Komentář k nabídce odpovědí: odpovědi jsou voleny tak, aby správná odpověď byla poslední. K určení, zda jsou odpovědi d) a e) pravdivé je potřeba zkontrolovat všechna čísla tabulky.

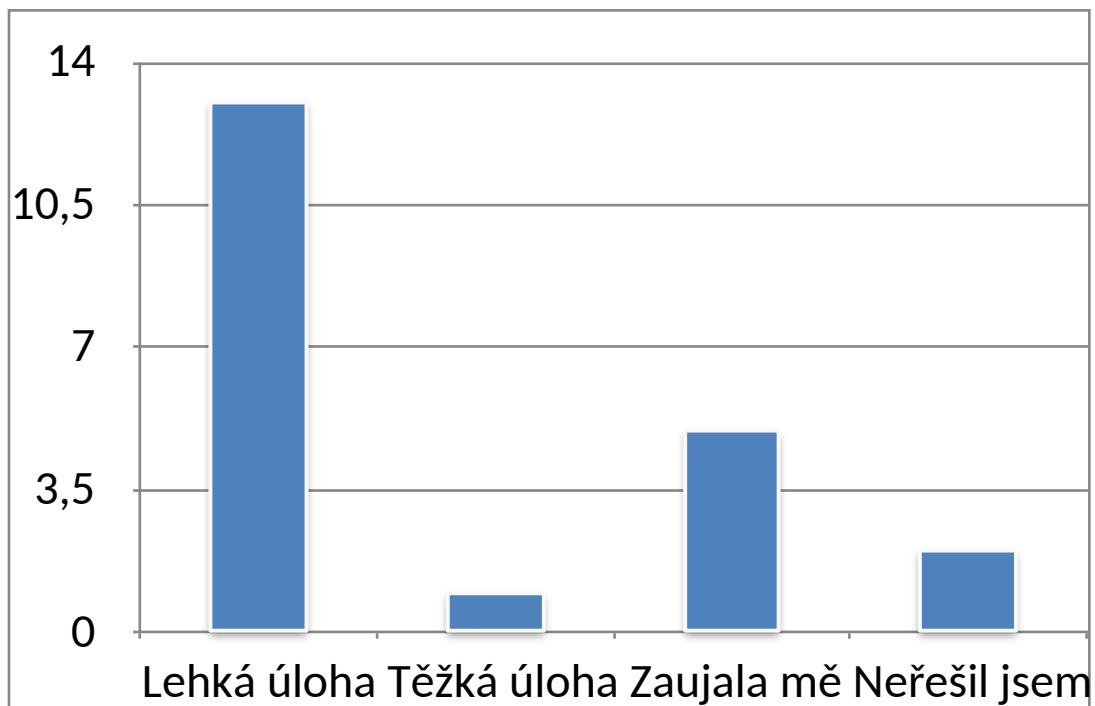
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblību jednotlivých úloh:



5. OBLIBA TELEVIZNÍCH STANIC

4. body

V jedné základní škole v Praze 8 pořádali anketu, kterou z televizních stanic ČT1, Nova, Prima nebo Barrandov žáci nejraději sledují. Anketa dopadla jednoznačně, žádné dvě televizní stanice nezískaly stejný počet hlasů. Ve školním časopise byly výsledky zveřejněny takto:

- Prima nebyla první.
- Nova nebyla druhá.
- Barrandov nebyl čtvrtý.
- Nova nedopadla hůř než Prima.
- Prima nedopadla hůř než Barrandov.
- Barrandov nedopadl hůř než ČT1.
- ČT1 nedopadla hůř než Nova.

Která stanice tedy byla první?

- a) ČT1
- b) Nova
- c) Prima
- d) **V časopise musí být chyba, informace si odporují.**
- e) Informace v časopisu si neodporují, ale není jich dostatek, aby bylo možné vítěze určit jednoznačně.

Analýza zadání: slovní úloha se zaměřuje na práci s několika podmínkami současně, práce se záporům - nebyl, nedopadl hůř. Obsahuje podmínky v zadání.

Předpokládaný postup řešení: dobré by bylo si celou situaci zaznamenat nějak graficky, například udělat si tabulku s umístěními a stanicemi a odškrtnout si, co kde nemůže být.

1. místo	ČT1	Nova	Prima	Barrandov
2. místo	ČT1	Nova	Prima	Barrandov
3. místo	ČT1	Nova	Prima	Barrandov
4. místo	ČT1	Nova	Prima	Barrandov

Na prvním místě škrtneme Primu, na druhém Novu, na čtvrtém Barrandov to jsou první tři podmínky. Protože Nova nedopadla hůř než Prima, můžeme přeškrtnout Novu na čtvrtém místě. Protože Prima nedopadla hůř než Barrandov, nemůže být na čtvrtém místě a nemůže být ani na třetím, protože to by byl Barrandov před ní, Prima tedy byla určitě druhá. Protože ČT1 nedopadla hůř než Nova, nemůže být na třetím a čtvrtém místě. Barrandov nedopadl hůř než ČT1, takže nebude druhý, ani třetí, takže musí být první. Ale Prima nedopadla hůř než Barrandov a to odporuje tomu, že by Barrandov byl první.

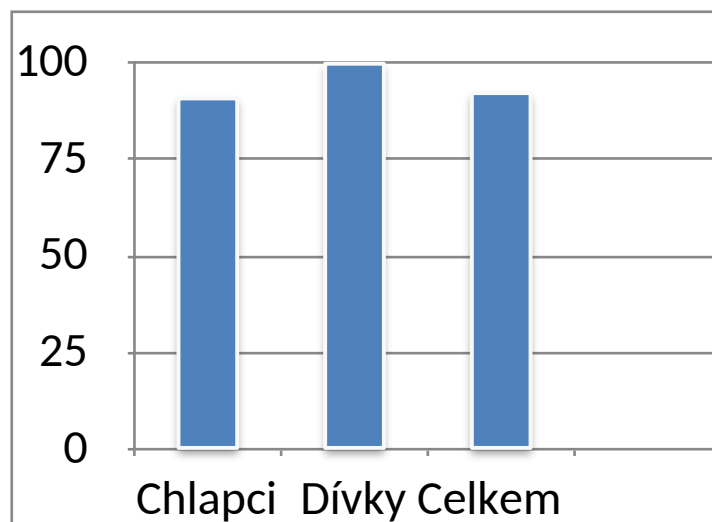
Čtvrtá, pátá a šestá podmínka udávají jasně pořadí stanic, říkají vlastně: Nova je před Primou, Prima je před Barrandovem, Barrandov je před ČT1, to znamená 1. místo Nova, 2. místo Prima, 3. místo Barrandov, 4. místo ČT1. Poslední podmínka je ve sporu s tímhle pořadím, správná odpověď je tedy d), informace si odporují.

Dominantní metoda řešení: usuzování

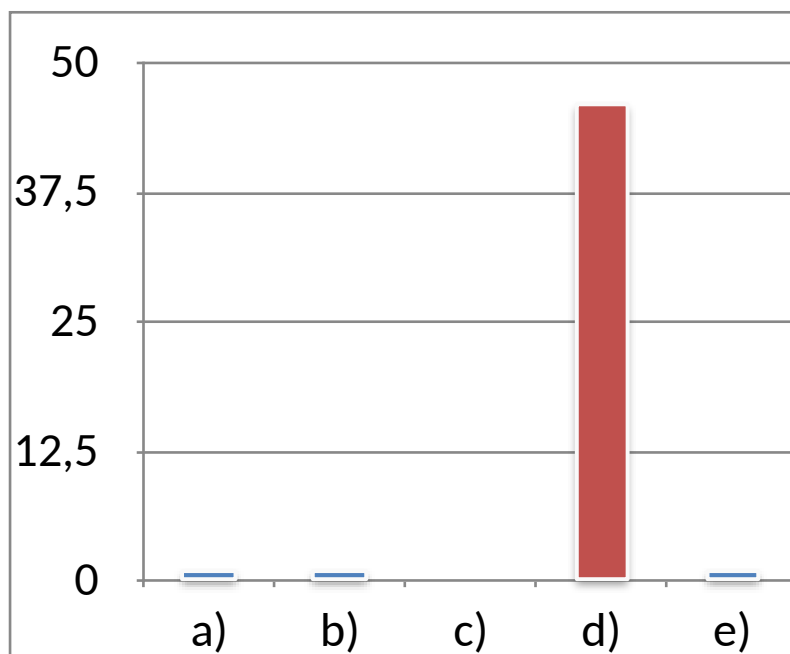
Úskalí řešení: práce se zápornou podmínkou - nedopadl hůře, podmínek je hodně, je třeba se k nim vracet, bez přehledného záznamu informací se lze v úloze snadno ztratit, je vyžadována vhodná organizace řešení.

Komentář k nabídce odpovědí: odpověď c) je nesmyslná, hned první podmínka říká, že Prima nebyla první. Úloha je neobvyklá v tom, že správná odpověď je ta, že v podmínkách je chyba, většina řešitelů bude pravděpodobně předpokládat, že jedna ze stanic vyhrála a úlohu lze vyřešit, jsou zvyklí ze školy, že všechny úlohy musejí mít řešení.

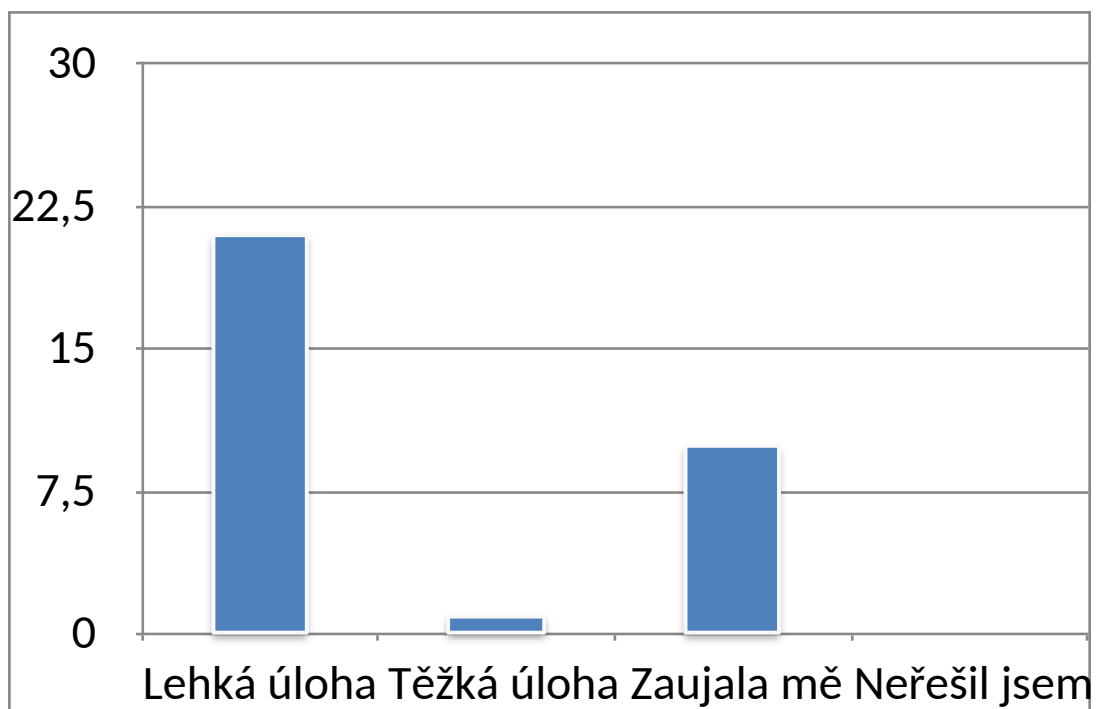
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



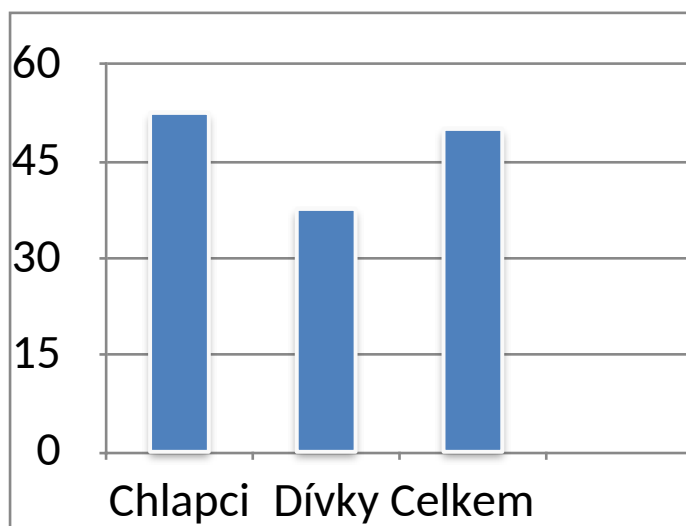
Počet žáků ve třídě nelze jednoznačně určit, správná odpověď je tedy e).

Dominantní metoda řešení: úvahou s oporou o model

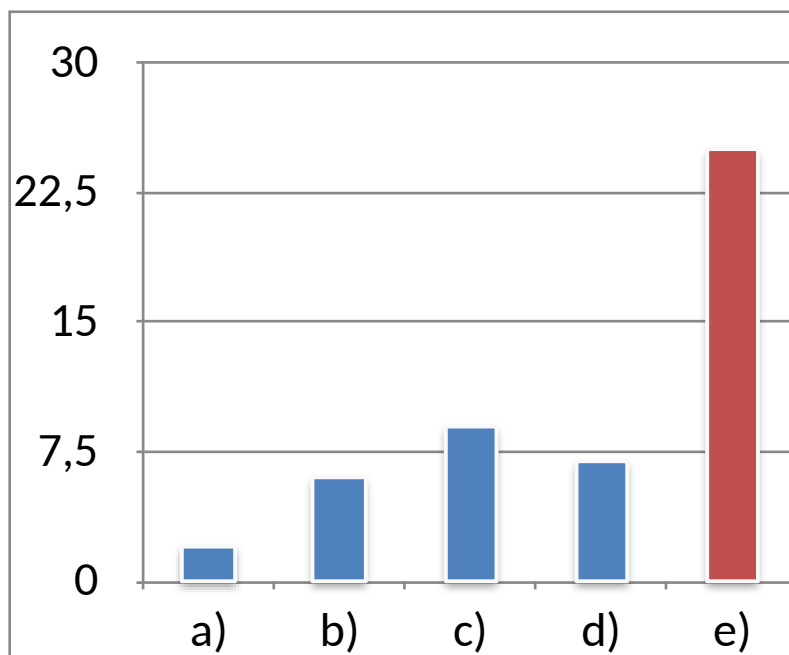
Úskalí řešení: úloha je neobvyklá v tom, že k jejímu správnému vyřešení je potřeba uvědomit si, co v textu zadání není uvedeno.

Komentář k nabídce odpovědí: odpověď a) je nesmyslná, odpovědi b) a c) jsou možné počty žáků, které by tam mohly být. Úloha je neobvyklá v tom, že správná odpověď je, že počet žáků nelze určit, většina řešitelů bude pravděpodobně předpokládat, že počet žáků určit lze, jsou zvyklí ze školy, že každá úloha musí mít řešení.

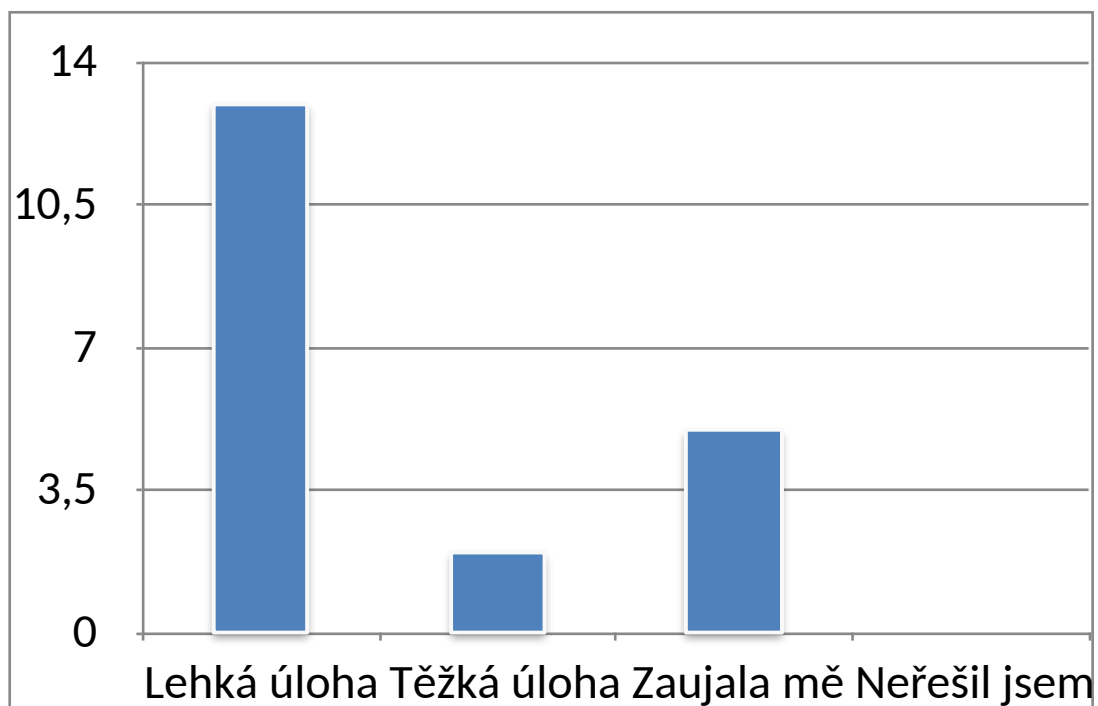
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



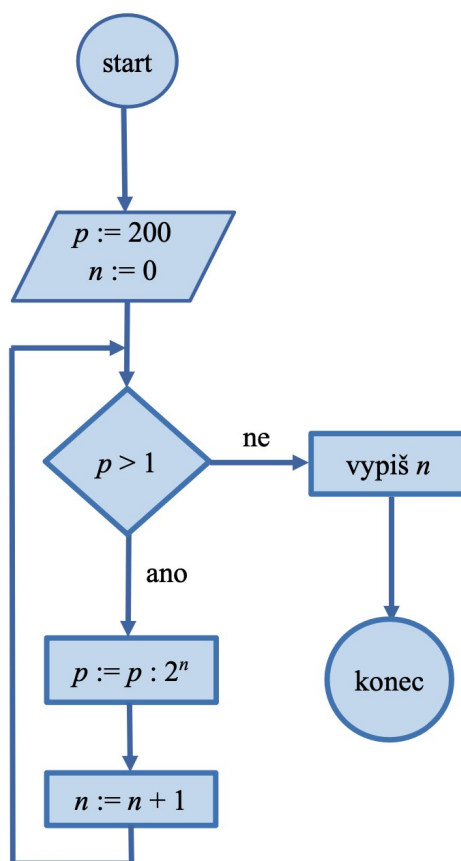
7. DIAGRAM

4 body

Jaká bude hodnota n po skončení tohoto diagramu?

Pozn.: znak „:=“ znamená „přepiš hodnotu proměnné“.

Např. Příkaz „ $n := n + 1$ “ lze přečíst jako „hodnotu proměnné n zvětši o jedna“.



a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) jiná hodnota

Analýza zadání: úloha vyžaduje čtení z diagramu a práci s aritmeticko-algebraickými symboly. Obsahuje podmínky v zadání (kosočtverec s $p > 1$). Je dobře, že zadání obsahuje vysvětlení znaku „:=“, protože většina řešitelů se s ním pravděpodobně ještě nesetkala.

Předpokládaný postup řešení: řešitel by mohl jednoduše postupovat podle diagramu, pokud je číslo p větší než jedna, tak ho vydělí číslem 2^n a n zvětší o jedna, potom zase

zkontroluje zda je číslo p větší než jedna a postup opakuje, dokud p nebude menší než jedna. Výpočet bude vypadat takto:

$$200 : 2^0 = 200 : 1 = 200$$

$$200 : 2^1 = 200 : 2 = 100$$

$$100 : 2^2 = 100 : 4 = 25$$

$$25 : 2^3 = 25 : 8 = \frac{25}{8}$$

$$\frac{25}{8} : 2^4 = \frac{25}{8} : 16 = \frac{25}{128}$$

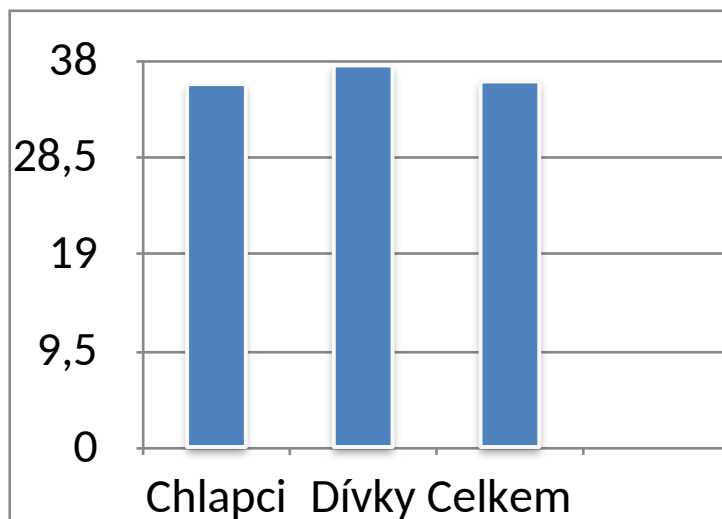
Číslo $\frac{25}{128}$ je menší než jedna, takže můžeme vypsát hodnotu n a skončit diagram. Poslední hodnota čísla n byla 4, ale ta se ještě o jedna zvýšila, takže správná odpověď je d) 5.

Dominantní metoda řešení: řešení výpočtem v modelu

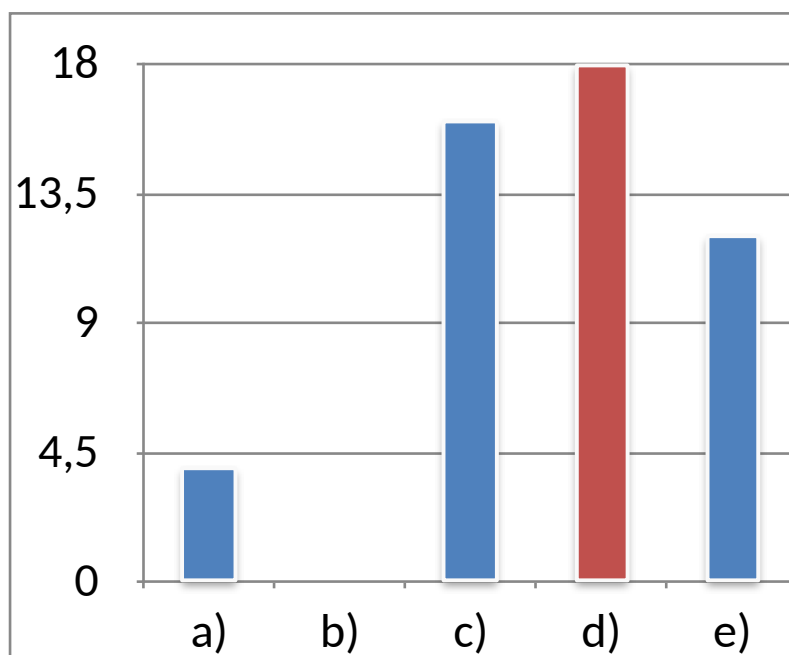
Úskalí řešení: řešitel zapomene po posledním výpočtu ještě přičíst k n jedna. Řešitel by mohl úlohu špatně pochopit a číslo p pokaždé resetovat zpátky na 200, ale potom by mu vyšel výsledek, který není v nabídce, resp. musel by zvolit odpověď e) jiná hodnota. Pokud se řešitel setkává s podobným diagramem poprvé, může pro něj být úloha obtížná.

Komentář k nabídce odpovědí: odpovědi a) a b) nedávají smysl, odpověď c) je blízké řešení, řešitel ji zvolí, pokud opomene na konci přičíst k n jedna.

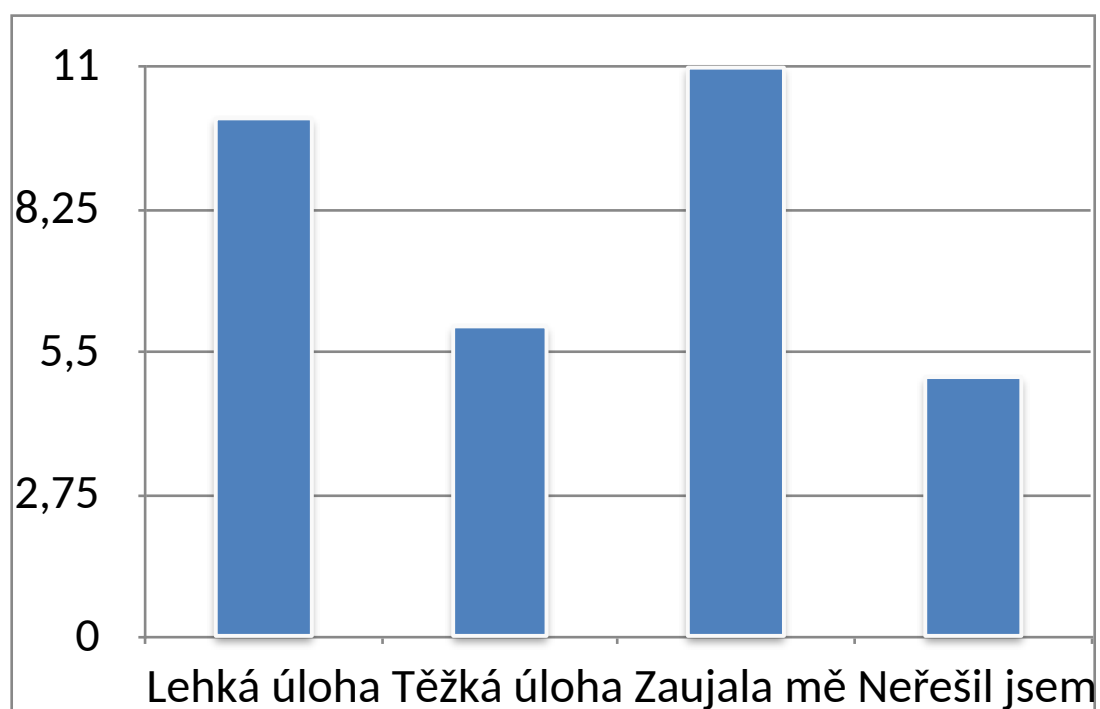
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



8. GOOGLE POPRVÉ

4 body

Napadlo tě někdy, že když používáš internetové vyhledávání nebo např. sleduješ video na YouTube, spotřebovává elektrickou energii nejen tvůj počítač a přenosová soustava poskytovatele internetu, ale také supervýkonné počítače Googlu jako poskytovatele těchto služeb? Podle údajů serveru *nazeleno.cz* spotřebuje Google na jedno vyhledávání asi 0,3 Wh (watthodiny) el. energie a sledování jedné minuty videa na YouTube znamená asi 0,2 Wh el. energie.



Spočítej podíl na měsíční spotřebě Googlu pro člověka, který sleduje YouTube průměrně 1,2 h denně a zadá denně 15 vyhledávacích dotazů.

Pozn.: 1 kWh (kilowatthodina) = 1000 Wh

Zdroj: google.com

- a) méně než 0,3 kWh b) 0,3–0,4 kWh c) 0,4–0,5 kWh
d) 0,5–0,6 kWh e) více než 0,6 kWh

Analýza zadání: složená slovní úloha se zaměřuje na porozumění textu a vztahům mezi informacemi. Obsahuje jednotky energie a jednotky času. Vyžaduje práci s desetinnými čísly a převody jednotek. V zadání se vyskytuje slovo podíl, ale k vyřešení úlohy není třeba nic dělit (antisignál?). Zadání obsahuje nápovědu v podobě převodu kilowatthodin na watthodiny.

Předpokládaný postup řešení: řešitel ví, kolik el. energie spotřebuje jedna minuta sledování YouTube a tak si převede 1,2 hodiny na minuty, to je 72 minut. Na člověka, který sleduje YouTube průměrně 1,2 hodiny denně, spotřebuje Google ($72 \cdot 0,2$) Wh, takže 14,4 Wh. Dále když ten člověk zadá denně 15 vyhledávacích dotazů a Google na jedno vyhledávání spotřebuje 0,3 Wh, tak Google denně spotřebuje ($15 \cdot 0,3$) Wh, takže 4,5 Wh. Na člověka, který sleduje YouTube průměrně 1,2 hodiny denně a zadá denně

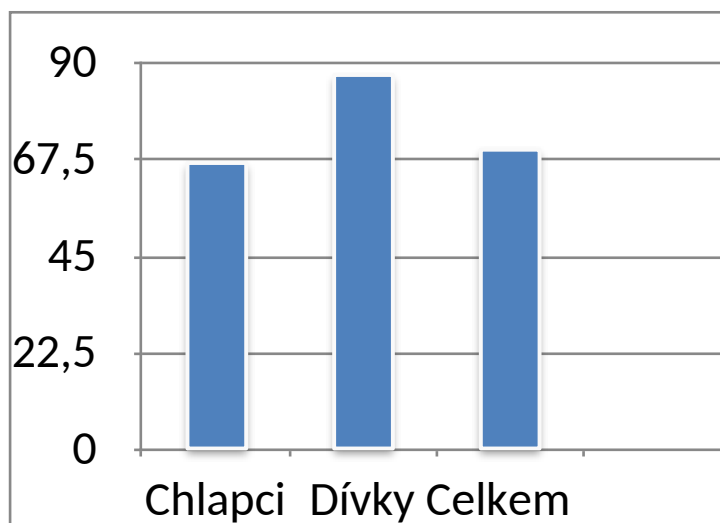
15 vyhledávacích dotazů, spotřebuje Google $(14,4 + 4,5) \text{ Wh} = 18,9 \text{ Wh}$ denně. Máme spočítat podíl na měsíční spotřebě, záleží, kolik dní ten měsíc má. Pokud bude mít 30 dní, bude měsíční spotřeba $(30 \cdot 18,9) \text{ Wh} = 576 \text{ Wh}$, to je 0,576 kWh. Takže správná odpověď je d) 0,5–0,6 kWh. I kdyby měl ten měsíc jenom 28 dní, spotřeba by byla $(28 \cdot 18,9) \text{ Wh} = 529,2 \text{ Wh}$, což pořád odpovídá odpovědi d).

Dominantní metoda řešení: výpočet

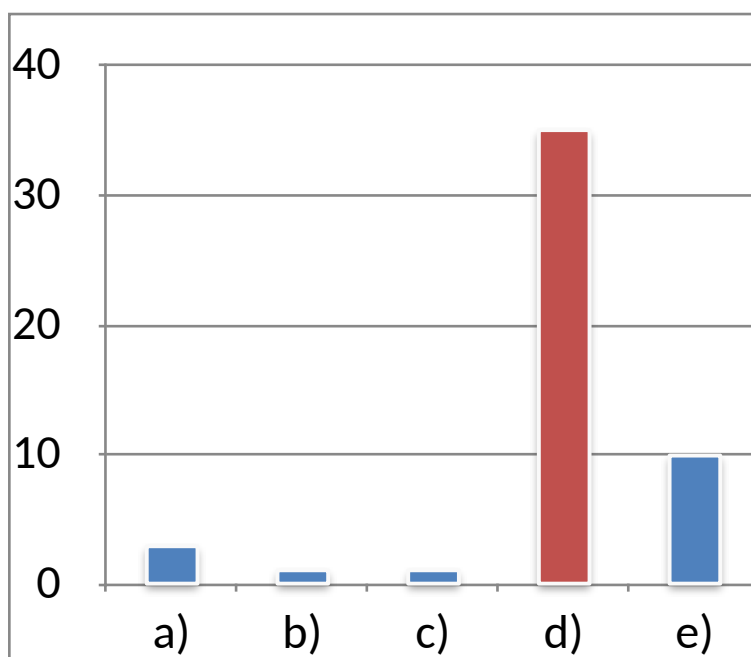
Úskalí řešení: řešitel by si nemusel všimnout, že hledáme měsíční spotřebu, a nevynásobil by potom denní spotřebu počtem dní v měsíci.

Komentář k nabídce odpovědí: nabízené odpovědi se nezdají být volené nějak speciálně, mají spíše nabídnout rozpětí spotřeb. Některé spotřeby jsou obsaženy ve více odpovědích, spotřeba 0,4 kWh je v odpovědích b) a c) a spotřeba 0,5 kWh je v odpovědích c) a d).

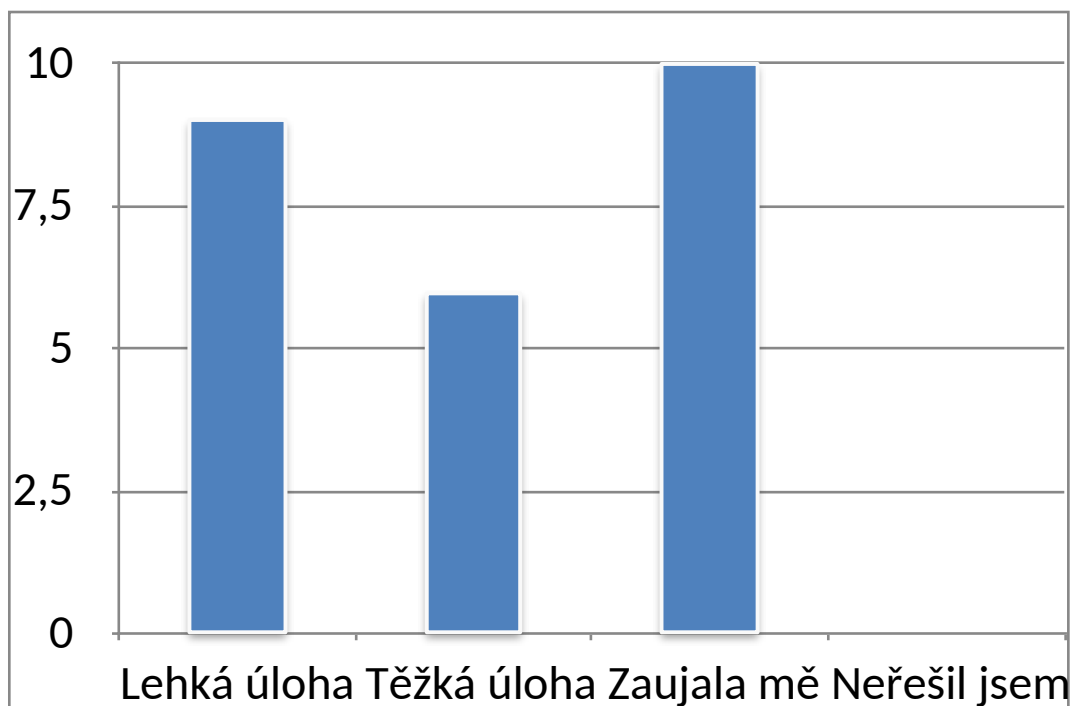
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



9. GOOGLE PODRUHÉ

4. body

Podle údajů serveru *internetlivestats.com* odpoví Google každou sekundu v průměru na 82 000 vyhledávacích dotazů a 83 000 uživatelů si spustí video na YouTube o průměrné délce 12 minut (údaje aktuální v březnu 2020).

Kolik GWh el. energie spotřebuje Google poskytováním těchto služeb za den? K výpočtu použij i údaje z předchozí úlohy.

(Pro srovnání: jaderná elektrárna Temelín vyrobí za den 38 GWh el. energie.)

Pozn.: 1 GWh (gigawatthodina) = 1 000 000 000 Wh



Zdroj: youtube.com

- a) méně než 10 GWh b) 10–20 GWh c) 20–30 GWh
d) 30–40 GWh e) více než 40 GWh

Analýza zadání: složená slovní úloha se zaměřuje na porozumění textu a vztahům mezi informacemi. Obsahuje jednotky energie a jednotky času. Vyžaduje práci s desetinnými čísly, velkými čísly a převody jednotek. Úloha navazuje na předchozí úlohu.

Předpokládaný postup řešení: řešitel si nejdříve spočítá, kolik elektrické energie spotřebuje Google poskytováním služeb každou sekundu a tento výsledek potom vynásobí počtem sekund v jednom dni. 82 000 vyhledávacích dotazů stojí Google $(82\,000 \cdot 0,3)$ Wh, to je 24 600 Wh. YouTube video dlouhé 12 minut stojí Google $(12 \cdot 0,2)$ Wh, to je 2,4 Wh, 83 000 takových videí stojí $(83\,000 \cdot 2,4)$ Wh, to je 199 200 Wh. Google tedy každou sekundu v průměru spotřebuje $(24\,600 + 199\,200)$ Wh el. energie, to je 223 800 Wh. Minuta má 60 sekund, hodina má 60 minut, takže $60 \cdot 60$ sekund, to je 3600 sekund, den má 24 hodin, takže $24 \cdot 3600$ sekund, to je 86 400 sekund. Takže Google spotřebuje poskytováním vyhledávání a YouTube videí denně v průměru $(223\,800 \cdot 86\,400)$ Wh, což

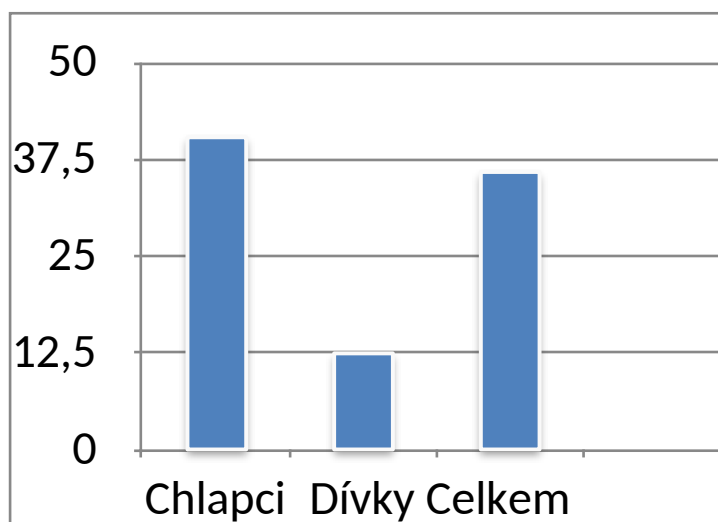
je 19 336 320 000 Wh elektrické energie. Výsledek ještě převedeme na GWh, což je 19,336 32 GWh, což odpovídá odpovědi b) 10–20 GWh.

Dominantní metoda řešení: výpočet

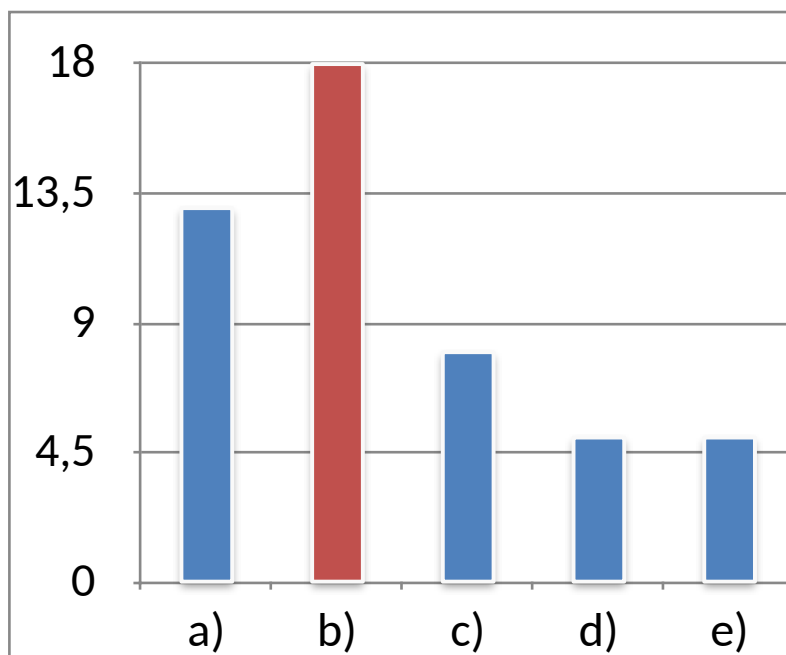
Úskalí v řešení: v úloze se vyskytují opravdu velká čísla a řešitel nemá k dispozici kalkulačku, v kombinaci s tím, že má úlohu vyřešit co nejrychleji, by to mohl být problém.

Komentář k nabídce odpovědí: nabízené odpovědi se nezdají být volené nějak speciálně, mají spíše nabídnout rozpětí spotřeb. Některé spotřeby jsou obsaženy ve více odpovědích, spotřeba 20 GWh je v odpovědích b) a c) a spotřeba 30 GWh je v odpovědích c) a d).

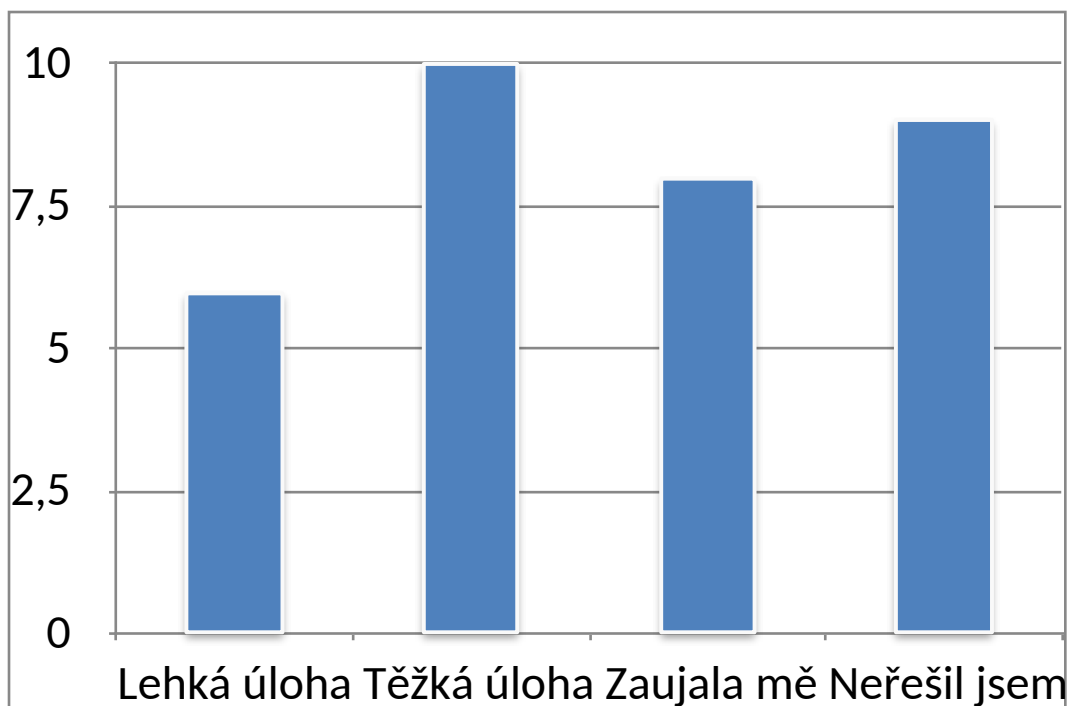
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



10. SLOŽENÝ ZLOMEK

4 body

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Proměnné a , b , c , d ve složeném zlomku byly nahrazeny čtyřmi čísly tísňového volání (hasiči 150, záchranka 155, policie 158, jednotné číslo 112) tak, aby hodnota zlomku byla co největší. Vyber pravdivé tvrzení o řešení této úlohy.

- a) Existuje více správných řešení, ale vždy je v nich číslo policie čitatelem horního zlomku.
- b) Existuje pouze jediné správné řešení.
- c) Správné řešení má hodnotu větší než 2.
- d) **Existuje více správných řešení, číslo policie v nich ale není nikdy čitatelem dolního zlomku.**
- e) Ve všech správných řešeních je číslo záchranky úplně dole.

Analýza zadání: slovní úloha se zaměřuje na práci s aritmeticko-algebraickými symboly. Vyžaduje práci se složeným zlomkem a pochopení jeho vlastností.

Předpokládaný postup řešení: řešitel si nejdříve uvědomí které proměnné nahradí kterým číslem tísňového volání. K tomu mu pomůže, když si složený zlomek převede na

jednoduchý zlomek: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$. Řešitel si uvědomí, že hodnota zlomku je největší, když je

jmenovatel co nejmenší a čítec co největší. Za proměnné a a d tedy zvolí čísla 155 a 158 (nezáleží přitom na pořadí) a za proměnné b a c zvolí čísla 150 a 112 (také nezáleží na

pořadí). Největší možná hodnota zlomku je tedy $\frac{158 \cdot 155}{150 \cdot 112} = \frac{79 \cdot 31}{30 \cdot 56} = \frac{2449}{1680}$. Ted' bude

řešitel sledovat jednotlivé odpovědi a zjišťovat zda obsahují pravdivá tvrzení. Tvrzení v odpovědi a) pravdivé není, je sice pravda, že existuje více správných řešení, ale není pravda, že v nich číslo policie je vždy čitatelem horního zlomku, protože číslo policie by mohlo být i jmenovatelem dolního zlomku. Tvrzení v odpovědi b) není pravdivé, protože existuje více správných řešení. Tvrzení v odpovědi c) není pravdivé, protože číslo $\frac{2449}{1680}$

není větší než 2. Tvrzení v odpovědi d) je pravdivé, protože správných řešení více je a číslo

policie v nich nikdy není čitatelem dolního zlomku. Podívejme se ještě na tvrzení v odpovědi e), které není pravdivé, protože číslo záchranky by mohlo být i úplně nahoře. Správná odpověď je tedy d) existuje více správných řešení, číslo policie v nich ale není nikdy čitatelem dolního zlomku.

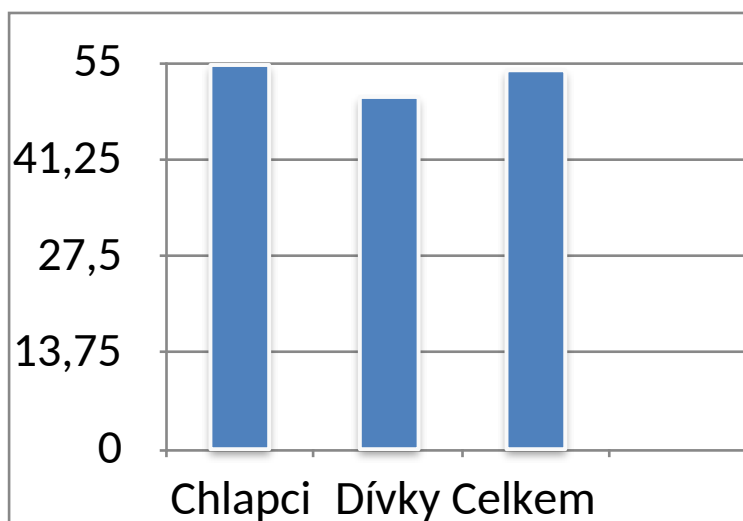
Dominantní metoda řešení: usuzování s oporou o znalosti operací čísel

Úskalí v řešení: bez převedení složeného zlomku na jednoduchý může být úloha náročná.

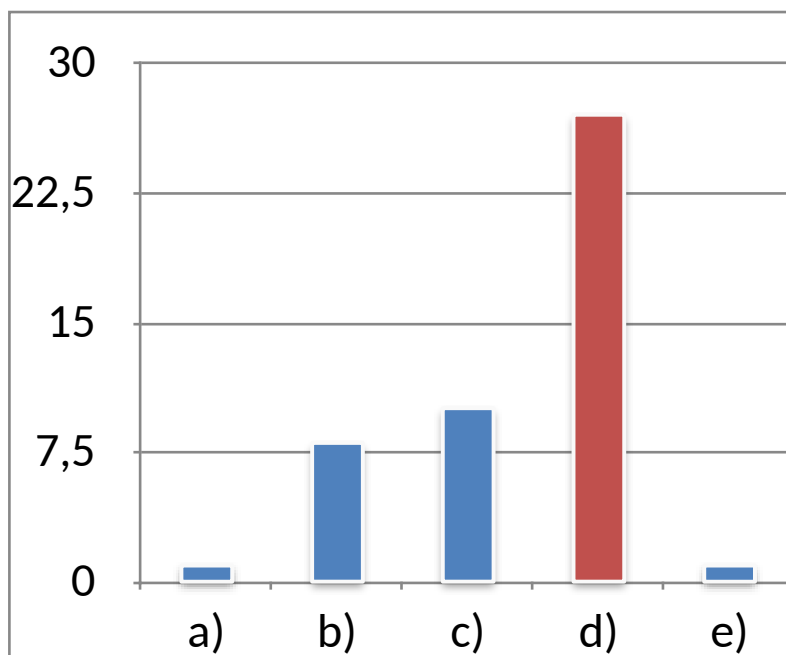
Po převedení je potřeba si uvědomit komutativitu násobení, tedy že existuje více řešení, kdy je hodnota zlomku největší.

Komentář k nabídce odpovědí: odpovědi tvoří jádro této úlohy, věnoval jsem se jim tedy v předpokládaném postupu řešení.

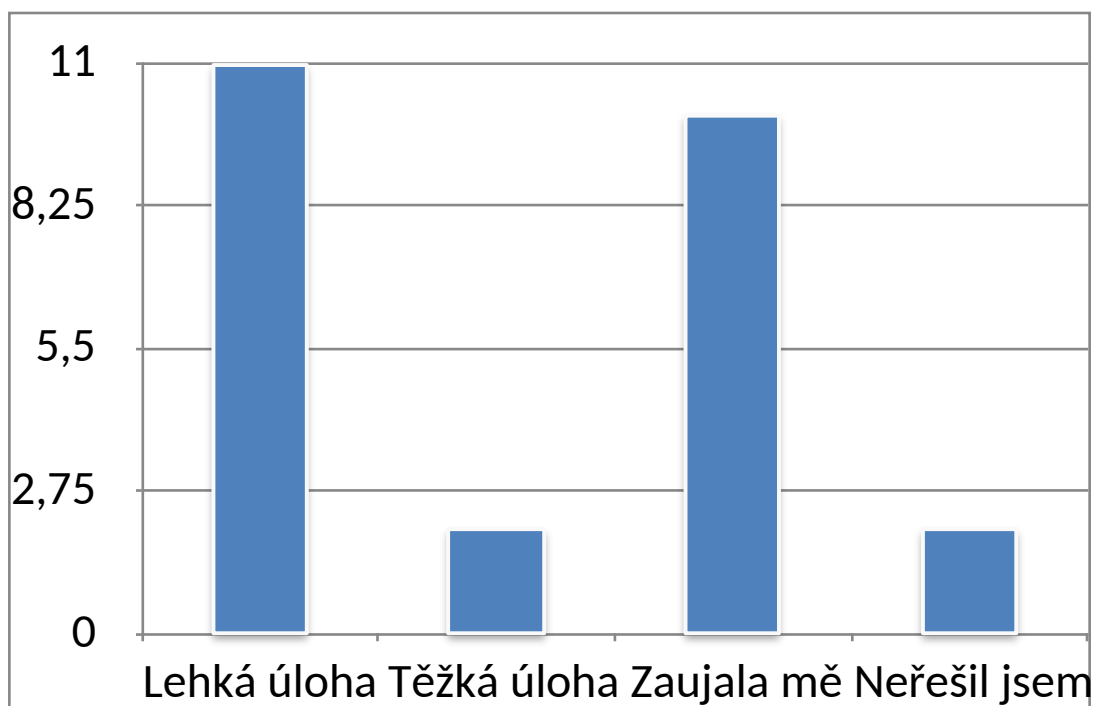
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



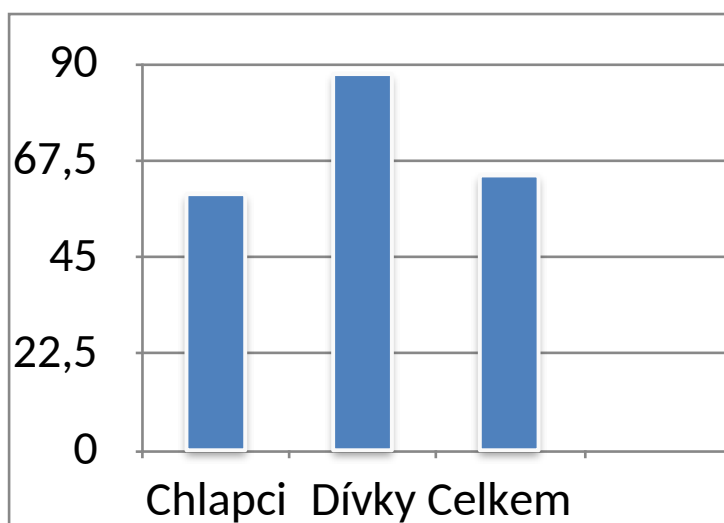
Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



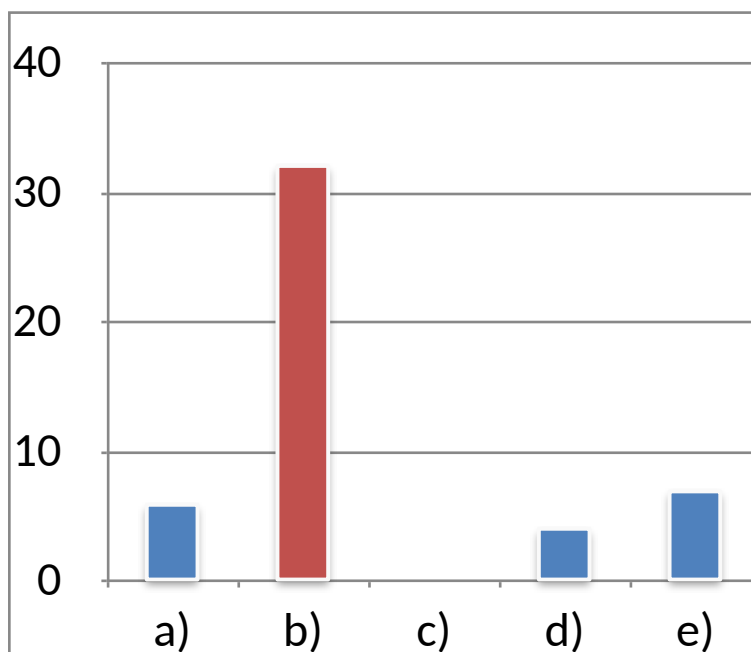
Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



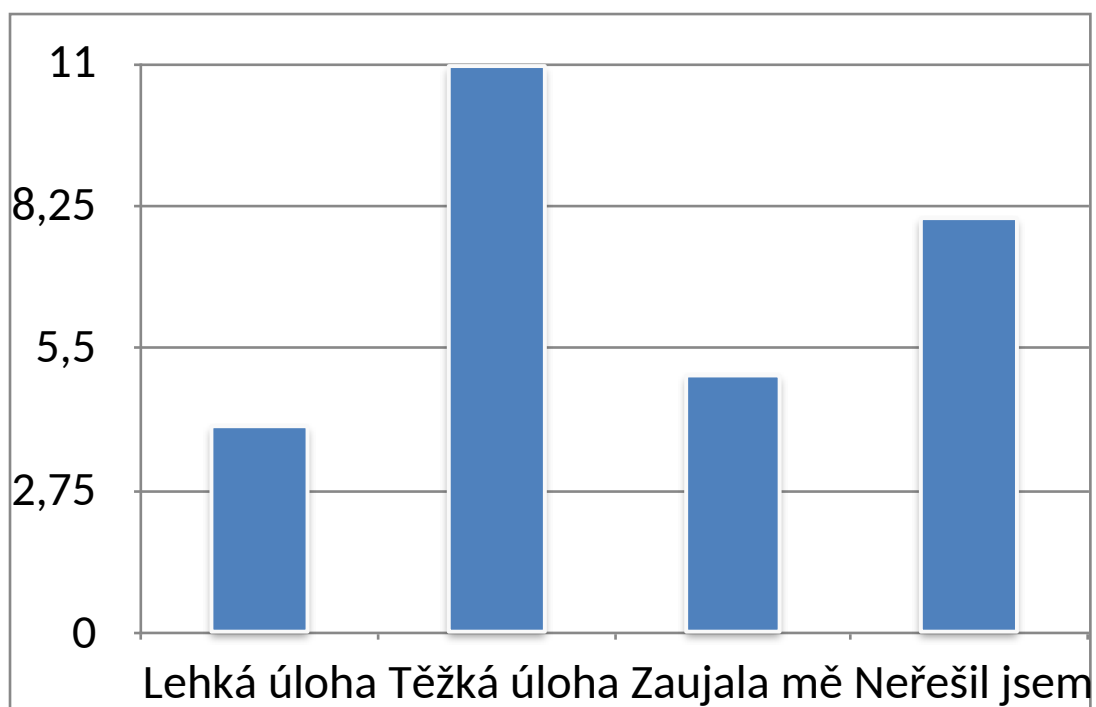
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



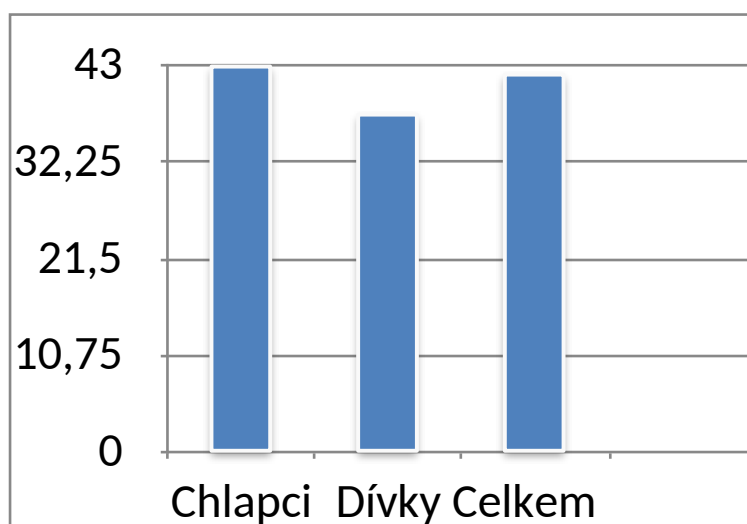
devátého ročníku ZŠ nebo čtvrtého ročníku nižších gymnázií, takže tyto postupy ještě nezná.

Dominantní metoda řešení: řešení v modelu

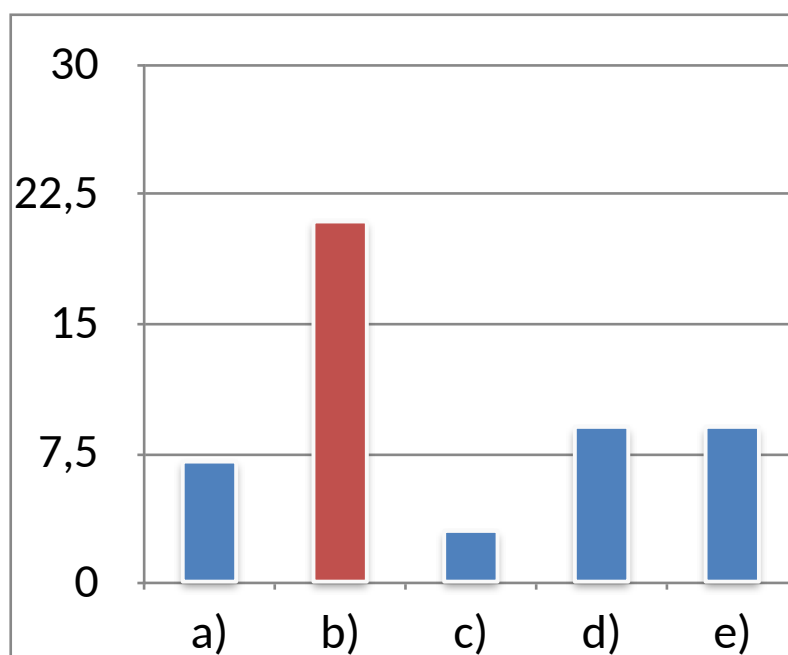
Úskalí řešení: řešitel nebude vědět jak souřadnice bodu W' vypočítat, jeho jediná šance je vyčtení souřadnic z náčrtku.

Komentář k nabídce odpovědí: odpovědi a), c) a d) lze ihned označit za nesprávné podle náčrtku.

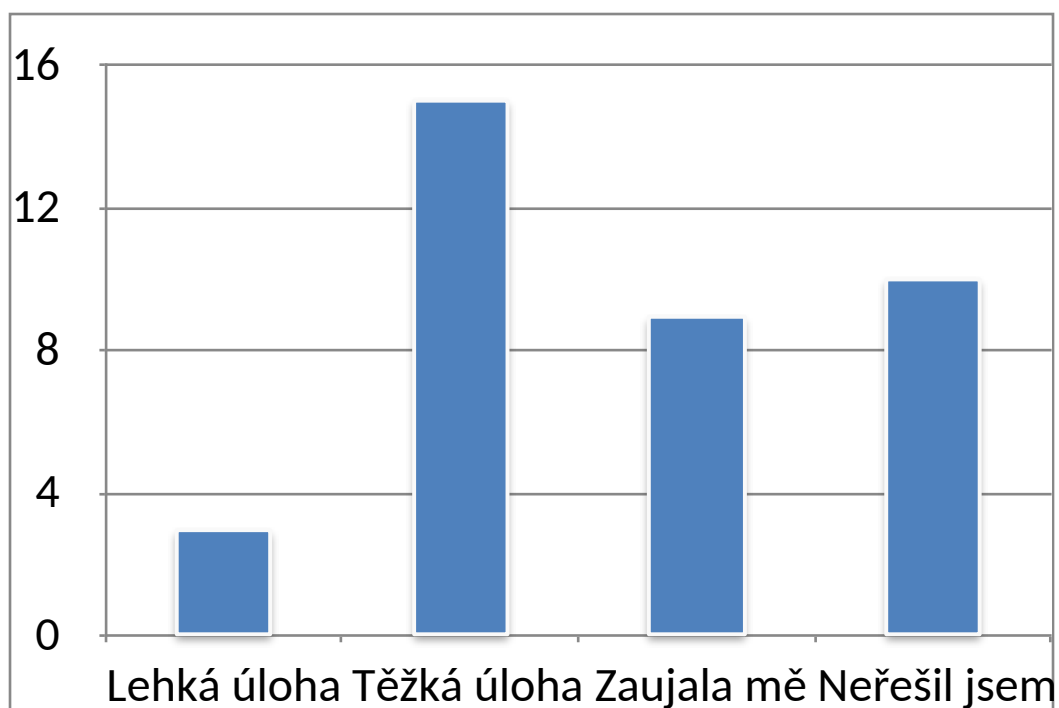
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



13. ZÁCHRANNÉ SBORY

5 bodů

V této úloze vystupuje pět mužů, každý pracuje v jiném záchranném sboru a má jiný oblíbený sport.

Policista se nejmenuje Václav, ale každopádně hraje fotbal nebo hokej. Záchranář hraje ping-pong nebo fotbal a určitě se nejmenuje Cyril. Petr si vždycky rád zahraje basketbal a oblíbeným sportem hasiče je ping-pong. Cyrila neláká cyklistika ani ping-pong. Václav je příznivcem fotbalu nebo hokeje. Marek je už osm let příslušníkem Armády ČR. Člen horské služby nemá zrovna v oblíbenosti cyklistiku. Jeden z mužů se jmenuje Daniel.

Vyber pravdivé tvrzení.

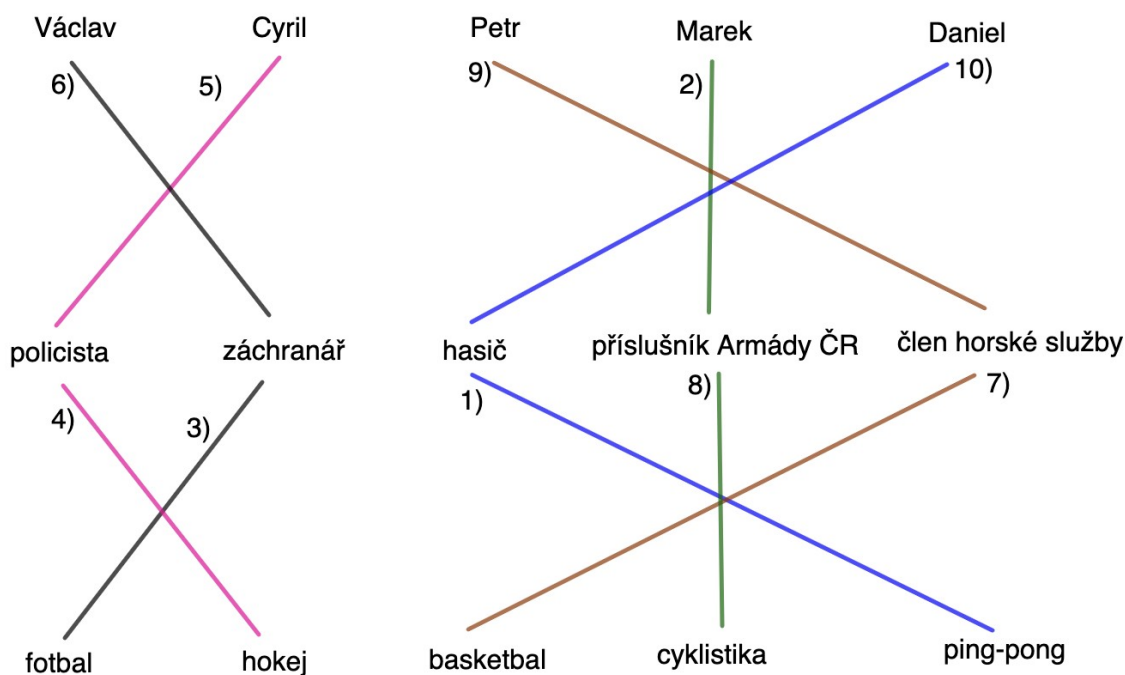
- a) Hasič Cyril má v oblíbenosti cyklistiku.
- b) Policista se jmenuje Petr nebo Václav.
- c) **Člen horské služby rád hraje basketbal.**
- d) Daniel je záchranář.
- e) Oblíbeným Markovým sportem je ping-pong.

Analýza zadání: slovní úloha se zaměřuje na porozumění textu a vztahy mezi informacemi. Úloha je typu zebra (máme množinu prvků, které musíme seskupit tak, aby to vyhovovalo všem podmínkám v zadání). Sice přímo nevyžaduje, abychom našli všechny n-tice prvků, ale k jejímu vyřešení je to potřeba.

Předpokládaný postup řešení: cílem úlohy je z nabídky vybrat pravdivé tvrzení. Některá tvrzení se dají hned zavrhnout, protože v textu zadání je přímo napsán jejich opak, ale některá tvrzení se nedají takto jednoduše potvrdit nebo vyvrátit. Bylo by dobré, pro lepší orientaci, zaznamenat situaci nějak graficky, například vytvořit diagram.

- 1) Můžeme spojit hasiče a ping-pong, protože v textu je přímo napsáno, že oblíbeným sportem hasiče je pingpong.
- 2) Marek je už osm let příslušníkem Armády ČR, takže je můžeme spojit.

- 3) Záchranář hraje ping-pong nebo fotbal, ale ping-pong nehraje, protože hasič hraje ping-pong, takže spojíme záchranáře a fotbal.
- 4) Policista hraje fotbal nebo hokej, ale fotbal nehraje, protože záchranář hraje fotbal, takže spojíme policistu a hokej.
- 5) Cyril nemá rád cyklistiku ani ping-pong, basketbal taky ne, protože Petr hraje basketbal. Cyril také není záchranář, takže nehraje ani fotbal, takže jeho oblíbeným sportem musí být hokej a to znamená, že Cyril je policista.
- 6) Václav je příznivcem fotbalu nebo hokeje, ale hokej je oblíbený sport Cyrila, takže Václavův oblíbený sport je fotbal a to znamená, že Václav je záchranář.
- 7) Na člena horské služby už zbývá ze sportů jenom basketbal a cyklistika, ale cyklistiku nemá zrovna v oblíbě, takže hraje basketbal.
- 8) Pro příslušníka Armády ČR už zbyl jenom jediný sport, a to je cyklistika.
- 9) Petr si vždycky rád zahraje basketbal a to znamená, že je členem horské služby.
- 10) Daniel musí být hasič, protože jiný záchranný sbor už nezbývá.



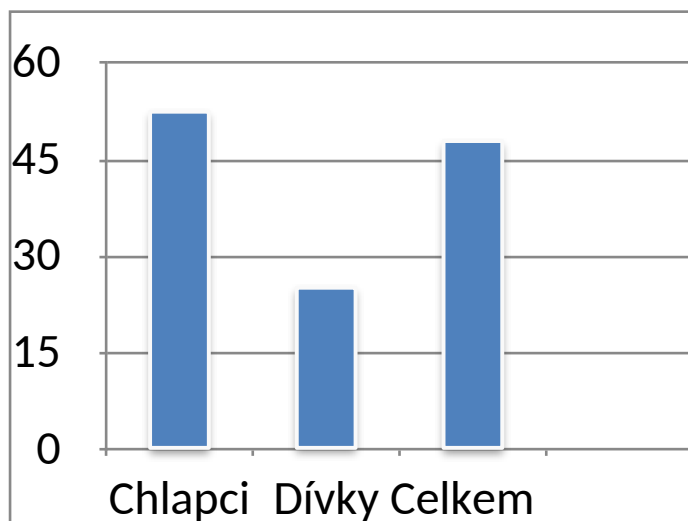
Teď, když máme vytvořený diagram, můžeme sledovat tvrzení v jednotlivých odpovědích a určovat, zda jsou pravdivá, či nikoliv. Z diagramu je vidět, že jediné pravdivé tvrzení obsahuje odpověď c) člen horské služby rád hraje basketbal.

Dominantní metoda řešení: usuzování

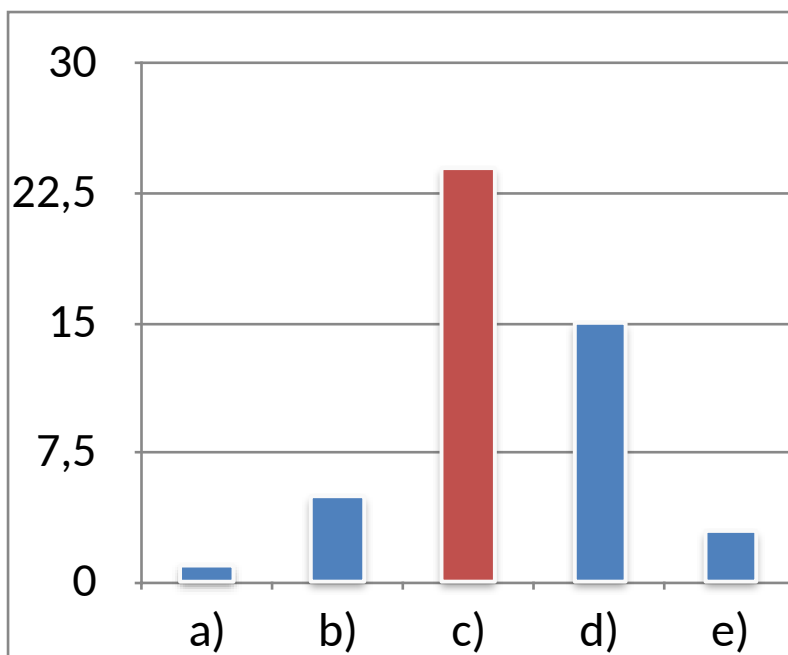
Úskalí v řešení: bez vhodného grafického znázornění je úloha téměř neřešitelná. Sestavení diagramu je pracné a je potřeba si během sestavování uvědomovat informaci z první věty zadání, že každý z mužů pracuje v jiném záchranném sboru a má jiný oblíbený sport.

Komentář k nabídce odpovědí: odpověď a) je na první pohled nesmyslná, přímo v zadání je napsáno, že Cyrila neláká cyklistika. Odpověď b) je také zřejmě nesmyslná, protože přímo v zadání je napsáno, že policista se nejmenuje Václav a Petr si vždycky rád zahraje basketbal, takže nemůže být policista, protože ten každopádně hraje fotbal nebo hokej. Ostatní odpovědi už nelze vyloučit nebo potvrdit tak snadno.

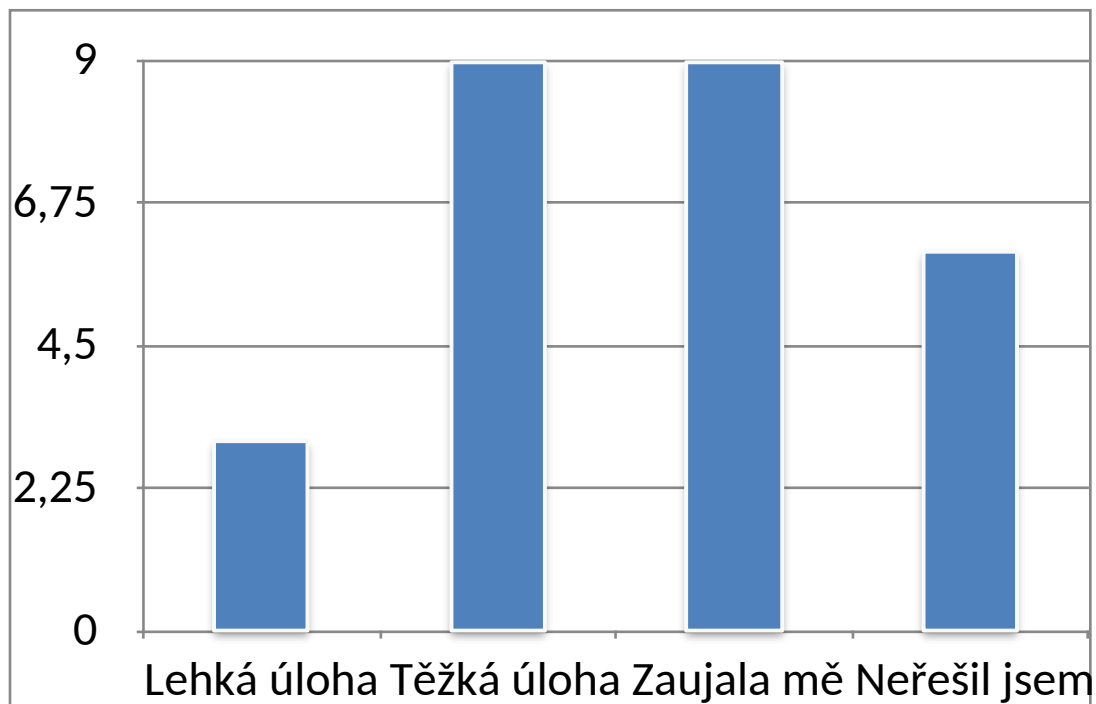
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



14. NÁVŠTĚVA ZOO

5 bodů

Sourozenci Vojta a Johanka se chystají na návštěvu Zoo Praha. Předpověď slibuje poměrně deštivé počasí, většinu času tedy plánují strávit v krytých pavilonech. Navštívit by chtěli: Rákosův pavilon papoušků, pavilon Afrika zblízka, Čambal – pavilon gaviálů, Velemlokárium a pavilon Velkých želv.

Pavilony velemloků a želv stojí vedle sebe, určitě je tedy navštíví hned po sobě. Pavilon Afrika zblízka stojí u brány zoo, navštíví ho tedy jako první, nebo naopak jako poslední. Kolik různých pořadí pavilonů tedy připadá pro Vojtu a Johanku v úvahu?

- a) 12 možností b) 16 možností c) 20 možností
d) **24 možností** e) jiný počet možností

Analýza zadání: slovní úloha se zaměřuje na kombinatoriku

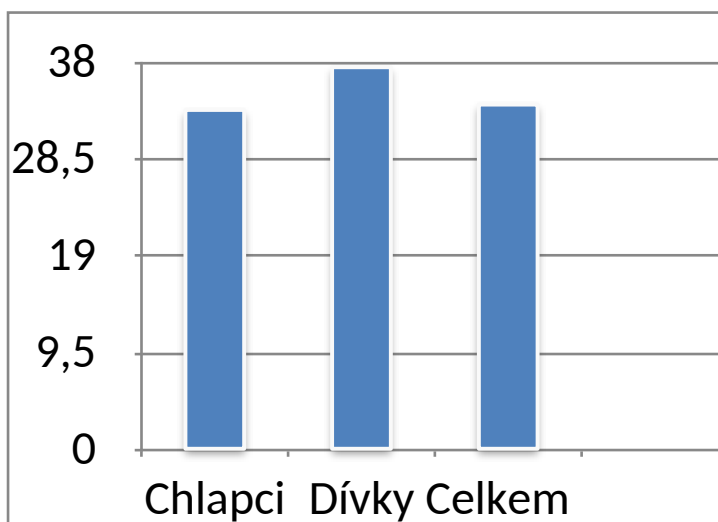
Předpokládaný postup řešení: řešitel si rozdělí pořadí na dvě hlavní situace, buď půjdou sourozenci Vojta a Johanka do pavilonu Afrika jako první, nebo jako poslední. Potom si určí, na jakém místě v pořadí bude pavilon velemloků a pavilon Velkých želv. V každé z dvou hlavních situací jsou tři možnosti, na jakém místě v pořadí bude pavilon velemloků a pavilon Velkých želv. Pokud půjdou do pavilonu Afrika jako první, jsou tři možnosti umístění pavilonu velemloků a pavilonu Velkých želv. Pavilon velemloků a pavilon Velkých želv budou buď na druhém a třetím, třetím a čtvrtém nebo čtvrtém a pátém místě. Ke každé z těchto možností existují ještě čtyři konkrétní realizace pořadí. Nejdříve si určíme zda v dvojici pavilon velemloků a pavilon Velkých želv bude první pavilon velemloků nebo pavilon Velkých želv, to jsou dvě realizace a ke každé z nich existují další dvě realizace, protože po umístění pavilonu Afrika, pavilonu Velemloků a pavilonu Velkých želv zbývají v pořadí dvě volná místa pro Čambal – pavilon gaviálů a Rákosův pavilon papoušků. Pokud Vojta a Johanka půjdou do pavilonu Afrika jako první existuje $3 \cdot 4 = 12$ možností, jak to mohou udělat. Pokud tam půjdou jako poslední, existuje také 12 možností jak to mohou realizovat, to se dá zjistit podobným způsobem. Dohromady tedy existuje $12 + 12 = 24$ různých pořadí pavilonů, která pro Vojtu a Johanku připadají v úvahu, takže správná odpověď je d).

Dominantní metoda řešení: usuzováním

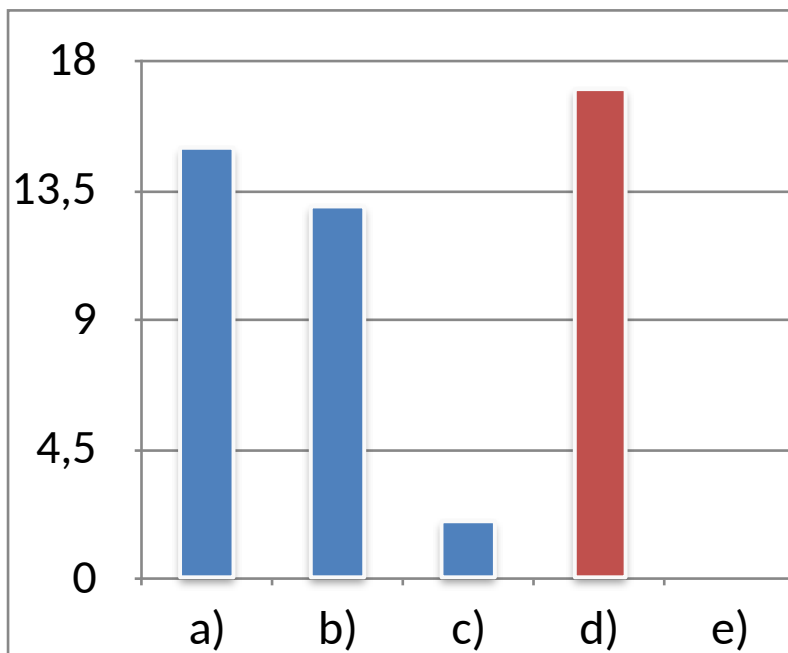
Úskalí řešení: řešitel by si mohl myslet, z první věty druhého odstavce zadání, že Vojta a Johanka musejí jít do pavilonu velemloků před pavilonem velkých želv a vyšlo by mu tak dvakrát méně kombinací.

Komentář k nabídce odpovědí: nejbližší chybná odpověď je odpověď a) 12 možností, protože při správném řešení stačí jenom jednou zapomenout na zdvojnásobení počtu možností a vyjde tato odpověď.

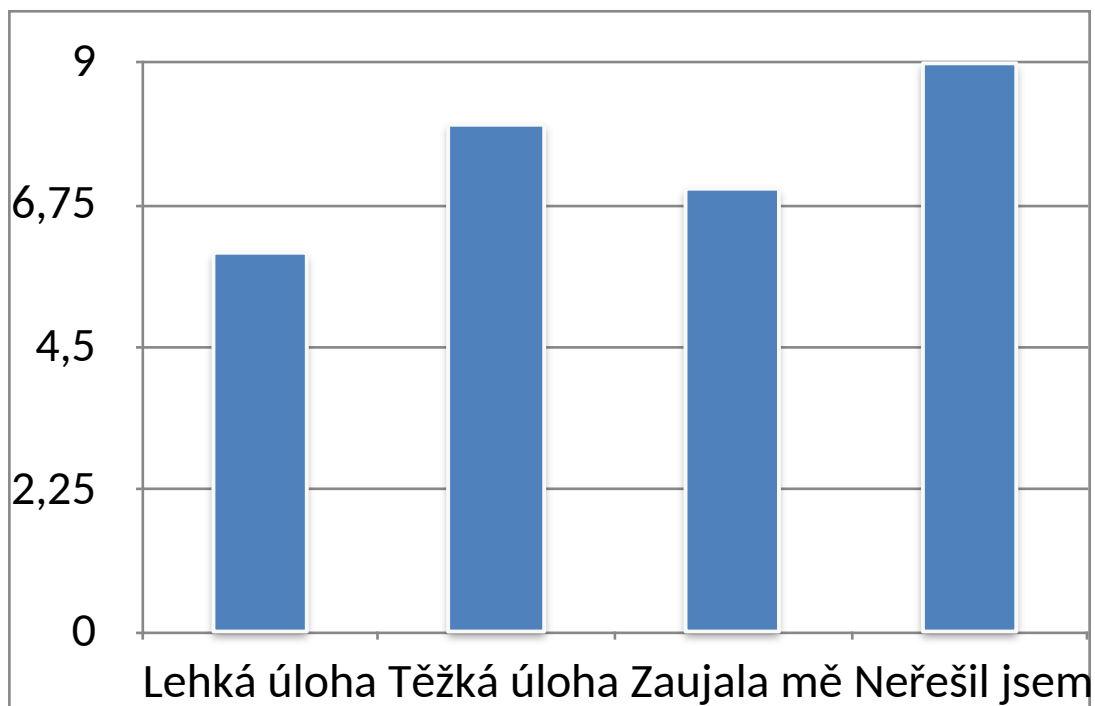
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



15. HASIČSKÝ ŽEBŘÍK

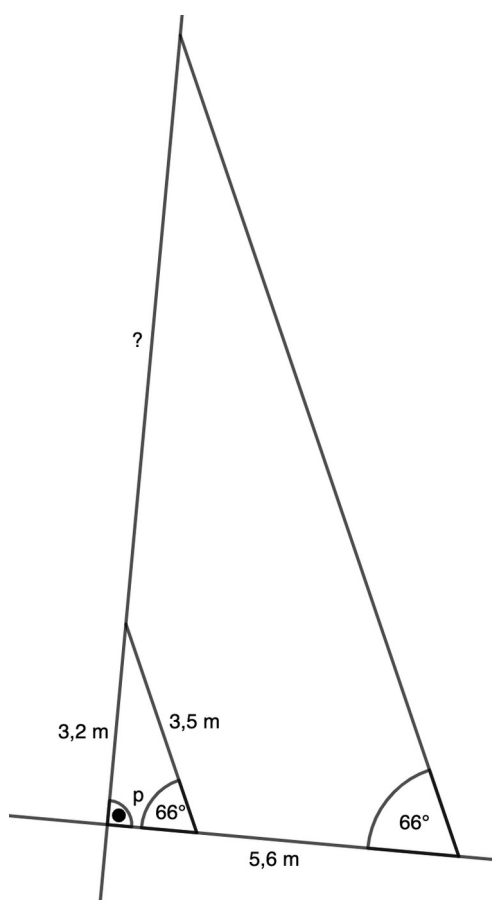
5 bodů

Malý žebřík o délce 3,5 m je opřen o zeď tak, že svírá se zemí úhel 66° a dosahuje do výšky 3,2 m. Do jaké výšky přibližně dosáhne hasičský žebřík, pokud bude opřen o zeď pod stejným úhlem a jeho základna bude od zdi vzdálená 5,6 m?

- a) méně než 11,5 m b) 11,5 – 12 m c) 12 – 12,5 m
d) 12,5 – 13 m e) více než 13 m

Analýza zadání: složená slovní úloha se zaměřuje na prostorovou představivost. Obsahuje jednotky délky a stupně. Zadání obsahuje nadbytečnou informaci, že žebřík svírá se zemí úhel 66° , důležité je jenom to, že oba žebříky jsou opřeny pod stejným úhlem.

Předpokládaný postup řešení: pro začátek by bylo dobré znázornit si zadání úlohy graficky.



Na obrázku jsou dva pravoúhlé trojúhelníky, které jsou si podobné podle věty uu. K vyřešení úlohy je potřeba použít Pythagorovu větu a větu sss o podobnosti trojúhelníků.

Pomocí Pythagorovy věty si vypočítáme délku dolní odvěsny menšího trojúhelníku:

$$\sqrt{3,5^2 - 3,2^2} \text{ m} = \sqrt{12,25 - 10,24} \text{ m} = \sqrt{2,01} \text{ m.}$$

Tedy když známe délky dolních odvěsen u obou trojúhelníků, můžeme určit poměr podobnosti těchto trojúhelníků, který je

$$\frac{5,6}{\sqrt{2,01}}.$$

Do jaké výšky dosáhne hasičský žebřík, zjistíme tak, že výšku, do které dosáhne

malý žebřík, vynásobíme poměrem podobnosti trojúhelníků:

$$\left(3,2 \cdot \frac{5,6}{\sqrt{2,01}}\right) \text{ m} = \frac{17,92}{\sqrt{2,01}} \text{ m} \approx \frac{17,92}{1,4} \text{ m} = 12,8 \text{ m.}$$

Tato hodnota odpovídá odpovědi d)

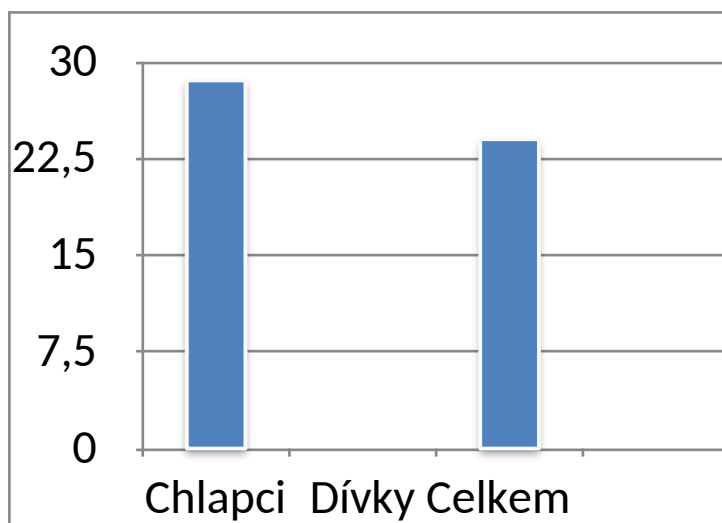
12,5 – 13 m.

Dominantní metoda řešení: práce v modelu a výpočet

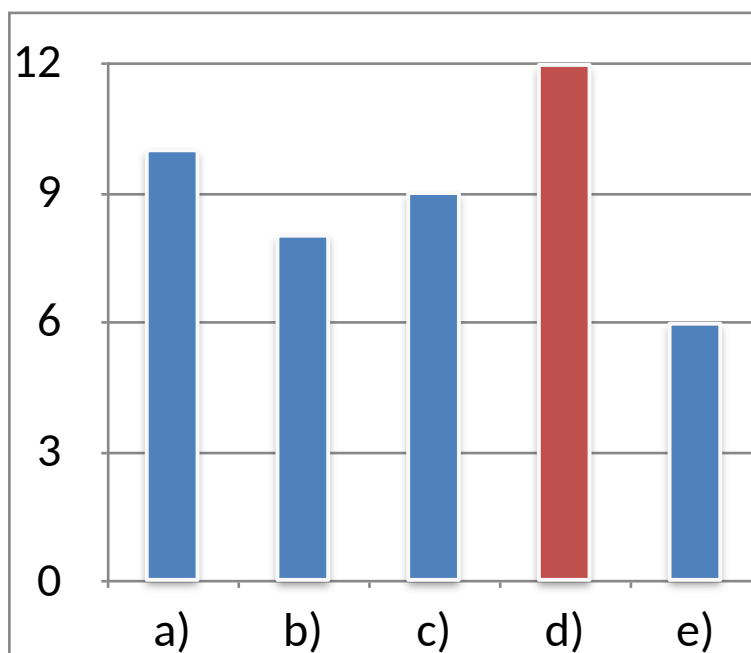
Úskalí řešení: je potřeba si pamatovat Pythagorovu větu, uvědomit si, že se jedná o podobné trojúhelníky a vědět, jak toho využít. Problém by mohl být také odhad hodnoty iracionálního čísla $\sqrt{2,01}$. Pro někoho může být problém danou situaci vůbec převést do geometrické podoby.

Komentář k nabídce odpovědí: nabízené odpovědi se nezdají být volené nějak speciálně, mají spíše nabídnout rozpětí délek. Některé délky jsou obsaženy ve více odpovědích, délka 12 m je v odpovědích b) a c) a délka 12,5 m je v odpovědích c) a d).

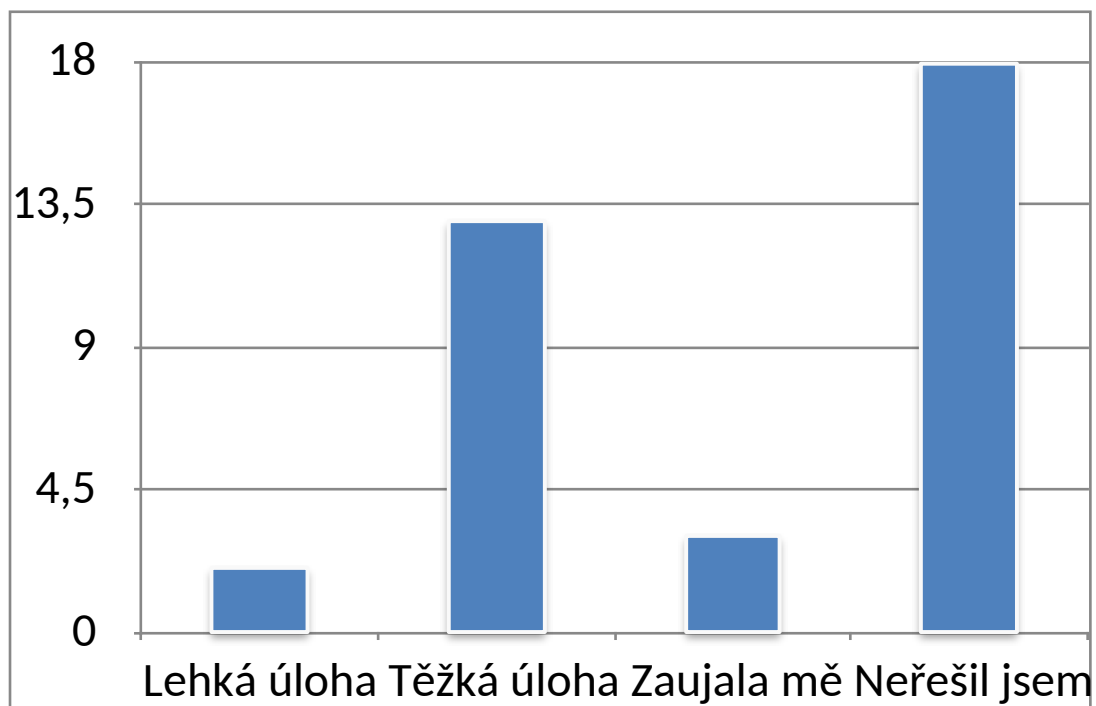
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



16. ČÍSELNÁ OSA

5 bodů

Která dvě čísla z nabídky jsou si na číselné ose nejbliž?

$$\frac{1}{7}; 0,2; \frac{1}{6}; \frac{2}{13}; 0,\bar{2}$$

a) $\frac{1}{7}$ a $0,2$

b) $\frac{1}{7}$ a $\frac{2}{13}$

c) $0,2$ a $0,\bar{2}$

d) $\frac{1}{6}$ a $0,2$

e) $\frac{2}{13}$ a $\frac{1}{6}$

Analýza zadání: slovní úloha se zaměřuje na práci s aritmeticko–algebraickými symboly.

Obsahuje zlomky, desetinná i periodická čísla.

Předpokládaný postup řešení: nejjednodušší postup je sledovat jednotlivé odpovědi a hledat rozdíly čísel v odpovědích. Rozdíl čísel určuje jejich vzdálenost na číselné ose.

U odpovědi, kde bude rozdíl čísel nejmenší, jsou si daná čísla nejbliž na číselné ose.

a) $0,2 - \frac{1}{7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{7}{35} - \frac{5}{35} = \frac{2}{35} = 0,0\overline{571428}$

b) $\frac{2}{13} - \frac{1}{7} = \frac{14}{91} - \frac{13}{91} = \frac{1}{91} = 0,0\overline{10989}$

c) $0,\bar{2} - 0,2 = 0,0\bar{2}$

d) $0,2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{6}{30} - \frac{5}{30} = \frac{1}{30} = 0,0\bar{3}$

e) $\frac{1}{6} - \frac{2}{13} = \frac{13}{78} - \frac{12}{78} = \frac{1}{78} = 0,0\overline{128205}$

Nejmenší z rozdílů je $0,\overline{010989}$ takže správná odpověď je b) $\frac{1}{7}$ a $\frac{2}{13}$.

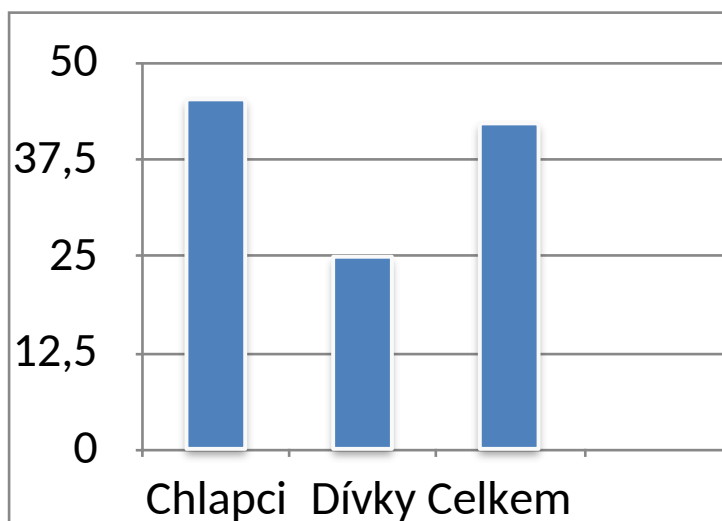
Dominantní metoda řešení: výpočet

Úskalí řešení: v úloze je potřeba pracovat se zlomky a porovnávat je, což ne každý umí, pokud chceme porovnat zlomky, tak si je převedeme na desetinné číslo, což je v této úloze celkem pracné.

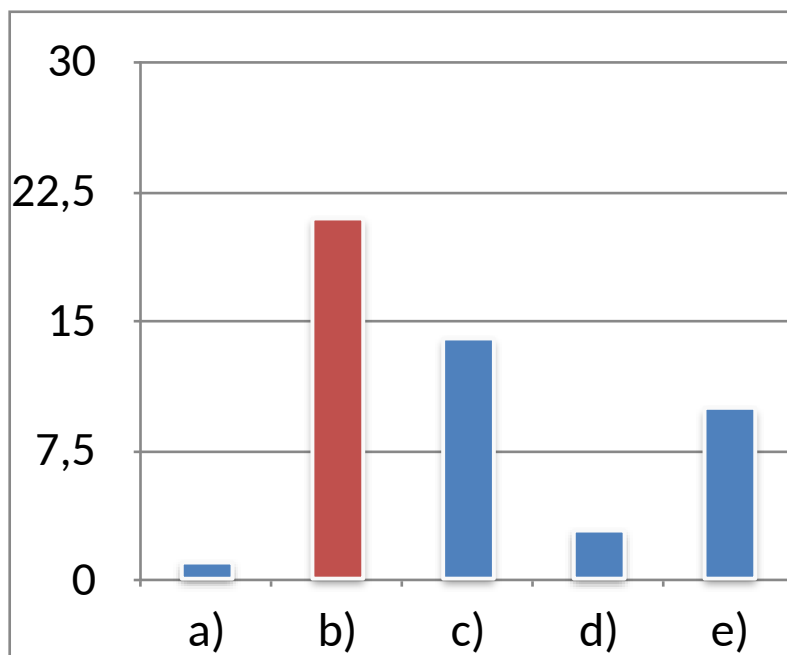
Komentář k nabídce odpovědí: v nabídce odpovědí není žádná odpověď typu „jiná dvě čísla“, díky tomu bylo výhodné se na odpovědi hned zaměřit při řešení. Jediná odpověď, která je na první pohled nesmyslná je odpověď a), kde porovnááme čísla $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{7}$, protože

je jisté, že jejich rozdíl bude větší, než rozdíl čísel v odpovědi d), kde porovnááme čísla $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{6}$.

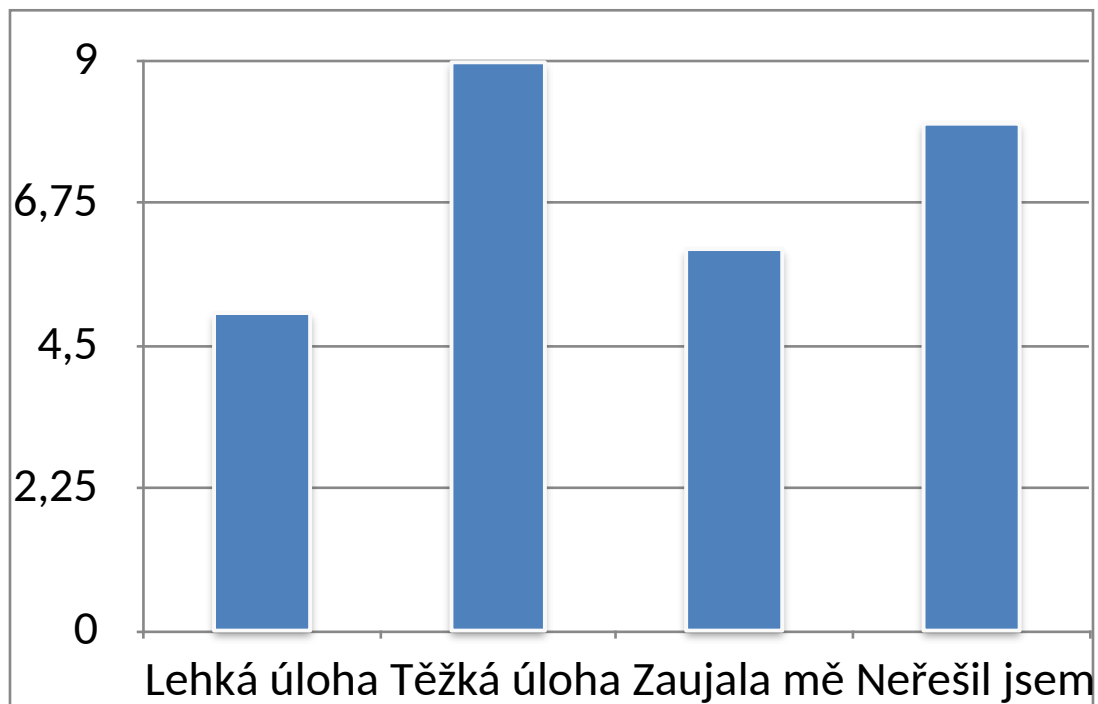
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



17. MAJÁK

6 bodů

Maják na střeše hasičského auta se otáčí rychlostí $\frac{5}{6}$ ot sekundu. Petr a Adam zjistili, že když stojí 20 m od majáku paprsek se přemístí od Petra k Adamovi přesně za 0,4 daleko stojí chlapci od sebe?



Zdroj: <https://bit.ly/390T5ye>

- a) $20\sqrt{3}$ m \approx 34,6 m
- b) $20\sqrt{5}$ m \approx 44,7 m
- c) 15π m \approx 47,1 m
- d) $10\sqrt{10}$ m \approx 31,6 m
- e) 12π m \approx 37,7 m

Analýza zadání: složená slovní úloha se zaměřuje na prostorovou představivost. Obsahuje jednotky délky a času.

Předpokládaná postup řešení: pokud se maják na střeše hasičského auta otáčí rychlostí

$\frac{5}{6}$ otáčky za sekundu a paprsek majáku se přemístí od Petra k Adamovi přesně za 0,4

sekund, potom majáku zabere ($\frac{5}{6} \cdot 0,4$) otáčky, aby se jeho paprsek přemístil od Petra k

Adamovi, což je $\frac{1}{3}$ otáčky. Jedna otáčka je 360° $\frac{1}{3}$ otáčky je tedy 120° . Znáznorníme si situaci graficky.

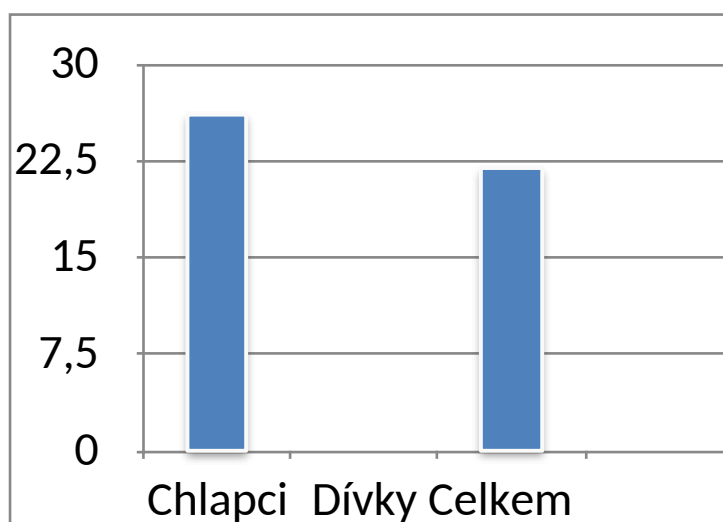
1:2, to znamená, že vzdálenost majáku od úsečky ? je 10 m. Nyní použijeme Pythagorovu větu na pravoúhlý trojúhelník PetrZMaják (mohli bychom i na trojúhelník ZAdamMaják) a vypočítáme polovinu vzdálenosti Petra a Adama: $\sqrt{20^2 - 10^2} \text{ m} = \sqrt{300} \text{ m} = 10\sqrt{3} \text{ m}$. Vzdálenost Petra a Adama je tedy $(2 \cdot 10\sqrt{3}) \text{ m} = 20\sqrt{3} \text{ m}$, což odpovídá odpovědi a).

Dominantní metoda řešení: řešení v modelu a výpočet

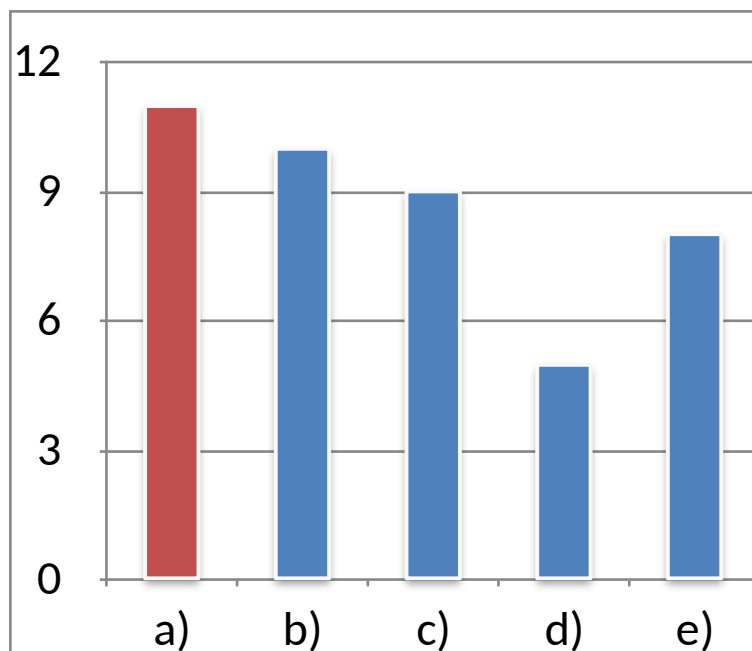
Úskalí řešení: většinu řešitelů pravděpodobně nenapadne doplnit si rovnoramenný trojúhelník na rovnostranný a využít vlastností jeho těžnic a těžiště.

Komentář k nabídce odpovědí: odpovědi b) a c) jsou nesmyslné, protože Petr a Adam od sebe nemohou být vzdáleni více než 40 m (nebyla by dodržena trojúhelníková nerovnost)

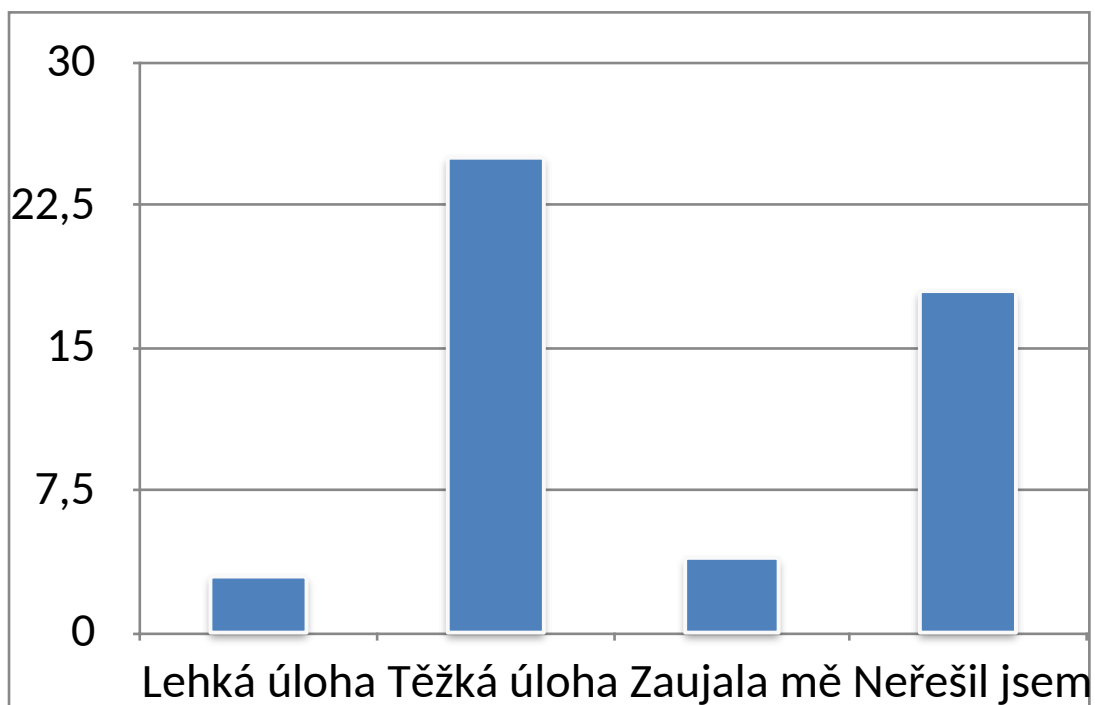
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



18. STEJNÝ JAKO VLASTNÍ POLOVINA?

6 bodů

Urči, pro kterou hodnotu proměnné x je hodnota výrazu $\frac{x^2 - 9}{(x - 1)^2}$ rovna hodnotě poloviny tohoto výrazu.

- a) Takové x neexistuje.
- b) Platí pro $x = 1$.
- c) Platí pro každé reálné x kromě 1 a -1.
- d) Platí pro $x = 3$.
- e) **Platí pro $x = 3$ a -3**

Analýza zadání: úloha se zaměřuje na funkce a funkční myšlení a práci s aritmeticko-algebraickými symboly.

Předpokládaný postup řešení: řešitel si uvědomí, že jediné číslo, které je rovné vlastní polovině je číslo 0, takže stačí zjistit, pro která x se výraz $\frac{x^2 - 9}{(x - 1)^2}$ rovná 0. Zlomek je roven nule, pokud jeho čítec je roven 0. Výraz $x^2 - 9$ je roven nule, pokud x je 3 nebo -3, což odpovídá odpovědi e).

Alternativně může řešitel úlohu řešit rovnicí $\frac{x^2 - 9}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 9}{2(x - 1)^2}$. Vynásobí ji výrazem

$2(x - 1)^2$, vznikne rovnice $2(x^2 - 9) = x^2 - 9$, od té odečte výraz $x^2 - 9$ a dostane rovnici $x^2 - 9 = 0$. Tu buď dořeší, nebo rovnou usoudí, že $x = 3$ a -3 .

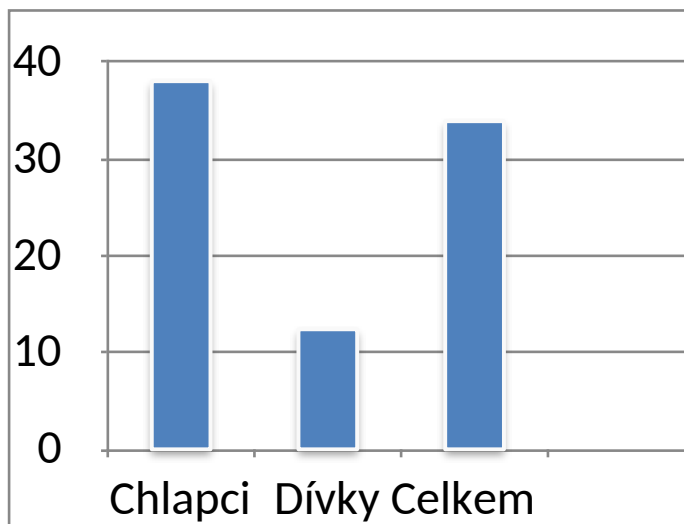
Dominantní metoda řešení: usuzování

Úskalí řešení: řešitele nenapadne, že potřebuje, aby se daný výraz rovnal 0, a pokud ho to napadne, tak si neuvědomí, kdy se zlomek rovná 0.

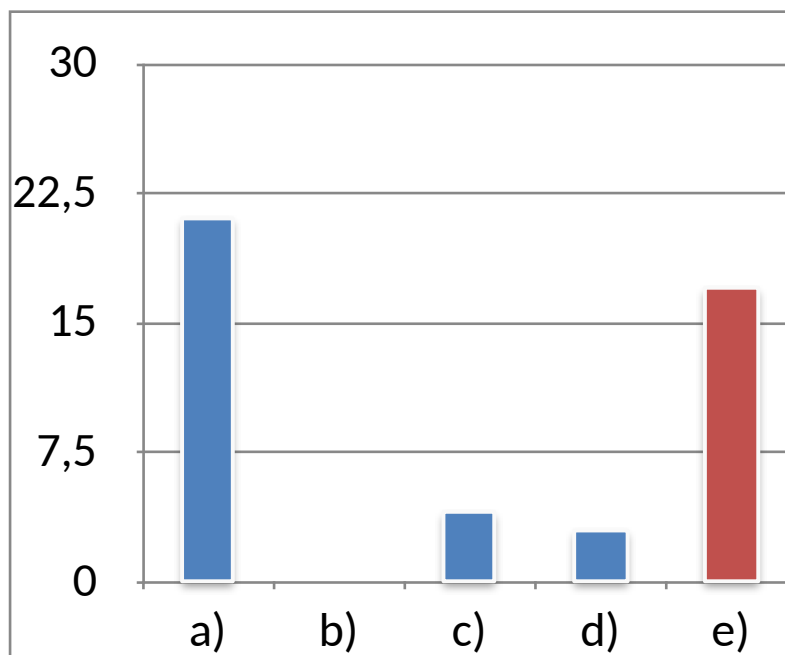
Komentář k nabídce odpovědí: odpověď b) je nesmyslná, protože pro $x = 1$ by výraz ani nedával smysl. Odpověď c) se dá jednoduše vyloučit dosazením libovolného čísla do

rovnice $\frac{x^2 - 9}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 9}{2(x - 1)^2}$. Odpověď d) je nejbližší nesprávná, stačí pouze, aby řešitel zapomněl, že $(-3)^2$ je také 9.

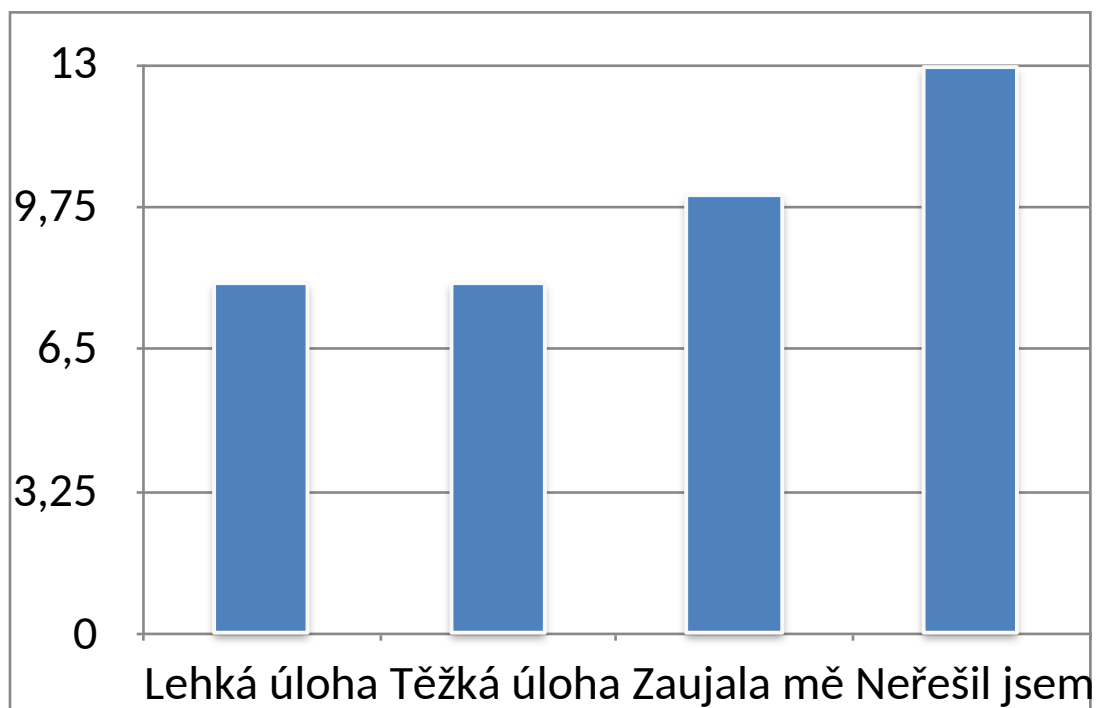
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



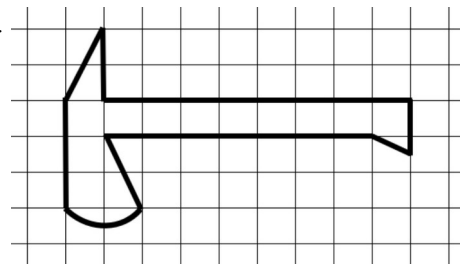
Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



19. OBVOD SEKERY

6 bodů

Urči obvod stylizované hasičské sekery ve čtvercové síti. Délka strany jednoho čtverečku je 1, oblá část sekery je částí obvodu kruhu o poloměru délky úhlopříčky jednoho čtverečku.



- a) $21,5 + 2\sqrt{5} + \sqrt{1,5} + 0,25\pi\sqrt{2}$
- b) $21,5 + 2\sqrt{3} + \sqrt{1,5} + 0,25\pi\sqrt{2}$
- c) $21,5 + 2\sqrt{5} + \sqrt{1,5} + 0,75\pi$
- d) $21,5 + 2\sqrt{3} + \sqrt{1,25} + 0,75\pi$
- e) $21,5 + 2\sqrt{5} + \sqrt{1,25} + 0,5\pi\sqrt{2}$

Analýza zadání: úloha se zaměřuje na prostorovou představivost a čtení z obrázku. Zadání neobsahuje žádné jednotky, ačkoliv počítáme obvod, to může být matoucí pro některé řešitele.

Předpokládaný postup řešení: určíme zvláště délku vodorovných a svislých částí, délku šikmých částí a délku oblé části sekery. Obvod vodorovných a svislých částí je 21,5, to je vidět z obrázku přímo. Délku dvou stejných šikmých částí nahoře a dole vypočítáme pomocí Pythagorovy věty, jedná se vlastně o přeponu pravoúhlého trojúhelníku s délkami odvěsen 1 a 2, délka přepony je tedy $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Délku krátké šikmé části na konci sekery vypočítáme také pomocí Pythagorovy věty, je to přepona v pravoúhlém trojúhelníku s délkami odvěsen 1 a 0,5, její délka tedy je $\sqrt{1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,25}$. Celková délka šikmých částí je $2\sqrt{5} + \sqrt{1,25}$. Oblá část sekery je čtvrtina kružnice s poloměrem délky úhlopříčky jednoho čtverečku, délka úhlopříčky čtverečku je podle Pythagorovy věty $\sqrt{2}$. Délku této části vypočítáme jako obvod kružnice a vydělíme jej čtyřmi:

$\frac{2\pi\sqrt{2}}{4} = 0,5\pi\sqrt{2}$. Celkový obvod sekery je $21,5 + 2\sqrt{5} + \sqrt{1,25} + 0,5\pi\sqrt{2}$, což

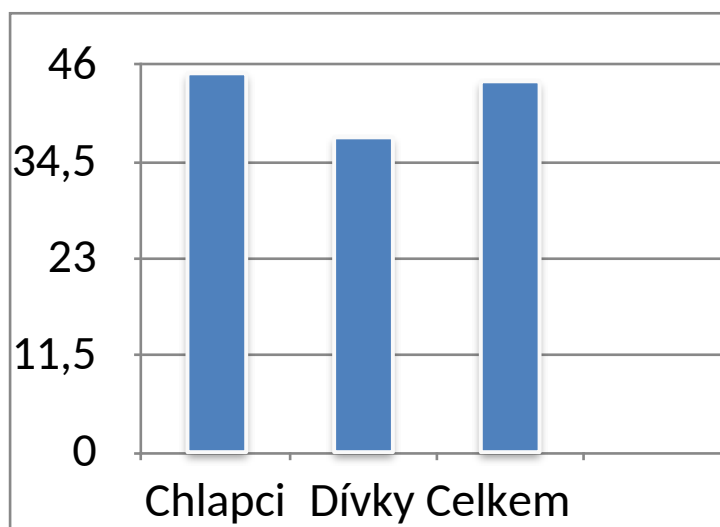
odpovídá odpovědi e).

Dominantní metoda řešení: řešení v modelu a výpočet

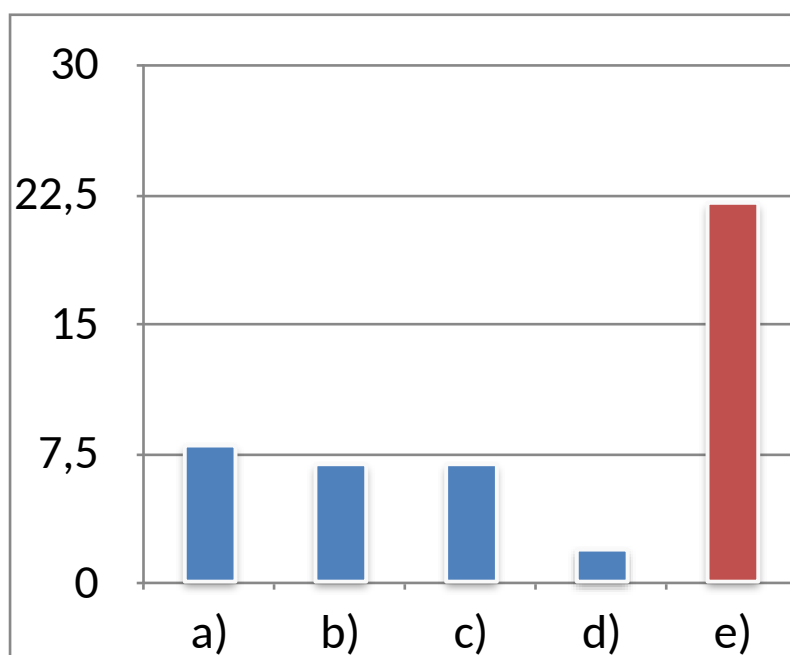
Úskalí řešení: práce s iracionálními čísly, nemožnost části obvodu sečíst. Ne každý si uvědomí, že oblá část sekery je čtvrtinou kružnice.

Komentář k nabídce odpovědí: všechny odpovědi obsahují číslo 21,5, což je délka vodorovných a svislých částí sekery. Délku oblé části sekery není třeba počítat, protože správná délka šikmých částí sekery je uvedena jenom v odpovědi e). Nebo naopak není nutné počítat délku šikmých částí sekery, protože správná délka oblé části sekery je uvedena jenom v odpovědi e).

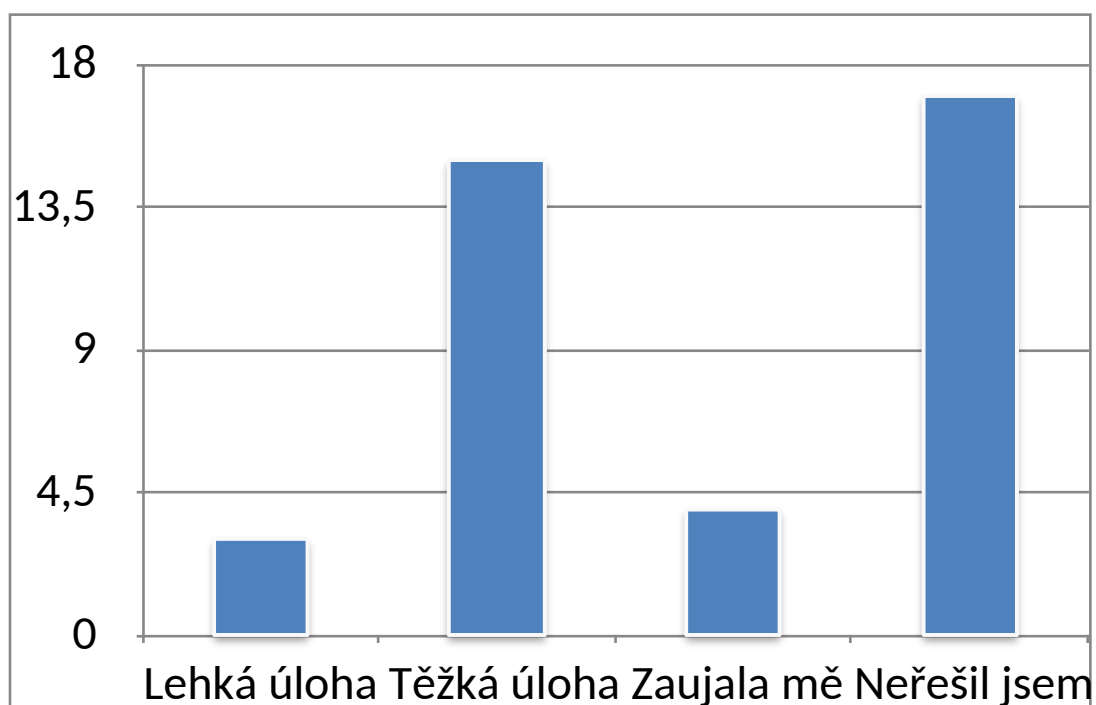
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



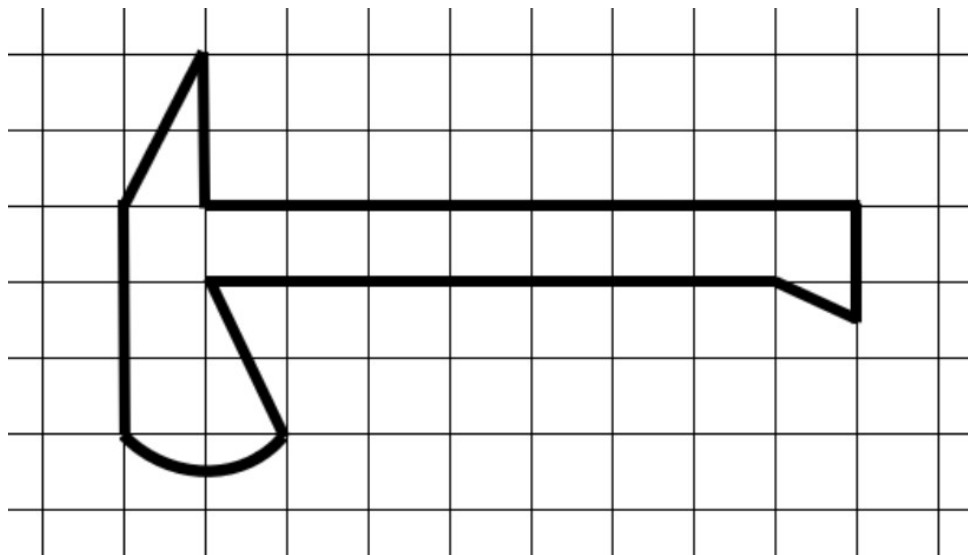
Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



20. OBSAH SEKERY

6 bodů

Urči obsah stylizované hasičské sekery ve čtvercové síti. Délka strany jednoho čtverečku je 1, oblá část sekery je částí obvodu kruhu o poloměru délky úhlopříčky jednoho čtverečku.



a) $\frac{2,25\pi + 49}{4}$

b) $\frac{\pi + 24,5}{2}$

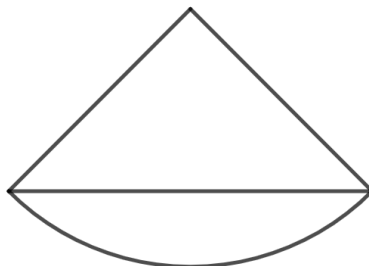
c) $\frac{\pi + 26,5}{2}$

d) $\frac{2,25\pi + 53}{4}$

e) $\frac{1,5\pi + 13,25}{2}$

Analýza zadání: úloha se zaměřuje na prostorovou představivost a čtení z obrázku. Zadání neobsahuje žádné jednotky, ačkoliv počítáme obsah, to může být matoucí pro některé řešitele.

Předpokládaný postup řešení: vypočítat obsah nezaoblených částí sekery je jednoduché, stačí spočítat čtverečky. Obsah nezaoblených částí sekery je $13,25 \text{ } j^2$. Zbývá obsah zaoblené části sekery.



Stačí spočítat obsah této kruhové úseče. Obsah kruhové úseče se vypočítá tak, že vypočítáme obsah kruhové výseče a od něj odečteme obsah trojúhelníku. Tato kruhová výseč je čtvrtinou z celé kružnice (o poloměru $\sqrt{2}$), její obsah je tedy: $\frac{\pi \sqrt{2}^2}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Trojúhelník má stranu dlouhou 2 a výšku na tu stranu má dlouhou 1, takže jeho obsah je 1.

Obsah kruhové úseče je $\frac{\pi}{2} - 1$. Obsah sekery je $13,25 + \frac{\pi}{2} - 1 = 12,25 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi + 24,5}{2}$,

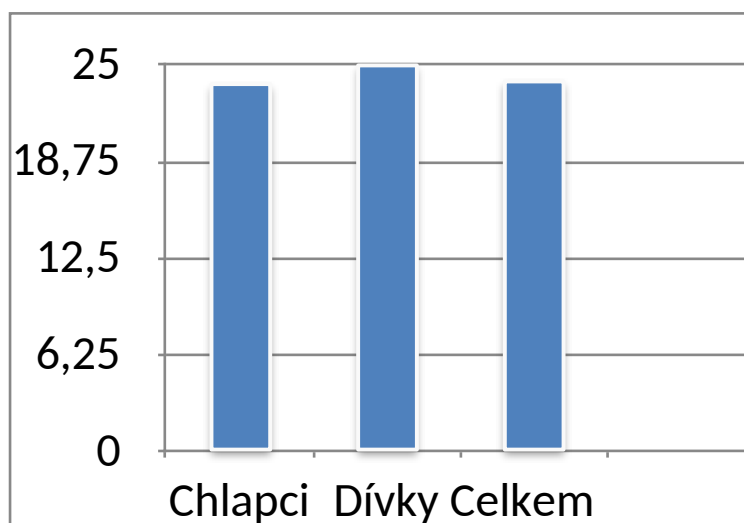
což odpovídá odpovědi b).

Dominantní metoda řešení: řešení v modelu a výpočet

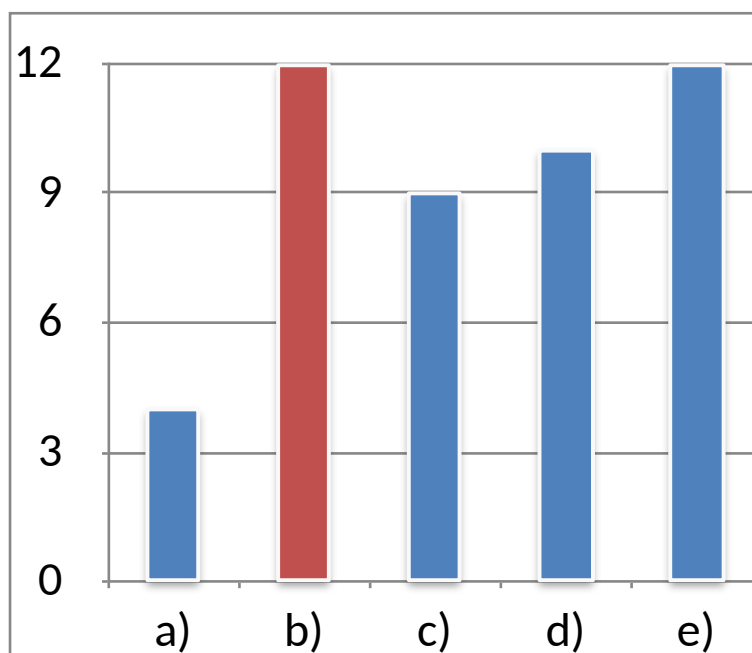
Úskalí řešení: práce s iracionálními čísly. Ne každý si uvědomí, jak vypočítat obsah kruhové úseče.

Komentář k nabídce odpovědí: odpověď c) je blízkou chybnou odpovědí, protože stačí při výpočtu kruhové úseče zapomenout odečíst obsah trojúhelníku a vyjde $\frac{\pi + 26,5}{2}$.

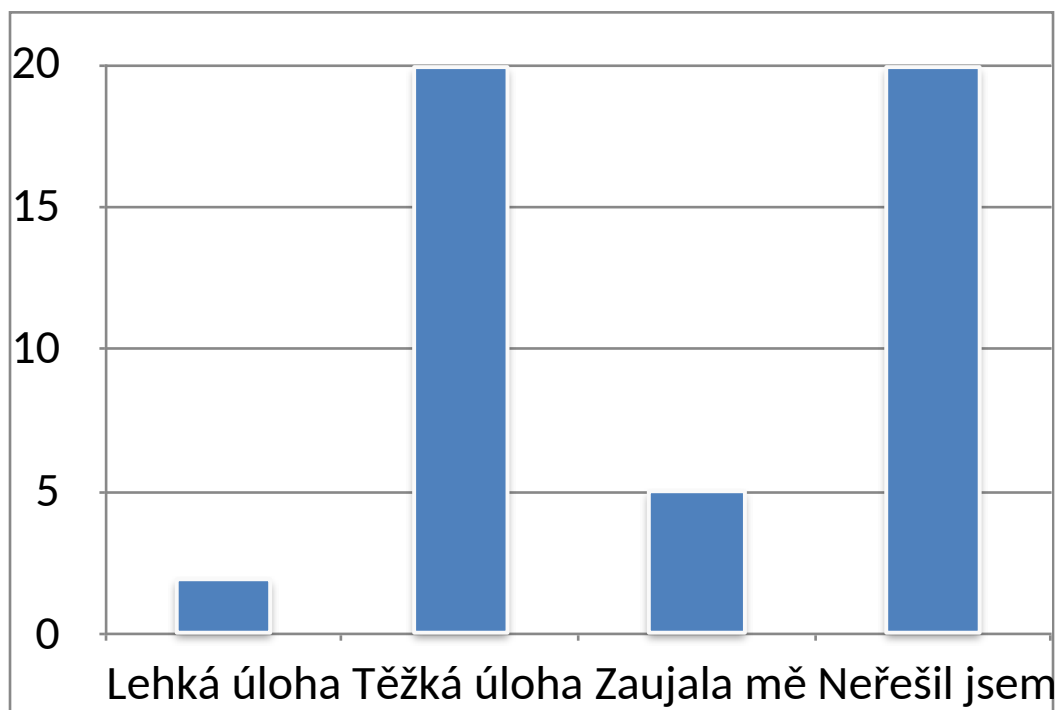
Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



Graf znázorňující oblibu jednotlivých úloh:



21. MRAVENCÍ

6 bodů

Známe mravence, kteří žijí v mraveništích. V jedné takové stavbě může žít několik set tisíc až milion mravenců. Na našem území jsou mravenci, kteří dosahují délky zpravidla 2-4 mm. Dejme tomu, že máme mraveniště s 600 000 mravenci, kteří měří na délku 4 mm. Z kolika nejméně takových mravenišť by mravenci vytvořili souvislý zástup na prázdné silnici z Olomouce přes Brno do Prahy? Z Olomouce přes Brno do Prahy je to přibližně 270 km.

- a) 24
- b) 72
- c) 94
- d) **113**
- e) 154

Analýza zadání: slovní úloha se zaměřuje na porozumění textu a vztahy mezi informacemi, obsahuje jednotky vzdálenosti a vyžaduje převody mezi nimi. Vyžaduje práci s velkými čísly.

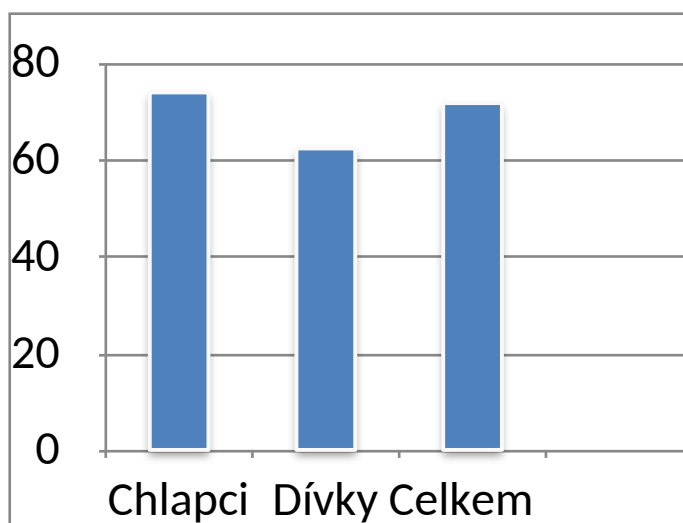
Předpokládaný postup řešení: řešitel nejdříve spočítá kolik měří dohromady všichni mravenci z jednoho mraveniště, to je $(4 \cdot 600\,000)$ mm = 2 400 000 mm. Tuto délku si převede na kilometry, $2\,400\,000$ mm = 2,4 km. Touto délkou vydělí vzdálenost z Olomouce do Prahy, $270 : 2,4 = 112,5$. Tento výsledek zaokrouhlíme nahoru na jednotky, protože počet mravenišť je přirozené číslo a nesmíme vzít méně mravenišť, protože by to nevystačilo. Správná odpověď je tedy d) 113.

Dominantní metoda řešení: výpočet

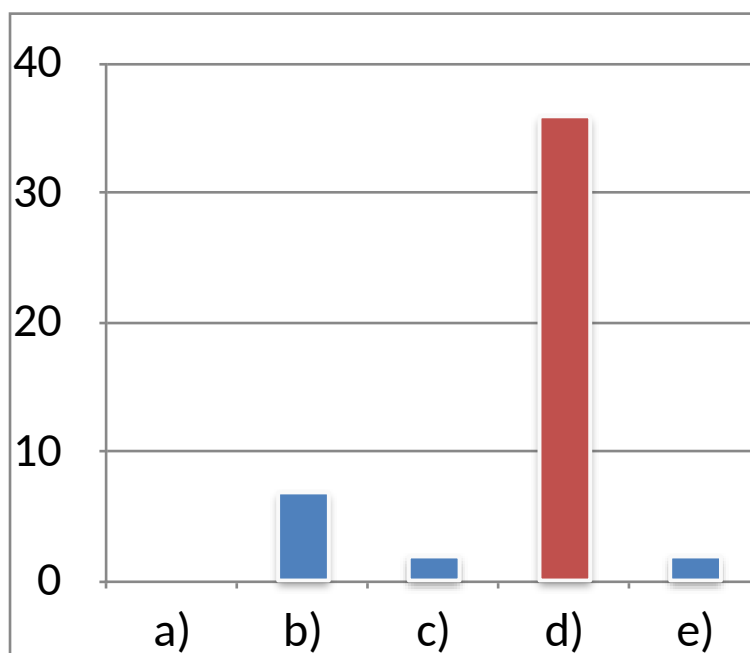
Úskalí v řešení: problém by mohlo být správně převést jednotky, $1\text{ km} = 1\,000\,000\text{ mm}$.

Komentář k nabídce odpovědí: nevím, jak by někdo mohl dojít k nesprávným nabízeným odpovědím.

Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



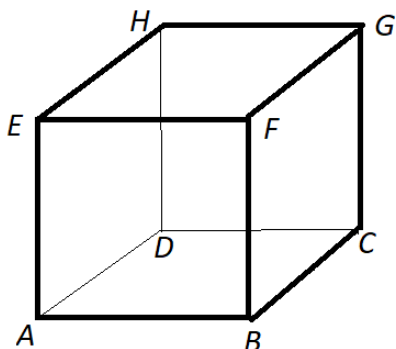
Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



22. KRYCHLE

6 bodů

V krychli ABCDEFGH o délce hrany $\sqrt{2}$ cm určete, které tvrzení platí o čtyřúhelníku BDHF:



- a) Je to kosodélník, jeho obvod je $(2 + \sqrt{2})$ cm.
- b) Je to kosočtverec, jeho obvod je 8 cm.
- c) Je to obdélník, jeho obsah je $2\sqrt{2}$ cm².
- d) Je to kosodélník, jeho obsah je menší než $2\sqrt{2}$ cm².
- e) Je to obdélník, jeho obvod je větší než 8 cm.

Analýza zadání: úloha se zaměřuje na prostorovou představivost. Je to stereometrická úloha. Obsahuje jednoty délky a obsahu.

Předpokládaný postup řešení: řešitel bude sledovat tvrzení v jednotlivých odpovědích a určovat, zda jsou pravdivá, či nikoliv. Tvrzení v odpovědi a) pravdivé není, čtyřúhelník BDHF není kosodélník, protože jeho strany svírají pravý úhel a jeho obvod není $(2 + \sqrt{2})$ cm. Délku strany BD lze vypočítat pomocí Pythagorovy věty, $\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2}$ cm = $\sqrt{4}$ cm = 2 cm, takže obvod čtyřúhelníku BDHF je $2 \cdot (2 + \sqrt{2})$ cm = $(4 + 2\sqrt{2})$ cm. Tvrzení v odpovědi b) pravdivé není, protože čtyřúhelník BDHF není ani kosočtverec, ani nemá obvod 8 cm. Tvrzení v odpovědi c) pravdivé je, protože čtyřúhelník BDHF je obdélník a jeho obsah je $\sqrt{2}$ cm². Tvrzení

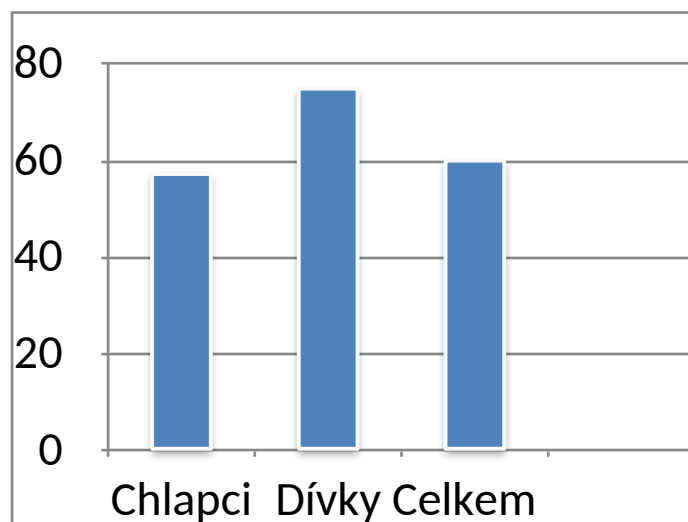
v odpovědi d) není pravdivé, protože čtyřúhelník BDHF není kosodélník a jeho obsah není menší než $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Tvrzení v odpovědi e) pravdivé není, čtyřúhelník BDHF je sice obdélník, ale jeho obvod není větší než 8 cm. Správná odpověď je tedy c).

Dominantní metoda řešení: práce v modelu a výpočet

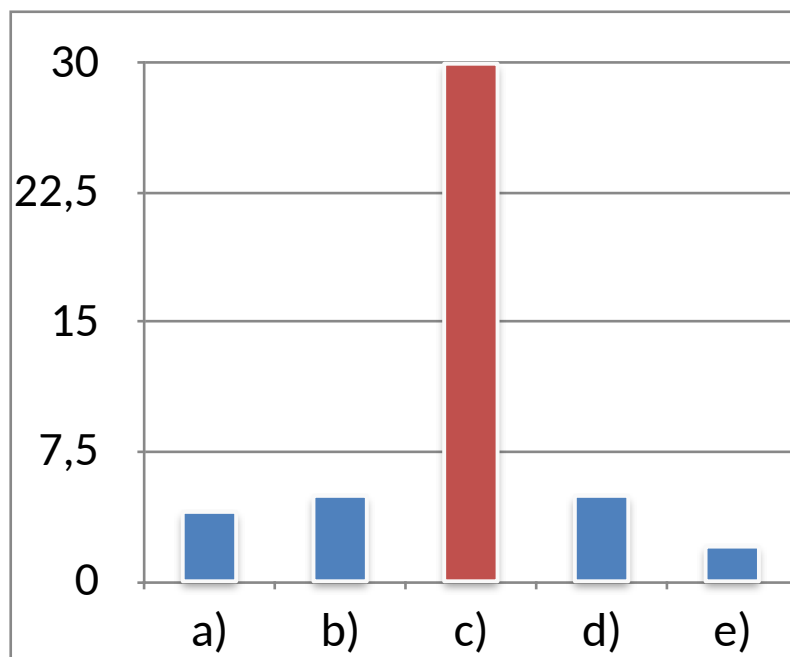
Úskalí v řešení: nutnost uvědomit si tvar čtyřúhelníku BDHF

Komentář k nabídce odpovědí: odpovědím jsem se věnoval v postupu řešení. Nejbližší chybná odpověď je e), protože je částečně pravdivá v tom, že čtyřúhelník BDHF je obdélník.

Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



23. PÁSEK

6 bodů

Pásek je poskládán z dílků dvou barev. Jejich sled sledujeme zleva doprava. Vidíme jen 14 dílků (velké, malé natočené vpravo jako je první trojúhelník v pásku, nebo vlevo).

Na kolikátém místě bude velký modrý trojúhelník, který je nejbliž za 135. dílkem?



- a) 136
- b) 137
- c) 138
- d) 139
- e) **140**

Analýza zadání: úloha se zaměřuje na čtení informací z obrázku a prostorovou představivost.

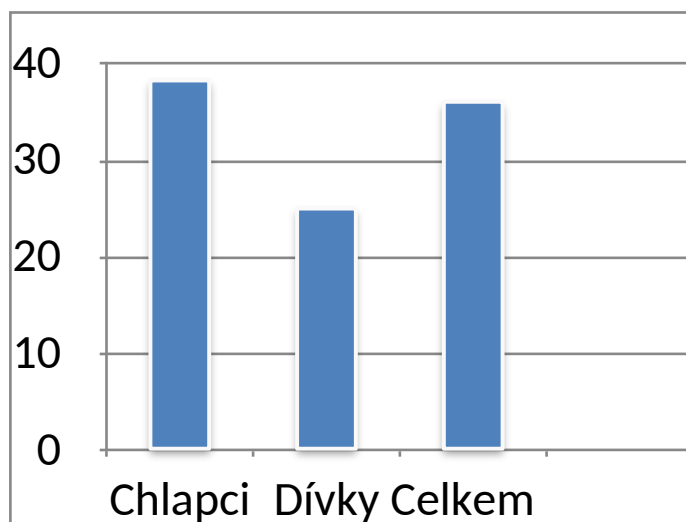
Předpokládaný postup řešení: řešitel nejdříve zjistí jak vypadá 135. dílek. Víme, že dílky se vždy po šesti dílcích začnou opakovat, odečteme tedy od 135 takový násobek šesti, abychom dostali číslo menší než sedm, $135 - 22 \cdot 6 = 3$. Takže 135. dílek je stejný jako 3. dílek, takže je oranžový a natočený vlevo. Velký modrý trojúhelník následuje jako pátý po malém oranžovém trojúhelníku natočeném vlevo, to znamená, že bude jeho pořadí bude $135 + 5 = 140$, je to 140. dílek, takže správná odpověď je e).

Dominantní metoda řešení: práce v modelu

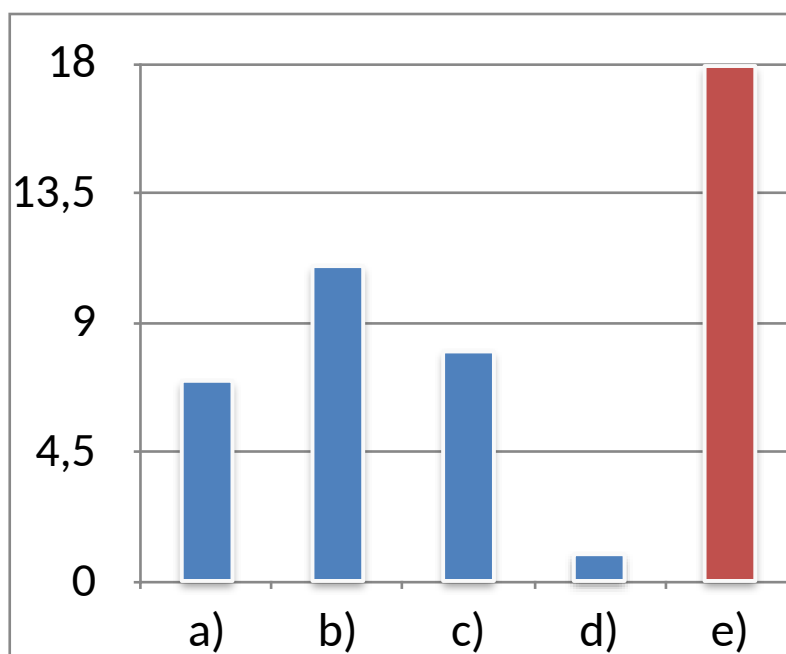
Úskalí řešení: pořadí chtěného trojúhelníku je dostatečně vysoké, takže si řešitel nemůže celou situaci nakreslit a musí uvažovat.

Komentář k nabídce odpovědí: v úloze je pouze 6 typů dílků, je tedy 6 možností umístění nejbližšího velkého modrého trojúhelníku. V nabídce odpovědí jsou skoro všechny možnosti. Není tam žádná úplně nesmyslná odpověď.

Graf znázorňující procentuální úspěšnost úlohy:



Graf znázorňující četnost voleb jednotlivých odpovědí:



2.2. Porovnání dat z rozboru úloh a rozboru oblíbenosti a úspěšnosti řešení

V této kapitole se pokusím o rozbor získaných dat a jejich interpretaci.

2.2.1. Porovnání úspěšností chlapců a dívek

Podívejme se nejprve na rozdíly v úspěšnosti řešení mezi chlapci a dívkami. Souhrn úspěšností chlapců a dívek je v tabulce 2.1.

Tabulka 2.1

Úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Chlapci	66,67	83,33	85,67	71,33	90,5	52,5	35,75	66,75	40,5	54,75	59,6
Dívky	50	75	87,67	62,67	100	37,5	37,5	87,5	12,5	50	87,6

Úlohy	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Chlapci	42,8	52,4	33,4	28,6	45,2	26,17	38,17	45,17	23,83	73,83	57,17	38,17
Dívky	37,6	25	37,6	0	25	0	12,5	37,5	25	62,5	75	25

Největší rozdíl v úspěšnosti mezi chlapci a dívkami ve prospěch chlapců byl u úloh 9, 13, 15, 17 a 18. Největší rozdíl v úspěšnosti mezi chlapci a dívkami ve prospěch dívek byl u úloh 8, 11 a 22.

Pomocí aritmetického průměru zjistíme, že chlapci měli průměrnou úspěšnost u úlohy 52,7 %, průměrný chlapec tedy vyřešil správně přibližně 12 úloh. U dívek byla průměrná úspěšnost u úlohy 45,7 %, průměrná dívka tedy vyřešila správně přibližně 10,5 úloh. Lze tedy říci, že chlapci devátého ročníku ZŠ a čtvrtého ročníku nižších gymnázií byly ve finále soutěže Pangea úspěšnější než dívky. Mohlo by to být způsobeno vyšší soutěživostí u chlapců, jejich vyšší ochotou riskovat nebo tím, že většina soutěžních úloh byla netypických, nedalo se na ně dopředu připravit a chlapci jsou zdatnější v improvizaci než dívky.

2.2.2. Vztah mezi bodovým ohodnocením úlohy a její obtížností

Podívejme se na průměrnou úspěšnost úloh za jednotlivé počty bodů a na počty jejich označení za nejtěžší úlohu v dotazníku oblíbenosti. Údaje jsou shrnuty v tabulce 2.2.

Tabulka 2.2

Úloha	Zaměření úlohy	Počet bodů	Úspěšnost	Nejtěžší úloha
1. VRTULNÍK	Text, vztahy mezi informacemi, jednotky měření, čas	3	64 %	5
2. RADAR	Čtení z grafu/diagramu, jednotky měření	3	82 %	1
3. SPĚCHEJ POMALU	Funkce/funkční myšlení, čtení z grafu/diagramu, jednotky měření, čas	3	86 %	1
4. PODLE PRAVIDEL	Čtení z grafu/diagramu, podmínky v zadání	3	70 %	1
5. OBLIBA TELEVIZNÍCH STANIC	Text, vztahy mezi informacemi, podmínky v zadání	4	92 %	1
6. SOCIÁLNÍ SÍŤ	Text, vztahy mezi informacemi	4	50 %	2
7. DIAGRAM	Čtení z grafu/diagramu	4	36 %	6
8. GOOGLE POPRVÉ	Text, vztahy mezi informacemi, jednotky měření, čas	4	70 %	6
9. GOOGLE PODRUHÉ	Text, vztahy mezi informacemi, jednotky měření, čas	4	36 %	10
10. SLOŽENÝ ZLOMEK	Práce s aritmeticko-algebraickými symboly	4	54 %	2
11. ČÍSLA TÍSŇOVÉHO VOLÁNÍ	Text, vztahy mezi informacemi	5	64 %	11
12. TROJÚHELNÍK BMW	Prostorová představivost	5	42 %	15
13. ZÁCHRANNÉ SBORY	Text, vztahy mezi informacemi, podmínky v zadání	5	48 %	9
14. NÁVŠTĚVA ZOO	Kombinatorika	5	34 %	8
15. HASIČSKÝ ŽEBŘÍK	Prostorová představivost, jednotky měření	5	24 %	13

Úloha	Zaměření úlohy	Počet bodů	Úspěšnost	Nejtěžší úloha
16. ČÍSELNÁ OSA	Práce s aritmeticko-algebraickými symboly	5	42 %	9
17. MAJÁK	Prostorová představivost, jednotky měření, čas	6	22 %	25
18. STEJNÝ JAKO VLASTNÍ POLOVINA?	Práce s aritmeticko-algebraickými symboly	6	34 %	8
19. OBVOD SEKERY	Prostorová představivost	6	44 %	15
20. OBSAH SEKERY	Prostorová představivost	6	24 %	20
21. MRAVENCI	Text, vztahy mezi informacemi, jednotky měření	6	72 %	
22. KRYCHLE	Prostorová představivost, jednotky	6	60 %	
23. PÁSEK	Čtení informací z obrázku, prostorová představivost	6	36 %	

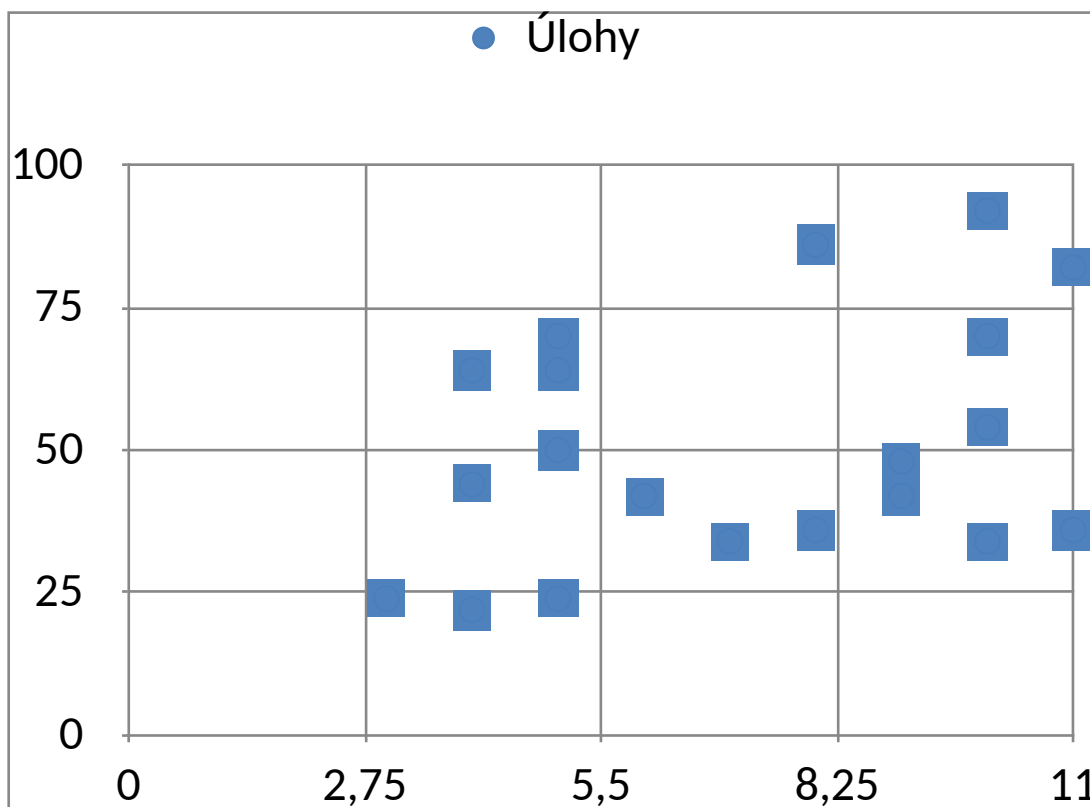
Průměrná úspěšnost úloh za 3 body je 75,5 % a byly označeny za těžké v průměru dvakrát. Průměrná úspěšnost úloh za 4 body je 56,3 % a byly označeny za těžké v průměru čtyřiapůlkrát. Průměrná úspěšnost úloh za 5 bodů je 42,3 % a byly označeny za těžké v průměru téměř jedenáctkrát. Průměrná úspěšnost úloh za 6 bodů je 41,7 % a byly označeny za těžké v průměru sedmnáctkrát.

Z průměrných úspěšností se tedy zdá, až na zanedbatelný rozdíl v úspěšnosti mezi úlohami za 5 a za 6 bodů, že úlohy jsou správně vybalancované a dobře bodově ohodnoceny. Data z dotazníku oblíbenosti tomu také odpovídají. Rozdíly v úspěšnosti však mohou být způsobené také tím, že úlohy jsou v zadání seřazené podle počtu bodů. Řešitel tedy jako první uvidí a bude řešit úlohy za 3 body, potom půjde na úlohy za 4 body a tak dále. K úlohám za nejvíce bodů se dostane až nakonec, takže mu na ně zbyde nejméně času, bude se častěji uchylovat k tipování. Rozdíly mezi počty označení úlohy za těžkou, lze částečně vysvětlit tím, že řešitelé viděli, jak jsou úlohy bodově hodnocené a tak jako

nejtěžší označili ty úlohy, které byly za nejvíce bodů. Také mohli označit jako těžké úlohy, které nestihli vyřešit.

2.2.3. Vztah mezi mírou úspěšnosti a oblíbeností úloh

Byly úlohy s nejvyšší mírou úspěšnosti také nejoblíbenější u řešitelů? Vyhodnotí řešitel úlohu jako zajímavou, pokud s ní neměl moc práce, nebo naopak, pokud musel k jejímu vyřešení překonat sám sebe? Možná spolu veličiny úspěšnost a oblíbenost úloh ani příliš nesouvisí a řešitel zohledňuje spíše matematickou strukturu úlohy, její zasazení do reálného kontextu nebo typ úlohy. Následující dvojrozměrný bodový graf ukazuje úlohy jako body v rovině, jejich souřadnice x je jejich oblíbenost, souřadnice y je jejich úspěšnost. Oblíbeností je myšlen počet řešitelů, kteří úlohu označili jako zajímavou. Pokud budou proměnné úspěšnost a oblíbenost na sobě závislé, měl by graf připomínat přímku.



Proměnné z grafu nevypadají příliš závislé, ale zkusme vypočítat Pearsonův korelační koeficient podle Hendla (2015), který vyjde přibližně 0,35. Korelační koeficient 0,35 podle Hendla spadá do střední síly asociace (ale je to blízko malé síly a daleko od velké síly). Můžeme tedy prohlásit, že vztah mezi úspěšností a oblíbeností úloh existuje, i když není

příliš silný. Platí tedy, že úlohy s vyšší úspěšností jsou oblíbenější. Mohou existovat ještě jiné vlastnosti úloh, které mají vliv na jejich oblibu?

2.2.4. Vztah mezi zaměřením úlohy a její mírou oblíbenosti a úspěšnosti

V této kapitole nás bude zajímat, zda má matematické zaměření úlohy vliv na její míru oblíbenosti a úspěšnosti. Tabulka 2.3 ukazuje jednotlivá zaměření úloh a jejich průměrnou míru úspěšnosti a oblíbenosti. Míru oblíbenosti chápeme jako počet řešitelů, kteří úlohu označili jako zajímavou.

Tabulka 2.3

Zaměření úlohy	Počet úloh s tímto zaměřením	Míra úspěšnosti	Míra oblíbenosti
Čtení inf. z obrázku	1	36 %	
Práce s aritmeticko-algebraickými symboly	3	43 %	9
Čtení z grafu/diagramu	4	68 %	9
Funkce, funkční myšlení	1	86 %	8
Podmínky v zadání	3	70 %	8
Text, vztahy mezi informacemi	8	62 %	7
Čas	4	54 %	7
Jednotky měření	8	56 %	7
Kombinatorika	1	34 %	7
Prostorová představivost	7	36 %	5

Nápadně málo úspěšné jsou úlohy se zaměřením na kombinatoriku, čtení z obrázku a prostorovou představivost. Čtení z obrázku a kombinatorika jsou však zastoupené pouze jednou úlohou, takže z toho lze těžko dělat nějaké závěry. Úlohy se zaměřením na prostorovou představivost jsou jak málo úspěšné, tak málo oblíbené. Úlohy zaměřené na práci s aritmeticko-algebraickými symboly jsou relativně málo úspěšné, ale míru oblíbenosti mají vysokou. Úlohy zaměřené na čtení z grafu/diagramu měly vysokou úspěšnost 68 % a zároveň byly hodně oblíbené.

Míry úspěšnosti a oblíbenosti se mezi jednotlivými zaměřeními úloh významně liší, z toho usuzují, že matematické zaměření úlohy má vliv na její míru úspěšnosti a oblíbenosti. Nicméně některá zaměření úloh byla zastoupena pouze malým počtem úloh, takže data o jejich míře úspěšnosti a oblíbenosti nemají velkou vypovídající hodnotu.

Závěr

Cíle práce byly naplněny. Analýza dat získaných od vedení matematické soutěže Pangea ukázala, že v devátých ročnících finále 2020

- 1) existuje střední asociace mezi mírou úspěšnosti a oblíbeností úloh
- 2) matematické zaměření úlohy má vliv na její míru úspěšnosti a oblíbenosti
- 3) chlapci byli úspěšnější než dívky
- 4) úlohy byly dobře bodově ohodnoceny

Tyto výsledky ale nelze zobecnit na všechny věkové kategorie. Dále by bylo zajímavé sledovat, zda jsou chlapci úspěšnější než dívky ve všech věkových kategoriích, zda existuje typ úloh, který statisticky více vyhovuje chlapcům resp. dívkám a jak se vyvíjí korelace mezi mírou úspěšnosti a oblíbeností úloh napříč různými věkovými kategoriemi. Mladším řešitelům bude pravděpodobně více záležet na tom, zda věděli jak úlohu vyřešit, pokud si s úlohou nevěděli rady, nejspíše ji neoznačí jako zajímavou, zatímco starší řešitelé budou schopni ocenit krásu úlohy, i když se jim nepodaří vyřešit. Také by bylo zajímavé zjistit, zda se míra oblíbenosti a úspěšnosti jednotlivých matematických zaměření vyvíjí s věkem řešitelů.

Některé úlohy měly velmi nízkou míru úspěšnosti, méně než 25 %. Byly to všechno planimetrické úlohy, čeští žáci mají obecně problémy s geometrickými úlohami. (Vondrová, Rendl a kol., 2015) Úlohy vyžadující prostorovou představivost se ukázaly jako nejnáročnější a všechny byly také oceněny minimálně pěti body.

Díky této práci jsem získal přehled o průběhu matematické soutěži Pangea a důležitosti matematických soutěží při rozvoji matematického talentu. Analýza úloh mi pomohla pochopit, jak se vytvářejí úlohy, jak formulovat způsob jejich řešení a jaká úskalí mohou nastat při těchto řešeních, což se mi bude nepochybně hodit v mé budoucí učitelské praxi.

Seznam použitých informačních zdrojů

- [1] HENDL, Jan. *Přehled statistických metod: analýza a metaanalýza dat. Páté, rozšířené vydání*. Praha: Portál, 2015, 734 stran : ilustrace, grafy, tabulky ; 22 cm. ISBN 978-80-262-0981-2
- [2] KASLOVÁ, Michaela. Komplexní aktivity jako motivační faktor talentů na 1. stupni ZŠ. In: ZHOUF, Jaroslav (ed.). *Ani jeden matematický talent nazmar 2017. Sborník příspěvků*. Praha: Nakladatelství Gaudeamus, 2018. ISBN 978-80-7435-710-7
- [3] KASLOVÁ, Michaela. Pangea v kontextu matematických soutěží. In: FUCHS, Eduard (ed.). *Jak učit matematice žáky ve věku 10-16 let: Sborník příspěvků celostátní konference 19.-21. 10. 2017 Litomyšl*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2018, s. 101-127. ISBN 978-80-7015-031-3
- [4] KASLOVÁ, Michaela. Talent na jazykové škole. In: ZHOUF, Jaroslav (ed.). *Ani jeden matematický talent nazmar. Sborník příspěvků*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2011, s. 50-68. ISBN 978-80-7290-507-2
- [5] MAREK, Anna. Matematická soutěž Pangea ve 4. ročníku 1. st. ZŠ - analýza řešení. Diplomová práce (Mgr.)--Univerzita Karlova. Pedagogická fakulta, 2017, 2017
- [6] NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2000, 123 s. ISBN 80-7290-011-0.
- [7] RENZULLI, Joseph S. What Makes Giftedness?: Reexamining a Definition. Phi Delta Kappan [online]. Los Angeles, CA: SAGE Publications, 2011, 92(8), 81-88 [cit. 2022-07-04]. ISSN 0031-7217. Dostupné z: doi:10.1177/003172171109200821
- [8] ŘÍČAN, Jaroslav. *Metakognice a metakognitivní strategie jako teoretické a výzkumné konstrukty a jejich využití v moderní pedagogické praxi*. Most: Hněvín, 2016. ISBN 978-80-86654-39-3.
- [9] TOOM, André. Word Problems: Applications or Mental Manipulatives. *For the learning of mathematics* [online]. FLM Publishing Association, 1999, 19(1), 36-38 [cit. 2022-07-06]. ISSN 0228-0671.

[10] VÁGNEROVÁ, Marie. *Kognitivní a sociální psychologie žáka základní školy*. Praha: Karolinum, 2001, 304 s. ISBN 80-246-0181-8.

[11] VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, 2015, 462 stran : ilustrace ; 24 cm. ISBN 978-80-246-3234-6.

Internetové zdroje:

www.pangeasoutez.cz

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

Seznam příloh

Příloha 1 – Ukázka dotazníku oblíbenosti

Soutěžní kategorie: **9**

2020

KÓD respondenta (Pangea kód): _____

Ahoj,

zajímá nás tvůj názor na finálové úlohy. Vezmi si k ruce sešitek s úlohami, aby sis je mohl při odpovídání připomenout. Svoji odpověď zaznamenej stejně jako v odpovědním listu před chvílí.

Číslo úlohy	Název úlohy	5 nejlehčích úloh	5 nejtěžších úloh	Všechny úlohy, které Tě zaujaly.	Úlohu jsem tipoval, neřešil jsem.
1	Vrtulník	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2	Radar	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3	Spěchej pomalu	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4	Podle pravidel	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5	Obliba televizních stanic	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6	Sociální síť	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7	Diagram	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8	Google poprvé	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9	Google podruhé	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10	Složený zlomek	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
11	Číslo tísňového volání	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
12	Trojúhelník BMW	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
13	Záchrané sbory	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
14	Návštěva zoo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
15	Hasičský žebřík	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
16	Číselná osa	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
17	Maják	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
18	Stejný jako vlastní polovina?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
19	Obvod sekery	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
20	Obsah sekery	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
21	Mravenci	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
22	Krychle	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
23	Pásek	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Vliv na hodnocení úspěchu to nemá.

Jaká témata bych chtěl(a) v dalších letech v úlohách?

Soutěž bych neměnil(a) / Doporučuji změny:

Děkujeme Ti za účast v soutěži i za odpovědi v tomto dotazníku, které nám pomohou soutěž Pangea nadále vylepšovat.

